DISEÑO DE TAREAS MEDIADAS POR TIC QUE PROMUEVAN EL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO EN ESTUDIANTES DE CUARTO CICLO

DORA MARIANA GARCÍA GARCÍA
MICHAEL YESID MARTÍNEZ LIZ

Trabajo de grado presentado como
requisito parcial para optar por el título de
Licenciado en Matemáticas

Asesor:
Mg. SANTIAGO CARDOZO FAJARDO
Prof. Departamento de Matemáticas UPN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2023

Dedicado

A mi mami, por apoyarme en cada momento de mi vida…

Agradecimientos

Agradezco a Dios, por permitirme cumplir mis sueños, porque sus planes siempre son perfectos y en cada obstáculo siempre hay algo que aprender.

Agradezco a mi familia (hermanos, sobrinas, papá, cuñadas, cuñado…), por el apoyo incondicional en este largo camino, por confiar en mi cuando ni yo lo hacía. Pero en especial, gracias a mi mami, por la complicidad, la compañía, la comprensión, el esfuerzo…Porque sin duda alguna este sueño es de las dos.

Gracias a mis hermanos y hermana por ser esos segundos papás, por estar siempre a mi lado.

Agradezco inmensamente al profe Santiago Cardozo, por haber aceptado ser nuestro asesor, por la paciencia, el tiempo, la dedicación, la comprensión y por la generosidad en todo el sentido de la palabra.

Gracias a mis amigos, Nicolas, Héctor, Valentina, Vivian y Michael por los momentos de risa, de diálogo y escucha…Gracias por coincidir.

Infinitas gracias a la Universidad Pedagógica Nacional por abrirme las puertas a un mundo de posibilidades; por ser el lugar en donde conocí a personas maravillosas.

Gracias a los profesores del Departamento de Matemáticas por ser un fiel ejemplo del amor a la profesión, por motivarme a ser mejor cada día, por contribuir en mi crecimiento personal y profesional.

Gracias a las directivas del Liceo Campestre "San Jorge" por su colaboración, por brindar los espacios y los tiempos necesarios para poder hacer la aplicación de las tareas de la mejor manera.

Gracias a los estudiantes que participaron de forma voluntaria en la aplicación de cada una de las tareas.

Y gracias nuevamente a Michael Martínez por aceptar realizar el trabajo de grado conmigo.

Mariana García

Agradecimientos

Agradezco a mi familia que siempre me ha acompañado en cada etapa de mi carrera.

A mis amigos que han logrado regalarme destellos de luz cuando más necesité reformular mi perspectiva, en particular a Isabel, Jhon, Luis y Mariana… que eventualmente, han sido la familia que escogí sabiamente.

Gracias al profesor Santiago Cardozo que con sus recomendaciones y entusiasmo frente a cada etapa de la propuesta no solo nos orientó sino nos impulsó a que llegara a buen término.

Gracias a todas y cada una de las personas que de alguna forma hicieron parte del cumplimiento de esta meta.

Y nuevamente gracias a Mariana García por aceptar realizar el trabajo de grado conmigo.

Michael Martínez

Tabla de Contenido

INTRODUCCIÓN

El presente documento es una Monografía de Trabajo de Grado para optar por el título de Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. En él se propone una serie de tareas mediadas por las Tecnologías de la Información y la Comunicación [TIC], que tienen como objetivo contribuir en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Teorema de Pitágoras. Estas tareas se fundamentan en la Teoría de Situaciones Didácticas, ya que buscan fomentar la construcción autónoma del conocimiento a partir de la interacción con un medio, fortaleciendo procesos como la visualización, conjeturación y argumentación, a través de las fases de una situación a-didáctica (acción, formulación, validación e institucionalización).

Dichas tareas se articulan con videos educativos que buscan hacer un acercamiento a la "institucionalización", permitiendo que el estudiante construya conocimiento a partir de la interacción con el medio; estas herramientas (Tareas y videos) se encuentran compiladas de forma ordenada en un Entorno Virtual de Aprendizaje [EVA], promoviendo el uso de las TIC en el proceso de enseñanza (diseño de tareas con una intención clara) y aprendizaje (construcción de conocimientos de forma autónoma).

La monografía se encuentra dividida en ocho capítulos. El primer capítulo presenta los objetivos planteados y contextualiza al lector en la problemática, referentes y situaciones que llevaron a los autores a realizar esta propuesta. El segundo capítulo sitúa el proyecto a la luz de la Teoría de las Situaciones Didácticas, describiendo que es una situación a-didáctica y sus fases. Además, se presenta la concepción de tarea que se tuvo en cuenta para la realización de estas, las TIC como herramienta en el proceso educativo, y los videos como instrumento para el acercamiento a la institucionalización.

Posteriormente, se encuentra el capítulo tres en donde se describen los aspectos matemáticos que se tuvieron en cuenta al diseñar cada una de las tareas y videos. Se incluyen diversas formas de enunciar el Teorema de Pitágoras, diferentes representaciones y demostraciones relacionadas con el Teorema de Pitágoras que se tuvieron presentes para el diseño las Tareas. A continuación, se encuentran la Metodología (Capítulo 4), en él se presentan las faces que se tuvieron en cuenta para la realización del análisis de la propuesta, así mismo la articulación que se encuentra entre ellas. Luego, se presenta el análisis preliminar (Capítulo 5) que indica los referentes curriculares, características sociales, emocionales y cognitivas de los estudiantes que pertenecen al ciclo cuatro de la educación media, los conocimientos previos que los estudiantes deben presentar para abordad cada tarea y los errores y dificultades que se pueden encontrar en el desarrollo de esta.

En el capítulo seis, se presenta de manera sistemática y detallada el análisis a priori de cada una de las tareas. Cada análisis está acompañado de los objetivos específicos para cada parte de la tarea y los conocimientos que se esperaban alcanzar. A continuación, se encuentra el capítulo siete, en el que se caracteriza a la población y se presenta la muestra tomada para la aplicación de cada una de las tareas. En el séptimo capítulo se presenta el análisis de actuación, es decir, se incluyen las evidencias del proceso realizado por los estudiantes. Finalmente, en el capítulo ocho, se presenta las conclusiones.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Justificación

Debido al inicio del confinamiento por cuenta del Covid-19, las dinámicas sociales cambiaron y entre ellas la educación, que al igual que muchas actividades se vio desplazada de una presencialidad cargada de bastantes intercambios de información gestual y corporal, a una virtualidad distante y en muchos casos desconocida.

De acuerdo con lo anterior, se identifica, no solo una dificultad, sino también una oportunidad para utilizar las TIC como herramienta para la educación en geometría, más específicamente en la enseñanza-aprendizaje del Teorema de Pitágoras; por tanto, en este documento se presenta de forma sistemática un EVA con el que se pretende que los estudiantes accedan a un conjunto de aplicativos, videos y tareas de aprendizaje[1] con las que les será posible reconocer propiedades asociadas al Teorema de Pitágoras.

Sin embargo, el EVA se concibe como mucho más que un simple recurso auxiliar para el docente; en este caso, adopta un rol más relevante debido a que es un entorno favorable de interacción entre el estudiante y el objeto de estudio; con esto se pretende que el estudiante construya conocimientos de manera progresiva, en relación con dichos objetos.

Además, se espera que la construcción del conocimiento sea autónoma por parte del estudiante, a partir de tareas, videos y herramientas desarrolladas por los autores de este trabajo. Por lo tanto, se tomará como enfoque principal la Teoría de Situaciones Didácticas propuesta por Guy Brousseau. De esta manera, mediante la realización de tareas, se busca promover en los

[1] De acuerdo con Vargas, Molina, Samper, Perry y Camargo (2022) es una acción (o acciones) por realizar, que el profesor propone a sus estudiantes con la intención de brindar oportunidades para que logren las expectativas de aprendizaje que ha establecido.

estudiantes el desarrollo de las tres fases que conforman una situación a-didáctica, - la acción, formulación y validación -, y con la ayuda de videos educativos, se busca contribuir en la fase de institucionalización.

Para el diseño de dichas tareas y videos, también se tomaron como referentes los documentos curriculares nacionales[2], los cuales ubican al Teorema de Pitágoras en el cuarto ciclo de la educación media, es decir, para los grados octavo y noveno; en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, la enseñanza-aprendizaje de dicho objeto matemático apunta al reconocimiento de propiedades y relaciones geométricas.

Adicionalmente, se tomó como referente el libro *Enseñando la Geometría con Tecnología Digital una propuesta desde la teoría de las situaciones didácticas,* realizado por Martín Acosta y Jorge Fiallo (2017), texto que se presentó como una contribución al proyecto nacional Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas, liderada naturalmente por el Ministerio de Educación Nacional. En dicho libro se resalta la importancia del uso de los Software de Geometría Dinámica en la enseñanza – aprendizaje de la geometría, pues el uso de estas herramientas promueve el equilibrio entre "*los dos polos de la actividad geometría"* (Acosta y Fiallo, 2017, pág. 18). De acuerdo con los autores, en la enseñanza y aprendizaje de la geometría el polo de la percepción e intuición es mutuamente independiente con el polo de la deducción teórica, pero la articulación entre estos dos polos hace que el proceso educativo sea aún más significativo, llevando al estudiante al mundo de la teoría, pero a partir de la percepción e intuición.

Así mismo los autores mencionan que el uso de Geometría Dinámica propicia la presentación de "objetos híbridos (a la vez perceptivos y teóricos) que permiten precisamente

[2]Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2003) y Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016).

establecer relaciones entre los dos polos" (Acosta y Fiallo, 2017. Pag, 21), determinando el equilibrio antes descrito, favoreciendo el análisis y la relación entre las propiedades de la figura o el objeto en cuestión y las implicaciones lógicas[3], para posteriormente realizar una adecuada construcción de conocimiento. En particular los autores plantean una serie de tareas a luz de la Teoría de las Situaciones Didácticas, con el fin de que los estudiantes a partir de la interacción con un medio construyan un conocimiento asociado a diferentes objetos matemáticos.

Otro referente a la hora de realizar la presente propuesta fue el trabajo hecho por Conde y Fontalvo (2019), pues ellos presentan una propuesta para la enseñanza y aprendizaje del Teorema de Pitágoras mediada por las TIC partiendo de la problemática del bajo rendimiento de los jóvenes latinoamericanos en las pruebas PISA y la evidencia que estas pruebas presentan falencias a la hora de analizar problemas matemáticos. Para estos autores, herramientas como GeoGebra posibilitan que los estudiantes construyan el conocimiento de forma más clara, permitiéndoles evidenciar de forma gráfica y dinámica propiedades y regularidades que el objeto geométrico presente, pues estas herramientas de geometría dinámica "muestran diferentes formas de concretizar esa abstracción de las matemáticas" (Conde y Fontalvo, 2019, pág. 267).

Otro referente fue la propuesta realizada por Rodríguez (2011), pues en esta se promueve para la enseñanza y aprendizaje del Teorema de Pitágoras el uso de las TIC como herramienta que contribuye con la aplicación de la metodología de autoaprendizaje que propone el colegio Liceo V. A. L, en donde el estudiante "es el actor principal en su proceso de enseñanza aprendizaje" (Rodríguez, 2011, pág. 302). Este autor afirma que el uso de las TIC motiva a los estudiantes para que sean actores dinámicos en su proceso académico, además facilita "la modificación de algunas

---

[3] …Propiedades que cumplen las figuras, pero que no fueron producidas directamente por procedimientos de construcción, conducen a desarrollar la idea de implicación lógica (Acosta y Fiallo, 2017).

de sus características –sin que ello altere las propiedades generales que tienen las figuras" (Rodríguez, 2011, pág. 302) contribuyendo a una adecuada caracterización del objeto matemático en cuestión.

1.2 Objetivo general

Contribuir en el fortalecimiento de los procesos de visualización, conjeturación y argumentación en estudiantes del ciclo cuatro de la educación media, a través de tareas sobre el Teorema de Pitágoras medidas por las TIC.

1.3 Objetivos específicos

- Diseñar un entorno virtual de aprendizaje orientado al Teorema de Pitágoras.
- Diseñar tareas en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas teniendo en cuenta el aprendizaje por adaptación propuesto en las situaciones a-didácticas.
- Diseñar tareas que contribuyan a la construcción del conocimiento a partir del paso por las tres etapas de una situación a-didáctica.
- Contribuir al proceso de institucionalización a partir de los videos educativos.

CAPÍTULO 2. REFERENTES CONCEPTUALES

En este apartado se encuentran los principales conceptos que permiten sustentar el presente trabajo de grado. Por tanto, se ha dividido en tres secciones, en primer lugar, se ubica la Teoría de Situaciones Didácticas en la que se mencionan las fases que la componen, además, se resalta la diferencia entre la situación didáctica, situación a-didáctica y situación no didáctica; luego se define el constructo *tarea de aprendizaje* y sus elementos; finalmente se presentan las tecnologías de la información y la comunicación en las que se mencionan las diferentes herramientas tecnológicas que se utilizaron durante el desarrollo de la propuesta aquí presentada.

2.1 LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

De acuerdo con Acosta, Monroy y Rueda (2010) la Teoría de la Situaciones Didácticas, propuesta por Brousseau, se divide en tres tipos de situaciones: la situación no didáctica, la situación didáctica y la situación a-didáctica. De acuerdo con la intención del presente trabajo de grado se expondrá en este capítulo lo relacionado con la Situación Didáctica y la Situación a-didáctica.

Situación didáctica:

Como se muestra en la figura 1 y de acuerdo con Acosta, Monroy y Rueda (2010) una situación didáctica es aquella que marca la relación entre profesor, estudiante y saber; en donde la labor del docente es propiciarle al estudiante las herramientas suficientes para que él construya su propio conocimiento a partir de la interacción con el objeto matemático[4]. Sin embargo, el rol del educador también se refiere a consolidar una aproximación acertada al saber sabio con base en el conocimiento adquirido por el educando; en este sentido, cobra importancia los conocimientos

[4] Como se mencionó con anterioridad, esta propuesta didáctica se centra en la enseñanza-aprendizaje del Teorema de Pitágoras

previos del estudiante, para así relacionarlos con el objeto matemático estudiado. De esta manera, se "fomenta la convergencia de los significados personales hacia los institucionales, es decir, la construcción de significado" (Camargo, Perry y Samper, 2020, pág. 98); es entonces cuando se considera que la situación es didáctica. En términos de Chevallard (1980) (citado en Alfaro y Chavarría 2012, pág. 156), se presenta la *triada didáctica*, la cual comprende la relación entre Docente, estudiante y saber; esta propuesta, en particular, se enfatiza en que el estudiante, por medio de la interacción con un entorno apropiado, logre construir su propio conocimiento.

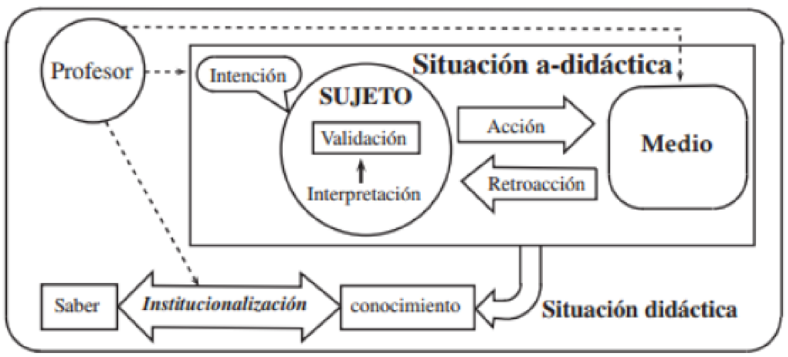


Figura 1: Relación entre situación didáctica y situación a-didáctica. Tomado de Acosta, Monroy y Rueda (2010)

Situación a-didáctica:

Hace referencia a la movilización de conocimientos intuitivos del estudiante sin la intervención explícita del educador; además, tiene el potencial de ofrecerle al estudiante elementos para que este reflexione sobre sus acciones y considere diferentes formas de razonar, estableciendo así una red de asimilaciones que se espera que culmine en el aprendizaje.

Se hace preciso afirmar que, así como lo muestra la figura 2, una situación a-didáctica es parte fundamental para que exista una situación didáctica, sin embargo, la situación a-didáctica puede surgir de forma independiente. De acuerdo con lo anterior, para la propuesta didáctica que aquí se presenta, se toma como referencia los elementos que conforman la situación a-didáctica.

Sin embargo, se pretende realizar al menos un acercamiento al proceso de institucionalización. En este sentido, de acuerdo con Vidal (2009) una situación didáctica se divide en cuatro momentos.

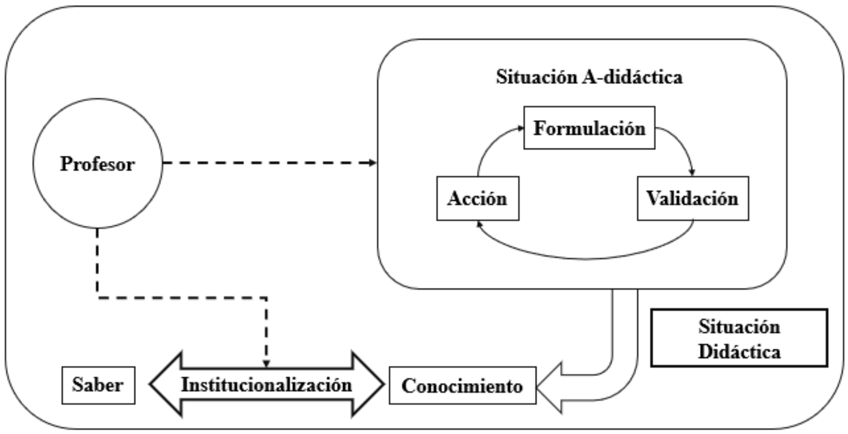


Figura 2: Relación entre Situación Didáctica y Situación A-didáctica

1. Acción, donde el estudiante interactúa con un entorno favorable para el aprendizaje. En esta fase se hace la puesta en escena de sus conocimientos implícitos.
2. Formulación, cuándo el estudiante debe manifestar explícitamente un mensaje.
3. Validación, es el proceso de construcción, en el que se verifican los resultados obtenidos.
4. Institucionalización, es quizá el momento más relevante del proceso ya que es la etapa en la que se establecen las conclusiones de los procesos y de los progresos desarrollados. Además, se llegan a acuerdos comunes construidos entre los estudiantes y el proceso de interacción realizada en los tres momentos anteriores.

La particularidad de que la interacción con el entorno favorable para el aprendizaje se desarrolle en los tres primeros momentos se debe al carácter autónomo del estudiante, donde se enfrenta a un escenario del cual obtiene retroacciones, lo que permite que él analice y reevalúe su procedimiento; en este sentido la situación a-didáctica está constituida por estos tres primeros momentos (acción, formulación y validación) debido a que el estudiante, de manera autónoma, es quien actúa en pro de adquirir ciertos conocimientos y determina en qué momento los ha construido. Por otro lado, el proceso de institucionalización se hace fuera de la situación a-didáctica, es decir, en esta etapa el papel del profesor cobra mayor importancia.

Fase de acción

Este momento ocurre dentro de la situación a-didáctica debido a que hace referencia al aprendizaje que el sujeto puede adquirir a partir de la interacción con un *medio*[5], en otras palabras, el estudiante adquiere conocimientos, ya que es el momento en que el estudiante "anticipar, establecer conexiones lógicas entre los datos e informaciones provistas por el medio" (Guerrero, Sánchez y Lurduy, 2006, pág. 601).

Es el momento para conjeturar, hipotetizar,

Por tanto, en esta fase uno de los elementos esenciales es el *medio* o entorno, ya que es todo aquello con lo que el estudiante interactúa; de acuerdo con Acosta, Monroy y Rueda (2010), el *medio* debe brindar las herramientas necesarias y suficientes para que el estudiante se relacione (analice, compare, organice, etc.), con el fin de reorganizar su esquema conceptual. Teniendo en cuenta la figura 3 el sujeto debe hacer una acción sobre el *medio*; con el fin de que este realice una retroacción a partir de la exploración del estudiante, para que posteriormente el aprendiz realice una validación positiva o negativa de su actuar. En otras palabras, la fase de acción se refiere a una serie de interacciones que el sujeto hace con el *medio* donde se propicie la construcción constante de su conocimiento.

[5] Escenario favorable de aprendizaje

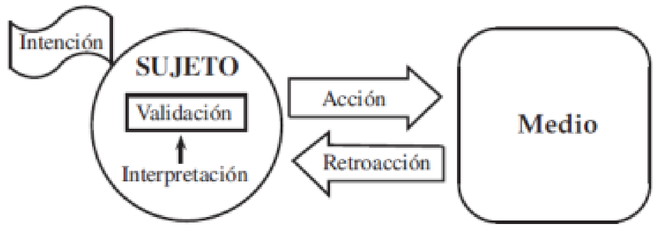


Figura 3: Aprendizaje por adaptación. Tomado de Acosta, Monroy y Rueda (2010)

Fase de formulación

En palabras de Barreiro et al. (2012) la etapa de formulación es aquella en donde el estudiante construye conjeturas con base en las acciones realizadas sobre el *medio*. Se considera que esta fase es el puente entre la acción y la validación, además se espera que el estudiante realice más de una formulación que dependa de las acciones realizadas, las retroacciones recibidas y las validaciones producidas, cumpliéndose así un ciclo que se espera que finalice cuando el estudiante construya una conjetura que en su medida presente las características, regularidades y propiedades que el objeto o la construcción debe tener de acuerdo con el enunciado de la tarea.

Según Barreiro et al. (2012) la comunicación entre al menos dos estudiantes es importante para que esta fase se cumpla, en dicha interacción se espera que ellos comparen o transmitan su afirmación teniendo en cuenta una misma situación en aras de que "modifiquen, reelaboren y creen un lenguaje." (Barreiro et al. 2012, pág. 9), es decir, que a partir de los conocimientos de cada estudiante se articulen y creen un puente más sólido para llegar así al saber.

Sin embargo, es importante mencionar que la Teoría de Situaciones Didácticas pretende fortalecer el trabajo autónomo y el aprendizaje significativo; si bien la cooperación entre los estudiantes puede significar un valor agregado para el desarrollo de la fase de formulación, es posible afirmar que dicha etapa se puede llevar a cabo de manera individual.

Fase de validación

Como se muestra en la figura 3, la validación positiva o negativa es un proceso que hace el estudiante al recibir una retroacción del *medio*. Atendiendo a lo que dice Acosta, Hoyos y Rueda (2010) si la acción que el estudiante realiza sobre el *medio* no está de acuerdo con lo esperado, entonces se produce una validación negativa y en este caso el sujeto debe identificar, interpretar y analizar el fallo o error, para posteriormente modificar su acción, y así ocurra una validación positiva. Es decir, si la validación es negativa se debe repetir el ciclo que se muestra en la figura 3 hasta que ocurra una validación positiva; si la validación es positiva es posible repetir el ciclo con el fin de reforzar la acción. En este sentido, de acuerdo con Santos (2016, pág. 19) "el cambio de acción cuando la validación es negativa y el refuerzo de la acción cuando la validación es positiva" es una evidencia clara de aprendizaje por parte del estudiante.

Cuando ocurre el ciclo antes descrito, es posible decir que el estudiante aprende por adaptación, ya que este aprendizaje es precisamente el producto de la interacción que hace el escolar con el *medio* (figura 3). En otras palabras, existe aprendizaje por adaptación cuando el estudiante valida de manera positiva o negativa su acción de acuerdo con la retroacción del *medio*.

Fase de institucionalización

"Según la Teoría de las Situaciones Didácticas, el conocimiento es diferente del saber" (Acosta 2010, citado Santos, 2016, pág. 20). Ya que el conocimiento es individual y contextualizado, ya que se produce a partir de la interacción del estudiante con el *medio*, lo cual produce interrogantes para el sujeto y dicho conocimiento se configura como respuesta a esos interrogantes; este conocimiento se produce o articula durante la situación a-didáctica donde el estudiante se adapta al *medio*, para que luego de hacer el ciclo antes descrito (acción, formulación y validación) determine sus conclusiones. Por otro lado, el saber es general y descontextualizado;

en este sentido, al terminar la situación a-didáctica la función del profesor es, partir de las conclusiones o el conocimiento del estudiante, articularlo con el saber matemático que desea enseñar; a esta relación entre el conocimiento construido por el estudiante y el saber se le llama institucionalización y requiere la comunicación entre el estudiante y el profesor.

2.2 TAREAS DE APRENDIZAJE

De acuerdo Vargas, Molina, Samper, Perry y Camargo (2022) una tarea es una propuesta de acciones realizada por el profesor para otórgales a los estudiantes la posibilidad de alcanzar las expectativas de aprendizaje establecida. Por otro lado, Gómez (2018) afirma que una tarea debe presentar siete elementos; estos son: los ***requisitos*** que se refieren a los conocimientos previos que el estudiante debe tener para abordar la tarea; las ***metas***, establecidas como los conocimientos y destrezas que se esperan desarrollar a partir de la tarea; el ***enunciado***, entendido como la instrucción de la tarea para su realización; los ***materiales y recursos*** que son las herramientas utilizadas para abordar la tarea en cuestión; el ***agrupamiento*** que alude a la forma de organizar los estudiantes para el desarrollo de la tarea; la ***interacción***, que representa la comunicación que se establece entre estudiantes y profesor - estudiante; finalmente se encuentra la ***temporalidad***, que es el tiempo y los momentos de cada tarea.

2.3 LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN

De acuerdo con el Ministerio de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones, [MINTIC], las TIC son todas aquellas tecnologías que permiten al ser humano acceder, producir, guardar, presentar y mostrar información. Estas tecnologías son, por ejemplo, computadores, celulares, radios, consolas de videojuegos, internet, entre otras. Es por eso, que de acuerdo con Palomo, Ruiz y Sánchez (2006), las TIC son agentes de innovación educativa porque permiten una interacción más activa y constante entre los estudiantes y el saber; ofreciéndoles a los primeros nuevas formas de encontrar mejor contenido y procedimientos y, además fomenta la toma de decisiones en cuanto la selección y uso de la información, permitiendo que el proceso de enseñanza y aprendizaje sea diferente e innovador.

De acuerdo con Gómez (1997) “la tecnología no es la solución a los problemas de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, hay indicios de que ella se convertirá paulatinamente en un agente catalizador del proceso de cambio en la educación matemática” (Pág. 13), y si se tiene en cuenta la situación actual del mundo, la vinculación de la tecnología con la educación es cada vez mayor, pues las nuevas generaciones son consideradas como “nativos digitales”, es decir, se les facilita el manejo de estas tecnologías y si a esto se le suma la situación de emergencia sanitaria por la que el mundo acaba de pasar es posible afirmar que la educación y la tecnología cada día se ligan aún más; lo cual convierte a las TIC en una gran herramienta y aliada para el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Ahora, hablando de las matemáticas, área tradicionalmente considerada como aburrida y difícil, el uso de las TIC le otorga dinamismo, debido al gran potencial gráfico y numérico que concede diferentes softwares académicos, convirtiendo la tecnología “en un elemento fundamental de los currículos de matemáticas” (Arias, Maza y Sáenz, 2002, pág. 29).

Los entornos virtuales de aprendizaje como medio

De acuerdo con Gros, 2002 (citado en Silva, 2011), un Entorno Virtual de Aprendizaje [EVA] se refiere a cualquier "material informático de enseñanza-aprendizaje basado en un sistema de comunicación mediado por un ordenador" (Pág. 142). En un EVA, se promueve la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes, permitiéndoles convertirse en sujetos activos en su proceso educativo, a diferencia de la educación tradicional que se basa en la transmisión de conocimientos. Además, el uso de un EVA contribuye a fortalecer procesos como la visualización, conjeturación, argumentación, entre otros, en el proceso de aprendizaje del estudiante.

El presente proyecto no solo le apunta al aprendizaje autónomo por parte del estudiante, sino a la utilización apropiada de las TIC como herramienta necesaria en el proceso educativo; para ello es de vital importancia señal la relación entre el uso de las TIC (herramienta fundamental en el diseño de las tareas y videos) y el EVA (escenario donde se articulan los instrumentos construidos), pues un EVA debe estar nutrido de herramientas concretas que puedan contribuir con el proceso de enseñanza y aprendizaje; para este caso en específico tareas y videos, los cuales fueron diseñados haciendo uso de las TIC.

Con la premisa de que la educación no debe estar centrada en la acumulación y transmisión de saberes sino en la articulación de conocimientos para construir significado, y que las herramientas virtuales representan un vehículo para ello, en este proyecto se presenta un EVA ya que de acuerdo con Hiraldo (2013) los Entornos Virtuales de Aprendizaje cuentan con los elementos necesarios y suficientes para cumplir dicha premisa, estos elementos son:

Infraestructura: es el espacio virtual el cual debe diseñarse de forma que propicien un aprendizaje significativo a través de secuencias de tareas que garanticen el éxito de este. En este proyecto el espacio virtual se presenta a partir de una página web en la que se encuentran las tareas y videos correspondientes al Teorema de Pitágoras.

El Currículo: este elemento se refiere a los contenidos disciplinares que se tratarán a lo largo de la propuesta; para este caso en específico el objeto matemático que se tomó como eje focal es el Teorema de Pitágoras.

Recursos de aprendizaje: son los materiales didácticos en los distintos formatos, en este caso son "elementos tecnológicos que soportan los contenidos a tratar en el proceso de formación del estudiante" (Hiraldo, 2013, pág. 5); vale la pena puntualizar que los recursos deben ir sujetos a las estrategias de aprendizaje planteados.

La Comunicación: En la educación uno de los elementos fundamentales es la comunicación Docente – estudiante y estudiante – estudiante; naturalmente, los entornos virtuales de aprendizaje no son la excepción, para ello, es indispensable crear mecanismos de comunicación inmersos en las herramientas y aplicativos diseñados. En este sentido, los canales de comunicación docente – estudiante que se pretenden entablar en esta propuesta son a partir de las preguntas que ofrezca el *medio,* las acciones que realice el estudiante y las retroacciones que el *medio* otorgue, además de videos realizados por los autores del proyecto.

Los entornos de geometría dinámica como instrumento para la educación

Gutiérrez y Boero (2006) afirman que los Entorno de Geometría Dinámica [EGD] han creado nuevas formas de ofrecer la realización de actividades geométricas en Educación Matemática; abordando tres aspectos en particular: la naturaleza de la geometría mediada por la tecnología (la importancia de la función arrastre), el diseño de tareas y el aprendizaje de la geometría (para este caso en específico *medio*) y el uso de las TIC en la enseñanza de la geometría (para esta propuesta el uso de la tecnología se compila en un EVA).

El uso de EGD como instrumento para la enseñanza - aprendizaje, permite que los estudiantes realicen una construcción de conocimiento de manera más acertada, ya que de acuerdo con Hattermann, 2010 (citado en Manrique y Medina, 2017) este tipo de programas cuentan con tres herramientas esenciales "el modo arrastre, la función lugar geométrico y la capacidad de construir macros" (pág.49). En este sentido, es posible decir que este software contribuye a que la enseñanza de la geometría se desligue de la educación tradicional, permitiendo que los estudiantes identifiquen de mejor manera propiedades y regularidades de los objetos geométricos de estudio.

Para esta propuesta la herramienta central es el modo arrastre, debido a que permite darle movimiento a figuras que tradicionalmente son tratadas como objetos estáticos, lo cual promueve la interacción de los estudiantes con las figuras, acercando "los contenidos geométricos a los estudiantes y mejorando su compresión a la hora de resolver problemas, introducir, aprender y relacionar conceptos" (Salim. 2013, pág. 18), además, este entorno contribuye a que los estudiantes establezcan propiedades, analicen, visualicen, creen conjeturas y produzcan argumentos.

Procesos que se esperan fortalecer con el EGD

Como se mencionó anteriormente, para la construcción del conocimiento por parte del estudiante es necesario que el docente cree y facilite instrumentos en pro de desarrollar o fortalecer procesos como la visualización, conjeturación y argumentación; procesos en los cuales se centra esta propuesta didáctica.

Visualización

En primer lugar, los entornos de geometría dinámica ofrecen la posibilidad de fomentar la visualización en los estudiantes, pues las propiedades de los objetos de estudio "aparecen como invariantes cuando se someten al arrastre" (Laborde, 1993, citado en Santos, 2016, pág. 17); esta interacción que el estudiante hace con el *medio,* que en este caso es el EGD, permite que él identifique diferentes imágenes mentales; esta propuesta apunta a que el sujeto visualice "imágenes cinéticas[6] e imágenes dinámicas[7]" (Presmeg, 1986, citado en Gutiérrez, 1991, pág. 160). Además, según Bishop (1989), citado en Gutiérrez (1991), este tipo de imágenes se manipulan de acuerdo con el proceso de interpretación de información figurativa[8]; por tanto, el compendio de lo anterior permite desarrollar en el estudiante habilidades como coordinación motriz de los ojos, conservación de la percepción, discriminación y memoria visual.

Conjeturación

De acuerdo con Samper et al (2013) una conjetura es la formulación de un enunciado hipotético de carácter general; proceso que también se espera fortalecer en los estudiantes a partir del desarrollo de las tareas aquí propuestas, para que se genere dicho enunciado se debe realizar primero el análisis, exploración, visualización y verificación del objeto geométrico en cuestión. Por tanto, se espera que el producto de este proceso sea que el estudiante, a partir de la interacción que haga con el *medio,* reconozca las características, propiedades y relaciones del o los objetos geométricos evidenciados.

Argumentación

"Un esquema de argumentación es el razonamiento que un individuo utiliza cuando explica, justifica o valida un resultado o conjetura" (Flores, Gómez y Flores, 2010, pág. 1); en este sentido, existen diferentes esquemas argumentativos, en particular para esta propuesta se espera que los estudiantes empleen uno analítico, debido a que, de acuerdo con Flores, Gómez y Flores, (2010), un esquema analítico es aquel en el que el sujeto sigue una cadena deductiva, sin llegar necesariamente a una conclusión valida.

---

[6] Imágenes en parte físicas y en parte mentales, ya que el movimiento del estudiante cumple un papel importante para identificación de estas (Gutiérrez, 1991).
[7] En este caso, lo que se mueve es la imagen o algún elemento que pertenezca a esta (Gutiérrez, 1991)
[8] Es el proceso donde se interpretan las figuras y se extrae la información que estas otorgan (Gutiérrez, 1991)

Es decir, el estudiante parte de una conjetura propia o definición aprendida con anterioridad e interactúa con el *medio,* determinando así, a parir de la exploración algunas "regularidades o patrones que le expliquen el porqué de su conjetura" Flores, 2007 (Citado Flores, Gómez y Flores, 2010, pág. 7) validándola de manera positiva o negativa según sea el caso.

Cabe resaltar que los tres procesos mencionados anteriormente (visualización, conjeturación y argumentación) están presentes, al menos, en las tres primeras fases de la situación didáctica, pues la etapa de la acción está estrictamente relacionada con la exploración que el estudiante realice sobre el *medio,* identificando las regularidades y propiedades del objeto geométrico, esto se refiere a la visualización; por otro lado, la conjeturación está relacionada con la fase de formulación, pues es cuando se expresa un enunciado de acuerdo con la exploración que se realizó previamente; ahora, como Se mencionó anteriormente, el proceso de argumentación necesita de la validación positiva o negativa que el estudiante determine ante cada deducción.

En este sentido, como el estudiante puede realizar estas tres fases (acción, formulación y validación) cuantas veces crea necesario y los procesos de validación, conjeturación y argumentación están vinculados directamente con estas etapas, es posible afirmar que el aprendiz fortalece o desarrolla dichos procesos a lo largo del cumplimiento de la tarea.

2.4 VIDEOS COMO HERRAMIENTA EN EL PROCESO EDUCATIVO

El video como herramienta para la enseñanza permite acompañar al estudiante en todo el proceso educativo "como medio de observación, medio de expresión, de autoaprendizaje y como ayuda a la enseñanza" (López y González, 2016, pág. 1). Para esta propuesta en específico se espera que los videos contribuyan a la enseñanza de la geometría y sean un medio de autoaprendizaje.

Como se mencionó con anterioridad, la comunicación es fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje; y esta propuesta didáctica no es la excepción, si bien los protagonistas en una situación a-didáctica son el estudiante y la interacción que haga este con un *medio*, en este caso virtual, la comunicación que el docente establezca de alguna manera con el aprendiz es imperativa para el proceso de institucionalización (situación didáctica), es aquí donde el *video didáctico o educativo*s esencial, pues "es un medio de comunicación, cuya secuencia induce al receptor a sintetizar sentimientos, ideas, conocimientos, etc. que pueden reforzar o modificar los que se tiene previamente" (Salas, s.f. Citado en López, 2016, 17); en este sentido se espera que el emisor (docente) le brinde al receptor (estudiante) las herramientas suficientes para que este último construya significado; pues este tipo de videos "proponen potenciar la enseñanza-aprendizaje con miras al incremento de conocimientos y al desarrollo de habilidades y destrezas en diversos aspectos de la promoción humana" (López, 2016).

Como lo expresa Suarez y Zubieta (2022) cuando se habla de videos educativos, estos se clasifican en dos tipos de acuerdo con su intención, de interés público y de interés académico; a su vez estos últimos se tipifican en dos, de carácter curricular y no curricular; finalmente los videos educativos de interés académico no curricular se dividen en dos, científico-técnico y del área de conocimiento.

Para efectos de este trabajo de grado los videos que se realizaron como apoyo al proceso de institucionalización pertenecen a la última clasificación, es decir, son videos educativos de interés académico de carácter no curricular que pertenecen a un área del conocimiento. Además, Suárez y Zubieta (2022) utilizan algunas categorías para determinar la idoneidad de videos educativos correspondiente al Teorema de Pitágoras, dichos componentes son lenguaje, reglas y argumentos; al mismo tiempo, mencionan algunos indicadores asociados a dichos componentes;

en esta monografía se consideraron los siguientes componentes y se enuncian los indicadores que se tuvieron en cuenta para la realización de los videos.

Lenguaje

L2. Usa adecuadamente diferentes tipos de representaciones no solo graficas sino verbales, escritas, numéricas, simbólicas matemáticas y geométricas.

L3. Usa una adecuada expresión verbal y escrita, es decir, debe haber una constante correspondencia entre lo que se dice (significado del teorema) y las expresiones que se usan.

Reglas

R1. Enuncia adecuadamente el Teorema de Pitágoras.

R2. Presenta adecuadamente el Teorema de Pitágoras de acuerdo con su forma de enunciar (como áreas de superficie de cuadrados o como una relación entre medidas de lados de un triángulo).

R4. Formula adecuadamente las definiciones de objetos claves relacionados.

R5. Usa adecuadamente definiciones.

R6. Formula adecuadamente las proposiciones involucradas.

R7. Usa adecuadamente proposiciones matemáticas.

R8. Enuncia un procedimiento de manera explícita.

R9. Presenta de manera explícita acciones que vislumbran un procedimiento.

Argumentos

A1. Presenta argumentos mediante los cuales se sustenta el Teorema de Pitágoras.

A2. Se explicitan las garantías que sustentan aserciones en el marco de una prueba del Teorema de Pitágoras.

A3. Alude adecuadamente a diferentes tipos de argumentos.

CAPÍTULO 3. REFERENTES MATEMÁTICOS

En este capítulo, se presentan, en primera instancia, algunas formas de enunciar el Teorema de Pitágoras, así como las diferentes representaciones que se derivan de estos enunciados. La sección finaliza con las distintas demostraciones que se consideraron para la construcción de cada una de las tareas.

El Teorema de Pitágoras se puede enunciar a partir de dos aproximaciones: como una relación entre áreas de superficie de cuadrados – *El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es equivalente a la suma de las áreas de los cuadrados descritos sobre los lados restantes del mismo triangulo* – (García, s.f, pág. 1) o se puede presentar como la relación entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo – *en un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa* – (García, s.f, pág. 1).

3.2 Representaciones del Teorema de Pitágoras

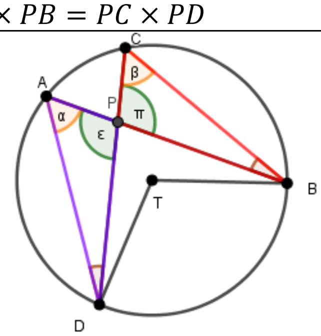
De acuerdo con la propuesta de (Torres, 2017) el Teorema de Pitágoras se puede representar a partir de cuatro categorías: *verbal, Gráfica estática – Simbólica, Gráfica dinámica, material concreto y numérica*. Se hace preciso aclarar que la representación numérica está directamente relacionada con el enunciado que se refiere a la relación entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

De acuerdo con lo que expone Suarez y Zubieta (2022), por un lado, la representación *verbal* se refiere al enunciado del Teorema, este se puede presentar de forma escrita u oral. La representación *Gráfica Estática – Simbólica* se refiere a toda representación en la que se encuentra un esquema estático, es decir, un dibujo; dicha gráfica le brinda al estudiante información relevante que contribuya en la construcción del enunciado. También se encuentra la representación *Gráfica Dinámica,* la cual se puede utilizar como apoyo en el proceso de justificación ya que facilita los procesos de visualización, construcción y arrastre de objetos. Finalmente, se encuentra la representación a partir de *Material Concreto,* en esta el estudiante manipula uno o varios objetos concretos (fichas, regletas, piezas de un rompecabezas, etc.).

3.3 Demostraciones utilizadas en las tareas

A continuación, se encuentran las demostraciones de algunos Hechos Geométricos que se tuvieron en cuenta para realizar cada una de las tareas, cabe aclarar que varias de ellas parten de una misma demostración. Además, para este proyecto de grado las representaciones en las que se apoyan el diseño de las tareas es la representación *gráfica dinámica*.

Tabla 1: Demostraciones tomadas en cuenta para el diseño de cada Tarea

<table>
<tr><th>Nombre de la demostración</th><th>Demostración</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Potencia de un punto respecto a una circunferencia</td><td>La siguiente demostración es utilizada en la primera y segunda tarea, pero para que esta se vea directamente relacionada con el Teorema de Pitágoras se vale de las propiedades métricas de la circunferencia y la correlación que esta demostración puede tener con las áreas de dos cuadriláteros, relacionando así cada segmento $(PA, PB, PC \ y \ PD)$ con un lado de un cuadrilátero.</td></tr>
<tr><td>Caso 1: Si el punto P se encuentra en el interior de la circunferencia
Enunciado: Si dos cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de $\odot T_{TD}$, se intersecan en un punto P entonces $PA \times PB = PC \times PD$</td></tr>
<tr><td>
Figura 4: Caso 1 Potencia de un punto respecto a una circunferencia, si P se encuentra en el interior
<table><tr><th colspan="2">Aserción</th><th>Garantía</th></tr><tr><td>1</td><td>$P \in int \odot T_{TD}$</td><td>Dado</td></tr></table></td></tr>
</table>

	$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas de $\odot T_{TD} P \in \overline{AB} \cap \overline{CD}$	
2	$\triangle APD$ y $\triangle CPB$	Def. Triángulo (1)
3	$\angle APD \cong \angle CPB$	Def. Opuestos por el vértice (1,2)
4	$\angle BAD$ y $\angle DCB$ Subtendidos	Def. Ángulos subtendidos[9] (1 y 2)
5	$m\angle BAD = \frac{m\angle DTB}{2}$ $m\angle DCB = \frac{m\angle DTB}{2}$	T. Ángulos subtendidos[10] (4)
6	$m\angle BAD = m\angle DCB$	Transitividad (5)
7	$\angle BAD \cong \angle DCB$	Def. Congruencia (6)
8	$\triangle CPB \sim \triangle APD$	Criterio AA (3 y7)
9	$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$	Def. Triángulos semejantes (8)
10	$PA \times PB = PC \times PD$	Propiedad de los $\mathbb{R}$ (9)

Caso 2: Ahora si P se encuentra en el exterior de la circunferencia

Enunciado: Si $P \in \overleftrightarrow{DA} \cap \overleftrightarrow{BC}$ y $P \in Ext \odot T_{TD}$ entonces $PA \times PB = PC \times PD$.

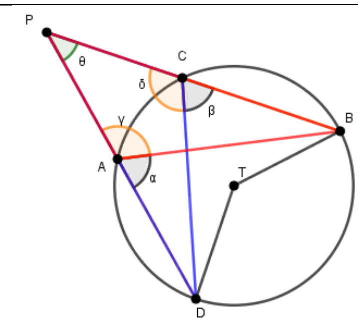


Figura 5: Caso 2 Potencia de un punto respecto a una circunferencia, si P se encuentra en el exterior

Aserción		Garantía
1	$P \in \overleftrightarrow{DA} \cap \overleftrightarrow{BC}$ $P \in Ext \odot T_{TD}$	Dado
2	$\triangle PBA$ y $\triangle PDC$	Def. Triángulo (1)
3	$\angle BPD \cong \angle DPB$	Def. Ángulo (2)
4	$\angle BAD$ y $\angle DCB$ ángulos subtendidos	Def. Ángulos subtendidos (1)
5	$\angle BAD \cong \angle DCB$	T. Potencia de un punto respecto a una circunferencia **Caso 1** (4)
6	$m\angle PCD = 180° - m\angle BCD$ $m\angle PAB = 180° - m\angle DAB$	Par lineal Suplementarios (2 y 5)
7	$m\angle PAB = m\angle PCD$	Transitividad (7)

---

[9] El $\angle ABC$ es subtendido por el $\widehat{AC}$ si $A \in \overrightarrow{BA}$ y $C \in \overrightarrow{BC}$

[10] Si $\angle ABC$ y $\angle AEC$ son subtendidos en el $\widehat{AC}$ y T centro de la circunferencia, entonces $m\angle ABC = \frac{m\angle ATC}{2}$ y $m\angle AEC = \frac{m\angle ATC}{2}$

8	$\angle PAB \cong \angle PCD$	Def. Ángulos congruentes (8)
9	$\triangle PBA \sim \triangle PDC$	Criterio AA (3 y 8)
10	$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$	Def. Triángulos semejantes (9)
11	$PA \times PB = PC \times PD$	Propiedad de los $\mathbb{R}$ (10)

Comparación de Áreas

Esta demostración es basada en la presentada por Euclides en su primer libro. Sin embargo, esta misma justificación del Teorema de Pitágoras presenta bastantes variaciones; como las presentadas en la tercera y cuarta tarea.

Para expresar las áreas de cada polígono mencionado en la demostración se utilizará las letras que lo limitan en un paréntesis.

Ejemplo: Área del $\boxdot\ FGCB = (FGCB)$

Enunciado: Sea ΔCAB con $\angle BCA$ recto, entonces el área del cuadrado sobre $\overline{BA}$ es igual a la suma de las áreas de los cuadrados sobre $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$

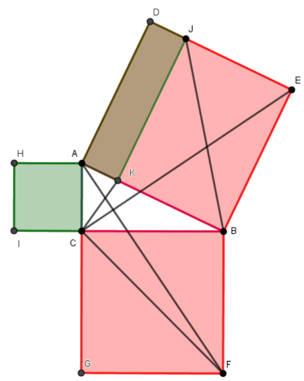


Figura 6: Teorema de Pitágoras a partir de la comparación de áreas

	Aserción	Garantía
1	ΔCAB con $\angle BCA$ recto $\boxdot\ FGCB$, $\boxdot\ ACIH$ y $\boxdot\ BADE$	Dado
2	$\Delta BJE, \Delta BEC, \Delta BAF$ y ΔBCF	Def. Triángulo (1)
3	$(FKJE) = 2(BJE) = 2(BEC) = 2(BAF)$ $= 2(BCF) = (BCGF)$	Propiedad $\mathbb{R}$ (1 y 2)
4	$(AKJD) = (ACIH)$	Propiedad $\mathbb{R}$ (1 y 2)
5	$(ABED) = (BKJE) + (AKJD)$ $= (BCGF) + (ACIH)$	Propiedad $\mathbb{R}$ (3 y 4)

Reciproco del Teorema de Pitágoras

A partir de la siguiente demostración se determinó la quinta tarea

Enunciado: Si en un triángulo, el cuadrado de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados que se encuentran sobre los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo.

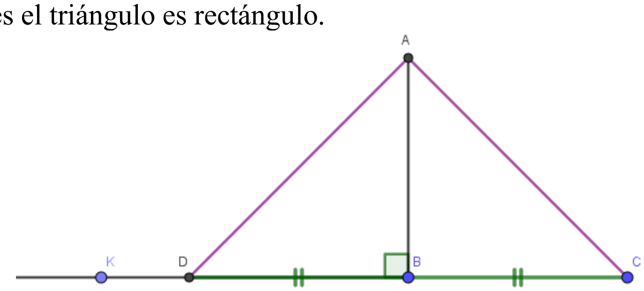


Figura 7: Reciproco del Teorema de Pitágoras

		Aserción	Garantía
	1	ΔABC $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$	Dado
	2	$\overleftrightarrow{AB}$	Definición de triángulo (1) Teorema recta-rayo-segmento (1)
	3	$\delta_{\overleftrightarrow{AB},C}$ y $\delta_{\overleftrightarrow{AB},\sim C}$	Postulado separación del plano (1), (2)
	4	$m \perp \overleftrightarrow{AB}$ por B	Teorema recta perpendicular por punto interno (2)
	5	$K \in m, K \in \delta_{\overleftrightarrow{AB},\sim C}$	Teorema recta infinitos puntos (4) Teorema puntos distintos semiplanos (3)
	6	$\overrightarrow{BK}$	Teorema recta rayo segmento (4)
	7	$D \in \overrightarrow{BK}, BD = BC$	TLP (6), (1)
	8	ΔABD	Definición de triángulo (1), (7)
	9	$(AB)^2 + (BD)^2 = (AD)^2$	Teorema de Pitágoras (8), (4)
	10	$(AB)^2 + (BC)^2 = (AD)^2$	Principio de sustitución (7), (9)
	11	$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 = (AD)^2$ $(AC)^2 = (AD)^2$	Transitividad de la igualdad (1), (10)
	12	$AC = AD$	Propiedades de $\mathbb{R}$ (11)
	13	$\Delta ABC \cong \Delta ABD$	Teorema LLL (1), (8), (7), (12)
	14	$\angle ABD \cong \angle ABC$	Definición de congruencia de triángulos (13)
	15	$m\angle ABD = m\angle ABC$	Definición de congruencia (14)

<table>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><td>16</td><td>$90º = m\angle ABD$</td><td>Definición. rectas perpendiculares (4)
Definición ángulo recto (4)</td></tr>
<tr><td>17</td><td>$90º = m\angle ABC$</td><td>Principio de sustitución (15), (16)</td></tr>
<tr><td>18</td><td>ΔABC es rectángulo</td><td>Definición de triangulo rectángulo (1), (17)</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Relación de semejanza entre triángulos rectángulos</td><td>
La siguiente demostración es inspirada en la realizada por Lagrange. Esta justificación se utiliza para la quinta tarea.

Enunciado: Si $\triangle ACB$ es rectángulo con $\angle ACB$ recto, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ y $D \in \overline{AB}$ entonces $c^2 = a^2 + b^2$

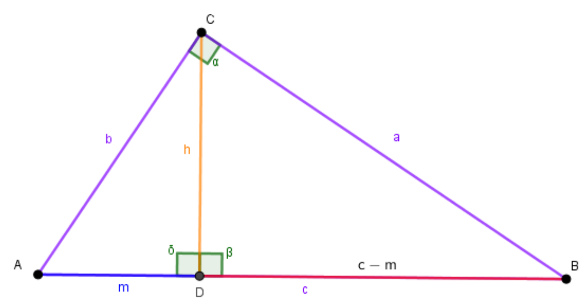


Figura 8: Teorema de Pitágoras a partir de la relación de semejanza entre triángulos rectángulos

<table>
<tr><th colspan="2">Aserción</th><th>Garantía</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$\triangle ACB$ es rectángulo con
$\angle ACB$ recto
$\overline{CD} \perp \overline{AB}$
$D \in \overline{AB}$</td><td>Dado</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\triangle CDA$ y $\triangle CDB$</td><td>Def. Triángulo (1)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\angle CDA$ y $\angle CDB$ rectos</td><td>Def. Perpendicularidad (1)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\angle CAB \cong \angle CAD$
$\angle CBA \cong \angle CBD$</td><td>Def. Ángulos congruentes (1 y 2)</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\triangle ACB \sim \triangle ADC$
$\triangle ACB \sim \triangle CDB$</td><td>Criterio AA (1, 3 y 4)</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$\triangle ACB \sim \triangle ADC \sim \triangle CDB$</td><td>Transitividad (5)</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$\frac{m}{b} = \frac{b}{c}$
$\frac{c-m}{a} = \frac{a}{c}$</td><td>Def. triángulos semejantes (6)</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$mc = b^2$
$c(c-m) = a^2$</td><td>Propiedad de los $\mathbb{R}$ (7)</td></tr>
<tr><td>9</td><td>$c^2 = b^2 + a^2$</td><td>Propiedad de los $\mathbb{R}$ (9)</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA

Se utiliza la metodología de ingeniería didáctica (Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. 1995); según Carreño y Díaz (2014) (citado en Cantor, 2016, pág. 14) es una metodología de investigación que hace una confrontación entre un análisis a-priori y un análisis a-posteriori.

El análisis a-priori es un conjunto de hipótesis sobre el aprendizaje que se puede lograr considerando a un estudiante y controlando un conjunto de variables didácticas en el funcionamiento del medio con el cual el estudiante va a interactuar para resolver un problema. El análisis a-posteriori es la confrontación de esas hipótesis con los datos recogidos de un experimento aplicado a una población determinada. Como lo aclara Artigue (1995), una ingeniería-didáctica tiene 4 fases a considerar:

4.1 Análisis Preliminar:

Es el análisis epistemológico de los contenidos determinados para la enseñanza, teniendo en cuenta las características de los estudiantes, los errores y dificultades que se le puedan presentar a la hora de solucionar las tareas, además de los conocimientos previos que determinan el punto de partida y los documentos curriculares que son el referente para determinar en donde está situado el objeto geométrico a trabajar.

4.2 Análisis a priori

Este análisis se determina a partir de las variables que se deben tener en cuenta a la hora de llevar las tareas al aula, considerando los sustentos teóricos y matemáticos que se articularon para la presentación de estas; previniendo los posibles comportamientos que el estudiante pueda tener al abordar cada una de las tareas. Además, en este análisis provee las posibles acciones realizadas por el estudiante y las retroacciones realizadas por el medio a cada una de estas acciones.

4.3 Experimentación

En esta fase la actividad diseñada se aplica tal cual esta especificada en el análisis a-prori. Para esta fase el investigador controla las actividades además de tomar registro de los sucesos, puesto que los datos que se obtengan serán la base de la siguiente etapa (Análisis a-posteriori)

4.4 Análisis a posteriori

El análisis a posteriori es la comparación de las hipótesis presentadas en el análisis a priori y lo realmente evidenciado en la aplicación de cada una de las tareas, indicando cuales fueron los aspectos alcanzados, que situaciones no se esperaban y que escenarios fueron propicios para el cumplimiento de los objetivos propuestos.

4.5 Muestra

Para la implementación de las tareas y videos descritos, se tomó como muestra cinco estudiantes de grado noveno del Liceo Campestre “San Jorge” y cuatro estudiantes de grado octavo del mismo colegio; cada estudiante realizó las tareas de forma individual, con la posibilidad de hablar en simultaneo con sus compañeros, pero sin socializar las respuestas de cada una de las tareas propuestas.

CAPITULO 5. ANÁLISIS PRELIMINAR

En este capítulo se presenta los referentes curriculares que se tuvieron en cuenta a la hora de diseñar las tareas; así mismo las características cognitivas, sociales y emocionales que presentan los estudiantes en el ciclo cuatro de la educación media; además se encuentran los conocimientos previos que los estudiantes deben presentar a la hora de abordad cada una de las tareas que aquí se proponen; y finalmente, los errores y dificultades que los estudiantes pueden presentar a la hora de solucionar los retos que cada Tarea propone.

5.1 Referentes curriculares

Es importante mencionar los documentos curriculares colombianos ya que estos se consideran los orientadores en el proceso educativo, planteando una línea de ruta a lo hora de tratar un tema en específico, para este caso en particular el Teorema de Pitágoras, pues contribuyen a ubicar el tema en un ciclo en particular, es decir, para un grupo de estudiantes en específico, previniendo de forma esquemática los conocimientos previos que el estudiante debe tener para poder abordar de la mejor forma el tema elegido; estos documentos permiten identificar además las posibles evidencias de aprendizaje que los estudiantes puedan presentar, señalando algunas tareas como ejemplo útil a la hora de enseñar cada uno de los conceptos.

Además, los documentos curriculares que se exponen a continuación brindan una ruta de lo que se espera a la hora de trabajar con los objetos matemáticos. Por tanto, a continuación, se presenta de qué manera se encuentra involucrado el Teorema de Pitágoras en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas [EBCM], Derechos Básicos de Aprendizaje [DBA] y los Lineamientos Curriculares [LC]; y como estos aspectos se tuvieron en cuenta para el diseño de tareas.

En el currículo escolar colombiano el estudio del Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones se encuentra situado en los EBCM[11] (MEN, 2006) en el cuarto ciclo, es decir, los grados octavo y noveno; ubicado en el Pensamiento Espacial y Sistemas Métricos, centrándose en el reconocimiento de propiedades y relaciones geométricas; específicamente se menciona en el estándar *"Reconoce y contrasta propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostraciones de teoremas básicos (Pitágoras y Tales)"*.

Por otro lado, los DBA (MEN, 2016) presentan los aprendizajes estructurantes para un área y grado en particular, se encuentran organizados de grado 1° a grado 11°, para cada grado existen, en promedio, entre nueve y doce enunciados que se encuentran relacionados con los cinco pensamientos[12] presentes en los EBCM; cada proposición se encuentra acompañada de evidencias de aprendizaje y un ejemplo que ilustra el objetivo de cada enunciado.

Respecto al Teorema de Pitágoras, este se encuentra vinculado en uno de los doce enunciados correspondientes al grado octavo; igualmente se identifica en uno de los once enunciados relacionados con el grado noveno; a continuación, se encuentra un esquema en el que se presentan dichos enunciados con sus respectivas evidencias de aprendizaje.

[11] Son criterios que permiten establecer los niveles básicos de calidad de la educación en las áreas que integran el conocimiento escolar (MEN, 2006)

[12] Pensamiento métrico y sistemas de medidas; pensamiento aleatorio y sistemas de datos; pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos; pensamiento y sistemas numéricos; y pensamiento espacial y sistemas geométricos.

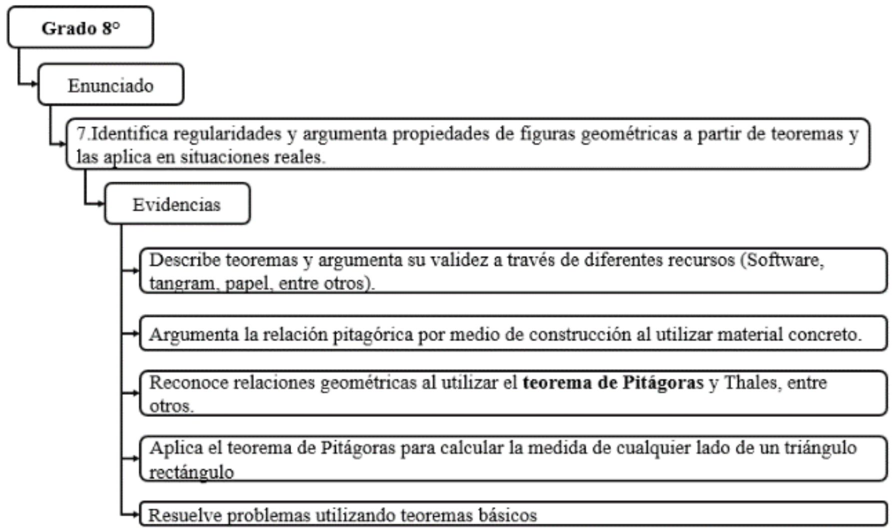


Figura 9: DBA asociados al Teorema de Pitágoras para grado octavo

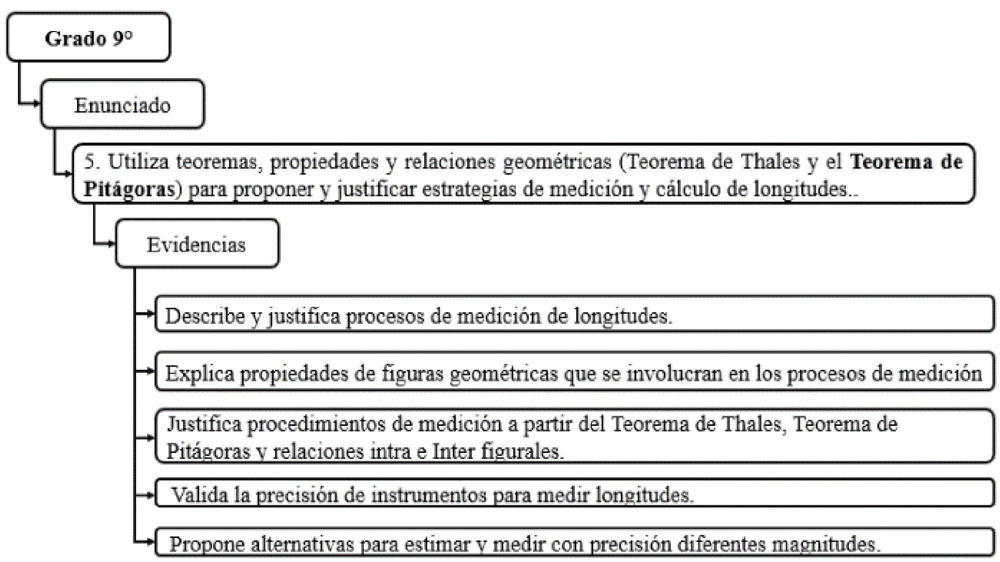


Figura 10: DBA asociados al Teorema de Pitágoras para grado noveno

Finalmente, en los LC (MEN, 1998) no se presenta algún enunciado que haga alusión al Teorema de Pitágoras en particular, sin embargo, si hace mención de que los teoremas en geometría deben ser involucrados.

5.2 Características de los estudiantes de cuarto ciclo

A continuación, la tabla 19 presenta las características cognitivas, sociales y emocionales de la población requerida para la implementación de las tareas antes descritas. La siguiente información fue extraída de Stanford Medicine Children´s Health (2023).

Tabla 2: Características de los estudiantes de cuarto ciclo

Cognitivo	• Cada niño progresa a su propio ritmo respecto a la capacidad de pensar de maneras más complejas. • Cada niño desarrolla su propia visión del mundo. • Algunos niños son capaces de utilizar operaciones lógicas en las tareas escolares mucho antes de que puedan utilizarlas para resolver sus problemas personales. • Se les facilita el pensamiento abstracto.
Social	• Comienza a cuestionar la autoridad y las normas sociales. • Mantiene un constante conflicto entre dependencia e independencia.
Emocional	• Cuando surgen los problemas emocionales, estos pueden interferir con la capacidad de pensar de maneras complejas. • La posibilidad de considerar posibilidades y realidades puede afectar la toma de decisiones. Esto puede ocurrir de maneras positivas o negativas. • Facilidad para que aparezcan sentimientos de culpabilidad, soledad, vergüenza e inseguridad.

5.3 Conocimientos previos

A continuación, se listan los conocimientos previos que los estudiantes deben manejar para poder abordar de forma óptima las tareas aquí propuestas, además, en aras de facilitar y proporcionar todas las herramientas para que los estudiantes construyan o fortalezcan un nuevo conocimiento, a partir de la interacción con las seis tareas que se describieron previamente, en la página mencionada en el apartado anterior se muestran tres presentaciones en donde se define brevemente cada uno de los elementos que se listan a continuación:

- ¿Qué es un triángulo?
- Partes del triángulo
- Clasificación de triángulos
- ¿Qué es un cuadrilátero?
- Partes de un cuadrilátero
- Clasificación de cuadriláteros
- Área de un cuadrado
- Diferencias entre área y perímetro

5.4 Errores y dificultades

A continuación, se presentan, en la Tabla 1, los errores y dificultades que encuentran los estudiantes a la hora de tratar el Teorema de Pitágoras; varios de los ítems listados fueron encontrados en Cáceres, Moreno, Tello y Vargas (2016). En este sentido una dificultad de aprendizaje es una situación que impide relacionar los conocimientos previos con los conocimientos a adquirir. Por su parte, los errores son las expresiones evidentes de las dificultades (Cáceres et al, 2016). Estas dificultades y errores se presentan a partir de dos categorías "Asociadas a los procesos propios del pensamiento matemático y Asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos" (Socas. 1997, citado en Cáceres et al, 2016).

Tabla 3: Lista de Errores (E) y Dificultades (D)

D1. No tener presente los conceptos previos (definición de triangulo rectángulo, definición de cuadrilátero, distancia entre dos puntos, formula, operaciones, etc.)	**E1.** Utilizar de forma inadecuada el lenguaje matemático
	E2. Determinar el área de un cuadrilátero de forma inadecuada
	E3. No reconocer la clasificación de triángulos de acuerdo con los lados y ángulos
	E4. No reconocer la clasificación de cuadriláteros
	E5. No identificar las diferencias entre cuadrado y rectángulo.
	E6. No reconocer la clasificación de ángulos
	E7. No identificar cuando dos polígonos son semejantes y cuando son congruentes
	E8. Confundir las unidades de longitud con las unidades de superficie
D2. No reconoce como utiliza adecuadamente los entornos de geometría dinámica como GeoGebra	**E1.** Utilizar incorrectamente el sistema de representación manipulativo
	E2. Interpretar incorrectamente al sistema de representación gráfico.
	E3. No relacionar los segmentos de igual longitud
D3. No relacionar de forma adecuada los conceptos previos con los conocimientos adquiridos	**E2.** En un triángulo rectángulo confundir la hipotenusa con los catetos
	E4. Sumar de manera inadecuada las áreas de los cuadriláteros

CAPÍTULO 6. ANÁLISIS A PRIORI

En este apartado se presentan seis tareas correspondientes a la enseñanza-aprendizaje del Teorema de Pitágoras, estas pretenden contribuir con el desarrollo y fortalecimiento de los procesos de visualización, conjeturación y argumentación a partir de la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes. Además, se encuentra cinco videos con los que se procura cooperar en el proceso de institucionalización del conocimiento, dichos videos están acompañados con sus respectivos análisis de idoneidad.

Estas tareas se construyeron a luz de la Teoría de las Situaciones Didácticas propuesta por Brousseau, más específicamente la situación a-didáctica, por esta razón el análisis a priori se presenta a partir de una tabla en donde están las *acciones* y las posibles *retroacciones* que el estudiante pueda recibir del *medio,* posibilitando que él visualice, *formule* (conjeture) y *valide* (argumente).

Además, es importante resaltar que para el diseño de cada una de las tareas se consideraron los siete elementos que propone Gómez (2018) ***requisitos,*** porque se parte de los conocimientos previos de los estudiantes; ***metas***, porque se proponen objetivos de aprendizaje específicos para cada tarea; ***enunciado***, porque en cada sección de las tareas se propone una instrucción o pregunta que el estudiante debe seguir para la realización de la misma; ***materiales y recursos*** porque estas tareas fueron diseñadas a partir del uso de las TIC, más específicamente haciendo uso de EGD; ***agrupamiento*** porque atendiendo a la situación a-didáctica y promoviendo el aprendizaje autónomo se considera que los estudiantes se organicen de forma individual; ***interacción***, porque se prevé que aunque las tareas no se hayan diseñado de forma grupal si exista interacción entre los estudiantes; y finalmente, ***temporalidad***, porque se presentan de forma detallada los momentos de cada tarea.

6.1 Tarea 1:

En esta tarea se presentan dos construcciones, en la primera (construcción 1) se presenta una circunferencia acompañada por cinco puntos, cuatro de ellos (E, G, F y D) que pertenecen a la circunferencia, mientras que el punto C puede pertenecer al exterior, interior e incluso a la circunferencia. Además, esta primera construcción es con la que el estudiante interactúa, es decir, a partir de la herramienta arrastre, el estudiante podría modificar la posición de los puntos $E,\ D$ y C. En la misma interfaz se presenta una segunda construcción (construcción 2), en esta se exponen tres cuadriláteros, el primero es el cuadrilátero punteado ($\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$) el cual no se modifica; también se encuentran dos cuadriláteros sombreados uno en color verde ($\boxdot\ YE_1C_1G_1$) y otro de color morado ($\boxdot\ ZF_1C_1D_1$), estos dos cuadriláteros se modifican de acuerdo con la posición de los puntos $E,\ D$ y C que pertenecen la construcción 1.

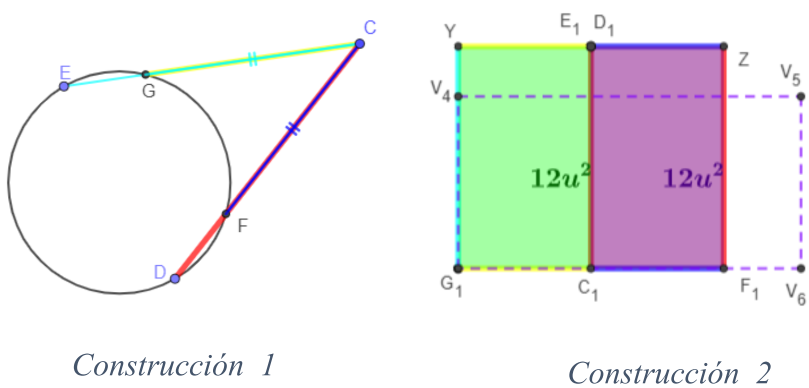


Figura 11: Construcción 1 y Construcción 2 correspondientes a la Tarea 1

Esta tarea está compuesta por tres partes (Rectángulo 1, Rectángulo 2 y Rectángulo 3), en las dos primeras secciones se presentan los mismos elementos en cada construcción, pero con diferentes modificaciones; respecto a la sección 3 no se muestra el cuadrilátero punteado ($\boxdot$ $V_4V_5V_6G_1$).

Enunciados y objetivos

A continuación, se encuentra una tabla 3 en la que se presenta el enunciado que acompaña cada sección de la tarea en cuestión, además, cada enunciado está acompañado por el o los objetivos que se esperan alcanzar a lo largo del desarrollo de cada parte de la tarea 1.

Tabla 4: Enunciados y objetivos de las tres secciones de la Tarea 1

	Rectángulo 1	**Rectángulo 2**	**Rectángulo 3**
Enunciados	Mueva los puntos azules y encuentre el área del cuadrilátero punteado ($\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$).	Determine el área del rectángulo punteado ($\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$ a partir de los cuadriláteros sombreados.	Construya otro rectángulo con dos cuadrados ¿Cuál debería ser la posición de los puntos azules?
Objetivos	• Identificar que para rellenar el área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$ los cuadriláteros $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ deben ser cuadrados. • Identificar qué $\overline{CD} \cong \overline{CE} \cong \overline{CF} \cong \overline{CG}$. • Identificar que los $\overline{CD}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$ y $\overline{CG}$ están directamente relacionados con las longitudes de los lados de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$. • Identificar que el área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$ es la suma de las áreas de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$.	• Identificar que los $\overline{CD}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$ y $\overline{CG}$ están directamente relacionados con las longitudes de los lados de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$. • Identificar que el área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$ es la suma de las áreas de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$. • Identificar que para rellenar el área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$ los cuadriláteros $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ deben ser rectángulos.	• Determinar que para cumplir con el enunciado se debe presentar qué $\overline{CD} \cong \overline{CE} \cong \overline{CF} \cong \overline{CG}$. • Identificar que los $\overline{CD}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$ y $\overline{CG}$ están directamente relacionados con las longitudes de los lados de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$.

Conocimientos que se esperan alcanzar

- Existe una posición de los puntos de la construcción 1 en la que los cuadriláteros sombreados rellenan exactamente el cuadrilátero punteado.
- La suma de las áreas de los cuadriláteros sombreados es igual a el área del cuadrilátero punteado.

- Las áreas de los cuadriláteros sombreados están directamente relacionadas con las longitudes de algunos segmentos que se encuentran en la construcción 1.

Análisis a priori Tarea 1

En la siguiente tabla se presentan las diferentes acciones que el usuario puede hacer sobre el medio, así mismo cada acción está acompañada de su respectiva retroacción y una imagen que ilustra la situación.

Tabla 5: Análisis a priori de la Tarea 1(Rectángulo 1)

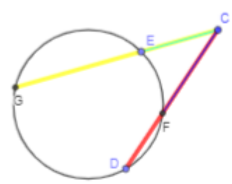
<table>
<tr><th colspan="3">Tarea 1</th></tr>
<tr><td>Enlace</td><td colspan="2">https://www.geogebra.org/m/wtqdkwxv</td></tr>
<tr><td colspan="3">Rectángulo 1:
Mueva los puntos azules y encuentre el área del cuadrilátero punteado $\boxdot$ $V_4V_5V_6G_1$).</td></tr>
<tr><th colspan="2">Acciones del estudiante</th><th>Retroacciones del medio</th></tr>
<tr><td colspan="2">Acción 1: Encontrar una posición de los puntos D, C, F, E y G en la que la suma del área de $\boxdot$ $YE_1C_1G_1$ y $\boxdot$ $ZF_1C_1D_1$ exceda el área de $\boxdot$ $V_4V_5V_6G_1$.</td><td>Retroacción 1: En cuanto a la construcción 2 la suma de las áreas de $\boxdot$ $YE_1C_1G_1$ y $\boxdot$ $ZF_1C_1D_1$ no coincide con el área de $\boxdot$ $V_4V_5V_6G_1$. En este caso, dependiendo de cómo el estudiante interactúe con la construcción 1, puede existir varios casos para esta primera retroacción.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Caso 1:</td><td rowspan="2">Puede ocurrir que en la construcción 2 no exista una relación directa entre $\boxdot$ $YE_1C_1G_1$ y $\boxdot$ $ZF_1C_1D_1$ salvo que sus áreas sean iguales.</td></tr>
<tr><td>

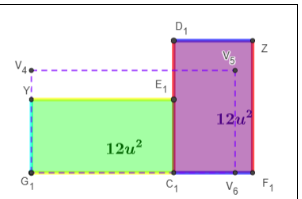
Figura 12: Construcción 1</td><td>

Figura 13: Construcción 2</td></tr>
</table>

Caso 2:

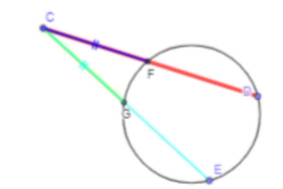


Figura 14: Construcción 1

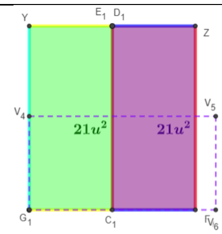


Figura 15: Construcción 2

El $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ de la construcción 2 pueden ser rectángulos congruentes sin necesidad de ser cuadrados.

En cualquiera de estos casos, si la suma de las áreas de los cuadriláteros $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ excede el área del $\boxdot\, V_4V_5V_6G_1$ no se cumple la condición inicial.

Acción 2: Superponer los puntos D y E, G y F respectivamente y alejar o acercar el punto C de la circunferencia.

Retroacción 2: respecto a la construcción 1, el medio puede brindar diferentes retroacciones, esto depende de las posiciones de los puntos C, D, E, F y G; en este sentido, puede ocurrir que:

Caso 1:

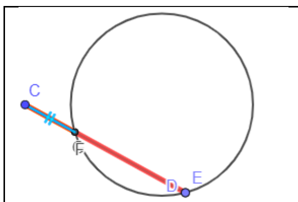


Figura 16: Construcción 1

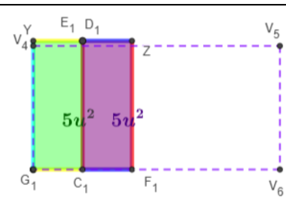


Figura 17: Construcción 2

El punto C se encuentra junto a la circunferencia (imagen 16) y pertenece al exterior de esta, además se superpone D y E, G y F respectivamente, además, se cumple que $CG < CE$ y $CF < CD$; también $CG = CF$ y $CE = CD$. Por tanto, en la construcción 2 la suma del área de $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ es menor que el área de $\boxdot\, V_4V_5V_6G_1$.

Caso 2:

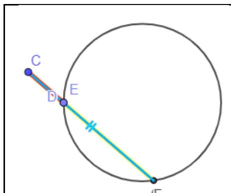


Figura 18: Construcción 1

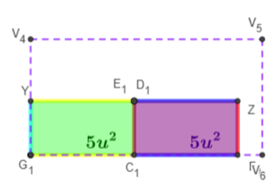


Figura 19: Construcción 2

El punto C se encuentra junto a la circunferencia (figura 18) y pertenece al exterior de esta, además se superpone D y E, G y F respectivamente en donde se cumple que $CG > CE$ y $CF > CD$, además, $CG = CF$ y $CE = CD$. Por tanto, en la construcción 2 la suma del área de $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ es menor que el área $\boxdot\, V_4V_5V_6G_1$.

Caso 3:

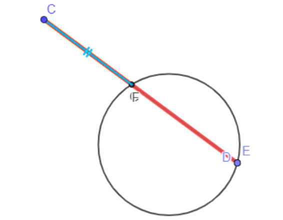
<table>
<tr>
<td>


Figura 20: Construcción 1

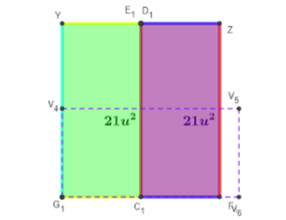


Figura 21: Construcción 2
</td>
<td>El punto C se encuentra alejado de la circunferencia (figura 20) y pertenece al exterior de esta, además se superpone D y E, G y F respectivamente, y se cumple que $CG < CE$ y $CF < CD$, además $CG = CF$ y $CE = CD$. Por tanto, en la construcción 2 la suma de las áreas de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ es mayor que el área $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$.</td>
</tr>
<tr>
<td>

Caso 4:

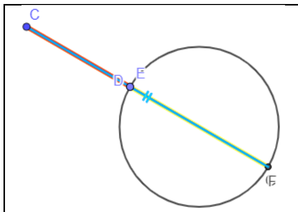


Figura 22: Construcción 1

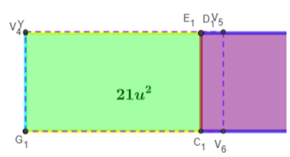


Figura 23: Construcción 2
</td>
<td>El punto C se encuentra alejado de la circunferencia (figura 22) y pertenece al exterior de esta, además se superpone D y E, G y F respectivamente, en donde se cumple que $CG > CE$ y $CF > CD$, además $CG = CF$ y $CE = CD$; por tanto, en la construcción 2 la suma del área de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ es mayor que el área $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">En cualquiera de los casos no se cumple con el enunciado propuesto.</td>
</tr>
<tr>
<td>

Acción 3: Encontrar una posición del punto C en la que $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ desaparezcan.

Caso 1:

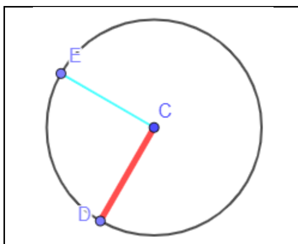


Figura 24: Construcción 1

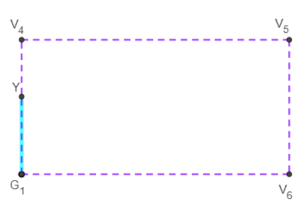
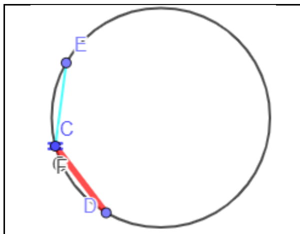
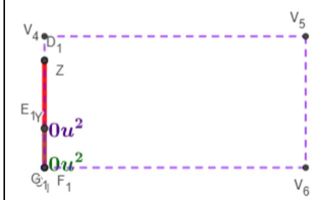
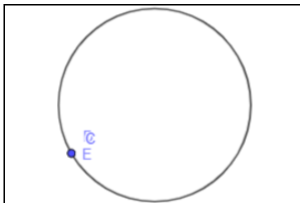
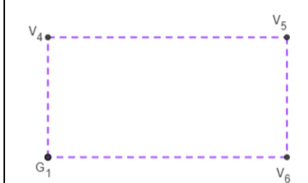
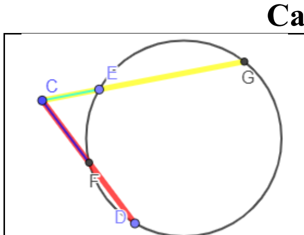
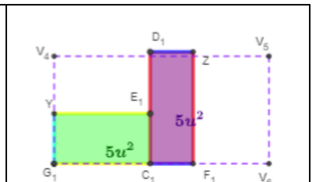
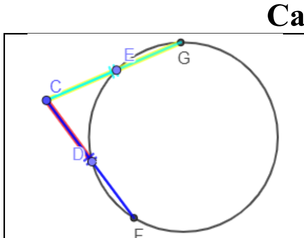
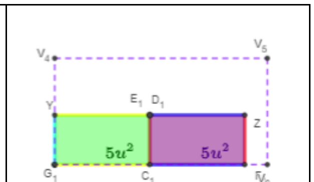
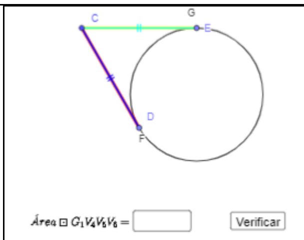
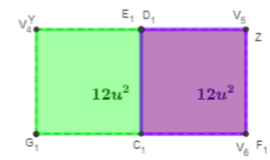
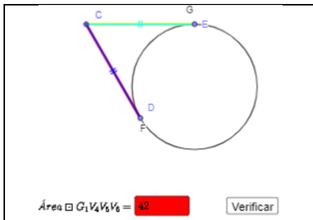
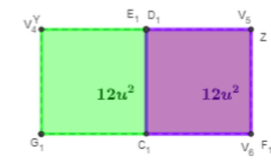
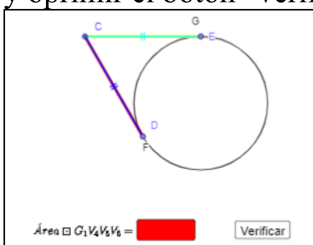
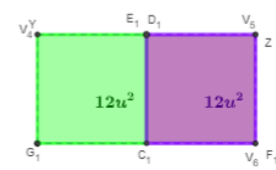
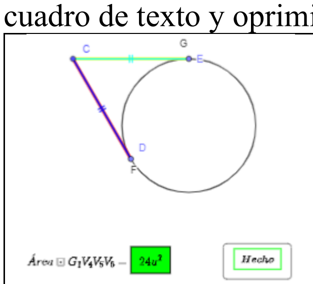
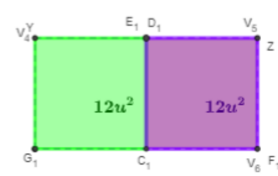


Figura 25: Construcción 2
</td>
<td>

Retroacción 3: En este caso existen dos posibles retroacciones:

Si C se encuentra en el interior de la circunferencia, entonces en la construcción 2, $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ desaparecen por completo.</td>
</tr>
</table>

Caso 2:  *Figura 26: Construcción 1*  *Figura 27: Construcción 2*	Si C se encuentra sobre la circunferencia el área de $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ es cero.
Caso 3:  *Figura 28: Construcción 1*  *Figura 29: Construcción 2*	Si todos los puntos de la construcción 1 se superponen, entonces en la construcción 2, $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ desaparecen por completo.
Acción 4: Encontrar una posición de los puntos $D, F, E\ y\ G$ en la que el área de $\boxdot\, V_4V_5V_6G_1$ exceda la suma de las áreas de $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$.	**Retroacción 4:** por una parte, en la construcción 2 la suma de las áreas de $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ es más pequeña que el área de $\boxdot\, V_4V_5V_6G_1$. Al igual que en la retroacción 1 pueden ocurrir dos casos dependiendo de la acción que realice el estudiante.
Caso 1:  *Figura 30: Construcción 1*  *Figura 31: Construcción 2*	En cuanto a la construcción 2 puede pasar que no exista relación entre $YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ más allá de la igualdad de sus áreas.
Caso 2:  *Figura 32: Construcción 1*  *Figura 33: Construcción 2*	También puede pasar que, $YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ sean rectángulos congruentes, sin necesidad de ser cuadrados.
En cualquiera de los casos no se da solución al enunciado propuesto.	
Acción 5: Superponer los puntos $D\ y\ F, E\ y\ G$ respectivamente, de tal manera que $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ son cuadrados.	**Retroacción 5:** En cuanto a la construcción 2, $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ son cuadrados, por tanto, en

 *Figura 34: Construcción 1*  *Figura 35: Construcción 2*	la construcción 1 el punto *F* se superpone al punto *D* y el punto *G* se superpone al punto *E;* entonces $CG = CF, CE = CD, CE = CG$ y $CF = CD$. Además, aparece en la interfaz un cuadro de texto en el que el usuario debe ingresar el valor del área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$, esto acompañado de un botón que lleva el nombre de "verificar".
Momento 2: Rectángulo 1	
Acción 6: Ingresar un valor que no corresponde en el cuadro de texto y oprima el botón "verificar".  *Figura 36: Construcción 1*  *Figura 37: Construcción 2*	**Retroacción 6:** El cuadro de texto se sombrea en rojo, señalando así que la respuesta dada por el estudiante es incorrecta.
Acción 7: No escribir ningún valor en el recuadro y oprimir el botón "verificar".  *Figura 38: Construcción 1*  *Figura 39: Construcción 2*	**Retroacción 7:** Se colorea de color rojo el cuadro de texto, señalando así que es necesario escribir la respuesta correcta.
Acción 8: Ingresar el valor que corresponde en el cuadro de texto y oprimir el botón "verificar".  *Figura 40: Construcción 1*  *Figura 41: Construcción 2*	**Retroacción 8:** El cuadro se sombrea de color verde, señalando que la respuesta dada por el estudiante es correcta, además aparece otro botón, este lleva el nombre de "Hecho".
Acción 9: Oprimir el botón hecho.	**Retroacción 9:** Aparece en la interfaz un nuevo botón llamado "Rectángulo 2" además, la construcción 2 cambia

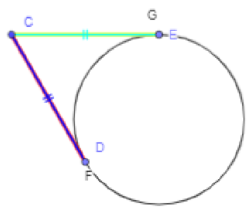
<table>
<tr><td>


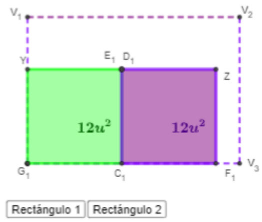
Figura 42: Construcción 1
</td><td>


Figura 43: Construcción 2
</td><td>de configuración y al mismo tiempo el enunciado de la tarea cambia.</td></tr>
</table>

Tabla 6: Análisis a priori de la Tarea 1(Rectángulo 2)

<table>
<tr><td colspan="2">Rectángulo 2:
Determine el área del rectángulo punteado ($\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$) a partir de los cuadriláteros sombreados.</td></tr>
<tr><td>Tanto para el rectángulo 1 como para el 2 las cuatro primeras acciones y retroacciones son las mismas, la diferencia es que el área punteada a rellenar en el primer caso es menor que en el segundo. Por tanto, la acción 5 si es diferente.
Acción 5: Mover los puntos D y E de tal manera que se superpongan con los puntos F y G respectivamente.

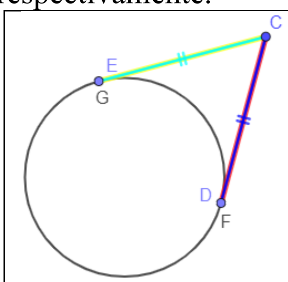


Figura 44: Construcción 1

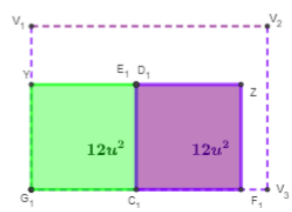


Figura 45: Construcción 2
</td><td>Retroacción 5: En cuanto a la construcción 1 el punto F se superpone al punto D y el punto G se superpone al punto E; entonces $CG = CF$, $CE = CD$, $CE = CG$ y $CF = CD$; por otro lado, en la construcción 2, $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ son cuadrados, pero la suma del área de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ es inferior al área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$</td></tr>
<tr><td>Acción 6: Encontrar una posición de los puntos en la que se cumpla con el enunciado dado.

Figura 46: Construcción 1

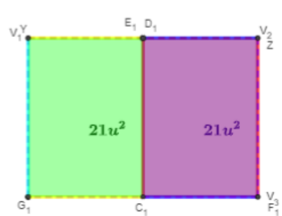


Figura 47: Construcción 2
</td><td>Retroacción 6: Respecto a la construcción 1 se cumple que el punto C se encuentra en el exterior de la circunferencia y $CG = CF$ y $CE = CD$. Por otra parte, en la construcción 2 se tiene que $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ llenan por completo el área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$, es decir, la suma del área de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ es igual al área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$.
Además, aparece en la interfaz un cuadro de texto en el que el usuario debe ingresar el valor del área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$, esto acompañado de un botón que lleva el nombre de “verificar”.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Momento 2: Rectángulo 2</td></tr>
</table>

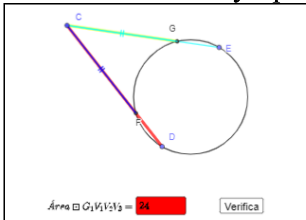
<table>
<tr>
<td>Acción 6: Ingresar un valor que no corresponde en el cuadro de texto y oprima el botón “verificar”.


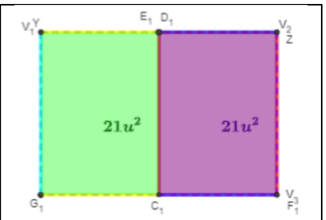
Figura 48: Construcción 1


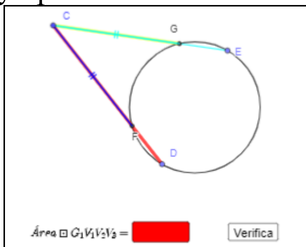
Figura 49: Construcción 2</td>
<td>Retroacción 6: Se colorea de rojo el cuadro de texto, señalando así que la respuesta dada por el estudiante es incorrecta.</td>
</tr>
<tr>
<td>Acción 7: No escribir ningún valor en el recuadro y oprimir el botón “verificar”.


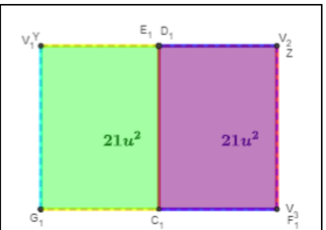
Figura 50: Construcción 1


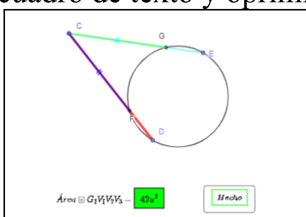
Figura 51: Construcción 2</td>
<td>Retroacción 7: Se colorea de color rojo el cuadro de texto, señalando así que es necesario escribir la respuesta correcta.</td>
</tr>
<tr>
<td>Acción 8: Ingresar el valor que corresponde en el cuadro de texto y oprimir el botón “verificar”.


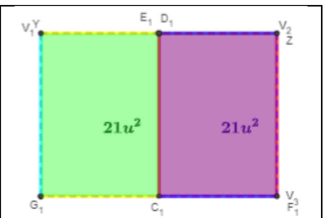
Figura 52: Construcción 1


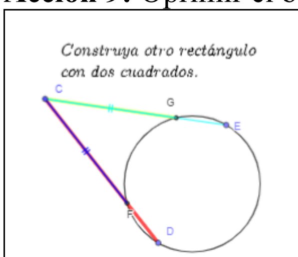
Figura 53: Construcción 2</td>
<td>Retroacción 8: Se colorea de color verde el cuadro de texto, señalando que la respuesta dada por el estudiante es correcta, además aparece otro botón, este lleva el nombre de “Hecho”.</td>
</tr>
<tr>
<td>Acción 9: Oprimir el botón hecho


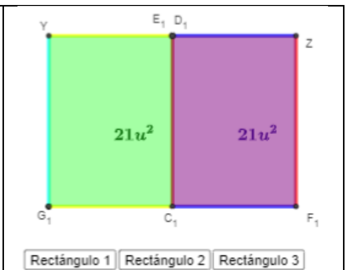
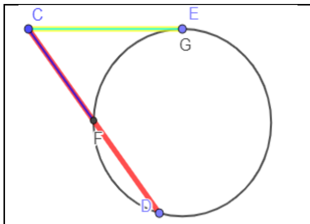
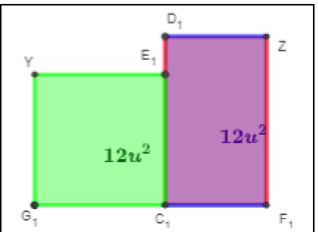
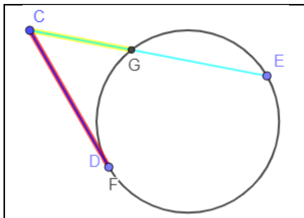
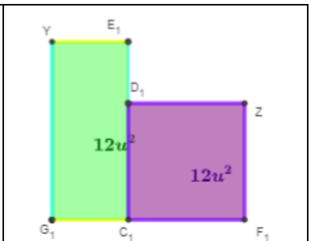
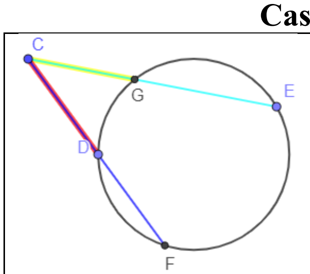
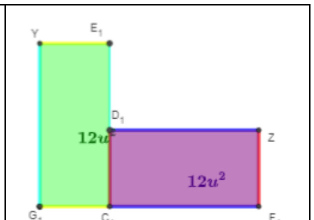
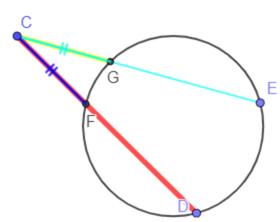
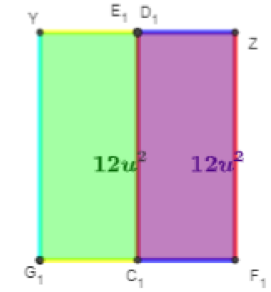
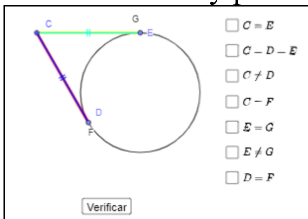
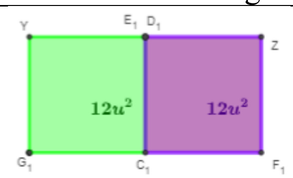
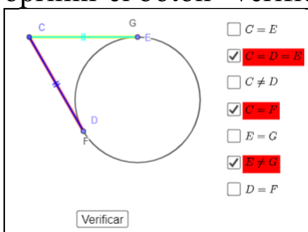
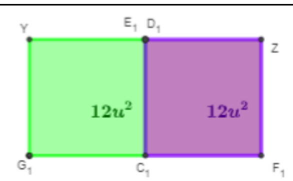
Figura 54: Construcción 1


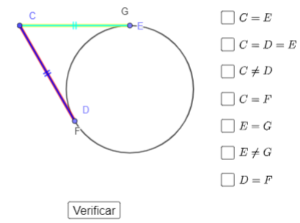
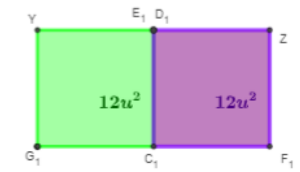
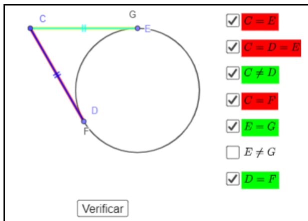
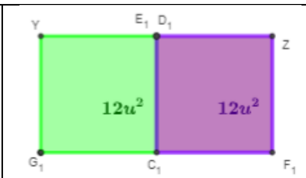
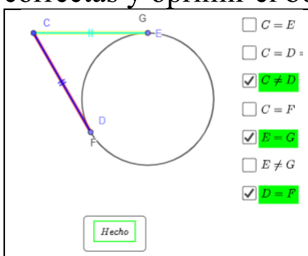
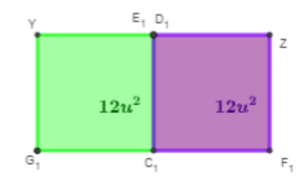
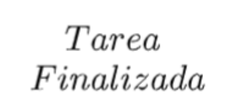
Figura 55: Construcción 2</td>
<td>Retroacción 9: Aparece en la interfaz un nuevo botón llamado “Rectángulo 3” además, la construcción 2 cambia de configuración y al mismo tiempo el enunciado de la tarea cambia.</td>
</tr>
</table>

Tabla 7: Análisis a priori de la Tarea 1(Rectángulo 3)

<table>
<tr>
<td colspan="2">Rectángulo 3:
• Construya otro rectángulo con dos cuadrados
• ¿Cuál debería ser la posición de los puntos azules?</td>
</tr>
<tr>
<td>Acción 1: Encontrar una posición de los puntos C, D, E, F y G de tal forma que $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ sea</td>
<td>Retroacción 1: para esta acción existen dos posibles casos.</td>
</tr>
</table>

cuadrado y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ sea rectángulo o viceversa. **Caso 1:**  *Figura 56: Construcción 1*  *Figura 57: Construcción 2* **Caso 2:**  *Figura 58: Construcción 1*  *Figura 59: Construcción 2*	En primer lugar, puede ocurrir que $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ sea cuadrado y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ sea rectángulo, por tanto, estos dos cuadriláteros no construyen un rectángulo (figura 34). En este sentido, en la construcción 1 se cumple que $E\ y\ G$ se superponen. También, puede ocurrir que $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ sea rectángulo y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ sea cuadrado, por tanto, estos dos cuadriláteros no construyen un rectángulo. Por tanto, en la construcción 1 D y F se superponen
Acción 2: Encontrar una posición de los puntos $C, D, E, F\ y\ G$, de tal forma que $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ no sean cuadrados. **Caso 1:**  *Figura 60: Construcción 1*  *Figura 61: Construcción 2* **Caso 2:**	**Retroacción 2:** En este caso, las retroacciones que el estudiante puede recibir son dos: Respecto a la construcción 1, la retroacción va dirigida desde las longitudes determinadas por los puntos $C, D, E, F\ y\ G,;$ en primer lugar puede que no exista una relación visible más allá de la desigualdad entre las mismas. Ahora, respecto a la construcción 2 la retroacción que se puede obtener para el primer caso es que los cuadriláteros no cumplan con ninguna de las dos condiciones dadas en el enunciado. Puede pasar que existan las siguientes igualdades, $CE = CD\ y\ EG = DF$. Sin embargo, en ninguno de los dos casos se cumple la condición establecida en el enunciado. Respecto a la construcción 2, si bien si se forma un rectángulo al sumar el área de $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$, estos últimos

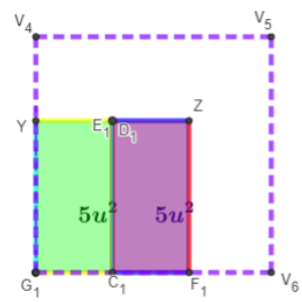
 *Figura 62: Construcción 1*  *Figura 63: Construcción 2*	no cumplen con la condición de ser cuadrados.
Acción 3: Encontrar una posición de los puntos C, D, E, F y G de tal forma que los cuadriláteros sean cuadrados y por tanto formen un rectángulo.  *Figura 64: Construcción 1*  *Figura 65: Construcción 2*	**Retroacción 3:** en este caso la retroacción que realiza la construcción 1 es la superposición de D y F y E y G de manera simultánea, por tanto, se presenta lo siguiente $CE = CD = EG = DF$. Por otro lado, la retroacción que ofrece la construcción 2 es que se cumplen las condiciones dadas en el enunciado. Además, en la interfaz aparece un nuevo enunciado, “Marque cuales deberían ser las tres posiciones de los puntos azules”; este se encuentra acompañado de las diferentes opciones que el usuario puede elegir: $C = E$, $C = D = E$, $C \neq D$, $C = F$, $E = G$, $E \neq G$ y $D = F$
Momento 2: Rectángulo 3	
Acción 4: Elegir las opciones incorrectas y oprimir el botón “verificar”.  *Figura 66: Construcción 1*  *Figura 67: Construcción 2*	**Retroacción 4:** Se colorea de color rojo las opciones marcadas.
Acción 5: No elegir ninguna opción y oprimir el botón “verificar”.	**Retroacción 5:** En la interfaz no cambia o se señala algo.

 *Figura 68: Construcción 1*  *Figura 69: Construcción 2*	
Acción 6: Elegir algunas opciones correctas y otras incorrectas, luego oprimir el botón "verificar".  *Figura 70: Construcción 1*  *Figura 71: Construcción 2*	**Retroacción 6:** Se colorea de color verde las opciones correctas y de rojo las opciones incorrectas.
Acción 7: Elegir únicamente las opciones correctas y oprimir el botón "verificar".  *Figura 72: Construcción 1*  *Figura 73: Construcción 2*	**Retroacción 7:** Se colorea de color verde las opciones elegidas y aparece en la interfaz el botón "Hecho".
Acción 8: Oprimir el botón "Hecho".  *Figura 74: Construcción 1*  *Figura 75: Construcción 2*	**Retroacción 8:** Aparece en la interfaz "Tarea Finalizada".

6.2 Tarea 2:

Al igual que la tarea 1, en esta tarea se encuentran tres partes (Cuadrado 1, cuadrado 2 y suma) las dos primeras secciones se componen a partir de dos construcciones. La construcción 1 (que es con la que el usuario interactúa) está constituida por una circunferencia, cuatro puntos que pertenecen a esta (D, F, E y G) y un punto que puede pertenecer al interior, al exterior o a la circunferencia (C). También se tiene la construcción 2, en la que se encuentran dos cuadriláteros ($\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$) que se modifican de acuerdo con las posiciones que presenten los puntos C, D, F, E y G; dichos polígonos se encuentran acompañados de un tercer cuadrilátero ($\boxdot$ $V_1V_2V_3G_1$.), el cual está punteado.

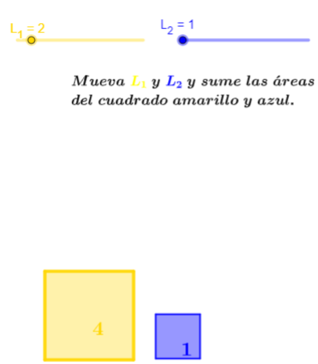
Construcción 1



Construcción 2

Figura 76: Construcción 1 y Construcción 2 correspondientes a la Tarea 2 (Cuadrado 1 y Cuadrado 2)

Por otro lado, en la tercera parte de esta Tarea se muestran nuevamente dos construcciones, de un lado de la interfaz (Construcción 1) se tienen dos cuadrados acompañados por dos deslizadores, cada cuadrilátero se encuentra relacionado con un deslizador, es decir, al mover el deslizador el polígono relacionado cambia de área. Del otro lado de la interfaz se tiene un cuadrilátero (Construcción 2) que cambia su área y forma de acuerdo con las modificaciones que se hagan en la construcción 1.



Construcción 1

Construcción 2

Figura 77: Construcción 1 y Construcción 2 correspondientes a la Tarea 2 (Suma)

Enunciados y objetivos

A continuación, se presenta la tabla 7 en la que se encuentra el enunciado que acompaña cada sección de la tarea en cuestión, además, cada enunciado está acompañado por el o los objetivos que se esperan alcanzar a lo largo del desarrollo de cada parte de la tarea 2.

Tabla 8: Enunciados y objetivos de las tres secciones de la Tarea 2

	Cuadrado 1	Cuadrado 2	Suma
Enunciados	Mueva los puntos azules y determine el área del cuadrado punteado con rectángulos	Rellene el cuadrado punteado $\boxdot\, G_1C_2E_2B_2$ con dos cuadrados	• Mueva L_1 y L_2, sume las áreas del cuadrado amarillo y azul. • Mueva los puntos verdes y obtenga un cuadrado de área $n\, u^2$ • ¿Cuánto mide uno de los lados del cuadrilátero sombreado en verde?
Objetivos	• Identificar qué $\overline{CD} \cong \overline{CE}$ y $\overline{CF} \cong \overline{CG}$. • Identificar que la suma del área de $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ es igual al área de $\boxdot\, V_4V_5V_6G_1$ • Identificar que cuando el área de $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ es igual a 12 se cumple que $YG_1 > C_1G_1$ y $C_1F_1 > D_1C_1$ • Identificar que $\boxdot\, YE_1C_1G_1 \cong \boxdot\, ZF_1C_1D_1$	• Concluir que de acuerdo con la configuración dada en las construcciones no es posible cumplir con el enunciado • Identificar que para que la suma de las áreas de $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ sea igual a el área de $\boxdot\, G_1C_2E_2B_2$ los polígonos $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ deben ser rectángulos. • Identificar que la condición dada, no se cumple en ninguno de los posibles casos brindados por el medio	• Identificar que en cualquier posición de los deslizadores L_1 y L_2 los cuadriláteros sombreados en color amarillo y azul cumplen con las condiciones de ser cuadrados. • Identificar que al mover los puntos P_1 y Q_1 el área del cuadrilátero sombreado en color verde no cambia. • Identificar que la suma de las áreas de los cuadriláteros azul y amarillo es igual al área del cuadrilátero verde. • Identificar que el valor del lado del cuadrilátero verde es la raíz del área de este.

Conocimientos que se esperan alcanzar

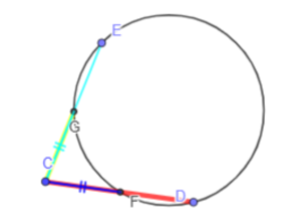
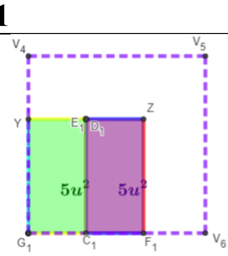
- Dos rectángulos son congruentes si los lados correspondientes son congruentes

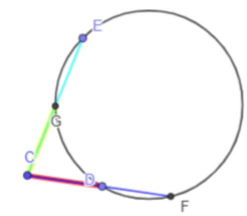
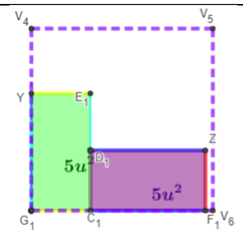
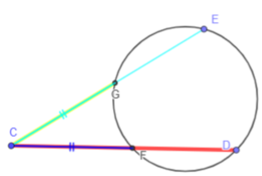
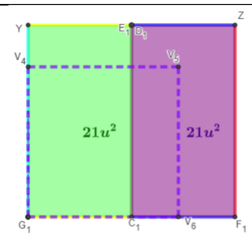
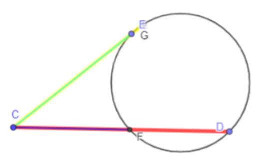
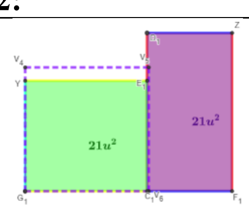
- De acuerdo con la configuración dada por el medio, para la construcción 2 el área de $\boxdot\ G_1C_2E_2B_2$ solo se puede rellenar a partir de rectángulos
- En el cuadrado 1 el área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$ es la suma del área de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ D_1ZF_1C_1E_1$
- El valor del lado de un cuadrado es la raíz del área de este
- Un cuadrilátero es cuadrado cuando todos sus lados son congruentes.

Análisis a priori Tarea 2

A continuación, se encuentra la tabla 8 en la cual se presenta las posibles acciones que el estudiante puede hacer sobre el medio y las retroacciones que este otorga, además, cada acción y retroacción se encuentra acompañada de su respectiva imagen con el fin de ilustrar cada uno de los casos.

Tabla 9: Análisis a priori de la Tarea 2 (Cuadrado 1)

Tarea 2	
Enlace	https://www.geogebra.org/m/saftgdug
Cuadrado 1: ¿Cuál es el área del cuadrado punteado?	
Momento 1: Cuadrado 1	
Acciones del estudiante sobre el medio	**Retroacción del medio**
Acción 1: Encontrar una posición de los puntos $D, C, F, E\ y\ G$ en la que el área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$ sea mayor que la suma de las áreas de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$. **Caso 1**  *Figura 78: Construcción 1*  *Figura 79: Construcción 2*	**Retroacción 1:** Para esta acción puede existir varias retroacciones que otorgue el medio. En la construcción 2 la retroacción que el medio otorga es $\boxdot\ YE_1C_1G_1 \cong \boxdot\ ZF_1C_1D_1$ con $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ rectángulos, pero la suma de sus áreas es menor que el área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$. Ahora, desde la construcción 1, la retroacción consiste en que $CE = CD$ y $CG = CF$ con C en el exterior de la circunferencia

Caso 2  *Figura 80: Construcción 1*  *Figura 81: Construcción 2*	En la construcción 2 la retroacción que se presenta es que entre $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ no existe ninguna relación visible, solo la igualdad de áreas entre estos dos cuadriláteros, además, la suma de las áreas de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$es menor que el área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$. Por otro lado, en la construcción 1 no se tiene ninguna relación visible entre los segmentos determinados por los puntos $D, C, F, E\ y\ G$.
Acción 2: Encontrar una posición de los puntos $D, C, F, E\ y\ G$ en la que la suma del área de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ exceda el área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$.	**Retroacción 2:** Para esta acción puede existir varias retroacciones que otorgue el medio.
Caso 1:  *Figura 82: Construcción 1*  *Figura 83: Construcción 2*	En la construcción 2 la retroacción que el medio otorga es $\boxdot\ YE_1C_1G_1 \cong \boxdot\ ZF_1C_1D_1$ con $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ rectángulos, pero la suma de sus áreas es mayor que el área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$. Ahora, desde la construcción 1, la retroacción consiste en que $CE = CD$ y $CG = CF$ con C en el exterior de la circunferencia.
Caso 2:  *Figura 84: Construcción 1*  *Figura 85: Construcción 2*	En la construcción 2 la retroacción que se presenta es que entre $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ no existe ninguna relación visible, solo la igualdad de áreas entre estos dos cuadriláteros, además, la suma de las áreas de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$es mayor que el área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$. Por otro lado, en la construcción 1 no se tiene ninguna relación visible entre los segmentos determinados por los puntos $D, C, F, E\ y\ G$.
Acción 3: Superponer los puntos D y E, Fy G respectivamente y alejar o acercar el punto C de la circunferencia.	**Retroacción 3:** respecto a la construcción 1, el medio puede brindar diferentes retroacciones, esto depende de las posiciones de los puntos $D, C, F, E\ y\ G$; en este sentido, puede ocurrir que:
Caso 1:	El punto C se encuentre junto a la circunferencia (Figura 86) y se

<table>
<tr>
<td>

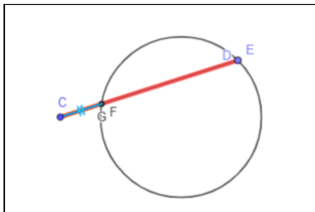


Figura 86: Construcción 1

</td>
<td>

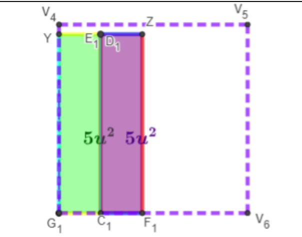


Figura 87: Construcción 2

</td>
<td>

superpone D y E, Fy G respetivamente; por tanto, se cumple que $CG < CE$ y $CF < CD$, además $CG = CF$ y $CE = CD$. Además, en la construcción 2 la suma del área de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ es igual que el área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$ y $\boxdot\ YE_1C_1G_1 \cong \boxdot\ ZF_1C_1D_1$.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Caso 2:

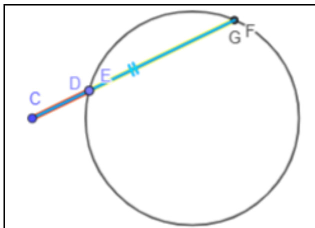


Figura 88: Construcción 1

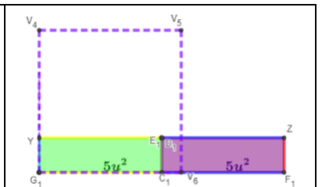


Figura 89: Construcción 2

</td>
<td>

El punto C se encuentre junto a la circunferencia (Figura 88) y se superponga D y E, Fy G respectivamente, en donde se cumple que $CG > CE$ y $CF > CD$, además $CG = CF$ y $CE = CD$. Por tanto, en la construcción 2 la suma del área de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ es menor que el área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Caso 3:

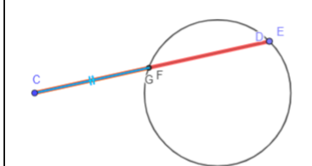


Figura 90: Construcción 1

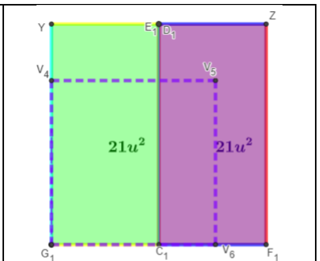


Figura 91: Construcción 2

</td>
<td>

El punto C se encuentre alejado de la circunferencia (Figura 90) y se superpone D y E, Fy G respectivamente, en donde se cumple que $CG < CE$ y $CF < CD$, además $CG = CF$ y $CE = CD$. Por tanto, en la construcción 2 la suma del área de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ es mayor que el área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Caso 4:

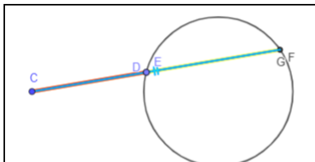


Figura 92: Construcción 1

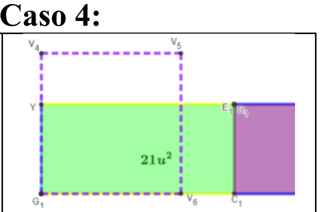


Figura 93: Construcción 2

</td>
<td>

El punto C se encuentre alejado de la circunferencia (Figura 82) y se superpone D y E, Fy G respectivamente. en donde se cumple que $CG > CE$ y $CF > CD$, además $CG = CF$ y $CE = CD$; por tanto, en la construcción 2 la suma del área de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ es mayor que el área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Acción 4: Encontrar una posición del punto C en la que $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ desaparezcan.

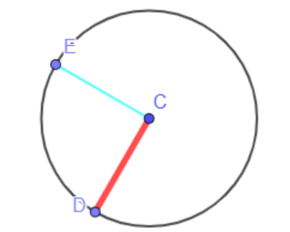
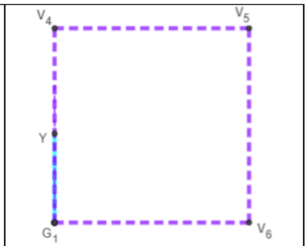
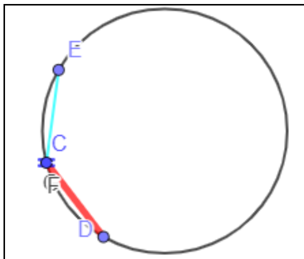
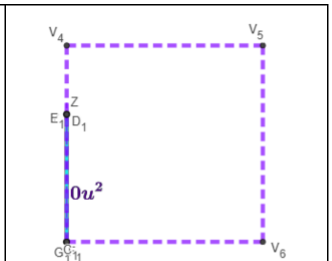
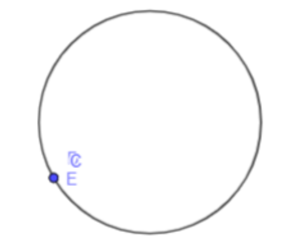
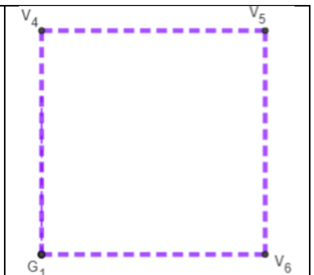
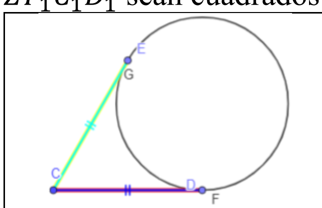
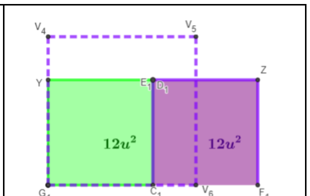
Caso 1:

</td>
<td>

Retroacción 4: En este caso existen dos posibles retroacciones:

Si C se encuentra en el interior de la circunferencia, entonces en la construcción 2, $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ desaparecen por completo.

</td>
</tr>
</table>

 *Figura 94: Construcción 1*  *Figura 95: Construcción 2*	
Caso 2:  *Figura 96: Construcción 1*  *Figura 97: Construcción 2*	Si C se encuentra sobre la circunferencia el área de ⊡ $YE_1C_1G_1$ y ⊡ $ZF_1C_1D_1$ es cero.
Caso 3:  *Figura 98: Construcción 1*  *Figura 99: Construcción 2*	Si todos los puntos de la construcción 1 se superponen, entonces en la construcción 2, ⊡ $YE_1C_1G_1$ y ⊡ $ZF_1C_1D_1$ desaparecen por completo.
Acción 5: Encontrar una posición de los puntos D, C, F, E y G en la que ⊡ $YE_1C_1G_1$ y ⊡ $ZF_1C_1D_1$ sean cuadrados  *Figura 100: Construcción 1*  *Figura 101: Construcción 2*	**Retroacción 5:** Por un lado, en la construcción 1 se tiene que $CF = CG = CE = CD$, es decir, los puntos E y G se superponen y los puntos F y D se superponen en simultaneo. Ahora en la construcción 2 se tiene que los ⊡ $YE_1C_1G_1$ y ⊡ $ZF_1C_1D_1$ cuadrados congruentes y la suma de sus áreas no es igual al área del cuadrilátero ⊡ $V_4V_5V_6G_1$.
Acción 6: Encontrar una posición de los puntos D, C, F, E y G en la que la suma de ⊡ $YE_1C_1G_1$ y ⊡ $ZF_1C_1D_1$ sea igual al área de ⊡ $V_4V_5V_6G_1$.	**Retroacción 6:** respecto a la construcción 1 la retroacción que otorga el medio es que se cumple que $CF = CG$ y $CE = CD$, además $CF < CD$ y $CG < CE$. Por otro lado, la retroacción que otorga la construcción 2 es que ⊡ $YE_1C_1G_1$ y ⊡ $ZF_1C_1D_1$ son rectángulos

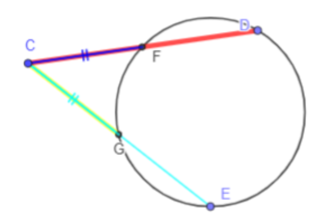
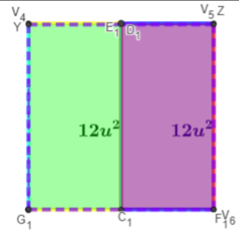
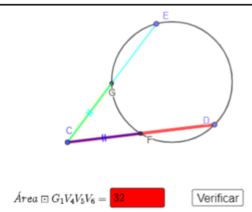
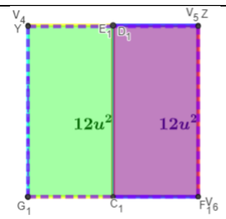
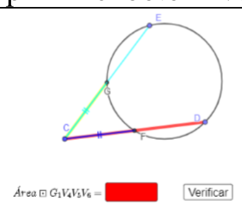
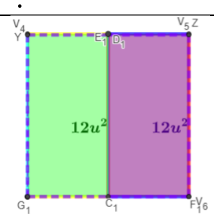
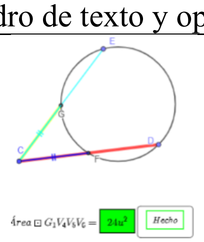
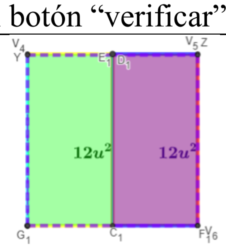
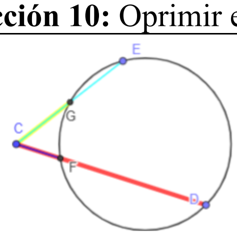
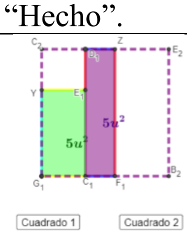
 Figura 102: Construcción 1  Figura 103: Construcción 2	congruentes y la suma de las áreas de dichos cuadriláteros es igual al área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$.
Momento 2: Cuadrado 1	
Acción 7: Ingresar un valor que no corresponde en el cuadro de texto y oprima el botón "verificar".  Figura 104: Construcción 1  Figura 105: Construcción 2	**Retroacción 7:** El cuadro de texto se sombrea en rojo, señalando así que la respuesta dada por el estudiante es incorrecta.
Acción 8: No escribir ningún valor en el recuadro y oprimir el botón "verificar".  Figura 106: Construcción 1  Figura 107: Construcción 2	**Retroacción 8:** Se colorea de color rojo el cuadro de texto, señalando así que es necesario escribir la respuesta correcta.
Acción 9: Ingresar el valor que corresponde en el cuadro de texto y oprimir el botón "verificar".  Figura 108: Construcción 1  Figura 109: Construcción 2	**Retroacción 9:** El cuadro se sombrea de color verde, señalando que la respuesta dada por el estudiante es correcta, además aparece otro botón, este lleva el nombre de "Hecho".
Acción 10: Oprimir el botón "Hecho".  Figura 110: Construcción 1  Figura 111: Construcción 2	**Retroacción 10:** Aparece en la interfaz un nuevo botón llamado "Cuadrado 2" además, la construcción 2 cambia al igual que el enunciado de la tarea.

Tabla 10: Análisis a priori Tarea 2 (Cuadrado 2)

<table>
<tr><td colspan="2">

Cuadrado 2:

- Rellene el cuadrado punteado ⊡ $G_1C_2E_2B_2$ con dos cuadrados
- ¿Es posible?
- ¿Es posible rellenas el ⊡ $G_1C_2E_2B_2$?
    - ¿Por qué?

</td></tr>
<tr><td>

Acción 1: Encontrar una posición de los puntos $D, C, F, E\ y\ G$ en la que ⊡ $YE_1C_1G_1$ y ⊡ $ZF_1C_1D_1$ sean rectángulos.

Caso 1

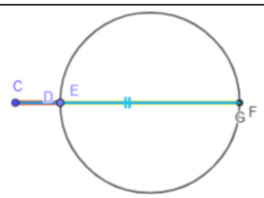


Figura 112: Construcción 1

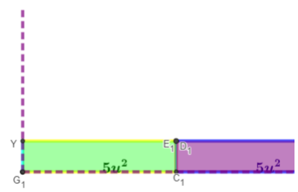


Figura 113: Construcción 2

Caso 2:

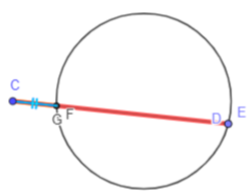


Figura 114: Construcción 1

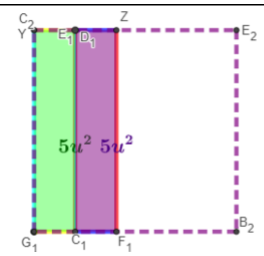


Figura 115: Construcción 2

Caso 3:

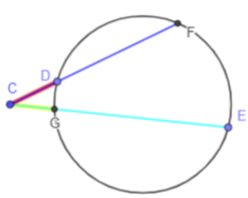


Figura 116: Construcción 1

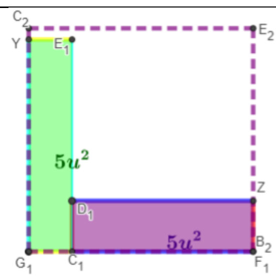


Figura 117: Construcción 2

</td><td>

Retroacción 1: de acuerdo con la construcción 1 el medio puede otorgar dos retroacciones diferentes

En primer lugar, puede suceder que el punto C se encuentre en el exterior de la circunferencia y se superpone D y E, $F\ y\ G$ respectivamente, en donde se cumpla que $CG > CE$ y $CF > CD$, además $CG = CF$ y $CE = CD$. Por tanto, en la construcción 2 la suma del área de ⊡ $YE_1C_1G_1$ y ⊡ $ZF_1C_1D_1$ es menor que ⊡ $G_1C_2E_2B_2$.

El punto C se encuentre en el exterior de la circunferencia y se superpone D y E, $F\ y\ G$ respectivamente en donde se cumple que $CG < CE$ y $CF < CD$, además $CG = CF$ y $CE = CD$. Por tanto, en la construcción 2 la suma del área de ⊡ $YE_1C_1G_1$ y ⊡ $ZF_1C_1D_1$es igual al área de ⊡ $G_1C_2E_2B_2$, pero ⊡ $YE_1C_1G_1$ y ⊡ $ZF_1C_1D_1$ no cumplen la condición de ser cuadrados.

Por un lado, en la construcción 1 no se encuentra una relación entre los segmentos determinados por los puntos $D, E, F\ y\ G$; ahora, desde la construcción 2 se tiene que ⊡ $YE_1C_1G_1$ y ⊡ $ZF_1C_1D_1$ son rectángulos con misma área. Además, la suma de las áreas de ⊡ $YE_1C_1G_1$ y ⊡ $ZF_1C_1D_1$, es menor que ⊡ $G_1C_2E_2B_2$.

</td></tr>
<tr><td>

Acción 2: Encontrar una posición de los puntos $D, C, F, E\ y\ G$ en la que solo uno de los cuadriláteros (⊡ $YE_1C_1G_1$ y ⊡ $ZF_1C_1D_1$) cumple la condicione de ser cuadrado.

Caso 1:

</td><td>

Retroacción 2: Respecto a esta retroacción se pueden presentar varios casos, los cuales se listan a continuación.

En primer lugar, puede que los puntos $E\ y\ G$ se encuentre superpuestos, entonces se cumple que $CE = CG, y$ al mismo tiempo los puntos F $y\ D$ se encuentren en una posición en la que se

</td></tr>
</table>

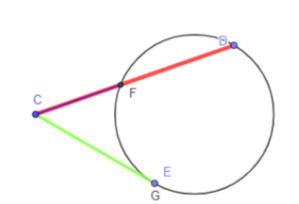


Figura 118: Construcción 1

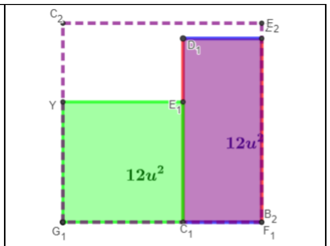


Figura 119: Construcción 2

cumpla $C - F - D$, por tanto $CF < CD$ o $C - D - F$, entonces $CD < CF$. En este sentido, la retroacción que otorga la construcción 2 para este caso es que ⊡ $YE_1C_1G_1$ es un cuadrado y ⊡ $ZF_1C_1D_1$ es un rectángulo.

Caso 2:

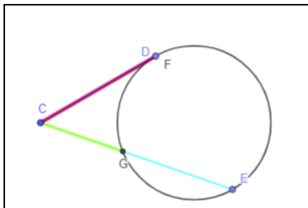


Figura 120: Construcción 1

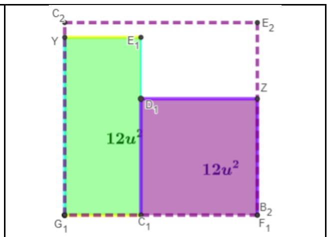


Figura 121: Construcción 2

Los puntos F y D se encuentren superpuestos, por tanto, se cumple que $CF = CD$, al mismo tiempo los puntos G y E se encuentran en una posición en la que ocurra alguna de las siguientes condiciones $C - G - E$, en donde $CG < CE$ o $C - E - G$, en donde $CE < CG$. Respeto a la construcción se tiene que ⊡ $ZF_1C_1D_1$ es cuadrado y ⊡ $YE_1C_1G_1$ es rectángulo, además la suma del área de estos cuadriláteros es menor que el área del cuadrilátero ⊡ $G_1C_2E_2B_2$.

Acción 3: Encontrar una posición del punto C en la que ⊡ $YE_1C_1G_1$ y ⊡ $ZF_1C_1D_1$ desaparezcan.

Retroacción 3: En este caso existen dos posibles retroacciones:

Caso 1:

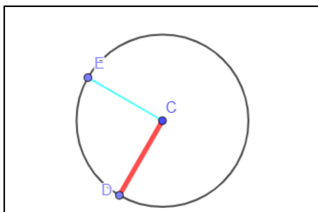


Figura 122: Construcción 1

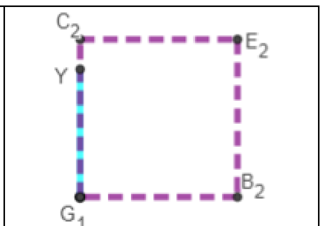


Figura 123: Construcción 2

Si C se encuentra en el interior de la circunferencia, entonces en la construcción 2, ⊡ $YE_1C_1G_1$ y ⊡ $ZF_1C_1D_1$ desaparecen por completo.

Caso 2:

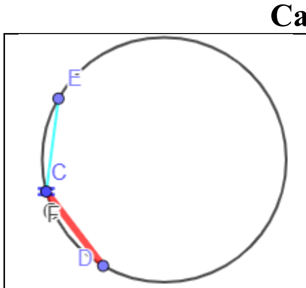


Figura 124: Construcción 1

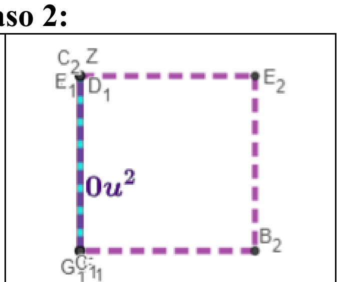
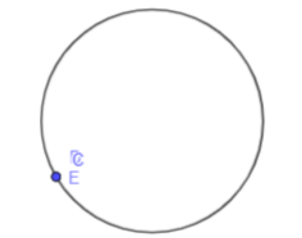
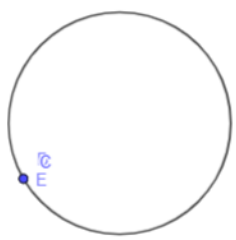
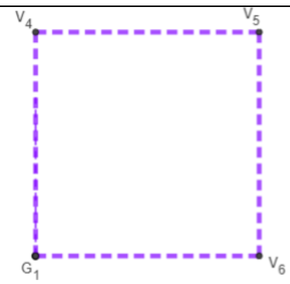
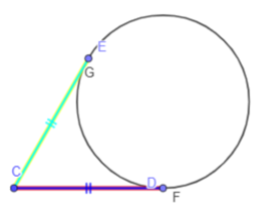
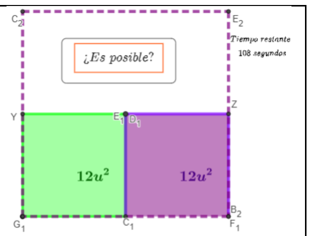
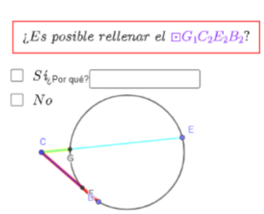
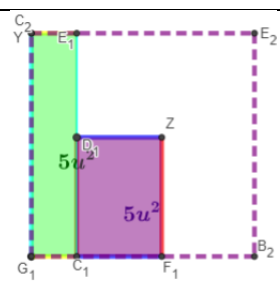


Figura 125: Construcción 2

Si C se encuentra sobre la circunferencia el área de ⊡ $YE_1C_1G_1$ y ⊡ $ZF_1C_1D_1$ es cero.

Caso 3:

Si todos los puntos de la construcción 1 se superponen, entonces en la construcción 2, ⊡ $YE_1C_1G_1$ y ⊡ $ZF_1C_1D_1$ desaparecen por completo; del mismo modo desaparece el ⊡

 *Figura 126: Construcción 1*  *Figura 127: Construcción 2*	$G_1C_2E_2B_2$, es decir, todos los polígonos quedan reducidos a dos puntos B_2 y G_1.
Acción 4: Encontrar una posición de los puntos D, C, F, E y G de tal forma que $\boxdot$ $YE_1C_1G_1$ y $\boxdot$ $ZF_1C_1D_1$ sean cuadrados.  *Figura 128: Construcción 1*  *Figura 129: Construcción 2*	**Retroacción 4:** respecto a la construcción 1 el medio otorga la superposición de D y F, E y G respectivamente, en simultaneo, por tanto, se presenta lo siguiente $CE = CD = EG = DF$. Ahora, respecto a la construcción 2, se encuentra $\boxdot$ $YE_1C_1G_1 \cong$ $\boxdot$ $ZF_1C_1D_1$ y estos son cuadrados, además, la suma del área de $\boxdot$ $YE_1C_1G_1$ y $\boxdot$ $ZF_1C_1D_1$ es menor que $\boxdot$ $G_1C_2E_2B_2$. Finalmente aparece en la interfaz la pregunta ¿Es posible?
Acción 5: Encontrar una posición de los puntos D, C, F, E y G en la que $\boxdot$ $YE_1C_1G_1$ y $\boxdot$ $ZF_1C_1D_1$ sean cuadrados  *Figura 130: Construcción 1*  *Figura 131: Construcción 2*	**Retroacción 5:** Por un lado, en la construcción 1 se tiene que $CF = CG = CE = CD$, es decir, los puntos E y G se superponen y los puntos F y D se superponen en simultaneo. Ahora en la construcción 2 se tiene que los $\boxdot$ $YE_1C_1G_1$ y $\boxdot$ $ZF_1C_1D_1$ cuadrados congruentes y la suma de sus áreas no es igual al área del cuadrilátero $\boxdot$ $G_1C_2E_2B_2$. Además, en pantalla aparece un nuevo botón llamado "¿Es posible?".
Momento 2: Cuadrado 2	
Acción 6: Interactuar con el medio sin necesidad de llegar a la acción 5.  *Figura 132: Construcción 1*  *Figura 133: Construcción 2*	**Retroacción 6:** Si el usuario no realiza la acción 5, después de pasar 120 segundo en la interfaz aparece la pregunta: ¿Es posible rellenar el $G_1C_2E_2B_2$.? Acompañada por dos opciones "si o no", la cual a su vez se encuentra acompaña por un cuadro de texto en el que el estudiante debe escribir la justificación a la respuesta que elegio.
Acción 7: Oprimir el botón "¿Es posible?".	**Retroacción 7:** Aparece la pregunta: ¿Es posible rellenar el $G_1C_2E_2B_2$.?

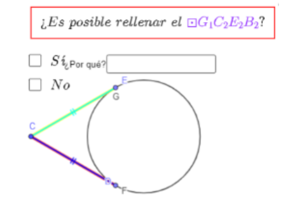
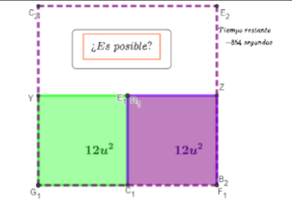
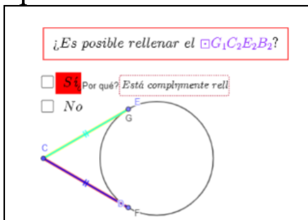
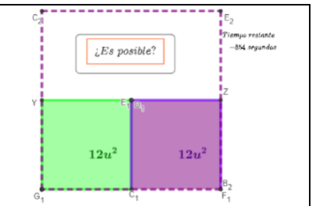
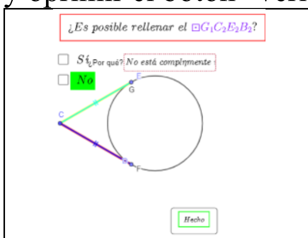
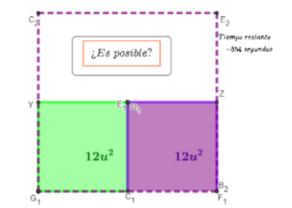
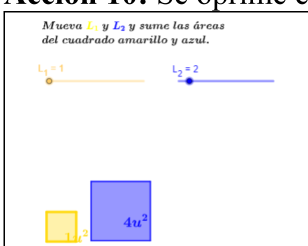
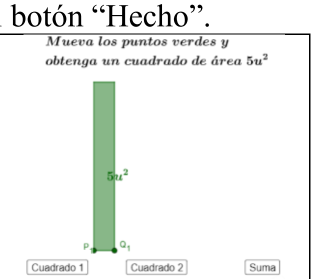
 *Figura 134: Construcción 1*  *Figura 135: Construcción 2*	Acompañada por dos opciones "si o no", la cual a su vez se encuentra acompaña por un cuadro de texto en el que el estudiante debe escribir la justificación a la respuesta que elegio.
Acción 8: Seleccionar la respuesta Si, justificar y oprimir el botón "verificar".  *Figura 136: Construcción 1*  *Figura 137: Construcción 2*	**Retroacción 8:** Se sombrea de color rojo la respuesta elegida
Acción 9: Seleccionar la respuesta No, justificar y oprimir el botón "verificar".  *Figura 138: Construcción 1*  *Figura 139: Construcción 2*	**Retroacción 9:** Se sombrea de color verde la respuesta elegida y aparece en la interfaz un botón llamado "Hecho".
Acción 10: Se oprime el botón "Hecho".  *Figura 140: Construcción 1*  *Figura 141: Construcción 2*	**Retroacción 10:** La interfaz cambia por completo, por un lado, aparecen dos cuadrados (amarillo y azul) acompañados por dos deslizadores y un nuevo enunciado. Por otro lado, aparece un cuadrilátero sombreado en color verde, este se encuentra acompañado por otro enunciado.

Tabla 11: Análisis a priori Tarea 2 (Suma)

Suma: • Mueva L_1 y L_2 y sume las áreas del cuadrado amarillo y azul. • Mueva los puntos verdes y obtenga un cuadrado de área $n\,u^2$ • ¿Cuánto mide uno de los lados del cuadrilátero sombreado en verde?	
Acción 1: Mover los deslizadores de tal manera que las áreas del cuadrado azul y amarillo sean iguales.	**Retroacción 1:** Respecto a la construcción 1 se tiene que si se mueve L_1 cambia el área del cuadrado sombreado en color amarillo y si se

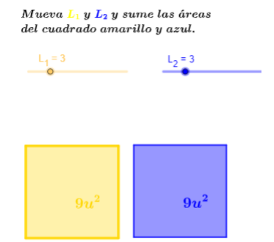
<table>
<tr>
<td>

Figura 142: Construcción 1

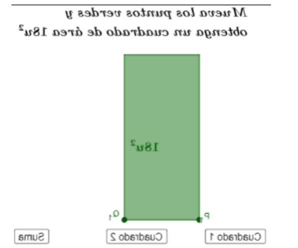



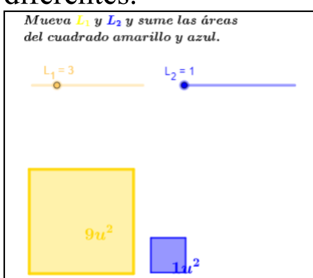
Figura 143: Construcción 2</td>
<td>mueve L_2cambia el área del cuadrado azul.
Ahora, si sus áreas son iguales se tiene que el número al que corresponde cada deslizador es igual y los cuadrados (amarillo y azul) son congruentes.
En la construcción 2 se tiene que en el enunciado el valor del área en cuestión (n u^2) cambia conforme se cambien de posición los deslizadores, ya que el valor de dicha área corresponde a $au^2 + bu^2$, donde a corresponde al área del cuadrado sombreado en color amarillo y b corresponde al área del cuadrado sombreado en color azul.
Además, cambia el área y la forma del cuadrilátero sombreado en color verde.</td>
</tr>
<tr>
<td>Acción 2: Mover los deslizadores de tal manera que las áreas del cuadrado azul y amarillo sean diferentes.


Figura 144: Construcción 1

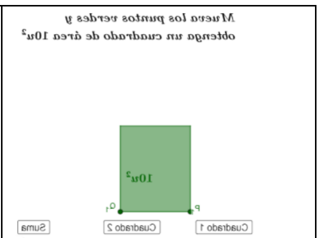



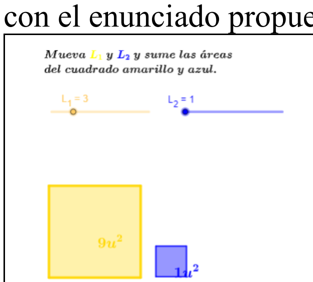
Figura 145: Construcción 2</td>
<td>Retroacción 2: Respecto a la construcción 1 se tiene que si se mueve L_1 cambia el área del cuadrado sombreado en color amarillo y si se mueve L_2cambia el área del cuadrado azul.
Ahora, si el número al que corresponde cada deslizador es diferente, entonces las áreas de los cuadriláteros amarillo y azul son diferentes; por tanto, dichos cuadriláteros son semejantes.
Respecto a la construcción 2 se tiene la misma retroacción que se presenta en la acción 1, es decir, el área y forma del cuadrilátero sombreado en color verde cambia, y el valor del área mencionada en el enunciado varia respecto a los valores que tome cada deslizador.</td>
</tr>
<tr>
<td>Acción 3: Mover los puntos P_1 y Q_1 sin cumplir con el enunciado propuesto en la construcción 2.


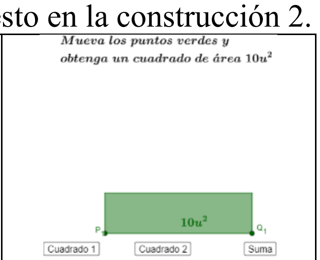
Figura 146: Construcción 1


Figura 147: Construcción 2</td>
<td>Retroacción 3: respecto a la construcción 1 no se modifica ningún elemento.
Ahora, respeto a la construcción 2 al mover los puntos P_1 y Q_1 se modifica únicamente la forma del cuadrilátero sombreado en color verde.</td>
</tr>
</table>

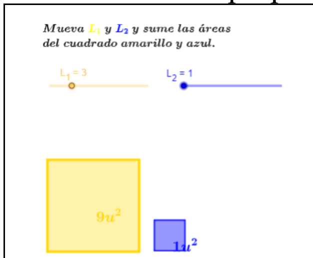
<table>
<tr>
<td>Acción 4: Mover los puntos P_1 y Q_1 cumpliendo con el enunciado propuesto en la construcción 2.


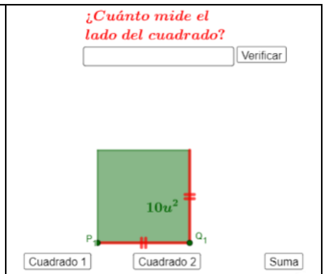
Figura 148: Construcción 1


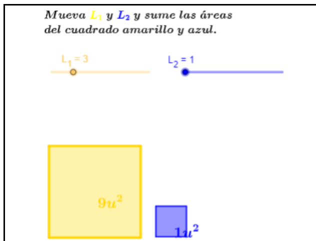
Figura 149: Construcción 2</td>
<td>Retroacción 4: respecto a la construcción 1 no se modifica ningún elemento.
En la construcción 2 aparece una pregunta acompañada por un cuadro de texto y un botón que lleva el nombre de “verificar”, además dos de los cuatro lados del cuadrado sombreado en color verde se resaltan en color rojo.</td>
</tr>
<tr>
<td>Acción 5: Ingresar un valor incorrecto en el cuadro de texto.


Figura 150: Construcción 1

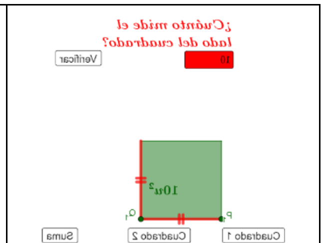



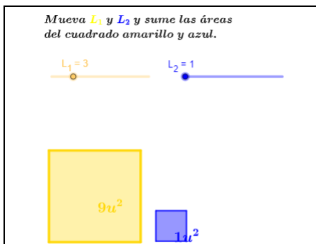
Figura 151: Construcción 2</td>
<td>Retroacción 5: respecto a la construcción 1 no se modifica ningún elemento.
En la construcción 2 se sombrea de color rojo el cuadro de texto (Figura 151).</td>
</tr>
<tr>
<td>Acción 6: Ingresar un valor correcto en el cuadro de texto.


Figura 152: Construcción 1

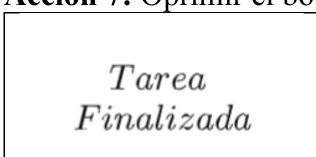

Figura 153: Construcción 2</td>
<td>Retroacción 6: respecto a la construcción 1 no se modifica ningún elemento.
En la construcción 2 se sombrea de color verde el cuadro de texto y aparece un nuevo botón el cual lleva el nombre de “hecho”.</td>
</tr>
<tr>
<td>Acción 7: Oprimir el botón “Hecho”.


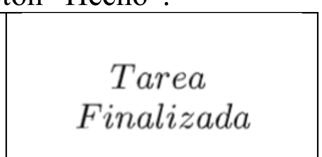
Figura 154: Construcción 1


Figura 155: Construcción 2</td>
<td>Retroacción 7: Aparece en la interfaz “Tarea Finalizada”.</td>
</tr>
</table>

6.3 Tarea 3

A continuación, se presenta la descripción de la tarea 3 y algunas figuras que ilustran la situación; inicialmente aparecen dos cuadros de texto (Figura 156), en ellos el usuario debe ingresar un número; posteriormente, se encuentran dos cuadrados (sombreados de color azul y rojo) culla área corresponde a la de los dígitos ingresados previamente (Figura 157); a continuación, se presentan dos rectángulos (sombreados en color verde) que completan un cuadrado de área mayor (El área del cuadrado azul más el área del cuadrado rojo más el área de los dos rectángulos) (Figura 158); luego, se encuentran dos preguntas que corresponden a la medida de los lados de los cuadrados en cuestión (Figura 159); luego la indicación que presenta la interfaz es completar un rompecabezas cuyas piezas corresponden a las figuras mencionadas anteriormente (Figura 160); finalmente, se pregunta “¿Cuál es el área del cuadrado Morado?” la cual corresponde a la suma de las áreas de los dos cuadrados iniciales (rojo y azul) (Figura 161).

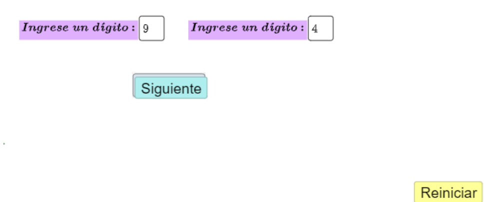


Figura 156

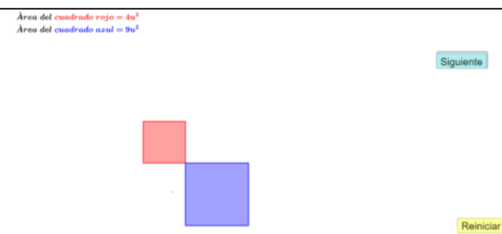


Figura 157

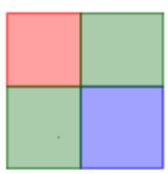


Figura 158

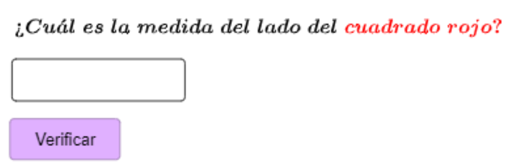


Figura 159

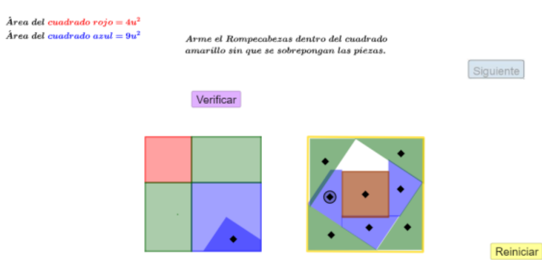


Figura 160

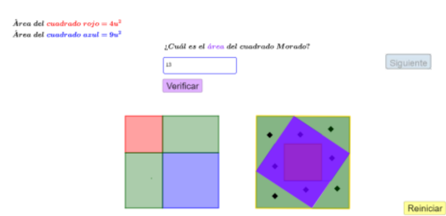


Figura 161

Enunciados y objetivos

A continuación, se encuentra la tabla 11 en la que se presenta el enunciado que acompaña cada momento de la tarea en cuestión, además, cada enunciado está acompañado por el o los objetivos que se esperan alcanzar a lo largo del desarrollo de cada parte de la tarea 3.

Tabla 12: Enunciados y objetivos Tarea 3

	Momento 1	**Momento 2**	**Momento 3**
Enunciado	• Ingrese un dígito • Área del cuadrado rojo $= nu^2$ • Área del cuadrado azul $= mu^2$	• ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado rojo? • ¿Cuál es la medida del cuadrado azul?	• Arme el rompecabezas dentro del cuadrado amarillo sin que se sobrepongan las piezas. • ¿Cuál es el área del cuadrado Morado? • Área del cuadrado morado $= (m+n)u^2$
Objetivos	• Identificar que los números que se ingresaron inicialmente corresponden a las áreas de los cuadrados que aparecen en la interfaz.	• Identificar que la medida del lado del cuadrado rojo corresponde a $\sqrt{n}$ • Identificar que la medida del lado del cuadrado azul corresponde a $\sqrt{m}$	• Identificar que el área del cuadrado amarillo corresponde al área conformada por el cuadrado azul, cuadrado rojo y los rectángulos verdes. • Identificar que a partir de la configuración presentada por esta tarea (Tarea 3) es posible construir a partir de dos cuadrados un tercer cuadrado, cuya área corresponde a la suma de las áreas de los cuadrados iniciales. • Identificar que el área del cuadrado morado es igual a la suma de las áreas de los cuadrados iniciales.

Conocimientos que se esperan alcanzar

- Al sumar las áreas de dos cuadrados se puede obtener como resultado el área de un tercer cuadrado.
- La medida del lado de un cuadrado corresponde a la raíz cuadrada del área.
- La medida de la hipotenusa de los triángulos sombreados en color verde corresponde a la medida del lado del cuadrado morado.
- El área del cuadrado amarillo corresponde al área del cuadrado conformado con las cuatro piezas originales (los dos rectángulos verdes, el cuadrado azul y el cuadrado rojo).

Análisis a priori Tarea 3

En la siguiente tabla se tiene en consideración los casos de acciones y retroacciones que se pueden presentar a lo largo del desarrollo de la Tarea 3, al igual que con las tareas anteriores casa caso se encuentra acompañado de sus respectivas imágenes para ilustrar la situación.

Tabla 13: Análisis a priori de la Tarea 3

<table>
<tr><th colspan="2">Tarea 3</th></tr>
<tr><td>Enlace</td><td>https://www.geogebra.org/m/vgr33gmd</td></tr>
<tr><td colspan="2">Momento 1
• Ingrese un dígito</td></tr>
<tr><th>Acciones del estudiante sobre el medio</th><th>Retroacción del medio</th></tr>
<tr><td>Acción 1: Ingresar un valor que no corresponde a la solicitud dada por el medio.</td><td>Retroacción 1: Para esta acción en particular la retroacción que puede otorgar el medio varía de acuerdo con los números que se ingresen en los cuadros de textos</td></tr>
<tr><td>Caso 1:
Ingresar uno o los dos valores negativos y oprimir el botón “Siguiente”

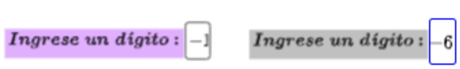



Figura 162</td><td>No se habilita el botón de siguiente</td></tr>
<tr><td>Caso 2:</td><td></td></tr>
</table>

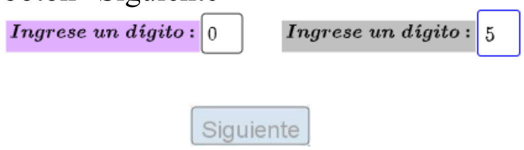
<table>
<tr><td>Ingresar uno o los dos valores como cero y oprimir el botón “Siguiente”


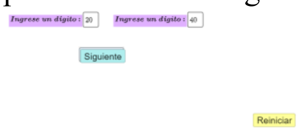
Figura 163</td><td></td></tr>
<tr><td>Caso 3:
Ingresar uno o los dos números mayores a 20 y oprimir el botón “Siguiente”


Figura 164

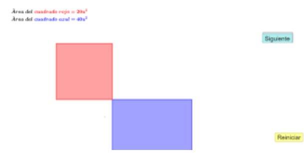



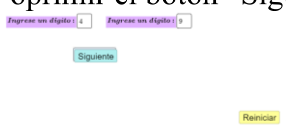
Figura 165</td><td>Aparecen los dos cuadrados cuyas áreas corresponden con los valores ingresados previamente, pero debido a que el o los cuadrados tienen un área bastante grande, las figuras no aparecen completas o se empiezan a superponer con los otros elementos de la interfaz.
Además, aparece un enunciado en la parte superior derecha el cual indica el valor del área de cada cuadrado.</td></tr>
<tr><td>Acción 2: Ingresar un número de una cifra positivo y oprimir el botón “Siguiente”


Figura 166

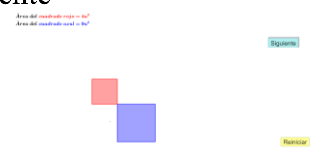



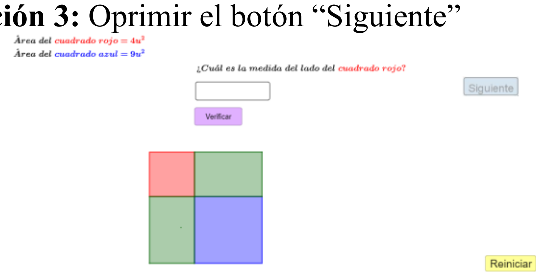
Figura 167</td><td>Retroacción 2: Aparece en la interfaz dos cuadrados, uno sombreado de color azul y el otro sombreado de color rojo; juntas figuras no se superponen con algún otro elemento.
Además, aparece un enunciado en la parte superior derecha el cual indica el valor del área de cada cuadrado.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Momento 2
• ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado rojo?
• ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado azul?</td></tr>
<tr><td>Acción 3: Oprimir el botón “Siguiente”


Figura 168</td><td>Retroacción 3: Aparece en la interfaz dos rectángulos que completan un cuadrado cuya área es la suma del área del cuadrado rojo, el cuadrado azul y los dos rectángulos verdes. También se encuentran los dos enunciados iniciales que indican las áreas de los cuadrados y la primera pregunta “¿Cuál es la medida del lado del cuadrado rojo?”.</td></tr>
<tr><td>Acción 4: Ingresar en los cuadros de texto un valor que no corresponde y oprimir el botón “verificar”.</td><td>Retroacción 4: Se sombrea de color rojo el cuadro de texto, indicando que el número ingresado no corresponde con la respuesta correcta.</td></tr>
</table>

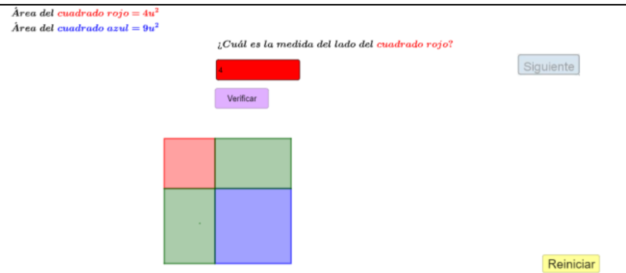
<table>
<tr>
<td>

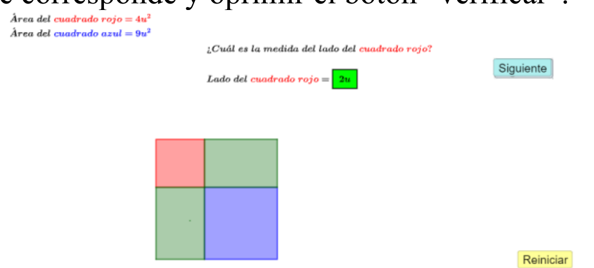
Figura 169</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Acción 5: Ingresar en los cuadros de texto el valor que corresponde y oprimir el botón “verificar”.


Figura 170</td>
<td>Retroacción 5: Se sombrea de color verde el cuadro de texto, indicando que el número ingresado corresponde con la respuesta correcta.
Además, dicho cuadro de texto se acompaña del enunciado “Lado del cuadrado rojo =” o “Lado del cuadrado azul =”.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Momento 3

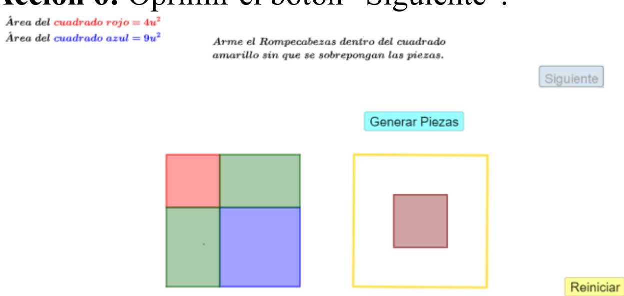
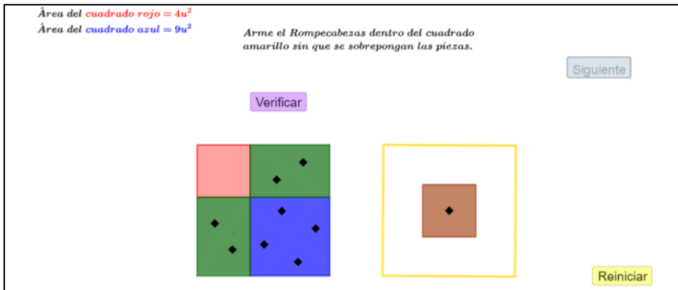
Arme el rompecabezas dentro del cuadrado amarillo sin que se sobrepongan las piezas.
¿Cuál es el área del cuadrado Morado?
Área del cuadrado morado $= (m + n)u^2$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Acción 6: Oprimir el botón “Siguiente”.


Figura 171</td>
<td>Retroacción 6: Ahora aparece en la interfaz el enunciado “Arme el rompecabezas dentro del cuadrado amarillo sin que se sobrepongan las piezas”, acompañado de todos los elementos previos, el cuadrado comprendido por los cuadrados azul y rojo y los dos rectángulos de color verde, además, los dos enunciados que indican el área de cada cuadrado, adicionalmente se encuentra un cuadrado amarillo y en su interior está el cuadrado sombreado de color rojo.
Adicionalmente, aparece habilitado el botón “Generar Piezas”.</td>
</tr>
<tr>
<td>Acción 7: Oprimir el botón “Generar Piezas”.</td>
<td>Retroacción 7: Aparecen ocho piezas del rompecabezas, dichas piezas se encuentran sobre las figuras mencionadas con anterioridad (dos cuadrados azul y rojo y dos rectángulos de color verde). También se encuentra el botón “Verificar” habilitado.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>
Figura 172</td><td></td></tr>
<tr><td>Acción 8: Arrastras las figuras de tal manera que el rompecabezas no este armado de forma correcta y oprimir el botón “Verificar”.

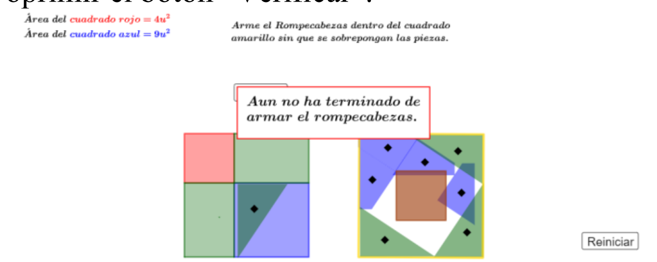



Figura 173</td><td>Retroacción 8: Aparece en la interfaz un nuevo enunciado el cual dice “Aun no ha terminado de armar el rompecabezas”. El cual desaparece en cuanto se arrastre nuevamente alguna de las figuras.</td></tr>
<tr><td>Acción 9: Arrastrar las figuras de tal manera que el rompecabezas se arme de forma correcta y oprimir el botón “verificar”.

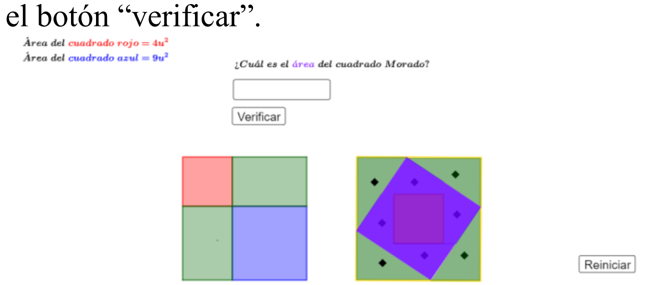
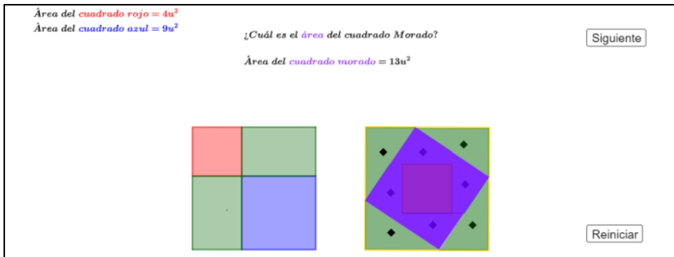
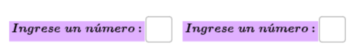



Figura 174</td><td>Retroacción 9: el área comprendida por las fichas que corresponden al cuadrado rojo y azul se sombrea de color morado, dicha área corresponde a la de un cuadrado; además, aparece en la interfaz la pregunta “¿Cuál es el área del cuadrado Morado?”, acompañada de un cuadro de texto en donde el usuario debe ingresar la respuesta.</td></tr>
<tr><td>Acción 10: Escribir una respuesta incorrecta en el cuadro de texto y oprimir el botón “Verificar”.

Figura 175</td><td>Retroacción 10: Se sombrea de color rojo el cuadro de texto.</td></tr>
<tr><td>Acción 11: Escribir la respuesta correcta en el cuadro de texto y oprimir el botón “Verificar”.</td><td>Retroacción 11: Aparece un nuevo enunciado el cual dice “Área del cuadrado morado $= pu^2$” (donde p corresponde al área del cuadrado morado)</td></tr>
</table>

 *Figura 176*	
Acción 12: Oprimir el botón "Reiniciar".  *Figura 177*	**Retroacción 12:** Aparece en la interfaz la primera indicación de la tarea 3.
Acción 13: Oprimir el botón "Siguiente".  *Figura 178*	**Retroacción 13:** Aparece en la interfaz el enunciado "Segunda parte"

6.4 Tarea 4

Esta tarea se encuentra directamente relacionada con la tarea anterior, pues las áreas de los cuadriláteros que se presentan en esta corresponden a las áreas elegidas en la Tarea 3. En la interfaz de la Tarea 4 se encuentra un triángulo sombreado en color verde y sobre cada lado del triángulo se presenta un cuadrilátero, también se encuentra un deslizador el cual modifica el tamaño del ángulo α y a su vez el área del cuadrilátero que se encuentra sobre el $\overline{T_1R_1}$. Al mover el deslizador aparece en la interfaz la pregunta "¿Qué se modifica en la figura?" acompañada de tres opciones de respuesta y un botón de "verificar", al seleccionar las opciones correctas y oprimir el botón de verificar nuevamente aparece otra pregunta "¿Qué condición hace falta para que el cuadrado sobre el segmento $\overline{T_1R_1}$ tenga un área igual a pu^2[13]?”, esta pregunta está acompañada por un cuadro de texto en el cual el usuario debe escribir la respuesta y luego oprimir el botón “verificar”.

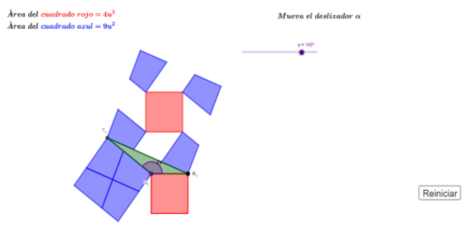


Figura 179

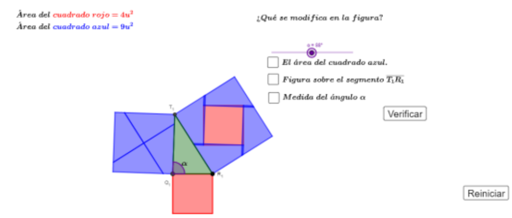


Figura 180

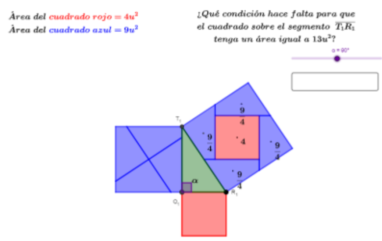


Figura 181

Enunciados y objetivos

A continuación, se encuentra una tabla en la que se presenta el enunciado de cada momento de la tarea en cuestión, además, cada enunciado está acompañado por el o los objetivos que se esperan alcanzar a lo largo del desarrollo de cada parte de la tarea 4.

Tabla 14: Enunciados y objetivos Tarea 4

	Momento 1	**Momento 2**	**Momento 3**
Enunciado	• Mueva el deslizador α	• ¿Qué se modifica en la figura? ○ El área del cuadrado azul ○ Figura sobre el $\overline{T_1R_1}$. ○ Medida del ángulo α	• ¿Cuál debe ser la medida del ángulo α para que se forme el cuadrado de área igual a pu^2 sobre $\overline{T_1R_1}$?
Ob…	• Identificar con que elemento de la figura	• Identificar los elementos que se alteran en la figura,	• Identificar que el triángulo debe ser rectángulo para

[13]Para este caso, p se refiere al valor que puede tomar el área del cuadrilátero en cuestión, dicho valor depende de los valores que el usuario ingrese al iniciar la tarea 3

	está directamente relacionado el deslizador α.	al modificables la posición del deslizador α. • Interpretar el significado de las modificaciones. • Identificar que la medida de los catetos $\overline{T_1Q_1}$ y $\overline{Q_1R_1}$ no se alteran al mover el deslizador. • Identificar que las áreas de los cuadrados sobre $\overline{T_1Q_1}$ y $\overline{Q_1R_1}$ no se alteran al cambiar la posición del deslizador α.	que el área del cuadrilátero sobre el $\overline{T_1R_1}$ sea igual a pu^2. • Identificar que el área del cuadrado sobre $\overline{T_1R_1}$ es igual a la suma de las áreas de los cuadriláteros que se encuentran sobre los otros dos catetos del triángulo. • Identificar que los cuadrados sombreados en color azul y rojo corresponden a los cuadrados utilizados a lo largo de la Tarea 3.

Conocimientos que se esperan alcanzar

- Si $\Delta Q_1T_1R_1$ es rectángulo con $m\angle R_1Q_1T_1$ igual a 90°, entonces el área del cuadrado sobre $\overline{T_1R_1}$ es igual a la suma de las áreas de los cuadrados que se encuentran sobre $\overline{T_1Q_1}$ y $\overline{Q_1R_1}$.

Análisis a priori Tarea 4

En seguida se encuentra la tabla 14 en la cual se presentan las posibles acciones que el usuario puede realizar sobre el medio (Tarea 4) y las posibles retroacciones que el medio puede arrojar como respuesta. Cada acción – retroacción se encuentra acompañada por una imagen que ilustra la situación.

Tabla 15: Análisis a priori Tarea 4

Tarea 4		
Enlace	https://www.geogebra.org/m/vgr33gmd	
Momento 1 • Mueva el deslizador α		
Acciones del estudiante sobre el medio		**Retroacción del medio**
Acción 1: Tratar de mover alguno de los puntos R_1, Q_1 o T_1		**Retroacción 1, 2, 3 y 4:** No se modifican los elementos de la interfaz.

<table>
<tr><td>Acción 2: Tratar de mover los cuadriláteros implicados en la figura.</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>Acción 3: Tratar de mover los catetos del $\Delta Q_1 T_1 R_1$</td></tr>
<tr><td>Acción 4: Tratar de mover el ángulo α ($\angle R_1 Q_1 T_1$).

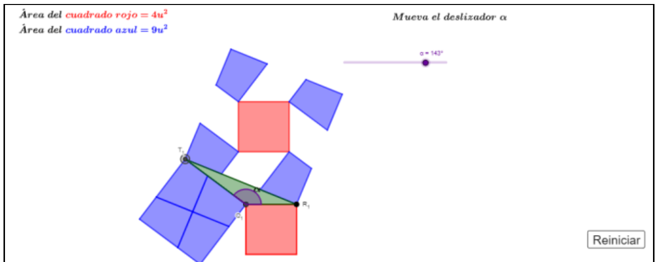



Figura 182</td></tr>
<tr><td>Acción 5: Mover el deslizador α

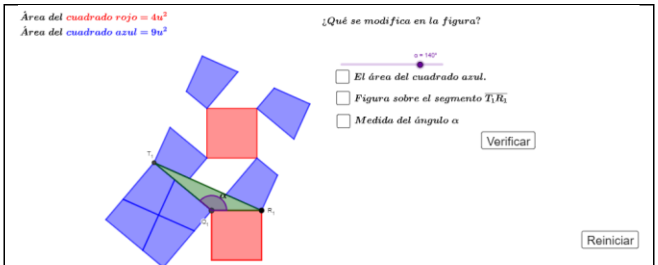



Figura 183</td><td>Retroacción 5: Aparece en la interfaz la pregunta “¿Qué se modifica en la figura?”, acompañada de las siguientes opciones de respuesta.
• El área del cuadrado azul
• Figura sobre el segmento $\overline{T_1 R_1}$
• Medida del ángulo α
Además, se presente en la interfaz el botón “Verificar”.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nota: La figura 181 corresponde a la ilustración que acompaña a las acciones 1, 2, 3 y 4.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Momento 2
• ¿Qué se modifica en la figura?
    ○ El área del cuadrado azul
    ○ Figura sobre el segmento $\overline{T_1 R_1}$
    ○ Medida del ángulo α</td></tr>
<tr><td>Acción 6: Elegir la opción incorrecta y oprimir el botón verificar.

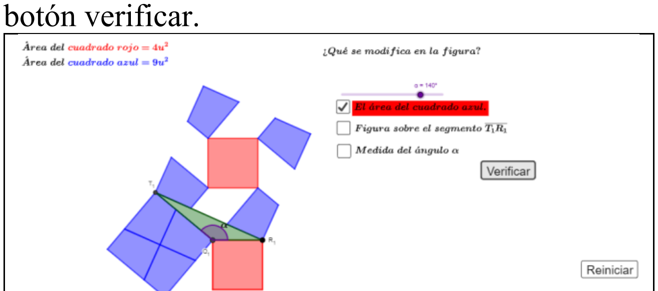



Figura 184</td><td>Retroacción 6: La opción elegida se resalta en color rojo.</td></tr>
<tr><td>Acción 7: Elegir una afirmación correcta y una afirmación incorrecta, luego oprimir el botón “verificar”.</td><td>Retroacción 7: Se resalta en color rojo la afirmación incorrecta y en color verde la afirmación correcta.</td></tr>
</table>

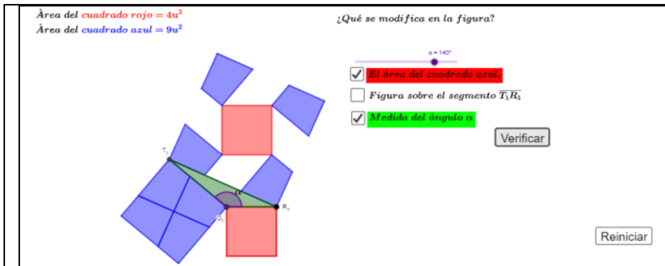
<table>
<tr><td>

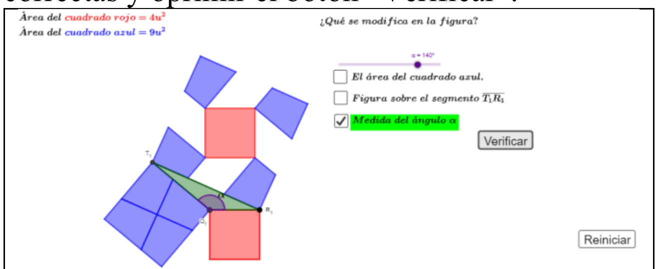
Figura 185</td><td></td></tr>
<tr><td>Acción 8: Elegir solo una de las afirmaciones correctas y oprimir el botón “Verificar”.


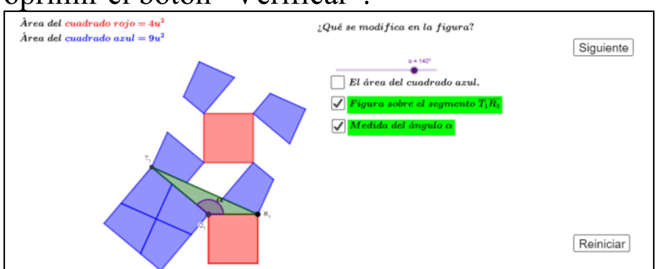
Figura 186</td><td>Retroacción 8: Se resalta en color verde únicamente la afirmación elegida.</td></tr>
<tr><td>Acción 9: Elegir las dos afirmaciones correctas y oprimir el botón “Verificar”.


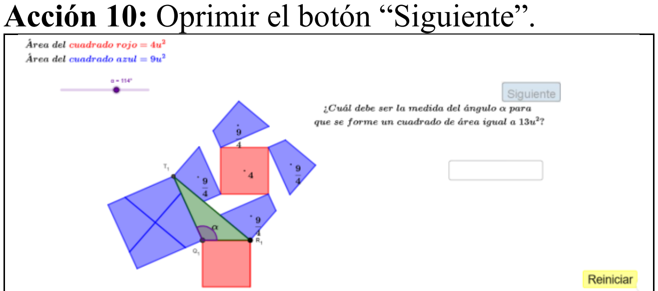
Figura 187</td><td>Retroacción 9: Se resaltan en color verde las dos afirmaciones elegidas, además, aparece en la interfaz un nuevo botón que lleva el nombre de “Siguiente” y desaparece el botón “verificar”.</td></tr>
<tr><td>Acción 10: Oprimir el botón “Siguiente”.


Figura 188</td><td>Retroacción 10: Aparece en la interfaz la pregunta “¿Cuál debe ser la medida del ángulo α para que se forme el cuadrado de área igual a pu^2 sobre $\overline{T_1R_1}$?” acompañada de un cuadro de texto donde el estudiante debe ingresar la respuesta correcta y el botón “verificar”.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Momento 3
¿Cuál debe ser la medida del ángulo α para que se forme el cuadrado de área igual a pu^2 sobre $\overline{T_1R_1}$?</td></tr>
<tr><td>Acción 11: Ingresar una respuesta incorrecta.</td><td></td></tr>
</table>

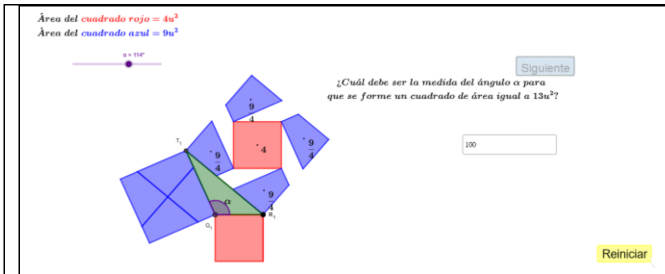
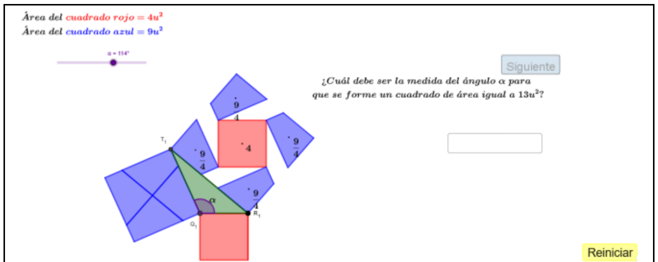
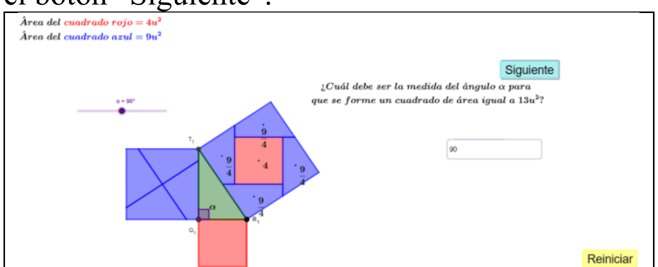
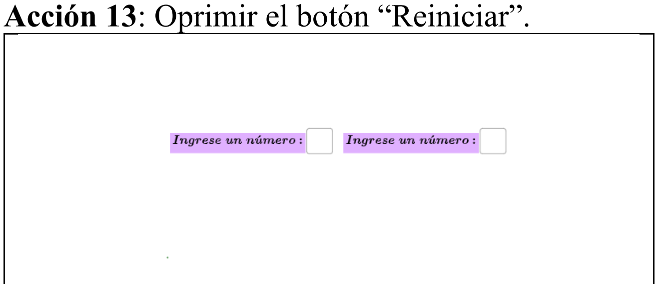
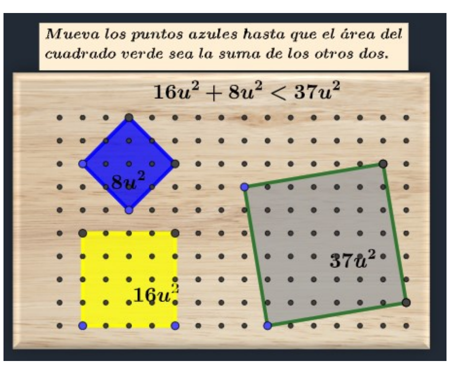
 *Figura 189* **Acción 12:** No ingresar valores en el cuadro de texto.  *Figura 190*	**Retroacción 11 y 12:** No se modifica la interfaz, es decir, el botón “siguiente” no se habilita.
Acción 13: Ingresar la respuesta correcta y oprimir el botón “Siguiente”.  *Figura 191*	**Retroacción 13:** Se habilita el botón “Siguiente”.
Acción 13: Oprimir el botón “Reiniciar”.  *Figura 192*	**Retroacción 13:** Aparece en la interfaz la primera indicación de la tarea 3.
Acción 14: Oprimir el botón “Siguiente”.	**Retroacción 14:** Aparece en la interfaz “Tarea Finalizada”.

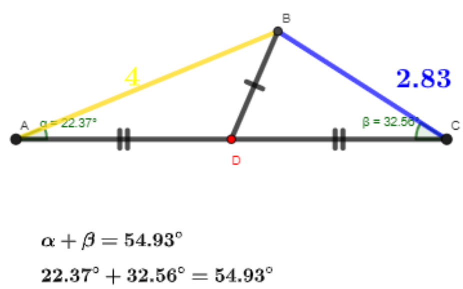
Figura 193

6.5 Tarea 5

En esta tarea se presenta el reciproco del Teorema de Pitágoras, es decir, aquí el usuario debe alterar las áreas de los cuadrados de color azul y amarillo, de tal manera que al sumarlas coincida con el área del cuadrado verde (Construcción 1, Figura 194), lo que produce que el triángulo que se encuentra del lado derecho se altere en tamaño y tipo (equilátero, isósceles, escaleno, rectángulo, obtusángulo o acutángulo) (Construcción 2, Figura 194). Por tanto, lo que se espera es que el usuario parta de la interacción con las áreas de los cuadrados e identifique que para si cumple el antecedente, – la suma de las áreas –, entonces ΔABC es rectángulo recto en $\angle ABC$.



Construcción 1



Construcción 2

Figura 194

Enunciados y objetivos

A continuación, se encuentra la tabla 15, en ella se presenta el enunciado de cada momento de la tarea en cuestión, además, cada enunciado está acompañado por el o los objetivos que se esperan alcanzar a lo largo del desarrollo de cada parte de la tarea 5.

Tabla 16: Enunciados y objetivos Tarea 5

	Momento 1	**Momento 2**	**Momento 3**
Enunciado	Mueva los puntos azules hasta que área del cuadrado verde sea la suma de los otros dos.	¿Qué tipo de triángulo es el ΔABC?	¿Qué relación hay entre las áreas de los cuadrados?
Objetivos	• Identificar que el área del cuadrado de color verde debe ser mayor que el área de los otros dos cuadrados. • Identificar que el área de cada cuadrado está directamente relacionada con la longitud de uno de los lados del triángulo (construcción 2). • Identificar que al modificar las áreas de los cuadrados también se modifican los ángulos del triángulo (Construcción 2).	• Identificar que si la suma de las áreas de los cuadrados azul y amarillo es igual al área del cuadrado de color verde entonces el triángulo ΔABC es rectángulo.	• Identificar que la suma de las áreas de los cuadrados azul y amarillo es igual al área del cuadrado de color verde.

Conocimientos que se esperan alcanzar

- Si la suma de las áreas de los cuadrados amarillo y azul es igual al área del cuadrado verde, entonces el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.
- $AB^2 + BC^2 = CA^2$

Análisis a priori Tarea 5

A continuación, se encuentra la tabla 16 en donde se presentan detalladamente las posibles acciones que el estudiante realiza sobre el medio y de acuerdo con cada acción se relaciona una retroacción que el medio le puede otorgar al usuario. Esta tabla está dividida en tres momentos, cada uno corresponde a una pregunta que el medio presenta.

Tabla 17: Análisis a priori Tarea 5

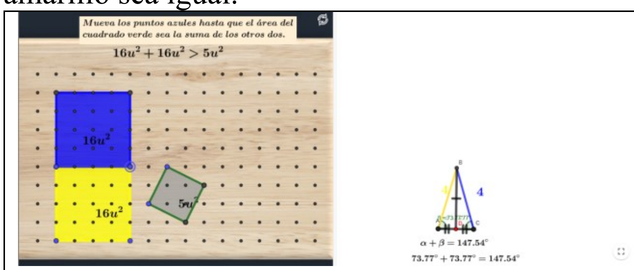
<table>
<tr><th colspan="2">Tarea 5</th></tr>
<tr><td>Enlace</td><td>https://www.geogebra.org/m/udbaeunu</td></tr>
<tr><td colspan="2">Momento 1
• Mueva los puntos azules hasta que área del cuadrado verde sea la suma de los otros dos.</td></tr>
<tr><th>Acciones del estudiante sobre el medio</th><th>Retroacción del medio</th></tr>
<tr><td>Acción 1: Mover alguno de los puntos azules, de tal manera que el área de los cuadrados azul y amarillo sea igual.


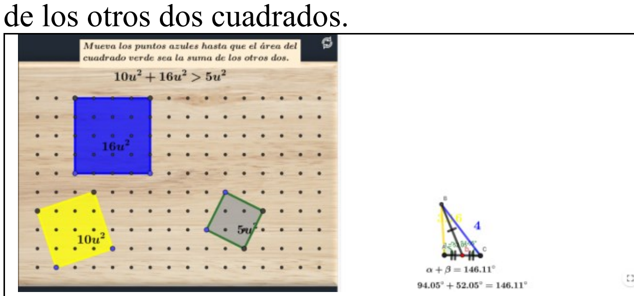
Figura 195</td><td>Retroacción 1: La desigualdad de la construcción 1 no cambia de sentido y el $\triangle ABC$ es isósceles y acutángulo.</td></tr>
<tr><td>Acción 2: Mover los puntos azules de tal manera que el área del cuadrado azul sea mayor que el área de los otros dos cuadrados.


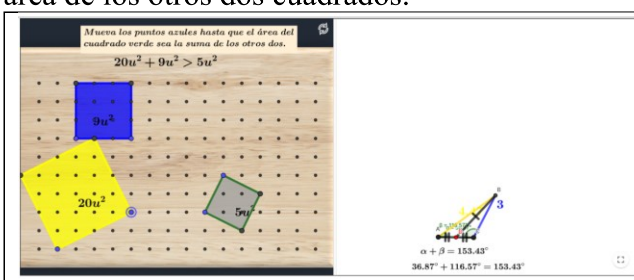
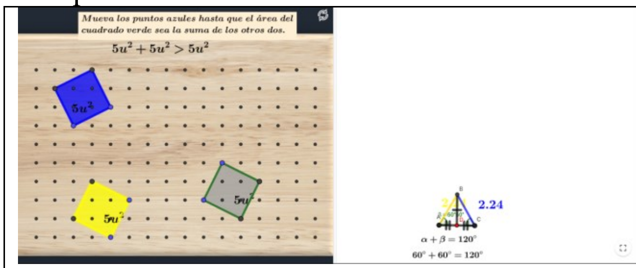
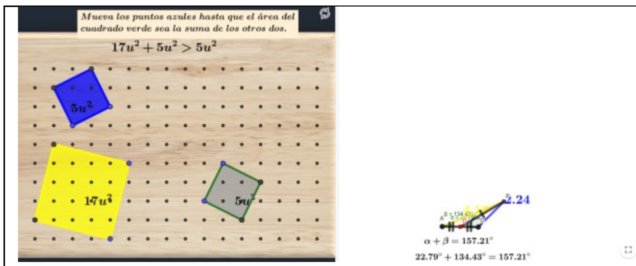
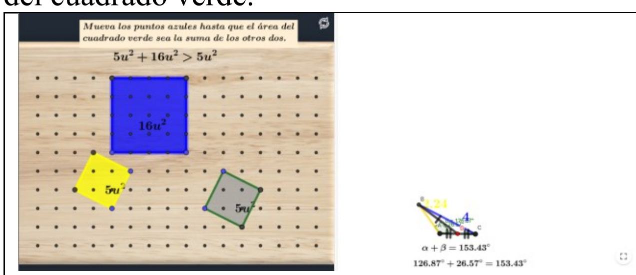
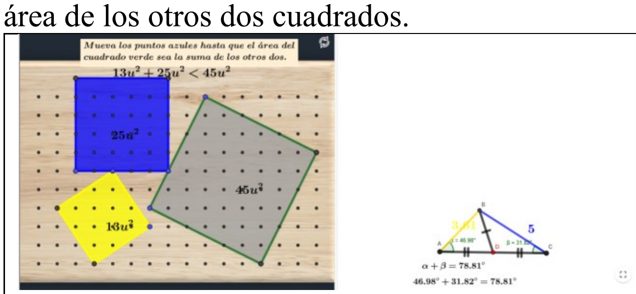
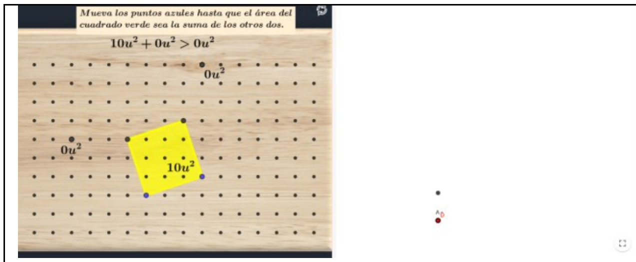
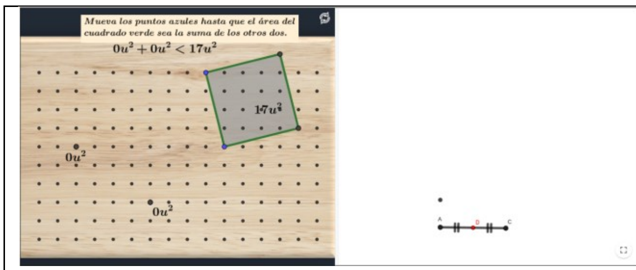
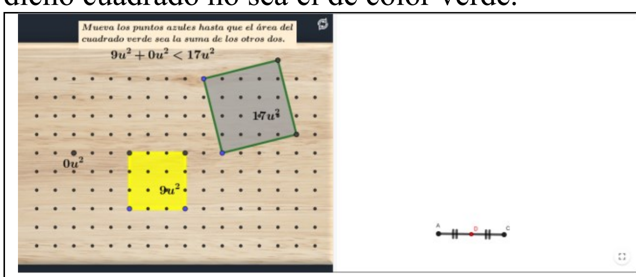
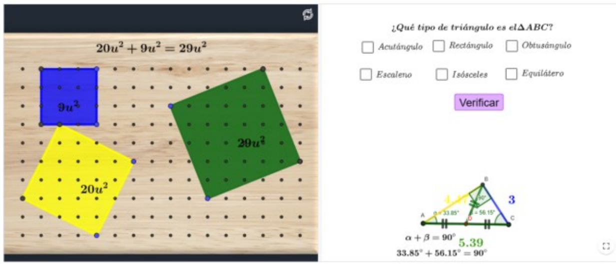
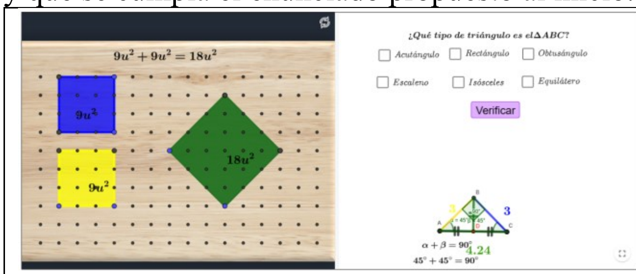
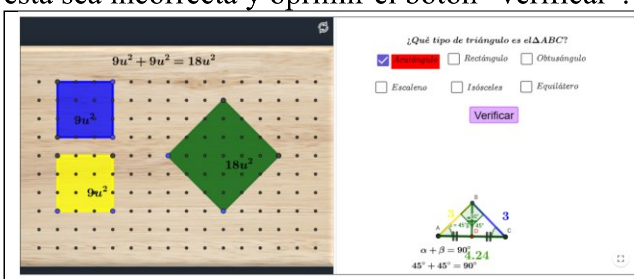
Figura 196</td><td>Retroacción 2: La desigualdad del lado izquierdo no cambia de sentido, por otro lado, el $\triangle ABC$ es obtusángulo y escaleno con $\angle BAC$ obtuso.</td></tr>
<tr><td>Acción 3: Mover los puntos azules de tal manera que el área del cuadrado amarillo sea mayor que el área de los otros dos cuadrados.


Figura 197</td><td>Retroacción 3: respecto a la construcción 1 la desigualdad no cambia de sentido, por otro lado, el $\triangle ABC$ es obtusángulo y escaleno con $\angle BCA$ obtuso.</td></tr>
</table>

Acción 4: Mover los puntos azules de tal manera que los cuadrados azul y amarillo tengan la misma área que el cuadrado verde.  *Figura 198*	**Retroacción 4:** respecto a la construcción 1 la desigualdad no cambia de sentido y en la construcción 2 el $\triangle ABC$ es equilátero y acutángulo.
Acción 5: Mover los puntos azules de tal manera que el área del cuadrado azul es igual al área del cuadrado verde.  *Figura 199*	**Retroacción 5:** respecto a la construcción 1 la desigualdad no cambia de sentido, por otro lado, el $\triangle ABC$ es obtusángulo y escaleno con $\angle BCA$ obtuso.
Acción 6: Mover los puntos azules de tal manera que el área del cuadrado amarillo es igual al área del cuadrado verde.  *Figura 200*	**Retroacción 6:** respecto a la construcción 1 la desigualdad no cambia de sentido, por otro lado, el $\triangle ABC$ es obtusángulo y escaleno con $\angle BAC$ obtuso.
Acción 7: Mover los puntos azules de tal manera que el área del cuadrado verde sea mayor que el área de los otros dos cuadrados.  *Figura 201*	**Retroacción 7:** Respecto a la construcción 1 la desigualdad cambia de sentido y respecto a la construcción 2 el $\triangle ABC$ es obtusángulo y escaleno con $\angle ABC$ obtuso.

Acción 8: Mover los puntos azules de tal manera que el área de dos de los cuadrados sea cero y que uno de estos cuadrados sea el cuadrado verde.  *Figura 202*	**Retroacción 8:** Respecto a la construcción 1 la suma de las áreas es mayor que el área del cuadrado verde y respecto a la construcción 2, deja de existir el $\triangle ABC$ dejando a la vista solo los puntos A y D.
Acción 9: Mover los puntos azules de tal manera que el área de los cuadrado azul y amarillo sean cero.  *Figura 203*	**Retroacción 9:** De acuerdo con la construcción 1 la desigualdad presenta que, la suma de las áreas de los cuadrados amarillo y azul es menor que el área del cuadrado verde. Por otro lado, en la construcción 2 se muestra en la interfaz el $\overline{AC}$ y el punto D que es punto medio de $\overline{AC}$ y un punto sin nombre.
Acción 10: Mover los puntos de tal manera que el área de solo uno de los cuadrados sea cero y que dicho cuadrado no sea el de color verde.  *Figura 204*	**Retroacción 10:** Respecto a la construcción 1 el número mayor corresponde con el área del cuadrado verde, respecto a la constricción 2, se muestra en la interfaz el $\overline{AC}$ y el punto D que es punto medio de $\overline{AC}$.
Acción 11: Mover los puntos azules de tal manera que las áreas de los tres cuadrados sean igual a cero.  *Figura 205*	**Retroacción 11:** Respecto a la construcción 1 la desigualdad cambia a una igualdad, por otro lado, no aparece triángulo alguno, pero si aparece la pregunta "¿Qué tipo de triángulo es el $\triangle ABC$?" acompañado de seis posibles respuestas.

Acción 12: Mover los puntos azules de tal manera que se cumpla el enunciado propuesto al inicio.  *Figura 206*	**Retroacción 12:** En la construcción 1 la desigualdad cambia a una igualdad, además el cuadrado verde se torna en un tono más oscuro; en la construcción 2 aparece la pregunta "¿Qué tipo de triángulo es el $\triangle ABC$?" acompañado de seis posibles respuestas, además, el $\triangle ABC$ es un triángulo escaleno y rectángulo con $\angle ABC$ recto.
Acción 13: Mover los puntos de tal manera que el área de los cuadrados azul y amarillo sean iguales y que se cumpla el enunciado propuesto al inicio.  *Figura 207*	**Retroacción 13:** En la construcción 1 la desigualdad cambia a una igualdad, además el cuadrado verde se torna en un tono más oscuro; en la construcción 2 aparece la pregunta "¿Qué tipo de triángulo es el $\triangle ABC$?" acompañado de seis posibles respuestas, además, el $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles y rectángulo con $\angle ABC$ recto.
Momento 2: • ¿Qué tipo de triángulo es el $\triangle ABC$?	
Acción 14: Elegir solo una de las categorías y que esta sea incorrecta y oprimir el botón "verificar".  *Figura 208*	**Retroacción 14:** Se resalta de color rojo la respuesta elegida.
Acción 15: Elegir una opción de cada clasificación, pero que estas sean respuestas erróneas y oprimir el botón "verificar".	**Retroacción 15:** Se resaltan de color rojo la respuesta elegida.

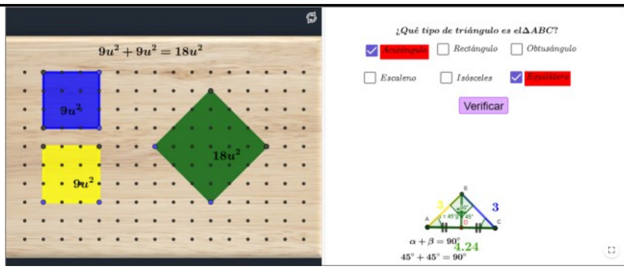
<table>
<tr><td>

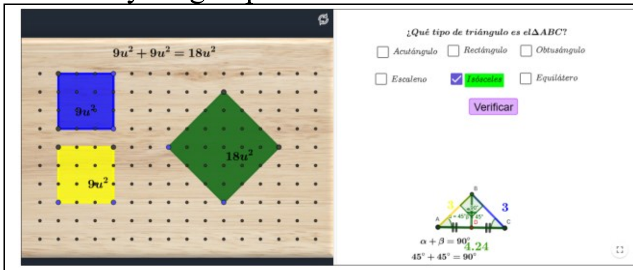
Figura 209</td><td></td></tr>
<tr><td>Acción 16: Elegir solo una de las opciones correctas y luego oprimir el botón “verificar”.


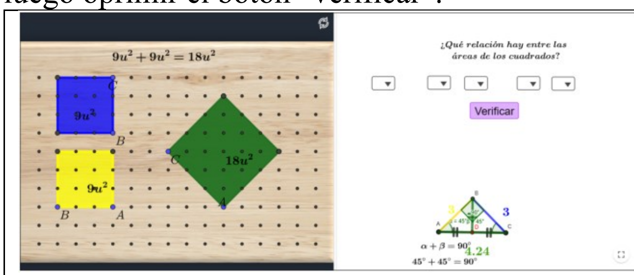
Figura 210</td><td>Retroacción 16: Se resalta de color verde la respuesta elegida.</td></tr>
<tr><td>Acción 17: Elegir las dos opciones correctas y luego oprimir el botón “verificar”.


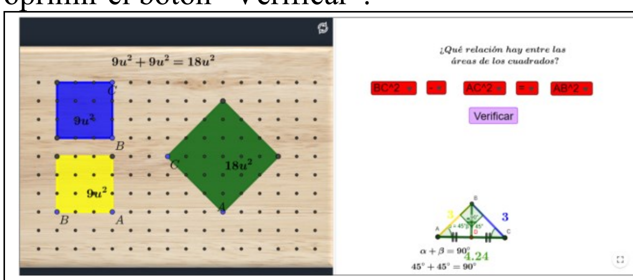
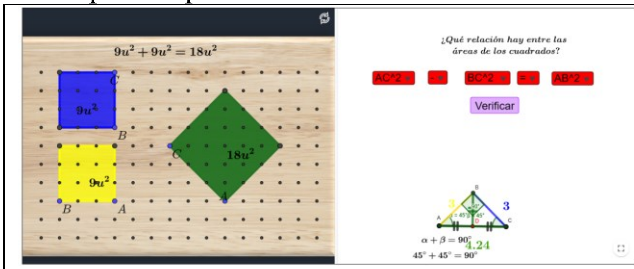
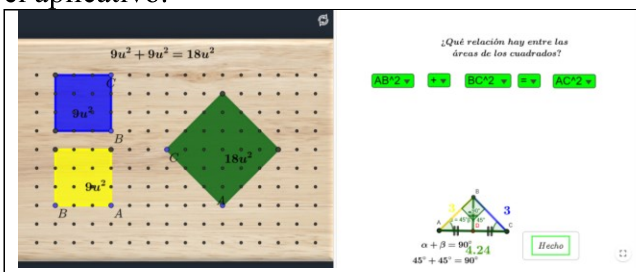
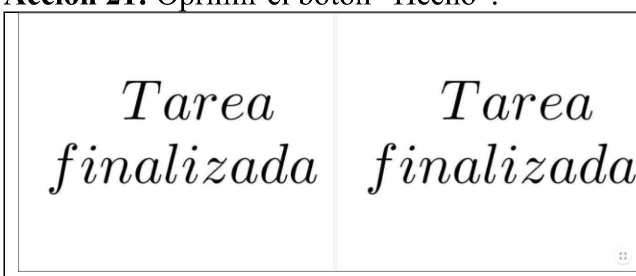
Figura 211</td><td>Retroacción 17: Se cambia instantáneamente a la tercera y última parte de la tarea, en dónde aparece la pregunta “¿Qué relación hay entre las áreas de los cuadrados?” y sus respectivas opciones de pregunta.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Momento 3
• ¿Qué relación hay entre las áreas de los cuadrados?</td></tr>
<tr><td>Acción 18: Elegir una respuesta incorrecta y oprimir el botón “Verificar”.


Figura 212</td><td>Retroacción 18: Los cuadros de textos se sombrean de color rojo, indicando que la respuesta es incorrecta.</td></tr>
</table>

Acción 19: Elegir una respuesta correcta, pero no valida por el aplicativo.  *Figura 213*	**Retroacción 19:** Los cuadros de textos se sombrean de color rojo, indicando que la respuesta es inválida.
Acción 20: Elegir la respuesta correcta y valida por el aplicativo.  *Figura 214*	**Retroacción 20:** Los cuadros de texto se sombrean de color verde, indicando que la respuesta es válida, además, aparece en la interfaz el botón “Hecho”.
Acción 21: Oprimir el botón “Hecho”.  *Figura 215*	**Retroacción 21:** Aparece en la interfaz “Tarea finalizada”.

6.6 Tarea 6

Esta tarea se presenta como la tarea de cierre y “evaluación”, en donde el estudiante debe determinar si los lados de los tres cuadrados que se encuentran en la interfaz corresponden con los lados de un triángulo rectángulo; para ello tiene tres posibles opciones “Si”, “No” y “No hay triángulo”, además, en la interfaz cada cuadrado tiene su respectiva área (Figura 216); para esta tarea se presentan cinco diferentes ejercicios y el estudiante conocerá si su respuesta a cada ejercicio es correcta o incorrecta solo al finalizar la tarea.

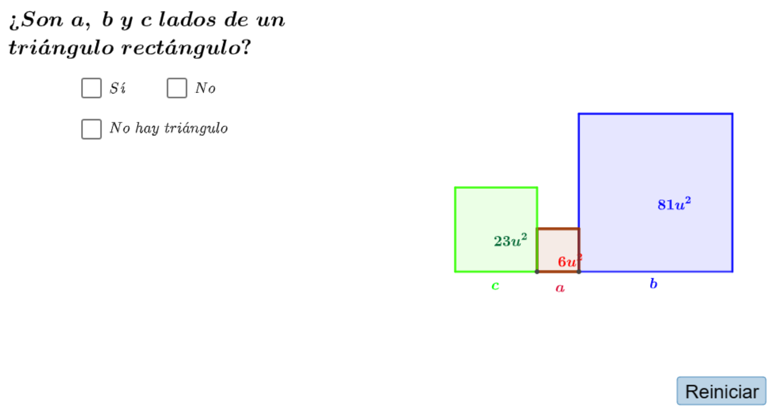


Figura 216

Enunciados y objetivos

A continuación, se presenta la tabla 17 en la que se encuentra el enunciado de cada momento de la tarea en cuestión, además, cada enunciado está acompañado por el o los objetivos que se esperan alcanzar a lo largo del desarrollo de esta tarea final.

Tabla 18: Enunciados y objetivos Tarea 6

	Tarea 6
Enunciado	¿Son a, b y c lados de un triángulo rectángulo?
Objetivos	Reconocer y utilizar el recíproco del Teorema de Pitágoras

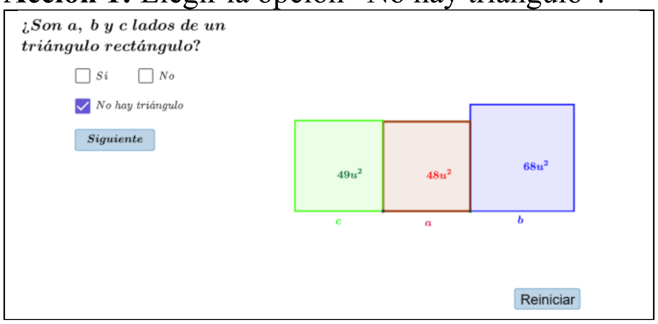
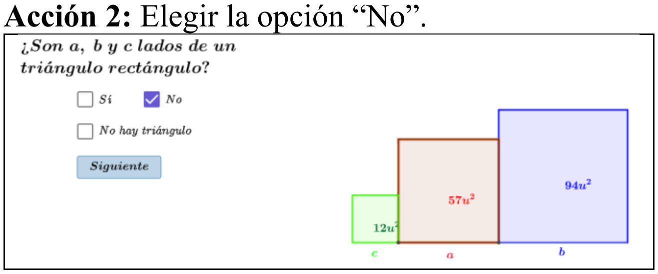
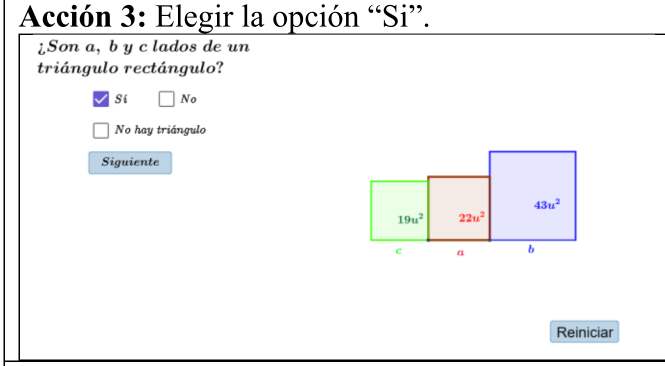
Conocimientos que se esperan fortalecer

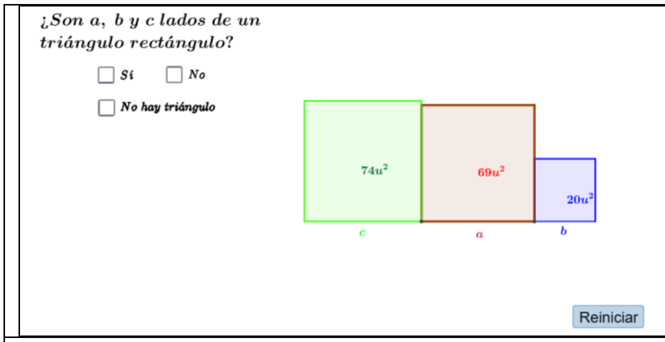
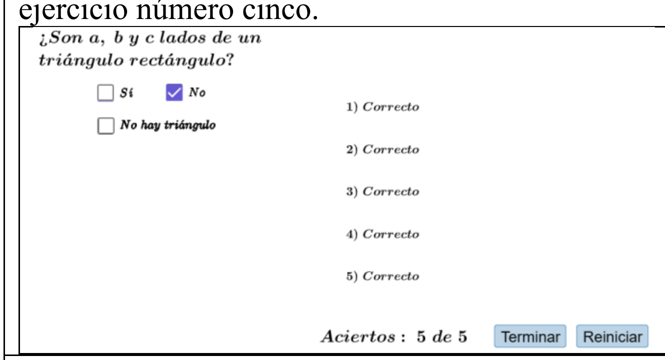
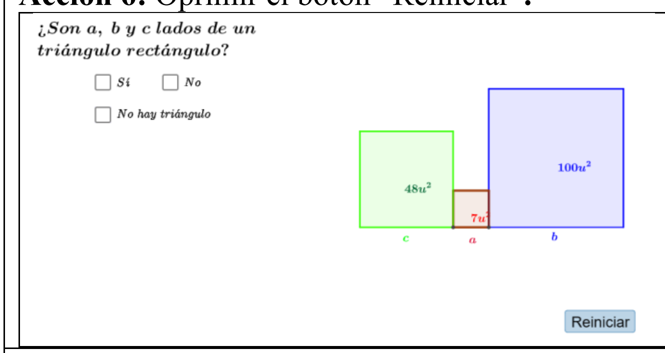
- Si la suma de los cuadrados de los lados de un triángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa, entonces el triángulo es rectángulo.

Análisis a priori Tarea 6

En seguida se encuentra la tabla 18 en la cual se presentan las posibles acciones que el usuario puede realizar sobre el medio (Tarea 6) y las posibles retroacciones que el medio puede arrojar como respuesta. Cada acción – retroacción se encuentra acompañada por una figura que ilustra la situación.

Tabla 19: Análisis a priori Tarea 6

<table>
<tr><th colspan="3">Tarea 6</th></tr>
<tr><td>Enlace</td><td colspan="2">https://www.geogebra.org/classroom/vzpkcvet</td></tr>
<tr><td colspan="3">• ¿Son a, b y c lados de un triángulo rectángulo?</td></tr>
<tr><td colspan="3">Nota: La dinámica de elección de respuesta es igual para los cinco casos, por tanto, a continuación, se mostrará las posibles acciones que el estudiante puede hacer en uno de los casos dados y se asume que este proceso se repite para todos los ejercicios dados.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Acciones del estudiante sobre el medio</th><th>Retroacción del medio</th></tr>
<tr><td colspan="2">Acción 1: Elegir la opción “No hay triángulo”.

</td><td rowspan="3">Retroacción 1: Aparece en la interfaz el botón “Siguiente”.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acción 2: Elegir la opción “No”.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acción 3: Elegir la opción “Si”.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acción 4: Oprimir el botón “Siguiente”.</td><td>Retroacción 4: En la interfaz aparece otra triada de cuadrados, diferente a la que se presentada al inicio.</td></tr>
</table>

	
Nota: Al realizar la selección en el último caso y oprimir el botón siguiente aparece la siguiente interfaz.	
Acción 5: Oprimir el botón “Siguiente” en el ejercicio número cinco. 	**Retroacción 5:** Aparece en la interfaz la cantidad de veces que acertó y la cantidad de veces que no acertó; esto acompañado de los botones “Terminar” y “Reiniciar”.
Acción 6: Oprimir el botón “Reiniciar”**.** 	**Retroacción 6:** La tarea vuelve al inicio, pero las áreas de los cuadrados cambian.
Acción 7: Oprimir el botón “Terminar”. 	**Retroacción 7:** Aparece en la interfaz tarea finalizada.

Finalmente, los elementos antes descritos (Tareas y videos) se encuentran compilados en una página web, en la que el usuario ingresa y se le presentan las indicaciones para poder pasar de forma ordenada de una tarea a su video correspondiente y de este a la siguiente tarea, en procura de la construcción del conocimiento de forma individual, promoviendo de esta forma una situación a-didáctica. A continuación, se presenta el enlace de la página en cuestión: Teorema de Pitágoras

Institucionalización

Para el proceso de institucionalización se hicieron uso de los elementos presentados par Suárez y Zubieta (2022), asociados al estudio de idoneidad de los videos; resaltamos que para las tareas uno, dos y tres, el único indicador que se utilizó fue R1; por su parte, las tareas cuatro, cinco y seis, hacen uso de todos los indicadores antes expuestos.

Es importante mencionar que, como se ha mencionado previamente, el objetivo de este trabajo es realizar algunos acercamientos a la fase de institucionalización; el fin de estos videos es que, una vez los estudiantes han completado cada una de las tareas, puedan observarlos y contrastar el conocimiento construido con el saber, tal y como promueve en la Teoría de Situaciones Didácticas.

CAPÍTULO 7. ANÁLISIS A POSTERIORI

A continuación, se encuentra el análisis de los resultados posteriores a la aplicación de cada una de las tareas descritas anteriormente, en este análisis se destacan los aspectos más relevantes del desarrollo realizado por los estudiantes que participaron en dicho procedimiento, así como los objetivos alcanzados en cada una de las tareas. Ahora, en aras de presentar de manera detallada los errores y dificultades presentados por los estudiantes a lo largo de cada una de las tareas, a continuación, se encuentra una tabla en donde se puede identificar si cada error se presentó o no en el desarrollo de la tarea.

Errores y dificultades presentes en cada tarea

En seguida, se presenta la tabla 20, en ella se encuentran listadas las dificultades evidenciadas en la implementación de cada una de las tareas y los errores asociados a cada dificultad; la justificación del porqué se presentó dichos errores en cada tarea se encuentra en el análisis posterior.

Tabla 20: Errores y Dificultades presentados en el desarrollo de las Tareas

		Tareas					
Dificultades	**Errores**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
D1. No tener presente los conceptos previos (definición de triangulo rectángulo, definición de cuadrilátero, distancia entre dos puntos, formulas, operaciones, etc.)	**E1.** Utilizar de forma inadecuada el lenguaje matemático	**X**	**X**	**X**	**X**		
	E2. Determinar el área de un cuadrilátero de forma inadecuada	**X**		**X**	**X**		
	E3. No reconocer la clasificación de triángulos de acuerdo con los lados y ángulos					**X**	**X**
	E4. No reconocer la clasificación de cuadriláteros	**X**	**X**				
	E5. No identificar las diferencias entre cuadrado y rectángulo.	**X**	**X**				
	E6. No reconocer la clasificación de ángulos					**X**	
	E7. No identificar cuando dos polígonos son semejantes y cuando son congruentes	**X**					
	E8. Confundir las unidades de longitud con las unidades de superficie	**X**	**X**	**X**			
	E9. No aplicar la operación inversa de la potenciación		**X**	**X**			

D2. No reconoce como utiliza adecuadamente los entornos de geometría dinámica como GeoGebra	**E1.** Utilizar incorrectamente el sistema de representación manipulativo	**X**		**X**	**X**		
	E2. Interpretar incorrectamente al sistema de representación gráfico.	**X**	**X**		**X**	**X**	**X**
	E3. No relacionar los segmentos de igual longitud	**X**	**X**				
D3. relacionar de forma inadecuada los conceptos previos con los conocimientos adquiridos	**E2.** En un triángulo rectángulo confundir la hipotenusa con los catetos					**X**	**X**
	E4. Sumar de manera inadecuada las áreas de los cuadriláteros	**X**		**X**	**X**	**X**	**X**

7.1 Tarea 1

Durante el desarrollo de las tareas, algunos estudiantes visualizaron los videos antes de resolverlas, ya que en la página no se encontraba ningún botón que condicionara la visualización de los videos para después de completar cada tarea. Esto evidencia que el proceso de construcción de conocimiento de estos estudiantes se vio truncado, ya que sus respuestas ya no fueron legítimas.

Por otro lado, se evidenció que algunos estudiantes sí leyeron detalladamente cada uno de los párrafos y elementos antes de hacer las tareas, es decir, observaron los videos una vez completada la tarea solicitada, además, escribieron las fórmulas y las definiciones que les parecieron relevantes. (Figura 219).

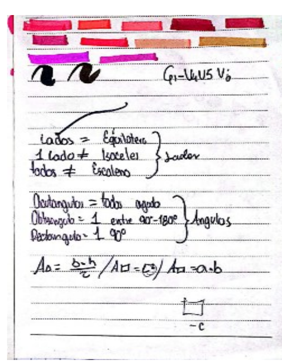


Figura 217

Rectángulo 1

Una de las acciones más frecuentes entre los estudiantes fue tratar de mover los puntos de la construcción 2 (Figura 218); dicha acción no se contempló en el análisis a priori, sin embargo, la retroacción del medio fue nula, pues dichos puntos no se pueden arrastrar; al recibir esta retroacción por parte del medio, los estudiantes *visualizaban* porque identificaban difieres imágenes mentales ya que percibían que dicha acción no se podía realizar, entonces validaban su acción, es decir conjeturaban (no se puede arrastrar el punto) lo que permitía que cambiaran su acción.

Otra acción frecuente entre los estudiantes, pero que sí se contempló en el análisis a priori, fue arrastrar el punto C sobre la circunferencia (Figura 219), pero los estudiantes al ver que la condición dada por el medio no se cumplía optaban por arrastrar a el punto C a otras posiciones diferentes; de acuerdo con la Teoría de Situación Didácticas, lo anterior es evidencia de construcción de conocimiento, pues los estudiantes cambian de acción cuando realizan una validación negativa de la retroacción proporcionada por el medio, además, para realizar este procedimiento de cambio de acción es evidente también que el estudiante tuvo que visualizar (utilizar la herramienta arrastra y hacer imágenes mentales), Conjeturar (Formulación de hipótesis) y argumentación (porque valida de forma negativa su acción).

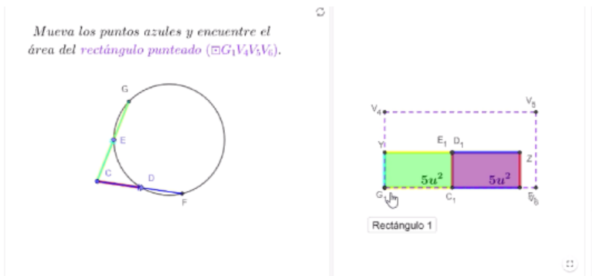


Figura 218

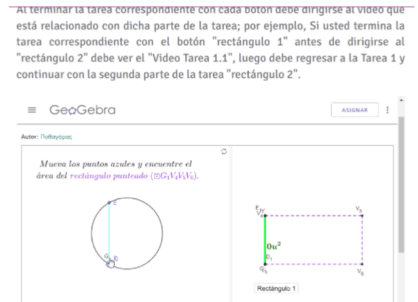


Figura 219

A la hora de responder la pregunta *¿Cuál es el área del cuadrilátero punteado?* Se pudo evidenciar que los estudiantes que no revisaron con detenimiento la sección de conocimientos previos presentaban dificultades, dado que confundían el área de los cuadriláteros verde y morado con la medida del lado de cada uno de ellos; este tipo de aspectos se pusieron en evidencia en situaciones como la siguiente:

Diálogo 1
Estudiante 1: Suponiendo que cada lado mide $12u^2$ ¿cierto? Y se multiplica 12×12 ... Pero ese resultado no es. El área es base por altura, pero no puede ser tan grande el área de esos cuadriláteros.
Estudiante 2: 144 por 2 e 288. No, no da.

Diálogo 2
Estudiante 3: Entonces ¿$12u^2$ es el área de cada cuadrilátero?
Estudiante 4: No, es la medida del lado… Creo

Diálogo 3
Estudiante 5: "¿24? No porque es 12 a la dos"
Estudiante 6: "o es 12×12, no porque es 24×2
Estudiante 5: es $144u^2$

Un aspecto que se considera relevante es que es posible evidenciar que los videos de "institucionalización" si contribuyen a la convergencia del conocimiento construido por los estudiantes en el saber; así mismo, los videos permitieron la resolución de dudas e inquietudes que surgieron durante el desarrollo de cada tarea, lo anterior, se ejemplifica en la siguiente expresión hecha por uno de los estudiantes:

Estudiante 4: Aaaaa, entonces $12u^2$ si es el área de los dos cuadrados, no el lado como creía.

Objetivos alcanzados

Si bien, se considera que de acuerdo con las evidencias presentadas previamente sí se alcanzaron todos los objetivos planteados para esta parte de la tarea, también se considera que el segundo y tercer objetivo se lograron de una manera parcial, pues no existen evidencias suficientes que den cuenta que los estudiantes identificaron la correspondencia entre una construcción y otra y la congruencia de segmentos; en síntesis, los estudiantes lograron:

- Identificar que para rellenar el área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$ los cuadriláteros $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$deben ser cuadrados.
- Identificar qué $\overline{CD} \cong \overline{CE} \cong \overline{CF} \cong \overline{CG}$.
- Identificar que los $\overline{CD}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$ y $\overline{CG}$ están directamente relacionados con las longitudes de los lados de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$.
- Identificar que el área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$es la suma de las áreas de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$.

Rectángulo 2

La resolución de esta parte de la tarea pone en evidencia la superación de algunas dificultades presentadas por los estudiantes en la sección anterior, ya que no cometían los mismos errores como confundir las unidades de área con unidades de longitud o tratar de arrastrar puntos que no se pueden arrastrar. Nuevamente, lo anterior evidencia como los estudiantes refuerzan o rechazan acciones a partir de las retroacciones dadas por el medio, lo que incide en la construcción de conocimiento. Frente a ello, una expresión que permite identificar la relación que los estudiantes hacen entre Rectángulo 1 y Rectángulo 2 se presenta a continuación:

Estudiante 6: Si en el anterior era 24… Y el área de cada uno era 12, entonces aquí debe ser 42.

Resaltamos, nuevamente, como el anterior discurso del estudiante es evidencia de aprendizaje, pues se refuerza una acción a partir de una validación positiva. En este sentido en la acción descrita anteriormente el estudiante *Visualizo, Conjeturo* y *argumento* a partir de una acción y su refuerzo.

En este sentido, a partir de las acciones que realizan los estudiantes, se pudo percibir que desde esta parte de la tarea empiezan a visualizar la correspondencia entre los segmentos $\overline{CD}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$ y $\overline{CG}$ y la longitud de los lados de los cuadriláteros $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$, pues se percatan que en esta parte de la tarea el área del cuadrilátero punteado era mayor que la que el medio otorgaba en la primera parte (Rectángulo 1), empezaron a mover los puntos $E, D\ y\ C$, de tal manera qué $E, G\ y\ D, F$ no se superpusieran respectivamente, es decir, que los cuadriláteros $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ ya no fueran cuadrados (Figura 220).

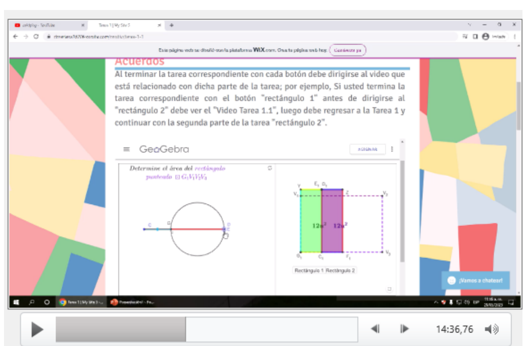


Figura 220

Objetivos alcanzados

A partir de las evidencias presentadas previamente se considera que todos los objetivos listados a continuación sí se alcanzaron de forma esperada.

- Identificar que los $\overline{CD}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$ y $\overline{CG}$ están directamente relacionados con las longitudes de los lados de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$.
- Identificar que el área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$es la suma de las áreas de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$.
- Identificar que para rellenar el área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$ los $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ deben ser rectángulos.

Rectángulo 3

Finalmente, en esta parte de la tarea ocurrieron dos situaciones, en primer lugar, los estudiantes que vieron el video correspondiente a rectángulo 1, buscaban la forma de ubicar los puntos exactamente como se mostraba en dicho video; por otro lado, algunos estudiantes buscaban ubicar los puntos $D, G\ y\ C$ en las mismas posiciones que habían determinado para la primera parte de la tarea. En cualquiera de los dos casos, se puede evidenciar que los estudiantes identificaron (*visualizaron*) la correspondencia entre los segmentos $\overline{CD}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$ y $\overline{CG}$ y la longitud de los lados de los cuadriláteros $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$, pues buscaban superponer los puntos $D, F\ y\ G, E$ respectivamente, en otras palabras, pretendían construir dos cuadrados congruentes (Figura 221).

Es importante mencionar que algunos estudiantes inicialmente no realizaron alguna modificación en la tercera parte de la tarea (Figura 222), pues no determinaron de forma inmediata la diferencia entre rectángulo y cuadrado.

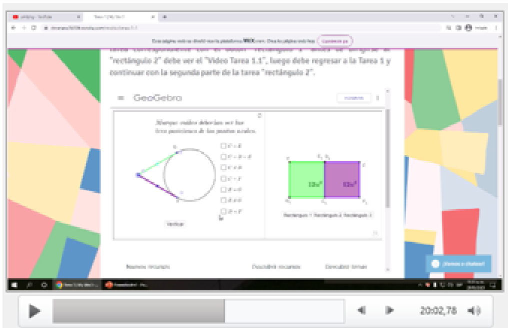


Figura 221

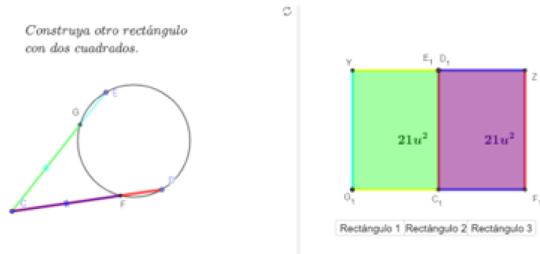


Figura 222

A la hora de elegir las respuestas de esta parte de la tarea se evidencia que los estudiantes identifican rápidamente la superposición de los puntos D, F y G, E respectivamente, es decir, seleccionan las opciones 5 y 7 sin fijarse que la opción 3 también es correcta; algunos eligen esta opción por descarte (Figura 223). En este sentido se puede evidenciar que los estudiantes *Visualizaron* porque interactuaron con imagen dinámicas; *conjeturaron* (eligieron algunas respuestas) y *argumentaron* porque validaron de forma positiva o negativa su acción.

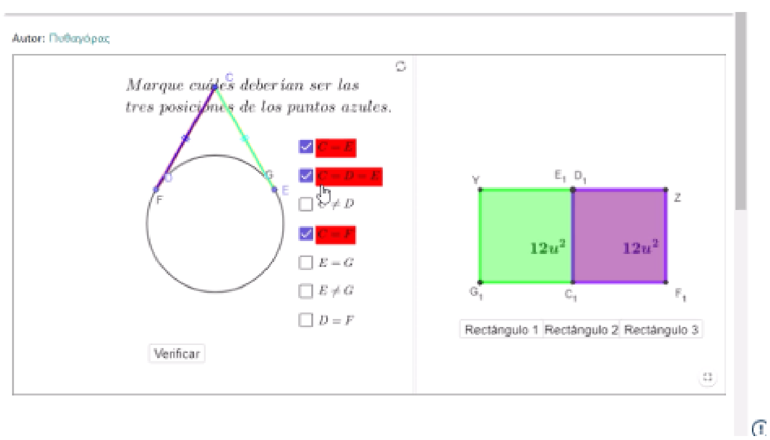


Figura 221

Objetivos alcanzados

Se considera que se tienen evidencias suficientes para decir que se cumplieron los objetivos planteados para esta parte de la tarea, si bien, estos mismos objetivos estaban planteados para el rectángulo 1, se pude decir que después de la interacción con el medio los estudiantes lograron identificar de mejor manera la relación entre las construcciones.

- Determinar que para cumplir con el enunciado se debe presentar qué $\overline{CD} \cong \overline{CE} \cong \overline{CF} \cong \overline{CG}$.
- Identificar que los $\overline{CD}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$ y $\overline{CG}$ están directamente relacionados con las longitudes de los lados de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$.

7.2 Tarea 2

Para esta tarea en particular, la mayoría de los estudiantes no visualizaron el video correspondiente a cada sección, pues consideraron que no era necesario ya que al menos en la primera parte (Cuadrado 1) encontraron de forma rápida y sencilla la respuesta a la situación dada por el medio; esto muestra como los estudiantes refuerzan sus acciones cuando validan de manera positiva las retroacciones del medio.

Cuadrado 1

En vista de que las Tareas 1 y 2 guardan cierta similitud debido a las dos construcciones que se ponen en juego, los estudiantes no tuvieron algún inconveniente a la hora de dar respuesta a la primera parte de la Tarea 2, pues rápidamente arrastraron el punto C a la posición idónea y ajustaron los puntos $D\ y\ E$ sobre la circunferencia, este tipo de acciones por parte de los estudiantes da cuenta del cumplimiento de uno de los objetivos, pues ellos determinaron las relaciones existentes entre la construcción 1 y la construcción 2, es decir, la correspondencia entre los segmentos $\overline{CD}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$ y $\overline{CG}$ y las longitudes de los lados de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$(Figura 224). A continuación, se presenta un diálogo que refuerza la afirmación antes mencionada:

Diálogo 4

Estudiante 3: Profe, pero en la tarea anterior los cuadrados se ponían del mismo color (aludiendo a los lados de los cuadriláteros $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$).
Profesor: Eso pasa en un caso particular.
El estudiante después de cavilar por unos segundos expresa
Estudiante 3: Aaaaa, solo cuando son cuadrados. (Mientras superpone los puntos G, E y D , F respectivamente - Figura 225 -).

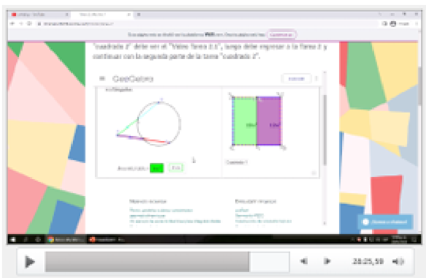


Figura 224

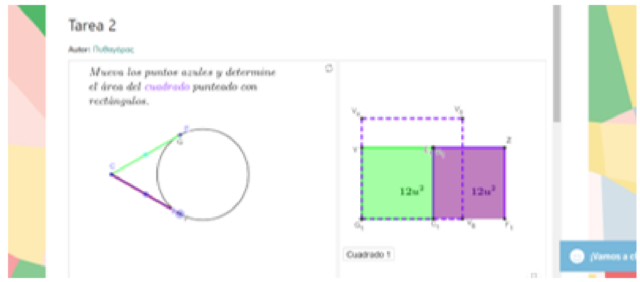


Figura 225

Objetivos alcanzados

Se considera que existen evidencias suficientes para decir que los objetivos planteados para esta parte de la tarea si se cumplieron de forma satisfactoria, en consecuencia, a finalizar la tarea 2, los estudiantes logran:

- Identificar que $\overline{CD} \cong \overline{CE}$ y $\overline{CF} \cong \overline{CG}$.
- Identificar que la suma del área de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ es igual al área de $\boxdot\ V_4V_5V_6G_1$
- Identificar que cuando el área de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ es igual a 12 se cumple que $YG_1 > C_1G_1$ y $C_1F_1 > D_1C_1$
- Identificar que $\boxdot\ YE_1C_1G_1 \cong \boxdot\ ZF_1C_1D_1$

Cuadrado 2

Para esta parte de la tarea la mayoría de los estudiantes optaron por rellenar el área del cuadrilátero punteado, lo cual se realiza únicamente cuando los cuadriláteros $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ son rectángulos (Figura 224); pero solo después de analizar la situación comprendían que no estaban cumpliendo con el enunciado de la tarea, pues los cuadriláteros $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$ debían ser necesariamente cuadrados. Sin embargo, dos de los estudiantes de inmediato solaparon los puntos $G, E\ y\ D\ , F$ respectivamente, construyendo así los cuadrados $\boxdot\, YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\, ZF_1C_1D_1$, permitiendo que el medio realizara la retroacción correspondiente. (Figura 225).

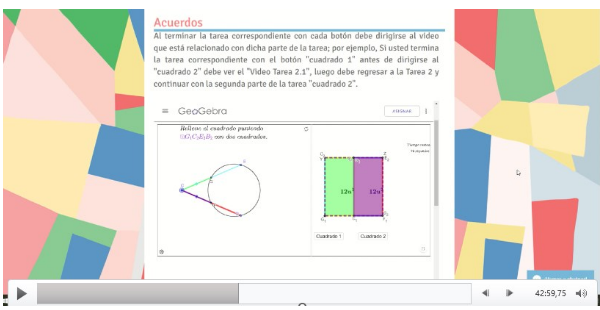


Figura 222

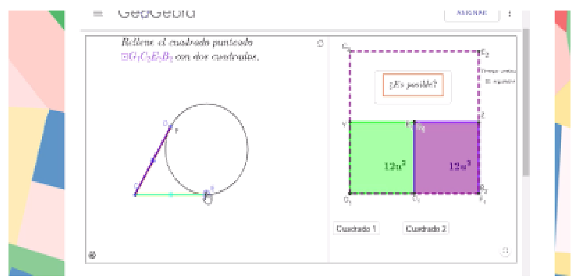


Figura 223

Las respuestas más frecuentes a la pregunta abierta de esta parte de la tarea presentaron la siguiente estructura:

> **Estudiante 4:** "Porque se rellena con rectángulos en vez de cuadrados".
> **Estudiante 5:** "Porque faltan cuadrados para rellenar el espacio".

Sin embargo, hubo respuestas más estructuradas como la siguiente, pues la estudiante intentó relacionar lo visualizado en las tareas anteriores, aludiendo a condiciones como la suma de áreas y la congruencia de cuadrados:

> **Estudiante 3:** "Porque en este caso el cuadrado está formado por cuatro cuadrados de 12 de área cada uno. De lo contrario debería llenarse con 2 rectángulos".

Este tipo de respuestas dan cuenta de la contribución en el fortalecimiento de los procesos de conjeturación y argumentación, pues en esta parte de la tarea no era suficiente con conjeturar y responder si o no a la pregunta dada por el medio, sino era necesario argumentar de alguna manera la respuesta dada.

Objetivos alcanzados

Se considera que los tres objetivos planteados para esta parte de la tarea se alcanzaron en la mayoría de los casos, pues no existen pruebas suficientes para determinar si los estudiantes que argumentaron que "Faltan cuadrados" o respuestas similares, identificaron que, dada la construcción, la única forma de rellenar el área del cuadrado punteado es a partir de rectángulos; en este sentido, los estudiantes logran:

- Concluir que de acuerdo con la configuración dada en las construcciones no es posible cumplir con el enunciado.
- Identificar que la suma de las áreas de $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ se igual a el área de $\boxdot\ G_1C_2E_2B_2$ solo si los polígonos $\boxdot\ YE_1C_1G_1$ y $\boxdot\ ZF_1C_1D_1$ son rectángulos[14].
- Identificar que la condición dada, no se cumple en ninguno de los posibles casos brindados por el medio.

Suma

En esta parte de la tarea fue evidente la dificultad de algunos estudiantes a la hora de determinar la longitud del lado del cuadrado (Figura 228); pues se referían al área de los cuadriláteros sin tener en cuenta que esta no era la instrucción dada por el medio.

La mayoría de los estudiantes asoció un valor par al área del cuadrilátero verde, pues según ellos "de esta forma era más fácil de visualizar la situación"; por ejemplo, si el área del cuadrado

[14] Si bien, todo cuadrado es rectángulo, este caso en particular no se tiene en cuenta para la solución de la tarea.

verde era $8u^2$, los estudiantes mencionaban que la medida de su lado era $4u$; las siguientes intervenciones evidencian la dificultad presentada por los estudiantes (Figura 229).

Estudiante 3: Si el área es $5u^2$, entonces el lado mide 2,5.
Estudiante 5: obvio no, porque... ¿Cuánto te da $2{,}5 \times 2{,}5$?
Estudiante 3: 6,25; entonces la respuesta es 2,2 o $\sqrt{5}$, aaaaa es $\sqrt{5}$.

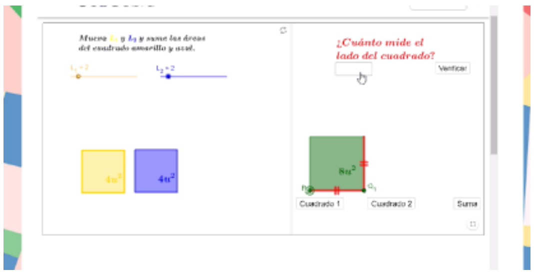


Figura 224

Figura 225

Objetivos alcanzados

A partir del análisis desarrollado previamente se evidenció que los estudiantes no tuvieron en cuenta los cuadrados amarillo y azul de la manera en que se esperaba, es decir, por la forma en que manipulaban los elementos del medio, se puede determinar que se cumplió todos los objetivos a excepción del primero, pues no se tiene evidencia suficiente que indique que los estudiantes identificaron la regularidad; así las cosas, los objetivos alcanzados fueron:

- Identificar que los números que se ingresaron inicialmente corresponden a las áreas de los cuadrados que aparecen en la interfaz.
- Identificar que en cualquier posición de los deslizadores L_1 y L_2 los cuadriláteros sombreados en color amarillo y azul cumplen con las condiciones de ser cuadrados.
- Identificar que al mover los puntos P_1 y Q_1 el área del cuadrilátero sombreado en color verde no cambia.

- Identificar que la suma de las áreas de los cuadriláteros azul y amarillo es igual al área del cuadrilátero verde.
- Identificar que el valor del lado del cuadrilátero verde es la raíz del área de este.

7.3 Tarea 3

Uno de los estudiantes a la hora de ingresar los números en la primera parte de esta tarea, escribió números demasiado grandes, lo que impidió visualizar los cuadriláteros de la manera en que se esperaba, dicho estudiante prefirió oprimir el botón reiniciar y escribir números menores (Figura 230).

Si bien, la primera pregunta de esta tarea es similar a la última pregunta de la Tarea 2, los estudiantes presentan dificultades al hallar la raíz cuadrada de un número, pues asumen que se debe dividir entre dos o multiplicar por dos el radicando; esto se evidencia en las siguientes líneas:

Uno de los estudiantes ingresa el dígito 2 en ambos cuadros de texto, a la hora de responder la pregunta: *¿Cuál es la medida del lado del cuadrado rojo?* inicialmente escribe 2, luego escribe 4, después escribe 1, y finalmente, escribe la respuesta correcta $\sqrt{2}$ (Figura 231).

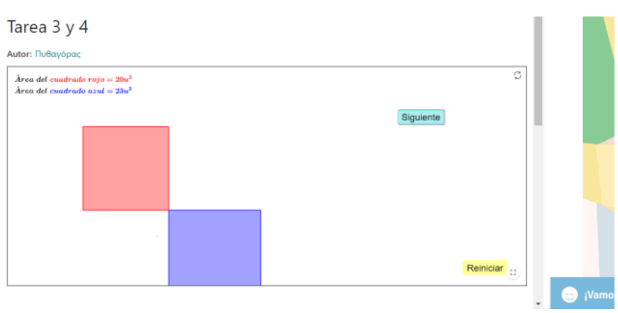


Figura 226

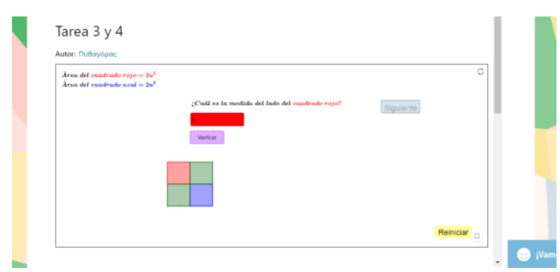


Figura 227

Algunos estudiantes comprendieron que a la hora de preguntan *"¿Cuál es la medida del lado del cuadrado rojo?"* se refería a la raíz cuadrada del valor que ellos habían ingresado, pero es evidente que los estudiantes presentan dificultan cuando las raíces no son exactas, esta situación se ejemplifica a continuación:

La estudiante ingresó el dígito 8 en ambos cuadros de texto; a la hora de responder la primera pregunta ingresa el número 4 y luego el número 2, pero ninguno de los dos es el valor del lado del cuadrado rojo. Entonces dice en voz alta *"no hay un número que multiplicado dos veces me de 8… aaash entonces pongamos 9"*. Oprime el botón reiniciar y escribe 9 en ambos cuadros de texto, a la hora de responder la primera y segunda pregunta escribe el número 3 y efectivamente esa es la respuesta correcta.

A la hora de ubicar las piezas del rompecabezas la mayoría de los estudiantes no tuvieron inconveniente, pues ubicaron primero las piezas verdes y luego las piezas azules; sin embargo, una estudiante en particular ubica las piezas de dos formas que no se habían previsto, la situación se presenta a continuación:

La estudiante inicialmente ingresa el dígito 7 en ambos cuadros de texto, responde de forma adecuada las dos preguntas sobre la medida del lado de los cuadrados, pero a la hora de realizar el rompecabezas ubica las piezas azules sobre el cuadro rojo que se encuentra, por defecto, en el interior del cuadro amarillo (Figura 232). Después de hacer esta acción, no reconoce que hacer con las piezas verdes, por tanto, pregunta *"¿el rompecabezas era ese cuadradito pequeñito o es el cuadrado amarillo?"*.

Después de resolver la duda prosigue a ubicar las piezas de forma diferente, de tal manera que se construyeran pequeños cuadrados de misma área (Figura 233) (cabe resaltar, que esta misma estudiante fue la que en la segunda parte de la tarea argumento *"Por qué en este caso el cuadrado está formado por cuatro cuadrados de 12 de área cada uno. De lo contrario debería llenarse con*

2 rectángulos”); esto da cuenta que la serie de tareas presentadas hasta el momento si contribuyen a la construcción del conocimiento, pues la estudiante relacionó las dos tareas haciendo la suma de áreas de diferentes formas, es decir, si inicialmente la pieza de color rojo no hubiera estado en el interior del cuadrado amarillo, la estudiante hubiera encontrado otra forma de realizar el rompecabezas. Luego de percatarse de que no era posible organizar las piezas de esa manera, las organiza de forma adecuada, posteriormente continua con la solución del ejercicio; así mismo, se observa como en palabras de la Teoría de las Situaciones Didácticas, la estudiante cambia de acción cuando se presenta una validación negativa.

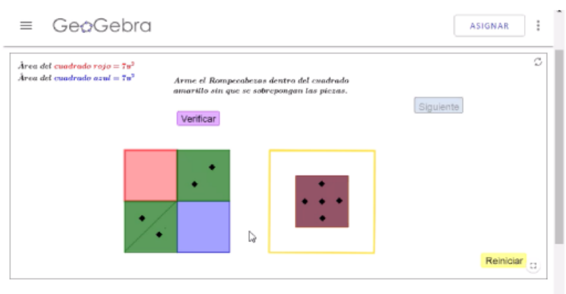


Figura 228

Figura 229

Objetivos alcanzados

Finalizada la Tarea 3, los objetivos alcanzados son:

- Identificar que la medida del lado del cuadrado rojo corresponde a $\sqrt{n}$.
- Identificar que la medida del lado del cuadrado azul corresponde a $\sqrt{m}$.
- Identificar que los números que se ingresaron inicialmente corresponden a las áreas de los cuadrados que aparecen en el medio.
- Identificar que el área del cuadrado amarillo corresponde al área conformada por el cuadrado azul, cuadrado rojo y los rectángulos verdes.

- Identificar que, teniendo en cuenta de la configuración presentada por esta tarea, (Tarea 3) es posible construir a partir de dos cuadrados un tercer cuadrado, cuya área corresponde a la suma de las áreas de los cuadrados iniciales.
- Identificar que el área del cuadrado morado es igual a la suma de las áreas de los cuadrados iniciales.

7.4 Tarea 4

Como la segunda parte de la Tarea 3 (Tarea 4) correspondía con la interacción entre los estudiantes y una representación del Teorema de Pitágoras de forma más tangible, en donde debían mover un deslizador y determinar qué cambiaba en la figura; la primera acción de los estudiantes fue precisamente esa, mover dicho objeto. Después, al responder la pregunta *"¿Qué se modifica en la figura?"* eligieron de manera inmediata la tercera opción *"El ángulo α",* pero les costó percatarse que la figura sobre $\overline{T_1R_1}$ también cambiaba al mover el deslizador; algunos estudiantes eligieron dicha opción por descarte, después de hacer ensayo y error, otros si la eligieron luego de analizar un poco más las opciones (Figura 234).

Se vislumbró que la pregunta que más les costó responder de esta tarea fue *"¿Cuál debe ser la medida del ángulo α para que se forme el cuadrado de área igual a pu^2 sobre $\overline{T_1R_1}$?",* pues las respuestas más frecuentes fueron $180°$ y $0°$ (Figura 235), algunos estudiantes vieron el video correspondiente a esta tarea antes de escribir la respuesta correcta, ya que para ellos no fue evidente la solución, pero al ver el video truncaron su proceso de construcción de conocimientos; otros se tomaron el tiempo de analizar las posibles opciones a partir de la interacción con el medio y finalmente se percataron de la respuesta correcta.

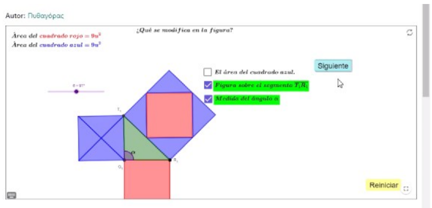


Figura 230

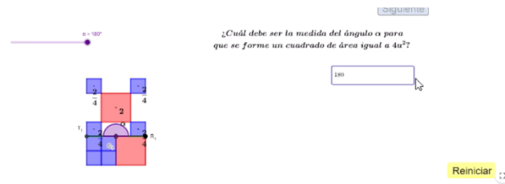


Figura 231

Objetivos alcanzados

Se considera que existe evidencia suficiente para determinar que la mayoría de los objetivos planteados se cumplieron, sin embargo, se observa que no existe evidencia suficiente que dé cuenta del cumplimiento de los siguientes tres objetivos:

- Identificar que el área del cuadrado sobre $\overline{T_1R_1}$ es igual a la suma de las áreas de los cuadriláteros que se encuentran sobre los otros dos catetos del triángulo.
- Es identificar que la medida de los catetos $\overline{T_1Q_1}$ y $\overline{Q_1R_1}$ no se alteran al mover el deslizador.
- Identificar que las áreas de los cuadrados sobre $\overline{T_1Q_1}$ y $\overline{Q_1R_1}$ no se alteran al cambiar la posición del deslizador α.

7.5 Tarea 5

La mayoría de los estudiantes empiezan moviendo los vértices azules de cada uno de los cuadrados que se encuentran en la construcción 1, tratando de identificar la relación que existe entre los tres cuadrados, sin percatasen del enunciado que se encuentra en la parte superior, por esta razón algunos estudiantes buscaron la forma de que los tres cuadrados tuvieran la misma área (Figura 236).

Otra acción común entre algunos estudiantes fue arrastrar los vértices de los cuadrados azul y amarillo hasta que estos dos cuadrados fueran congruentes, luego arrastraron los vértices del cuadrado verde, de tal manera que se cumpliera el enunciado (Figura 237). Se cree que esta acción la realizaron porque relacionaron las tareas previas con esta, es decir en la Tarea 2 se debía rellenar el área de un cuadrilátero a partir de cuadrados congruentes y si bien para esta tarea no era necesario cumplir dicha condición, dichos estudiantes tomaron la condición como dada.

Figura 232

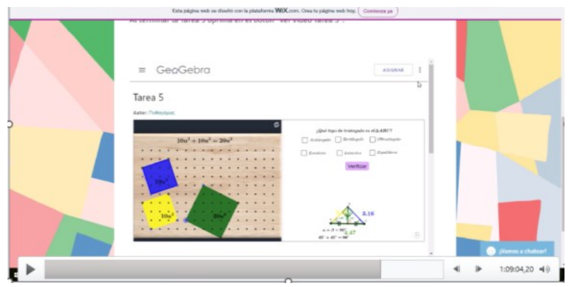


Figura 233

Por otro lado, los demás estudiantes se percataron del enunciado antes de arrastrar los puntos y desde el principio empezaron a arrastrar los vértices del cuadrado verde buscando que su área fuera 20 (Figura 238).

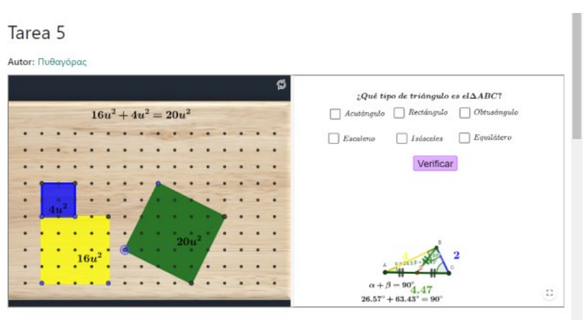


Figura 234

Se pude determinar que algunos estudiantes si identificaron la relación que existe entre la construcción 1 y 2, pues esto queda en evidencia con intervenciones como la siguiente.

Estudiante 7: Aaaaa ya, azul con azul y amarillo con amarillo (mientras arrastraba los vértices del cuadrado azul).

Se considera que cuando el estudiante dice *"azul con azul"* se está refiriendo al cuadrado azul (construcción 1) y al lado $\overline{BC}$ del triángulo $\triangle ABC$ (construcción 2), y contempla una relación similar cuando expresa *"Amarillo con amarillo".*

A la hora de identificar el tipo de triángulo que era $\triangle ABC$ hubo disparidad entre los estudiantes, pues a unos se les dificultó clasificarlo de acuerdo a sus lados y a otros de acuerdo a sus ángulos; se considera que la dificultad en la clasificación respecto a sus lados se puede deber a tres posibles circunstancias, no reconocer las diferencias entre un triángulo isósceles, equilátero y escaleno; no haber visto con detenimiento la sección de conceptos previos o no poder visualizar adecuadamente la medida de los lados del triángulo (Figura 239).

Ahora, respecto a la dificultad en la clasificación de acuerdo con sus ángulos se cree que es por la posición en que se encuentra el triángulo rectángulo, pues los estudiantes están acostumbrados a ver el triángulo rectángulo teniendo como base uno de sus catetos, no su hipotenusa (Figura 240). Esta dificultad se evidencia el discurso del Estudiante 2:

Estudiante 2: Mmmm, bueno un triángulo rectángulo es así (mientras con su mano hacia el gesto de colocarla en vertical simulando el ángulo recto con sus dedos).

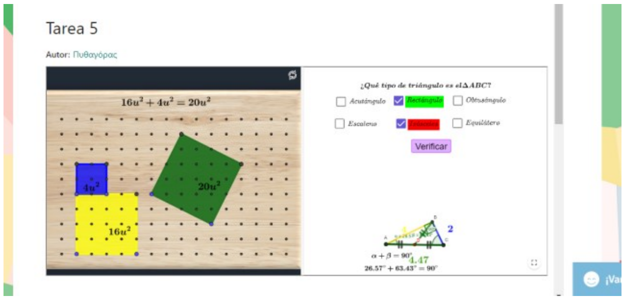


Figura 235

Figura 236

Finalmente, cuando el medio mostraba la pregunta *"¿Qué relación hay entre las áreas de los cuadrados?"* junto con sus opciones de respuesta, surgieron varios casos. En primer lugar, los estudiantes a los que les pareció muy complicado responder la pregunta, y después de intentarlo algunas veces vieron el video para saber cuál era la respuesta; en segundo lugar, los estudiantes que eligieron la opción correcta valiéndose de la igualdad que se encontraba en la construcción 1 (Figura 241); y finalmente, los estudiantes que encontraban otro tipo de relaciones correctas, pero el medio otorgaba una relación negativa (Figura 242). Este último caso se ejemplifica de mejor forma en el siguiente diálogo:

Dialogo 5
Estudiante 7: Profe, pero esta relación si existe (Figura 242), y la que escribí ahorita también… no hay nada mal, o ¿Sí?... NOOO no hay nada mal.
Profesor: No, esa relación está bien y la que escribiste anteriormente también está bien (), pero la que está pidiendo la tarea es una relación en específico, diferente a esas dos que ya escribiste.
Estudiante 7: Pero eso es trampa, porque si está bien por qué no me la marca en verde.
Profesor: Porque es necesario que identifiques la relación que se está pidiendo en particular.

Después de que el estudiante analiza y casi se da por vencido, dice:

Estudiante 7: AAAA, no profe, pero es que esa relación era muy obvia porque está aquí (señalando la igualdad que hay en la parte superior de la construcción 1), yo pensé que era otra diferente.
Profesor: Pero ¿por qué crees que esa relación es la que acepta la tarea y no cualquier otra?
Estudiante 7: No se profe, porque es la que se muestra en este lado… (señalando la igualdad que hay en la parte superior de la construcción 1)

Después de cavilar algunos minutos el estudiante dice:

Estudiante 7: Aaaaa ya, ¿Por qué es la formulita que se utiliza para el Teorema de Pitágoras?
Profesor: ¡Exacto!

Cabe resaltar que el estudiante que sostuvo este diálogo es de grado noveno y ya tiene nociones más firmes del Teorema de Pitágoras, es decir, este tema no es del todo nuevo para él.

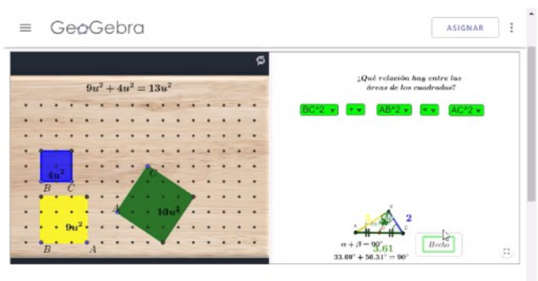


Figura 237

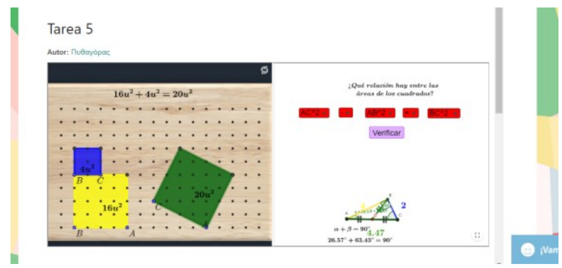


Figura 238

Objetivos alcanzados

De acuerdo con las evidencias presentadas anteriormente se puede decir que todos los objetivos listados a continuación si se alcanzaron, a excepción del tercero, pues no existen pruebas suficientes que den cuenta del cumplimiento de este.

- Identificar que el área del cuadrado de color verde debe ser mayor que el área de los otros dos cuadrados.
- Identificar que el área de cada cuadrado está directamente relacionada con la longitud de uno de los lados del triángulo (construcción 2).
- Identificar que al modificar las áreas de los cuadrados también se modifican los ángulos del triángulo (Construcción 2).

- Identificar que si la suma de las áreas de los cuadrados azul y amarillo es igual al área del cuadrado de color verde entonces el triángulo ΔABC es rectángulo.
- Identificar que la suma de las áreas de los cuadrados azul y amarillo es igual al área del cuadrado de color verde.

7.6 Tarea 6

Finalmente, los estudiantes realizan la Tarea 6, en esta solo había una pregunta *"¿Son a, b y c lados de un triángulo rectángulo?"* y tres posibles respuestas *"No, Si y no hay triángulo",* pero debido a que no se encontraba en la interfaz del medio el triángulo formado y al tratar de arrastrar los puntos no se podía, los estudiantes eligieron sus respuestas al azar, sin analizar lo suficiente cada situación, tampoco hicieron uso de la formula construida en la tarea anterior.

Al finalizar la tarea los estudiantes observaron cuantas respuestas eran correctas y cuentas no, en algunos casos volvían a hacer la tarea al percatarse que tenían más respuestas incorrectas que correctas (Figura 243), pero el procedimiento era el mismo (lo seleccionaban al azar), por tanto, los resultados no cambiaban, entonces después de hacer el mismo procedimiento dos o tres veces decidían oprimir el botón terminar tarea y exclamar:

Estudiantes: No entendí …

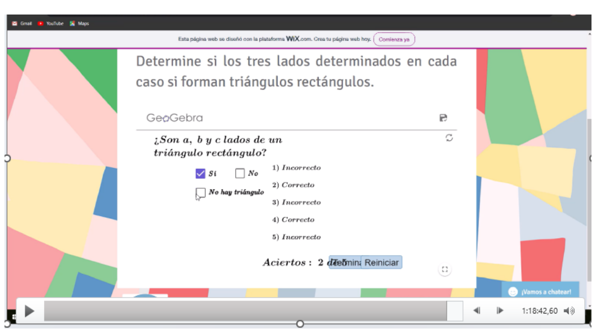


Figura 239

Se considera que, si bien esta tarea debe sufrir algunas modificaciones para que los objetivos que se plantearon se cumplan al menos de forma parcial, también existen situaciones ajenas que hicieron que los estudiantes no realizaran de forma adecuada el análisis de esta tarea.

CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES

A continuación, se presentan las conclusiones teniendo en cuenta la Teoría de las Situaciones Didácticas, los objetivos planteados, los referentes matemáticos y curriculares; contrastando el análisis de a priori (lo esperado) con el análisis a posteriori (lo evidenciado).

- Se debe realizar algunas modificaciones al EVA y en especial a la Tarea 6, en aras de fortalecer la propuesta y de esta forma realizar un adecuado cumplimiento de los objetivos; contribuyendo de mejor manera en los procesos planteados, fundamentalmente en el proceso de argumentación escrita.
- A partir de las tareas propuestas se puede dar cuenta de las cuatro fases de una situación a-didáctica, pues los estudiantes constantemente hicieron *acciones* sobre el medio (arrastraron los puntos, eligieron opciones, respondieron preguntas, trataron de mover objetos que no se podían, etc.); realizaron *formulaciones* (construyeron conjeturas a partir de las acciones que realizaban y las retroacciones que recibía); *validaron* de forma positiva o negativa su acción (esto de acuerdo con las retroacciones que el medio brindaba o los análisis que ellos mismos realizaban); y finalmente, se acercaron a una *institucionalización* a partir de la visualización de los videos educativos propuestos. En este sentido, se puede decir que el medio contribuyó para que los estudiantes construyeran conocimiento. Es decir, si se cumplió de forma satisfactoria los objetivos específicos planteados.
- De acuerdo con las evidencias presentadas es posible concluir que los estudiantes que realizaron de forma adecuada el ejercicio, es decir, resolver la tarea y luego ver el video correspondiente a dicha tarea, si se acercaron al proceso de institucionalización, pues

muchos de los errores que se cometieron en la primera tarea ya no se presentaron en las posteriores.

- Si bien, esta propuesta le apunta a la construcción del conocimiento de forma autónoma, se hace imperativo mencionar que para algunos estudiantes es necesario entablar una comunicación entre pares o entre profesor – estudiante y de esta manera realizar una construcción del conocimiento de forma más eficaz.
- De acuerdo con el análisis a posteriori realizado, el EVA aquí presentado contribuyó con el fortalecimiento de los procesos de visualización, conjeturación y argumentación; si bien no se hizo por parte de los estudiantes una conjeturación y argumentación de forma textual, algunos de ellos si presentaron conjeturas y argumentos realizando así validaciones negativas o positivas. Sin embargo, es importante mencionar que, con modificaciones, como más preguntas abiertas es posible contribuir en mayor proporción al desarrollo de estos procesos.
- Si bien, algunos estudiantes no realizaron el ejercicio como era debido, es decir, solucionar la tarea y luego ver el video correspondiente, se puede decir que de alguna forma construyeron conocimientos, pues al ver el video y luego responder las preguntas debían analizar el porqué de su respuesta y de esta forma no cometer errores posteriores.

REFERENCIAS

Acosta, M & Fiallo, J., (2017). Enseñando la Geometría con Tecnología Digital una propuesta desde la Teoría de las Situaciones Didácticas. Doctorado Interinstitucional en educación. Universidad Francisco José de Caldas.

Acosta, M. E; Monroy, L. A. & Rueda, K. L., (2010). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio. Revista Integración, Vol. 28, No. 2, 2010, pág. 173–189.

Alfaro, C. & Chavarría J; (2012). LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA: UN EJEMPLO EN EL SISTEMA EDUCATIVO COSTARRICENSE. UNICIENCIA, Vol. 26 pp. 153-168.

Arias, J. M; Maza, I; & Sáenz, C; (2002). Formación e investigación sobre el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación en matemáticas para la ESO y Bachilleratos. Universidad Autónoma de Madrid. https://infoymate.es/investiga/publicacion.pdf

Artigue, M. D. (1995). INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Bogotá: Iberoamérica

Barreiro, P., Bressan, A., Camós, C., Carnelli, G., Casetta, I., Crespo, C., Colombano, V., Formica, A., Marino, T., Nápoles, J., Ortiz, M., D. Pochulu, M., Rodríguez, M., Scaglia, S., Visokolskis, S., & Zolkower, B., (2012). Educación Matemática Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Editorial Universitaria de Villa María, Universidad Nacional de General Sarmiento, 288 p.

Cantor, E. C.; (2016). ANÁLISIS DE ACTIVIDADES CON CABRI PARA LA ENSEÑANZA DE LA SIMETRÍA AXIAL. Universidad Francisco José de Caldas. CastroCantorEdgarCamilo2016.pdf

Cáceres, M; Moreno, Y. C; Tello, J. A; & Vargas, I. J; (2016). Cálculo de las Distancias Entre Dos Puntos. Universidad de los Andes. https://repositorio.uniandes.edu.co/bitstream/handle/1992/13726/u729127.pdf

Camargo, L; Perry, P. & Samper, C., (2020). Mediación semiótica potencial y real del enunciado de tareas geométricas. Revista Chilena de Educación Matemática, Volumen 12, N°3, 96-108. http://funes.uniandes.edu.co/23328/1/Perry2020Mediaci%C3%B3n.pdf

Conde-Carmona, R. J. & Fontalvo-Meléndez, A. A. (2019). Didáctica del teorema de Pitágoras mediada por las TIC: el caso de una clase de Matemáticas. Trilogía Ciencia Tecnología Sociedad, 11(21), 255-281. https://doi.org/10.22430/21457778.1187

Flores, C; Gómez, A; & Flores, Á (2010). Esquemas de argumentación en actividades de Geometría Dinámica. Acta Scientiae, v.12, n.2, http://funes.uniandes.edu.co/27923/1/Estrada2010Esquemas.pdf

García, F. J. & Fortea, M. A., (2006). Contrato Didáctico. Generalitat Valenciana, Universitat Jaume I. https://personales.unican.es/salvadol/programas/contrato_aprendizaje.pdf

García, F.J; (sf). Algunas Demostraciones del Teorema de Pitágoras. https://www.academia.edu/36398258/Algunas_demostraciones_del_Teorema_de_Pit%C3%A1goras

Gómez, P; (1997). Tecnología y Educación Matemática. Informática Educativa, UNIANDES - LIDIE, Colombia. Vol 10, No. 1, 1997 pp. 93-111.

Gómez, P; Mora, M. F; Velasco, C; (2018). *Análisis de instrucción.* En Gómez, Pedro (Ed.), Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares (pp. 197-268). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes. http://funes.uniandes.edu.co/11906/

Guerrero, Fernando; Lurduy, Orlando; Sánchez, Neila (2006). *La práctica docente a partir del modelo DECA y la teoría de las situaciones didácticas.* En Martínez, Gustavo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 598-603). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Gutiérrez, A. (ed.). (1991). Área del Conocimiento Didáctico de las Matemáticas (pp. 149 - 195). Madrid. https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Gut91a.pdf

Hiraldo, R. (2013). Uso de los Entornos Virtuales de Aprendizaje en la Educación a Distancia. EDUTEC, Costar Rica. ISBN 9789968969550

López, I; & González, M; (2006). El video Como Herramienta Educativa. Metodología de la Investigación. https://www.academia.edu/31389400/El_video_como_herramienta_educativa

Manrique, V. E. & Medina, I. J. (2017). *Tareas digitales: recurso didáctico para favorecer la argumentación.* Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12209/9456.

Margolinas, C (2009) La importancia de lo verdadero y de lo falso en la clase de matemáticas (Acosta, M. Fiallo, J) Universidad Industrial de Santander. (Obra original publicada en 1993).

Ministerio de Educación Nacional, (1998). Serie de Lineamientos Curriculares.

Ministerio de Educación Nacional, (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.

Ministerio de Educación Nacional, (2016). Derechos básicos de Aprendizaje en Matemáticas v.2.

Ministerio de Educación Nacional, (2020). Evaluar para Avanzar. https://www.icfes.gov.co/web/guest/evaluar-para-avanzar-2021

Palomo-López, R., Ruiz-Palmero, J. & Sánchez-Rodríguez, J. (2006). Las TIC como agentes de innovación educativa. Recuperado de https://www.edubcn.cat/rcs_gene/11_TIC_como_agentes_innovacion.pdf

Rodríguez, E., (2011). GEOGEBRA COMO HERRAMIENTA QUE FACILITA LA COMPRENSIÓN Y LA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS. LICEO V.A.L. http://funes.uniandes.edu.co/3855/1/Rodr%C3%ADguezGeogebraGeometria2011.pdf

Salim, J. (2013, 6 mayo). Universidad Cardenal Herrera. Las TIC y el aprendizaje de la geometría. https://repositorioinstitucional.ceu.es/bitstream/10637/5626/1/TFM_Argudo%20Ort iz, %20Marta.pdf

Samper, C., Molina, O., Perry, P., & Camargo, L. (2013). Geometría plana: un espacio de aprendizaje. In C. Samper & O. Molina (Eds.), (1st ed., pp. 14–32). Bogotá: Universidad

Pedagógica Nacional. Retrieved from http://editorial.pedagogica.edu.co/docs/files/Geometria Plana-2.pdf

Santos, J.H., (2016). UNA IMPLEMENTACIÓN PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL OBJETO GEOMÉTRICO PARÁBOLA, A PARTIR DEL TRABAJO CON EL SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA CARMETAL, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. https://repository.udistrital.edu.co/bitstream/handle/11349/3155/SantosTorresJuli%c3%a1nHumberto2016.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Silva, J. (2011). Diseño y Moderación de Entornos Virtuales de Aprendizaje (EVA). Editorial UOC. https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=_OdFFeq_wbMC&oi=fnd&pg=PA11&dq=entornos+virtuales+de+aprendizaje&ots=4znByCnK9y&sig=3qiL9pP7B30BSfW-D1tNEHNcxII#v=onepage&q=entornos%20virtuales%20de%20aprendizaje&f=false

Stanford Medicine Children´s Health., (2023). Desarrollo cognitive en la adolescencia. https://www.stanfordchildrens.org/es/topic/default?id=desarrollocognitivo-90-P04694

Suárez, A. F. & Zubieta, C. F. (2022). *Análisis de Idoneidad Epistémica de videos de YouTube relacionados con el Teorema de Pitágoras.* Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12209/17694.

Torres, G. (2017). El teorema de Pitágoras en la formación inicial del profesor de Educación Secundaria. Universidad de Granada.

Vargas. C., Molina, O., Samper, C., Perry, P., & Camargo, L., (2022). TAREAS DE ARGUMENTACIÓN: ¿POR QUÉ UN “POR QUÉ” NO ES NECESARIO NI

SUFICIENTE?, XXV Encuentro de Geometría y sus aplicaciones (2022).
http://encuentrodegeometria.upn.edu.co/docs/memorias/Encuentro_25.pdf

Vidal, R., (2009). La Didáctica de las Matemáticas y la Teoría de Situaciones. Universidad Alberto Hurtado. https://repositorio.uahurtado.cl/handle/11242/6553