TAREAS EXPLORATORIO-INVESTIGATIVAS EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO

WILLIAM ANDRÉS SISSA SOSA.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA.

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN.

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

TUNJA

2020.

TAREAS EXPLORATORIO-INVESTIGATIVAS EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO

WILLIAM ANDRÉS SISSA SOSA.

Trabajo de Grado, requisito parcial para optar el título de Magister en Educación Matemática.

PhD. LIDA ESPERANZA RISCANEVO ESPITIA.

Directora

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA.

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN.

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

TUNJA

2020

Contenido

Introducción 1

Capítulo I. Generalidades 3

Descripción y Planteamiento del problema 3

Objetivos 11

General 11

Específicos 11

Capítulo II. Marco referencial 12

Antecedentes 12

Marco Teórico 16

Aproximación Conceptual de Tarea Matemática 16

Tareas de pensamiento geométrico 20

Tareas Exploratorio-Investigativas. 22

Revisión histórica de algunos aspectos de la geometría euclidiana 30

Proceso de desarrollo del pensamiento 35

Pensamiento espacial y sistemas geométricos 38

Enseñanza y aprendizaje de la geometría 40

La geometría en el currículo colombiano 44

Capítulo III. Aspectos metodológicos 47

Contexto del proceso investigativo 48
Diseño metodológico de la investigación 48
Fase I 49
Fase II 49
Fase III 50
Fase IV 50
Categorías de análisis 51
Técnicas e instrumentos de recolección y análisis de información 54
Capítulo IV. Análisis y discusión de resultados 57
Caracterización de las tareas exploratorio-investigativas 57
Actividad matemática investigativa desarrollada en el aula 59
Inicio de la clase 59
Primer momento 60
Desarrollo del trabajo en el aula 61
Segundo momento 66
Tercer momento 78
Cierre de la clase 80
Cuarto momento 80
Tarea 2. Clasificación de Cuadriláteros 83
Actividad matemática de investigación en el aula 84

Inicio de la clase 84

Primer momento 85

Desarrollo de la clase 85

Tercer momento 96

Cierre de la clase 99

Cuarto momento 99

Tarea 3. Exploraciones e Investigaciones con el Triángulo de Sierpinski 103

Actividades matemáticas de investigación en el aula 103

Inicio de la clase 104

Primer momento 104

Desarrollo de la clase 105

Tercer momento 110

Cierre de la clase 113

Cuarto momento 113

Capítulo V. Consideraciones finales 116

Referentes Bibliográficos. 121

Anexo 1 138

Anexo 2 139

Anexo 3 142

Lista de tablas

Tabla 1. Categoría de Análisis 1……………………………………………………54

Tabla 1. Categoría de Análisis 2……………………………………………………55

Tabla 1. Categoría de Análisis 3……………………………………………………56

Lista de figuras

Figura 1. Tareas Matemáticas…………………………………………………........…22

Figura 2. Tipos de Tareas según grado de dificultad y apertura……………..…………30

Figura 3. Línea del tiempo de la evolución de la geometría………………………………...36

Figura 4. Tareas y respuestas en actividades de geometría……………………………..…...43

Figura 5: Momento de “exploración” realizada por Estudiante 2, actividad 1………...66

Figura 6: Momento de “exploración” realizado por Estudiante 8, actividad 67

Figura 7: Momento de “Exploración” realizada por Estudiante 5. Actividad 2……....67

Figura 8: Reconocimiento de objetos geométricos………………………………………..68

Figura 9: Momento de “abstracción de información” realizado por Estudiante 1. …....71

Figura 10: Momento de “organización de información” realizado por Estudiante 1….71

Figura 11: Actividad de suma de áreas determinadas por el Estudiante 5………….....75

Figura 12: Comparación de un cuarto de circunferencia con un triángulo……...……...77

Figura 13: Material didáctico de apoyo………………………………………….......78

Figura 14: Aproximaciones a “pi” como invariante dentro de la circunferencia…...….79

Figura 15: Aproximaciones a “pi” y su relación con la longitud de la circunferencia...80

Figura 16: Representación de la circunferencia como un cuadrilátero………………..81

Figura 17: Planteamiento de una aproximación a pi…………………………….…....84

Figura 18. . Momento de “argumentación y demostración de resultados”………..….86

Figura 19: Momento de Exploraciones individuales……………………………..……88

Figura 20: Justificaciones realizadas por los estudiantes………..……………,…..89

Figura 21: Exploraciones iniciales realizadas por los estudiantes a través de Material manipulable…………………………………………………… 91

Figura 22: Actividades exploratorias de representación………………………………92

Figura 23: Construcción de cuadriláteros con tres triángulos…………………..….94

Figura 24: Momento de organización y representación de información………......97

Figura 25: Construcción de cuadrilátero con dos lados paralelos y dos lados

Perpendiculares……………………………………………………….…. .99

Figura 26: Construcción de cuadrilátero con lados paralelos dos a dos…………..100

Figura 27: Construcción de cuadrilátero con ningún par de lados paralelos……...101

Figura 28: Momento de Síntesis de conjeturas…………………………...…….101

Figura 29: Representaciones gráficas para la clasificación de cuadriláteros según sus

Lados…………………………………………………………………..104

Figura 30: Momento de validación y demostración de resultados………….…….104

Figura 31: Triángulo de Sierpinski y su trasformación en sus dos primeras

Etapas…………………………………………………………………107

Figura 32: Triángulo de Sierpinski, tercera y cuarta etapa. Exploraciones hechas

por los estudiantes……………………………………………………108

Figura 33: Exploraciones de carácter escrito, realizadas por los estudiantes...….110

Figura 34: Número de triángulos sombreados y sin sombrear en las 6 primeras

etapas del triángulo de Sierpinski…………………………………….112

Figura 35: Cómo determinar el número de triángulos sombreados en el triángulo

de Sierpinski………………………………………………………….113

Figura 36: Conjetura sistematizada por el estudiante Estudiante 1…………......115

Figura 37: Argumentación y demostración de lo investigado por el grupo de trabajo

de Estudiante 2 y Estudiante 5…………………………...…………116

Figura 38: Argumentación y demostración de lo investigado por el grupo de trabajo de Estudiante 1 y Estudiante 3…..……………………………...……117

Figura 39: Argumentación y demostración de lo investigado por el grupo de trabajo

de Estudiante 8 y Estudiante 6……………………………………….….…117

Introducción

La constante evolución de los distintos sistemas, sociales, culturales y educativos ha generado que dentro de éstos se presenten grandes cambios, los cuales han aportado al crecimiento de la sociedad. De esta manera, es el sector educativo uno de los más necesitados de estos cambios, pues se encuentra expuesto a constantes pruebas gubernamentales e institucionales y a los diferentes desafíos que generan los procesos educativos. Generar alternativas en los estilos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas contribuye a originar estos cambios, propiciando ambientes que favorezcan procesos de desarrollo matemático en los estudiantes, de manera que ellos demuestren la comprensión y significación de distintos objetos matemáticos y geométricos dentro de su diario vivir, expresando y manifestando las ideas y procesos realizados dentro de la construcción de dichos significados.

Bajo la posibilidad de contribuir a propiciar ambientes de aprendizaje alternativos, se presenta este trabajo que describe las características de las tareas exploratorio-investigativas dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, desde la perspectiva de las clases investigativas. Tiene como objetivo general caracterizar el desarrollo del pensamiento geométrico, en estudiantes de educación básica primaria, a través de tareas exploratorio-investigativas, buscando generar ambientes y espacios de aprendizaje dirigidos a resaltar el protagonismo de los estudiantes frente a la necesidad de expresar sus ideas, argumentos y justificaciones matemáticas en las tareas planteadas.

En este sentido, se planteó el desarrollo de la investigación en cinco capítulos. En el primer capítulo se presenta la descripción de la problemática, su justificación y los objetivos planteados, entre los que se distingue, el de diseñar tareas exploratorio-investigativas para el desarrollo del pensamiento geométrico. En el segundo capítulo se presentan los estudios que anteceden a éste y que están directamente relacionados, como la investigación realizada por Miranda y Pereira (2014) quienes buscaban determinar las relaciones existentes entre las actividades investigativas y la construcción de nuevos conocimientos. Igualmente se presentan las bases teóricas de la investigación, donde se realiza una aproximación conceptual de tarea matemática, geométrica y tarea exploratorio-investigativa. Así mismo, se muestran y describen las teorías referentes a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

En el tercer capítulo se presenta la metodología seguida dentro de la investigación, la cual se caracteriza por ser cualitativa, se describen los objetos de estudio dentro de su entorno natural, y se especifican cada una de las fases seguidas dentro de la investigación. Además, se presentan las técnicas e instrumentos de recolección y análisis de información utilizados. Finalmente, en el capítulo cuatro se presentan los resultados finales y conclusiones del estudio, entre las que se resalta, la facilidad y posibilidad de expresar las ideas y pensamientos de los estudiantes mediante cualquier sistema de representación, entre los que se destacaron registros propios del lenguaje común, gráfico, aritmético y algebraico, esto debido a las características exploratorias e investigativas de las tareas planteadas.

Capítulo I. Generalidades

Descripción y Planteamiento del problema

En el constante proceso de evolución del ser humano está inmerso a su vez el de su educación; el cual, desde sus inicios ha pretendido orientar, conducir, guiar, formar e instruir al hombre, dotándolo de conocimientos, costumbres, habilidades y capacidades que se adquieren y perfeccionan de generación en generación, permitiéndole su desarrollo (Rodríguez, 2010). Este proceso evolutivo ha sido tan relevante, que marcó un aspecto específico del desarrollo humano, el aspecto educativo. Dentro de los procesos de educación, en las últimas décadas han venido cobrando relevancia el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje, el rol de los estudiantes junto con el del docente y las distintas formas de presentar el conocimiento (Rodríguez y Sanz, 2000), entre otros.

Dentro del campo educativo han surgido diversas teorías y modelos de enseñanza y aprendizaje, una de ellas es la denominada tradicional, la cual se caracteriza por dar el papel principal y todo el protagonismo al docente, haciéndolo ver como el centro de este proceso, quien todo lo sabe, a quien no se le debe cuestionar, desplazando al estudiante al lugar de receptor, al que hay transmitirle los conocimientos, pues nada sabe y se ha de llenar de saberes como quien llena un vaso con agua (Kaplún, 2002). El estudiante bajo esta perspectiva es un sujeto receptor de saberes, convirtiendo el aula de clase en un escenario rígido y uní direccionado. Específicamente para las matemáticas, este modelo educativo se ha encargado de hacerlas ver como una asignatura difícil de enseñar y difícil de aprender, haciendo que los estudiantes se resistan a ellas, debido a que la perciben como una simple memorización de fórmulas, ecuaciones y algoritmos sin sentido (Flores, 1994).

Las prácticas de aula cotidianas bajo modelos tradicionales evidencian que el aprendizaje construido en los estudiantes no es significativo. Según De Zubiría (2006), lo no significativo radica en que se está aprendiendo para el momento y no se observa una apropiación de los conceptos matemáticos que puedan aplicarse a otros contextos, de esta manera se convierte en un aprendizaje memorístico y acumulativo, el cual además es secuencial y continuo. De esta manera, puede interpretarse que las clases tradicionales favorecen el aprendizaje memorístico, esto implica que no han sido apropiadas para lograr un aprendizaje significativo.

Las formas de aprender matemáticas también son cuestionadas a través de los bajos resultados obtenidos por los estudiantes en las distintas pruebas nacionales e internacionales, las cuales fundamentan su naturaleza en la necesidad de extrapolar lo aprendido a otros contextos de aplicación, interpretación y construcción de significados. En Colombia, específicamente en el área de matemáticas, los resultados hallados en las pruebas nacionales "Saber" de los últimos años muestran puntajes obtenidos por alumnos de educación básica y media en un intervalo entre 40 y 50 puntos, los cuales se ubican por debajo del valor mínimo esperado que es de 60 puntos. Además, los resultados de las pruebas Saber grado 5º (2017), evidencian resultados alarmantes, ubicando a tan solo un 12% de estudiantes en un nivel de desempeño avanzado y 43% de estudiantes en niveles insuficientes de desempeño.

En el mismo sentido, las pruebas internacionales "Programme for International Student Assessment" PISA (2018), ubican a Colombia en el puesto 58 de 65 países evaluados, con un promedio de 391 puntos, muy por debajo de la media establecida por PISA, que es de 494, estos resultados obtenidos son muy similares a los de otros países como México, Albania y Catar, en los cuales el 35% de los estudiantes alcanzaron un nivel 2 de desempeño, dentro del cual están en la capacidad de interpretar y reconocer sin recibir indicaciones directas (Icfes, 2018).

En reconocimiento de estas dificultades, y en busca de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, para concebirlos como algo más que la memorización y repetición de fórmulas o definiciones, o la capacidad de identificar y aplicar propiedades de los números, magnitudes, cuerpos geométricos o cualquier otro objeto matemático (Godino, Batanero y Font, 2003), las instituciones educativas han optado por utilizar diversas estrategias, técnicas y herramientas didácticas, buscando mejorar los bajos resultados mostrados por los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas. Este hecho unido a otras dificultades propias de cada contexto permiten que se articulen en el aula nuevas tendencias pedagógicas que permitan al estudiante la participación en la construcción de su propio conocimiento (Tovar, 2016).

En este sentido, y de acuerdo con Moreno (2012) originar nuevos conocimientos en el estudiante implica que se genere un aprendizaje significativo, dentro del cual ellos construyan dicho conocimiento por sí mismos o junto con sus compañeros de clase. De acuerdo con este mismo autor, la construcción de estos nuevos saberes se ha de facilitar por la guía y acompañamiento del docente, quien les orientará y facilitará la articulación de lo descubierto con la realidad y contexto de sus alumnos. De esta manera, es necesario que el estudiante explore, observe, organice información, plantee hipótesis y las someta a prueba ante sus semejantes, lo cual implica que desarrolle habilidades de comunicación y argumentación, que sea él mismo quien recolecte y analice información para llegar a posibles generalizaciones que doten de sentido a los conceptos matemáticos y geométricos (Alfonso, 2004).

Dentro del proceso de mejoramiento de la educación matemática ha surgido la necesidad de rediseñar, implementar o dar nuevos significados a las formas de enseñanza y aprendizaje que se llevan a cabo en los planteles educativos (Mora, 2003), por ello, se debe centrar la mirada al interior de las aulas de estas instituciones donde se implementan las distintas corrientes y modelos pedagógicos como el tradicional, observando y analizando su desarrollo dentro de la comunidad educativa. El análisis de los contextos propios bajo la aplicación de referentes nacionales e internacionales de la educación matemática, permite reconocer la labor del docente en el diseño e implementación de actividades y tareas matemáticas interesantes y desafiantes, de manera que sean productivas y significativas para el estudiante.

Los Estándares Básicos de Competencias y los Lineamientos Curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) son un compendio de documentos, que plantean la necesidad de desarrollar diferentes procesos matemáticos en los estudiantes, entre los que se encuentra el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, modelación, elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Estos conocimientos están ligados a competencias, los cuales deben generarse desde contextos del diario vivir, desde la misma matemática y desde otras ciencias, pues, "(…) las competencias no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problemas significativos y comprensivos, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más elevados" (MEN, 2006, p.46).

A pesar de estas exigencias legales y gubernamentales, los resultados de este tipo de procesos y conocimientos en los estudiantes no se ven reflejado ni en las aulas, ni en pruebas nacionales, ni en las internacionales (Jiménez et al., 2014). Lo anterior, evidencia las falencias presentadas por los estudiantes en la resolución de problemas y en el desarrollo de tareas y actividades matemáticas y geométricas. Esto quizás se deba a las estrategias metodológicas abordadas por los docentes, pues de acuerdo con Díaz y Hernández (2002) el diseño y uso de estrategias de enseñanza y aprendizaje debe realizarse de forma reflexiva, flexible y heurística, especialmente para el caso de la geometría, pues se le dificulta al estudiante relacionar los contextos matemáticos y geométricos con su diario vivir.

En consecuencia, no se ha facilitado al estudiante la construcción del significado de diversos conceptos matemáticos, a cambio se ha dado las fórmulas ya establecidas para que el estudiante las aplique sin mayor complejidad, cortando al educando las herramientas para su auto-aprendizaje limitando su autonomía y capacidad crítica constructiva (Tunnermann, 2011). Los objetos geométricos como área, perímetro, longitud, entre otros, no tiene sentido dentro de la cotidianidad del alumno si se presentan aislados de un contexto de aplicación.

Dentro de las prácticas de aula se generan procesos de comunicación verbal, los cuales en ocasiones incluye vocablo o lenguaje propio de las matemáticas, que puede tener diferente significado dentro del contexto donde está inmerso el estudiante, así que palabras como punto, línea, polígono, entre otras, forman parte del lenguaje geométrico que en ocasiones no tiene ningún sentido para el alumno, lo que genera obstáculos en la solución de diversas tareas propuestas a estos (Alcalá, 2002).

Es importante resaltar que todo docente de matemáticas debe tener en cuenta que los problemas que él plantea a sus estudiantes, pueden tener diversos significados para ellos y que éstos no siempre sean los que el profesor prevé (Planas, 2002). Lo anterior implica que se han de utilizar e implementar diversas estrategias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y la geometría, buscando facilitar la comprensión y aprensión de los distintos objetos matemáticos.

La investigación en educación matemática hace énfasis en que se debe contribuir en desarrollar las capacidades de resolución de problemas en estudiantes de educación básica y secundaria (Petronzlli, 2003), por lo cual se han de implementar prácticas de aula novedosas que potencialicen la enseñanza de las matemáticas, especialmente en la geometría. De esta manera, se ha de plantear y analizar alternativas dentro de las prácticas de aula en matemáticas. Se parte de la necesidad de generar, entre otras cosas, distintos tipos de tareas que sean enriquecedoras en actividad matemática (Polya, 1965, citado en May, 2015) las cuales además permitan explorar, investigar, indagar, conjeturar y formalizar el conocimiento por medio de sus argumentos e ideas, procurando dar mayor protagonismo al estudiante dentro de su proceso de enseñanza y aprendizaje.

Ante la posibilidad de generar aprendizajes que se salgan del estilo memorístico, de mecanización y repetición, se acude a analizar otras propuestas metodológicas para la enseñanza de las matemáticas. Específicamente se abordará las “Clases Investigativas” entendidas como estrategia para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas según Santos (2011) y que a su vez son planteadas por Ponte, Brocardo y Oliveira (2003) en donde se presentan al estudiante tareas exploratorias e investigativas, se le sitúa como el centro de su proceso de educación, se permite que sea él quien oriente la construcción de su propio conocimiento, llevándole a explorar, conjeturar y argumentar sus ideas, generando estrategias propias para la resolución de las diversas tareas planteadas, despertando en ellos el espíritu genuino de la actividad matemática.

Dentro de la estrategia metodológica de clases investigativas se señala que se puede presentar al estudiante “tareas” que no deben ser de inmensas proporciones, si no por el contrario con unas sencillas y llamativas preguntas las cuales despierten el interés y la motivación, que les haga sentir propia la problemática, de manera que se genere en ellos una necesidad de respuesta y los conlleven a su resolución. La intervención del docente en la resolución de las tareas debe estar dirigida a orientarlos en la construcción de su conocimiento (Ponte et. 2003).

Dentro del proceso de educación se hace necesaria la constante actualización e investigación de las distintas formas de enseñanza y aprendizaje existentes. En este sentido, la presente investigación señala la importancia de investigar sobre lo propio en el área de matemáticas, específicamente en geometría. En consecuencia, la presente investigación busca caracterizar los procesos de desarrollo del pensamiento geométrico a través de tareas exploratorio-investigativas, con el propósito de generar alternativas de prácticas de aula dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Esta investigación está dirigida a incentivar la necesidad de abordar una estrategia metodológica en la clase de matemáticas, que permita que los estudiantes desarrollen pensamiento matemático a partir de la construcción de su conocimiento, a través de la interacción y de la resolución de tareas exploratorias e investigativas en conjunto con sus compañeros de clase y con su docente. De esta manera, se aboga por favorecer que los estudiantes descubran conexiones entre lo que parecieran hechos aislados y sin sentido con sus procesos de construcción de significado (Sangrá y Steve, 2013) a partir de sus conocimientos previos como base fundamental (López, 2009).

En este sentido, la enseñanza de las matemáticas y en particular la de la geometría, constituye un proceso desafiante donde se han de tomar nuevas perspectivas y rumbos de enseñanza, todo en aras de mejorar la calidad educativa y lograr aprendizajes significativos en los estudiantes (Ardila, 2002). Por esta razón, se hace necesario mediar con formas alternativas en el aula, pues a pesar de las influencias de las nuevas corrientes donde se propone que el estudiante sea el actor principal, permitiéndole explorar, experimentar, observar, demostrar, organizar la información recolectada, se continúa observando en las aulas el paradigma donde el docente junto con el texto guía son quienes poseen el conocimiento y que el alumno debe aprender y memorizar para aprobar los posteriores exámenes (Núñez, 2000); paradigma que debe replantearse.

La tipología de tareas matemáticas propuestas por las "clases investigativas" es enriquecedora en actividad matemática, pues permiten al estudiante tomar decisiones razonables y coherentes con su realidad. La investigación como metodología de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular de la geometría, se plantea como un proceso de construcción social, donde el docente se convierte en un guía del cambio y construcciones cognitivas realizadas por sus alumnos (Tunnermann, 2011).

En el mismo sentido, las investigaciones realizadas por los estudiantes en los salones de clase los remite al a la raíz de la problemática, les permite revivir el proceso social, cultural e histórico por el cual transitó la construcción del nuevo conocimiento y les posibilita hacer conexiones y asociaciones entre los fenómenos para contextualizarlos a su realidad, lo que metodologías como la tradicional no permite a los aprendices (Kaplún, 2002). Además, este estudio es relevante porque pretende que el estudiante descubra el conocimiento por sus propios medios, para que logre realizar un cambio en sus concepciones y conocimientos previos por ideas nuevas.

De lo anterior surge la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo se caracteriza el proceso de desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes del grado quinto de primaria a través de tareas exploratorio-investigativas?

Objetivos

General

Caracterizar el proceso de desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes de quinto grado de educación básica primaria de una institución privada de la ciudad de Sogamoso, a través de tareas exploratorio-investigativas.

Específicos

- Revisar aspectos históricos generales del desarrollo de la geometría euclidiana.
- Determinar características de las tareas exploratorio- investigativas como estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico.
- Diseñar tareas exploratorio-investigativas para el desarrollo del pensamiento geométrico.
- Analizar aspectos del desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes en la solución de tareas exploratorio-investigativas.

Capítulo II. Marco referencial

Antecedentes

Las Clases Investigativas tienen sus raíces en Portugal y Brasil, es allí donde se han realizado la mayoría de investigaciones desde esta perspectiva, sin embargo, esta estrategia metodológica ha tenido gran acogida en toda Latinoamérica y algunos países de Europa. A continuación, se presentan diversas investigaciones de nivel internacional y local orientadas bajo esta propuesta.

El trabajo realizado por Aline y Coelho (2015), se planteó como objetivo comprender el proceso de construcción de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural en los estudiantes. Se realizó por medio de actividades de tipo investigativas, basándose en los principios de abstracción y reflexión de la teoría de Piaget, se analizaron los procesos de interpretación, resolución y argumentación. La investigación se desarrolló planteando tareas investigativas a los estudiantes, las cuales en una primera etapa del aula las desarrollaban en grupos de 4 estudiantes, seguidamente cada grupo pasaba al tablero a exponer sus hallazgos para posteriormente formalizar la construcción de este concepto de manera consensual con sus demás compañeros. A manera de conclusión, se estableció que por lo menos el 90% de los estudiantes lograron comprender y argumentar procesos de interpretación, resolución y argumentación a través de las distintas tareas realizadas.

Miranda y Pereira (2014), fijaron como objetivo de su investigación determinar las relaciones existentes entre las actividades investigativas y la construcción de nuevos conocimientos a través de los ya presentes en los estudiantes. Está investigación fue de corte cualitativo donde se observó y registró la resolución de distintas tareas planteadas, además se entrevistó a estudiantes y profesores, también se grabaron en audio algunas de sus clases y se registró en diario de campo todo lo sucedido en el desarrollo de las tareas planteadas. De este estudio se concluyó que este tipo de actividades fortalece la creación de construcciones mentales y físicas en el estudiante, al permitirle expresar sus ideas, lo cual los motiva y mantiene despierta su curiosidad, además de situarlos en el papel de pequeños matemáticos.

El trabajo realizado por Lamonato y Brancaglion (2012) tenía como propósito identificar los aprendizajes de la docente Natàlia y de sus alumnos, alcanzados a partir de actividades geométricas desarrolladas en el aula, donde analizaron las intervenciones del docente en este tipo de tareas y se valoró el proceso de comunicación, argumentación y negociación de significados. Este estudio fue de carácter cualitativo, reconociendo la participación directa del investigador, y se concluyó que cuando los estudiantes necesitan movilizar y representar sus conocimientos evidencian elementos ricos para la oportuna intervención del docente.

Molina (2007) realizó una investigación en la cual su principal objetivo fue analizar la producción y movilización de conceptos matemáticos, a través de tareas de tipo exploratorio e investigativas de diversos conceptos matemáticos. Estudio de tipo cualitativo que contó con la participación de estudiantes de quinto y sexto grado de educación básica de un colegio público de Itatiba (Brasil), quienes además proporcionaron la información a través de entrevistas semiestructuradas y del registro de las tareas realizadas. El profesor investigador llevó un diario de campo y realizó grabaciones de audio de algunas clases, con lo que logró determinar que a través de este tipo de tareas el estudiante ve la construcción del conocimiento como algo significativo, pues puede expresar sus ideas a través de las socializaciones y argumentaciones realizadas en el aula.

Bajo la misma perspectiva, Perussi (2006) en Curitiba (Brasil), realizó su indagación bajo los siguientes cuestionamientos: ¿Cómo las alumnas interactúan entre sí?, ¿Cómo las alumnas interactúan con la docente? y ¿Cómo las alumnas evidencian su raciocinio y conocimientos matemáticos? Bajo esta dinámica el autor pudo establecer la necesidad de resaltar el papel del docente en este tipo de actividades pues, debido a la estructura abierta de la tarea, pueden surgir conjeturas por parte de los alumnos, las cuales el docente desconozca o no las haya contemplado. Además, plantea que se debería incluir, siempre que se pueda a todos los alumnos de la clase para enriquecer más las posibilidades de análisis

Brocardo (2001) realizó su estudio en una clase de octavo grado, donde se tenía como objetivo general la producción, experimentación y evaluación de tareas exploratorias e investigativas que pudieran analizarse y explorarse en estudiantes de segundo y tercer ciclo de educación primaria y secundaria, llevándolos a la reformulación de algunas tareas y a realizar sugerencias para estudiantes y en la metodología del docente.

Este trabajo se caracterizó por desarrollarse bajo una metodología de investigación cualitativa, basada en estudios de casos, para la recolección de la información se realizaron grabaciones de audio y video a las distintas sesiones, se hicieron entrevistas a estudiantes, y se mantuvo una constante observación. Como resultado del estudio se afirmó que los procesos de investigación matemática en el aula favorecen notablemente las actitudes y desempeños de los alumnos pues desarrollan sus habilidades actuando con sus pares facilitando así la comprensión de los objetos matemáticos y caracterizando la naturaleza de estos, pues toman un papel activo dentro de la construcción de su conocimiento, además tienen el derecho a expresar sus ideas, escribirlas para justificar y argumentar el porqué de ellas.

Por otro lado, Ponte entre 1990 y 1992, analizó con alumnos de tercer grado de educación básica, las dinámicas que toma el aula cuando se plantean a los estudiantes actividades o tareas matemáticas de tipo exploratorio- investigativas, hallando diversidad de dinámicas tantas como estudiantes hay, y determinó que esto genera una verdadera actividad matemática, evidenciando que el aula se convierte en una micro sociedad de matemáticos, donde se permite al estudiante demostrar capacidades de conjeturar y generalizar articulando estrategias geométricas y aritméticas.

Respecto a lo investigado a nivel nacional, se encuentra el estudio local, realizado por Niño (2019), en el cual se planteó como objetivo, caracterizar el aprendizaje del concepto de función en los alumnos a través del modelado matemático en escenarios exploratorio-investigativos, llevando a cabo una metodología de corte cualitativo, donde se tomó a uno de los grupos conformados para el desarrollo de las tareas, como unidad para realizar un estudio de caso. Para recolectar la información se usaron grabaciones en audio, la observación participante y entrevistas. De esto se pudo concluir, que los escenarios exploratorios e investigativos propician espacios para el dialogo y la interacción social, lo cual contribuye en el aprendizaje de los alumnos, además que este tipo de tareas favorecen la exploración e investigación dentro y fuera del aula de clase.

Así mismo, se encuentra el trabajo, también local, realizado por Castillo (2017), quien se planteó como pregunta de investigación ¿Cómo se da la construcción del pensamiento contable a través de las clases investigativas en estudiantes tecnólogos de una institución formativa de la ciudad de Bogotá y universitarios de una institución de carácter nacional ubicada en la ciudad de Tunja, del área contable? Su objetivo era diagnosticar e identificar la construcción del pensamiento contable de algunos conceptos, en estudiantes tecnólogos y universitarios del área contable a través de clases investigativas, en este estudio se concluyó que las actividades propuestas desde clases investigativas permitieron desligar la mecanización y memorización de los conceptos propios del área y por el contrario fortalecieron los procesos de justificación y argumentación de los estudiantes de ambos grupos, tanto tecnólogos, como universitarios.

Esta es la descripción de las investigaciones, que de alguna manera están directamente relacionadas con el estudio acá planteado, los cuales, además servirán como referencia y sustento del mismo. A continuación, se exponen los referentes teóricos, que sustentan esta investigación.

Marco Teórico

Dentro de este capítulo se describen los sustentos teóricos en los que se basa el presente estudio. Se presenta la noción de tarea matemática desde distintas perspectivas, tareas en geometría y tareas de carácter exploratorio-investigativo. Además, se contextualiza el surgimiento y evolución de la geometría describiendo el pensamiento geométrico junto a los referentes relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Finalmente se analiza el papel de la geometría dentro del currículo colombiano.

Aproximación Conceptual de Tarea Matemática

El quehacer matemático dentro de la escuela genera entre otras tantas cosas, la realización de acciones, el surgimiento de ideas y la ejecución de planes, los cuales permiten a los estudiantes llevar a cabo procedimientos en busca de algún fin, bien sea la resolución de un problema o alguna situación planteada. De acuerdo con Coll (1995) un procedimiento es:

> (…) un conjunto de acciones ordenadas y finalizadas, es decir, orientadas a la consecución de una meta. Para que un conjunto de acciones constituya un procedimiento, es necesario que este orientado hacia una meta y que las acciones o pasos se sucedan con un cierto orden. (p. 139)

Algunos ejemplos de procedimientos son los de la división a través de la resta, las operaciones entre fracciones, la representación de un polígono, entre otros.

En este sentido, el término procedimiento se asume de una manera muy general, en el cual se encuentran sumergidas tanto estrategias como destrezas desarrolladas por los estudiantes dentro de los procesos realizados. Rico (1997) entiende los procedimientos como "formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas" (p. 31), y de igual manera acepta dentro de estas tareas matemáticas destrezas y técnicas de razonamiento matemático. En consecuencia, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se estructura a partir de actividades realizadas por los estudiantes, las cuales responden a la exigencia de cierta tarea matemática (Doyle, 1998).

Una tarea es una parte de la clase, la cual se dedica al desarrollo de un concepto o idea matemática en particular (Smith y Stein, 1998). En esta misma línea y de acuerdo con Penalva (2011), se entiende por tarea al conjunto de problemas, actividades, procedimientos y/o ejercicios que el profesor propone a sus estudiantes, es decir, las propuestas de acción que se plantean a los alumnos para el aprendizaje de las matemáticas. De esta manera, se puede interpretar a la tarea matemática como el conjunto de procedimientos tanto físicos como mentales realizados por el estudiante en busca de una meta o un fin.

De acuerdo con Aguayo, Flores y Moreno (2018) las finalidades de la tarea matemática pueden clasificarse en tres tipos. Las tareas de práctica, son aquellas en las que se refuerzan las habilidades o conocimientos recién logrados en clase, algunas actividades de práctica son guías de ejercicios, cuestionarios y resolución de ejemplos que sirven para estimular habilidades. Las tareas de preparación buscan proveer al alumno de información acerca de la temática que será desarrollara el día siguiente, algunas de estas actividades son leer, buscar información bibliográfica, entre otras. Las tareas de extensión se caracterizan por fomentar el aprendizaje colectivo y creativo al enfatizar la iniciativa de investigación por parte del estudiante. Del mismo modo, Rojas y Solar (2011) afirman que las tareas matemáticas, de acuerdo, a su finalidad poseen cierto grado de dificultad que las diferencia unas de otras, y esta dificultad se denomina complejidad de la tarea, y a su vez esta se determina según el número de operaciones mentales que la resolución de la tarea exige.

Por su parte, Stillman, Blum y Biembengut (2004) aclaran que dentro del ámbito escolar dificultad y complejidad son dos términos no equivalentes, pues "la dificultad de una tarea puede variar de un estudiante a otro, en cambio que su complejidad parece fija al estar determinada por sus atributos" (p. 63). De esta manera, las tareas propuestas a los estudiantes deben tener un grado de dificultad accesible para la mayoría de los alumnos, pero a su vez debe representar un desafío para ellos, las tareas demasiado fáciles o muy difíciles no son pertinentes para promover el aprendizaje (Brousseau, 1997). Las tareas más adecuadas para generar un buen aprendizaje son aquellas en las que el estudiante no tiene el conocimiento absoluto para resolverla, pero tampoco se ha de quedar bloqueado en su resolución, bastaría con que el alumno tenga un conocimiento previo acerca de la situación para abordarla y dentro de la resolución de la tarea modifique dicho conocimiento para construir uno nuevo (Brousseau, 1997).

En el mismo sentido y de acuerdo con Penalva (2011) se afirma que lo que la tarea exige a los estudiantes determina su demanda cognitiva, y ésta a su vez determina el potencial de aprendizaje del estudiante, y se aclara que, por demanda cognitiva de una tarea se entiende a la clase y nivel de pensamiento que su resolución exige a los alumnos, y a su vez, este nivel de pensamiento determinará lo que ellos pueden llegar a aprender. Smith y Stein (1998), utilizan el nivel de demanda cognitiva para diferenciar las tareas según el potencial que pueden tener en el desarrollo de diferentes aspectos del aprendizaje y las clasifican en cuatro niveles.

Las tareas de primer nivel son tareas de memorización, que implican reproducir formulas, reglas básicas, hechos o definiciones previamente aprendidas, no ponen en evidencia los conceptos o significados que subyacen de los hechos. Las tareas o actividades de segundo nivel, son de procedimientos sin conexión, se caracterizan por ser algorítmicas, no tienen conexión con los conceptos o significados abordados en el aula y requieren una demanda cognitiva limitada. Las de nivel tres se denominan tareas de procedimientos con conexión, focalizan la atención de los estudiantes en el uso de procedimientos con el propósito de desarrollar la comprensión de conceptos matemáticos inmersos en su entorno. Los alumnos necesitan asociarse con las ideas conceptuales que subyacen a los procedimientos para realizar con éxito la tarea.

Finalmente, las tareas que se ubican en el cuarto nivel requieren “hacer matemáticas”: exigen un pensamiento complejo y no algorítmico, pretenden que los estudiantes exploren y comprendan los conceptos matemáticos, demandan considerable esfuerzo cognitivo y pueden implicar cierto nivel de ansiedad en el alumno debido a la naturaleza no predecible del proceso de resolución (Smith y Stein,1998).

La tarea da origen a la actividad matemática, con la que se da la oportunidad al estudiante de encontrar e identificar nuevos conceptos matemáticos, generar ideas, estrategias y planes, además de permitirles usar, desarrollar y potencializar el pensamiento matemático, así como de formularse nuevos interrogantes.

Por otra parte, la selección, diseño, adecuación, complejidad, objetivo, y propósito de una adecuada y exitosa tarea, es un factor que recae en manos del docente, el cual debe ser consciente de las necesidades y capacidades de sus estudiantes, además de que ha de garantizar una educación integral lo que le implica tener una amplia y clara visión de lo que desea enseñar y a quienes lo va a enseñar, por ende el docente debe ser un ordenador lógico, pragmático y teórico, que sea capaz de transformar los saberes en aprendizaje para sus estudiantes (Castañeda y Rubiano, 2015). Se destaca la importancia de que el docente tenga bien definidos los objetivos que pretende lograr cuando planifica la tarea (Sullivan, P., Clarke, B. y Clarke, D. 2013).

De esta manera se plantea el siguiente esquema a cerca de la tarea matemática.

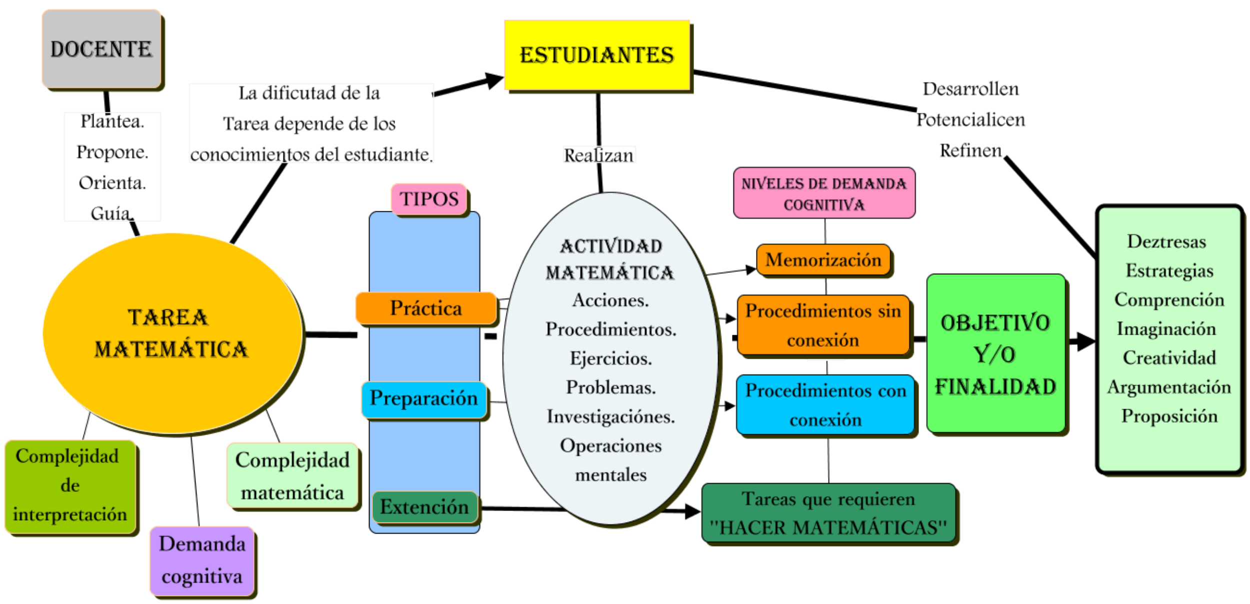


Figura 1: Tareas Matemáticas.

Fuente: elaboración del autor.

Tareas de pensamiento geométrico

Uno de los objetivos de las tareas en la enseñanza de la geometría es desarrollar y potencializar el razonamiento geométrico en sus estudiantes, mediante las actividades matemáticas y geométricas que requiere la finalidad de la tarea. Samper et al., (2003) sostienen que en geometría se pueden distinguir tres tipos de tareas, de conceptualización, de investigación y de demostración las cuales pueden evidenciarse a la vez durante el desarrollo de una misma tarea, pues la línea que las dividen entre sí es muy tenue, prácticamente invisible.

Las tareas de conceptualización centran su objetivo en la construcción de conceptos y sus relaciones geométricas, a través de la práctica, exploración y manipulación de algunas representaciones de dichos objetos geométricos, es decir, pretenden que sean los mismos estudiantes quienes construyan las definiciones de los conceptos para evitar que la enseñanza de la geometría se presente de manera ostensiva, es decir, que se muestre el objeto geométrico con sus relaciones y atributos completamente (Ávila, 2006). Es por esto, que para abordar de manera provechosa algún concepto geométrico se ha de permitir que el alumno explore y trabaje las distintas representaciones, formas, posiciones y tamaños de dicho objeto para que identifique sus relaciones, características y propiedades (López y García, 2008).

Las tareas de investigación se caracterizan porque es el estudiante quien indaga, busca información y se documenta para dar significado o dotar de propiedades y sentido a los objetos geométricos en estudio. En este tipo de tareas los alumnos ponen a flote sus destrezas, expresan sus puntos de vista, junto con sus alternativas de solución, en medio de estas actividades se hallan distintos planteamientos de solución a la tarea (López y García, 2008).

Las actividades y tareas de demostración tienen como objetivo desarrollar las habilidades argumentativas y propositivas de los estudiantes, de manera que justifiquen lógicamente sus postulados ante los demás; la construcción de argumentos lógicos es vital dentro de la ciencia geométrica. En el ámbito escolar se diferencian tres tipos de demostraciones, la explicación, que se basa en un discurso donde se hace ver la veracidad de una proposición; la prueba, que se entiende como una explicación aceptada por determinada comunidad en cierto momento y la demostración propiamente dicha, que consiste en probar la veracidad de algunos enunciados (Balachef, 1987).

Tareas Exploratorio-Investigativas.

La propuesta de Clases Investigativas nace bajo la necesidad de dejar atrás los esquemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas memorístico y repetitivo, a través de tareas matemáticas de carácter exploratorio e investigativo, que son muy productivas en la actividad matemática. Según Ponte (2003), las clases investigativas involucran al estudiante en el proceso matemático de inicio, pues, es él quien debe formular las preguntas que se han de resolver, idear maneras de presentar y organizar los información y la información obtenida, planear estrategias de solución, someterlas a prueba, aplicarlas, justificar, argumentar y validar resultados, entre otras.

Desde esta perspectiva, se busca despertar en los estudiantes el espíritu genuino de la actividad matemática, donde se pretende llevar al alumno a que se convierta en un pequeño matemático, realizando las actividades propias de ellos, como explorar, indagar, manipular, recolectar y organizar información. Además, se busca que el estudiante plantee conjeturas, las afirme o refute a través de sus propios procedimientos, justificaciones y argumentos.

Del mismo modo, se pretende que el estudiante demuestre de manera rigurosa sus afirmaciones y/o postulados frente a sus compañeros (Ponte, 2010), dando esto gran significado para él, pues puede expresar sus ideas y construcciones mentales, realizadas dentro de los procedimientos llevados a cabo en la resolución de las tareas matemáticas planteadas.

De igual manera, se señala que hacer investigación no requiere de un problema de inmensas proporciones, “basta con alguna o algunas preguntas de interés, las cuales no tengan una solución inmediata e involucren y motiven al estudiante a buscar su respuesta” (Ponte, et al. 2003, p. 9), haciendo que el alumno vea la problemática como propia, generando en él la necesidad de hallar solución a ésta. En este sentido, la propuesta de clases investigativas se caracteriza por presentar una estrategia metodológica para enseñar y aprender matemáticas, respetando el conocimiento previo del alumno apropiado desde el contexto o desde la propia institución (López, 2009).

En el mismo sentido, investigar corresponde a realizar descubrimientos recorriendo procesos metodológicamente válidos, como la formulación de preguntas, explorar y plantear hipótesis, lanzar y probar conjeturas, generalizar y construir argumentos y demostraciones, investigar es descubrir relaciones y patrones, procurando comprobar las propiedades e hipótesis generadas por el investigador, esta actividad estimula al alumno a explorar, conjeturar, validar y presentar los resultados encontrados (Ponte, 2003), lo cual además ayuda a reforzar actitudes de autonomía, cooperación y comunicación oral y escrita.

Es así que la investigación matemática realizada por el alumno, desde esta perspectiva, parte de un planteamiento general poco estructurado, e intenta formular unas preguntas más específicas, sobre las cuales ha de plantear varias conjeturas que ha de probar, y en caso de ser refutadas, el alumno deberá plantearse unas nuevas cuestiones a trabajar (Ponte, 2003).

De acuerdo con Fiorentini y Lorenzato, 2006 se considera clase investigativa aquella cuyas prácticas pedagógicas se centren en la implementación de tareas y actividades abiertas y exploratorias, dentro de las cuales se le puedan presentar al alumno múltiples posibilidades o alternativas de abordar y significar los objetos matemáticos tratados. Esta propuesta pretende resaltar la importancia de un escenario investigativo, a incitar a los alumnos a formularse preguntas y a dar explicaciones a estas, cuando los estudiantes asumen este proceso, se construye el nuevo ambiente de aprendizaje (Skovsmose, 2000).

La realización de investigación en matemáticas por parte de los estudiantes, contribuye al aprendizaje de conceptos propios de esta disciplina, además que permite desarrollar conocimiento de manera transversal, favoreciendo procesos de comunicación y trabajo en equipo, que contribuyen a la formación de nuevas perspectivas frente a la matemática (Rocha y Ponte, 2006), al mismo tiempo que estimula y potencializa el raciocinio matemático, pues una vez el alumno envuelto en la investigación es impulsado a participar activamente de esta actividad, favoreciendo el nuevo aprendizaje (Méndez, 1996).

De acuerdo con Ponte (2003), las investigaciones matemáticas y las tareas de corte exploratorio-investigativo, se diferencian de las demás actividades por tratarse de tareas que conllevan más tiempo para su desarrollo y que requieren de cuatro momentos principales en los que se evidencia la construcción y comprensión de conceptos matemáticos. El primero es la exploración y formulación de preguntas investigativas, donde el estudiante explora la situación a través de la manipulación de objetos concretos, de representaciones gráficas, entre otras, y se plantea las preguntas que ha de resolver para solucionar la tarea propuesta. El segundo momento es la organización de información y construcción de conjeturas, el cual permite al alumno organizar sus ideas y plasmarlas a través de distintas representaciones; el tercer momento, hace alusión a la afirmación, sistematización o refutación de dichas conjeturas, donde el alumno reafirma sus conocimientos o realiza las acomodaciones pertinentes para generar uno nuevo y el cuarto momento, en el cual se realizan las justificaciones, argumentaciones y demostraciones, de manera grupal y frente a sus compañeros, para validar los resultados encontrados, acciones que permiten al estudiante la construcción de su propio conocimiento y el afianzamiento de múltiples habilidades.

Bajo esta perspectiva de enseñanza y aprendizaje de la matemática, se exalta, que el papel del estudiante es el de convertirse en un investigador matemático, llevando al docente a investigar cómo sus estudiantes investigan (Riscanevo, 2019), además se ha de caracterizar por comprender mejor la naturaleza de la matemática, estar abierto a las distintas formas en que sus estudiantes interpretan los objetos matemáticos , es decir, comprender el pensamiento matemático de sus alumnos, para facilitar la construcción del conocimiento.

En el mismo sentido, es el docente quien estará orientándolos durante el desarrollo de la tarea para evitar bloqueos debido a obstáculos epistemológicos o de cualquier índole, que estén presentes en ellos, además el docente debe aprender a lidiar con los aspectos emocionales de sus alumnos derivados de la resolución de dichas tareas (Ibáñez, 2002), lo que se convierte en un aspecto de vital importancia, pues éste ha de saber en qué momento ayudar u orientar al estudiante para permitir su avance y evitar frustraciones o desánimos frente a las situaciones planteadas. Además, el docente debe documentarse sobre diversas teorías pedagógicas que subyacen de las propuestas de aula investigativas.

Por otro lado, bajo el marco de clases investigativas, se considera tarea a todas aquellas propuestas realizadas y planteadas por el docente a sus estudiantes, pero también puede surgir por iniciativa propia del alumno, en este caso ha de ser negociada entre el docente y los estudiantes, así mismo se considerará actividad a todas aquellas acciones físicas o mentales realizadas por el alumno con el fin de resolver dicha tarea (Ponte, 2004).

Del mismo modo, se postula que cuando el estudiante está inmerso en la actividad matemática es porque está realizando cierta tarea, dicho de otra manera, desarrollar la tarea es el objetivo de la actividad matemática realizada por el alumno, así que las actividades matemáticas serán los procesos y procedimientos realizados por el estudiante para resolver alguna tarea propuesta por el docente, el cual no puede intervenir en la actividad matemática, pero sí puede planear y dirigir una buena tarea, de manera que sea enriquecedora para la construcción de conceptos matemáticos y geométricos en el alumno, pues ellos aprenden mediante la actividad que realizan y la reflexión que hacen sobre esta (Christiansen, 1999).

De modo similar, se hace aclaración entre lo que es un problema y un ejercicio, dentro de la actividad matemática que realizan los alumnos, resaltando que, lo que algunos estudiantes ven como un problema, para otros tan solo será un ejercicio, esto dependerá de los conocimientos previos establecidos en el estudiante (Ponte, 2010). También, se categorizan los problemas de acuerdo a su grado de dificultad como difícil, donde se corre el riesgo de que el estudiante desista en la resolución de este, y fácil, donde se convierte en un ejercicio para el alumno y se aclara que los ejercicios sirven para poner en práctica los conocimientos adquiridos y de esta manera consolidarlos, pero con la falencia de que empobrecen los desafíos matemáticos en los estudiantes (Ponte, 2010).

Así mismo, se postula que en los problemas donde se deja claro lo que se da y lo que se pide al estudiante son de estructura cerrada, mientras que en las tareas de tipo exploratorio e investigativas no se dan información exactos, es decir, son de estructura abierta, y atañen un grado de dificultad más elevado, pues se busca que el estudiante explore e investigue, o sea, se pretende de cierta manera que sean ellos mismos quienes planteen el problema a resolver, resaltando de esta manera la importancia de las investigaciones matemáticas realizadas por los alumnos (Mason, 1996), dicho de otra manera en la resolución de problemas la pregunta es completamente clara, mientras que en la investigación la pregunta es más general, es decir, necesita ser precisada por los estudiantes (Ponte, 1998).

Del mismo modo, una tarea abierta no necesariamente representa un grado alto de dificultad, por lo cual, la diferencia entre las tareas de exploración e investigación radica en que, si el estudiante puede empezar a trabajar sin mayor planificación, estaría frente a una tarea de exploración, de lo contrario sería una tarea de investigación (Ponte 2004).

Por otra parte, en la resolución de problemas el objetivo es encontrar un camino para llegar a la respuesta, es decir, es un proceso convergente, en cambio que en la investigación matemática el propósito es explorar todos los caminos lógicamente válidos, que surgen de la tarea, en otras palabras, es un proceso divergente, se sabe de dónde se parte, mas no se sabe el punto de llegada (Ponte, Ferreira y Brunheiras, 1999). Es de resaltar que existe una línea muy tenue entre lo que son los problemas y los ejercicios y entre las tareas de exploración y los ejercicios, un mismo enunciado se puede confundir con un ejercicio, con un problema o con una tarea de exploración y nuevamente depende de los conocimientos previos del estudiante.

En este sentido, de acuerdo con Skovsmose, (2000) se hace clasificación de la tarea matemática respecto a su duración que puede ser corta, que comprenderían la resolución de ejercicios y algunos problemas, media, que son las tareas de exploración e investigación y de duración larga donde se incluyen los proyectos investigativos, que son mucho más enriquecedores para los estudiantes Estas tareas también se enmarcan en contextos de acuerdo a su planteamiento, y son denominadas de realidad, que son aquellas planteadas en distintos ambientes de la vida real, de semirrealidad, que hacen alusión a los problemas estructurados y simplificados que aproximan al estudiante a situaciones de la vida real y de matemáticas puras, que se refiere a aquellos problemas netamente matemáticos

Lo anterior, Ponte (2003) lo representa en el siguiente plano

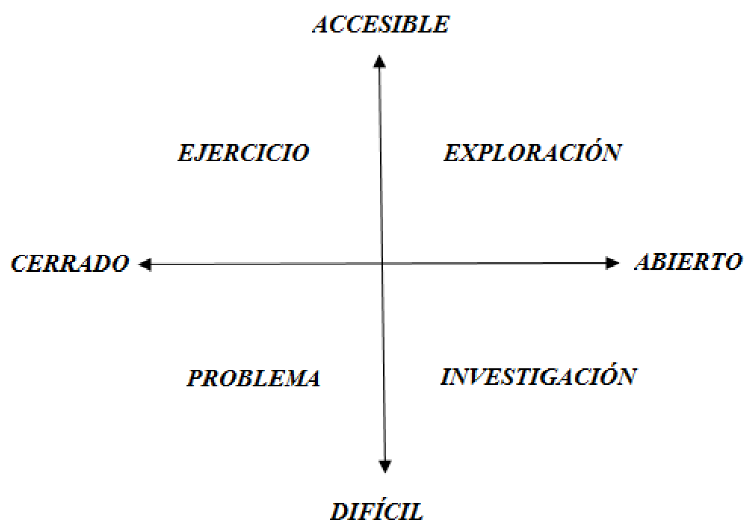


Figura 2: Tipos de Tareas según grado de dificultad y apertura.

Fuente: Tomada de Ponte (2003).

De acuerdo con Ponte (2003) y apoyados en la anterior figura se puede establecer que un *ejercicio* es una tarea de dificultad accesible y estructura cerrada (II cuadrante), un *problema* también es de estructura cerrada, pero de dificultad más elevada (III cuadrante), una tarea de *investigación* es de estructura abierta y elevada dificultad y una tarea de *exploración* también es de estructura abierta, y dificultad accesible (I cuadrante), cabe recordar que la línea que separa cada cuadrante es muy tenue y depende únicamente del estudiante (Ponte, 2004). La planeación y selección de las tareas propuestas a los estudiantes debe tener en cuenta sus características, capacidades e intereses, es por esto que el papel del docente es fundamental en este proceso.

El diseño, preparación, selección y adecuación de las tareas investigativas es muy importante, además de ser una labor para la cual no hay una guía preestablecida, por lo cual el docente debe ser muy cuidadoso al plantearlas, aunque más importante es la forma en que son abordadas dentro del aula (Christiansen, 1999).

Una clase donde se desarrollen tareas exploratorio-investigativas se estructura principalmente en tres segmentos. El primero segmento, es el inicio de la clase, donde los docentes junto con sus estudiantes negocian las tareas, es decir, analizan su formulación e interpretación. En esta fase inicial el trabajo con los alumnos puede presentar dificultades que les impide iniciar con sus investigaciones, esto se debe principalmente a que los estudiantes no están familiarizados con este estilo de tareas. En este caso, es necesario que el docente explique un poco acerca de la dinámica del trabajo, que incentive la autoconfianza y propicie ambientes de interacción con sus colegas (Fonseca, Brunheiras y Ponte, 1999). Se debe resaltar que el tiempo destinado en esta fase debe ser menor, pues se debe dejar la mayor parte de tiempo para el desarrollo de los demás segmentos.

El segundo segmento se denomina desarrollo de la clase, en el cual los alumnos trabajan autónomamente, de manera individual, por parejas o grupal, esto dependerá de las necesidades de la tarea. En esta fase de la clase se debe motivar constantemente a los estudiantes y se les debe llevar a reflexionar sobre el trabajo que están desarrollando, es el momento en que el profesor recorre el aula afirmando o cuestionando las ideas de sus estudiantes. Según Oliveira, Segurado y Ponte (1996) se deben hacer preguntas que ayudan a motivar y permitir el desarrollo de la clase "(…) ¿Cómo vas con esto?, ¿Qué intentas hacer con eso?, ¿Qué piensas acerca de esto?, ¿Qué pretendes descubrir?, ¿Cómo puedes organizar esto?, ¿Será que funciona también de esta otra manera?"(p. 207). De esta manera, estos investigadores sugieren que se mantiene latente el espíritu investigativo y cuestionador en el estudiante, además de facilitar al docente verificar el trabajo realizado y reconocer los ritmos y estilos de aprendizaje de sus alumnos.

En la fase final de la clase, denominada presentación de resultados y discusiones finales, todos los estudiantes compartirán, de manera individual o grupal, las ideas generadas dentro del desarrollo de la tarea, en esta fase el papel del docente será el de moderador y orientador de la formalización e institucionalización del nuevo conocimiento adquirido por los estudiantes, permitiendo la socialización de las justificaciones y argumentos realizados por los alumnos durante la investigación (Ponte, et al. 1998). De esta manera, se estructura una clase pensada y diseñada bajo la perspectiva de clases investigativas, exaltando su desarrollo por la constante exploración, interpretación de información, planteamiento de conjeturas, argumentaciones y justificaciones por parte de los estudiantes.

Revisión histórica de algunos aspectos de la geometría euclidiana

La geometría es una de las ciencias que más aportes ha realizado al desarrollo y evolución de la humanidad, de acuerdo con Alsina (2008) desde el inicio de las civilizaciones ha estado presente en la descripción de cada uno de sus avances, especialmente en la resolución de situaciones que para los primeros humanos representaban un problema, dentro de las que encontraban la medición de terrenos y el cálculo de áreas, entre otros.

De acuerdo con Almeida (2002, citado por Ortiz, 2005) los primeros indicios de civilización se presentaron en la antigua Mesopotamia, tierra ubicada en el continente asiático, entre dos importantes ríos el Tigris y el Éufrates, allí se desarrolló la civilización de los Babilonios, hacia el 3.000 A.C., quienes hicieron contribuciones en lo referente al cálculo de áreas de figuras como el cuadrado y el círculo, además del significativo aporte que se hizo a la geometría con la invención de la rueda**,** y el estudio realizado a las propiedades de la circunferencia entre la relación de su longitud y el diámetro, igualmente, los babilónicos realizaban estudios y observaciones de los planetas y su ubicación, especialmente al planeta Júpiter, a través de mediciones geométricas

Por otra parte, Portillo (2010) afirma que entre los años 2000 y 500 a.C, en India se realizaban estudios a los triángulos y a sus relaciones, en esta parte del mundo la geometría estaba muy enlazada con la religión y sus creencias culturales, a los indios se atribuyen las primeras evidencias del dominio del “teorema de Pitágoras”. En esta misma época en Egipto se realizaban estudios geométricos sobre volúmenes y áreas, a pesar de las grandes construcciones hechas por esta civilización, se caracterizó por no mostrar evidencia de algún tipo de demostración rigurosa

En el mismo sentido y de acuerdo con Ortiz (2005) el desarrollo de la geometría entre los años 900 a 400 a.C. se centró en Grecia, donde ya existían las primeras escuelas de enseñanza, en las cuales se orientaban disciplinas como la filosofía, la matemática y la oratoria, de esta manera la civilización griega hizo su gran aporte a la geometría, pues dotó de explicaciones racionales y demostraciones a los distintos conceptos matemáticos y geométricos conocidos hasta esa época.

Dentro de la cultura griega se destacan los aportes realizados por Tales de Mileto (630-545 a.C), considerado uno de los siete sabios de la antigüedad, se le atribuyen las primeras demostraciones mediante el razonamiento lógico, además de ser el primero en poder calcular la altura de las pirámides de Egipto (Hemmerlin, 2005, citado por Fernández 2018). Conforme a Perero (1994) también se destaca Pitágoras de Samos (582-500 a.C), quien se dice que fue discípulo de Tales, el cual fundó la escuela pitagórica en Italia. Se le atribuye la demostración del teorema que lleva su nombre, además de introducir a la matemática los números irracionales. Igualmente se reconoce el aporte de Herodoto (484-425 a.C), historiador griego quien por primera vez utilizó la palabra “geometría” entendida como medida de la tierra.

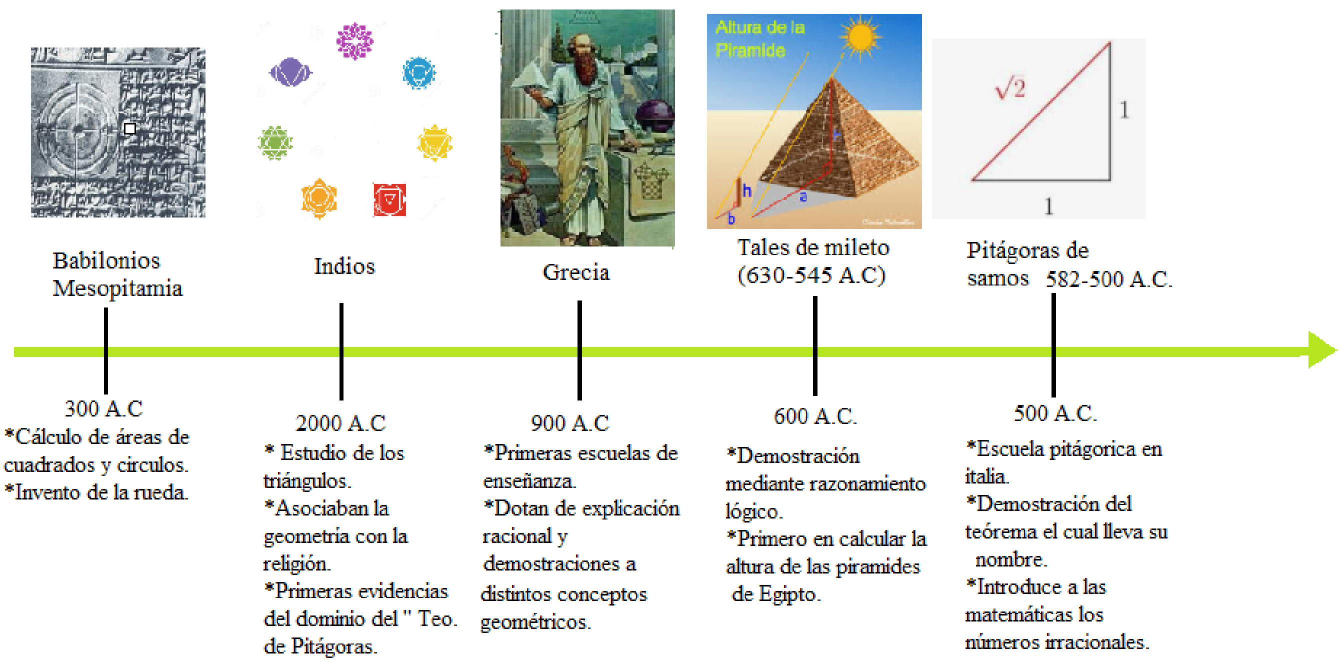
Por otro lado, Méndez (1996) afirma que Ptolomeo I durante su mandato en Egipto ordenó la construcción de una escuela, donde Euclides de Alejandría 325 a 265 a.C. enseñaría por más de 30 años, tiempo en el cual también escribió su más grande obra y una de las más grandes en el mundo de las matemáticas y en especial de la geometría, “Los Elementos de Euclides”. Este manuscrito era un compendio de trece libros en los cuales se recopilaban todos los conceptos y saberes geométricos establecidos hasta ese momento. De acuerdo con este mismo autor se dice que casi ninguno de los postulados era original de Euclides, pero su gran aporte fueron las demostraciones que ofrecía a cada uno de ellos

De igual manera, Méndez (1996) afirma que dentro de la escuela euclidiana se destacó el trabajo de Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C), quien aportó el método para determinar áreas y volúmenes de figuras acotadas por curvas, además de dar una aproximación más precisa del número π. De la misma escuela, Apolonio de Perga (262-190 a.C), escribió un tratado acerca de las principales cónicas y estableció los nombres para la elipse, parábola e hipérbola.

Del mismo modo, este mismo Méndez (1996) sostiene que el desarrollo de la geometría durante los siglos II a XII, estuvo marcado por un adormecimiento teórico, finalmente para la época renacentista el matemático italiano Leonardo de Piza (1170-1240) más conocido como Fibonacci, aportó de manera significativa a la geometría con su libro “*Practica Geometríae*” (Práctica de la geometría) donde resuelve todo tipo de problemas referentes al cálculo de áreas de polígonos y volúmenes de cuerpos geométricos. En el siglo XVII, sería el matemático francés Rene Descartes (1596-1650) quien patentara lo que se conoce como geometría analítica, presentando el plano cartesiano como sistema de coordenadas. Otras de sus aportaciones aparecen publicadas en sus ensayos titulados “La geometría”.

Acorde con Bosh (1993 citado por Ortiz, 2005) en la época renacentista se destacan los aportes del matemático alemán Gottfried Leibniz (1646-1716) quien estudió las propiedades cualitativas de los objetos geométricos, lo cual que se conoce como topología. Leonard Euler (1707-1783), matemático y físico suizo, plasmó en una de sus obras denominada “Introducción al Análisis de los Infinitos", un estudio completo acerca de geometría analítica, donde incluía las cónicas. Cerrando este selecto grupo de geómetras, se encuentran al matemático ruso Nicolai Lobachevsky (1793-1856) junto con el húngaro János Bolyai (1802-1860), quienes declararon simultáneamente, pero por separado, que habían descubierto una geometría que cumplía los postulados de Euclides, excepto el postulado de las paralelas, a estas geometrías se les denominó geometrías no euclidianas.

A continuación, una línea del tiempo que ilustra lo anterior.



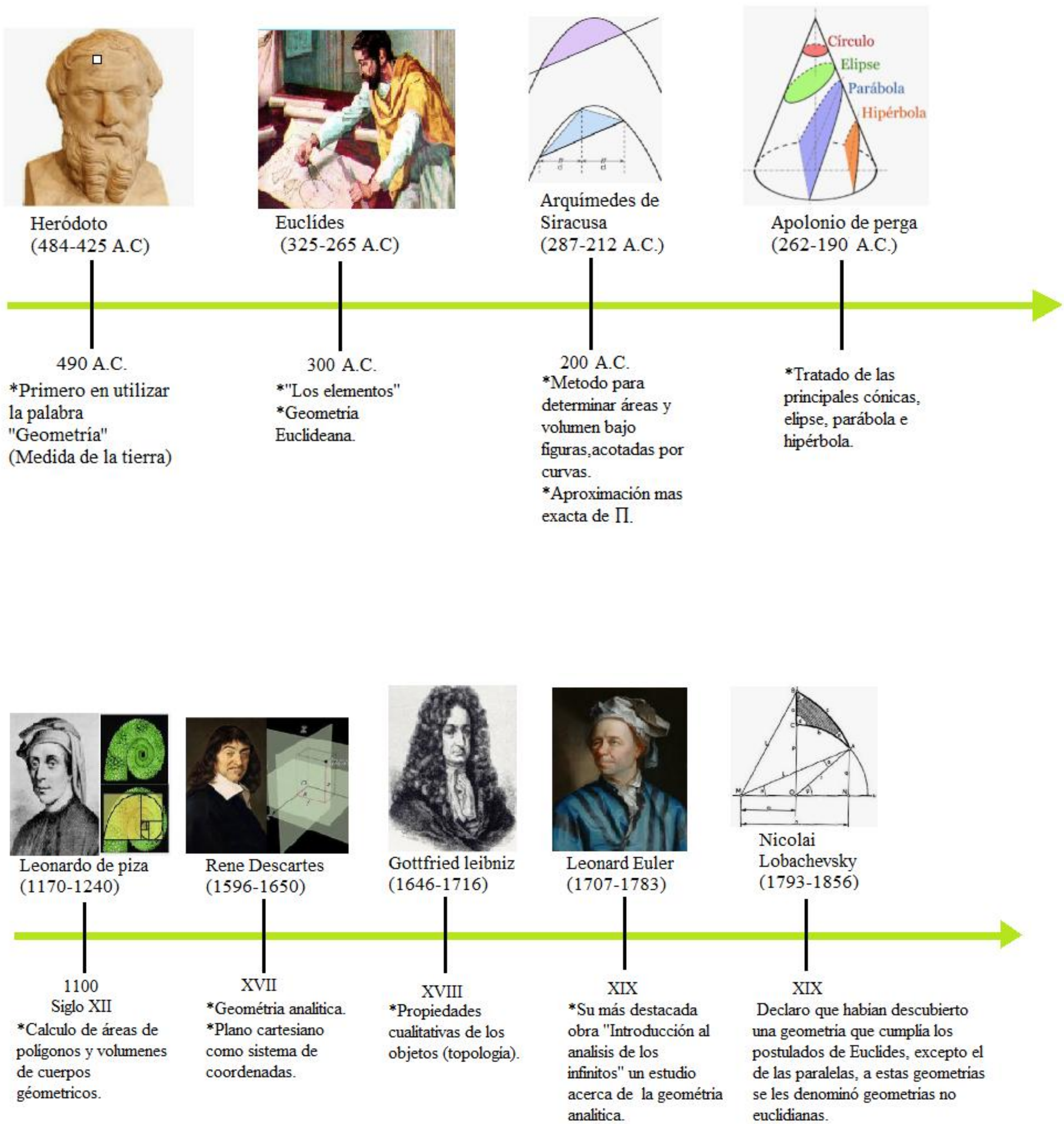


Figura 3: Línea del tiempo de la evolución de la geometría.

Fuente: elaboración propia (Imágenes tomadas bajo licencia Creative Commons CC).

Proceso de desarrollo del pensamiento

El concepto de pensamiento está asociado a la solución de distintas situaciones del diario vivir del hombre, pues se plantea que cuando éste se enfrenta a circunstancias donde debe elegir una alternativa entre varias, y si elige la más conveniente, se dice que es un ser pensante (Castillo, 2004). En este sentido, el proceso de pensar ha permitido la evolución de la especie humana, pues de acuerdo con Vygotsky (citado en Amestoy, 2002) este desarrollo es el producto de interacciones entre los miembros de una sociedad, por otra parte, Bandura (1987) sostiene que el pensamiento humano es una poderosa herramienta para comprender el mundo que nos rodea.

Otra de las nociones acerca de pensamiento la plantea Simón (citado en Amestoy, 2002) quien lo considera como el manifiesto de un amplio dominio de diversas actividades, entre las que se encuentran la resolución de problemas, aprender, recordar, inducir patrones, comprender, percibir estímulos, entre otras. Por su parte Mayer (1983) señala que pensar es lo que ocurre dentro de la mente del ser humano mientras soluciona un problema, pues allí se realiza la búsqueda y elaboración de significados, lo cual dota de sentido la existencia del ser humano.

Por otra parte y de acuerdo con Piaget (1990) una de las evidencias del pensamiento humano es el lenguaje, para éste es un subproducto del pensamiento, además afirma que el lenguaje no basta para explicar el desarrollo del pensamiento. En este sentido, el mencionado autor dividió el desarrollo cognoscitivo en cuatro etapas, en cada una de ellas el pensamiento del niño es cualitativamente distinto a las demás, una vez el niño entra en una de las etapas, no retrocede a una anterior, es decir, ellos transitan por las cuatro etapas en el mismo orden secuencial, no es posible omitir alguna de ellas, además cada una de las etapas está ligada a ciertos niveles de edad.

La primera etapa se denominada sensorio-motora, la cual sucede entre los cero y dos años de edad, esta se caracteriza porque el niño se relaciona con su entorno a través de los sentidos, además que desarrollan conductas intencionadas, por ejemplo, apretar un muñeco para que emita sonidos, al tiempo que comprenden que son objetos que tienen existencia permanente. En esta misma etapa se hacen notables actividades como la imitación y el juego, dando muestras de las relaciones circulares primarias y secundarias, al coordinar movimientos de partes de su cuerpo y replicar situaciones interesantes que ha experimentado en su entorno (Linares, 2009). Es de resaltar que, dentro de esta etapa inicial de desarrollo cognoscitivo, entre los 18 y 24 meses de edad, se evidencia en los niños el comienzo del proceso de pensamiento, es así que, en el instante de realizar acciones directas sobre objetos, dan muestras de que piensan antes de actuar.

La segunda etapa de desarrollo cognoscitivo, de acuerdo con Piaget (1990) se denomina pre operacional, y se presenta entre los dos y siete años de edad, se caracteriza porque los niños están en la capacidad de pensar en objetos, situaciones, cosas o personas que han sido significativas dentro de su corta edad, además es notoria en ellos una mayor habilidad para utilizar símbolos, gestos, imágenes, dibujos, palabras, entre otras, para expresar sus sentimientos y pensamientos acerca de acontecimientos que ha podido o no experimentar de manera directa. En esta etapa piensan y actúan diferente a como lo hacían anteriormente, están en la capacidad de comunicarse claramente y utilizar sistemas numéricos para contar objetos, aunque los limita su baja capacidad de realizar operaciones lógicas (Linares, 2009).

En este orden de ideas, la tercera etapa se denomina de operaciones concretas, y ocurre entre los siete y once años de edad, en esta etapa los niños ya se encuentran en la escuela, es allí donde empiezan a usar operaciones mentales y lógicas para analizar hechos de su entorno. En esta etapa su pensamiento es más rígido, ahora están en condiciones de hacer predicciones a cerca de su contexto, además de que ya no basan sus juicios en las apariencias de las cosas (Linares, 2009).

La última de estas etapas fue denominada por Piaget (1990) operaciones concretas, la cual se presenta de los doce años en adelante, en esta etapa los escolares cuentan con herramientas cognoscitivas suficientes como para solucionar una determinada situación problema, además de comprender relaciones conceptuales entre operaciones matemáticas, ejemplo, reconocen la igualdad entre, cinco más ocho y doce más uno. De acuerdo con Flavell (citado en Linares, 2009) el cambio más relevante dentro de esta etapa es que la capacidad de pensamiento pasa de lo concreto a lo abstracto, en otras palabras, los niños de primaria razonan lógicamente pero solo sobre objetos tangibles, en cambio los adolescentes son capaces de razonar de manera abstracta, es decir, sobre cosas no tangibles ni visibles.

En este sentido, Piaget (1990) planteó que todas las personas organizan, en lo que él denomino esquemas, el conocimiento que tienen acerca de su entorno, los esquemas son conjuntos de acciones físicas y operaciones mentales de conceptos y definiciones, con las cuales organiza y adquiere información sobre el mundo en el cual vive. El niño de corta edad reconoce su contexto a través de las acciones que realiza, mientras que los de mayor edad, pueden hacerlo mediante operaciones mentales, y por medio de distintos sistemas simbólicos como el lenguaje, dibujos, patrones, entre otros. En consecuencia, a medida que se transita por cada una de las etapas, mejora la capacidad de usar esquemas y símbolos más complejos.

Dentro del desarrollo cognitivo, Piaget (1990) reconoce algunos principios implícitos dentro de este proceso, dos de estos son los de organización y adaptación, los cuales llamó funciones invariables que rigen el desarrollo intelectual en los estudiantes. La organización consiste en la disposición innata de integrar esquemas simples a unos más complejos y la adaptación se resume en la capacidad de ajustar las estructuras mentales propias a las exigidas por el contexto que lo rodea. Otros de los principios planteados por este autor son los de asimilación y acomodación, en el primero el niño moldea la nueva información para que se adapte a la ya existente, y a su vez, el proceso de modificar los esquemas actuales, se llama acomodación y tiende a darse cuando la nueva información no encaja rápidamente con la ya establecida.

De esta manera, se establecen algunas de las características del desarrollo del pensamiento en las primeras etapas del ser humano, planteando además que toda persona posee una gran variedad de pensamientos, influenciados por la cultura y el ambiente del cual se rodea.

Pensamiento espacial y sistemas geométricos

Dentro del campo de la Didáctica de las Matemáticas según Torregrosa y Quesada (2007) ha surgido diversas teorías y estrategias metodológicas, en busca del desarrollo de capacidades espaciales y geométricas, entre las que se encuentran la visualización, abstracción, formalización, entre otras, intentando identificar los procesos cognitivos realizados por el estudiante cuando se enfrenta a la resolución de una situación problema en geometría, la identificación de dichos procesos favorecerá el desarrollo de tales capacidades, sin embargo, la caracterización de éstos es una de los mayores interrogantes en la educación, pues de acuerdo con Gutiérrez (2006) es evidente la necesidad de comprender lo que sucede en la mente de los estudiantes, tratar de entender cómo transforman la información proveniente de fuentes externas, cómo la analizan y cómo realizan la toma de decisiones. Además, según López y García (2008) es necesario tener claro que conceptos como triangulo, circunferencia, cuadrado, ángulo, perímetro, área, entre otros, son hoy en día parte de nuestro diario vivir y son objetos matemáticos que conforman el pensamiento geométrico.

El pensamiento espacial y los sistemas geométricos se caracterizan por la visualización espacial, entendida como la representación y ubicación mental de objetos en el espacio, además de especificar localizaciones usando modelos gráficos, las coordenadas y otros sistemas de representación (Mason, 1996). Para poder comprender cómo evoluciona el pensamiento geométrico, se asume la caracterización de Van Hiele (1999) sobre los niveles de pensamiento geométrico, la cual describe las diferentes formas en que los estudiantes hacen los distintos razonamientos y pensamientos vistos desde el ámbito geométrico, es decir, asume que el aprendizaje de esta área transcurre por una serie de niveles secuenciados, para dominar cada nivel y avanzar al siguiente, se debe cumplir o lograr ciertos procesos de aprendizaje, vistos como fases, que dentro de este modelo hacen referencia al aspecto descriptivo.

Los niveles planteados por los esposos Van Hiele son consecutivos y jerárquicos, es decir, que no se puede pasar de un nivel a otro sin desarrollar los procesos y competencias del nivel previo (Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. 1995). En el nivel uno "visualización y reconocimiento", los estudiantes reconocen figuras como triángulo, cuadrados o círculos, entre otros, por su forma, más no tienen presente las propiedades y características explicitas de cada figura, es decir, los perciben como un todo (Burger y Shaughnessy, 1986), en esta estancia los estudiantes realizan comparaciones a través de lo que visualizan físicamente, es decir, pueden asemejar un rectángulo con un cuaderno o un libro, pero no dirán que tienen ángulos rectos u cualquier otra propiedad (Van Hiele, 1999), es decir, ignoran algunas características importantes y enfatizan en otras no pertinentes, como es el caso de la posición de los objetos (Vargas y Gamboa, 2012).

En el nivel dos denominado "análisis", los alumnos son capaces de identificar propiedades de objetos geométricos, establecen relaciones entre las propiedades descubiertas, las ven como características independientes unas de otras, es decir, para definir un concepto como el de triangulo harán un listado de propiedades del objeto sin ver la relación entre ellas (Gutiérrez & Jaime, 1998), para este nivel los estudiantes reconocen que cambiar de posición la figura, no altera sus propiedades (Vargas y Gamboa, 2012). Dentro del nivel tres llamados “ordenación, clasificación y abstracción”, los alumnos establecen relaciones entre las propiedades que creían independientes, realizan conexiones lógicas que les permiten realizar pequeñas definiciones (Van Hiele, 1999), comprenden las características del todo, las relacionan, además reconocen sus propiedades y las relaciones existentes entre ellas, y clasifican de manera lógica los objetos a través de razonamientos deductivos (Vargas y Gamboa, 2012).

De esta manera, los estudiantes ubicados en el cuarto nivel denominado “deducción formal”, establecen relaciones entre las propiedades de las partes y el todo, ven la necesidad de demostrar para argumentar y justificar sus resultados, para esto utilizan teoremas y los relacionan unos con otros para realizar deducciones y probar resultados de distintas formas. Dentro del quinto y último nivel denominado “rigor”, los estudiantes relacionan axiomas, teoremas y proposiciones, sus deducciones son de forma abstracta, no necesitan de representaciones físicas para realizar conjeturas de objetos geométricos, su nivel de abstracción es muy alto (Vargas y Gamboa, 2012).

Enseñanza y aprendizaje de la geometría

La geometría ha sido de vital relevancia a través de la historia para el desarrollo del ser humano como sociedad, de acuerdo con Jones (2002) esta ciencia se ha considerada como indispensable dentro de la formación académica y cultural del hombre, dada su capacidad de desarrollar habilidades de razonamiento, visualización, abstracción, solución de problemas, deducción a partir de imágenes, además de fortalecer el pensamiento crítico, la realización de conjeturas, y el planteamiento de argumentaciones y justificaciones.

En el mismo sentido, se ha catalogado a la geometría como una herramienta para comprender y visualizar el entorno, se le considera la ciencia del espacio y la base para medir y cuantificar los fenómenos del mundo (Hernández y Villalba, 2001), es por esto, que el objetivo principal de la enseñanza y aprendizaje de la geometría es familiarizar al estudiante con su contexto inmediato, con lo que lo rodea, favoreciéndole desarrollar habilidades y competencias que le permitan desenvolverse de manera eficaz dentro de una sociedad (Barrantes, 2004).

De acuerdo con Báez e Iglesias (2007) existen cinco principios didácticos fundamentales dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, el primero hace referencia a lo interdisciplinar o globalización, es decir, una aproximación objetiva a la realidad, permitiendo ver una relación entre todos sus elementos; el segundo, conocido como integración del conocimiento, plantea que éste no está fragmentado sino que representa un saber compacto; el tercer principio es el de contextualización, donde el conocimiento debe ser adaptado a las características y contexto del estudiante.

Así mismo, el cuarto es el principio de flexibilidad, en el cual los organismos administrativos encargados del proceso de educación, deben adaptarse a las necesidades de los alumnos. El Aprendizaje por descubrimiento es el quinto principio, en el cual se ha de considerar la activa participación por parte del estudiante, de manera que lo lleven a la investigación, reflexión y a la construcción del conocimiento y la innovación de estrategias metodológicas.

Por otra parte, Gamboa y Ballestero (2010), han señalado que la enseñanza de la geometría debe, entre otras cosas, profundizar en el desarrollo de la comprensión del espacio a partir de situaciones problema. Integrar el desarrollo y contribución histórica de la geometría en la evolución humana, para permitir al alumno tener idea o noción de otros tipos de geometrías, buscando su conexión con otras disciplinas como la botánica, el arte, la música, entre otras de manera que el estudiante dote de sentido el aprendizaje de conceptos y objetos geométricos.

Además, Sole y Coll (1995) sostienen que el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría es compartido principalmente entre el docente y los estudiantes, pretendiendo generar la construcción de conocimientos de una manera significativa, es decir, que puedan ser evocados y aplicados ante cualquier situación que de ellos requiera, permitiendo que los alumnos relacionen sus conceptos previos con los nuevos, para de esta manera generar un conocimiento nuevo orientado por el docente. También, Díaz y Hernández (2002) señalan que el aprendizaje no es la asimilación de información, es más que eso, pues implica la reacomodación y reestructuración de conceptos, ideas y esquemas cognitivos que el alumno ha construido.

Según Jaime, Chapa y Gutiérrez (1992) en la actualidad los conceptos son presentados a los estudiantes mediante definiciones, cuyo objetivo es la apropiación de estas por parte de los alumnos y su correcta aplicación en la resolución de algunos problemas planteados, es así que, Vinner (1991) plantea lo que se conoce como definición conceptual, que alude a la definición formal que se da al objeto geométrico, e imagen conceptual, que son aquellas imágenes metales del objeto presentes en el estudiante, además este autor afirma que adquirir un concepto significa tener la capacidad de reconstruir y relacionar mediante ejemplos matemáticamente validos los distintos componentes o nociones del concepto abordado.

Del mismo modo, es común que en las clases se presenta algún concepto mediante su definición y algunas imágenes o representaciones clásicas e idealizadas, lo que ocasiona que el estudiante se cree imágenes pobres, las cuales identifique con ejemplos de su entorno, pero que generaran obstáculos cuando el alumno cambie de contexto (Arciniegas y Marcillo, 2009).

A pesar de estas perspectivas didácticas, los sistemas de educación a nivel de primaria y secundaria presentan a sus estudiantes los conceptos geométricos como un todo ya terminado, es decir, como una obra de arte ya finalizada, pues presentan al estudiante algún objeto geométrico y su representación, junto con un listado de sus propiedades y características, cortando al estudiante la posibilidad de explorar, conjeturar y descubrir por sí mismo dichos atributos del objeto (Gamboa y Ballestero. 2010); así mismo las prácticas de aula de corte tradicional hacen ver el aprendizaje y enseñanza geométrica, como la simple memorización de fórmulas y mecanización de algoritmos para el cálculo de áreas y volúmenes de determinadas figuras o cuerpos geométricos (Kaplún, 2002). De igual manera, algunos docentes dan prioridad a otras actividades matemáticas, desplazando para el final del curso a la enseñanza de la geometría, lo que implica la exclusión de temas o que sean abordados de manera superficial (Pocholu, 2006).

Del mismo modo, y de acuerdo con Barrantes y Zapata (2008) la enseñanza tradicional y los libros de texto guía pueden generar obstáculos en el proceso de aprendizaje y enseñanza de la geometría, debido a la presentación de estilos estandarizados de representación de figuras y situaciones problema que no favorecen al estudiante en el desarrollo del pensamiento geométrico pues no permiten la movilización o cambio de posición de dichas figuras, sumado a esto que no se cuenta con el material didáctico necesario para trabajar la geometría.

Así mismo, otro de los factores que puede generar obstáculos dentro del desarrollo del pensamiento espacial, se evidencia en el lenguaje, debido a que, resolver un problema planteado de manera verbal implica pasar desde este lenguaje a términos o símbolos matemáticos, lo que requiere el tratamiento y conversión de los distintos objetos matemáticos identificados (Cantoral y Montiel, 2001). En estos tiempos el aprendizaje y enseñanza de la geometría euclidiana requiere del manejo del lenguaje formal, de un vocabulario técnico, representaciones gráficas, símbolos, además de la aplicación de reglas y normas definidas como propiedades y relaciones entre dichos objetos (Radillo y Varela, 2007). Pese a las distintas pautas y caracterizaciones de la enseñanza y aprendizaje de la geometría, la escuela ha limitado este proceso al hecho de dibujar figuras y reconocerlas, sin dotar de sentido alguno esta actividad (Goncalves, 2006).

La geometría en el currículo colombiano

La educación matemática en Colombia y sus procesos de enseñanza y aprendizaje han evolucionado constantemente; a mediados del siglo XIX, la enseñanza de la geometría se centraba en procesos de lógica matemática y teoría de conjuntos, veinte años más adelante se incluyó el álgebra y el razonamiento abstracto, buscando potencializar en los estudiantes el pensamiento matemático avanzado, dos décadas después el Ministerio de Educación Nacional (MEN), planteo un nuevo enfoque donde se percibía a las matemáticas como una totalidad de diversas estructuras a nivel numérico, geométrico, estadístico, de sistemas lógicos, de medidas, entre otros, es decir, la matemática se trabaja como un todo analizando las relaciones entre cada sistema (MEN,1994).

En el mismo sentido, el MEN genera lo que se conoce como Lineamientos Curriculares, los cuales están conformados por una serie de documentos que presentan orientaciones pedagógicas, didácticas y epistemológicas para apoyar el proceso de organización, fundamentación y planeación de áreas obligatorias dentro del sistema de educación nacional, entre las que se encuentra el área de matemáticas; éste es un documento sujeto a mejoras y complementos realizados por parte de la comunidad educativa. Igualmente la Ley 115 de 1994 define algunos aspectos fundamentales en el ámbito educativo, tal es el caso del artículo 76, donde se define currículo como el conjunto de pautas, criterios, planes de estudio, medios, metodologías y procesos que favorezcan a la formación integral de ciudadanos y a la construcción de la identidad cultural y nacional (MEN, 1994).

Del mismo modo, el MEN (1998) con los Lineamientos Curriculares en Geometría establece la importancia de esta ciencia dentro del proceso de educación en Colombia, y es considerada como necesaria para desarrollar el pensamiento espacial, esencial para el conocimiento científico ya que es utilizada dentro del razonamiento y la resolución de problemas, donde se hace necesario el manejo del espacio, la ubicación mediante coordenadas o sin ellas y el proceso de visualización, además de manipular y abstraer información proveniente de distintos tipos de representaciones, enfatizando que un gran número de profesiones requieren personas que tengan un alto nivel de pensamiento geométrico y espacial.

Es de resaltar que el MEN propone la enseñanza de una "geometría activa" la cual invita a trasladar, mover, rotar, explorar con objetos geométricos y reflejarlos por medio de dibujo y la imaginación, que en la actualidad, de acuerdo con Vasco (1992) se está confundiendo con la propuesta del programa de Erlangen, el cual liga al aspecto geométrico con el métrico de manera directa, y la denominada geometría de las transformaciones, la cual indica que a través de las reflexiones se pueden abordar las distintas isometrías del plano, lo que está generando errores pedagógicos y didácticos dentro de la enseñanza de la geometría, pues tomando como ejemplo, en los libros de texto se presenta el concepto de "reflexión", pero en realidad lo que se está presentando son rotaciones sobre un eje del plano donde está representada la figura

Del mismo modo, la propuesta curricular realizada por el MEN está sustentada teóricamente bajo los principios del modelo de los esposos Van Hiele (1999). Además que formula cinco fases para el aprendizaje y enseñanza de la geometría, la primera denominada de información, el propósito de esta fase es determinar los conceptos previos de los estudiantes sobre algún tema en especial, allí el docente debe identificar que alumnos poseen claridad sobre los conceptos y cuales presentan algunas falencias sobre éstos; la segunda es la orientación dirigida, donde el docente plantea actividades en busca de la construcción del conocimiento; en la tercera fase conocida como explicitar, consiste en la argumentación y justificación de los resultados hallados por parte de los estudiantes, puede ser de manera oral, escrita o gráfica.

Al mismo tiempo García (2006) sostiene que la fase de orientación libre consta de una serie de actividades que dedican su atención a la aplicación de los conceptos adquiridos; en la fase final, denominada de integración, se resume todo lo visto en la clase, buscando generalizar y formalizar la construcción del conocimiento a través de la adaptación de conceptos previos con los conceptos nuevos.

En atención a la gran diversidad de propuestas y estrategias pedagógicas y didácticas para la enseñanza y aprendizaje de la geometría, el MEN decretó y publicó en el año 2006, los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas, los cuales constituyen lo que un escolar colombiano debe saber y debe saber hacer, para lograr un nivel de calidad educativo esperado, dejando en claro que el objetivo es brindar una educación de calidad (MEN, 2006), es así que, los docentes deben garantizar el desarrollo y construcción de estas competencias básicas en sus educandos.

Contemplado dentro de estos conocimientos básicos en matemáticas, se halla el pensamiento espacial y sistemas geométricos definido como: “el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus diversas transformaciones, y sus diferentes traducciones a representaciones materiales” (MEN, 1994, p. 56).

Capítulo III. Aspectos metodológicos

En este capítulo se describen las estrategias, métodos, técnicas, herramientas y fundamentos investigativos utilizados en busca de alcanzar los objetivos propuestos dentro del presente estudio.

La investigación se sustentó bajo el paradigma cualitativo, con enfoque descriptivo e interpretativo. Se observan los individuos en su propio medio, es decir, en su entorno natural, directamente donde se presenta el fenómeno, además, las informaciones se recolectan directamente, a través de la interacción con los participantes (Cardona, 2002). El análisis de la información no será numérica, pues se desea descubrir o responder a las preguntas de investigación mediante procesos interpretativos, lo que interesa es la perspectiva de los participantes (Sánchez y Morales, 2013).

Dentro del paradigma cualitativo, los análisis de información se realizan de manera inductiva, debido a que no se plantean hipótesis ni se recoge información para comprobarla, en cambio, primero se recolectan los información para posteriormente sintetizarlos de manera inductiva, en busca de comprender a los individuos y los eventos que les suceden dentro de su contexto (Cardona, 2002). Así mismo, la investigación con enfoque descriptivo- interpretativo pretende buscar, explicar, las características, propiedades y rasgos de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno social que se someta a análisis (Hernández, Fernández y Baptista, 2013), es decir, fenomenológicamente se pretende o se trata de reconstruir la realidad tal como la ven y perciben los participantes (Cardona, 2002).

Contexto del proceso investigativo

La investigación se realizó en el municipio de Sogamoso situado en el centro-oriente del departamento de Boyacá. Se contó con la participación de diez alumnos de grado quinto de educación básica primaria, de una institución privada, ubicada en el sector céntrico de este municipio. Los estudiantes que se caracterizaron por encontrarse entre los 10 y 12 años de edad mostraron estar receptivos al proceso de enseñanza de la geometría. Esta institución educativa se caracteriza por fomentar y motivar una enseñanza basada en principios constructivistas. Es importante resaltar que se destinan dos horas semanales para la enseñanza y aprendizaje de la geometría, lo que en realidad es un periodo de tiempo muy corto para el estudio de esta área de la matemática.

Diseño metodológico de la investigación

De acuerdo con Denzin y Lincoln (1994), el diseño de la investigación corresponde a la planeación de todas aquellas actividades que se han de llevar a cabo para solucionar una problemática, o para constatar y responder a las preguntas de investigación. Dentro de este estudio se establecieron cuatro fases interrelacionadas unas con otras, pero avanzan siempre en sentido frontal, en busca de responder a los interrogantes investigativos. Dentro de cada fase se identificaron distintas etapas, las cuales permitieron el avance de una fase a otra (Monje, 2011). A continuación, se muestra el camino recorrido, fases y etapas seguidas dentro de la investigación, en busca de lograr los objetivos.

Fase I

Dentro de esta fase, la cual Monje (2011) denomina preparatoria, se generaron tres etapas principalmente. La etapa de reflexión, en la cual se definió la problemática de estudio a partir de las experiencias vividas como docente investigador y como estudiante de un programa de Maestría en Educación Matemática. En esta etapa se delimitó la investigación hacia el desarrollo del pensamiento matemático, especialmente el geométrico, en estudiantes de educación básica primaria. Posteriormente, vino la etapa de diseñó la ruta o camino a transitar, se tuvo en cuenta principalmente la búsqueda de los objetivos trazados, además se plantearon distintas actividades para su posterior aplicación en busca del mismo fin. En la etapa de búsqueda y revisión teórica, se buscaron y seleccionaron documentos que brindaran calidad y pertinencia de la información, estos se obtuvieron de manera física y virtual, de estos se analizó lo referente a las bases teóricas de la investigación. De esta búsqueda también se sentaron las bases y paradigmas bajo los cuales se estructuraría la investigación.

Fase II

Esta segunda fase, denominada por Monje (2011) como trabajo de campo, se dividió en dos sub-etapas, la selección y adecuación de tareas. Dentro de estas, primero se desarrollaron actividades de carácter exploratorio e investigativo, para identificar su potencialidad dentro del desarrollo del pensamiento matemático, posteriormente se buscaron, a través de distintas fuentes, tareas geométricas y con características investigativas. De esta búsqueda se realizó una selección de tres tareas, las cuales se adaptaron de manera que cumplieran con las características de las tareas exploratorio e investigativas (Ponte, 2003), y que fueran afines a las características de los participantes del estudio.

En la etapa de trabajo en el aula se aplicaron una a una, dentro de la clase de geometría, las actividades seleccionadas y adaptadas con anterioridad, es en este mismo espacio, el del salón de clase, donde se realizó la recolección de los información a través de las distintas técnicas e instrumentos, como las grabaciones de audio, los registros fotográficos y cada una de las guías de taller desarrolladas por los estudiantes, pues representan los registros gráficos y escritos de los participantes.

Fase III

Al interior de la fase tres, denominada analítica (Monje, 2011), se realizó la codificación de la información, estableciendo códigos para cada una de las categorías que fueron analizadas dentro de las unidades de manera inductiva. Posteriormente se realizó la caracterización de cada categoría y subcategoría de análisis; se pretendió obtener resultados o respuestas a las preguntas que dieron origen a la investigación. En la etapa de conclusiones se caracterizó el desarrollo del pensamiento geométrico a través de tareas exploratorio-investigativas en estudiantes de grado quinto de educación básica primaria, dando respuesta a la pregunta de investigación.

Fase IV

Dentro de esta última fase, llamada informativa (Monje, 2011), se realizó la redacción del informe final de investigación. En esta fase se consolidó lo observado a través de una interpretación de la teoría y la práctica. Esta fase se consolida en el apartado de conclusiones.

Categorías de análisis

Las categorías de análisis en un estudio cualitativo se plantean de forma inductiva. Sin embargo, en este trabajo, dado que se utilizó la propuesta de clases investigativas como estrategia metodológica en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, se estableció una categoría macro general de análisis ya preestablecida, para los momentos de la clase. Posteriormente se designó una categoría para cada tópico de análisis y subcategorías emergentes a los detalles o descripciones particulares de cada tópico (Cisterna, 2005). Se define categoría como el conjunto de agrupación por temas o referencias con significados equivalentes, a los supuestos teóricos implícitos dentro de la problemática, las categorías también son vistas como recursos y unidades que dotan de sentido a los información, lo que permitirá posteriormente reducirlos, relacionarlos y compararlos (Galeano, 2004).

La actividad matemática desarrollada por los estudiantes permitió emerger las otras categorías de análisis, partir de analizar lo ocurrido en los diferentes *momentos* de la clase, como categoría macro de análisis preestablecida. Dentro de esta categoría preestablecida se distinguen cuatro subcategorías, (Tabla 1), entre las que se encuentran la exploración y formulación de preguntas investigativas, la organización de información y construcción de conjeturas, la realización de pruebas, refinación y sistematización de hipótesis, la construcción de justificaciones, argumentos o demostraciones para validar los resultados (Ponte, 2003).

Tabla 1
Categoría de análisis 1

Categoría	**Subcategorías**

Momentos de la clase (Marco general de las clases Investigativas como estrategia metodológica)	Exploración y formulación de preguntas investigativas
	Organización de información y construcción de conjeturas
	Pruebas, refinación y sistematización de conjeturas
	Justificación, argumentación o demostración para validar los resultados

Fuente: adaptada de Ponte (2003)

En los momentos de la clase por los cuales transitan los estudiantes se pueden identificar y evidenciar registros gráficos y escritos realizados cuando se propone la tarea a resolver. Estas tareas fueron analizadas para dar cumplimiento al segundo objetivo específico que corresponde a su caracterización como posibilidad para el desarrollo del pensamiento geométrico. Dentro del proceso de análisis de instrumentos y apoyados en los registros gráficos, escritos y verbales realizados por los estudiantes, surgen dos nuevas categorías de análisis derivadas de la enseñanza de la geometría, una de estas caracteriza los niveles de cognición en geometría y la otra hace alusión a los registros de representación utilizados por los estudiantes durante el desarrollo de las tareas.

Tabla 2
Categoría de análisis 2

Categoría	**Subcategorías**
Niveles de Cognición Geométrica	Visualización global
	Percepción clasificatoria
	Operativo – Formal
	Rigor

Fuente: Construcción del investigador basada en Van Hiele (1999) y Duval, (1999).

Dentro de esta categoría de análisis denominada “Niveles de Cognición Geométrica”, se distinguen cuatro subcategorías. La primera, visualización global, en la cual los estudiantes reconocen objetos y figuras geométricas por su forma, mas no por sus propiedades. La segunda, percepción clasificatoria, se caracteriza porque los estudiantes reconocen y clasifican objetos geométricos según sus atributos, propiedades y partes que los componen. La tercera, operativo-formal, en la cual los alumnos están en capacidad de realizar construcciones y operaciones mentales a través de axiomas matemáticos y relaciona las propiedades entre distintos objetos. Finamente la cuarta, rigor, en esta fase el estudiante domina con propiedad axiomas y postulados geométricos siendo capaz de argumentar ciertas demostraciones matemáticas.

Tabla 3
Categoría de análisis 3

Categoría	**Subcategorías**
Registros de Representación	Representación primaria
	Tratamiento
	Transformación

Fuente: Construcción del investigador basada en Duval, (1999).

En esta categoría de análisis, se sitúan todos aquellos sistemas o registros de representación utilizados por los estudiantes dentro de la resolución de las tareas, entre estos se comprenden, el lenguaje común, el aritmético, el grafico y el algebraico. Dentro de esta se encuentran tres subcategorías, representación primaria que se refiere al conjunto de caracteres elegidos para una representación inicial. Tratamiento, que es la manipulación de la información de algún objeto geométrico, dentro de un mismo sistema de representación. Y la transformación, que consiste en convertir una representación de un registro a otro (Duval, 1999).

Técnicas e instrumentos de recolección y análisis de información

La recolección de información representa una de las etapas más importantes dentro de toda investigación, ya que de esta se desprende la información que será analizada posteriormente, en donde además se debe tener en cuenta variables como lugar, tiempo y procedimiento (Hurtado, 2010). Por otra parte, los instrumentos utilizados en dicha recolección han de ser aquellos en los cuales se registren información observable y que además representen o atiendan a los intereses del investigador (Hernández et al., 2013). A partir del reconocimiento de las características y objetivos de la investigación se acudió a instrumentos de recolección de información como la observación participante, las grabaciones de audio, el diario de campo y el análisis de registros escritos y gráficos realizados por los estudiantes.

De acuerdo al paradigma cualitativo característico de este estudio, la recolección de información ha de ocurrir en un ambiente natural y cotidiano, pues su propósito es el de obtener información a través de un contacto directo con el objeto de estudio, mediante situaciones específicas, es así que, la observación participante ha de ser un proceso abierto y flexible, donde se comparten directamente las vivencias entre investigado(s) e investigador (Albert, 2007). Por otro lado, y de acuerdo con Campoy y Gomes (2015), esta técnica de recolección permite obtener información de primera mano, al estar en contacto directo con los objetos de estudio, en otras palabras se convive con ellos, lo que facilita la toma de decisiones en el transcurso del proceso investigativo.

Otra de las técnicas de recolección de información utilizada fue la de grabación de audios, con el fin de tener a disposición las ideas, argumentos y justificaciones realizadas por cada uno de los participantes durante el proceso de exploración e investigación (Corrales, 2010) en medio del desarrollo de las tareas. Esta técnica se utilizó debido a que en ocasiones se le facilita más al alumno expresarse de manera verbal que escrita. Para cada tarea se realizó una grabación en audio, en total se realizaron cuatro grabaciones, dos para la primera tarea y de a una para las tareas dos y tres, dichas grabaciones se realizaron de manera continua, captando cada intervención dentro del aula, tanto de estudiantes como del docente.

Del mismo modo, para realizar el análisis de los audios, estos se transcribieron de manera textual, es decir, tal y cual se escucharon, para este propósito se siguieron los planteamientos de Tusón (2002) para el análisis de conversaciones, entendiendo a la conversación como la actividad interactiva verbal, organizada por turnos de palabra. De este modo, para la transcripción de los audios, se atendió a pautas realizadas por el mencionado autor, entre las que se encuentra la numeración a izquierda de cada una de las intervenciones de los participantes, a medida que van surgiendo. Además, sugiere el uso de convenciones para la identificación de situaciones especiales dentro de los diálogos, por ejemplo, simbología como <…> indicando una pausa larga o <3> refiriéndose a la duración de la misma; subrayar para indicar énfasis o escribir con mayúsculas para indicar un mayor énfasis dentro de la intervención del participante; p, para indicar dialecto en voz baja, estos son algunos de los símbolos y notaciones tenidas en cuenta dentro de las transcripciones de los audios.

Así mismo, las guías escritas donde se plantearon las tareas se utilizaron como instrumento de recopilación de información, para extraer de allí los argumentos escritos y gráficos realizados por los estudiantes dentro del desarrollo de estas, algunos de estos argumentos se realizaron en grupos de trabajo, los cuales pueden ser vistos como grupos nominales, técnica de recolección de información que se caracteriza por la toma de decisiones de manera grupal, mediante la exposición de ideas individuales (Campoy y Gomes, 2015). Después de la recolección de la información, se procedió a sistematizarlos de manera inductiva como se había planteado inicialmente, pues las observaciones se hicieron sobre fenómenos particulares.

Por otra parte, y de acuerdo con Guillemin y Gillam (2004, citado en Meo, 2010) para respetar la autonomía de los individuos se ha de solicitar su consentimiento para participar en la investigación, es decir, se debe informar a los participantes acerca de los objetivos del estudio, el tipo de participación solicitada, el uso de los posibles resultados, y finalmente se solicita el permiso para disponer de la información recolectada. Así mismo, se debe garantizar el anonimato de los participantes, para ello se debe recolectar, archivar y publicar la información de manera que los individuos participantes no puedan ser identificados ni ubicados (Meo, 2010), es por esto que en el presente estudio se protege la identidad. Se recurrió al uso de letras y números para el análisis de sus intervenciones.

Capítulo IV. Análisis y discusión de resultados

La discusión de resultados se realizará en el marco de los momentos de la clase, derivado de asumir las clases investigativas como estrategia metodológica de enseñanza de las matemáticas. El análisis se interpretará a partir de lo alcanzado en el primer y segundo objetivo de la investigación.

Caracterización de las tareas exploratorio-investigativas

Como se describió dentro de las problemáticas de este estudio, las acciones de aula y tareas matemáticas de corte tradicional no favorecen los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta ciencia, ni dan evidencia de aprendizajes significativos bajo estas perspectivas (Kaplún, 2002). Es por esto que se debe reflexionar sobre las prácticas que como docentes se llevan al aula; de acuerdo con Irigoyen, Jiménez y Acuña (2011) como parte de la preparación de la clase y en virtud de sus propósitos, el docente ha de planear y diseñar tareas que implementara dentro del aula, en las cuales, ha de tener en cuenta aspectos importantes como el grado de dificultad de sus propuestas de aula, pues puede causar desmotivación en los estudiantes si se trata de tareas de complejidad alta (Rojas y Solar, 2011). En este sentido, se seleccionaron y adaptaron tres tareas matemáticas, específicamente geométricas, las cuales propician escenarios de exploración e investigación.

La primera tarea se abordó en grado quinto de educación básica primaria, en la asignatura de geometría, en la cual se presenta, de manera implícita, a los estudiantes el concepto de cálculo de área de figuras planas, especialmente la del círculo. La tarea exploratorio-investigativa se denominó "El perro guardián" (Anexo 1), se tomó y adaptó del Fichero de Actividades Didácticas

Matemáticas, elaborado por la Subsecretaria de Educación Pública de México (Pérez, García y García, 2004, p.42).

Esta tarea se caracteriza, de acuerdo con Ponte (2003), por ser exploratoria de estructura abierta, pues permite al estudiante explorar diversas estrategias de solución o éxito frente a esta situación, el alumno puede empezar a trabajarla sin mayor planeación, además de inducirle a organizar sus ideas y socializarlas con sus semejantes, hacer proposiciones y ponerlas a prueba ante sus compañeros para reafirmarlas o refutarlas, además de darle la posibilidad de argumentar, justificar y demostrar sus proposiciones a través de su propio lenguaje y justificaciones. También se reconoce como investigativa, pues deja cierto grado de indeterminación en las preguntas, haciendo necesario que sean precisadas por los estudiantes (Ponte, 1998). Esta tarea se encuentra dentro del contexto de semirrealidad, pues describe situaciones que parecieran reales para los estudiantes, pero carecen de algunas propiedades de este hecho (Skovsmose, 2000), además se cataloga como de duración media, pues se requirió de aproximadamente cuatro horas para su realización.

Respecto a lo geométrico, esta primera tarea tiene como objetivo la construcción del concepto de cálculo del área para figuras planas, permitiendo a los estudiantes explorar e investigar a cerca de este concepto, conjeturar sobre las distintas nociones de este, realizar sumas de áreas, proponer y probar hipótesis acerca del cálculo de áreas para cada una de las representaciones realizadas, además de conllevar a los estudiantes a la construcción de una definición o concepción del objeto geométrico π como un invariante de la circunferencia.

Por otra parte, esta tarea les permitió la interacción con sus colegas para la negociación de significados, debido a que está estructurada para trabajarse en tres segmentos, de manera individual para fortalecer la autoconfianza y la toma de decisiones, en seguida se realiza el trabajo grupal, para permitir la socialización y refinamiento de conjeturas e hipótesis planteadas de manera individual y finalmente la socialización de resultados y negociación de significados, lo cual permite a los estudiantes defender y argumentar sus planteamientos con sus propias palabras e ideas, para de esta manera construir el nuevo conocimiento.

Actividad matemática investigativa desarrollada en el aula

Se parte de asumir que investigar en matemática requiere asumir actitudes y características muy específicas, además que envuelve conceptos y procedimientos propios de esta área. De esta manera, la actividad investigativa en matemática promueve en el alumno el espíritu genuino de un matemático, es decir, el estudiante debe actuar como tal, formulando preguntas, conjeturas e hipótesis, realizando pruebas, demostraciones y presentando informes de resultados frente a sus compañeros y docente (Ponte et al., 2006). Bajo esta perspectiva amplia se presenta el análisis.

Inicio de la clase

El trabajo en el aula consistió inicialmente en presentar la tarea a los estudiantes y dejar clara la manera de abordarla, se explicó a los alumnos que los dos primeros ítem se desarrollaban de forma individual y que posteriormente se podía trabajar en grupos de tres estudiantes. En el trabajo individual se buscaba la interpretación, familiarización y exploración del estudiante acerca de la situación planteada, seguidamente las actividades que se desarrollarían de manera grupal, permitirían el dialogo, la confrontación y los espacios de construcción de significados entre los alumnos.

Así mismo, se aclaró a los estudiantes que finalmente se realizaría un debate permitiendo la confrontación de los resultados hallados durante la resolución de la situación, generando así la necesidad de la negociación y formalización de los nuevos conceptos (Ponte et al., 2004). Del mismo modo y de acuerdo con Ponte et al. (2003) el rol del docente dentro de esta propuesta es el de asegurarse que estas tareas representen un desafío matemático para sus estudiantes, validar el progreso en su aprendizaje haciendo preguntas y pidiendo explicaciones, además de razonar de manera matemática ante los cuestionamientos de sus alumnos.

Primer momento

Dentro de la planeación y diseño de cada una de las tareas, se garantizó que los alumnos transitaran por los cuatro momentos de clases investigativas (Ponte, 2003), implícitos dentro de su desarrollo, el primer momento hace alusión a la exploración y formulación de preguntas investigativas, el cual permite al estudiante acercarse a la problemática planteada, familiarizarse con ella, generando en él una necesidad de respuesta, de modo lo que lo lleven a explorar, imaginar, conjeturar y reformularse las preguntas que ha de resolver, lo cual se hace evidente, desde el inicio de la resolución de la tarea.

Desarrollo del trabajo en el aula

Actividades de Exploración

Las actividades de exploración se hacen evidentes desde que los estudiantes abordan el primer ítem (Ver Anexo N°1), que es el siguiente:

> *1. Representa gráficamente el terreno que el cachorro logra cubrir al desplazarse por los tubos.*

Este planteamiento es de carácter abierto, pues deja total libertad al estudiante para realizar la representación de la gráfica del terreno que el cachorro lograría cubrir, desplazándose por todo el terreno que le sea posible, lo que le permite al alumno explorar, investigar y precisar acerca de los movimientos que el cachorro puede realizar en miras a cubrir la propiedad de su amo, además que les permite hacerse cuestionamientos sobre las distancias recorridas por el perro guardián.

El carácter investigativo de la tarea hace necesario que los estudiantes precisen e interpreten de manera correcta la intención de este ítem, llevándolos a auto formularse preguntas más específicas que les permitan iniciar el trabajo de manera adecuada, preguntas que a su vez son respondidas por ellos mismos, lo cual muestra que el estudiante está empezando a mostrar interés en involucrase en la tarea, la cual le exige interpretar de manera adecuada la información proporcionada para continuar desarrollándola, debido a que debe realizar una transformación de un registro escrito a un registro gráfico.

Entre estas actividades de exploración en geometría, referentes al primer momento, se encuentran actividades de reconocimiento y representación de figuras planas, los estudiantes visualizan y reconocen objetos geométricos como el “rectángulo”, “cuadrado” y “circulo”, además se evidencia que logran percibir imágenes de forma global, como se evidencia en el siguiente fragmento de *transcripción* del audio Nº1, apoyado por la imagen del estudiante que relata su experiencia.

1. ***Estudiante 1 –*** *yo, estaba haciéndolo sólo por dentro, también puede por fuera de la casa.*

2. ***Estudiante 2 –*** *profe, para mí, o sea, aquí el perro puede hacer una semicircunferencia y pensé puede bajar por aquí, hacer una línea recta y llega al tope (???) y hace otra semicircunferencia, y también puede hacer lo que hizo acá seguir rectamente y hacer otra semicircunferencia o la mitad de un círculo, ese es el terreno que puede cubrir profe.*

Transcripción de grabación en audio N° 1

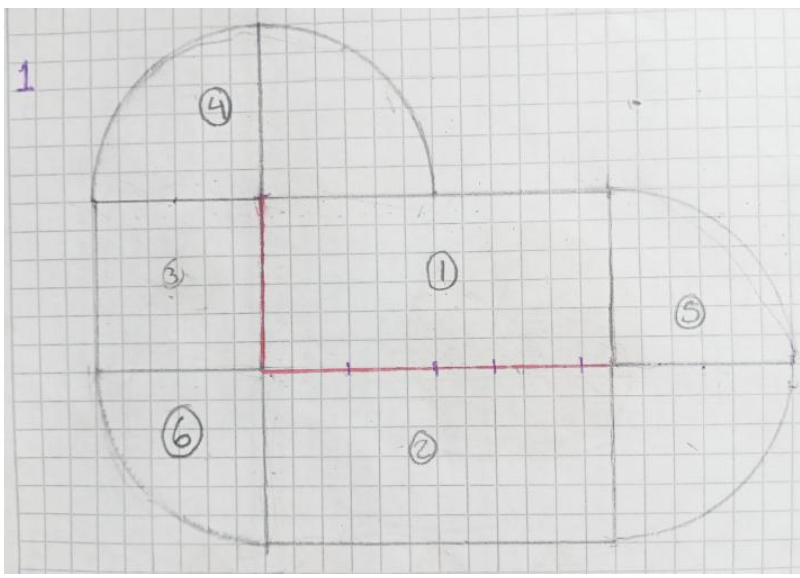


Figura 5: Momento de "exploración" realizada por Estudiante 2, actividad 1.

Fuente: Archivo documental del investigador

Este esquema deja ver que el estudiante identifica el concepto de semicircunferencia de manera global, es decir, tiene la representación de este objeto en la mente, mas no toma en cuenta sus propiedades o atributos, o sea, lo reconoce de manera visual.

A continuación, se evidencia que reconocen otras figuras planas de manera netamente global, al dar desarrollo al segundo ítem de la tarea (Ver Anexo 1), el cual decía

2. *¿Qué figuras o formas geométricas se generan del terreno cubierto por el cachorro?, represéntalas.*

En estas actividades de exploración los estudiantes reconocen y representan estas figuras sin identificar sus propiedades geométricas ni hacer relaciones entre estas.

3. ***Estudiante 3 –*** *yo tengo las… porque mira, el perro se puede ir dos metros hasta acá y se puede ir dos metros hasta acá, entonces queda un rectángulo y como tiene la argolla se va hasta acá, digamos tiene la argolla el perro y se va hasta acá.*

4. ***Estudiante 4 –*** *esto es lo que nos dicen… esto es lo que puede recorrer, llega acá, puede recorrer hasta acá y puede bajar y puede subir, si llega hasta acá pues también, hasta acá… puede subir, pero si él llega hasta acá puede estar acá, pero entonces puede correr así y puede subir entonces vuelve y baja y así…se forman estas figuras…*

Transcripción de grabación en audio N° 1

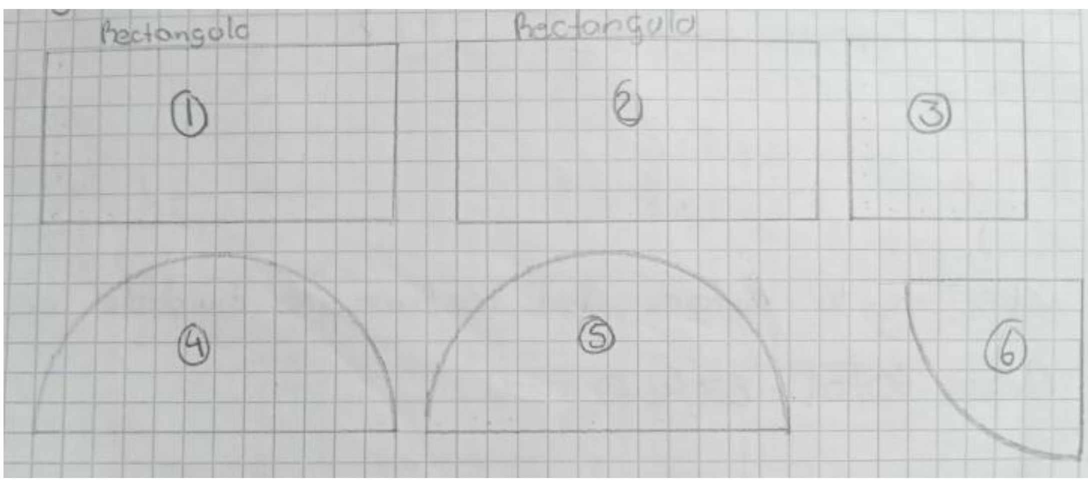


Figura 6: Momento de "exploración" realizado por Estudiante 8, actividad 2.

Fuente. Archivo documental del investigador

De esta figura y fragmento de transcripción de audio se puede decir que, el *Estudiante 3* muestra un nivel de aprehensión perceptiva del objeto geométrico "rectángulo" pues identifica su representación, en el caso de *Estudiante 4*, se puede decir que tiene un nivel de identificación simple de estas figuras, pues las reconoce de manera muy global.

En seguida se presenta la exploración realizada por otro estudiante, la cual contempla otra estrategia para lograr la representación del terreno, evidenciando el carácter exploratorio e investigativo de la tarea, pues contempla múltiples soluciones.

5. ***Estudiante 5*** – *profe, lo primero que hice fue representar una…e… la está de una cerca y pues… iba poniendo el compás para saber qué perímetro… esto… perdón.... qué área podía recorrer, si comienzo desde acá el perro podría subir normal, pero si él se estira e…e… no va a poder crear un triángulo o algo así, entonces por eso experimenté y se me hizo más fácil los círculos.*

Transcripción de grabación en audio N° 1

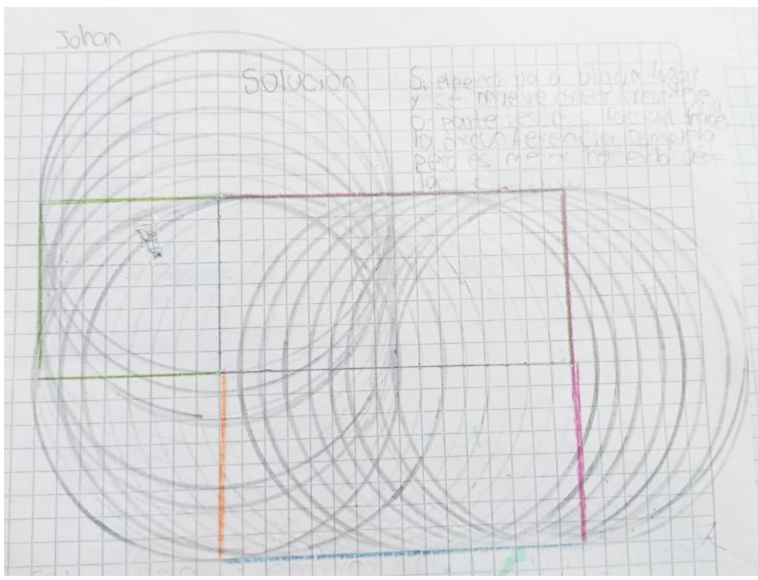


Figura 7: Momento de “exploración” realizada por Estudiante 5. Actividad 2.

Fuente. Archivo documental del investigador

Esta figura permite ver la libertad en la exploración, representación y expresión que brinda este tipo de tareas a los estudiantes, se evidencia la argumentación propia del alumno, la cual es lógica y matemáticamente valida ante el planteamiento hecho, además evidencia que el alumno percibe la imagen global del terreno a través de sus componentes, es decir, percibe el total del terreno como la unión de una cantidad determinada de circunferencias, una sobre puesta a otra sucesivamente.

A continuación, se presenta un fragmento de transcripción del audio Nº1, evidenciando que aún hay estudiantes refinado las preguntas y planteamientos iniciales que les permitan abordar la tarea, en donde la actitud del docente es seguir cuestionando para así facilitar la síntesis de las ideas de sus alumnos.

6. ***Estudiante 6 –*** *¿esto es lo que puede recorrer profe? …*
7. ***Profesor -*** *= ¿y por qué se sale hasta acá?*
8. ***Estudiante 6 –*** *= porque sí, llega acá y se extiende hasta por acá=*
9. ***Estudiante 3 –*** *profe, digamos que tiene la argolla acá, ¡sube no!, el perro sube, se puede estirar dos metros hasta acá, dos metros…, todo esto y se puede estirar dos metros, o sea si se estira completamente va la cuerda así tan tan tan… y el perro va a venir para acá… entonces tres y seis baja baja baja… hasta acá…*

Transcripción de grabación en audio N° 1

El *Estudiante 3* sigue explorando sobre los posibles recorridos que el perro puede realizar y la totalidad de terreno que logrará cubrir, esto puede ser debido a dificultades en el proceso de visualización e imaginación del alumno.

Continuando con las actividades de exploración realizadas por los estudiantes, el segundo ítem, les permite hacerse preguntas, en aras de clarificar sus ideas y seguir avanzando con su investigación, muestra de esto es el siguiente fragmento de audio, de nuevo el rol del docente en esta fase del aula es el de mantener el espíritu investigativo y orientar a sus estudiantes para facilitar sus avances en la investigación.

.

10. ***Estudiante 6 –*** *profe… ¿esto será el cuarto de una circunferencia?*
11. ***Estudiante 7 –****profesor… es que mira… hay cuatro formas, ¿puedo decir por cuatro? ¿O tengo qué hacer las cuatro? ¿cómo se llama ese (???) cómo se llama?*
12. ***Estudiante 6 –*** *profe… ¿esta sería la mitad de una circunferencia?*

Transcripción de grabación en audio N° 1

Dentro del desarrollo individual de la tarea, y teniendo en cuenta que es de estructura abierta, se muestra a continuación otra de las representaciones realizadas en respuesta del segundo ítem.

13. ***Estudiante 5 –*** *encontré cuadrados <…> rectángulos y círculos.*

Transcripción de grabación en audio N° 1

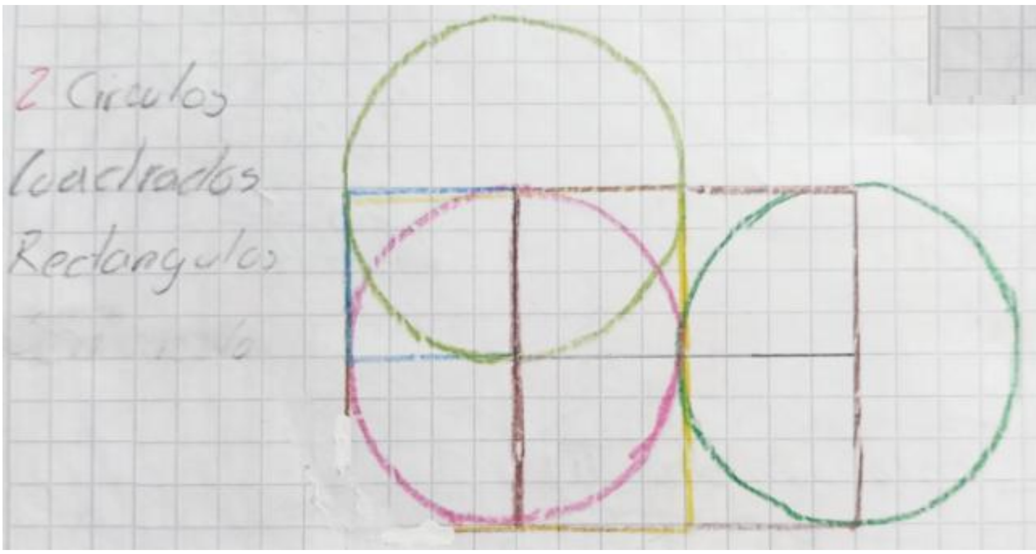


Figura 8: Reconocimiento de objetos geométricos.

Fuente. Archivo documental del investigador

De acuerdo a la representación de este alumno, se puede inferir que el estudiante muestra un nivel operativo de percepción visual, pues le permite manipular mentalmente los objetos que constituyen la figura, permitiéndole identificar, cuadrados, círculos y rectángulos, sin importar que algunas figuras estén sobrepuestas a otras.

Segundo momento

El segundo momento de clases investigativas corresponde a la organización de información y construcción de conjeturas (Ponte, 2003), esta información el estudiante la pueda extraer del lenguaje escrito y grafico planteado en la situación. Además, y de acuerdo con el mencionado autor ha de ser el mismo estudiante, quien proponga las hipótesis o realice conjeturas en busca de solucionar la problemática, dichos planteamientos serán provenientes de los análisis mentales y simbólicos realizados por ellos mismos.

Actividades de Organización de información

Las actividades de organización de información se reflejan en el siguiente fragmento de audio, donde se hace evidente la necesidad de generar un sistema de organización y presentación de información por parte del estudiante, para así analizarlos y determinar la relevancia de estos y su contribución en el desarrollo de la tarea.

> **14. *Estudiante 1* –** *profe, es que mira, hay cuatro en toda la figura, cuatro…, cuatro formas de estas. ¿Puedo escribir por cuatro?, ¿o tengo que hacer las cuatro?*
> **15. *Profesor* –** *si, como sumerce quiera.*
> **16. *Estudiante 1* –** *entonces por cuatro, está por dos, está por cero,…por una.*

Transcripción de grabación en audio N° 1

A continuación en la figura 9 se muestra la información que el estudiante logra visualizar, luego de realizar la representación de manera gráfica, a esta imagen hace alusión el guion 14 del fragmento transcrito anteriormente, es decir, esto es lo que ve el estudiante cuando se acerca al profesor a pedir asesoría. También la figura 10 muestra la manera en que el estudiante decide organizar lo que ve, para su posterior presentación.

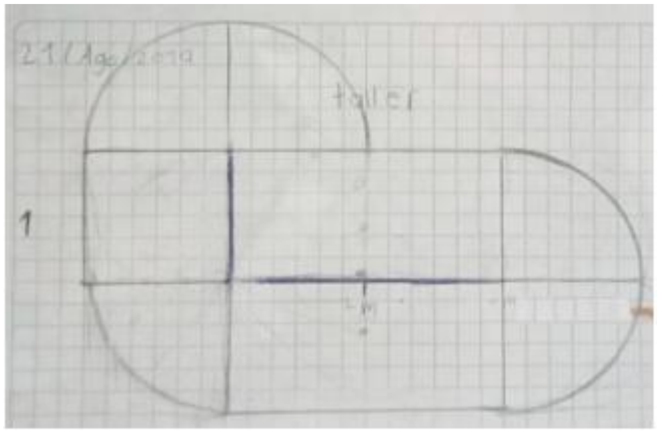


Figura 9: Momento de “abstracción de información”. Realizado por Estudiante 1. Actividad 2.

Fuente. Archivo documental del investigador

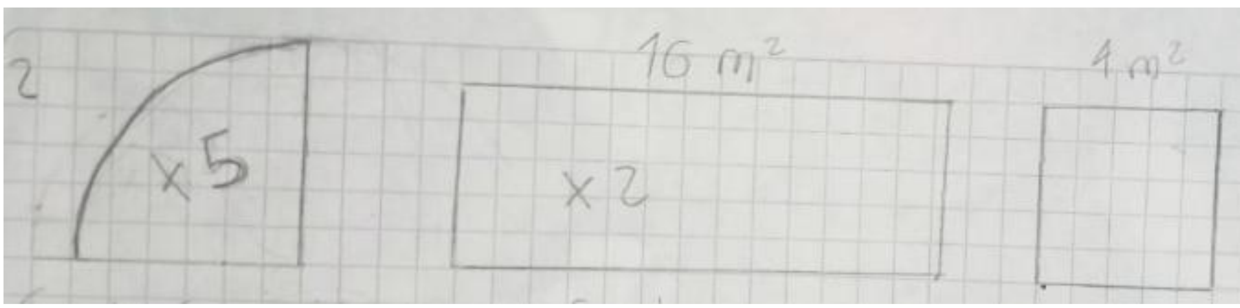


Figura 10: Momento de “organización de información” realizado por Estudiante 1. Actividad 2.

Fuente. Archivo documental del investigador

Lo anterior muestra cómo el estudiante analiza e identifica la totalidad del objeto, además de identificar cada una de sus partes, mas no establece relaciones o propiedades entre cada una de ellas; sin embargo, logra acomodar esta información y presentarla de manera organizada, dejando en claro que dentro de la gráfica que representa el total del terreno cubierto por el perro (figura 9), él visualizo 5 cuartos de circunferencia, 2 rectángulos y un cuadrado (figura 10).

Levantando conjeturas

En lo referente al tercer ítem que preguntaba:

> 3 *¿Cuál es la medida de la superficie total del terreno cubierto por el perrito guardián?*

Este ítem se planteó de manera abierta, para dar cabida a cada una de las soluciones planteadas por los alumnos, en esta fase del aula podían trabajar en pareja, con alguno de sus compañeros, aunque debido a la inasistencia de un estudiante se permitió un grupo de tres integrantes. Para la solución a este planteamiento los estudiantes debieron organizar información numéricos provenientes de las medidas de las barras de la reja y de la longitud de la cadena que ataba a "Toby", para relacionarlos con las respectivas figuras geométricas que se habían determinado, lo cual les permitiría obtener el área de cada figura, entre las que se encontraban el cuadrado, el rectángulo y el círculo, una vez determinada el área de cada figura, se deberían sumar para obtener el área total del terreno.

Dentro del desarrollo de este apartado de la tarea, en los distintos grupos de trabajo se generaron conversaciones donde surgieron distintas conjeturas para determinar el área total del terreno cubierto por el cachorro, a través de las figuras representadas con anterioridad, algunas de estas conjeturas fueron comunes en los distintos grupos. Estudiante 5, Estudiante 4 y Estudiante 2 conforman uno de los grupos de trabajo donde por medio del dialogo se planteó una de las conjeturas:

42. ***Estudiante 5 –*** *hay dos rectángulos y cuatro por dos da ocho, y como hay dos, pues entonces sería igual a dieciséis, pero todavía falta lo del cuadrado sería base por altura dos por dos me daría cuatro y cuatro más dieciséis daría… veinte metros al cuadrado =*
43. ***Estudiante 4 -*** *= o sea ¡aquí sería dos por cuatro! =*
44. ***Estudiante 2 – =****ocho… y faltaría lo de los semicírculos=*
45. ***Estudiante 4 - =s****on cuartos de círculos=*
46. ***Estudiante 5 –*** *=hay una manera que si no estoy mal es… diámetro por π…*
47. ***Estudiante 2 =*** *diámetro por π dividido al cuadrado…= no como se llama, elevado <u>al cuadrado</u>, según yo=*

Transcripción de grabación en audio N° 1

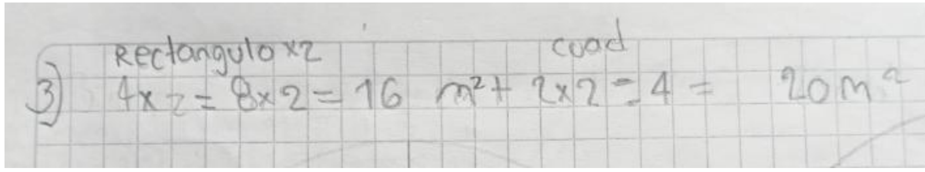


Figura 11: Actividad de suma de áreas. Determinadas por el Estudiante 5.

Fuente. Archivo documental del investigador

Este fragmento de la transcripción de audio, permite evidenciar que este grupo plantea como hipótesis que para determinar el área total del terreno, se debe sumar la cantidad del aérea de cada una de las figuras que lo componen, además plantean y ejecutan algún algoritmo o procedimiento para determinar el área del rectángulo y cuadrado (figura 11), reconociendo y relacionando propiedades dentro de estas figuras como lo es su base y su altura, pero encuentran dificultad o falta de claridad para determinar el área de un círculo, por lo cual se presenta la negociación, en las líneas 46 y 47, para lanzar la conjetura o hipótesis que les permita determinar el área del círculo, hipótesis que deberá ser refinada posteriormente. Del mismo modo, se puede evidenciar la manera en que los estudiantes organizan la información referente a las medidas de los lados de las barras de la reja, relacionándolos directamente con la base y altura de los rectángulos visualizados y representados.

Ahora se destacará otra de las conversaciones generadas dentro de la etapa de trabajo en equipo, en la cual surgieron algunas conjeturas interesantes generadas por la naturaleza abierta de la tarea, una de ellas era que, si para responder al tercer ítem, lo que se debería determinar sería el área o el perímetro de la figura y la otra acerca de cómo determinar el área de aquellas formas geométricas de las cuales no conocían el método o fórmula matemática.

54. ***Estudiante 3 ==*** *profe, en este, ¿Cuál es la medida de la superficie total del terreno cubierto por el perrito guardián?, ¿entonces tengo que, tengo que medir el área de las figuras?*
55. ***Estudiante 1 –*** *sí es área.*
56. ***Profesor –*** *¿Por qué dicen que es área?*
57. ***Estudiante 1–*** *porque toca hallar el área total.*
58. ***Profesor –*** *¿Por qué dicen que es área?, ¿dónde dice área en la pregunta?*
59. ***Estudiante 3*** *= a bueno, ¿Cuál es la medida de la superficie total del terreno cubierto por el perrito guardián?, es la sumatoria de todo lo que puede recorrer ese perro.*
60. ***Estudiante 1 –*** *no, perímetro. Acá dice la cantidad total de la superficie cubierta por la figura.*
61. ***Profesor – ¿****será perímetro o será área? Busquen la palabra clave.*
62. ***Estudiante 1–*** *ÁREA, porque acá dice la <u>cantidad total de la superficie</u>, ósea también lo de adentro.*
63. ***Estudiante 3*** *= o sea, tenemos que sacar primero… esta es simple es lado por… e, base por altura.*
64. ***Profesor –*** *entonces empiecen.*

Transcripción de grabación en audio N° 1

En este momento se presenta entre los grupos de trabajo una conjetura en común, y se establece que para determinar el área total se debe hacer la suma del área de cada una de las figuras que conforman el total del terreno. En la línea 56 interviene el docente haciendo una pregunta acerca de si es área o perímetro lo que se debe determinar, esto en busca de identificar la noción o idea base del concepto de área que tienen sus estudiantes. En este momento se presenta la conjetura ¿área o perímetro?, la cual por medio de la correcta interpretación de los información y la orientación del docente, se postula como hipótesis cierta que es el área del terreno la cual se debe determinar, debido a que el *Estudiante 1* en la línea 62 argumenta que se refieren a área cuando se dice *cantidad total de superficie*, lo que permite ver que hay en el estudiante un nivel de visualización y aprehensión discursiva del objeto geométrico área, pues lo reconoce por una de sus propiedades, argumentando que es lo de adentro de la figura.

Continuando con el desarrollo de aula y la investigación por parte de los estudiantes, se plantea una hipótesis para determinar el área de una figura que mentalmente asemejan con un triángulo, pero que no lo es dentro de la geometría plana, la siguiente imagen y fragmento de audio ilustran lo ocurrido en el aula.

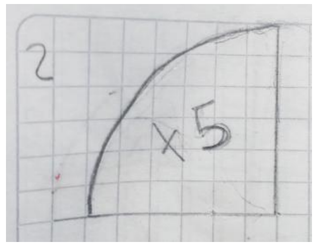


Figura 12: Comparación de un cuarto de circunferencia con un triángulo.

Fuente. Archivo documental del investigador

66. ***Estudiante 3–*** *esta es la base, esta es la altura, por dos y después esta por 5,… dividido entre dos, perdón. .*
67. ***Profesor –*** *¿esto es un triángulo?*
68. ***Estudiante 3–*** *No señor*
69. ***Profesor –*** *¿entonces, será que sí se puede así?*
70. ***Estudiante 3–*** *No señor*

Transcripción de grabación en audio N° 1

En atención a las necesidades de los estudiantes y buscando evitar bloqueos y frustraciones dentro de la investigación y además que se estaba tratando de plantear una manera, forma o expresión para determinar el área del círculo, expresión que no era conocida por los alumnos, se recurrió al apoyo didáctico y se utilizó material manipulable para facilitar a los estudiantes la construcción de una expresión para determinar el área de dicha figura y además para que se acercaran y reconocieran a π como una invariante dentro de la circunferencia. El material que se adecuó para esta tarea constaba de tres círculos de cristal de distintos diámetros, tres palitos de “pincho” recortados a la medida del diámetro de cada circunferencia, y tres tiras de cuero de la medida del perímetro de cada una de los círculos.

Figura 13: Material didáctico de apoyo.

Fuente. Archivo documental del investigador

Con este material de apoyo se quiso generar mecanismos para que los estudiantes puedan continuar con la investigación y al mismo tiempo vivan una experiencia significativa que facilite la construcción de nuevos conocimientos. Esta etapa del aula se desarrolló durante las dos horas siguientes de clase, se trabajó de forma grupal, además se tuvieron en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes, y en ellos ya rondaba la idea de π, mas no se comprendía como objeto geométrico. A continuación, se presenta el fragmento de audio donde se genera la nueva hipótesis que será construida por toda la clase y que pretende hacer la construcción del objeto geométrico π.

05. ***Profesor –*** *¿Cómo se llama esta línea recta que pasa por el centro del círculo?*
06. ***Estudiante 5 –*** *Diámetro*
07. ***Profesor –*** *¿va desde dónde hasta dónde?*
08. ***Estudiante 5 –*** *Desde un extremo al otro.*
09. ***Estudiante 2 –*** *Pasando por el centro.*
10. ***Profesor –*** *¿Qué me piden hallar?*
11. ***Estudiante 5 –*** *El área, pero, en otras palabras*
12. ***Profesor –*** *¿Cómo lo harían?*
13. ***Estudiante 5 –*** *Si fuera una figura normal, seria base por altura, pro no lo es.*
14. ***Estudiante 2–*** *No, si fuera un cuadrado*

15. *Estudiante 5 –* *Aja… o si fuera triangulo seria base por altura dividido entre dos, pero no es nada de eso, pero si lo divido en cuatro forma una especie de triangulo.*
16. *Estudiante 4 –* *es un semicírculo, es un cuarto de círculo.*
17. *Profesor –* *pues analicen si lo parten en cuatro o en más.*

Transcripción de grabación en audio N° 2

Figura 14: Aproximaciones a "π" como invariante dentro de la circunferencia.

Fuente. Archivo documental del investigador

La anterior ilustración muestra las exploraciones y acercamientos que realizan los estudiantes apoyados del material manipulable, trabajando con representaciones del diámetro y perímetro y recurriendo al número "π", para de esta manera determinar el área del círculo. En estas exploraciones también se reafirman conceptos, pues reconocen al diámetro como una característica de la circunferencia y la definen con propiedades matemáticas, por ejemplo, al afirmar que pasa por el centro de la circunferencia y que va de un extremo al otro.

De esta manera se continuó desarrollando la clase, a través de preguntas realizadas por el docente, preguntas que permiten sintetizar sus ideas y generar hipótesis.

23. *Estudiante 5 –==* *hay una manera que si no estoy mal es… diámetro por pi…*

24. ***Estudiante 2=*** *diámetro por pi dividido al cuadrado…= no como se llama, elevado al cuadrado, según yo*
25. ***Estudiante 4 -*** *= y ¿qué es pi? ¿De dónde sale?*
26. ***Estudiante 2-=*** *de la circunferencia*
27. ***Estudiante 5*** *– y pi es… tres punto uno cuatro…*
28. ***Estudiante 2 -*** *infinito*

Transcripción de grabación en audio N° 2

En este fragmento se dejan ver algunas aproximaciones a la noción que tienen los estudiantes sobre el número π, se evidencia que lo reconocen como un número infinito, que proviene de la circunferencia. Estas son conjeturas que hasta el momento plantean ellos. Se continúa trabajando en busca de que los estudiantes sinteticen sus ideas. A continuación, otras aproximaciones a la noción de π. Y posibles conjeturas.

30. ***~~Mateo~~ Estudiante 1*** *– profe no seria, digamos acá lo que mide esto multiplicarlo, ponerlo al cuadrado y lo que de ese resultado multiplicarlo por pi… y esa sería el área del círculo.*
31. ***~~Profesor~~ Profesor –*** *y ¿qué es pi?*
32. ***~~Mateo~~ Estudiante 1*** *– tres coma catorce dieciséis, pero muchos más números, ¡no!*
33. ***~~Profesor~~ Profesor –*** *pero ¿qué representa?*
34. ***~~Mateo~~Estudiante 1*** *– infinito, lo vi en un video.*

Transcripción de grabación en audio N° 2

En busca de clarificar las ideas de los estudiantes y dar avance al desarrollo de la tarea, se utiliza otra de las herramientas didácticas construidas, y se pide que suelten el cordón que rodea el círculo, este representará su perímetro o longitud.

Figura 15: π y su relación con la longitud y diámetro de la circunferencia.

Fuente. Archivo documental del investigador

Esta imagen permite ver que los estudiantes distinguen o ven representado el perímetro de la circunferencia en el cordón que se observa en la figura 15, y que asocian uno de los palitos con el diámetro, seguidamente se pide a los estudiantes que gráficamente hagan lo mismo con la figura, es decir, que se imaginen que la sueltan y "estiran" como soltamos el cordón, de manera que la curvatura del sector circular quede como una línea recta, luego se pide que grafiquen lo que se ha logrado hasta el momento, obteniéndose lo siguiente:

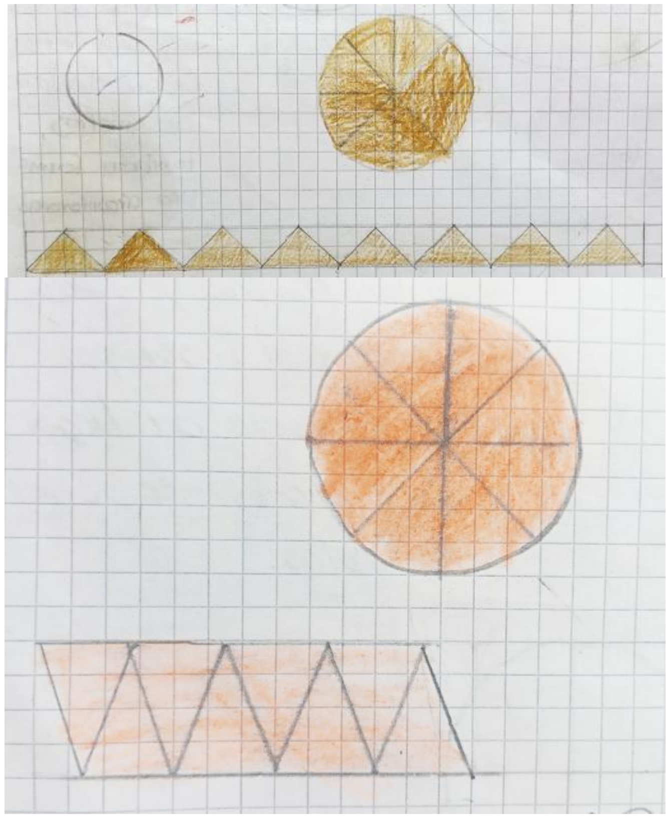


Figura 16: Representación de la circunferencia como un cuadrilátero.

Fuente. Archivo documental del investigador

49. ***Profesor –*** *== ¿entonces, a qué figura se asemeja el círculo que teníamos?*
50. ***Estudiante 2*** *– en una especie de rectángulo*
51. ***Estudiante 5 –*** *como una dentadura*
52. ***Profesor*** *– es un cuadrilátero ¿Pero será un rectángulo?, ¿y cuál sería la base?*
53. ***Estudiante 5*** *– pues esto, esta línea recta*
54. ***Profesor*** *– y ¿Qué más representa esta línea recta que va de inicio a fin?*
55. ***Estudiante 5*** *– l*
56. ***Estudiante 2*** *– el perímetro*
57. ***Estudiante 4*** *– o sea, es la base del cuadrilátero, pero también el perímetro*
58. Profesor *– eee…, es decir, se puede asemejar la base del cuadrilátero con la mitad del perímetro. Y ¿Cuánto medirá este otro lado?*
59. ***Estudiante 2*** *– dos, digo, dos metros, sí dos metros, porque son parte del radio, son un radio*

Transcripción de grabación en audio N° 2

La imagen 16, junto con el anterior fragmento evidencia cómo los estudiantes logran visualizar y transformar el círculo en un cuadrilátero, así continua el desarrollo de la clase, en busca ahora de la base del cuadrilátero que equivale a la mitad de longitud de la circunferencia.

> **67.** ***Estudiante 2*** *– profe, nosotros tenemos que sacar con el diámetro y ¿con esta parte la base?, o sea con esto, esto sería por el diámetro o ¿cómo así?, o sea ¿todo esto es la base?*
> ***68. Profesor*** *– miremos… ¿Cuántas veces puedo colocar este palito que es el diámetro en todo el cordón?*
> **69.** ***Estudiante 2*** *– Aaa… pero… pues mira…*
> **70.** ***Estudiante 4*** *– se podría poner casi cuatro veces*
> **71.** ***Profesor*** *– entonces ¿Qué operación debo hacer para saber cuántas veces cabe?*
> **72.** ***Estudiante 5*** *– división*
> **73.** ***Profesor*** *– ok, plantémosla ¿cómo lo podría hacer?*
> **74.** ***Estudiante 4*** *– A… el perímetro dividido entre el diámetro*

Transcripción de grabación en audio N° 2

Este fragmento de la transcripción del audio Nº2 termina con una de las conjeturas más relevantes, pues en la línea *74* se plantea por parte de uno de los estudiantes la relación existente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, noción de π necesaria para determinar el área del círculo, una de las actividades que exige la tarea.

Tercer momento

De acuerdo con Ponte (2003), el tercer momento es aquel en donde los estudiantes someten a prueba las conjeturas realizadas, reafirmándolas o refutándolas definitivamente, es decir, se ha de definir claramente, cuáles de sus hipótesis servirán o encaminarán a posibles soluciones a la tarea, de manera que se refinen y sistematicen dichas conjeturas a través de sus propias experiencias.

Refinando conjeturas

Continuando con el desarrollo del aula, en busca de clarificar y reafirmar los conocimientos previos de los estudiantes, en este momento de la tarea, se pretende validar o refutar las hipótesis o conjeturas anteriormente construidas por los estudiantes. Una de las primeras hipótesis en validarse es que efectivamente se debe determinar lo que los estudiantes reconocen como área y la siguiente conjetura en ser reafirmada es que, para determinar el área total del terreno se deben hallar el área de cada una de las figuras que componen la totalidad de superficie y sumarlas, para así determinar el área total del terreno cubierto por el perro guardián. Además, cabe resaltar que ya es del dominio de los estudiantes el procedimiento para hallar el área de figuras como cuadrados y triángulos. Así las cosas, se refinará la conjetura a cerca de la noción de π que poseen los estudiantes.

78. *Profesor* *– Listo, ya está definida la relación entre el perímetro de la circunferencia y su diámetro mediante una fracción. Pero pregunta ¿esta relación se cumple o sirve para un circulo más grande, o para uno más pequeño?*
79. *Estudiante 2* *– Sí, porque sigue siendo la misma figura y la misma forma de sacarlo, es lo mismo.*
80. *Estudiante 5* *– desde que no cambien las medidas del radio y eso…*
81. *Estudiante 4* *– la figura, o sea que no cambie la figura, porque las medidas si se pueden cambiar*
82. *Estudiante 2* *– porque no importa el tamaño, es la misma figura, la misma figura siempre va a tener la misma forma.*
83. *Profesor* *– entonces como sirve para cualquier círculo en el mundo, grande, pequeño, mediano, sin importar la medida del radio. Vamos a darle un nombre especial*
84. *Estudiante 4* *– "π"*
85. *Profesor* *– y ¿Qué es π?*
86. *Estudiante 4* *– es el perímetro de la circunferencia dividido entre el diámetro*
87. *Estudiante 5* *– equivale a 3,1416*
88. *Profesor* *– ¿entonces cuantas veces cabe el diámetro en la longitud de la circunferencia?*
89. *Estudiante 2* *– 3,14 veces, ese es "π"*

Transcripción de grabación en audio N° 2

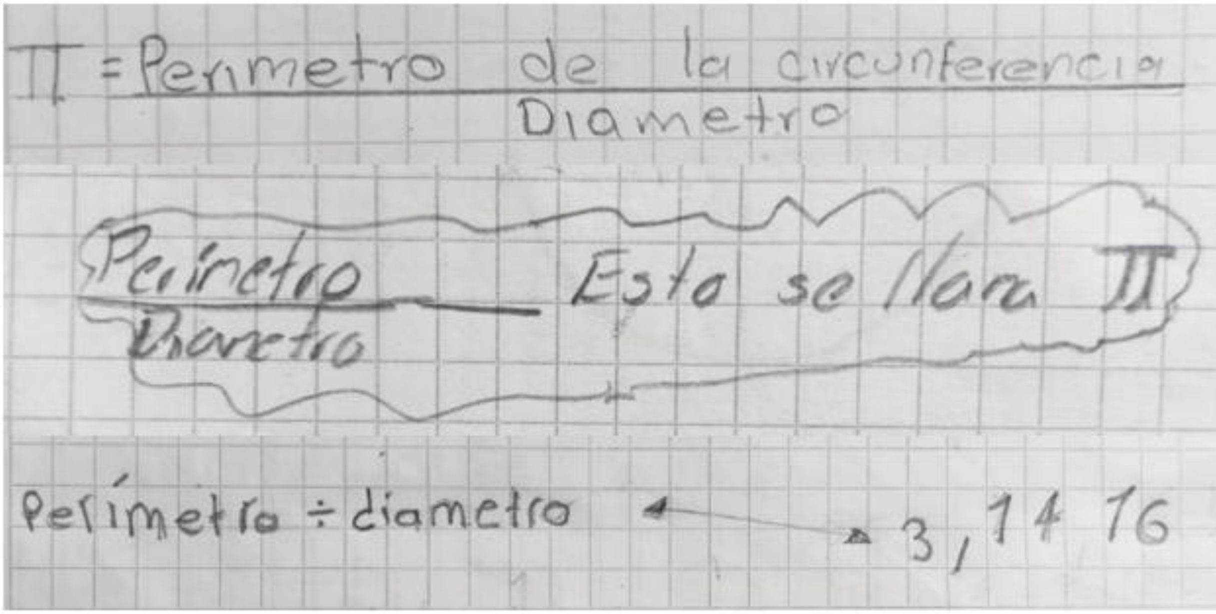


Figura 17: Planteamiento de una aproximación a π.

Fuente. Archivo documental del investigador

Con esta conversación y la ilustración de la imagen 17, se aprueba la hipótesis planteada por el estudiante *4* en la línea *86* acerca de la relación existente entre el perímetro de la circunferencia y su diámetro, la cual se reconoce como una invariante y se identifica con el número π, que además es necesaria para el cálculo del área del círculo.

Cierre de la clase

Cuarto momento

El cuarto momento de clases investigativas, de acuerdo con Ponte (2003) es aquel en el que el estudiante construye sus justificaciones, argumentos o demostraciones para validar resultados, es acá donde se mide la capacidad argumentativa y de deducciones formales realizadas por el estudiante, bien sean de carácter gráfico, escrito o verbal, es en este momento cuando el estudiante a de defender sus posturas a través de sus propias palabras y argumentaciones.

Presentación y validación de resultados finales

Dentro del desarrollo de la tarea y ya en la fase de cierre de la clase, los estudiantes hicieron la validación de sus resultados hallados durante la exploración e investigación, esta validación se realizó de manera verbal, escrita y gráfica. Una vez reconocida y planteada la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, se procedió a plantear una fórmula para determinar el área de un círculo.

De acuerdo con Ponte (2003) en esta etapa del aula se busca llegar a la formalización o generalización del concepto en consenso con toda la clase, es decir, de manera negociada, teniendo en cuenta el aporte de cada estudiante y su valides. Así continua el desarrollo de la tarea y se aborda el ultimo ítem que dice: "A través de lo experimentado, ¿puede proponer una expresión para determinar, en forma general, la cantidad total de superficie cubierta por cada una de las figuras geométricas observadas?", donde se llegó a establecer algunas fórmulas matemáticas de manera negociada entre los estudiantes y el docente, esto se evidencia en el siguiente fragmento de audio

99. *Profesor* *== – ¿cómo hago para hallar el área de esta figura?*
100. *Estudiante 4* *– base por altura, y dividido en dos porque…*
101. *Estudiante 5* *– no, porque usted la cierra*
102. *Estudiante 4* *– Ay… ¿del cuadrado… del rectángulo?*
103. *Profesor* *– sí, ¿cómo hallo el área?*
104. *Estudiante 4* *– base por altura*
105. *Profesor* *– pero el rectángulo no está completo. ¿Qué parte esta con color?*
106. *Estudiante 4* *– la mitad*
107. *Profesor* *– – ¿entonces cómo hallar el área de esa figura?*
108. *Estudiante 4* *– base por altura dividido en dos, porque es la mitad del rectángulo*
109. *Estudiante 5* *– profe, si pi es infinito ¿Por qué tiene un valor?*

110. *Profesor* – *para poderlo operar*
111. *Estudiante 2* – *es infinito, porque es imposible, la división es inexacta*
112. *Estudiante 4* – *ahora ponemos esto y lo dividimos en dos y esa sería el área del círculo*

Transcripción de grabación en audio N° 2

De esta manera cierra este fragmento de audio, y después de algunas operaciones aritméticas realizadas por los estudiantes se logra hallar una fórmula para determinar el área de una círculo, así se da por cumplido el objetivo principal de la tarea planteada, llegar a la construcción de dicha fórmula. Evidencia de lo anterior se presenta la siguiente figura, donde se muestra lo establecido en la clase.

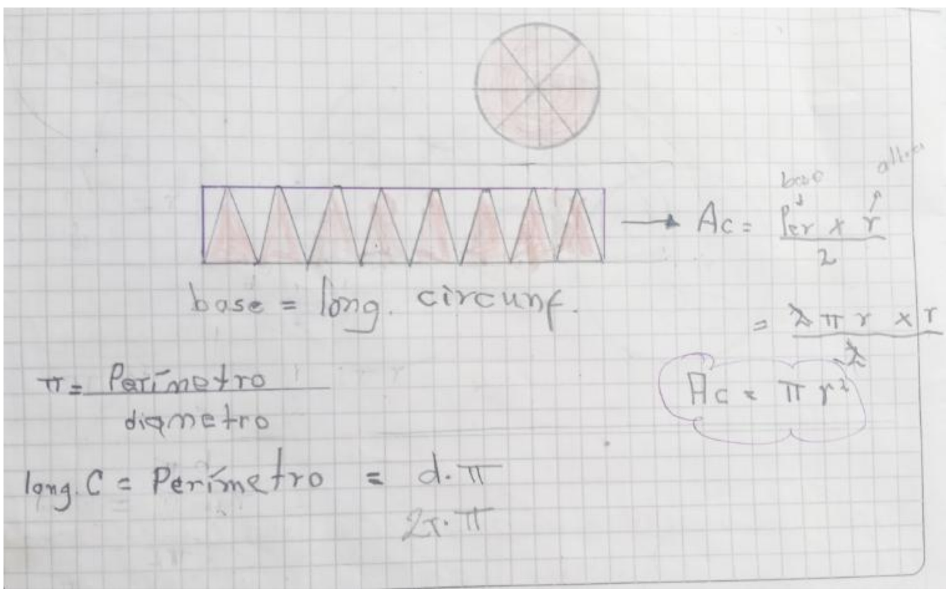


Figura 18. Momento de "argumentación y demostración de resultados"

Fuente. Archivo documental del investigador

De esta manera se realiza el cierre de la clase, con la formalización de una expresión para determinar el área de cualquier círculo, dando cumplimiento al objetivo de la tarea planteada a los estudiantes, además de mostrar evidencias de como el pensamiento geométrico no se define solo, al contrario, es en colaboración con otro tipo de pensamientos como el numérico y el algebraico que se logra desarrollar y potencializar el pensamiento espacial. Es de resaltar que el carácter investigativo de la tarea, genera interrogantes en los alumnos, los cuales pueden llevar a futuras investigaciones, muestra de esto la pregunta realizada por Estudiante 5 a su docente en la línea 109 del fragmento.

Tarea 2. Clasificación de Cuadriláteros

Esta segunda tarea exploratorio-investigativa, consta de seis ítems y se denomina "Construcción y Clasificación de cuadriláteros a partir de triángulos" (Anexo 2) y la presenta Blanco et al., (2015, p.11).

De igual manera que la primera tarea, ésta también se caracteriza por ser exploratorio-investigativa, pues permite al estudiante tomar sus propias decisiones acerca de cómo abordarla, organiza y clarificar sus propias ideas acerca de lo que se le pide hacer, lo cual implica que el alumno deba tomar decisiones que considere relevantes ante la situación planteada, además de permitirle construir significados de manera conjunta con sus compañeros y docente. Esta tarea se encuentra enmarcada dentro del contexto de las matemáticas según Skovsmose (2000), además es de duración corta pues se requirió de aproximadamente dos horas para su realización.

Esta tarea tiene como objetivo la construcción del objeto cuadrilátero, y su clasificación de acuerdo a sus lados, permitiendo a los estudiantes explorar e investigar a cerca de éste objeto geométrico, conjeturar sobre sus distintas nociones, reafirmar, aclarar o descubrir conceptos como el de rectas paralelas y perpendiculares, entre otros. Así mismo, esta tarea permite al estudiante la manipulación de material tangible, potencializando procesos de visualización, abstracción y representación de distintas figuras implícitas dentro del desarrollo de la tarea. Del mismo modo y de acuerdo a los lineamientos curriculares, esta tarea se ubica en el componente espacial y sistemas geométricos, dentro del eje temático de polígonos y su clasificación según sus lados.

Actividad matemática de investigación en el aula

Las actividades de investigación que se desarrollaron durante esta tarea, están apoyadas de la manipulación de material tangible, con el cual se pide al estudiante realizar la construcción de distintas figuras de cuatro lados, por medio de la utilización de triángulos isósceles rectángulos de igual tamaño y forma. De acuerdo con Casas, y Sánchez, (1998) el aprendizaje de las matemáticas resulta difícil debido a su carácter abstracto y formal, esto hace que se reflexione sobre la práctica docente, conllevando a buscar y proponer alternativas novedosas para su enseñanza y aprendizaje, haciéndolas ver amenas, avivando el interés de los estudiantes hacia ellas y acercándolas a su realidad

Inicio de la clase

Durante el desarrollo de esta tarea, la fase inicial estuvo caracterizada por la buena disposición de los estudiantes, los cuales tenían sus herramientas geométricas como escuadra, regla, colores, lápices, borrador, tajalápiz, entre otras, dispuestas para la resolución de esta tarea. Se les oriento acerca de cómo abordarla, metodología que era ya conocida por los estudiantes por tratarse de la segunda tarea exploratorio-investigativa que resolverían, es decir, ya eran más claras las distintas pautas para la realización del trabajo, en consecuencia, los alumnos empezaron su actividad exploratorio -investigativa tan pronto fue planteada la tarea.

Primer momento

Las preguntas investigativas, características de este momento (Ponte, 1998), no se hicieron esperar por parte de los estudiantes, preguntas que son resueltas por ellos mismos, pues el docente en este momento y fase del aula es tan solo un cuestionador más dentro de ésta.

Desarrollo de la clase

Actividades de Exploración

Dentro del desarrollo de esta tarea, las actividades de exploración son evidentes desde el inicio de su resolución, estas exploraciones iniciales fueron realizadas de manera individual, pues la tarea les permite explorar de inmediato, al pedir *dividir el cuadrado representado en triángulos iguales*, sin especificar el número de estos, muestra de esto es la figura número

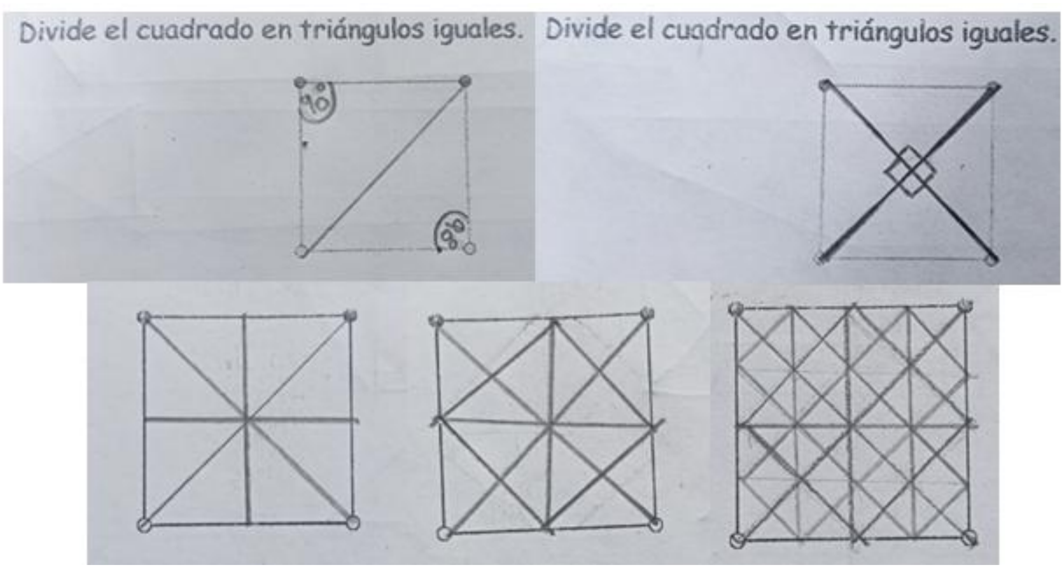


Figura 19: Momento de Exploraciones individuales.

Fuente. Archivo documental del investigador

Esta figura permite observar las distintas exploraciones a nivel individual, realizadas por los estudiantes en cuanto al número de triángulos en los que se debe dividir el cuadrado. Como se observa en la figura, las exploraciones se dan a distintos niveles, exploraciones con un mayor número de triángulos, sugieren un grado más alto de visualización con respecto a exploraciones realizadas con dos o cuatro triángulos. También se evidencia un nivel de percepción clasificatoria en los alumnos que identifican la ubicación del ángulo recto dentro de dichos triángulos.

Seguidamente y también de forma individual, se pide a los estudiantes que identifiquen y argumenten con sus palabras, qué tipo de triángulos quedaron construidos, luego de hacer la división del cuadrado, esto para permitir expresar las ideas y argumentos de los estudiantes, encaminándolos a tomar decisiones e identificar la relevancia e importancia de sus justificaciones, muestra de lo anterior se evidencia en la siguiente figura:

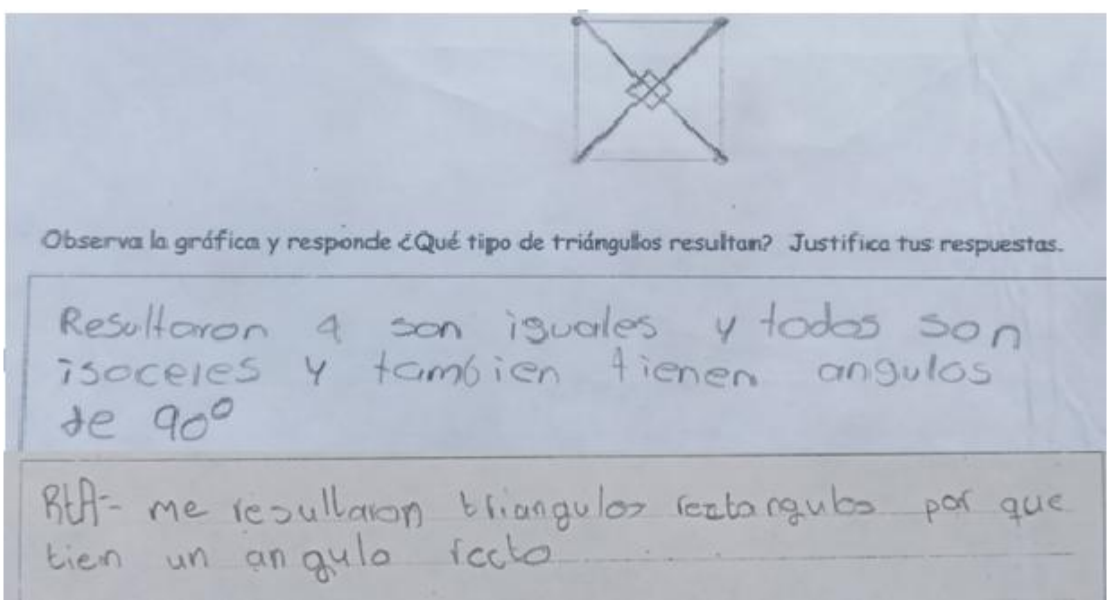


Figura 20: Justificaciones realizadas por dos de los estudiantes

Fuente. Archivo documental del investigador

Esta imagen permite observar que los estudiantes perciben las figuras de una manera general, además reconocen algunas de sus propiedades y atributos lográndolas clasificar dentro de un prototipo, es el caso del estudiante el cual responde que le resultaron cuatro triángulos iguales y además los reconoce como isósceles y con un ángulo recto en ellos. Del mismo modo, el caso del alumno quien responde que le resultaron triángulos rectángulos porque tienen un ángulo recto, esto surge de la organización de sus ideas y de justificar sus exploraciones evocando quizás a conceptos previos que este posee. De esta manera terminan las exploraciones individuales, pues la continuidad de la tarea conlleva a trabajar en parejas.

Continuando con el desarrollo de la tarea dentro de esta fase del aula, se pide a los estudiantes trabajar junto con uno de sus compañeros, para responder a los siguientes interrogantes que plantea la tarea, en esta etapa se ha de trabajar con material manipulable, el cual consta de cuadrados de igual tamaño, recortados en papel iris, los cuales representan el cuadrado graficado en la tarea, y con los que se pide a los estudiantes obtener triángulos como los que representaron en la primera parte de la tarea. Seguidamente la tarea plantea la siguiente actividad exploratoria:

> *1. Con 2 de los triángulos resultantes, construye figuras de cuatro lados, (sin sobreponer los triángulos, es decir, sin ubicar uno sobre el otro. Si lo consideras necesario recorta los triángulos). Representa las figuras construidas.*

Estas actividades de exploración exigen un considerable grado de visualización, pues piden al estudiante construir figuras de cuatro lados a partir de dos de los triángulos que se obtuvieron anteriormente, además pide graficar las representaciones realizadas con el material manipulable, lo cual les encamina al estudiante a llevar a cabo actividades de abstracción, visualización y representación. Del mismo modo surgen algunas preguntas de investigación, las cuales son resueltas por los mismos estudiantes de manera negociada, dado que el papel del docente en esta fase del aula es el de ser un cuestionador más. El siguiente fragmento de audio, permite evidenciar algunas de estas preguntas.

12. Estudiante 1 *– ¿acá dibujamos, cierto profe?*
13. Profesor *– ¿tú qué crees?*
14. Estudiante 1 *– mmm. Creo que sí profe*
15. Profesor *– correcto*
16. Estudiante 4 *– lo parto en dos o en cuatro profe?*
17. Profesor *– ¿qué dice tu compañera de trabajo?*
18. Estudiante 6*– yo en dos y tú en cuatro partes.*

. Transcripción de grabación en audio N° 1

Algunos estudiantes deben clarificar e interpretar de menor manera el enunciado de este ítem, muestra de esto el siguiente fragmento de audio

23. Estudiante 1 *– ¿acá se debe formar un triángulo isósceles?*
24. Profesor *– ¿Qué dice Julián, qué hay que hacer ahi?*
25. Estudiante 3 *– Ahí dice, es formar figuras de cuatro lados, pero él no me cree!*
26. Estudiante 1 *– Aaa, pensé que triángulos.*

Transcripción de grabación en audio N° 1

Las exploraciones con el material manipulable no se hicieron esperar, la totalidad de los alumnos optaron por recortar el cuadrado en dos y cuatro triángulos, para de esta manera empezar a realizar las construcciones y graficas pedidas en este primer ítem de trabajo en equipo, algunas de estas actividades de exploración para formar cuadriláteros con dos triángulos son las siguientes:

Figura 21: Exploraciones iniciales realizadas por los estudiantes a través de material manipulable.

Fuente. Archivo documental del investigador

La imagen del lado derecho muestra las técnica utilizada para cortar el cuadrado en triángulos de igual tamaño y forma, se observa que los estudiantes deciden marcar la diagonal del cuadrado para así dividirlo en dos tríangulos congruentes, concepto que se adiere al lexico geometrico de los estudiantes, aproximandolos a la nocion de este objeto geométrico. La imagen de la izquierda permite ver las primeras construcciones de cuadrilateros que se realizaron a traves de la exploracion y construccion de éstos con dos triángulos. Del mismo modo, este mismo item permite a los estudiantes explorar el cómo representar sobre la hoja de la tarea las construcciones realizadas, pues éstas se realizaban con material tangible y se debian representar sobre dicha hoja.

Figura 22: Actividades exploratorias de representación

Fuente. Archivo documental del investigador

Las actividades de exploración evidentes en esta figura, son las referentes a procesos de representación y abstracción visual, en la imagen de la izquierda se observa que el estudiante realiza la representación de su construcción recurriendo a procesos de visualización, pues se evidencia que ubica sus construcciones donde las puede ver claramente, para de esta menera representarlas sobre un plano. La imagen de la derecha muestra la técnica utiliazada por la estudiante para realizar su representación, se observa que lo hace “calcandola” sobre la hoja, es decir, ubica el cuadrilatero construido y traza sus bordes. Todas los métodos utilizados por los estudiantes son validos, pues esa es una de las características de las tareas exploratorio - investigativas, analizan todos los posibles caminos de solución a la tarea (Ponte, 2003), permitiendo expresar libremente los pensamientos e ideas de los estudiantes.

Del mismo modo continuan las actividades de exploración, pues el segundo item pide a los estudiantes:

2. Realiza el mismo procedimiento tomando 3 triángulos. Grafica el contorno de cada figura.

En consecuencia, se obtienen distintas exploraciones, igualmente permitiendo y analizando todos los posibles caminos de solución propuestos por los estudiantes, muestra de esto la transcripción del siguiente fragmento de audio

52. Estudiante 2 *– o sea profe, ¿con tres triángulos una de cuatro lados?*
53. Profesor *– ¿Qué dice tu compañero?*
54. Estudiante 5 *– sí, creo que sí, ahora con estos tres*
55. Profesor *– muy bien*
56. Estudiante 4 *– profe, ¿esta me sirve?*
57. Profesor *– ¿Cuántos lados tiene?*
56. Estudiante 4 *– uno, dos, tres, cuatro, cinco*
58. Estudiante 6 *– entonces no sirve.*

64. Estudiante 5 *–profe, mire esta tiene…1, 2, 3, 4*
65. Profesor *– muy bien*
66. Estudiante 2 *– mira profe esta…*

. Transcripción de grabación en audio N° 1

A continuación se observan las construcciones de distintos cuadriláteros realizadas por los estudiantes apoyados de tres triángulos, a las que se hace alusión en la anterior transcripción de fragmento de audio Nº1

Figura 23: Construcción de Cuadriláteros con tres Triángulos

Fuente. Archivo documental del investigador

En cada uno de los grupos de trabajo se realizan las distintas exploraciones para la construcción de cuadrilateros con tres triángulos, en medio de estas actividades ya se empezaban a dislumbrar algunos índices de posibles conjeturas, lo que supone que se acerca el segundo momento de clases investigativas (Ponte, 2003).

Segundo momento

Las actividades características de este momento, de acuerdo con Ponte (2003), son aquellas correspondientes a la organización de información obtenidos durante el proceso de exploración e investigación, y el planteamiento de conjeturas e hipótesis levantadas por los estudiantes durante este proceso, a continuación, se describen las actividades geométricas investigativas referentes a este momento.

Levantando conjeturas

Dentro de este momento de la clase, los estudiantes continúan sus exploraciones y además salen a flote las primeras conjeturas acerca de, cómo se llamarán las figuras de cuatro lados construidas con distinto número de triángulos. En consecuencia, los estudiantes visualizan estas construcciones de manera global, reconociéndolas y relacionándolas con objetos de su entorno, sus percepciones son netamente visuales y se basan en la forma de la figura para hacer postulados, esto se evidencia en el siguiente fragmento de transcripción de audio Nº1.

78. Estudiante 1 *– este profe, es como una botica y tiene cuatro lados*
79. Estudiante 3*– a mí solo me salió ese*
80. Profesor *– ¿ese será el nombre indicado para esa figura Mateo? Y ¿será que solo sale ese?*
81. Estudiante 3 *– sí, ¡creo!*
82. Profesor - *¿seguro?*
83. Estudiante 1 *– ¿profe entonces como se llama?*
84. Profesor *– eso mismo pregunto yo ¿Cómo se llama esa figura?*
85. Estudiante 1 *– entonces es un <u>cuadrilátero</u>*

86. Profesor *– ¿por qué?*
87. Estudiante 3*– pues tiene cuatro lados profe.*

Transcripción de grabación en audio N° 1

Lo anterior evidencia el trabajo realizado por uno de los grupos de trabajo, en el cual uno de sus integrantes reconoce a una de sus construcciones de cuatro lados, como una “botica”, ubicándolo en un nivel de visualización global, pues identifica a este objeto geométrico por su forma mas no por sus atributos o propiedades, es evidente la necesidad de generar una clasificación para el tipo de figuras que los estudiantes obtienen a través de las construcciones. Al mismo tiempo el rol del docente es el de ser un investigador más, quien debe orientar a sus estudiantes mas no darles las respuestas inmediatas a sus cuestionamientos (Riscanevo, 2019). Del mismo modo las conjeturas también se evidenciaban en otro de los grupos de trabajo, donde se escucharon hipótesis como las siguientes:

95. Estudiante 2 *– profe mire esta*
96. Profesor *– ¿Cómo se llama?*
97. Estudiante 2*– pues es un rectángulo tiene cuatro lados profe.*
98. Profesor *– ¿por qué?*
99. Estudiante 2 *– porque tiene ángulos rectos, cuatro ángulos rectos.*
***100**. **Estudiante 5** – profe y está también de cuatro, jajajaja parece una falda*

Transcripción de grabación en audio N° 1

Lo anterior muestra otra de las conjeturas realizadas por uno de los estudiantes al nombrar y clasificar una de sus construcciones dentro del grupo de figuras con ángulos rectos y lo identifica como un rectángulo, lo cual lleva a inferir que este alumno se ubica en un nivel de cognición geométrica de percepción clasificatoria, pues identifica y relaciona algunas propiedades del objeto geométrico para poder clasificar.

Así continua el desarrollo de la tarea pidiendo a los estudiantes que construyan figuras de cuatro lados, ahora con cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve triángulos. En este sentido el papel del docente es el de seguir cuestionando a sus estudiantes, sin perder el objetivo de la tarea, por lo cual éste ha de hacer preguntas direccionadoras, con el fin de dar cumplimiento al objetivo de esta, el cual es clasificar los distintos cuadriláteros de acuerdo a sus lados. Es así que dentro de los grupos de trabajo, se genera un dialogo propicio para lanzar una de estas preguntas direccionadoras por parte del docente, orientando a los alumnos a establecer nuevas relaciones entre las figuras que se han construido hasta el momento y así se generen otras conjeturas e hipótesis más.

112. Estudiante 2 *– acá profe con seis triángulos sale otra vez un rectángulo y otra de estas… otra falda pero más grande.*
113. Profesor *– listo bien, ahora les pregunto a todos para que tengan en cuenta eso también ¿con qué tipo de segmento de rectas se forman los lados de estas figuras?*
114. Estudiante 2 *– paralelos*
115. Estudiante 5 *– paralelos y también perpendiculares*
116. Profesor *– de esta figura, ¿qué tipo de rectas son?*
117. Estudiante 5 *– paralelas esta con esta y esta con esta*

Transcripción de grabación en audio N° 1

Con esta pregunta realizada por el docente se empiezan a generar conjeturas más afines al objetivo principal de la tarea, algunas de estas nuevas conjeturas generadas en los grupos de trabajo son las siguientes:

126. Estudiante 4 *– profe, ¿esta se forma con segmentos paralelos?*
127. Profesor *– ¿qué dice Estudiante 6?*
128. Estudiante 6 *– sí paralelos*
129. Estudiante 4 *– entonces con dos se forman figuras de cuatro lados con rectas paralelas*
130. Profesor *– ¿y cómo se llama esa figura?*
131. Estudiante 6 *– un cuadrado*
132. Estudiante 4 *– un rombo*

Transcripción de grabación en audio N° 1

Lo anterior evidencia las nuevas hipótesis planteadas por parte de los estudiantes, conjeturas que se ajustan al objetivo de la tarea planteada, pues ya se establecen relaciones entre los segmentos de recta que forman cada cuadrilátero.

Actividades de Organización de información

Las actividades de organización de información se llevan a cabo en el diligenciamiento de una tabla planteada dentro de la tarea, en la cual se identifican dos columnas, en una de ellas se establece el número de triángulos utilizados para cada construcción y en la otra su respectiva representación gráfica.

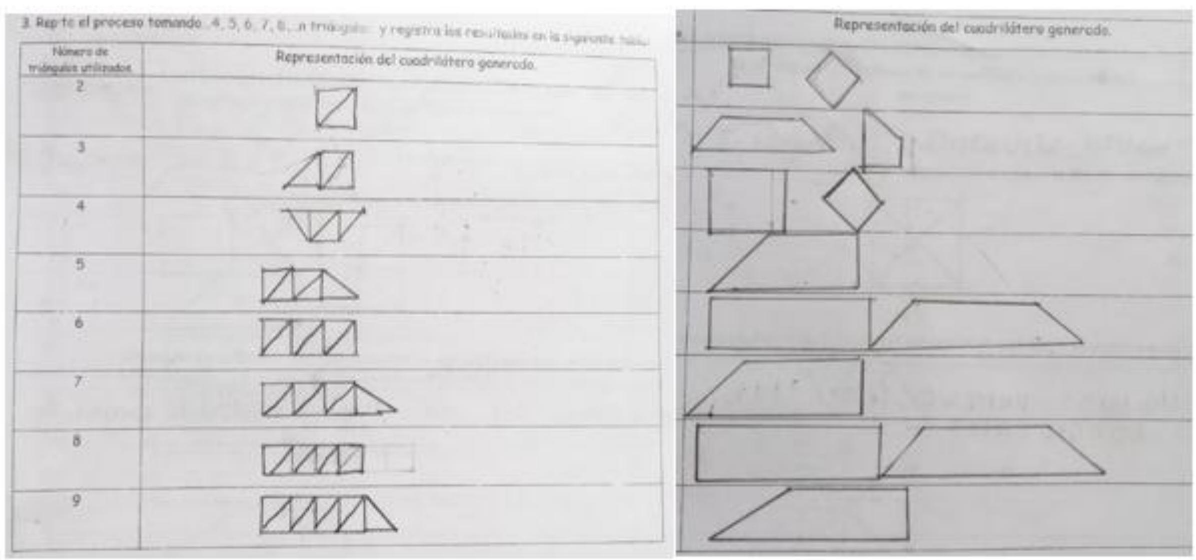


Figura 24: Momento de organización y representación de información

Fuente. Archivo documental del investigador

Estas actividades de organización de información guían a una mejor visualización y abstracción de la información allí representada, lo que facilita hallar relaciones entre algunas de las propiedades y atributos de las figuras construidas y representadas, lo cual permitirá refinar las conjeturas planteadas por los estudiantes anteriormente. Es de resaltar que estas actividades se realizaron construyendo cada representación de las figuras con instrumentos como reglas y escuadras, de esta manera se potencializan los procesos de visualización en los estudiantes, a la vez de representar un objeto que visualizan mental y físicamente. En consecuencia, de lo anterior se hace evidente el paso al tercer momento de aula exploratorio-investigativa (Ponte, 2003), pues apoyados de la tabla expuesta en la tarea se realizan las pruebas y posterior sistematización de conjeturas.

Tercer momento

En este momento de la clase, los estudiantes realizan las pruebas necesarias para aprobar o refutar las conjeturas planteadas inicialmente, las cuales apuntan al tipo de segmentos de recta con los que se construyen los cuadriláteros y la relación existente entre ellas.

Sistematización de conjeturas

Como ya se ha comentado, el objetivo principal de la tarea es realizar la clasificación de cuadriláteros de acuerdo a sus lados, en este sentido los estudiantes mediante el trabajo en equipo refinaron y sistematizaron las conjeturas planteadas inicialmente. A continuación, se presentan tres de las conjeturas planteadas finalmente, cada una propuesta por uno de los distintos grupos de trabajo.

1ª conjetura

> ***148. Estudiante 1*** *– ¿profe, acá con tres las rectas de los lados son paralelas?*
> ***149. Profesor*** *– ¿qué dice Julián?*
> ***150. Estudiante 3*** *– estas son perpendiculares*
> ***151. Estudiante 1*** *– y este con este paralelo porque no se cortarían*
> ***152. Estudiante 3*** *– o sea, tienen de las dos, dos que son paralelos y dos perpendiculares*
> ***153. Estudiante 1*** *– perpendiculares porque si las alargo se cortan, ¿verdad profe?*
> ***154. Profesor*** *– Julián ¿Cuál es paralela a cuál?*
> ***155. Estudiante 3*** *– esta con la de al frente*

Transcripción de grabación en audio N° 1

Figura 25: Construcción de cuadrilátero con dos lados paralelos entre si

Fuente. Archivo documental del investigador

El anterior fragmento de transcripción de audio y apoyado con la figura 25, del cual se habla en el audio, se reconoce una de las conjeturas finalmente refinadas y sistematizadas por los alumnos, en la cual se plantea que este cuadrilátero está construido con un par de lados paralelos y que su otro par de lados que lo conforman no son paralelos, lo que se podría clasificar como un trapecio (Jaime, Chapa, y Gutiérrez, 1992).

2ª conjetura

183. Estudiante 4 *– profe mira, con seis podemos construir una figura de cuatro lados, que los lados son paralelos*
184. Profesor *– ¿Estudiante 6, cuáles lados, son los que son paralelos?*
185. Estudiante 6 *– este es paralelo a este*
186. Estudiante 4 *– ¿entonces si profe?*
187. Profesor *– escríbanlo a ver cómo les quedaría*

Transcripción de grabación en audio N° 1

Figura 26: Construcción de cuadrilátero con lados paralelos dos a dos

Fuente. Archivo documental del investigador

La segunda conjetura realizada por este equipo de trabajo plantea que se puede construir un cuadrilátero, el cual se caracteriza por tener sus lados paralelos dos a dos, es decir, uno de sus lados es paralelo con su lado no consecutivo, clasificándolo así dentro de los paralelogramos (Jaime et al., 1992). La tarea permite al estudiante expresar sus ideas libremente, potencializando procesos de argumentación y justificación en los estudiantes, otra de las características y competencias que se han de potencializar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

3ª conjetura

208. Estudiante 2*– profe, y esta que encontré con siete no tiene ningún lado nada*
209. Estudiante 5 *– si profe, esta está rara, pero tiene cuatro lados*
210. Profesor *– ¿Cómo así que no tiene ningún lado nada?*
211. Estudiante 2 *– sí profe, ningún lado es paralelo*
212. Profesor *– y si no son paralelos ¿entonces qué son?*
213. Estudiante 5 *– Aaa…, son entonces perpendiculares*
214. Estudiante 2 *– a ya entendí, o sea, todos su lados son perpendiculares*

Transcripción de grabación en audio N° 1

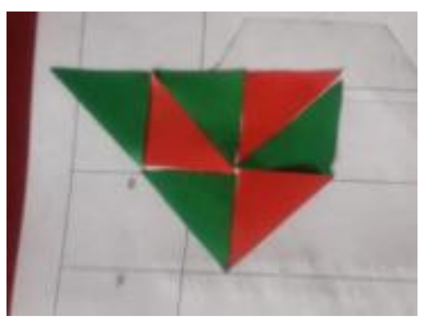
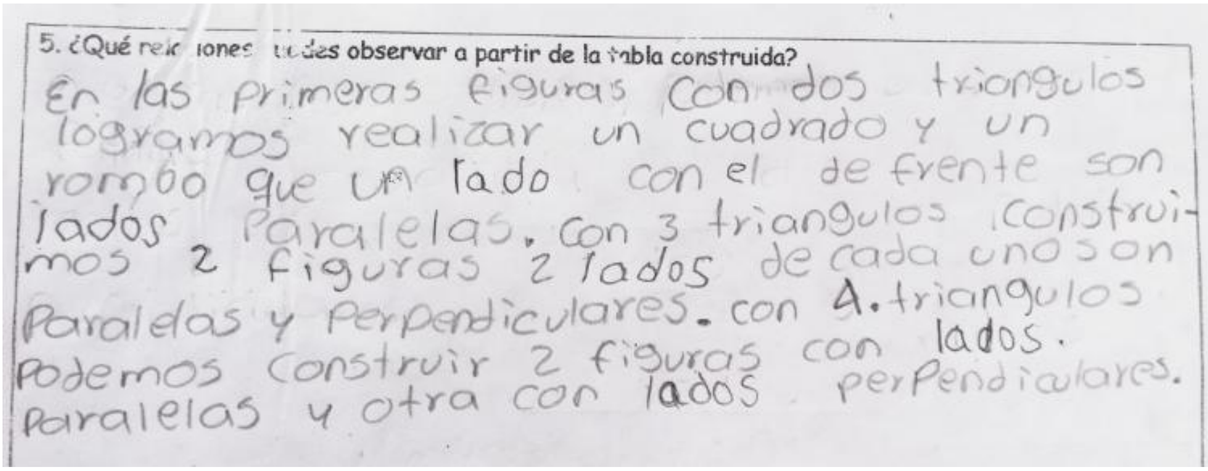


Figura 27: Construcción de cuadrilátero sin lados paralelos

Fuente. Archivo documental del investigador

Esta conjetura fue planteada por sólo uno de los cinco grupos de trabajo, siendo el único que logró esta construcción, de la cual se pudo establecer que, se logra construir un cuadrilátero cuyos lados no son paralelos, identificando así una de las propiedades de los trapezoides (Jaime et al., 1992) Estas fueron las tres conjeturas que se lograron sintetizar durante este momento del aula, las cuales también se ven reflejadas de manera escrita en la siguiente figura.


5. ¿Qué relaciones puedes observar a partir de la tabla construida?

En las primeras figuras con dos triangulos
logramos realizar un cuadrado y un
rombo que un lado con el de frente son
lados paralelas. con 3 triangulos construi-
mos 2 figuras 2 lados de cada uno son
paralelas y perpendiculares. con 4. triangulos
podemos construir 2 figuras con lados.
paralelas y otra con lados perpendiculares.

Figura 28: Momento de Síntesis de conjeturas

Fuente. Archivo documental del investigador

De esta manera se establecieron dichas conjeturas, con el fin de lograr establecer la clasificación de cuadriláteros según sus lados, se identifica dentro de cada una de estas por lo menos una de las propiedades relevantes para lograr dicha clasificación. De esta manera se culmina con este momento de la clase exploratorio-investigativa, pues se abre paso al cuarto momento donde se realizará la validación y presentación de los resultados finales de la tarea.

Cierre de la clase

Cuarto momento

Dentro de este momento se llevaran a cabo actividades de argumentación y justificación por parte de los estudiantes, se construirá el nuevo conocimiento de manera negociada, contando con la participación de toda la clase, es decir, de todos los estudiantes, el docente fue el moderador de dicha negociación, orientando y sintetizando las ideas de los alumnos en busca de este fin, cada grupo debe hacer su aporte en la construcción del nuevo concepto geométrico.

Presentación y validación de resultados finales

Para la presentación y validación de resultados se organizó la clase a manera de plenaria o de mesa redonda, donde cada grupo tenía derecho a opinar describiendo una de las características o conjeturas planteadas durante su exploración, de esta manera y después de la negociación se podía dar respuesta al sexto ítem que se plantea en la tarea, el cual pide a los estudiantes lo siguiente:

> *6. De acuerdo a lo visto durante la clase y a las relaciones observadas y registradas, completa la siguiente tabla graficando y ubicando cada cuadrilátero de acuerdo a sus propiedades.*

La dinámica consistía, primero en dividir el tablero en tres casillas, y rotularlas con los títulos de paralelogramo, trapecio y trapezoide, escribir cada afirmación propuesta durante la plenaria, en la casilla correspondiente, bien fuera en la de paralelogramos, trapecios o trapezoides, en consecuencia se ubicaron las tres conjeturas que fueron sistematizadas en el anterior momento, cada una en su lugar correspondiente, es decir, la primera conjetura, se ubicó en la casilla de trapecios, la segunda en la de paralelogramos y la tercera en la de trapezoides. Algunas de las conclusiones y consideraciones finales, que se lograron establecer durante la plenaria, fueron sintetizadas por los estudiantes de la siguiente manera:

> ***253. Estudiante 2*** *– profe, en sí, todos son cuadriláteros*
> ***254. Profesor*** *– correcto, si señor*
> ***255. Estudiante 5*** *– pero se llaman diferente*
> ***256. Profesor*** *– correcto, ¿y será que podemos saber el nombre de cada uno, de acuerdo a las características de sus lados?*
> ***257. Estudiante 6*** *– ¿entonces cuáles son los paralelogramos?*

258. Profesor *– muy bien, vamos a eso. Algún grupo que me diga una de sus conjeturas*
259. Estudiante 5 *– que sus lados son todos paralelos*
260. Profesor *– en ¿Cuál de éstas tres casillas ira esta afirmación?, si sabemos que solo tiene lados paralelos*
261. Estudiante 2 *– seria en ¿paralelogramos?*
262. Profesor *– ¿qué dicen los demás?*
263. Estudiante 1*– yo diría que sí, porque son paralelos y paralelogramos, pusss... creo.*
264. Profesor *– listo, esta conjetura irá en la casilla de paralelogramos. ¿Ahora, cuál será la característica de los trapecios?*
265. Estudiante 4 *– se puede la de nosotras. Que tienen un par de lados paralelos entre sí y los otros dos lados no son paralelos.*
266. Profesor *– listo, sí, estoy de acuerdo*
267. Estudiante 3 *– entonces en los trapezoides irá la figura de Estudiante 2, que no tiene ningún lado paralelo.*
268. Profesor *– listo bien. Ahora sí, a graficar cada uno donde iría de acuerdo a sus propiedades*

Transcripción de grabación en audio N° 1

La actividad de los estudiantes consistía en representar gráficamente los cuadriláteros en la casilla adecuada, reconociendo el nombre de cada uno de estos haciendo relación con sus propiedades y características, o relacionando el nombre con alguna de las afirmaciones hechas por los estudiantes, muestra de esto es la siguiente figura.

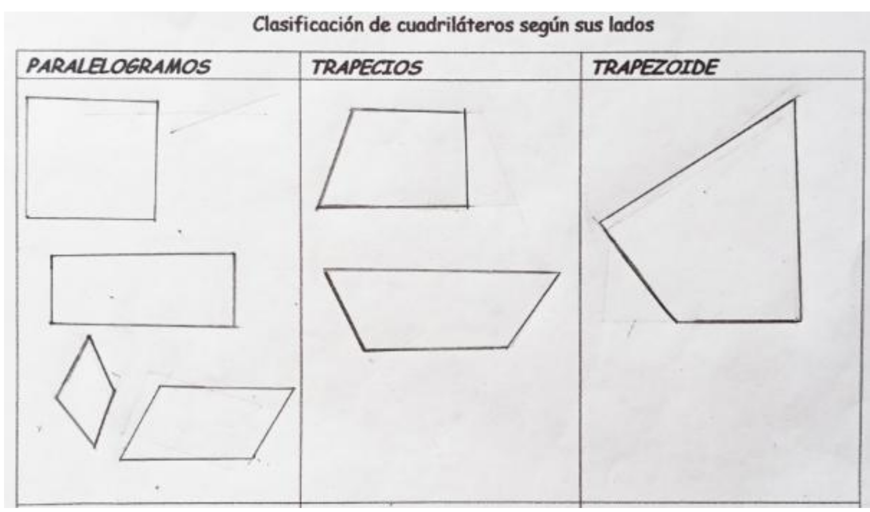


Figura 29: Representaciones gráficas para la clasificación de cuadriláteros según sus lados

Fuente. Archivo documental del investigador

En esta figura se identifica la clasificación realizada por los estudiantes, en la cual se nombran los cuadriláteros según sus lados, se evidencia la relación directa entre cada una de las conjeturas realizadas con una de las propiedades características de cada clase de cuadrilátero. Algunas pruebas realizadas por los estudiante consistieron en prolongar los segmentos de recta que conforman los lados del cuadrilátero para verificar si cortan en algún punto o no, para de esta manera cerciorarse o comprobar si la representación realizada correspondía a un paralelogramo, a un trapecio, o a un trapezoide.

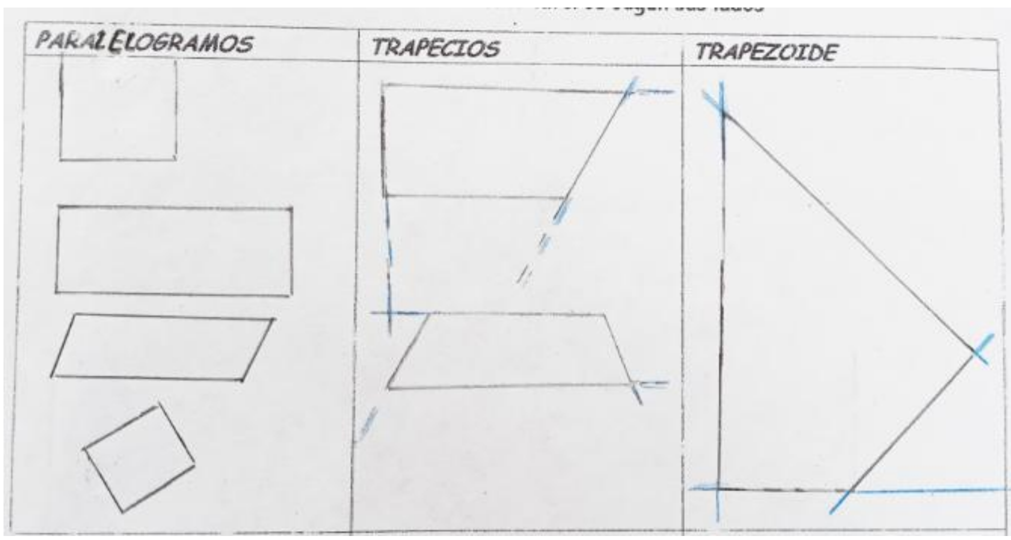


Figura 30: Momento de validación y demostración de resultados

Fuente. Archivo documental del investigador

De esta manera concluye la tarea exploratorio-investigativa, ofreciendo una clasificación para los cuadriláteros según sus lados. Esta clasificación se genera de la exploración y negociación realizada por los estudiantes durante el desarrollo de la tarea, en la que se construyeron algunas de las representaciones de los distintos tipos de cuadriláteros que existen, y a la vez se identificaron características de estos objetos geométricos, logrando establecer relaciones entre estas, para generar dicha clasificación.

Tarea 3. Exploraciones e Investigaciones con el Triángulo de Sierpinski

Esta tercera tarea exploratorio-investigativa, consta de cinco ítems y se denominó “El triángulo de Sierpinski” (Anexo 3), fue tomada y adaptada del artículo “Fractales en clases exploratorio-investigativas, un estudio del desenvolvimiento del pensamiento y lenguaje algebraico en la escuela básica” (Pereira, 2006). De igual manera que las anteriores tareas, también está diseñada y caracterizada bajo parámetros exploratorio-investigativos, facilitando al estudiante la exploración y representación libre de sus pensamientos a través de registros gráficos, escritos, algebraicos y de lenguaje común. Esta tarea se encuentra clasificada dentro del contexto de semirrealidad según lo clasificación realizada por Skovsmose, (2000), y es de duración corta, pues se requirió de aproximadamente una hora y treinta minutos para su realización.

En lo referente a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, esta tarea tiene como objetivo el acercamiento y construcción del objeto secuencia, a través del reconocimiento de patrones geométricos, permitiendo a los estudiantes explorar e investigar a cerca de dicho objeto, conjeturar sobre sus propiedades, reafirmar, aclarar o descubrir conceptos relacionados a este objeto matemático. De la misma manera y de acuerdo con los lineamientos curriculares, esta tarea se ubica en el componente espacial y sistemas geométricos, dentro del eje temático de secuencias.

Actividades matemáticas de investigación en el aula

Las actividades investigativas desarrolladas durante esta tarea, buscan facilitar al estudiante la comprensión de distintos fenómenos. Es claro que la geometría euclidiana permite describir, estudiar, argumentar y explicar formas estructurales de nuestro contexto tales como, la construcción de edificios, casas, puentes, maquinas, entre otras, en cambio los objetos de la naturaleza son un poco más complicados de describir y exigen de geometrías más ricas para su comprensión, las cuales moldeen los fenómenos naturales. De esta manera, las diversas actividades investigativas de la actual tarea, se realizan apoyados de la geometría fractal, buscando avivar procesos de visualización y atracción en los estudiantes, bajo otras perspectivas geométricas.

Inicio de la clase

Dentro del avance de esta clase, en la etapa de inicio de aula, se socializo el objetivo del desarrollo de la tarea, se negociaron y establecieron las normativas para su solución, lo cual, es un estilo de trabajo ya reconocido por los estudiantes, al ser su tercera tarea de carácter exploratorio-investigativo que desarrollarían, se les motivó a explorar, trabajar, indagar y reconocer todos los posibles caminos de análisis que ofrece la tarea.

Primer momento

El desarrollo de esta tarea se caracteriza por transitar el primer momento de manera netamente individual, buscando fortalecer en cada uno de los estudiantes procesos de imaginación y conceptualización, permitiendo que desarrollen diversas estrategias de representación y argumentación; se destinó de un tiempo prudencial de treinta minutos para el tránsito por este momento. Así mismo, se permitió la utilización de los instrumentos que los estudiantes vieran necesarios para su exploración.

Desarrollo de la clase

Actividades de Exploración

Las actividades de exploración dentro de esta tarea consistían inicialmente en realizar representaciones gráficas, recurriendo a un elevado grado de observación, abstracción y visualización por parte de los estudiantes, pues el primer ítem de esta tarea les pedía realizar la siguiente actividad, después de observar la imagen.

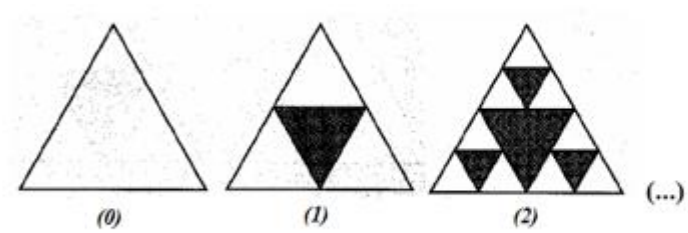


Figura 31: Triángulo de Sierpinski y sus trasformaciones en sus dos primeras etapas

Fuente. Adaptado de Pereira, (2006)

> *1. Graficar los dos siguientes triángulos que continuarán en la anterior imagen*

Ante los anteriores planteamientos y después de algunos minutos de actividades matemáticas de análisis, abstracción, reconocimiento de patrones, entre otras, se lograron exploraciones graficas como las siguientes:

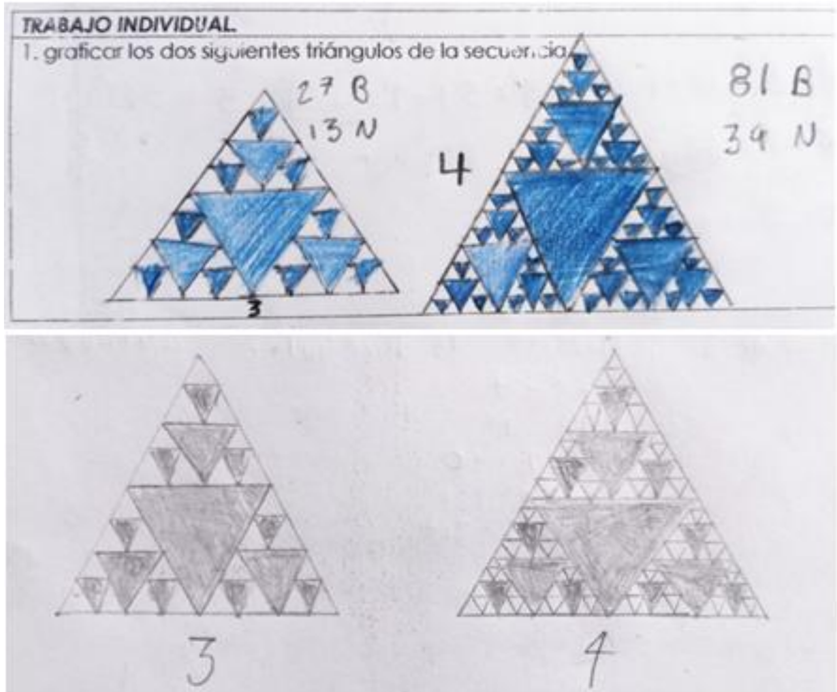


Figura 32: Triángulo de Sierpinski, tercera y cuarta etapa. Exploraciones hechas por los estudiantes.

Fuente. Archivo documental del investigador

La anterior figura muestra algunas de las representaciones graficas realizadas por los estudiantes ante el primer planteamiento de la tarea. Estas figuras se lograron construir después de analizar, discutir y despejar algunas de las primeras preguntas investigativas a las que da origen la tarea, algunos de estos cuestionamientos se evidencian en el siguiente fragmento de transcripción de audio N°1.

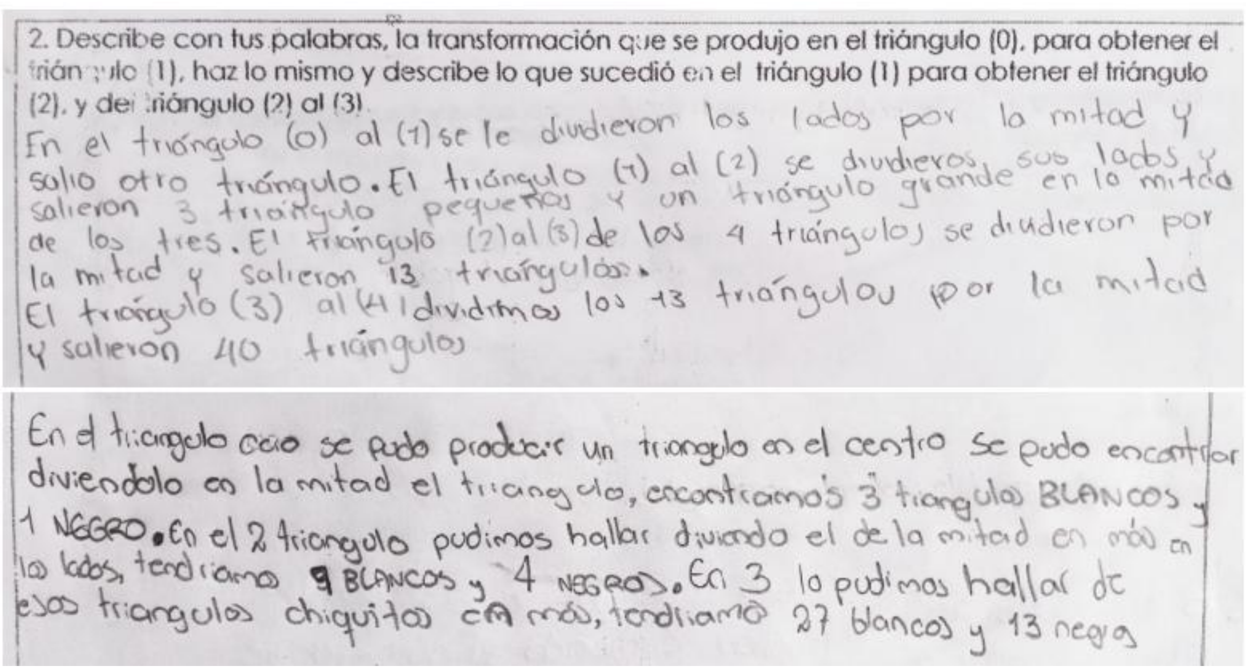
> ***16. Estudiante 2*** *– profe, ¿para dibujar acá es como si se encogiesen estas y se pusieran en este?*
> ***17. Estudiante 5*** *– más chiquito.*
> ***18. Estudiante 2*** *– sí, eso.*
> ***19. Profesor*** *– listo, hagan la gráfica*
> ***20. Estudiante 1*** *– profe yo, ¿puedo producir un triángulo en el centro y encontrar dividiendo en la mitad del triángulo?*
> ***21. Profesor*** *– realiza la gráfica para mirar como seria.*

Transcripción de grabación en audio N° 1

Continuando con el desarrollo de la tarea y dentro de este primer momento, también se plantean actividades exploratorias de forma escrita, favoreciendo la movilización y las habilidades de representación en distintos sistemas semióticos de leguaje, estimulando la conversión de los información de un sistema de registro a otro, en este caso del oral al escrito, pues el segundo ítem precisaba a los estudiantes:

> *2. Describe con tus palabras, la transformación que se produjo en el triángulo (0), para obtener el triángulo (1), haz lo mismo y describe lo que sucedió en el triángulo (1) para obtener el triángulo (2), y del triángulo (2) al (3).*

Del planteamiento anterior, se generaron registros escritos realizados por los estudiantes donde se evidencia la conversión de sus ideas o pensamientos en registros escritos, donde utilizan sus propias palabras para justificar y argumentar sus posturas ante dicha situación.


2. Describe con tus palabras, la transformación que se produjo en el triángulo (0), para obtener el triángulo (1), haz lo mismo y describe lo que sucedió en el triángulo (1) para obtener el triángulo (2), y del triángulo (2) al (3).

En el triángulo (0) al (1) se le dividieron los lados por la mitad y salio otro triángulo. El triángulo (1) al (2) se dividieros sus lados y salieron 3 triángulo pequeños y un triángulo grande en la mitad de los tres. El triángulo (2) al (3) de los 4 triángulos se dividieron por la mitad y salieron 13 triángulos. El triángulo (3) al (4) dividimos los 13 triángulou por la mitad y salieron 40 triángulos

En el triangulo cero se pudo producir un triangulo en el centro se pudo encontrar diviendolo en la mitad el triangulo, encontramos 3 triangulos BLANCOS y 1 NEGRO. En el 2 triangulo pudimos hallar diviendo el de la mitad en más en los lados, tendriamos 9 BLANCOS y 4 NEGROS. En 3 lo pudimos hallar de esos triangulos chiquitos en más, tendriamo 27 blancos y 13 negra

Figura 33: Exploraciones de forma escrita realizadas por los estudiantes.

Fuente. Archivo documental del investigador

De esta manera se transitó el primer momento de clases investigativas bajo la tarea propuesta, con actividades de exploración e indagación de forma individual, con lo que se obtuvo las anteriores exploraciones, fortaleciendo a la vez actitudes de autoconfianza y autonomía dentro de su proceso educativo.

Segundo momento

Para dar continuidad a este momento de la tarea, se procede a trabajar en parejas para facilitar el planteamiento de hipótesis y conjeturas levantadas por parte de los estudiantes durante su proceso exploratorio -investigativo, a continuación, se describen las actividades geométricas investigativas referentes a este momento.

Levantando conjeturas

El planteamiento de las conjeturas se presentó a partir del tercer ítem de la tarea, el cual consistía en completar una tabla allí propuesta, dentro de la cual se pedía identificar, junto con un compañero de trabajo, el número de triángulos sombreados y sin sombrear, en distintas etapas de la transformación del triángulo de Sierpinski. Debido al carácter abierto y exploratorio de la tarea y de su desarrollo, se negoció con los estudiantes y se llegó al acuerdo de representar la tabla en el tablero y diligenciarla entre toda la clase. Algunas de las conjeturas planteadas fueron las siguientes:

54. Estudiante 2 *– primero en el paso dos, a ver*
55. Profesor *– en la etapa 1*
56. Estudiante 5 *–uno y tres*
57. Estudiante 2 *– pasó uno tres blancos*
58. Estudiante 8 *– tres blancos y un negro*
59. Profesor *– etapa 2.*
60. Estudiante 8 *– eee… nueve blancos y tres negros, cuatro negros*
61. Profesor *– etapa 3.*

62. Estudiante 2 *– veintisiete blancos y trece negros*
63. Profesor *– ¿qué otra propuesta hay?*
64. Estudiante 5 *– veintiocho blancos y 1, 2, 3, 4, 5…9 negros*
65. Estudiante 2 *– yo digo que veintisiete blancos y trece negros*
66. Estudiante 3 *– veintisiete blancos y trece negros*
67. Profesor *– ¡coincide con Estudiante 2!, etapa cuatro*
68. Estudiante 2 *– setenta y un blancos y treinta y nueve negros*
69. Profesor *– ¿seguro?*
70. Estudiante 1 *– yo digo que setenta y seis blancos*
71. Estudiante 2 *– ochenta y un blancos y treinta y nueve negros*
72. Estudiante 8 *– ochenta y seis blancos*
73. Profesor *– entonces ochenta y un blancos y treinta y nueve negros ¿seguro?*
74. Estudiante 2 *– sí, es que es un patrón, porque mire que, en el tercero todos los triángulos suman e…40, es que no conté el grande, entonces cuarenta por tres, ciento veinte.*

Transcripción de grabación en audio N° 1

En el anterior fragmento de transcripción de audio se pueden identificar tres conjeturas relevantes hasta este momento, una de estas se evidencia en el dialogo entre el docente y dos de los estudiantes, líneas sesenta y uno a sesenta y seis, de la que se puede sintetizar que para la etapa tres de la transformación del triángulo de Sierpinski se generan 27 triángulos blancos y 13 negros, la cual fue aprobada por la clase de inmediato al coincidir en ella dos de sus compañeros. La segunda conjetura nace a partir de identificar el número de triángulos sombreados y sin sombrear en la etapa cuatro del triángulo de Sierpinski, esta se identifica entre las líneas sesenta y ocho y setenta y dos, en esta se vaticina que existen entre 71 y 81 triángulos blancos y 39 negros. Y la tercera conjetura se logra identificar en la línea setenta y cuatro, donde se plantea la existencia de un patrón para determinar el número de triángulos sombreados. Las anteriores hipótesis deben ser sintetizadas y aprobadas durante el tercer momento de clases investigativas, apoyados de la tabla totalmente diligenciada, lo cual facilitaría este proceso.

Continúa con tu compañero (a) y Completa la siguiente tabla:

Etapa del Triángulo de Sierpinski.	Número de triángulos sombreados.	Número de triángulos sin sombrear.
1ª	1	3 = 3^1
2ª	4	9 = 3^2
3ª	13	27 = 3^3
4ª	40	81 = 3^4
5ª	121	243 = 3^5
6ª	364	729 = 3^6

Figura 34: Momento de organización y abstracción de información investigativos

.Fuente. Archivo documental del investigador

Tercer momento

De esta manera se da paso al tercer momento del aula, en el cual los estudiantes realizan las pruebas y ensayos necesarios para afirmar o refutar las conjeturas planteadas durante el anterior momento. Estas conjeturas apuntan a la identificación de patrones, sucesiones numéricas y graficas presentes dentro del desarrollo de la tarea, llevando a los estudiantes a realizar actividades matemáticas propositivas y argumentativas.

Sistematización de conjeturas

La sistematización de las anteriores conjeturas fue realizada de manera grupal por los estudiantes, es decir, continuaron trabajando en parejas apoyados de la tabla de la figura 34, la cual permite la abstracción y análisis de información investigativos, de esta manera los alumnos procedieron a refinar, ajustar y sintetizar algunas de las hipótesis planteadas. A continuación se presentan las conjeturas planteadas finalmente, cada una propuesta por uno de los distintos grupos de trabajo.

1ª conjetura

121. Estudiante 2 *– tengo una teoría*
122. Profesor *– ¿Cuál es su teoría?*
123. Estudiante 2 *– ¿me puedo levantar?*
124. Profesor *– sí, claro*
125. Estudiante 2 *– profe, estas de acá se van multiplicando por tres, en cambio, estas para que del siguiente entonces este si multiplicamos por este más uno*

Transcripción de grabación en audio N° 1

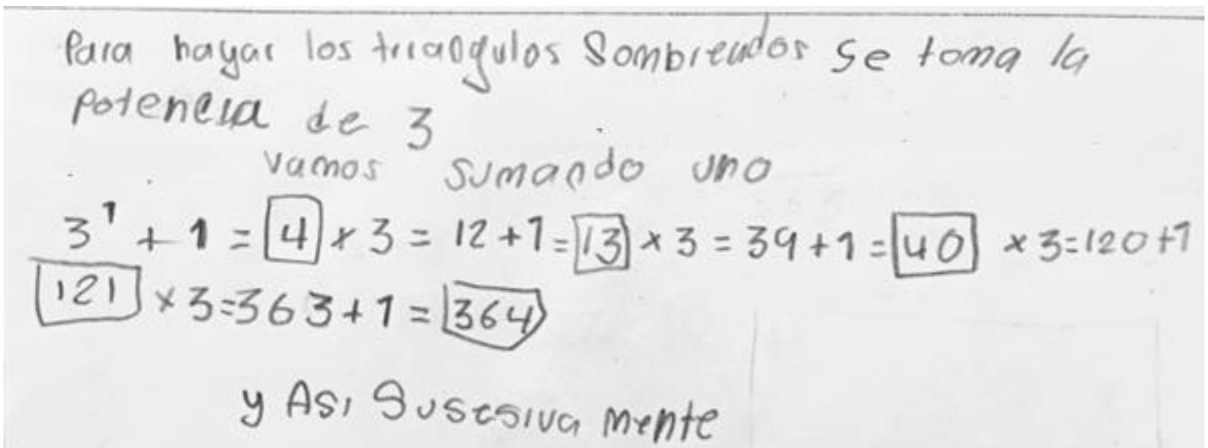


Figura 35: Momento tres, conjetura refinada por el Estudiante 2.

Fuente. Archivo documental del investigador.

De esta manera se sintetizo y aprobó la hipótesis planteada de cómo determinar el número de triángulos sombreados en las distintas etapas del triángulo de Sierpinski, mostrando a su vez la transformación y conversión que da el estudiante de un sistema de lenguaje común a un sistema de representación aritmético, dando muestras de la comprensión del objeto geométrico al mostrar coordinación en al menos dos de sus distintos registros de representación semiótica (Duval, 1999).

2ª conjetura

139. Estudiante 6 *– profe, acá es la tabla del 3, en la de sin sombrear*
140. Estudiante 1 *– es potencia*
141. Estudiante 3 *– potencia del tres*
142. Profesor *– potencia del tres ¿seguros?*
143. Estudiante 3 *– si*
144. Profesor *– ¿Cuánto es 3 a la 1?*

145. Estudiante 8 *– tres*
146. Profesor *– ¿Cuánto es 3 a la 2?*
147. Estudiante 1 *– tres a la dos, nueve, entonces es tres a la n*
148. Profesor *– ¿Cuánto es 3 a la 3?*
149. Estudiante 2 *– el que sigue, nueve por tres*
150. Estudiante 3 *– veintisiete*
151. Profesor *– ¿Cuánto es 3 a la 4?*
152. Estudiante 6 *– ochenta y uno*
153. Profesor *– ¿Cuánto es 3 a la 5?*
154. Estudiante 2 *– entonces 81 por 3*
155. Estudiante 1 *– entonces si profe, tres a la n*

Transcripción de grabación en audio N° 1

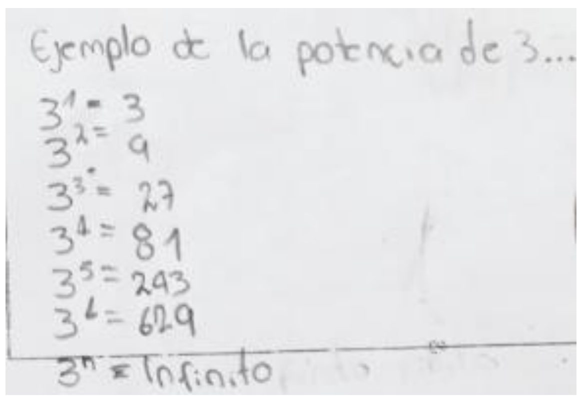


Figura 36: Conjetura sistematizada por el Estudiante 1.

Fuente. Archivo documental del investigador.

De esta manera queda establecido, por parte de los estudiantes, que para determinar el número de triángulos sin sombrear dentro del triángulo de Sierpinski, se debe atender al patrón generado por las potencias del número tres como base. Lo anterior también evidencia que los estudiantes alcanzan niveles cognitivos de operación formal, pues están en la capacidad de realizar operaciones mentales e identificar objetos geométricos mediante axiomas y definiciones matemáticas.

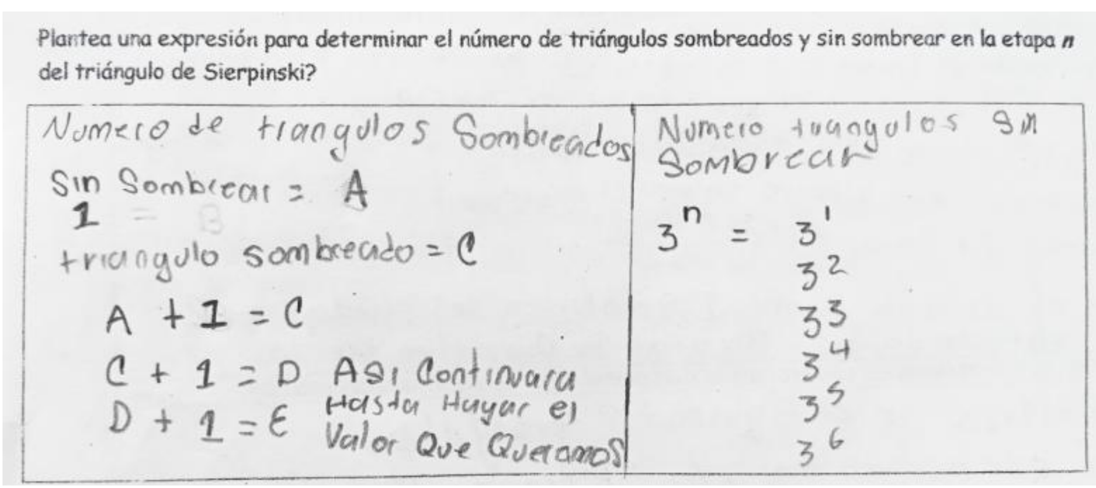
Cierre de la clase

Cuarto momento

Dentro de esta fase de cierre del aula, el cuarto momento se caracterizó por llevar a cabo actividades de negociación de significados, argumentaciones y justificaciones realizadas por los estudiantes, se formalizó y generalizó, lo explorado e investigado dentro del aula. De igual manera el docente, dentro de este momento de la clase, es ese vínculo entre el estudiante y el nuevo conocimiento.

Presentación y validación de resultados finales

La presentación de los resultados se realizó por parte de los estudiantes, utilizando registros algebraicos, aritméticos y de lenguaje común, lo que también da muestras de las características y posibilidades que se presentan al implementar la estrategia de clases investigativas dentro de la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Los registros muestran de la argumentación y demostración de los resultados hallados durante la investigación son las siguientes figuras:



Plantea una expresión para determinar el número de triángulos sombreados y sin sombrear en la etapa *n* del triángulo de Sierpinski?

Numero de triangulos Sombreados Sin Sombrear = A 1 triangulo sombreado = C A + 1 = C C + 1 = D Asi Continuara D + 1 = E Hasta Hayar el Valor Que Queramos	Numero triangulos Sin Sombrear $3^n = 3^1$ 3^2 3^3 3^4 3^5 3^6

Figura 37: Argumentación de lo explorado por el grupo de trabajo de Estudiante 2 y Estudiante 5.

Fuente. Archivo documental del investigador.

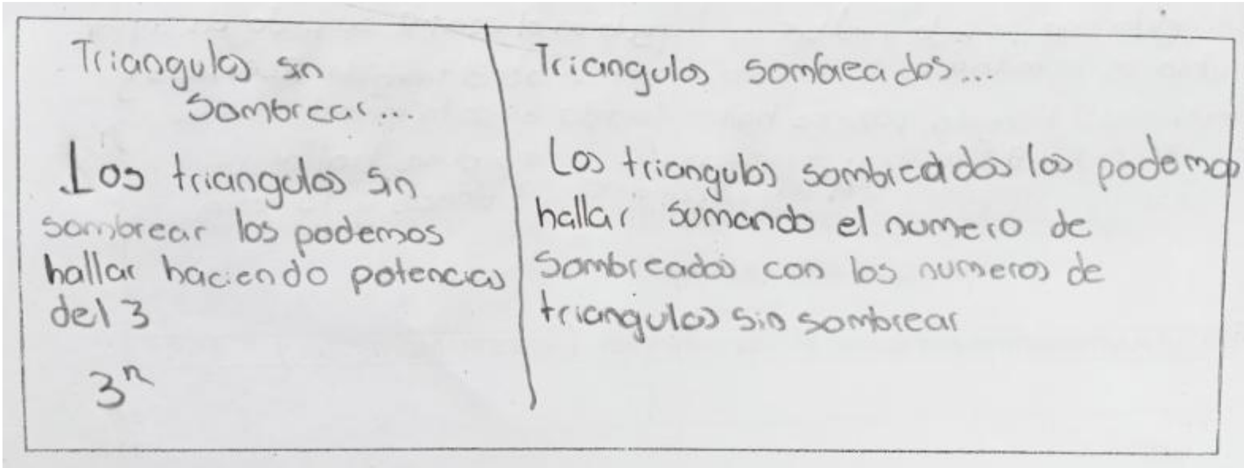


Figura 38: Argumentación y demostración de lo investigado por el grupo de trabajo de Estudiante 1 y Estudiante 3.

Fuente. Archivo documental del investigador.

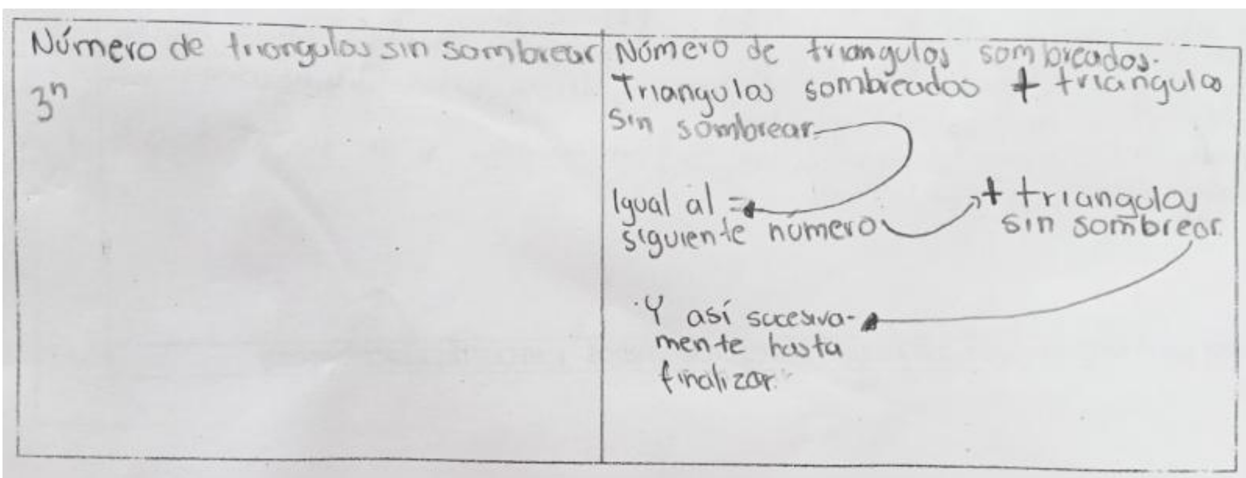


Figura 39: Argumentación y demostración de lo investigado por el grupo de trabajo de Estudiante 8 y Estudiante 6.

Fuente. Archivo documental del investigador.

De este modo se concluye la tercera tarea exploratorio-investigativa, ofreciendo una propuesta de la noción, propiedades y características del objeto sucesión, la cual fue diseñada y propuestas por los estudiantes. Estas aproximaciones conceptuales se generaron por medio de la exploración, indagación, análisis, investigación y negociación de significados realizados por los alumnos durante el desarrollo de la tarea. Se evidencia la variedad de recursos utilizados por los estudiantes para expresar sus ideas, argumentos y justificaciones, lo cual les hace sentir mucho más incluidos dentro de su proceso de educación.

Capítulo V. Consideraciones finales

La presente investigación planteó como estrategia metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría diversas tareas de corte exploratorio-investigativo, buscando caracterizar el proceso de desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes de educación básica primaria. Se pretendió promover y motivar la actitud positiva de los educandos hacia las ciencias geométricas, de manera que mantengan viva la curiosidad, con el fin de generar actitudes de indagación sobre la aplicación de conceptos matemáticos a otros diversos contextos (Fensham, 2004).

Bajo esta perspectiva, el presente estudio ha logrado inferir que el desarrollo del pensamiento geométrico se caracteriza respecto a los momentos de clases investigativas, por las exploraciones, indagaciones, planteamiento de hipótesis, refinación de conjeturas, argumentaciones y justificaciones realizadas por los estudiantes, es por esto que, entre las actividades que se propusieron en estas tareas exploratorio -investigativas, se encontraron la elaboración y construcción de distintos tipos de sistemas de representación, los cuales caracterizaron y favorecieron el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Del mismo modo, estas tareas fueron diseñadas para que, dentro de los cuatro momentos de desarrollo de las clases se promueva la realización de diversos análisis de manera individual y grupal. El trabajo colaborativo favoreció la aprensión de elementos conceptuales de algunas figuras planas, lo que generó en los estudiantes la movilización de conceptos previos a cerca de éstas.

El desarrollo del pensamiento geométrico también se analizó desde distintos tipos de representación semiótica. La caracterización de estas tareas, admitió expresar las ideas y pensamientos de los estudiantes mediante diferentes sistemas de representación, entre los que se destacaron registros propios del lenguaje común, gráfico, aritmético y algebraico, lo cual, de acuerdo con Duval (1999) precisa la adquisición conceptual de un objeto geométrico, pues esta se caracteriza por el uso de más de un sistema de representación. Así mismo, el tratamiento que se dio a los objetos geométricos facilitó ampliar el léxico geométrico de los estudiantes, lo que se evidencia mediante los registros gráficos, escritos y orales realizados durante el desarrollo de las tareas, donde igualmente se generaron espacios de comunicación y negociación de significados entre los alumnos.

Al mismo tiempo, este análisis también se realizó bajo los niveles de cognición geométrica, en este sentido, el diseño de las tareas planteadas se caracterizó por permitir a los estudiantes realizar visualizaciones globales, reconociendo los objetos geométricos por su forma o apariencia, el reconocimiento de estas figuras permitió la posterior abstracción, reconocimiento, estudio y análisis de sus propiedades, junto con las relaciones existentes entre estas, situándolo a los alumnos en un nivel cognitivo de percepción clasificatoria, destacando la secuencialidad en los procesos cognitivos, para acceder de un nivel a otro superior, se debe haber dominado el nivel anterior (Van Hiele, 1999), otra de las características propias del proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

En este sentido, las tareas propuestas desarrollan habilidades visuales, de coordinación, recolección e interpretación de información e información, además de favorecer procesos de comunicación, escucha, potencializar el desarrollo de distintos sistemas de representación, permitiendo estimular actitudes de razonamiento lógico, llevándolos a proponer definiciones de objetos geométricos a manera de argumentación de sus investigaciones. En consecuencia, estas tareas generan oportunidades para que los alumnos aprendan a observar, manifestar sus ideas y justificaciones, ampliando así sus puntos de vista frente a las matemáticas especialmente a la geometría.

Resumiendo lo planteado, en el presente estudio se logró diseñar, caracterizar y proponer tareas de carácter exploratorio investigativo, facilitando así la cualificación del proceso de desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes de grado quinto de educación básica primaria. Por medio de estas tareas, se puede decir, que este proceso se caracteriza por avanzar de manera colaborativa hacia la construcción de conocimiento matemático, por medio de la exploración, la organización de información, e información proveniente de distintos sistemas semióticos, el planteamiento de hipótesis y conjeturas, a través de distintos tipos de representaciones geométricas, la afirmación y validación de éstas mediante recursos gráficos, algebraicos, aritméticos, analíticos y argumentativos, con lo cual se consigue la construcción del nuevo conocimiento, y a su vez se generan avances significativos dentro de los niveles de cognición geométrica de los estudiantes.

En definitiva, se resalta la adaptabilidad de las clases investigativas en la dinamización de los ambientes de enseñanza y aprendizaje de la geometría, mediante la utilización y manipulación de objetos y representaciones concretas, potencializando y facilitando procesos de construcción, visualización, abstracción y formalización dentro del desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes.

El aprendizaje y enseñanza de la geometría a partir de esta investigación señaló la importancia de partir de lo concreto hasta llegar a lo abstracto, es por esto que dentro del desarrollo de estas tareas se permitió al estudiante la utilización de material manipulable, recursos didácticos e instrumentos de medición y dibujo como escuadras, reglas, compas, lápices, colores, entre otros. De esta manera se llevó a cabo un proceso metodológico que permitió construir objetos matemáticos a través de su construcción, propiedades y características, que sirvieron como base para identificarlos, definirlos y clasificarlos. El desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes de educación básica primaria, se caracteriza por estar directamente ligado a otro tipo de pensamientos como el numérico y el algebraico, es decir, no es un pensamiento aislado, sino que trabaja conjunto a estos otros pensamientos, por lo cual son convenientes este tipo de tareas exploratorio-investigativas, que permitan trabajar de manera transversal diversos pensamientos matemáticos.

Por último, se señala que desde esta propuesta metodológica es posible situarse como docente en constante reflexión y problematización de su papel en el aula de clase. En muchas ocasiones se identificó la participación del docente con tendencia a conducir a los estudiantes a rutas ya proyectadas; sin embargo, con el paso de las actividades fue posible cada vez más alejarse de esa posición heredada del conductismo y dar paso a sobrellevar lo inesperado y la incertidumbre que ocasiona favorecer la investigación y exploración de los estudiantes en tareas abiertas.

En consecuencia, se reconoce que bajo las clases investigativas como estrategia metodológica el papel del docente es de orientador, es quien guía, valida el progreso de sus alumnos y ayuda a sintetizar las ideas de éstos, quien propone nuevas actividades orientadoras en pro del avance de la tarea, además ha de estar en constante cuestionamiento con sus estudiantes, motivando así la actitud investigadora de todos los involucrados en el proceso de desarrollo de tareas exploratorio-investigativas.

Referentes Bibliográficos.

Aguayo, C., Flores, P., & Moreno, A. (2018). Concepto de objetivo de una tarea matemática de futuros maestros. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 32(62), 990-1011. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a12

Albert, M. (2007). *La investigación educativa: claves teóricas*. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). Editorial Mc Graw Hill, 265 pp. Obtenido el 8 de octubre de 2019 de https://www.academia.edu/27287685/La_Investigaci%C3%B3n_Educativa_Claves_Te%C3%B3ricas_-_Albert_G.

Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Grao.

Alfonso, C. (2004). Familiarización de los estudiantes con la actividad científica investigadora: Método dinámico para caracterizar el movimiento de traslación de un cuerpo. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 3(1), 1-13.

Aline, S. & Coelho, M. (2015). *Aulas investigativas en la construcción de conceptos de matemática: Un estudio a partir de la teoría de Piaget.* Psicología USP, 26(2), 240-248.

Alsina, C. (2008). *"Geometría y realidad"*. Universidad de Cataluña. Buenos Aires. OMA

Amestoy, M. (2002). La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades de pensamiento. *Revista electrónica de investigación educativa*, 4(1), 01-32. Recuperado el 23 de septiembre de 2019, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1607-40412002000100010&lng=es&tlng=es.

Arciniegas, O. & Marcillo, G. (2009). *Estudio sobre clasificación de cuadriláteros en textos escolares, en cuadernos de trabajo y las concepciones acerca de la noción de cuadriláteros en estudiantes de educación básica*. Universidad de Nariño. Pasto. Recuperado de http://sired.udenar.edu.co/286/1/79891.pdf el 17 de septiembre de 2019.

Ardila, A. (2002). *El lenguaje matemático y el usual, como mediador de la comunicación.* Acta Latinoamericana de Matemática, volumen. (15), pp. 1169-1173.

Assis, A. (2012). *A produção de significados matemáticos em um contexto de aulas exploratório-investigativas*. Belo Horizonte.

Ávila, A. (2006), *Transformaciones y costumbres en la Matemática escolar*.

Báez, R. e Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL. “El Mácaro”. *Revista Enseñanza de la Matemática*, 12 al 16(número extraordinario), 67-87.

Balacheff, N. (1987). “*El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica”*, Recherches en Didactique des Mathematiques, vol. 8, núm. 3, pp. 267-312.

Bandura, A. (1987). *Pensamiento y acción: fundamentos sociales*. Barcelona-España: Martínez Roca.

Barrantes, M. (2004). *Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para Maestro sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje*. *(Tesis doctoral).* Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas, Facultad de Educación, Universidad de Extremadura. España.

Barrantes, M., & Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Revista de educación*, ISSN 0213-9527, vol. 27. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2885384 el 18 de diciembre de 2018

Bishop, A. (1999). *Enculturación Matemática*. Barcelona: Paidós.

Blanco, L., Cardenas, J., Gómez, R. & Caballero, A. (2015). Aprender a enseñar geometría en primaria. Una experiencia en formación inicial de maestros. *Experiencia sobre la introducción de los cuadriláteros*. ISSN 1135-870-X. Universidad Extremadura.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: um projecto curricular no 8º ano*. Lisboa: APM. Disponible en http://ia.fc.ul.pt

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Editorial Zorzal. Traducción de Fregona, D.

Burger, W., & Shaughnessy, J. (1986). *Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry*. Journal for Research in Mathematics Education, 17(1), 31-48.

Calleja, R. (2010). *Un nuevo modelo para el siglo XXI.* Comunidad Escolar, periódico digital de información educativa, Número 880, Digital 251, 27 de Octubre. Recuperado el 9 de agosto de 2019, de http: // comunidadescolar.pntic.mec.es/880/report1.html.

Campoy, T., & Gomes, E. (2015). Manual básico para la realización de tesinas, tesis y trabajos de investigación. *Capítulo 10, Técnicas e instrumentos cualitativos de recogida de información.* Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/ el 05 de marzo de 2019.

Cantoral, R. & Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y pensamiento matemático.* México: Prentice Hall. Recuperado de https://www.matedu.cinvestav.mx/rcantoral/publica.php

Cardona, M. (2002). *Introducción a los métodos de investigación en educación*. Madrid, España: EOS.

Casas, L. & Sánchez, C., (1998). *Juegos y materiales manipulables como dinamizadores del aprendizaje en Matemáticas.* Bilbao: Centro de publicaciones. Secretaria General Técnica.

Castañeda, D. & Rubiano, S. (2015). *La tarea del área de matemáticas en el aprendizaje de los estudiantes de grado undécimo del instituto técnico santo tomas de Aquino del municipio de Duitama (Tesis maestría)*. Universidad Santo Tomas de Aquino, Tunja.

Castillo, K. (2017). *Aulas investigativas en la formación del pensamiento contable*. *(Tesis de maestría).* Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja. http://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/247

Castillo, M. (2004).*¿Qué es el pensamiento para los niños?*. *Investigación y Postgrado*, *19*(2), 241-259. Recuperado en 15 de mayo de 2020, de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-00872004000200012&lng=es&tlng=es.

Christiansen, I. (1999). Reflexiones críticas sobre modelos matemáticos en la clase: ¿sueño o realidad? *Revista EMA*, v. 5, n. 1, p. 29-50.

Cisterna, F. (2005). *Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa*. Theoría, 14(1), 67-71.

Coll, C. (1995). *Psicología y currículum.* Barcelona: Paidós.

Corrales, M. (2010). *Métodos varios de recolección de información cualitativa*. En Metodologías de Investigación Cualitativa [Investigación etnográfica] del Portal Investiga.uned.ac.cr. San José, Costa Rica: Universidad Estatal a Distancia.

Deaño, M. (1993). *Los conocimientos lógico-matemáticos en la Escuela Infantil: desarrollo, diseño y observación.* Madrid: CEPE.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (1994). *Introduction: entering the Field of Qualiative Research*. Ondres, 1-18. Obtenido el 22 de enero de 2019 de https://www.redalyc.org/pdf/2010/201017309007.pdf

De Zubiria, J. (2006). *Los Modelos Pedagógicos. Hacia una Pedagogía Dialogante*. Editorial Magisterio. Bogotá

Díaz, F. & Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. México: McGraw-Hill. Recuperado el 30 de Marzo de 2019 de: http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512008000100008.

Doyle, W. (1998). *Work in mathematics classes: The context of student's thinking during instruction*. Educational Psychologist, 23 (2), pp. 167-180.

Duval, R. (1999). *Representation, vision and visualisation: cognitive functions in mathematical thinking*. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME, Cuernavaca, México (pp. 3-26). Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications-The Ohio State University. Obtenido de https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466379.pdf el 15 de marzo de 2019.

Fensham, P. (2004). *Defining an identity: The evolution of science education as a field of research, Dordrecht*: Kluwer Academic Publishers.

Fernandez, E. (2018). La geometría para la vida y su enseñanza. *Revista de investigación en administración e ingeniería*. Vol.6, Núm. 1. (2018), Universidad de Santander, UDES Campus Cúcuta ISSN: 2346-030X. Recuperado el 12 de Marzo de 2019 de: http://revistas.udes.edu.co/site/index.php/aibi

Fiorentini, D. & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.* Campinas: Autores Associados. Recuperado el 27 de Mayo de 2020 de https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p138

Flórez, R. (1994). *Hacia una pedagogía del conocimiento*. Bogotá: McGraw-Hill, p. 60.

Fonseca, H., Brunheira, L. & Ponte, J. (1999) *As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática*. Actas do ProfMat 99. Lisboa: APM, 1999.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1995). *The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*. Journal for Research in Mathematics Education Monograph Number 3. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Galeano, M. (2004). *Diseño de proyectos de investigación cualitativa*. Medellín: Fondo editorial universidad EAFIT, 40 p.

Gamboa, A. & Ballestero A. (2010). *La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes*. *Revista Electrónica Educare*, *XIV*(2),125-142.[fecha de Consulta 13 de Mayo de 2020]. ISSN: Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=1941/194115606010

Garcia, M. (2006). Didactica de la Geometria Euclidiana *(Conceptos básicos para el desarrollo del pensamiento espacial).* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio. Recuperado de http://bdigital.unal.edu.co/5360/1/1022334.2016.pdf el 26 de mayo de 2019

Godino, J., Bataner, C. & Font, V. (2003). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Acta Scientiae. Revista de Ensino de Cienciase mMatemática, 10, 7-37

Goetz, J. P. & LeCompte, M. D. (1998). *Etnografía y Diseño Cualitativo en Investigación Educativa*. España: Morata. Linstone, H. y Turoff, M.

Goncalves, R. (2006). Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en geometría. *Revista de Ciencias de la Educación*, 27, 84-98. Universidad de Carabobo, Venezuela.

Guillén, G. (2004). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática*. Educación Matemática, 16(3), 103-125.

Gutiérrez, A. (2006). *La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría*. En Flores, P.; Ruiz, F.; De la Fuente, M. (eds.), Geometría para el siglo XXI (pp. 13-58). Badajoz, España: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). *On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning.* Focus on Learning Problems in Mathematics, 20(2, 3), 27-46.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (2012). *Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria.* Recuperado de http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n32/n32a05.pdf el 22 de noviembre 2019.

Hernández, V. & Villalba, M. (2001). P*erspectivas en la Enseñanza de la geometría para el siglo XXI*. Documento de discusión para estudio ICMI. PMME-UNISON. Traducción del documento original. Recuperado el 18 de octubre de 2018 en http://www.euclides.org/menu/ articles/article2.htm

Hernández, S., Fernández, C. & Baptista, L. (2013). *Metodología de la investigación*. 2ª Ed. México D.F., McGraw-Hill, 1998.

Huffmann, D. (2005). *¿Qué es la ciencia? Antología del curso FiloEstudiante 8 de la ciencia.* Doctorado en Ciencias Naturales para el Desarrollo. Programa Inter-universitario: ITCR, UNA y UNED de Costa Rica; UNAM y UACh de México; UNAN de Nicaragua. Doctor de la Universidad Autónoma de Chapingo. Documento inédito. Chapingo, México.

Hurtado, J. (2010). *Metodología de la investigación.* Guía para la comprensión holística de la ciencia. Recuperado de https://dariososafoula.files.wordpress.com/2017/01/hurtado-de-barrera-metodologicc81a-de-la-investigaciocc81 el 03 de abril de 2019

Ibáñez, N. (2002). *Las emociones en el aula. Estudios pedagógicos (Valdivia)*, (28), 31-45. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052002000100002

Icfes. (2018). *Informe Nacional Resultados examen saber 3º, 4º y 5º. Recupera*do de icfes interactivo:
http://int.search.myway.com/search/GGmain.jhtml?p2=%5EBYD%5Exdm301%5ETTAB02%5Eco&ptb=F569CB43-7D79-4DD1-B71677C3C00F710&n=C08CFEF&cn=CO&ln=es&si=AID15-Iris-gs-fym-earth-co&tpr=hpsbsug&trs=wtt&brwsid=546d2dc3-06dd-475f-9962-a81f2c702df8&st=tab&searchfor=

Irigoyen, J., Jiménez, M., & Acuña, K. (2011). Competencias y educación superior. *Revista mexicana de investigación educativa*, *16*(48), 243-266. Recuperado en 11 de mayo de 2020, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-66662011000100011&lng=es&tlng=es.

Jaime, A., Chapa, F. & Gutiérrez, A. (1992). *Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B.* En: Épsilon nº 23. Valencia, España.

Recuperado el 7 de agosto de 2019 de, Http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/tetospdf/JaiChaGut92.pdf.

Jones, K. (2002). *Geometry working group*. Informe del encuentro en King's College, University ofLondon, febrero 28, 1998. Obtenido el 6 de septiembre de 2019, del sitio web de la British Society for Research into Learning Mathematics: http://www.bsrlm.org.uk.

Jiménez, M. E., Jiménez, M. G. & Jiménez, M. J. (2014). *Estrategia Didáctica Para Desarrollar La competencia "Comunicación y Representación" En Matemática*. Escenarios. 12(1), 17-33.

Kaplún, M (2002). *Una pedagogía de la comunicación*. La Habana: Editorial Caminos.

Lamonato, M. & Brancaglion, C. (2012) *Aprendizagens de professoras da educação infantil: possibilidades a partir da exploração-investigação em geometria*. Ciências & Cognição – Revista Interdisciplinar de Estudos da Cognição, v. 14, n. 02, p.

Linares, A. (2009). *Desarrollo cognitivo: las teorías de Piaget y Vygotsky.* Universidad Autónoma de Barcelona. Recuperado el 30 de mayo de 2020 de http://www.paidopsiquiatria.cat/files/teorias_desarrollo_cognitivo.pdf

Lopez, J. (2009). La importancia de los conocimientos previos para el aprendizaje de nuevos contenidos. *Revista digital Innovación y experiencias.* Recuperado EL 15 de marzo de 2020 de https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_16/JOSE%20ANTONIO_LOPEZ_1.pdf el.

López, O. & García, S. (2008). *La Enseñanza de la Geometría.* Consultado 6 de noviembre de 2019 desde http://www.inee.edu.mx/mape/themes/TemaInee/Documentos/mapes/geometriacompletoa.pdf

Mason, J. (1996). *Resolução de problemas matemáticos no Reino Unido: Problemas abiertos, fechados, e exploratorios*. In P. Abrantes, L. Cunha Leal e J. P. Ponte (Orgs), Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados (pp. 73-88). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e Associação de Professores de Matemática.

May, I. (2015). George Polya (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas. 215 pp. Entreciencias: Diálogos en la Sociedad del Conocimiento, 3(8), 419-420. Recuperado el 12 de Julio de 2020. ISSN. Disponible en https://www.redalyc.org/articulo.oa?id

Mayer, R. (1983). *Thinking, problem solving and cognition*. Nueva York: W. H. Freeman and Co.

Méndez, L. (1996). *Análisis de los conocimientos geométricos preuniversitarios y su influencia en la formación de los alumnos de las escuelas técnicas*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid. Recuperado de: http://oa.upm.es/770/1/04199602 en Abril de 2019.

Ministerio de Educación Nacional, MEN. (1994). Obtenido el 18 de Noviembre de 2018 de, http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-81439.html.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares.* Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006). "*Lineamientos Curriculares*".

Miranda, M. & Pereira, M. (2014). *Atividades de Investigação Matemática*. Itapina. Molina, A. (2007). Aulas investigativas na educação de jovens e adultos (eja): o movimento de mobilizar-se e. Itatiba.

Molina, A. (2007). *Aulas investigativas na educação de jovens e adultos (eja): o movimento de mobilizar-se e*. Itatiba.

Monje, C. (2011). *Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa.* Guía Didáctica. Universidad Surcolombiana, Neiva, Colombia.

Mora, D. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Pedagogía*, *24*(70), 181-272. Recuperado en 12 de junio de 2019, de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-97922003000200002&lng=es&tlng=es.

Moreno, C (2012). *La construcción del conocimiento: un nuevo enfoque de la educación* actual. Sophia, Colección de FiloEstudiante 8 de la Educación, (13),251-267. Recuperado el 13 de mayo de 2020. ISSN: 1390-3861. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=4418/441846102011

Moreno, G., Asmad, U., Cruz,G. & Cuglievan, G., (2008). Concepciones sobre la enseñanza de matemática en docentes de primaria de escuelas estatales. *Revista de Psicología* Vol. XXVI (2), 2008 (ISSN 0254-9247).

Niño, Y. (2019). *Modelación matemática en escenarios exploratorio-investigativos*. *(Tesis de Maestría*). Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja. http://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/2985

Núñez, J. (2000). *Lo que la educación científica no debería olvidar: Rigor, objetividad y responsabilidad social.* Recuperado el 16 de marzo de 2019, de http://www.campus-oei.org/salactsi/nunez05.htm.

Oliveira, H., Segurado, M. & Ponte, J. (1996). *Explorar, investigar e discutir na aula de matemática*. In A. Roque & M. J. Lagarto (Eds.), *Actas do ProfMat 98* (pp. 207-213) Lisboa: APM.

Ortiz, A (2005). *Historia de la matemática* . Lima, Perú. Primera edición. Recuperado el 26 de febrero de 2019, de

Pecharromán, C. (2014). *El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica.* Educación matemática, 26(2), 111-133.

Penalva, M. (2011). *Demanda cognitiva de una tarea*. Recuperado el 21 de Marzo de 2019 de https://core.ac.uk/download/pdf/83544049.pdf

Penalva, C. & Torregrosa, G. (2001). *Representación y aprendizaje de las matemáticas*. En E. Tonda y A. Mula (Eds.), *Scripta in Memoria* (pp. 649-658). Alicante, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Alicante.

Pereira, F. (2006). *Fractais e Aulas Exploratório-Investigativas: um estudo do desenvolvimento do pensamento e linguagem algébricos na escola básica*. Histórias e Investigações de / em Aulas de Matemática. Campinas: Editora Alínea, 2006, p. 207-226.

Perero, M. (1994). *Historia e Historias de Matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamericana.

Pérez, H., García, S. & García, M. (2004). Fichero de Actividades. México. 2ª ed. ISBN 970-18-4428-9.

Perussi, R. (2006). T*arefa Investigativas de Matemática: uma análise de três alunas de 8ª Série do ensino fundamental*. 1-128. Curitiba: Universidade Federal do Parná. Obtenido de file:///C:/Users/Aprendiz/Downloads/M06_camargo.pdf, el 14 de Abril de 2019.

Petronzelli, C. (2003). *Resolução de problemas e investigações: contribuições para o processo de ensino/aprendizagem*. In: VII Seminário de pesquisa: pesquisa e promoção humana. Curitiba-PR: Companhia de editorial científica, 2003. p.15-16.

Piaget, J. (1990). *The Child's Conception of Geometry*, New York. Estados Unidos: Norton and Company.

Planas, N. (2002). Enseñar matemáticas dando menos cosas por supuestas. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, n. 30, abril, 2002, pp. 114-124. Barcelona: Grao Colombia. (2009).Informe Saber 5º y 9º 2009. Resultados Nacionales. Resumen Ejecutivo. Pag 14.

Ponte, J. (Marzo de 2010). Explorar e Investigar em Matemática:Uma Actividade Fundamental no Ensino e na Aprendizagem. *Revista iberoamericana de educación matemática* (21), 13-30. Obtenido de http://hdl.handle.net/10451/3043 el 9 de Febrero de 2019.

Ponte, J. (2003). *Investigações matemáticas em Portugal. Investigar em educação*, 2, 93-169, 2003.

Ponte, J. (2003). *Investigar, ensinar e aprender. In: ACTAS do ROFMAT*. Lisboa: APM,. p. 25-39, 2003.

Ponte, J. (2004). *Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos.* En J. Giménez, L. Santos, & J. Ponte, *La actividad matemática en el aula* (págs. 25-34). Barcelona: Graó.

Ponte, J. (2006). *Estudos de caso em educação matemática.* Bolema, 25, 105-132.

Ponte, J., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemáticas na sala de aula. Coleção Tendências em Educação Matemática* – Belo Horizonte: Autêntica,

Ponte, J., Oliveira, H., Brunheira, L., & Varandas, J. (1998). *O trabalho do professor numa aula de invastigaçcao matemáticas*. Quadrante, 2(7), 41-70.

Portillo, L. (2010). *Cultura India – Hindu*. Recuperado el 5 de Marzo de 2019 de: http://www.hi

Pozo, J. & Gómez, M. (1998). *Aprender y enseñar ciencia: Del conocimiento cotidiano al conocimiento científico*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Radillo, M. & Varela, S. (2007). *Obstáculos en el aprendizaje de la geometría euclidiana, relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático.*

Rico, L. (1997). *Consideraciones sobre el Currículo de Matemáticas para Educación Secundaria.* En L. Rico (Coord.), La educación matemática en la enseñanza secundaria.

Riscanevo, L. (2019). *Una perspectiva investigativa en la formación de profesores de matemáticas,* Tunja: Editorial Uptc, Colección Tesis Doctorales *uptc*rudecolombia.Tomo No. 14, Facultad de Ciencias de la Educación, 2019.

Rocha, C. & Ponte, J., (2006). *Uma experiência com actividades de investigação na aula de Matemática: Competências matemáticas, atitudes e concepções de dois alunos do 7.º ano de escolaridade (Tese de mestrado).* Universidade do Porto). Lisboa: APM. (Disponible, en http://ia.fc.ul.pt).

Rodríguez, A. (2010). *Evolución de la educación*. Recuperado el 01 de Marzo de 2020 de https://dialnet

Rodríguez, A. & Sanz, T. (2000). *La escuela nueva.* Tendencias pedagógicas en la realidad educativa actual, 8-15. Bolivia: Editorial Universitaria Universidad Juan Misael Saracho.

Rojas, F., & Solar, H. (2011). *Organización de tareas matemáticas según niveles de complejidad cognitiva: una mirada desde las competencias matemáticas,* ponencia presentada en el I congreso Internacional de Enseñanza de las ciencias y la Matemática y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática, Buenos Aires, Argentina, Tandil.

Samper, C., Camargo, C. & Leguizamón (2003). *Cómo promover el razonamiento en el aula por medio de la Geometría*, Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Sánchez, J., & Morales, C. (2013). Desarrollando competencias de investigación a través de metodologías activas en un entorno B-learning. *Revista de formación e innovación educativa universitaria*, Vol 4, 40-54, recuperado el 28 de octubre de 2019 de http://webs.uvigo.es/refiedu/Refiedu/vol4_1.pdf

Sánchez, M. (2002). La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades de pensamiento. *Revista Electrónica de Investigación Educativa* 4, (1). Consultado el 21 de Mayo de 2020 en: http://redie.uabc.mx/vol4no1/contenido-amestoy.html

Sangrá, A. & Steve, W. (2013). *"Nuevas formas de aprendizaje informales: ¿O estamos formalizando lo informal?"*, Universities and Knowledge Society Journal, vol. 10, pp. 107-115, recuperado el 12 de Agosto de 2019 de http://journals.uoc.edu/index.php/rusc/article/viewFile/v10n1-sangra-wheeler/v10n1-sangra-wheeler-en

Santos, D. (2011). *Investigações Matemáticas.* Educação Matemática da UFOP

Silva, A. & Costa, M. (2015). *Aulas Investigativas en la Construcción de Conceptos de Matemáticas: Un estudio a partir de la teoría de Piaget*. Psicología USP, 26(2), 240-248..

Skovsmose, O. (2000). *Cenários de investigação. Bolema- Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro (SP) n.14, p. 66-91, 2000.

Smith, M. & Stein, M. (1998). *Selecting and creating mathematical tasks:* from research to practise. Mathematics Teaching in the Middle School, *3*(5), 344-350

Sole, I. y Coll, C. (1995). *El constructivismo en el aula*. Barcelona: Editorial Grao Colombia.

Stillman, G., Blum, W. y Biembengut, M. (2004). *Encuentro nacional de educación matemática*. V-8

Sullivan, P., Clarke, D. & Clarke, B. (2013). *Teaching with Tasks for Effective Mathematics Learning*. New York, NY: Springer, 2013.

Torregrosa, G. & Quesada, H. (2007). *Coordinación de procesos cognitivos en geometría.* Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Facultad de Educación.Universidad de Alicante, España. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2007) 10(2): 275-300

Tovar, L. (2016). D*esarrollo del pensamiento geométrico con metodologías activas*. Universidad Nacional De Colombia sede Manizales facultad de ciencias exactas y naturales.

Tünnermann, C. (2011). *El constructivismo y el aprendizaje de los estudiantes*. *Universidades* [en linea]. 2011, (48), 21-32[fecha de Consulta 06 de Julio de 2019]. ISSN: 0041-8935. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=37319199005

Turégano, P. (2006). *Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula.* Albacete, España 2006. Pp. 35-48.

Tusón, A. (2002). El análisis de la conversación: entre la estructura y el sentido. *Estudios de sociolingüística*, *3*(1), 133-153.

Van Hiele, P. M. (1999). *Developing geometric thinking through activities that begin with play*. Teaching Children Mathematics, 6, 310-316.

Vargas G & Gamboa (2012). “El Modelo De Van Hiele y La Enseñanza de la Geometría” *uniciencia* Vol. 27, No. 1, [74-94]. Costa Rica Escuela de Matemática, Universidad Nacional (UNA) ISSN 1101 – 0275. Obtenido de: https://documat.unirioja.es/descarga/articulo/4945319

Vasco, C. (1992). *Geometría activa y geometría de las transformaciones* U. Nacional. Recuperado el 4 de febrero de 2020 de, https://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/5706/4717

Vygotsky (1995). *Pensamiento y lenguaje*. España: Paidós

Vinner, S. (1991). *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics.* En D. Tall (Ed.): Advanced Mathematical Thinking.

Anexos

Anexo 1

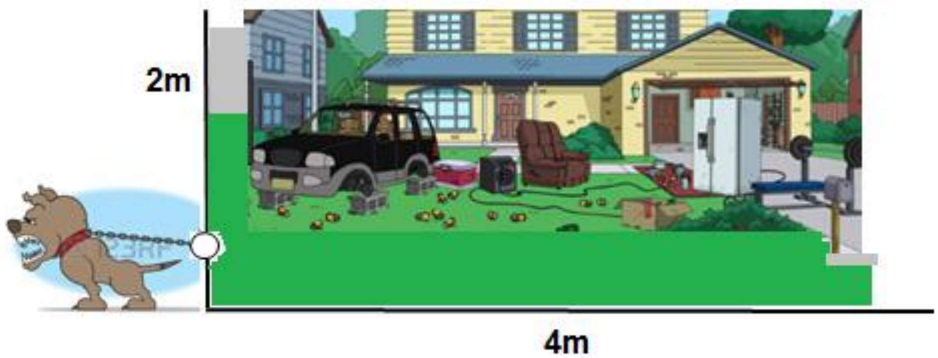
TAREA EXPLORATORIO-INVESTIGATIVA EN GEOMÉTRIA

EL PERRO GUARDIAN

ESTUDIANTE:

FECHA:

Toby es un perro que está atado a una cadena, unida a una argolla que le permite desplazarse por los tubos de la reja que protege su granja y que forman un ángulo recto, esta cadena le permite a Toby un alcance máximo de 2m.



TRABAJO INDIVIDUAL.
1. Representa gráficamente el terreno que el cachorro logra cubrir al desplazarse por los tubos.
2. ¿Qué figuras o formas geométricas se generan del terreno cubierto por el cachorro?, represéntalas:

TRABAJO EN EQUIPO. *TRABAJA CON ALGUNO DE TUS COMPAÑERO(A)S*
3. ¿Cuál es la medida de la superficie total del terreno cubierto por el perrito guardián?
NEGOCIACIÓN DE SIGNIFICADOS. ***PREPÁRATE PARA DEFENDER TUS IDEAS FRENTE A TUS COMPAÑEROS***
4. A través de lo experimentado, ¿puede proponer una expresión para determinar, en forma general, la cantidad total de superficie cubierta por cada una de las figuras geométricas observadas?

Anexo 2

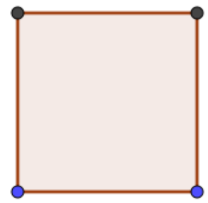
TAREA EXPLORATORIO-INVESTIGATIVA EN GEOMÉTRIA

Construcción y clasificación de cuadriláteros a partir de triángulos.

ESTUDIANTE:

FECHA:

TRABAJO INDIVIDUAL. Divide el cuadrado en triángulos iguales.



Observa la gráfica y responde ¿Qué tipo de triángulos resultan? Justifica tus respuestas.

TRABAJO EN EQUIPO.

1. Con 2 de los triángulos resultantes, construye figuras de cuatro lados. Representa las figuras construidas.

2. Realiza el mismo procedimiento tomando 3 triángulos y grafica cada figura.

3. Repite el proceso tomando…4, 5, 6, 7, 8,…n triángulos y registra los resultados en la siguiente tabla:

Número de triángulos utilizados.	Representación del cuadrilátero generado.
4	
5	
6	
7	
8	

5. ¿Qué relaciones puedes observar a partir de la tabla construida?

6. De acuerdo a lo visto durante la clase y a las relaciones observadas y registradas, completa la siguiente tabla graficando y ubicando cada cuadrilátero de acuerdo a sus propiedades.

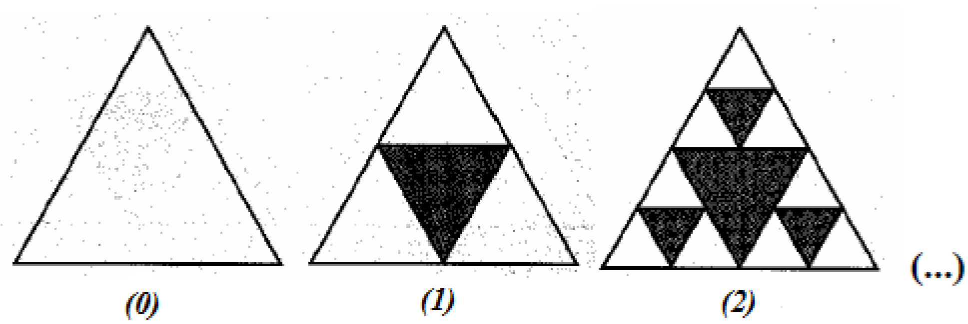
Clasificación de cuadriláteros según sus lados

PARALELOGRAMOS	***TRAPECIOS***	***TRAPEZOIDE***

Anexo 3

TAREA EXPLORATORIO-INVESTIGATIVA EN GEOMÉTRIA
EL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

Observe el triángulo de Sierpinski y sus transformaciones en sus dos primeras etapas.



TRABAJO INDIVIDUAL.

1. graficar los dos siguientes triángulos que continuarían en la anterior imagen.
2. Describe con tus palabras, la transformación que se produjo en el triángulo (0), para obtener el triángulo (1), haz lo mismo y describe lo que sucedió en el triángulo (1) para obtener el triángulo (2), y del triángulo (2) al (3).
COMPARA TUS PLANTEAMIENTOS CON ALGUNO DE TUS COMPAÑEROS (¿NECESITAS REDEFINIRLOS?)

3. Continúa con tu compañero (a) y Completa la siguiente tabla:

Etapa del Triángulo de Sierpinski.	Número de triángulos sombreados.	Número de triángulos sin sombrear.
1ª	1	3
2ª	4	
3ª		
4ª		
5ª		
6ª		

4. ¿Qué relaciones puedes plantear a partir de la información de la tabla?

5. Plantea una expresión para determinar el número de triángulos sombreados y sin sombrear en la etapa ***n*** del triángulo de Sierpinski.