# Caracterización de la Dimensión Epistémica y Cognitiva en el modelo CDM del profesor para el objeto Integral

Diego Fabián González Sánchez

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Facultad de Ciencias de la Educación

Maestría en Educación Matemática

Tunja

2020

# Caracterización de la Dimensión Epistémica y Cognitiva en el modelo CDM del profesor para el objeto Integral

Diego Fabián González Sánchez

Trabajo de grado de maestría presentado al programa de Maestría en Educación Matemática de la universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, requisito parcial para optar el título de magister en Educación Matemática. El presente trabajo se realizada dentro del marco del proyecto de investigación con código SGI número 2672 de la UPTC.

Director: Dra. Omaida Sepúlveda Delgado

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Facultad de Ciencias de la Educación

Maestría en Educación Matemática

Tunja

2020

**Dedicatoria**

*Danna.*

*Tu alegría, cariño e inocencia son las causas de mi felicidad, de mi esfuerzo, de mis ganas de encontrar lo mejor para ti. Con tu corta edad me has enseñado la esencia de la vida.*

*Agradezco a ti, por ser mi motivación más grande para concluir esta tesina.*

*Te amo.*

## Agradecimientos

Doy gracias a la vida por poner en este arduo camino a mi Directora de tesis, Dra. Omaida Sepúlveda Delgado, a quien debo mi admiración y gratitud, ya que, con su calidez, comprensión, amabilidad, conocimiento y apoyo, aportó sabias sugerencias y correcciones para encaminar el éxito del presente documento y mi vida profesional.

En la misma línea al Dr. Publio Suarez Sotomonte por motivar el espacio para desarrollar mi vida profesional, de igual manera agradecer su compañía y apoyo en el desarrollo de la maestría; a mi tía Dra. Nelsy Rocío González Gutiérrez, quien siempre estuvo presente para motivarme, exigirme y lograr cada uno de mis objetivos, igualmente gracias por su cariño; por último a los Doctores Álvaro Calvache, Zagalo Suarez, Pedro Nel Maluendas, Lida Riscanevo, Francisco Leguizamón, y a los magíster Marta Pacheco, Luis Carlos Canaria, de las escuelas de matemáticas y licenciatura en matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, quienes con su experiencia y conocimiento aportaron en el desarrollo de esta investigación.

A los estudiantes del programa de ingeniería de la UPTC quienes fueron el recurso humano fundamental y laboratorio de práctica en el trabajo de campo de esta investigación, a mis compañeros de Maestría en educación Matemática de los cuales aprendí en sus largos debates.

Por último, quiero agradecer a Cesar Garzón, Catalina Rodríguez, Juan Camilo Castillo, Alex Almanza, Lennys Pedraza, Ludin González, Andrea Sarmiento, Rocío Suarez, Yolanda Pacheco, y otros grandes amigos que aportaron cada día con sus consejos, ánimos y ayudas incondicionales que no dejaron desfallecer y lograr esta meta.

# Tabla de Contenido

## Lista de Tablas

## Lista de figura

## Introducción general

El presente estudio se enmarca en el tema del conocimiento didáctico-matemático del profesor en la línea de investigación de formación de profesores, en el campo de la Didáctica de la Matemática, y se informa sobre el proceso investigativo, que permitió dar respuesta a la pregunta de investigación ¿Qué conocimiento matemático relativo al contexto institucional debe poseer el futuro profesor para que la enseñanza del objeto integral tenga la mayor idoneidad epistémica posible? El desarrollo de esta investigación contempla un estudio de tipo exploratorio-descriptivo, con un enfoque cualitativo donde se hace uso del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), el cual se toma como un marco teórico y metodológico para este proceso investigativo estructurado en 7 capítulos:

En el primer capítulo, se aborda la problemática en la línea de investigación del Conocimiento del Profesor para el objeto integral y en las dimensiones epistémica y cognitiva del EOS (Pino y Godino, 2015); además se presentan las problemáticas en función de las dificultades presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. Con base en los antecedentes presentes en el capítulo 1 y las problemáticas descritas se establecen los objetivos de la investigación y se describe la justificación del estudio.

El segundo capítulo, está estructurado en dos partes. En la primera parte, se describe una síntesis de las herramientas que se utilizaron en el desarrollo del estudio y las nociones teóricas que sirvieron como sustento para el análisis de las categorías propuestas en la investigación, para dar cumplimiento a los objetivos específicos propuestos. Concretamente, se presenta el marco teórico y metodológico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Godino, 2009, Pino 2014, Font, 2013, Godino y Batanero, 2014) y en la segunda parte se presenta el análisis al modelo del Conocimiento Didáctico Matemático del profesor (CDM), estudiado en el EOS y se retoman las nociones necesarias para abordar la caracterización de la faceta cognitiva y epistémica del conocimiento del profesor en este modelo (Godino,2009).

En el tercer capítulo, se presenta la metodología a través de la cual se desarrolló el estudio; se define el enfoque de investigación, y el diseño y fases que se siguieron para alcanzar cada uno de los objetivos planteados, junto al proceso que se llevó para dar respuesta a la pregunta de investigación. De igual manera, se describe la unidad de análisis para el desarrollo del estudio, y las categorías de análisis para el cuestionario CDM-Integral. Por último, se dan a conocer las técnicas y herramientas usadas en la recolección y análisis de la información, las cuales permitieron caracterizar los significados parciales del objeto matemático Integral.

En el cuarto capítulo, se describe el primer resultado correspondiente al origen del objeto matemático Integral (estudio histórico y epistemológico), así como su desarrollo y evolución en diversas culturas y épocas de la historia, a lo largo de cuatro periodos de tiempo determinados por el autor del documento. Este estudio histórico-epistemológico tiene como objetivo la caracterización de los problemas relacionados con el objeto Integral, los cuales dan origen a los significados parciales del objeto matemático (conocimiento de la dimensión epistémica en el modelo CDM). En este sentido, se establece que la reconstrucción del significado parcial del objeto integral a partir del estudio epistemológico – histórico, en un primer momento favorece el diseño de propuestas didácticas relevantes al área, y específicamente en el estudio se utiliza en la caracterización del conocimiento matemático del profesor, relacionado con objetos del Cálculo Integral. El resultado de este estudio corresponde a la identificación del significado global del objeto Integral, el cual se compone de la reconstrucción de las configuraciones epistémicas y la identificación de cada uno de sus significados parciales, los cuales se relacionan y forman una red de significados, que finalmente constituye el significado Holístico o global del objeto Integral.

En el quinto capítulo, se describe el segundo resultado correspondiente a la caracterización del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) del profesor relacionado con objetos del Cálculo Integral, a partir de la propuesta de Pino-Fan y Godino (2015, p.8). Y para complementar esta caracterización del modelo CDM del conocimiento del profesor se continua con la estructuración del contexto curricular para la asignatura de Cálculo Integral, donde se realiza un análisis de texto a los principales libros universitarios en relación con la asignatura de Cálculo Integral, de igual manera se presenta el diseño, construcción del instrumento CDM-Integral, que permite caracterizar la dimensión epistémica y cognitiva del estudiante de formación matemática, y por último se presenta como resultado importante la versión final del Instrumento CDM-Integral.

El capítulo seis, se compone de una revisión de los análisis al segundo resultado, donde se analizó cuantitativamente el cuestionario CDM-Integral, bajo la variable "grado de corrección de las respuestas", de esta forma se estudió la distribución de las puntuaciones totales y el índice de dificultades de los subitems sin profundizar en los aspectos relacionados con los tipos de Conocimiento del Contenido respecto con el Conocimiento del profesor y relacionados con el objeto Integral; de igual forma se presenta la identificación de errores y dificultades en las respuestas de los estudiantes con el fin de caracterizar en cierta forma la dimensión cognitiva en el modelo CDM del profesor. Por tanto, en este capítulo se presenta como resultado del estudio y dando cumplimiento al objetivo general, la caracterización de las Dimensiones epistémica y cognitiva en el modelo CDM del profesor, con base en los análisis preliminares realizados.

En el séptimo y último capítulo, se describen los resultados de los estudios realizados para el logro de cada una de las fases de investigación, las cuales dieron cumplimiento al objetivo general de la investigación, el cual se centra en: *Caracterizar el conocimiento del estudiante de formación Matemática relativo al contexto institucional, para que la enseñanza del objeto integral tenga la mayor idoneidad epistémica y cognitiva.*

# CAPÍTULO 1. Marco de la investigación

*"Si supiese qué es lo que estoy haciendo, no le llamaría investigación, ¿verdad?"*
*Albert Einstein.*

En este capítulo se presenta el análisis a las investigaciones realizadas en el campo de la Didáctica de la Matemática; en el tema del Conocimiento Didáctico Matemático del Profesor, en la línea de investigación del Conocimiento del Profesor para el objeto matemático integral con el objetivo de caracterizar las dimensiones epistémica y cognitiva que estructuran el modelo CDM. Este estudio se establece en el marco teórico y metodológico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), y en la línea de Formación de profesores de matemáticas. Estas investigaciones nos proporcionan información relevante para evidenciar la problemática del conocimiento del contenido matemático o conocimiento común y ampliado que necesita el profesor y el futuro profesor para su práctica pedagógica, buscando la comprensión de los objetos matemáticos, y en este aspecto se evidencia de igual forma, la necesidad de conocer los errores y dificultades de los estudiantes (dimensión cognitiva) como problemática pertinente para abordar la práctica didáctica del profesor. En esta dirección, se formulan los objetivos de la investigación y se presenta la justificación al estudio desarrollado.

## 1. El problema de investigación

### 1.1 Planteamiento del problema

El estudio de algunas problemáticas en temas del Cálculo Integral, permiten evidenciar las dificultades presentes en su enseñanza y aprendizaje, especialmente aquellos estudios que se encuentran direccionados a la caracterización de las componentes que forman el conocimiento del profesor para la enseñanza idónea de los objetos matemáticos. Este conocimiento del profesor, se estudia en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, 2009) a partir de la estructuración en seis facetas o dimensiones, y en concordancia con el modelo propuesto por Shulman (1987), y Ball (2008). En esta dirección, se observa que ante los cambios acelerados en la producción de conocimiento y la variedad de paradigmas didáctico-pedagógicos actuales, se exigen profesionales competentes que den respuesta a los problemas de una realidad compleja y dinámica; que adopten una actitud reflexiva y crítica con respecto a la realidad educativa y que posean una idoneidad técnico-profesional para investigar científicamente y llegar a producir una transformación creativa. En este sentido, se entiende la investigación en Educación Matemática, como una disciplina, con un ámbito de conocimiento, direccionado a la recopilación, análisis, tratamiento e intercambio de la información educativa.

Según Corella (2013), uno de los aspectos más debatidos en la investigación educativa es el que hace referencia a los expertos, quienes regulan las diversas metodologías para que estas puedan adquirir un carácter científico: donde, uno de los elementos constitutivos del proceso corresponde a la voluntad y la pericia del experto para comunicar los resultados de sus investigaciones y trabajos. De este modo, el investigador necesita acudir a la consulta de múltiples bases de información con el objetivo de identificar el estado del conocimiento sobre el problema a investigar. Bajo estos argumentos, se aborda en el presente trabajo investigativo, la problemática de llegar a estructura el Conocimiento del Profesor para una enseñanza idónea, según diversas dimensiones o partes constituyentes del mismo; este es un tema que ha generado gran impacto en la comunidad de investigación en la línea de formación de profesores donde un aspecto de especial interés corresponde a la caracterización de las componentes del Conocimiento didáctico-matemático (CDM), requerido por los profesores para la enseñanza idónea de los objetos matemáticos (Godino, 2009; Pino-Fan y Godino, 2015; Sepúlveda, 2016; Vásquez, 2015).

Desde la perspectiva reflexiva e investigativa, a través de los últimos cuarenta años ha surgido la investigación en Educación Matemática, donde se han desarrollado diversos estudios en el tema de la idoneidad de una clase de matemáticas, y el trabajo del profesor. Para Pino (2013), la principal razón es que el desarrollo del pensamiento y las competencias matemáticas de los estudiantes dependen esencialmente de los conocimientos, competencias, habilidades, de sus profesores; en esta dirección, se hace necesario que los profesores conozcan y comprendan a profundidad la matemática que deben enseñar, así como los tipos de conocimientos pedagógicos didácticos y matemáticos, necesarios para lograr un proceso de enseñanza - aprendizaje significativo y eficaz. Entonces, surge una pregunta: ¿Qué conocimiento matemático debe poseer el profesor para la enseñanza idónea del objeto Integral? Que de acuerdo con Shulman (1987) y su adaptación dada por Grossman (1990), se constituye en un *conocimiento base*, denominado el Conocimiento del Contenido, el cual se refiere al conocimiento de los conceptos y hechos principales dentro de un campo y a las relaciones entre estos conceptos: lo cual se retoma en el EOS como el Conocimiento de la dimensión epistémica del contenido y entonces, el dominio del conocimiento del profesor de matemáticas en relación con los objetos matemáticos que debe ayudar a construir en sus estudiantes, se constituye en un elemento clave de investigación, con efectos directos en el aprendizaje de sus alumnos, pues un profesor no puede enseñar lo que no comprende bien (Sepúlveda, 2016).

En esta dirección, surge otro interrogante que motiva al estudio de la problemática del conocimiento del profesor de matemáticas: ¿Qué conocimiento pedagógico debe abordar el profesor para la enseñanza idónea del objeto integral? responder esta pregunta se refiere básicamente a analizar y discutir sobre los principios y estrategias generales que ayudan a la gestión y organización de la clase, para hacer trascender el contenido, en este aspecto el presente estudio no da respuesta a la pregunta, pero su análisis se contempla para llegar a caracterizar la dimensión epistémica en el modelo del Conocimiento didáctico Matemático del profesor (CDM). Finalmente, surge otra pregunta: ¿Cómo debe ser el currículo de la asignatura de Cálculo Integral? lo cual sugiere que el profesor, debe tener una idea al menos intuitiva del conocimiento pedagógico curricular que dé respuesta al conocimiento de unos significados institucionales, en esta dirección dar respuesta a este interrogante es pertinente para el desarrollo del presente estudio.

Para dar respuesta a las preguntas planteadas, diversos investigadores han aportado teorías direccionadas a la adquisición de un nivel apropiado en el momento de realizar la transposición didáctica en el aula de clase. Dentro de las teorías de la didáctica de la matemática que han realizado aportes a las problemáticas identificadas mediante la formulación de las preguntas de investigación y analizando aquellas en las cuales se centra la presente investigación, se encuentra el marco del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la instrucción Matemáticos (EOS), con investigadores importantes como Juan Díaz Godino, Vicenç Font Moll, Shulman, Debora Ball.

De igual forma la revisión sobre temáticas del cálculo, evidencia que estas se encuentran inmersas en el Pensamiento Matemático Avanzado, donde se ha contemplado que los principales obstáculos se deben a la comprensión del objeto matemático (Crisóstomo, 2014), y de igual forma los estudios de Artigue (2003), Moreno y Grijalva (2013) presentan aportes que invitan a reflexionar sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral, donde se observa que, aunque a los estudiantes se les enseñe a resolver problemas estándar de forma mecánica, estas prácticas están distantes de lo que corresponde a comprender y entender un pensamiento avanzado. Además, según Fiorentini (2002), existen pocas investigaciones que se perfilan en analizar y reflexionar el papel y la práctica de los profesores universitarios, responsables de la formación de profesores, y en especial el desarrollo de cada disciplina.

## 1.2 Áreas problemáticas

En esta sección se analizan algunas de las problemáticas relacionadas con la investigación, las cuales justifican realizar el presente estudio. En primera instancia, se encuentra el estudio dirigido a la caracterización del Conocimiento didáctico-matemático de los profesores; luego, se describe el análisis realizado a los procesos de comprensión y abstracción del pensamiento matemático avanzado; se describe el problema de adquisición de los significados de los objetos matemáticos desde una perspectiva fenomenológica, en la cual el profesor encuentra o asigna un significado parcial en la construcción del objeto holístico y/o institucional (Freudenthal,1983). Finalmente, se describe la problemática asociada a los componentes del conocimiento que el futuro profesor necesita para su desempeño idóneo en la enseñanza del Cálculo Integral.

### 1.2.1 Problemáticas en la enseñanza de tópicos de Cálculo Integral.

Existen diversos estudios en Educación Matemática, donde se evidencia la dificultad en la enseñanza del Análisis matemático (Hitt, 2003; Milevicich, 2008; Contreras, 2000; Moratalla 1998), en primera instancia, un principal señalamiento obedece a la comprensión de las nociones de límite, derivada e integral y a su vez a las posibles representaciones que estas tienen en el mundo matemático y cotidiano. Además, en otros estudios se evidencian los principales obstáculos cognitivos (Orton 1987; Deepol, 2005), al practicar el reduccionismo y la algebrización de los conceptos, determinando un método simplista de enseñanza del análisis matemático.

Es así, como se analiza el estudio de Ortiz (2013), relacionado con la propuesta sobre la enseñanza del Cálculo Integral, en el cual se cita a Orton (1987) en relación con la experimentación que realizó con estudiantes de secundaria. Este estudio tiene como el objetivo general: Poner en funcionamiento el conocimiento disponible de la integral definida, en situaciones relacionadas con la acumulación de efectos locales. En el estudio, los estudiantes que se iniciaban en la teoría de integración mostraron niveles aceptables en la comprensión del cálculo de primitivas y la obtención de respuestas a aplicaciones simples, pero desconociendo la comprensión del concepto, por lo que en el estudio se genera una propuesta didáctica, fortalecida en una metodología empírica y de continua evaluación, además como resultado del estudio, se evidencia la necesidad de fortalecer los conceptos siguiendo el aspecto histórico - epistemológico, para llegar a la comprensión de los conceptos implícitos en el desarrollo del Cálculo Integral.

Un precursor en la investigación del proceso de enseñanza del cálculo, ha sido Orton (1979), el cual evidencia en su estudio denominado *An investigation into the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults*[1], la dificultad de los estudiantes en la comprensión de los conceptos: tasa de cambio, noción de la derivada como límite, la noción de área como el límite de una suma; en el estudio utiliza para la recolección de información instrumentos como: test, y cuestionarios, para llegar a la conclusión de que uno de los principales obstáculos de los estudiantes es la comprensión de la integral como el límite de una suma, debido a la necesidad de los estudiantes y profesores de reducir estos conceptos a solo procesos algebraicos. Un ejemplo claro de estas dificultades se evidencia al aplicar la regla de Barrow en la integral $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-2}^{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, donde es claro que el estudiante se olvida de la noción de límite, además confunde el área

[1] Una investigación sobre la comprensión del cálculo elemental en adolescentes y adultos jóvenes. (traducción al español)

bajo la curva con la expresión de la integral definida, y por último olvida hacer uso de un sistema de representación que clarifique el problema.

De igual manera la investigación Ortiz (2013), apoyado en la teoría de los campos conceptuales, soporta un estudio con el objetivo de separar lo conceptual de lo algorítmico en el desarrollo de temáticas del Cálculo Integral. Dentro de los resultados del estudio se concluye que: a los estudiantes se les enseñan procedimientos para calcular integrales como los llamados métodos de integración, solo a través de ejercicios repetitivos y de una manera separada de la parte conceptual [...] y la existencia de una gran dificultad en la comprensión profunda de los conceptos de integración, sus interpretaciones y aplicaciones. Esto evidencia la realidad de una distancia entre el avance teórico conceptual alrededor de la integral y lo procedimental; es decir, entre la comprensión de la noción de sumas de Riemann y el aprendizaje de las estrategias de integración para el cálculo de primitivas elementales.

### 1.2.2 Problemáticas relacionadas con el aprendizaje de temas de Cálculo Integral.

En el desarrollo de investigaciones sobre el aprendizaje de los estudiantes de cálculo, se evidencian estudios como los de Hitt (2003) en su trabajo: Dificultades en el aprendizaje del cálculo, donde plantea como objetivo: Mostrar las principales dificultades y problemas en estudiantes de cálculo. En el estudio se aborda el marco teórico de las representaciones semióticas de Duval (1993) en cuanto a la metodología, se realiza un estudio experimental con estudiantes de educación superior, donde se les solicita desarrollar una serie de ejercicios, donde se logra llegar a una serie de reflexiones las cuales implican la mecanización y algebrización de procedimientos por parte de los estudiantes, además la resistencia de estos, a cambiar de representación y ampliar el conocimiento en otros sistemas, de igual forma, se concluye que el impacto de las tecnologías debe ser abierto y reflexivo, para que el estudiante realice diferentes representaciones en la construcción de su concepto.

En la misma dirección, Fuster y Gomez (1997) en su trabajo Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral, plantean el objetivo de justificar la intuición, en lo que refiere a la etiología de problemas relacionados con el Cálculo Integral; para ello realizan un recorrido teórico centrado en responder a los tres conflictos clásicos en el trabajo con el Cálculo Integral, los cuales son: identificar la integral como una primitiva, identificar la regla de Barrow como un único procedimiento, no unificar criterios del concepto de área con el de integral. De igual manera se concluye que las imágenes conceptuales (Vinner, 1991) realizadas por los estudiantes no los llevan a construir esquemas conceptuales fuera del campo algebraico, por tanto, en sus conclusiones los autores refieren a la comprensión del concepto del Cálculo Integral a partir de esquemas visuales (Vinner, 1991) que simbolicen conceptos y definiciones, entre otros. Para concluir que esto hará que el estudiante tenga una imagen perceptiva y simbólica de la temática relacionada al Cálculo Integral; de igual manera la incorporación de software como Derive facilitaron el proceso de ilustración y comprensión de las problemáticas abordadas.

### 1.2.3 Problemáticas relacionadas con la implementación de propuestas didácticas para Cálculo Integral.

En el proceso de la identificación y solución de dificultades presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral, se han adaptado y propuesto diversas estrategias para la comprensión del objeto Integral como el estudio de Lois y Milevivich (2008), los cuales realizaron una propuesta denominada La enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral desde la perspectiva del nuevo paradigma de la sociedad del conocimiento; el estudio se fundamenta en el aporte que realizan las tecnologías en el desarrollo de las ciencias exactas. De esta manera, se proponen tres fases para el desarrollo de la propuesta investigativa: la primera, enmarcada en la identificación de los problemas en los procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral; una segunda, enmarcada en mejorar los procesos de comprensión de los estudiantes, y una tercera, orientada a la formación de equipos interdisciplinares. Como conclusiones del estudio se resalta la experimentación con un grupo de ingeniería eléctrica con el objetivo de formar una sociedad de conocimiento y multidisciplinaria, donde se visualiza, el aporte de la propuesta pedagógica fundamentada en la optimización de dificultades en cuanto al trazo de integrales y solución de estas, facilitando la comprensión a través de medios digitales.

En el mismo sentido, Salinas y Alanís (2009) realizan la propuesta didáctica denominada hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo en una institución educativa. El estudio, se apoya en diversos estudios de enseñanza del Cálculo Integral junto con el marco teórico y metodológico del paradigma socio epistemológico y la ingeniería didáctica, partiendo de la reflexión de ver la historia como un aporte al diseño de prácticas, al tratamiento de los problemas sociales y matemáticos al momento de enseñar y conceptualizar. Como conclusión se establece que se debe reestructurar la escuela tradicional a través de la innovación de prácticas sociales e interdisciplinares.

#### 1.2.4 Problemáticas relacionadas con aspectos epistémicos e históricos del objeto Integral.

El concepto de integral es fundamental en el desarrollo del Pensamiento Matemático Avanzado, como se presenta en el artículo de *L´evolution des problematiques en didactique de l´analyse*[2], de Artigue (1998), donde se asume una problemática entorno a la didáctica del análisis matemático, destacando obstáculos, y habilidades en el marco de la ingeniería didáctica, donde se establece la evolución global del concepto límite como un medio fundamental para el aprendizaje del concepto integral y se da importancia al uso de las tecnologías. Por tanto, esta autora, resalta la importancia de realizar la reconstrucción epistemológica en la evolución de los objetos del análisis matemático, para la implementación de los procesos de enseñanza en espacios académicos universitarios y de secundaria, dependiendo de la cultura, y de los medios que se dispongan para la implementación del proceso de instrucción.

En esta dirección, Calvo (1997) realiza un estudio cuyo objetivo es preparar las bases para una propuesta didáctica que permita a los estudiantes de un primer curso de Cálculo, la construcción de la imagen del concepto de Integral Definida, según los planteamientos de Vinner (1991). Para el desarrollo del estudio se diseñó un cuestionario de 10 ítems, que aplicó a 56 estudiantes. Dentro de las reflexiones y conclusiones se sugiere utilizar como definiciones de Integral aquéllas que resulten independientes del concepto de derivada y del conjunto de reglas algorítmicas asociadas a su cálculo. Propone establecer como definición de Integral la planteada por Riemann (mejorada años más tarde por Darboux), en la cual se establece según las representaciones gráficas, numéricas y algebraicas sobre las cotas superiores e inferiores; también plantea generar esquemas de

[2] La evolución de la problemática en la didáctica del análisis.

representaciones que determinen conexiones entre las mismas para llegar a la construcción de un nuevo concepto; esto en la comprensión de la integral definida y el área.

En la tesis doctoral de Crisóstomo (2014) citando a Czarnocha, Dubinsky, Loch, Prabhu, y Vadakovic (2001) en el trabajo denominado *Concepciones de área: estudiantes de historia*, se trabaja con un grupo de 32 estudiantes de Ingenierías, y Ciencias Exactas, los cuales ya habían completado un curso relacionado con el Cálculo Integral; para el estudio utilizan una metodología con un enfoque cualitativo y utilizando instrumentos como cuestionarios y entrevistas, para llegar a describir las concepciones de los estudiantes con referencia al proceso de instrucción y argumentación lógica matemática, para esto, se diseña una entrevista denominada “Entrevista Cálculo Integral”, con base en los aportes hechos por Cavallieri, Wallis, y Roveral en el desarrollo del Cálculo Integral en especial de la integral definida. Entre los resultados del estudio, se evidencia que cada estudiante interpretaba estos conceptos de forma diferente de acuerdo a su proceso de instrucción, es decir, imitaban algunos razonamientos lógicos propuestos por el profesor, otros de algunos matemáticos propuestos en el marco histórico, otros interpretaban conceptos de forma visual. De igual manera, el autor recomienda iniciar el curso con el método de exhausción[3] y no olvidarlo en el desarrollo de este; de igual manera establece las definiciones desde las propuestas de Riemann y agrega que se debería fortalecer el gusto hacia la matemática y en especial del cálculo desde la historia.

En Moratalla (1994) desarrolla el estudio denominado Los Conceptos en Torno a la Medida y el Aprendizaje del Cálculo Infinitesimal, donde establece como objetivo general Elaborar una

---

[3] La palabra exhausción es tomada del libro de historia The history the calculus and its conceptual developtmen (Boyer, 1949) que expresa metodo de agotamiento.

propuesta didáctica que pueda utilizarse en la enseñanza de la Integral Definida para estudiantes de secundaria (alterna a la integral de Riemann); para la consecución del objetivo planteado desarrolla la génesis histórica del concepto, y realiza un estudio de textos y del currículo. El desarrollo de esta investigación se realiza en dos fases: la primera, con una propuesta sobre cómo enseñar el concepto de Integral, y la segunda, en un sentido de investigación donde se apoya de la teoría de las situaciones didácticas y se implementan cuestionarios y entrevistas mediante un estudio de caso.

Entre los resultados del estudio, se establece que los estudiantes pueden conceptualizar temáticas en torno al Cálculo, y en especial en la integral definida de forma intuitiva sin la necesidad de habilidades algorítmicas y operativas, y se resalta que solo se necesita de la visualización de propiedades de la idea de área bajo la curva. Además, en el estudio se establecen los perfiles del estudiante al momento de enfrentarse a una temática:

> Un estudiante sería **primitivo** respecto al concepto de integral si la interpreta simplemente como una fórmula que le permite calcular áreas de figuras "raras", sería **operativo** si construye una imagen mental de integral como sinónimo de área sin tener en cuenta el signo de la función y sería **descriptivo** si logra dar una descripción verbal precisa de integral y de sus propiedades incluyendo componentes geométricas y numéricas. (Moratalla, 1994, p.37)

De igual forma, la autora propone que un estudiante que se inicie en el área del cálculo infinitesimal debe conocer un enfoque de integración, que vaya de acuerdo con la génesis y evolución histórica del concepto, adaptándola a un currículo secuenciado como: Integral definida, Primitiva. Entre los resultados del estudio se tiene que para esta autora el origen y evolución histórica de los objetos matemáticos, deben ser un recurso primario en la estructuración y desarrollo de contenidos, es decir la interiorización de conceptos se podría lograr de una forma eficaz siempre y cuando se trabaje con los estudiantes los problemas que surgieron en la historia.

### 1.2.5 Problemática relacionada con la identificación de los componentes que estructuran el Conocimiento de los profesores de Matemáticas.

Las investigaciones que se han realizado en formación de profesores de matemáticas relacionadas con el conocimiento didáctico de los futuros profesores, constituye un campo de investigación, el cual ha sido el centro de debates en congresos, a nivel nacional e internacional. Algunos argumentos se centran en la naturaleza, características y el grado de conocimiento que debe tener un profesor para desempeñar su labor, ya que según, Pino (2013) y otros autores, el desarrollo del pensamiento y las competencias matemáticas de los estudiantes obedece a la comprensión del conocimiento didáctico-matemático que el profesor ha construido; es en este punto donde se centra la presente investigación, ya que esta direccionada a la caracterización de la dimensión epistémica y cognitiva del Conocimiento Didáctico Matemático, que debe poseer el profesor para enseñar el objeto integral de forma idónea.

En esta línea de estudio, uno de los pioneros en analizar las componentes del Conocimiento del profesor, es Shulman (1987), quien inicialmente categoriza las componentes del Conocimiento del profesor en tres ejes: Conocimiento del contenido, Conocimiento pedagógico y Conocimiento curricular, resaltando la importancia de la dimensión del Conocimiento Pedagógico del Contenido, sobre el conocimiento implícito del profesor para la enseñanza de la matemática. En un estudio posterior extiende estas componentes del Conocimiento del profesor a siete categorías: Conocimiento del contenido, Conocimiento pedagógico general, Conocimiento curricular, Conocimiento pedagógico del contenido, Conocimiento del estudiante y sus características, Conocimiento de los contextos educativos, Conocimiento de los fines y propósitos de la educación. El autor propone la existencia de por lo menos cuatro fuentes principales de donde pueden provenir tales conocimientos: la formación académica, materiales y recursos propiciados por el contexto y la institución, de la investigación sobre aspectos relevantes del conocimiento del profesor, de la experiencia y sabiduría mediante la reflexión del profesor.

Bajo estos argumentos, Grossman (1990) reconstruye este modelo del conocimiento del profesor y nuevamente presenta una estructura en cuatro categorías base del conocimiento: Conocimiento pedagógico general, Conocimiento del contenido, Conocimiento pedagógico del contenido y Conocimiento del contexto. En posteriores estudios Ball, (2000), Leinhardt y Smith (1985), Wilson y Shulman, (1987), Schoenfeld y Kilpatrick (2008) y finalmente, Godino (2009) retoman la base propuesta de Shulman y Ball e intentan definir nuevos sistemas que proporcionan herramientas para el estudio y caracterización del Conocimiento Didáctico y Matemático que deben poseer los profesores para el desarrollo de su profesión.

### 1.2.6 Estudios realizados a nivel internacional y nacional en el Conocimiento del profesor.

En esta sección se describen aquellos trabajos que sirvieron como soporte para la fundamentación de la caracterización del conocimiento Didáctico y Matemático que debe poseer el futuro profesor en la asignatura de Cálculo Integral, según las bases documentales internacionales y locales.

El primer estudio corresponde al de Crisóstomo (2012) en su tesis doctoral Idoneidad de procesos de estudio del Cálculo Integral en la formación de profesores de matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional, en la investigación se plantea como objetivo La caracterización de los conocimientos sobre la idoneidad didáctica de procesos de estudio del Cálculo Integral para la formación de profesores de matemáticas. El estudio se desarrolló con estudiantes del primer semestre de Licenciatura en

Matemáticas, utilizando como metodología, el paradigma mixto y en el marco teórico del enfoque Ontosemiótico. Se buscaba evaluar el conocimiento didáctico matemático, según sus diversas facetas (dimensiones) o componentes, realizando un estudio de caso mediante entrevistas. Entre los resultados, se establece que se dio cumplimiento al objetivo de caracterizar los procesos de instrucción para el Cálculo Integral mediante el desarrollo de un estudio histórico-epistemológico, categorizando la faceta epistémica del objeto integral, a partir de la identificación de ocho configuraciones epistémicas; de igual forma, se propone la reestructuración del currículo en el Cálculo Integral de las universidades de Brasil, junto al análisis de los principales textos.

En la misma dirección, Cifuentes (2015), en su trabajo de maestría Significados institucionales evidenciados en el diseño de tareas para la enseñanza de la Integral, propone como objetivo general: reportar el estudio de los significados Institucionales evidenciados en el diseño de tareas en torno al problema del cálculo de áreas encerradas por curvas. Trabaja con estudiantes de secundaria de undécimo grado, utilizando un tipo de metodología mixta y bajo el enfoque Ontosemiótico, para la significación del objeto integral. Como instrumento de recolección de información, utiliza la observación, entrevistas y documentación de textos para identificar la caracterización de las prácticas estudiante-profesor, presentando entre sus resultados, la adaptación del modelo planteado por Crisóstomo (2012) junto a las mallas curriculares planteadas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), para el diseño de una propuesta didáctica; además se observa la evaluación de los significados de referencia, implementado y pretendido, en el concepto de áreas bajo la curva, y resaltando la importancia de la emergencia de conceptos a partir de problemáticas cotidianas y el buen uso del lenguaje.

En la misma dirección, Ordoñez (2011), en su tesis doctoral Restricciones institucionales en las matemáticas de 2º de bachillerato, en cuanto al significado del objeto integral definida**,** establece como objetivo general: identificar, describir y explicar los factores relacionados con los fenómenos didácticos de renuncia al aprendizaje del objeto integral definida y de algebrización del Cálculo Integral. Trabaja con un grupo de estudiantes de secundaria de la provincia de Andalucía (España) y utiliza el paradigma del enfoque Ontosemiótico, analizando las dimensiones epistémica y cognitiva del conocimiento didáctico-matemático. Centra su investigación en dos partes: un análisis histórico-epistemológico y uno cognitivo en la interacción de los significados personales de cada estudiante. Este trabajo tiene entre sus resultados, el estudio histórico-epistemológico del objeto integral, asignando nueve significados institucionales a la Integral definida seccionados por etapas en el desarrollo y evolución del Cálculo Integral. Además, comprende los significados personales asociados en la resolución de problemas en cuanto a las pruebas de acceso a la universidad, y la valoración de idoneidad en cada dimensión del conocimiento en el marco del enfoque Ontosemiótico. En lo que se refiere al objeto integral, se concluye que el tipo de enseñanza propuesto en los manuales es transmisivo, lo cual hace al estudiante un sujeto pasivo que no realiza investigación y confrontación sobre el objeto integral. Además, se observa que los estudiantes prefieren utilizar el lenguaje algebraico al lenguaje geométrico puesto que les presenta mayor fiabilidad para encontrar soluciones a problemas planteados. Finalmente, se establece que se tiende a utilizar y confundir la noción de antiderivada con la primitiva de una función.

En la misma línea de estudio, Pino-Fan (2013), en su tesis doctoral Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada, propone como objetivo general Evaluar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de profesores en formación inicial de secundaria/bachillerato en México, donde buscaba determinar si al final de su proceso de instrucción se había generado un conocimiento de la faceta epistémica del CDM, suficiente para la enseñanza idónea de la derivada.

El trabajo se desarrolla, con estudiantes de último semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán (México). Se utiliza una metodología, basada en el enfoque Ontosemiótico, en donde buscaba evaluar la faceta epistémica-cognitiva-instruccional respecto al objeto derivada, mediante el diseño de un cuestionario que le permitió explorar, identificar y evaluar los significados individuales, institucionales y globales del objeto derivada, llegando a conclusiones respecto a la construcción del estudio epistemológico e histórico del objeto derivada, como las configuraciones epistémicas a partir de los significados y prácticas institucionales, evidenciando algunas dificultades sobre la concepción de la derivada por parte de los estudiantes, futuros profesores.

A nivel local se encuentra a Sepúlveda (2016), en su tesis doctoral Conocimiento didáctico-matemático del profesor universitario para la enseñanza del objeto grupo**,** se presenta como objetivo general Evaluar el Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática en su dimensión epistémica, donde se busca determinar si los estudiantes de formación matemática habían generado un conocimiento común y un conocimiento ampliado como base de un conocimiento especializado, necesario para la enseñanza idónea del objeto Grupo. Se trabajó con estudiantes de matemáticas y de Licenciatura en Matemáticas de una universidad de Colombia, utilizando una metodología de tipo mixta, para realizar una caracterización del objeto grupo desde una perspectiva histórico-epistemológica-semiótica y fenomenológica; se realizó un análisis de textos y la evaluación del conocimiento didáctico matemático, utilizando las herramientas del enfoque Ontosemiótico y llegando a resultado como la construcción del significado global del objeto grupo, a partir de un estudio histórico, epistemológico y fenomenológico, de igual manera la caracterización del significado pretendido en los libros de texto, y programas curriculares los cuales están direccionados al trabajo con el significado de grupo como grupo abstracto; conjunto de permutaciones y grupos en aritmética Modular, por último la autora caracteriza y analiza la Faceta epistémica del CDM donde define unos indicadores para caracterizar las prácticas matemáticas de los futuros profesores en relación con el objeto grupo.

## 1.3 Formulación del problema

Evidenciando la importancia y el interés del estudio en temas de Cálculo Integral según las diferentes problemáticas establecidas, en la presente investigación se pretende obtener algunos aportes relevantes para los programas de formación matemática y especialmente, se busca proponer mejoras en la implementación en los planes de estudio de formación matemática, en cuanto a su desempeño didáctico en la enseñanza del Cálculo integral. Por tanto, se establece la siguiente pregunta de investigación:

***¿Qué conocimiento matemático relativo al contexto institucional debe poseer el futuro profesor (profesor) para que la enseñanza del objeto integral tenga la mayor idoneidad epistémica posible?***

La pregunta planteada se pretende abordar bajo un análisis a las anteriores perspectivas, en donde se establece la necesidad de realizar una investigación que permita identificar y caracterizar los conocimientos didácticos – matemáticos de los futuros profesores en temas de cálculo integral o del profesor en general, pero se considera pertinente la investigación en el campo de Formación inicial de profesores. En este camino se propone reconstruir el significado global del objeto matemático integral, a través de un estudio histórico–epistemológico que permita identificar las prácticas y fenómenos que dan cuenta de los procesos heurísticos que dieron origen a tal objeto matemático, posterior a esto se propone analizar los significados parciales de los objetos matemáticos emergentes del análisis didáctico de textos, y la construcción de un primer instrumento que permita evaluar y analizar el conocimiento didáctico- matemático del futuro profesor, para llegar finalmente a presentar algunos aportes relacionados con el Cálculo Integral en la línea de investigación en Educación Matemática en el campo de la formación de profesores.

## 1.4 Objetivos

### 1.4.1 Objetivo general

Caracterizar el conocimiento del estudiante de formación matemática relativo al contexto institucional, para que la enseñanza del objeto integral tenga la mayor idoneidad epistémica y cognitiva.

### 1.4.2 Objetivos específicos

**OBE1.** Caracterizar los pares (prácticas, configuración de objetos en las prácticas) a partir del estudio histórico-epistemológico del objeto integral, para identificar los significados parciales del objeto matemático y así reconstruir el significado global del objeto integral.

**OBE2.** Caracterizar el significado global del objeto integral pretendido en los planes de estudio del programa de licenciatura en matemáticas.

**OBE3.** Caracterizar el significado de referencia del objeto integral pretendido por los libros de texto (4 libros).

**OBE4.** Caracterizar la dimensión cognitiva y epistémica en el modelo del CDM del conocimiento del profesor para el objeto integral según el significado Global del objeto matemático y el establecimiento de un significado de referencia propuesto en los libros de texto.

## 1.5 Justificación

La presente investigación se centra en la reconstrucción del significado global del objeto Integral, a partir del estudio histórico-epistemológico del objeto matemático, realizado a nivel documental.  El estudio histórico–epistemológico es importante ya que lleva a identificar las prácticas o problemas abordados por los matemáticos, en las diferentes épocas de la historia, las cuales dieron paso al surgimiento y evolución del objeto antiderivada, por tanto, al objeto integral. A partir de este estudio, se llegan a identificar lenguajes, conceptos, argumentos, notaciones, procedimientos y proposiciones, como objetos matemáticos primarios emergentes de situaciones problemas que forman configuraciones epistémicas, las cuales son analizadas con las herramientas teórico-metodológicas propuesta en el EOS, a partir del análisis semiótico, y se continua, con la identificación de cada uno de los significados parciales los cuales se encuentran asociados a cada situación problema la cual origina la configuración epistémica de estos objetos matemáticos primarios que se activa a partir de la identificación de la situación problema y de las relaciones que se establecen entre dichos objetos matemáticos primarios.

Estos estudios históricos epistemológicos de los objetos matemáticos, según Anacona (2003), son importantes, porque tienen en cuenta la postura, su implicación didáctica y la intensión del profesor al momento de reflexionar y abordar una clase, esto implica el estudio de la existencia de las posibles dificultades que se presentan en la construcción de los objetos matemáticos (dimensión cognitiva). De igual forma, la comprensión de los objetos matemáticos depende de cómo se originan y de las causas o razones que propiciaron su emergencia. Es así, como se evidencia a través de las etapas en la historia, el desarrollo del objeto integral, partiendo de la construcción del cálculo de áreas hasta llegar a la noción de antiderivada, la cual toma el rol de mediador entre el cálculo diferencial y el Cálculo Integral, originando el estudio del Cálculo Integral (Gordillo y Pino 2015).

Respecto al estudio de las dimensiones o facetas del Conocimiento del profesor de matemáticas, se puede afirmar que no existe un consenso o un marco teórico completo que pueda llevar a evidenciar lo que un profesor debe conocer para la enseñanza idónea de tópicos concretos de la matemática, como el de la integral (Sepúlveda 2016; Pino 2015); por esto el papel del profesor se relaciona en este marco teórico con el conocimiento de un conjunto de prácticas y reflexiones sobre las temáticas que va a abordar, lo cual hace subjetiva la evaluación de los estudiantes en algunos casos. De acuerdo con Sepúlveda (2016), el estudio de los conocimientos que debe tener el profesor para la enseñanza idónea de tópicos concretos de la matemática, toma cada vez mayor interés en la comunidad de investigadores de didáctica de la matemática interesados en la formación de profesores, y por los mismos profesores, ya que una de las principales razones es que se póstula que el desarrollo del pensamiento y las competencias matemáticas de los estudiantes, dependen esencialmente de los conocimientos y habilidades de sus profesores (Pino-Fan, 2013).

Bajo estos argumentos, en este estudio se pretende dar una respuesta parcial a algunos de los interrogantes planteados en la formulación del problema de investigación, buscando avanzar en la caracterización de los aspectos del Conocimiento del profesor necesarios en una enseñanza idónea del objeto integral, centro de la investigación en este estudio y considerado fundamental para la enseñanza del cálculo trabajando en el modelo CDM del conocimiento del profesor (Godino, 2009). De igual forma, se evidencia la existencia de una problemática, a partir del análisis de diversos estudios relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Integral, entre ellas el reduccionismo de los significados del objeto integral al lenguaje algebraico (Orton, 1979; Milevicich, 2008; Tall y Steath, 1983).

En esta dirección, en los antecedentes, se describen otros estudios complementarios que justifican la realización de la presente investigación, partiendo del interés por relacionar el Conocimiento matemático del objeto integral (conocimiento del contenido matemático) y el Conocimiento didáctico del profesor para la enseñanza de tópicos de Cálculo Integral, como línea de investigación importante en el campo de la Didáctica de la Matemática.  En el enfoque EOS, el objeto integral es un tópico de investigación (Crisóstomo 2012), donde la caracterización de la faceta epistémica y cognitiva del CDM corresponde al objeto de estudio, y al igual que las herramientas que conllevan a describir y caracterizar los sistemas de prácticas emergentes en el proceso de enseñanza, permitan la reflexión del profesor en los conocimientos matemáticos.

En esta dirección, para Pino (2015) la reconstrucción de los significados parciales del objeto integral emergentes del estudio histórico-epistemológico es significativo, puesto que permiten al profesor de matemáticas diseñar sus procesos de instrucción a partir del conocimiento y la reflexión sobre las problemáticas que llevaron al surgimiento y evolucionaron del objeto integral a lo largo de la historia, visualizando sus representaciones y prácticas en diferentes contextos históricos, culturales y sociales en la búsqueda de mejoras en el proceso de enseñanza del objeto integral y específicamente en el diseño de aspectos de evaluación del objeto integral, respecto a unos significados pretendidos por el profesor y unos significados logrados por el estudiante, respecto a los significados de referencia definidos institucionalmente.

# Capítulo 2. Marco Teórico

*"Conocer algo nos permite enseñarlo; y conocer un contenido con profundidad, significa estar mentalmente organizado y bien preparado para Enseñarlo de una forma general"*
*Buchman*

El presente apartado se organiza en dos partes. En la primera, se describe una síntesis de las herramientas que se utilizaron en el desarrollo del estudio y las nociones teóricas que sirvieron como sustento para el análisis de las categorías propuestas en la investigación, que dan cumplimiento a los objetivos específicos propuestos. Concretamente, se presentan las herramientas del marco teórico y metodológico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Godino, 2009; Pino, 2014; Font, 2013; Godino y Batanero, 2014). En la segunda parte, se presenta el análisis al modelo del Conocimiento didáctico matemático del profesor (CDM) estudiado en el EOS y de igual forma, se retoman las nociones necesarias para abordar la caracterización de la faceta cognitiva y epistémica del conocimiento del profesor en este modelo (Godino, 2009).

## 2.1 Herramientas teóricas del enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos

Para el desarrollo del estudio, se adopta el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico (EOS) desarrollado en diversos trabajos (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Este marco teórico y metodológico incluye un modelo epistemológico sobre las matemáticas, con bases antropológicas y socioculturales; es así, como el EOS cuenta con herramientas teóricas relacionadas con un modelo cognitivo, con bases semióticas, las cuales se concentran en el juego del lenguaje y la operatividad de los usos matemáticos en un contexto social, resignificando los procesos de comunicación e interpretación como las prácticas sociales en el aula. En forma amplia el EOS desarrolla herramientas para el trabajo en un modelo instruccional que permite la realización del análisis de los procesos que se dan en el aula de clase (Godino, 2017). Este enfoque articula diversas teorías de la Educación Matemática, como se describen en la Figura 2.1, las cuales se operativizan en este modelo y se integran para el análisis de los procesos de instrucción y de igual forma para el estudio de las componentes del conocimiento del profesor para una enseñanza idónea de los objetos matemáticos.

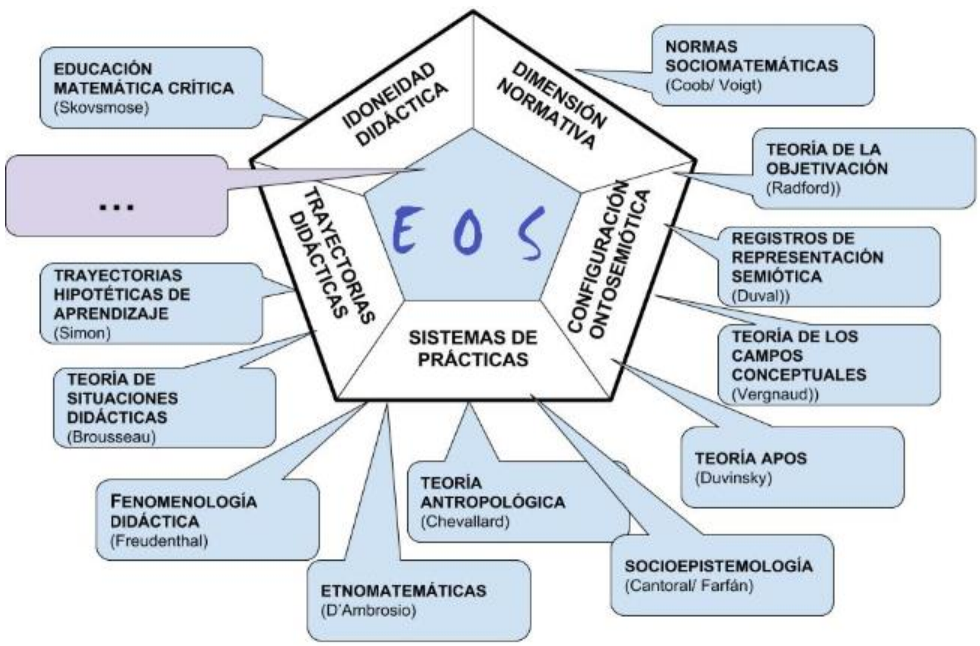



*Figura 2.1* Articulación del Enfoque Ontosemiótico con otros marcos teóricos. Fuente: (Godino, 2019)

En este marco teórico se vienen desarrollando herramientas teóricas y metodológicas a lo largo de las últimas tres décadas, en interacción con diversas investigaciones teóricas y experimentales desarrolladas en tesis doctorales y otros trabajos de investigación, que permiten realizar análisis detallados y pertinentes de los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores para la reflexión sobre los procesos de enseñanza del objeto de la integral (Godino 2012).

La articulación del EOS con las otras teorías de la Educación Matemática, ha sido una herramienta para interpretar y comprender el conocimiento matemático, desde una visión antropológica y semiótica, fundamentada en la concepción de las matemáticas como la realización de las prácticas asociadas a significados de los objetos matemáticos, por parte del ser humano y desarrolladas en un ámbito cultural y social (Radford, 1997). Por esta razón la búsqueda de significados parciales de los objetos matemáticos es una tarea muy compleja porque es necesario realizar en un primer momento el estudio histórico-epistemológico para identificar y reconstruir el sistema de prácticas relacionadas con el objeto matemático, y luego de analizar cada práctica identificar o asignar un significado parcial al objeto según el contexto de uso del mismo; entonces, el EOS ha desarrollado herramientas para el análisis desde distintos tipos de facetas (epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, y mediacional) tanto para los procesos de diseño, implementación y evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje (figura 2.2), como para el estudio de un modelo del Conocimiento que necesita tener el profesor para una enseñanza idónea de los objetos matemáticos.


*Figura 2.2 Facetas y niveles de análisis didáctico del EOS. Fuente: (Godino, 2013)*

Las Facetas o Dimensiones no son componentes independientes, ellas se relacionan y permiten el diseño de los procesos de instrucción y de igual forma el análisis de los componentes del conocimiento del profesor para la labor de la enseñanza de los objetos matemáticos. En la tabla 2.1 se enuncian las nociones teóricas del EOS, las cuales son utilizadas como las categorías de análisis en el estudio del modelo CDM del profesor.

Tabla 2.1
*Dimensiones del EOS*

| Faceta | Definición |
|---|---|
| **Epistémica** | Conocimientos matemáticos referentes al contenido: Situaciones problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos y de los uso o significados que tiene el objeto integral en el contexto institucional, y de referencia. En el modelo CDM esta dimensión está estructurada en tres componentes:<br>Conocimiento Común del Contenido<br>Conocimiento Ampliado del Contenido<br>Conocimiento Especializado del contenido |
| **Cognitiva** | Conocimiento de cómo los estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y cómo progresan en su aprendizaje (significados personales). Esta dimensión de igual forma expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados (Idoneidad cognitiva). En este sentido, se relaciona con las dificultades y errores al abordar situaciones problemas. |
| **Afectiva** | Conocimiento de los estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada estudiante con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido. |
| **Interaccional** | Conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, organización y gestión de las tareas, resolución de dificultades de los estudiantes, e interacciones que se puede establecer en el aula. |
| **Mediacional** | Conocimiento de los recursos (tecnológicos, materiales y temporales) apropiados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes. |
| **Ecológica** | Conocimiento de las relaciones del contenido matemático con otras disciplinas, y los factores curriculares, socio-profesionales, políticos, y económicos que condicionan los procesos de instrucción matemática. |

**Nota**. Descripción de las Facetas del modelo CDM del conocimiento del profesor. Fuente Godino (2017, p. 3)

### 2.1.1 Sistemas de prácticas personales e institucionales

La noción de *sistema de prácticas* juega un papel muy importante desde el punto de vista epistemológico y didáctico. Con esta noción se asume y se hace operativo el supuesto antropológico sobre las matemáticas, en cual se apoya el EOS. Para Godino y Batanero (1994) un sistema de prácticas corresponde a:

> Toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas (p. 334).

De esta manera las prácticas o sistemas de prácticas, pueden ser realizadas por una persona o presentadas por una institución, es por esto que se clasifican en personales y sistemas de prácticas institucionales:

> El sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I (p. 337). Los sistemas de prácticas personales, asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C. (p. 339).

Las prácticas matemáticas pueden ser conceptualizadas como la combinación de una práctica operativa, a través de la cual los textos matemáticos son leídos y producidos: una práctica discursiva, la cual permite la reflexión sobre las prácticas operativas (ver figura 2.3).

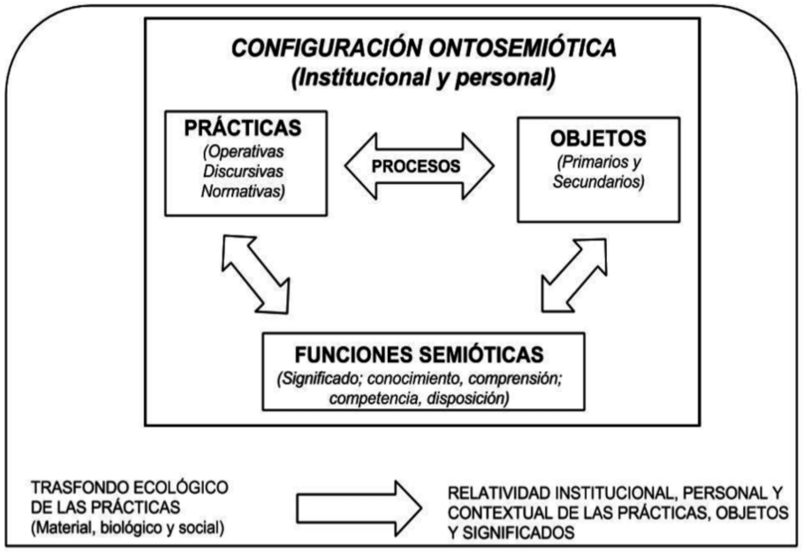



*Figura 2.3. Configuración Ontosemiótico. Fuente: Godino, 2017*

### 2.1.2 Objetos intervinientes y emergentes en los sistemas de prácticas

En Godino (2003), las prácticas matemáticas intervienen objetos *ostensivos* (símbolos, gráficos, etc.) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, etc.), que se utilizan al momento de hacer matemáticas y son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura. Es por esto que dentro de un sistema de prácticas se trabaja con objetos personales o institucionales; si los sistemas de prácticas son desarrollados dentro de una institución entonces los objetos emergentes se considerarán como *"objetos institucionales"*, mientras que, si tales sistemas corresponden a una persona, entonces serán considerados *"objetos personales"*

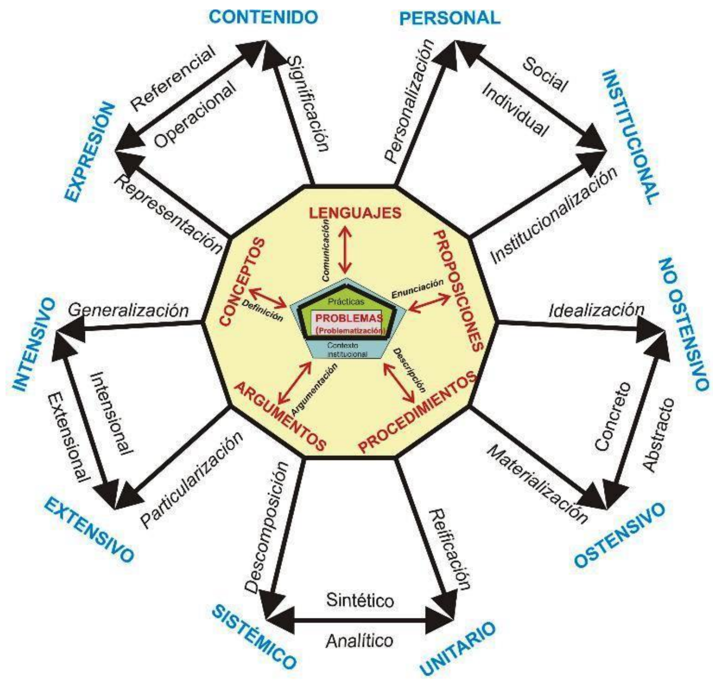



*Figura 2.4 Configuración Ontosemiótico de prácticas, objetos, y procesos matemáticos Fuente: Godino, 2013*

### 2.1.3 Significados de los objetos matemáticos

En el EOS se define el significado de los conceptos matemáticos, desde un punto de vista pragmático y antropológico, por esto el significado de un objeto matemático se define como el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona o una institución realiza para resolver una cierta clase de situaciones–problemas en las que dicho objeto interviene, entonces se podría clasificar de acuerdo a su origen en significados institucionales y significados personales. Godino y Batanero (1994, p.340) definen estos significados:

> **Significado institucional**: corresponde al sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado.

Los **significados personales**, se refieren a las prácticas matemáticas realizadas por un individuo al resolver una situación

En la figura 2.5 se observa la relación entre significados personales e institucionales y la forma como emergen en la resolución de las situaciones problema en interacción con el sistema de prácticas.

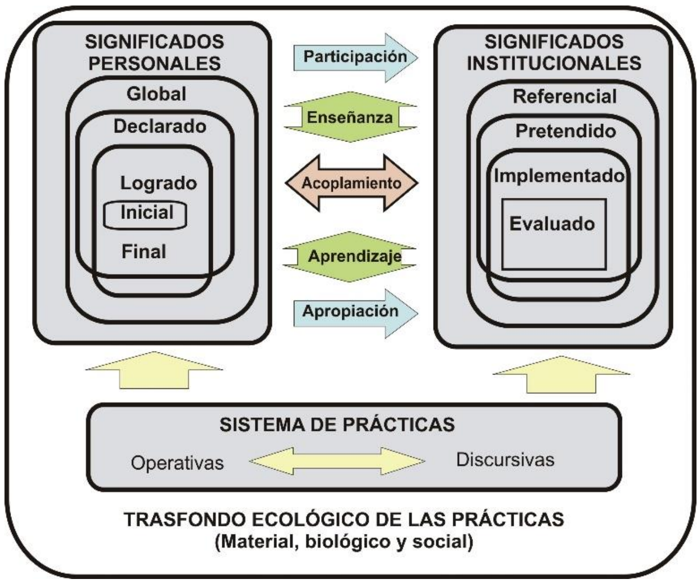



*Figura 2.5. Significados personales e institucionales. Fuente: (Godino, 2014, p.14)*

### 2.1.4 Configuraciones de objetos y procesos

Los sistemas de prácticas definidos por Godino (2003), son útiles para ciertos análisis de tipo macro didáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más detallado de la actividad matemática, en el EOS (Godino y Batanero, 1994) se ha introducido la tipología de objetos matemáticos primarios: situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos (ver figura 2.6). Estos objetos matemáticos primarios se relacionan entre sí y forman redes de objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas, formando una configuración (epistémica o cognitiva). Estas configuraciones pueden ser socio-epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales).

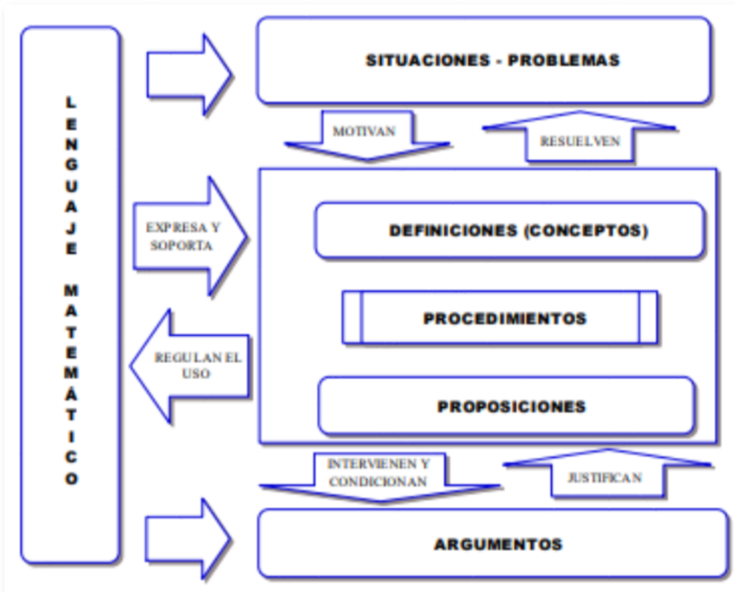



*Figura 2.6. Configuración epistémica. Fuente (Godino, Batanero y Font, 2007)*

## 2.2 Modelo del Conocimiento Didáctico Matemático CDM

En el marco del EOS, surge la propuesta denominada *Modelo del conocimiento Didáctico Matemático (CDM)* innovada por Godino (2009) donde se caracteriza y analiza el conocimiento de los profesores, esta propuesta surge tras la evolución teórica de los planteamientos hechos por Shulman (1987), Grossman (1990), Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G (2008), Kilpatrick (2008), entre otros, en la línea de investigación que analiza los componentes del conocimiento del profesor, para una enseñanza idónea de las matemáticas.

Entonces la noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones, criterios, y un desglose operativo de dicha noción, ha sido introducida en el EOS (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007) como herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva – explicativa a una didáctica normativa; esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula. Se considera que esta noción puede servir de punto de partida para una teoría de diseño instruccional (Teoría de la Idoneidad Didáctica) que tenga en cuenta, de manera sistémica, las dimensiones epistémicas – ecológica, cognitiva – afectiva, interaccional – mediacional implicadas en los procesos de estudio de las áreas curriculares específicas (Godino, 2011).

Las facetas o dimensiones se operativizan como se muestra en la tabla 2.2 buscando indicadores de análisis para las prácticas matemáticas realizadas; por tanto, se proponen indicadores que lleven un nivel más detallado de análisis para reflexionar sobre cada una de las componentes del modelo CDM como sigue:

Tabla 2.2
*Conocimiento del contenido didáctico y matemático*

| Faceta epistémica | Consigna |
|---|---|
| **Conocimiento Común** | Resolver la tarea o situación-problema relacionada con el objeto integral. |
| **Conocimiento especializado:** | Elaborar la configuración de objetos y procesos puestos en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas. |
| Tipos de problemas | Identificar las variables de la tarea; generaliza (particulariza) el enunciado. |
| Lenguajes | Resolver las tareas usando diferentes representaciones. |
| Procedimientos | Resolver las tareas usando diferentes procedimientos (intuitivos, formales). |
| Conceptos/propiedades | Identifica los conceptos y propiedades puestas en juego en las soluciones |
| Argumentos | Explicar y justificar las soluciones. |
| **Conocimiento Ampliado:** | Identificar posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados |

**Nota.** Fuente Godino (2009, p 25)

La faceta cognitiva queda más refinada y detalla, se relaciona con el aprendizaje de los estudiantes de la siguiente manera:

Tabla 2.3
*Conocimiento del contenido en relación a los estudiantes*

| **Faceta Cognitiva** | **Consignas** |
|---|---|
| Configuraciones cognitivas | Describe los tipos de configuraciones cognitivas que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea propuesta. |
| Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje, concepciones | Describe los principales tipos de conflictos de aprendizaje en la resolución de este tipo de tarea por los alumnos. |
| Evaluación de aprendizajes | Formular cuestiones que permitan explicar los significados personales de los alumnos al resolver este tipo de tareas |

**Nota.** Fuente Godino (2009, p 25)

Según Pino (2015), actualmente en el desarrollo del EOS se han refinado nociones específicas de las facetas y niveles de análisis que han permitido obtener análisis más precisos de las prácticas matemáticas y discursivas; es así como para el análisis de la faceta Cognitiva se cuenta con la herramienta de la “configuración Ontosemiótica” la cual aporta subcategorías de análisis relacionadas al CDM del profesor (en este caso del autor de la tesis), las cuales son de naturaleza matemática y didáctica.

De esta manera el CDM interpreta y caracteriza los conocimientos del profesor a partir de tres dimensiones (Figura 2.7): dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión meta didáctico-matemática.

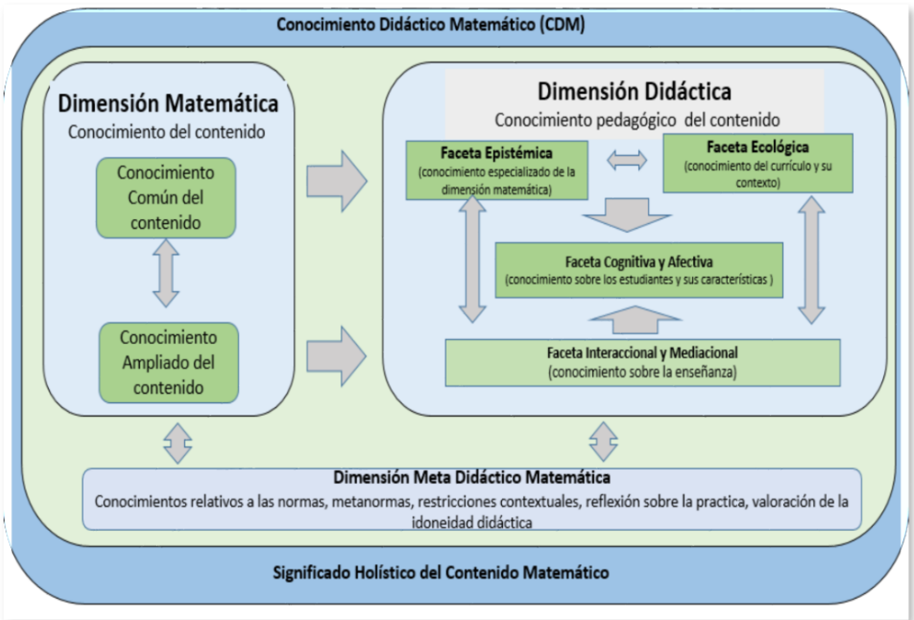



*Figura 2.7. Dimensiones y componentes del CDM (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 98)*

La dimensión matemática del CDM bajo esta reestructuración se analiza a partir de dos subcategorías de conocimientos las cuales son: el conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido.

El **Conocimiento Común del Contenido (CCC)** es aquel conocimiento que se tiene sobre un objeto concreto, que para nuestro caso corresponde a la Integral**;** el cual lleva a resolver cualquier problema o tareas propuestas en el desarrollo del currículo o planes de estudio y libros de texto de un nivel de escolaridad determinado.  En este sentido, en forma general se establecerán las prácticas matemáticas y sus significados en relación con el objeto integral, lo cual constituye una primera aproximación al conocimiento común sobre el objeto integral.

De igual manera el **Conocimiento Ampliado del Contenido (CAC) (**el cual en el modelo MKT[4] se conoce como **conocimiento en el horizonte** matemático) se define como el conocimiento que debe poseer el profesor sobre las nociones matemáticas de un objeto concreto para resolver nuevos problemas implícitos en otros contextos matemáticos, o globales del currículo. Un ejemplo se estructura desde la integral como área en el contexto matemático, cuando se define como la distancia que desarrolla un móvil bajo la curva de velocidad; bajo esto se puede entender que el profesor estará en gran parte del significado holístico del objeto matemático, cuando domina o tiene un CCC y el CAC holístico (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). En este aspecto, se indican las prácticas matemáticas y sus significados relacionados con el objeto integral, los cuales llevan a caracterizar este conocimiento común y ampliado del contenido como una primera aproximación.

En esta misma dirección diferentes autores como Godino (2009), Shulman (1986) y Ball (2000) coinciden en que el profesor al conocer la dimensión matemática de un objeto matemático, no garantiza la práctica idónea en la enseñanza del mismo; por lo que el profesor debe visualizar los factores que influyen en el desarrollo de la enseñanza de este objeto. Entonces dentro del CDM se entenderá como dimensión didáctica la que se estructura en las siguientes subcategorías de conocimiento (Pino 2015):

- Conocimiento especializado de la dimensión matemática
- Conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes
- Conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes
- Conocimiento sobre las interacciones que se suscitan en el aula

[4] Modelo de Conocimiento Matematico para la enseñanza propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008).

- Conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes
- Conocimiento sobre los aspectos curriculares, contextuales, sociales, políticos y económicos

Se resalta que cada subcategoría hace referencia a las facetas descritas en la tabla 2.1, donde el conocimiento del profesor va orientado a aspectos cognitivos y afectivos relacionados con los estudiantes en el proceso de enseñanza del objeto matemático. En el presente estudio se caracteriza dentro de la dimensión didáctica en el modelo CDM (Pino, 2015) la faceta epistémica relacionada con el conocimiento considerado como especializado en la dimensión matemática (CCC y CAC) y la dimensión cognitiva relacionada con el conocimiento de los estudiantes y sus características siguiendo el modelo propuesto por Pino (2015).

Entonces la *faceta o dimensión epistémica* del CDM, adopta las concepciones planteadas por Schoenfeld y Kilpatrick (2008) en su modelo de "proficiencia" sobre el conocimiento de las matemáticas escolares en profundidad; de igual manera Hill, Ball y Schilling (2008) determinan el **Conocimiento Especializado del Contenido (CEC)** como el conocimiento matemático donde el profesor: manipula diferentes procedimientos para resolver un problema, interpreta las diferentes representaciones del objeto en un contexto o situación problema, relaciona el objeto matemático que se enseña con otros objetos matemático y comprende los distintos significados parciales relacionados con el objeto matemático.

En la *faceta cognitiva* y *afectiva* hace referencia a los conocimientos que debería poseer un profesor de matemáticas sobre las características y aspectos que se relacionan con la forma de actuar, pensar, conocer y sentir de los estudiantes en la resolución de un problema matemático

Entonces la *faceta cognitiva* del CDM orienta a los profesores sobre los conocimientos suficientes para reflexionar y evaluar los significados personales con respecto a los significados institucionales; para esto el profesor debe anticipar y orientar los procesos – respuestas, concepciones, conflictos, relaciones entre objetos del estudiante en el desarrollo de un problema matemático.

De igual manera la *faceta afectiva* del CDM hace referencia a los conocimientos que debe poseer el profesor para comprender y tratar los estados de ánimo de los estudiantes, al igual que los factores emocionales resultantes del proceso de resolver un problema o tarea matemática; la *faceta Interaccional* del CDM se interpreta como los conocimientos donde el profesor implementa y evalúa la secuencia de interacciones entre los participantes en el proceso de enseñanza en el desarrollo del contrato didáctico sujeto al análisis de las normas y las metanormas; ahora la organización y gestión de recursos para el desarrollo del aprendizaje está bajo el análisis de la *faceta mediacional* del CDM, y corresponde al resultado de los conocimientos que gestiona el profesor para la pertinencia del uso de materiales, recursos tecnológicos y tiempos a cada acción del proceso, para potenciar el aprendizaje de un objeto matemático; por último la *faceta ecológica* del CDM hace referencia a los conocimientos que el profesor tiene sobre el currículo con referencia a otros currículos, aspectos sociales, políticos y económicos que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Las seis facetas descritas anteriormente componen la dimensión didáctica del CDM, las cuales llevan a analizar, describir, desarrollar y evaluar los conocimientos de los profesores de matemáticas inmersos en los procesos de enseñanza y aprendizaje; puesto que los profesores deben conocer y comprender los aspectos que se encuentran en cada fase del diseño didáctico (Pino 2015).

El conocimiento de las normas y metanormas, condiciones y restricciones de contexto, bajo la reflexión estructurada del profesor sobre su práctica hacen parte de la Dimensión meta didáctico-matemática del CDM sujeta a los criterios de idoneidad planteados en cada dimensión del CDM.

## 2.3 Aprendizaje, Comprensión y Sentido en el EOS

En Godino (2011) se asume que el término "aprendizaje" dentro del marco del EOS involucra la aprehensión de los significados institucionales pretendidos por el currículo, mediante la gestión de prácticas operativas y discursivas desarrolladas en una clase. Esto quiere decir la evaluación continua entre el progreso de adquisición de los significados parciales y los significados institucionales planificados.

En esta dirección, Godino, Batanero, y Font (2007) presentan dos maneras de entender el concepto de "comprensión": vista como un proceso mental y como una competencia; estas dos formas surgen de acuerdo a la concepción epistemológica, es por esto que en enfoques relacionados con la Didáctica de la Matemática, se interpreta como un proceso mental, pero en el EOS, por su visión pragmatista, se entiende como una competencia puesto que se entenderá que un sujeto comprende un objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas (visión pragmática de los objetos matemáticos).

De igual manera el término "sentido" hace referencia a aquellos subsistemas de prácticas que se utilizan en un contexto determinado y se interpreta como un significado parcial del objeto matemático. Entonces en la relación existente entre un objeto matemático y los sistemas de prácticas de donde emerge, la identificación de los significados parciales asociados, en el EOS es importante ya que, según Godino, Contreras y Font (2006), es la razón del ser del objeto.

# Capítulo 3. Marco metodológico

*"En ciencia, si sabes lo que estás haciendo, no deberías estar haciéndolo."*
*Richard Wesley Hamming*

En el capítulo se presenta la metodología a través de la cual se desarrolló el estudio; se define el enfoque de investigación, así como el diseño y las fases que se siguieron para alcanzar cada uno de los objetivos planteados, junto al proceso que se realizó para dar respuesta a la pregunta de investigación. De igual manera, se aborda la unidad de análisis involucrada en el estudio, y las categorías de análisis para el diseño del cuestionario CDM-Integral. Por último, se dan a conocer las técnicas y herramientas usadas en la recolección y análisis de la información, las cuales permitieron caracterizar los significados parciales del objeto matemático Integral.

## 3.1 Paradigma y Nivel de Investigación

El presente estudio se enmarca en el paradigma de investigación interpretativo, con un enfoque mixto donde se da relevancia a la parte cualitativa (Hernández y Mendoza, 2018), al tratar de entender y comprender la realidad social, desde los integrantes de una comunidad en la capacidad de interpretar el mundo, desde sus expectativas, vivencias, sentimientos y percepciones del contexto. Es por ello, que el enfoque cualitativo es fundamental en los estudios que influyen en la formación de profesores debido a que este estudio se encuentra sujeto a comprender e interpretar las problemáticas emergentes en el desarrollo de su labor y el impacto que tiene su enseñanza en los estudiantes, profundizando en la forma como construyen sus conocimientos, y significados de los objetos matemáticos y en la forma como se interpretan estos objetos.

En la misma línea se dice que esta investigación es de tipo Investigación - Acción definida desde el contexto de Elliot (2000), donde se propone un análisis de la práctica profesional en dos componentes, el primero desde los valores éticos, el cual no es el objetivo del presente documento, ya que este estudio se centra en la caracterización epistémica y cognitiva del conocimiento del futuro profesor de la asignatura de Cálculo Integral, el cual corresponde a la segunda componente en el análisis de Elliot, relacionado con los conocimientos necesarios del profesor en un grado elevado. Desde este punto de vista la dirección del documento se encuentra en una *racionalidad técnica*, es decir la relación entre la práctica profesional y el conocimiento adecuado aplicado a problemas prácticos (técnicos por naturaleza). En relación con los objetivos establecidos se busca identificar los problemas subyacentes a través de la historia (significados institucionales en el EOS), para llegar a caracterizar y evaluar el conjunto de saberes y prácticas necesarias para los futuros profesores que pretenden dar una enseñanza idónea en tópicos de cálculo integral.

De esta forma, el nivel de la investigación es de tipo exploratorio; ya que a nivel local e internacional la caracterización de la dimensión epistémica y cognitiva del conocimiento del profesor sobre el objeto del Cálculo Integral, ha sido poco estudiada, y junto con el diseño metodológico propuesto por el EOS, abordado, se espera llegar a generar un campo más amplio de investigación. De igual forma, se encuentra a nivel descriptivo, ya que en la investigación se desarrolla la reconstrucción de un estudio histórico-epistemológico con el cual se busca reflexionar sobre el conocimiento del profesor, siguiendo el Modelo CDM (Pino, 2015) en las categorías de *faceta epistémica* y *faceta cognitiva.*

## 3.2 Diseño y fases de la investigación

La presente investigación se encuentra en la línea de investigación didáctica de Formación de Profesores por lo que el EOS (Godino, 2014), es considerado un marco teórico y metodológico óptimo para el diseño de la investigación; de este enfoque se utilizaron las herramientas e instrumentos, las cuales permiten analizar la dimensión epistémica y cognitiva del conocimiento del profesor sobre el objeto Integral.

Según Godino (2017) al asumir el EOS como marco teórico y metodológico para el desarrollo de la investigación, se considera la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que puede ser comprendida al articular coherentemente los enfoques epistémicos, cognitivos, socioculturales y pedagógicos con el objetivo de lograr diseños instruccionales idóneos. Las herramientas teóricas y metodológicas del EOS centran su interés en la comprensión de los significados personales e institucionales de los objetos matemáticos emergentes de los sistemas de prácticas matemáticas que realiza una persona o un grupo de personas al resolver situaciones – problemas en un contexto social y cultural específico. Bajo los anteriores argumentos la presente investigación se desarrolla en dos partes como se muestra en la figura 3.1.

La primera parte se desarrolló, con el fin de lograr el objetivo general propuesto de Caracterizar el Conocimiento del estudiante de formación Matemática relativo al contexto institucional, para que la enseñanza del objeto integral tenga la mayor idoneidad epistémica y cognitiva; para esto un primer paso fue la realización del estudio histórico-epistemológico, como base en una investigación en Didáctica de la Matemática, el cual lleva al conocimiento del significado Holístico del objeto Integral; posteriormente, en la segunda parte, se propone la creación del instrumento CDM- Integral con el cual se busca caracterizar las dimensiones epistémicas y cognitivas, basados en las prácticas y significados institucionales del objeto integral identificado en el estudio histórico y la triangulación con la información proporcionada por el análisis realizado en los currículos y libros de texto.

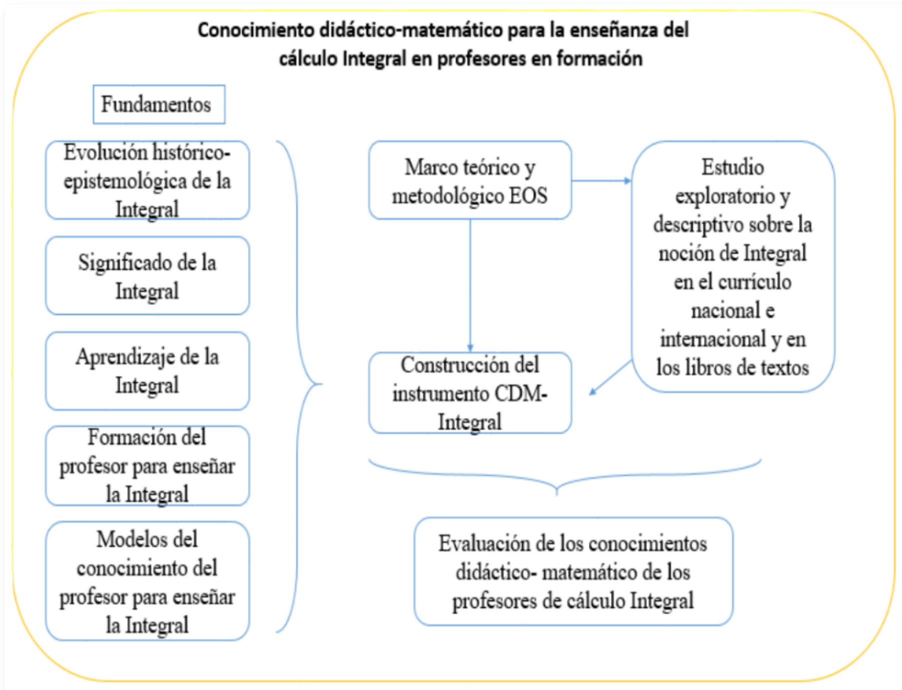



*Figura 3.1 Diseño y fases de la investigación. Fuente: (elaboración propia)*

Con cada una de las fases ilustradas en la figura 3.1, se pretende dar respuesta a los objetivos planteados para la investigación. Esto implica que las características del CDM del profesor deben ser abordadas con diferentes instrumentos de análisis y medida, según la metodología propuesta por el marco teórico y en concordancia con la metodología de Investigación – acción propuesta por Elliot (1994).

La primera fase (F1), corresponde al estudio epistemológico e histórico, donde se utiliza el análisis epistémico propuesto en el EOS, el cual consiste en describir la naturaleza de los objetos matemáticos, identificados a lo largo de la historia, y relacionarlos en diversas configuraciones epistémicas, cada una de las cuales proporciona un significado parcial del objeto integral, para este estudio nos apoyamos en la infografía y bibliografía existente en bases de datos, lo cual se considera como un estudio documental (Fiorentini y Lorenzato, 2015).

En la revisión de los principales acontecimientos de cada época, se recogen los significados parciales de la integral definida en una tabla resumen donde se expone cada configuración epistémica, determinada por las seis entidades primarias que interviene en la actividad matemática: situaciones, lenguaje; procedimientos, definiciones; proposiciones y argumentos (Godino, 2014; Crisóstomo, 2012; Sepúlveda, 2016), determinando la emergencia de un significado parcial asociado a cada Configuración Epistémica. Y, por tanto, se llega a la caracterización del significado holístico del objeto integral por lo cual se pueden considerar estos significados como parte de la caracterización de la dimensión epistémica del CDM, es decir, este conjunto de significados parciales y sus relaciones corresponden al conocimiento del contenido matemático que el futuro profesor debería tener sobre este objeto matemático (CCC y CAC), y el conocimiento especializado del profesor sobre el objeto integral comprende el reconocimiento de cada una de las configuraciones epistémicas y sus relaciones, es decir la comprensión por parte del profesor de cada significado parcial del objeto asociado a la configuración. Por tanto, en esta fase se dio cumplimiento a los objetivos específicos:

**OBE1.** Caracterizar los pares (Prácticas, Configuración de objetos en las prácticas) a partir del estudio histórico- epistemológico del objeto integral, para identificar los significados parciales del objeto matemático y así reconstruir el significado global del objeto integral.

**OBE2.** Caracterizar el significado global de referencia del objeto integral pretendido en los planes de estudio del programa de Licenciatura en Matemáticas.

**OBE3.** Caracterizar el significado del objeto integral pretendido por los libros de texto (4 libros).

En la caracterización de los significados parciales institucionales se realiza un estudio documental de triangulación de información donde se toman los planes de estudio pertenecientes a un grupo formado por las principales instituciones de formación matemática en el país, y las temáticas que estas presentan en común (significados parciales de referencia), en la misma línea se toman cuatro libros adscritos a estos planes de estudio como bibliografía, donde se les realiza un análisis didáctico de texto según lo expuesto por Crisóstomo (2014) para determinar el significado de referencia por los libros de texto. Una vez terminados estos procesos, se reconstruye junto a los significados institucionales aportados por el estudio histórico el significado Global del objeto Integral

El desarrollo de la segunda fase del estudio (F2), corresponde a la caracterización de la dimensión cognitiva del CDM del profesor, para esto, se identifican por una parte algunos de los conflictos semióticos potenciales asociados a dichas configuraciones epistémicas y de igual forma se describen los conflictos semióticos descritos en diversas investigaciones, buscando contrastar conflictos semióticos comunes. Por esto, se diseña el instrumento denominado cuestionario CDM-Integral, partiendo de los estudios asociados a la dificultad del aprendizaje del Cálculo Integral, por lo que se forma una base de 30 problemas de los cuales se seleccionan 14 tareas para la construcción del instrumento relacionado con problemas del estudio histórico – epistemológico, libros de texto y estudios relacionados con el Cálculo Integral. Este cuestionario, el cual se somete al juicio de expertos para determinar su validez y confiabilidad sirve como fundamento para el análisis de la dimensión cognitiva, donde se observan los principales obstáculos y errores presentados por los estudiantes cuando se enfrentan a problemas relacionados con el objeto integral. Por tanto, se da cumplimiento al objetivo:

**OBE4.** Caracterizar la dimensión cognitiva y epistémica en el modelo del CDM del conocimiento del profesor para el objeto integral según el significado Global del objeto matemático y el establecimiento de un significado de referencia propuesto en los libros de texto.

## 3.3 Unidad de Análisis

Para el estudio de la faceta epistémica y cognitiva del CDM del profesor, se toma como muestra a dos grupos de estudiantes en la asignatura de Cálculo Integral de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, y se implementa el cuestionario en dos sesiones de clase de 2 horas académicas, por el profesor de la asignatura.

## 3.4 Técnicas e Instrumentos de recolección y análisis de Datos.

En la tabla 3.1, se presentan las fases, técnicas y herramientas usadas en el estudio para la recolección y análisis de la información, lo cual conduce a la caracterización de los significados parciales del objeto Integral, y al análisis de la Dimensión Epistémica y Cognitiva del Objeto Integral.

Tabla 3.1
*Fases, técnicas y herramientas usadas en la investigación.*

| **Fases de la investigación** | **Recolección de la información** | | **Herramientas para el análisis de la información** |
|---|---|---|---|
| | **Técnicas** | **Herramientas** | |
| Estudio histórico epistemológico del objeto Integral | Análisis Documental | Revisión documental de libros de texto de historia, tesis doctorales, tesis de maestría y artículos relacionados con estudios históricos-epistemológicos del objeto integral. | Reconstrucción del significado Holístico del objeto Integral, a través de las redes conceptuales emergentes de las configuraciones epistémicas establecidas en el EOS |
| Análisis Epistémico de problemas fenomenológicos | Análisis Epistémico | Identificación de problemas y fenómenos relacionados al origen y evolución del objeto Integral | Configuraciones Epistémicas relacionadas con la tipología de objetos primarios en el EOS |
| Análisis epistémico del currículo de Cálculo Integral | Análisis Documental | Revisión documental de programas de estudio de la asignatura de Cálculo Integral. Identificando significados parciales | Triangulación de significados parciales de referencia a través de las temáticas propuestas. |
| Análisis epistémico de los libros de texto Cálculo Integral | Análisis Documental | Revisión documental de libros universitarios más utilizados en la asignatura de Cálculo Integral. Identificando significados parciales | Triangulación de significados parciales de referencia a través de las temáticas propuestas. |
| Diseño del cuestionario CDM Integral | Análisis Documental | Revisión documental de libros de texto de historia, tesis doctorales, tesis de maestría y artículos relacionados con estudios de caracterización del conocimiento integral. | Construcción, selección y análisis de preguntas que permiten caracterizar el CDM (Pino 2015) del futuro profesor de Cálculo Integral, validación por juicio de expertos y estudio de fiabilidad del cuestionario a través de la prueba piloto. |
| Caracterización de la Dimensión Epistémica y Cognitiva del CDM del futuro profesor de Cálculo Integral. | Análisis Dimensional del CDM | Prueba piloto del cuestionario CDM- Integral | Con base en el cuestionario CDM-Integral se evalúan las categorías del CDM (CCC, CEC, CAC), al igual que los obstáculos y errores para la enseñanza del Cálculo Integral. |

**Nota.** Cada sombreado de la tabla identifica una fase de Investigación. Fuente: Elaboración Propia

## 3.5 Validez y confiabilidad del cuestionario CDM – Integral

Para abordar el problema de la validez de los instrumentos utilizados, se parte del supuesto que el objeto de conocimiento (en nuestro caso el objeto Integral) puede seguir siendo el mismo, pero cambia el enfoque de su visión desde su aplicación, es decir, desde las prácticas matemáticas donde se involucra ante la necesidad de resolver nuevos problemas. Esto quiere decir que una prueba es válida cuando mide realmente las variables que se quieren medir, además debe existir una consistencia entre lo que se pregunta y la forma en que se definen los problemas a evaluar (Pacheco, 2015).

En la misma línea, la confiabilidad de un instrumento hace referencia al factor en el cual, al repetir la aplicación del instrumento, se reproducen iguales resultados, por ejemplo, una cinta métrica que mide una vara varias veces y toma diferentes medidas, es claro que al mostrar diferentes resultados para una misma medición el instrumento no será confiable (Pacheco, 2015).

Entonces en el diseño de cuestionario CDM-Integral se busca la validación del instrumento, al someter la prueba a juicio de expertos que definieron desde su percepción la apropiación de los conocimientos a ser evaluados para su análisis. De igual manera el cuestionario CDM-Integral fue sometido a una prueba piloto y con los resultados de este se visualiza la fiabilidad del cuestionario a través de una prueba estadística denominada "coeficiente alfa de Cronbach" para llegar a definir un cuestionario final, que permita analizar en parte el CDM del estudiante o del profesor de matemáticas para el Cálculo Integral ya que se caracteriza solo la dimensión epistémica y la cognitiva para este modelo.

# Capítulo 4. Primer Resultado: Estudio histórico, epistemológico y fenomenológico del objeto Integral

*"Si no conozco una cosa, la investigaré"*
*Louis Pasteur*

En el presente capítulo se da a conocer el desarrollo de un estudio histórico-epistemológico, con el objetivo de caracterizar los problemas relacionados con el objeto Integral, los cuales otorgan el origen de los significados parciales del objeto Integral, el cual se constituye como un primer aporte del autor de la tesina, el cual se encuentra como autor del capitulo de libro "La Arqueología Mateamtica: Estudios históricos, epistemológicos y Fenomenológicos". Entonces, la reconstrucción del significado favorece el diseño de propuestas didácticas relevantes al área. El resultado de este estudio corresponde a la identificación del significado global del objeto Integral, el cual se compone de identificar las configuraciones epistémicas asociadas a los sistemas de prácticas de las problemáticas sociales de cada cultura a través de la historia, y la asociación de significados parciales del objeto de estudio, estos se relacionan y forman una red de significados, los cuales constituyen el significado Global y Holístico del objeto Integral. Este estudio permite caracterizar la dimensión epistémica en el modelo CDM del conocimiento del profesor, identificando los significados que debe conocer el profesor de cálculo integral y con mayor razón el futuro profesor dado que la investigación tiene como línea de trabajo la formación inicial de profesores.

## 4 .1 El objeto integral en la historia de las Matemáticas

En Muñoz (2007) se establece la emergencia del objeto integral definida, no se escabulle a los paradigmas sociales y científicos admitidos diferentes períodos de la historia, designa como el marco epistémico de un momento histórico. En el sentido que, la importancia de estos estudios histórico-epistemológicos radica en los aportes que representa para la implementación de prácticas matemáticas, vistas desde un recorrido que parte desde la edad antigua hasta la edad contemporánea, para llegar a identificar algunas concepciones personales o institucionales en torno al objeto de estudio y de igual forma, la importancia para este estudio se encuentra en la reconstrucción del significado Global del objeto integral, el cual se reconstruye desde la identificación de significados parciales del objeto, reconstrucciones que se realizan según las prácticas matemáticas desarrolladas en cada cultura. Este significado conforma todo un marco conceptual tanto para el docente como para el estudiante.

Entonces para su realización se hace un estudio documental, partiendo de las diversas investigaciones históricas realizadas, hasta llegar a la reconstrucción de un significado global del objeto integral donde sirve emplear la herramienta del análisis semiótico establecida en el enfoque EOS. Estos estudios epistemológicos resultan muy complejos debido precisamente a su carácter de investigación documental, ya que hay que ubicar el objeto integral dentro de las prácticas de cada cultura y según los períodos establecidos en la historia. Por tal motivo, se presenta esta reconstrucción del significado global del objeto integral en la *contribución o aporte en cuanto a la asignación de los significados parciales asociados al objeto integral* que pueden ser utilizados por el docente al momento de identificar los significados pretendidos para sus procesos de instrucción.

Este objeto integral, en su evolución histórica se fue transformando debido a las diversas prácticas matemáticas realizadas para solucionar problemas como los relacionados con áreas, volumen y otras aplicaciones. Surge entonces la pregunta, ¿En qué momento de la historia de las matemáticas, se comenzó a trabajar y a manipular las problemáticas relacionadas con el objeto integral?, Responder a esta pregunta significa construir un marco histórico epistemológico y fenomenológico direccionado en primer lugar a caracterizar el conocimiento del docente relacionado con la dimensión epistémica de los objetos matemáticos para poner este conocimiento en marcha en el diseño de sus procesos de instrucción. Por tanto, se presenta a continuación, el desarrollo histórico–epistemológico del objeto integral según los diversos periodos en la historia de la humanidad.

### 4.1.1 Periodo 1. Edad Antigua (Aproximadamente 1200 a. C a 200 a. C)

En un primer momento, referenciamos a los griegos (aproximadamente 1200 a. C), como una de las primeras culturas que empezaron a estudiar la composición y las propiedades de los objetos geométricos, contando con gran variedad de aplicaciones para trabajos en mecánica, poleas y engranajes: es aquí donde por cuestiones sociales surge el periodo Alejandrino o Helenístico (S. IV a. C y S. I a. C) con el interés de las grandes escuelas de la época de realizar trabajos geométricos relacionados con la deducción de medidas; como la longitud, el área y volúmenes, intentando obtener precisión en sus mediciones: de igual forma, surgen algunos obstáculos en nociones como el infinito matemático, noción de continuidad en las escalas enteras y el problema del límite matemático, lo cual evadían mediante el uso de constructos gráficos con el uso de la regla y el compás (Kline,1972). En estas problemáticas se destacan importantes matemáticos de la época como Arquímedes, Euclides y Eratóstenes. De esta forma se identifica un primer problema (tomado de Alcaraz, 2006) encontrado en el papiro de Rhind (aprox. 1650 a.c), referente al cálculo de áreas donde se establece que las primeras civilizaciones ya conocían algunas reglas o fórmulas para calcular de áreas,

**Configuración epistémica 1.1 (CE1.1): Cálculo de áreas de regiones por fórmulas**

**Problema 1.1**. *¿Cuál es el área de un triángulo de lado 10 jet y base 4 jet? (papiro Rhind – aprox 1650 a.c). (*Gills y Shute,1987*)*
**Significado parcial SP1.1. Área de una región por fórmula**

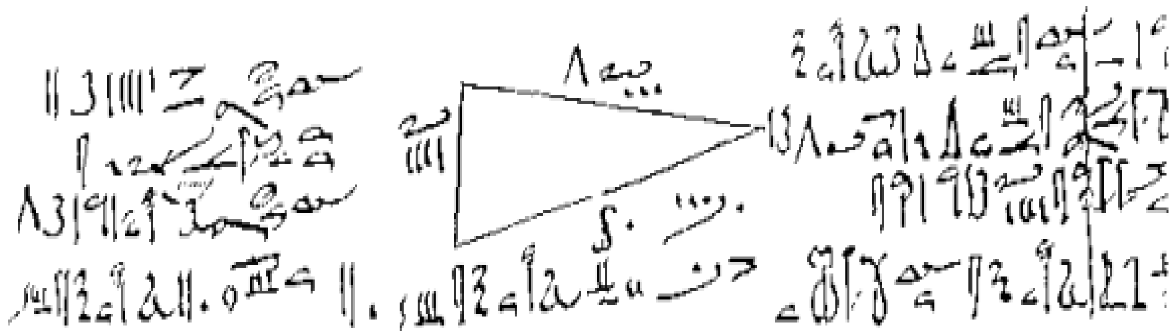


*Figura 4.1. Problema 51 Papiro de Rhind. (Fuente: Gills y Shute,1987)*

**Solución dada al problema 1.1:**

En la traducción propuesta por Ahmes dice "Toma la mitad de 4 para formar un rectángulo. Multiplica 10 veces 2 y el resultado, 20, esa es el área buscada" (Gills y Shute, 1987 pág. 527).

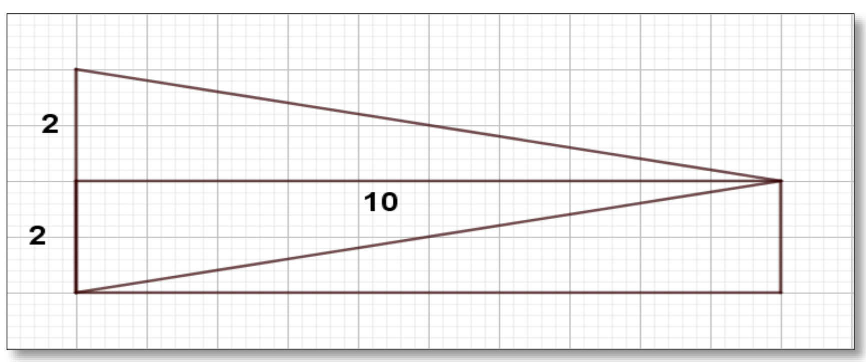



*Figura 4.2 Solución Gráfica de Ahmés al problema 51 Fuente: (Gills y Shute, 1987 pág. 527).*

**Análisis a la configuración epistémica 1.1**

Este problema geométrico fue trabajado en la cultura egipcia y retomada por la cultura griega; en la edad Antigua, en él se pide hallar el área de una región triangular, se soluciona con algunas reglas y patrones establecidos previamente. Este *problema* es uno de los más representativos en el desarrollo de las *situaciones problema* desarrollados en la época. Ahmés describe los *conceptos* de mitad, rectángulo, área como soporte para la solución del problema. En la misma línea los procedimientos y *propiedades* eran apoyados en la construcción con regla y compás, donde se conocía la operación de multiplicar. De igual manera las construcciones geométricas se interpretan como el *lenguaje y argumento* del desarrollo de la problemática. El conjunto de prácticas asociadas a la resolución de estas situaciones problema es la que nos origina el significado parcial de área (SP1.1).

**Configuración Epistémica 1.2 (CE1.2): Cálculo de volúmenes de sólidos por fórmulas**

Problema 1.2. *"El problema 14 es de geometría y pide calcular el volumen de una pirámide truncada."*

**Significado Parcial SP2.1 Volúmenes por fórmulas**

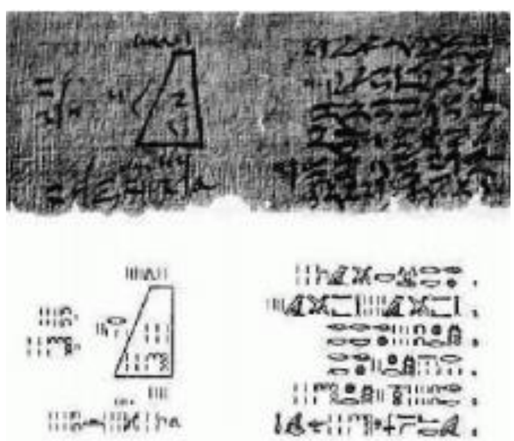


*Figura 4.3. Problema 14 del Papiro de Moscú Fuente: (Albendea, 2011).*

En los inicios de trabajos con volumen los griegos basaron su teoría en el desarrollo de trabajos agrimensores hechos por la cultura egipcia y Mesopotámica por lo que se intuye que los griegos conocían algunas fórmulas básicas para el cálculo de volúmenes como lo muestra la configuración epistémica 1.2 relacionada con el problema 14 del Papiro de Moscú (Figura 4.3), la cual trata sobre el hallazgo del volumen de una pirámide truncada

**Solución dada al problema 1.2:**

Según el escriba desconocido y en lenguaje moderno la solución dice:

"Si te dicen: una pirámide truncada de 6 como altura vertical por 4 en la base por 2 en el extremo superior. Tienes que cuadrar este 4, resultando 16. Tienes que doblarlo, resultando 8. Tienes que cuadrar 2, resultando 4. Tienes que sumar el 16, el 8 y el 4, resultando 28. Tienes que tomar un tercio de 6, resultando 2. Tienes que tomar dos veces el 28, resultando 56. Ves, es 56. Lo has hecho correctamente.": (Albendea, 2011, p10)

**Análisis a la configuración epistémica 1.2**

Esta configuración hace referencia a la situación problema encontrada en el Papiro de Moscú planteada en el primer periodo denominado problema 2 y cuya representación se encuentra en la figura 4.3. Se relaciona con el volumen de una pirámide truncada, por el cual este problema se relaciona con *problemas* de capacidad de graneros de la época; el escriba desconocido define *conceptos* como pirámide truncada, altura, base y tercio, y se definen *procedimientos* y *propiedades* como doblar, sumar, cuadrar, dos veces; de igual manera se encuentran *lenguajes* y *argumentos* geométricos característicos de la edad antigua.

De esta forma este sistema de prácticas hace emerger el significado parcial de volumen (SP2.1).

**Configuración Epistémica 1.3 (CE1.3): Problemas de áreas de figuras en la escuela Pitagórica**

**Problema 1.3**: *"El cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados sobre los catetos". (*González, 2008 p. 15)
**Significado Parcial SP3.1 Método exhaustivo para calcular áreas**

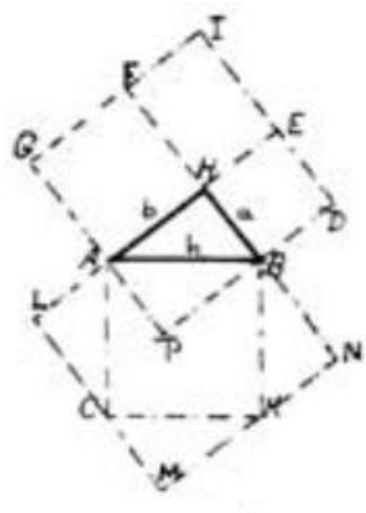



*Figura 4.4. Demostración Teorema de Pitágoras inicial. Fuente: (González, 2008).*

**Solución dada al problema 1.3**

La solución expuesta por González (2008), en un idioma geométrico moderno dice: el cuadrado ACKB construido sobre la hipotenusa del triángulo dado ABH, completado con cuatro triángulos rectángulos congruentes con el dado, determina el cuadrado HLMN (ver figura 4.4), que es igual al cuadrado GPDI, el cual a su vez se puede obtener al completar los dos cuadrados sobre los catetos, AHFG, HBDE, con sendos rectángulos iguales entre sí e iguales en área a los cuatro triángulos anteriores. Por tanto: ACKB = AHFG + HBDE. Es decir: $h^2 = a^2 + b^2$ . Los polígonos HMKCL y NDBAG son congruentes. El polígono HMKCL se obtiene al completar el cuadrado sobre la hipotenusa del triángulo dado ABH, ABKC, con tres triángulos rectángulos congruentes con el dado. El polígono NDBAG se obtiene al completar los dos cuadrados sobre los catetos del triángulo dado ABH, HBDE y HAGF, con tres triángulos rectángulos congruentes también con el dado. Por tanto: ABKC = HAGF + HBDE. Es decir: $h^2 = a^2 + b^2$.

**Análisis a la configuración epistémica 1.3**

Esta configuración epistémica hace referencia a una *situación problema* donde se quiere demostrar un teorema principal de la época y cuyo desarrollo se encuentra en un *lenguaje* geométrico en la figura 4.4, aquí se encuentran *conceptos* como cuadrado, hipotenusa, cateto, triángulo, rectángulo, triangulo rectángulo y polígono, y lleva *procedimientos* como: construir (regla y compás), y completar; además, utilizan *propiedades* como congruencia de figuras, se obtienen *argumentos* como $h^2 = a^2 + b^2$.

De esta forma este sistema de prácticas hace emerger el significado parcial de área (SP3.1).

Años posteriores el matemático, Eudoxio de Cnido (390 a C. -337 a C), trabajando la teoría de la proporcionalidad y geometría, tratando de llegar a una mejor comprensión de los números enteros con datos continuos, es decir, para poder expresar dos razones inconmensurables en una igualdad, propone el método de exhausción, el cual es un antecedente para el origen del cálculo infinitesimal y por tanto del Cálculo Integral, el cual permite calcular las longitudes de las curvas, áreas y volúmenes (Kline,1972). El método de exhausción se encuentra en un ejemplo en el Libro XII de la obra “Elementos” de Euclides.

En este recorrido, existió una escuela asociada a Pitágoras de Samos (585-400 a.c) donde se realizó un paralelo entre la geometría y la aritmética, relacionando los números como puntos geométricos, y a su vez las figuras geométricas como conjuntos de puntos, con el objetivo principal de determinar la relación de los números como cantidades discretas (a su vez uno múltiplo del otro) determinando que toda magnitud (línea, superficie, volumen entre otras) fuera escrita como un número, lo cual en construcciones posteriores llevó a un fracaso al encontrarse con unidades inconmensurables, originando el nacimiento de los números irracionales y una primera idea del infinito (Ordoñez, 2011). Puesto que existía una relación biunívoca entre un número (discreto) y una longitud, entonces en ese orden de ideas aparece la pregunta ¿a una razón inconmensurable que número corresponde? Otros problemas de interés en la emergencia de la integral, asociados a los pitagóricos se relacionan con el cálculo de áreas, como el problema de construir un polígono de cierta área dada pero semejante a otra figura dada; áreas excedentes o deficientes a otra figura dada (Kline, 1972).

Se establece en Boyer (1949) que los griegos intentando encontrar una unidad de medida común para todas las magnitudes, tuvieron que tener una idea del infinito, hacia el menor de todos los múltiplos, esto les generó una gran problemática entre lo continuo y lo discreto, la cual descartaron de sus axiomas y escritos. Años después Zenón de Elea (490 a. C – 430 a. C) propone paradojas asociadas con describir la razón entre el objeto y su movimiento. La primera de ellas denominada la “Tortuga y Aquiles”: Aquiles estaba disputando una carrera contra una tortuga. Aquiles concede a la tortuga una ventaja, la pregunta es ¿en qué momento Aquiles alcanza la tortuga? aquí Zenón se opone a la divisibilidad infinita del espacio, ya que, si el espacio se puede dividir en infinitas partes, Aquiles jamás alcanzaría a la tortuga.

En una nueva paradoja denominada de la “flecha” o “cinematográfica”, Zenón establece una flecha en vuelo en cualquier instante de tiempo, está no se mueve de donde está ni a donde no está.  Esto quiere decir que esta no se moverá a su destino puesto que no hay paso del tiempo, y no se mueve de donde parte puesto que ya está allí. Es claro que Zenón logra estructurar dos vertientes existentes en la época, las cuales giraban en torno a la idea de límite, lo cual llevó a la separación de la geometría y la Aritmética (Boyer 1959, Kline 1972).

**Configuración Epistémica 1.4 (CE1.4): Método de exhausción**

**Problema 1.4**: *"La diferencia en área entre un círculo y un polígono regular inscrito puede hacerse tan pequeño como se desee" (Kline, 1972 p.. 117).*
**Significado Parcial SP1.4=SP3.2 Método exhaustivo**

**Solución dada al problema 1.4:**

La solución al problema 1.4 aparece como la *proposición:* Dado un círculo y un polígono inscrito en él, al trazar el punto medio al arco formado por los puntos extremos del lado del polígono, se forma un triángulo de área mayor que la diferencia entre el círculo y el polígono. Entonces, si se duplica el número de lados del polígono indefinidamente, se obtiene cada vez un área menor (ver figura 4.5).

**Análisis a la configuración epistémica 1.4**

Para el análisis de esta configuración se tomó como referencia el problema 4 propuesto en el periodo de la edad antigua, que a su vez pertenece a un *problema* de demostración del libro XII de los elementos de Euclides y representado en un *lenguaje* gráfico en la figura 4.5, Para la solución del problema, se parte de la *proposición: "dado un circulo y un polígono inscrito en él, mediante transformaciones la diferencia de área entre estos es cada vez menor",* se utilizan *conceptos* como: diferencia, polígono, arco, triangulo y área; y en la solución se utilizan *procedimientos* como: duplicar y trazar; se resalta que en esta época la única herramienta de desarrollo de problemas era la regla y el compás. Para concluir, este conjunto de prácticas matemáticas utilizadas para dar solución al problema hacen emerger el significado parcial denominado el método de exhausción (SP3.2).

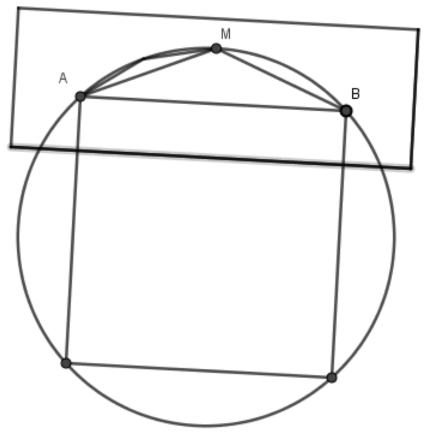



*Figura 4.5. Demostración del Método exhaustivo. Fuente: (Kline, 1972)*

Con la ayuda del método de exhausción, Eudoxo logró demostrar que la razón entre el área de dos círculos son proporcionales a los cuadrados de los radios, y de forma tridimensional, los volúmenes de dos esferas son proporcionales a los cubos de sus radios. Además, llega a exponer que el volumen de una pirámide corresponde a la tercera parte del volumen del prisma de igual base y altura, y a su vez que el volumen de un cono es la tercera parte de del volumen de una esfera (Kline, 1972; Stewart, 2005; Ordoñez, 2008; Crisóstomo, 2012).

Entonces, se puede evidenciar que para los griegos fue una tarea ardua y compleja llegar a una unidad de medida que representara una magnitud inconmensurable, pero lograron trabajar con la magnitud geométrica, mediante las teorías de proporcionalidad. En otras palabras, para los griegos calcular el área de un polígono era un problema absurdo, pero el problema de determinar su relación con otro polígono, podía ser resuelto de una forma axiomática, ya que contaban con una nueva herramienta como fue el método de exhausción o agotamiento. Además, esto reforzaba el gran trabajo que había hecho años atrás Hipócrates de Chíos (470 a, c -410 a.c), sobre la cuadratura de las lúnulas (Boyer,1949).

Otro gran representante de esta cultura es Arquímedes de Siracusa (287 a.c -212 a.c), el cual se apoya en métodos infinitesimales, en concreto en el método de exhausción, para realizar sus demostraciones como se puede mostrar en el ejemplo claro de la cuadratura de la parábola, el cual se encuentra en una carta a su amigo Dositeo, la cual recopila 24 enunciados que logran demostrar que: “el área A de un segmento parabólico es 4/3 veces el área T del triángulo inscrito” (Parra, 2008).

**Configuración Epistémica 1.5 (CE1.5): Problemas de cuadratura de la parábola**

Problema 1.5: *“El área A de un segmento parabólico es 4/3 veces el área T del triángulo inscrito”*

**Significado Parcial SP1.5=SP3.3 Método exhaustivo**

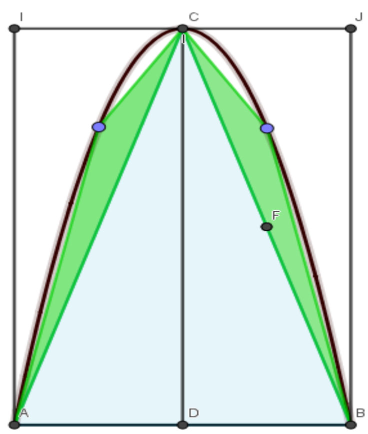



*Figura 4.6. Cuadratura de la Parábola. Fuente: (Parra, 2008)*

**Solución dada al problema 1.5:**

Para la demostración de la cuadratura de la parábola, Arquímedes utiliza dos formas para solucionar, la primera, es el método de exhausción, donde procede a tomar un segmento parabólico ACB, y sea el segmento AB una cuerda y D el punto medio de este segmento, se construye el segmento CD que divide todas las cuerdas de la parábola en dos partes iguales en la cuerda AB, se construye el triángulo ACB, el cual será la mitad de área del paralelogramo AIJB. De igual manera se procede a completar la parábola inscribiendo triángulos cuyos lados superiores serán la mitad del ancho y un cuarto de altura, indefinidamente (ver figura 4.6).

Es así como Arquímedes logra idéntificar el área A como una equivalencia a la serie:

$$A = T + 2\left(\frac{T}{8}\right) + 4\left(\frac{T}{8^2}\right) + 8\left(\frac{T}{8^3}\right) + \cdots.$$

Para terminar la demostración Arquímedes demuestra que la sumatoria es igual a $4/3$ de la siguiente forma:

$$A = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \ldots.\right) T$$

Ahora, esta serie se puede observar de una forma geométrica a partir del segundo término como:

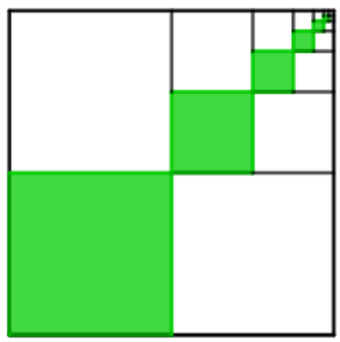


*Figura 4.7. Cuadratura de la Parábola visto desde una serie geométrica*. *Fuente: (Elaboración Propia)*

En la figura 4.7 se evidencia que, Arquímedes hace una suma de magnitudes y nota que la suma de los cuadrados verdes es un cuarto a su vez menor, por tanto, la sumatoria de los cuadros blancos equivalen a 2/3 partes. Es así como la suma de la serie total equivale a un valor alrededor de 4/3.

Otra forma de resolver del problema, es solucionando por una demostración de reducción al absurdo o contradicción, la cual se encuentra en diversas literaturas como Kline, (1972), Stewart, (2005).

**Análisis a la configuración epistémica 1.5**

El problema 1.5 presentado en el periodo antiguo es uno de los ejemplos más representativos de la edad antigua, en la colección de *problemas* que buscan cuadrar las curvas conocidas, entonces en el análisis de esta configuración los problemas se expresan en un *lenguaje* geométrico y numérico, además, se encuentran *conceptos* como parábola, segmento, triángulo, cuerda, punto medio, mitad, área, paralelogramo, ancho, altura, serie y serie geométrica; de igual manera en la solución se encuentran *procedimientos* como el método de exhausción, construir (regla y compás), transformar y sumatoria; *propiedades* de congruencia, y *proposiciones* como "el área A de un segmento parabólico es 4/3 veces el área T del triángulo inscrito", "punto medio de un segmento", y "$A = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \dots.\right)T$".

En el análisis de la configuración epistémica se visualizan el conjunto de prácticas que hacen emerger el significado parcial de método de exhausción (SP3.3=SP1.3).

Es de admirar los grandes trabajos que consiguió y aportó Arquímedes a lo largo de su vida, relacionados con la mecánica, física y astronomía. En este sentido, y bajo lo expuesto por Parra (2008), se puede interpretar que Arquímedes fue uno de los primeros en trabajar intuitivamente con el cálculo infinitesimal y el más próximo a descubrir el Cálculo Integral, pero debido a la no aceptación de los inconmensurables por los griegos no se dio tal genialidad, ya que a él se deben, diversos trabajos de áreas y volúmenes, utilizando métodos de aproximación y agotamiento; ya hacia la muerte comienza la caída del razonamiento deductivo y la matemática griega

**Configuración Epistémica 1.6 (CE1.6): Área de una espiral.**

**Problema 1. 6:** *"El área del primer ciclo de una espiral es igual a una tercera parte del área del círculo circunscrito".* (Parra, 2008).
**Significado parcial. (SP1.6 = SP3.1): Método exhaustivo para calcular áreas**

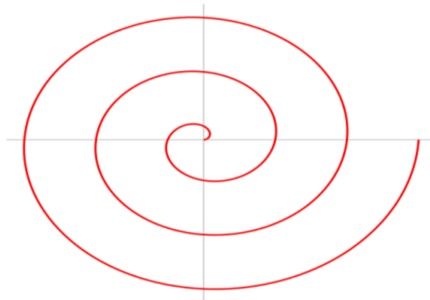


*Figura 4.8 Espiral de Arquímedes. Fuente: (Elaboración Propia)*

**Solución dada al problema 1.6:**

Sea la espiral de Arquímedes expresada mediante la ecuación polar $\rho = a\theta$ y se calculará el área cuando el ángulo polar varía desde 0 a $2\pi$, es decir, en la primera vuelta de la espiral. Entonces el radio del círculo circunscrito es $2\pi a$. Entonces se divide el círculo en sectores de amplitud $\theta = \frac{2\pi}{n}$, desde $\theta = \frac{2\pi k}{n}$ a $\theta = \frac{2\pi(k+1)}{n}$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. En cada sector se analiza el arco perteneciente a la espiral, luego se acota el área que corresponde a este arco entre los dos sectores circulares. Además se sabe que el área de un sector circular es $\frac{r^2}{2}\varphi$, por esto se tiene que el área del sector circular mayor inscrita es $\frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi k}{n}\right)^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, y el área del sector circular menor es $\frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi(k+1)}{n}\right)^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Bajo las hipótesis anteriores se deduce que el área S,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi k}{n}\right)^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{4\pi^3 a^2}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 < S < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi k}{n}\right)^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{4\pi^3 a^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Ahora bien, se conoce que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Lo cual implica que:

$$4\pi^3 a^2 \frac{1}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n}) < S < 4\pi^3 a^2 \frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

Ahora bien, supóngase que $K = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$ que será la tercera parte del área del circulo circunscrito. Luego restando K en la desigualdad, se obtiene:

$$K\left(-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right) < S-K < K\left(\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right);$$

Y como $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$, se obtiene que $-\frac{2K}{n} < S-K < \frac{2K}{n}$. Ahora por el axioma de Arquímedes se concluye que $S = K$.

**Análisis a la configuración epistémica 1.6**

En la configuración epistémica 1.6 se aborda el *problema* de demostrar el *argumento* que: "el área del primer ciclo de una espiral es la tercera parte del círculo inscrito", es claro que Arquímedes utiliza un *lenguaje* geométrico y numérico que era característico de los problemas de la cultura Griega, de la forma como se evidenció en el problema 1.6 del periodo antiguo presentado en el estudio histórico epistemológico, donde para su prueba se utiliza *conceptos* como ecuación polar, área, espiral, radio, circulo, sector circular, amplitud, arco, cuadrado, y serie; se describen los *procedimientos* calcular, circunscribir, acotar, analizar, y operar; con *propiedades* como $\rho = a\theta$, $\theta = \frac{2\pi}{n}$, área de un sector circular es igual a $\frac{r^2}{2}\varphi$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$, y axioma de Arquímedes.

El conjunto de prácticas utilizadas en el análisis de esta configuración epistémica hace emerger el significado parcial de método de exhausción (SP3.1=SP1.6)

En este periodo de la Edad Antigua se visualizan los aportes hechos por los sabios matemáticos de las culturas mesopotámicas, egipcias y griegas donde se llegó a aportar una enorme cantidad de problemas asociados a áreas y volúmenes de contexto real y matemático; los cuales dieron origen a propiedades, interpretaciones e invención de procedimientos, herramientas y lenguajes a nuevos conceptos; es por esto que el análisis epistémico de esta edad se resume en la siguiente tabla 4.1. En este punto se evidencia la dificultad de calcular áreas sin el uso del objeto de la integral a donde apuntan todos estos significados parciales identificados. Se identifica la configuración epistémica CE1: Problemas de cálculo de áreas en la edad antigua.

Tabla 4.1
*Configuración epistémica en la edad Antigua*

| | **Cálculo Integral** |
|---|---|
| **Elementos de la configuración epistémica CE1** | **Significado epistémico** |
| **Situaciones** | *Aporías de Zenón, Composición y relación entre números y magnitudes, Cálculo de áreas de regiones planas, Cálculo de volúmenes de sólidos.* |
| **Lenguajes** | *Geométrico, Aritmético-Geométrico* |
| **Procedimientos** | Uso de métodos intuitivos y abstractos para la solución de problemas. |
| **Definiciones** | *Área (regiones, curvas, polígonos), Volumen, Continuo, Infinito matemático, limite y Particiones, Sumas* |
| **Proposiciones** | *Dado un número siempre hay una longitud que le corresponde , Justificaciones a las Aporías de Zenón, Propiedades de las razones y proporciones, Axioma de Arquímedes, Método exhaustivo, Propiedades de los limites* |
| **Argumentos** | *Por pequeña que se tome la medida, siempre existirán magnitudes a las que no les corresponde un número entero.*<br><br>*Sumas de cuadrados y cubos, Cálculos de los limites, Reducción al Absurdo* |

Configuración de elementos primarios (Fuente: Elaboración Propia.)

### 4.1.2 Periodo 2. Edad Media (Aproximadamente 200 a. C a 1400 d. C)

En Boyer (1949) Después del decaimiento de la cultura y el razonamiento griego, surge una escuela denominada “escolástica” cuyo fundamento fue continuar con los trabajos hechos por el filósofo Aristóteles, demostrando lo sobrenatural sobre la razón, es esta escuela una de las primeras que utiliza y estudia series infinitas. Puesto que se comienza a estudiar la física de Aristóteles, y en especial los tópicos referentes al movimiento, es decir, lo que se denomina el desarrollo hacia la cinemática, o análisis físico del movimiento de los objetos. Hacia el siglo XIV surgen las primeras universidades tales como la de Paris y Oxford, donde se prosigue la idea de cuantificar lo sobrenatural y en especial las magnitudes físicas presentes, es allí donde la lógica y el razonamiento matemático toma relevancia, por ejemplo, el Colegio de Merton estudia a profundidad la tasa uniforme de cambio.

En González (1992). Se resalta a Thomas Bradwardine (1290-1349) el cual se caracterizó por afirmar que todas las magnitudes continuas están constituidas por un número infinito de indivisibles, es decir existe el continuo fijo (presente en líneas, superficies y volúmenes) y el continuo progresivo (presente en el tiempo y movimiento). En esta misma línea de aportes, se encuentra Nicolás Oresme (1323-1382), quien realizó uno de los mayores estudios próximos al cálculo, al describir geométricamente (ver figura 4.9) el cambio del movimiento o la llamada ley de Merton que dice: "el efecto que varía uniformemente o de una que es uniforme en cada una de dos mitades (iguales), es el mismo de otra que es uniforme con una intensidad promedio de la mínima a la máxima" (Boyer 1949, p. 41).

En la figura 4.9 se ilustra como Oresme toma como medidas el tiempo (longitud) contra la velocidad (latitud), y se observa que el área encerrada, corresponde a la distancia recorrida. Lo cual en términos algebraicos más tarde, y con el apoyo de las teorías de Galileo Galilei, se llegaría a concluir que:

$$S = V_m . t = \frac{v_i + v_f}{2} . t$$

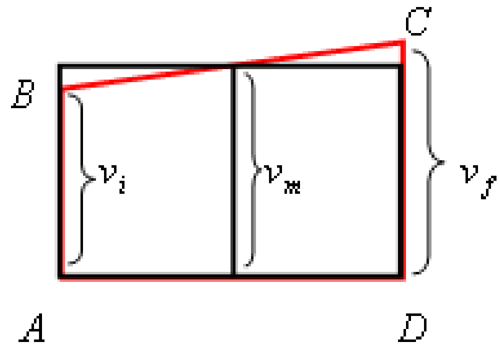



*Figura 4.9. Demostración gráfica de la ley de Merton. Fuente: (González, 1992)*

**Configuración Epistémica 2.1 (CE2.1): Problemas de distancia**

**Problema 2.1**. La distancia como un área:
"*un cuerpo en movimiento uniformemente acelerado recorre, en un determinado intervalo de tiempo, el mismo espacio que sería recorrido por un cuerpo que se desplazara con velocidad constante e igual a la velocidad media del primero.*" (Castañeda Cortes, M. E., y Sáenz Bravo, S, 2012)
**Significado Parcial SP4.1 Integral Indefinida**

**Solución dada al problema 2.1**

En Ortiz (1936) se encuentra una descripción del *Tractaus de latitudinibus formarum* se encuentra la demostración geométrica hecha por Oresme, interpretado y representado en la figura 4.9, Oresme cree que el movimiento uniforme variado es una variable continua en un tiempo (0,t), a la cual le hace una correspondencia con la longitud de segmento AD, ahora bien cualquier punto P que pertenezca a este segmento tendrá una imagen Q, siendo esta la longitud de la velocidad en el instante ( llevándolo a un plano $R^2$). Por lo anterior el segmento BC sería un trazo de la velocidad en dicho momento, lo cual gráficamente formaría un trapezoide con base en $AD = t$ y alturas $AB = v_0$ y $DC = v_f$, se plantea como hipótesis que el área S de esta figura será correspondiente a la distancia recorrida, por lo que se obtiene que:

$$s = v_m t = \frac{v_i + v_f}{2} t = \frac{2v_i + at}{2} t = v_i t + \frac{1}{2} a t^2$$

Se aclara que Oresme, nunca concentró sus estudios en analizar las curvas, sino en la variación de las formas y figuras, es decir lo que en nuestro tiempo se conoce como derivadas e integrales; junto a este aporte, la matemática de la edad media ya estaba siendo obligada a retomar la idea de los infinitos continuos, ya fueran grandes o pequeños y a aceptar las primeras ideas del cálculo infinitesimal que fueron de aporte al nacimiento del cálculo (Ortiz, 1936).

**Análisis a la Configuración epistémica 2.1**

En la configuración epistémica 2.1 se observa una de las *situaciones problemas* más importantes de la edad media, donde se buscaba modelar todo fenómeno físico mediante modelos matemáticos; en este punto se resalta que el *lenguaje* para el tratamiento de estas problemáticas continúa con el carácter geométrico-numérico heredado de la cultura griega y egipcia. En la resolución de estos problemas se utilizan *conceptos* como movimiento, distancia, velocidad, aceleración, movimiento uniformemente variado, segmento, longitud y trapezoide, con *procedimientos* como calcular velocidades en instantes, construcción geométrica, y correspondencias, donde se usan *propiedades* heredadas de los tratados geométricos, y construcciones antiguas, llegando a argumentos como *la distancia es el área bajo la curva de una velocidad constante.*

Esta configuración epistémica hace emerger el significado parcial de Integral definida (SP4.1)

**Configuración Epistémica (CE2.2): Diseño de barriles**

**Problema 2.2** Un problema de máximos: el diseño de los barriles de vino
*"El método que el comerciante de vinos usó para medir el volumen del barril y que tanto extrañó a Kepler consistió en insertar una vara desde del agujero central (S en el diagrama) hasta el lado opuesto de la tapa del barril (en D)." (Cardil, 2010).*
**Significado Parcial SP2.2 Volúmenes**

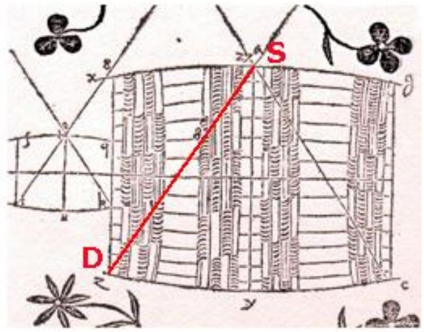



*Figura 4.10. Método del comerciante para el cálculo del volumen y precio del barril de vino. (Fuente: Cardil., 2010).*

**Solución dada al problema 2.2**

Para hacer más óptimo la capacidad de un barril de vino, Kepler simplifica el problema. Asemeja el barril a un cilindro que tiene por diagonal *d*, *r* sería el radio de la base y *h* la altura, como muestra la figura 4.11.

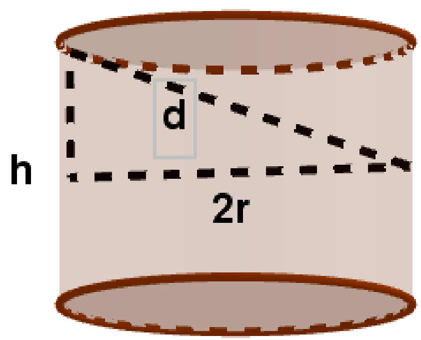



*Figura 4.11. Visión del Barril de vino según Kepler. Fuente: (Elaboración Propia)*

En un lenguaje moderno el volumen se expresa como:

$$V = \pi\, r^2 h$$

Por lo que utilizando el teorema de Pitágoras se obtiene

$$d^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + (2r)^2$$

Ahora despejando $r^2$ y sustituyendo en la fórmula de volumen se obtiene

$$V = h\pi\left(\frac{d^2}{4} - \frac{h^2}{16}\right) = \frac{\pi d^2 h}{4} - \frac{\pi h^3}{16}$$

Ahora si se hace $d$ fijo , se puede encontrar el máximo volumen determinado por h con la ecuación

$$h = \frac{2d}{\sqrt{3}}.$$

Kepler define esta teoría en su libro *nova stereometria* con una serie de cálculos donde a pesar de tener diagonales casi iguales su volumen sería máximo como se videncia en la figura 4.12

| Altitudo | Basis diameter | Erit corpus columnæ |
|---|---|---|
| 1 | 20 -- | 399 |
| 2 | 20 -- | 794 |
| 3 | 20 -- | 1173 |
| 4 | 20 -- | 1536 |
| 5 | 19 → | 1875 |
| 6 | 19 → | 2184 |
| 7 | 19 -- | 2457 |
| 8 | 18 → | 2688 |
| 9 | 18 -- | 2871 |
| 10 | 17 → | 3000 |
| 11 | 17 -- | 3069 |
| Sub se- | midupla | 3080 |
| 12 | 16. | 3072 |
| 13 | 15 → | 3003 |
| 14 | 14 → | 2856 |
| Æqu- | ales | 2828 |
| 15 | 13 → | 2625 |
| 16 | 12. | 2364 |
| 17 | 11 -- | 1887 |
| 18 | 8 → | 1368 |
| 19 | 6 →. | 741 |
| 20 | 0. | 0 |

*Figura 4.12. Cálculos de máximos de un cilindro. Fuente: (Barón, 1987, p 116).*

**Análisis a la Configuración epistémica 2.2**

En el análisis de la presente configuración epistémica se encuentra que la *situación problema* corresponde a la alta edad media, referenciado como problema 2.2; en esta situación se identifican dos tipos de *lenguaje:* uno denominado no ostensivo puesto que la naturaleza del problema es de una anécdota presentada por el matemático Kepler, y en la resolución de este se utiliza un *lenguaje* numérico y geométrico; también se utilizan *conceptos* como volumen, cilindro, diagonal, radio, base, altura, ecuación y teorema de Pitágoras, y se utilizan procedimientos como cálculo de volúmenes cilíndricos, sustitución de ecuaciones y maximizar, y se presentan *argumentos* como: "$V = \frac{\pi d^2 h}{4} - \frac{\pi h^3}{16}$", "Ahora si se hace $d$ fijo, se puede encontrar el máximo volumen determinado por h con la ecuación $h = \frac{2d}{\sqrt{3}}$."

El conjunto de prácticas analizadas en esta configuración epistémica hace emerger el significado parcial de volumen (SP2.2).

En este periodo de la Edad media se visualizan los aportes hechos por los físicos y matemáticos en un intento de retomar la racionalidad y cuantificación de medidas continuas, las cuales eran atribuidas a lo sobrenatural, de esta manera se llegó a interpretar una cantidad de problemas de áreas y volúmenes de contextos reales y matemáticos los cuales dieron origen a propiedades, procedimientos, herramientas y lenguajes a nuevos conceptos que darían los inicios al Cálculo infinitesimal; es por esto que el análisis epistémico de esta edad se resume en la siguiente tabla 4.2. En este periodo de la historia se evidencia la dificultad de calcular áreas y volúmenes, sin el uso del objeto de la integral, en la dirección de los significados parciales. Se identifica la configuración epistémica CE2: Problemas de cálculo de áreas y volúmenes en la edad media.

Tabla 4.2
*Configuración epistémica en la edad media*

| **Cálculo Integral** | |
|---|---|
| **Elementos de la configuración epistémica CE2** | **Significado epistémico** |
| **Situaciones** | *Cálculo de magnitudes físicas "lo sobrenatural", cálculo de áreas, y volúmenes* |

| | |
|---|---|
| **Lenguajes** | *Geométrico, Aritmético-Geométrico* |
| **Procedimientos** | Uso de métodos intuitivos y abstractos en la solución de problemas basados en aportes geométricos hechos por los griegos. |
| **Definiciones** | *Tasas de cambio, rapidez, volumen, continuo, infinito matemático* |
| **Proposiciones** | *Propiedades de las razones y proporciones, Axioma de Arquímedes, Método exhaustivo* |
| **Argumentos** | La distancia es el área bajo la curva de una velocidad constante. Volumen máximo de un cilindro |

Configuración de elementos primarios (Fuente: elaboración Propia.)

### 4.1.3 Periodo 3. Renacimiento (Aproximadamente 1300 d. C a 1600 d. C)

En la matemática de los siglos XV y XVI se efectúa un trabajo para recuperar el razonamiento clásico, principalmente el griego, esto origina la traducción de obras y manuscritos antiguos, extender los métodos y resultados encontrados en esta época, los cuales llevaron a originar un nuevo estilo en la matemática, ya que se introduce el álgebra simbólica. Además, se destaca que, en este período, se encuentra el surgimiento del renacimiento, donde las ciencias y las artes, tuvieron un notable progreso, y es así, como surgen nuevos problemas geométricos y físicos los cuales no pudieron ser resueltos por procedimientos antiguos, como el de exhausción (Kline 1972).

Dentro de los problemas físicos y principalmente los asociados a la mecánica, se encuentran nociones como el de velocidad media, instantánea y/o tangencial en el movimiento de los cuerpos, usualmente de proyectiles; además problemas asociados en la determinación de máximos y mínimos, junto al cálculo y rectificación de curvas para estimar la longitud de las trayectorias de los planetas. Todos estos conceptos inmersos en el Cálculo infinitesimal, es donde se puede observar que los principales físicos y matemáticos de la época desarrollan su razonamiento y logicismo, con base en la resolución de problemas de su entorno tales como la cartografía, navegación, fuertes militares, entre otros.

**Configuración Epistémica 3 (CE3): Problemas de Centros de gravedad**
Problema 3 Centro de gravedad de un triángulo

*"El centro de gravedad de cualquier triángulo está en la línea que une el vértice con el punto medio de lado opuesto." Cantoral y Farfán (2004)*

**Significado Parcial SP4.1 Integral definida**

**Solución dada al problema 3**

Sea el triángulo ABC y en el EF, GH, IK segmentos paralelos a BC, los cuales se intersecan a AD siendo D el punto medio de BC, entonces L, M y N serán puntos medios de los segmentos EF, GH, IK respectivamente, luego se trazan EO, GP, IQ, KR, HS y FT paralelas a AD, como muestra la figura 4.13

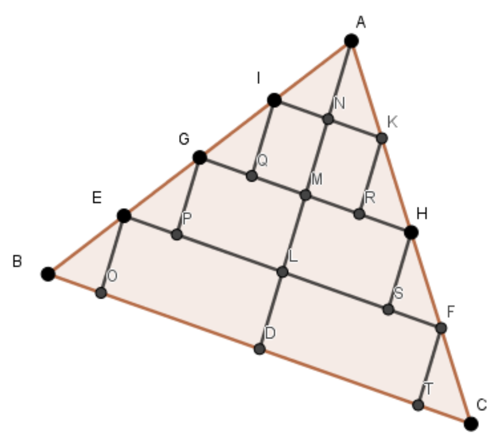



*Figura 4.13* Demostración de Stevin para el centro de gravedad de un triángulo. Fuente: (Baron, 1987)

Como EF ‖ BC y EO, FT lo son a LD, resulta que EFTO será un paralelogramo, en el cual EL=LF, OD=DT; entonces el centro de gravedad de EFTO está en el segmento DL, bajo este argumento el paralelogramo GHSP está en LM, el de IKQR en MN, por lo que el centro de gravedad de la figura IKRHSFTOEPGQ, estará en la línea ND o AD.

Luego de esta manera, se pueden inscribir infinitos cuadriláteros en el triángulo de tal manera que el centro de gravedad de la figura formada estará en la línea AD. Ahora si se traza la figura de infinitos puntos medios entre A y D esta formará de forma exhaustiva el triángulo ABC. Por lo que el centro de gravedad de ABC está en la línea AD.

**Análisis a la Configuración epistémica 3**

En la configuración epistémica 3 se analiza el problema 3.1 ilustrado en la figura 4.13, el cual configura las *problemáticas* de la época del renacimiento, donde se ilustra el avance de la teoría física por *procedimientos* llamados los indivisibles, lo cual es un proceso similar al método de exhausción (herencia griega), pero superando el horror del infinito, también se utilizan *lenguajes* geométricos y numéricos, y para el desarrollo del problema, se utilizan *conceptos* como centro de gravedad, triángulo, línea, punto medio, paralelismo, intersección, segmento, paralelogramo, infinito, y *propiedades* de congruencia, paralelismo de rectas y figuras para cumplir con la *proposición* "El centro de gravedad de cualquier triángulo está en la línea que une el vértice con el punto medio de lado opuesto" (Cantoral, 2004)

En el análisis de esta configuración epistémica se visualiza la emergencia del significado parcial de integral definida (SP4.1).

Otras problemáticas de la época se encuentran en los trabajos de Simón Stevin (1548-1620) y Luca Valerio (1552-1618) los cuales se desvían un poco del procedimiento del método de exhausción y proceden a calcular áreas mediante la suma de una serie infinita de términos; Bonaventura Cavalieri (1598-1647) hizo un aporte al determinar un método de lo indivisible, el cual consiste en comparar las proporciones de una magnitud (área, volumen) con respecto a los indivisibles que se conocen. Stevin es conocido por sus grandes aportes en el campo de la hidrostática, navegación y astronomía, recurriendo a los ingeniosos métodos de Arquímedes, en el cálculo de centros de gravedad en figuras planas (Ordoñez, 2011).

En Kline (1972), Boyer (1949) y Ortiz (1936), se identifica la evolución del objeto integral, hacia el final de la Edad Media se identifica la superación del "horror al infinito", por lo que los matemáticos de esta época comienzan a reflexionar sobre el infinito al estudio de las primeras series infinitas. Estas ideas surgen al tratar problemas asociados al cambio y movimiento, donde aparecen los primeros problemas asociados a la física y estática, que perfeccionaron el método de exhausción desarrollado por los griegos.

Como conclusión se resalta la importancia que le dan los matemáticos europeos al desarrollo de las series, y la optimización del infinito, el cual resolvió muchos problemas de la antigüedad como muestra la configuración epistémica presentada en la siguiente tabla (4,3). Estos problemas se generalizan en la configuración epistémica CE3: Problemas de aplicación en el renacimiento.

*Tabla 4.3*
*Análisis de entidades primarias Periodo del Renacimiento.*

| Elementos de la configuración epistémica CE3 | Cálculo Integral<br>Significado Institucional |
|---|---|
| Situaciones | Estudio de series infinitas, problemas relacionados a la física, artes y geometría, descripción cuantitativa de magnitudes continuas en la mecánica celeste, óptica cálculo de áreas, volúmenes centros de gravedad, Cuadraturas |
| Lenguajes | Geométrico, Aritmético-Geométrico, Algebraico |
| Procedimientos | Transformación del lenguaje físico a geométrico, mecánicos y abstractos asociado a lo infinitamente pequeño |
| Definiciones | Magnitudes (área, volumen, velocidad, calor), longitud, latitud, forma y figura, los indivisibles, series infinitas, movimiento, distancia y rapidez |
| Proposiciones | Principio de Cavalieri, Principio de Oresme, Cuadraturas y curvaturas, Método de exhausción |
| Argumentos | Métodos intuitivos que buscan mejorar el de exhausción, desarrollos geométricos, uso del término tan pequeño como se quiera,<br><br>Si dos cuerpos tienen la misma altura e igual área en sus secciones planas realizadas al mismo nivel, tienen igual volumen. |

Fuente: Elaboración Propia

### 4.1.4 Periodo 4. Nacimiento del Cálculo (1600 d. C a 1700 d. C)

En la interpretación de los textos históricos de Stewart (2008), Boyer (1949), y Kline (1972) se encuentra que en el siglo XVII llega el nacimiento de lo que hoy se conoce como cálculo, y uno de los pioneros en orden cronológico es Johannes Kepler (1571-1693) quién se interesó por solucionar problemas asociados a determinar áreas y volúmenes, debido a la imprecisión existente. Para determinar tales métodos, resolvió problemas en encontrar el volumen de los barriles de vino, el área encerrada por una elipse, con la perspectiva de que un área es la suma infinita de polígonos con base muy pequeña; es de observar que para Kepler al trabajar con superficies muy pequeñas, empieza a utilizar el lenguaje de los indivisibles, es decir desde esta percepción, él no distingue la comparación de un círculo de un polígono de infinitos lados, ni un área infinitesimal de una línea.

En esta misma idea Galileo Galilei (1564-1642) en el año 1638, expone uno de sus pensamientos referentes al área bajo la curva tiempo-velocidad con referente a la distancia, que complementa los trabajos de Oresme de la siguiente manera

Supongamos que un objeto se mueve con velocidad constante $v = 32t$, representada en la figura 4.14 por la recta OB. Entonces $A´B´$ es la velocidad en este instante y también es la distancia infinitesimal recorrida. Entonces, el área $OAB$ que está construida por línea $A´B´$ es la distancia total. (Fernández, 2011, p. 6).

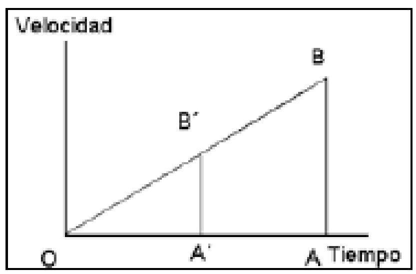



*Figura 4.14.* Interpretación de Galileo para la distancia. (Fuente: Fernández, 2011, p 6).

Es decir, para Galileo la distancia recorrida por un cuerpo se comporta como una suma infinita de indivisibles en una curva velocidad- tiempo.

Bajo esta perspectiva Cavalieri, quien además era discípulo de Galileo, propone la demostración del siguiente teorema “la suma de las primeras potencias de los segmentos en uno de los dos triángulos  es la mitad de la suma de las primeras potencias de los segmentos en el paralelogramo” (Boyer, 1949), lo que equivale en la matemática actual a $\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}$. (Ver figura 4.15)

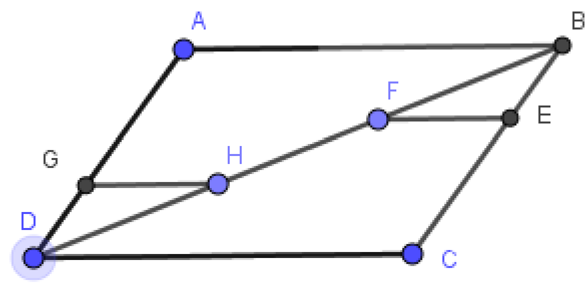



*Figura 4.15.* Representación de método indivisible de Cavalieri. Fuente: (Elaboración Propia)

Para demostrar que el paralelogramo $ABCD$ tiene el doble de área de cualquier triángulo ya sea $ABD$ o $BCD$, se hace énfasis en que si $GD = BE$, entonces $GH = FE$ ($GH$ y $FE$ son indivisibles de los respectivos triángulos) por lo tanto cualesquiera de los triángulos está constituido por un número infinito de indivisibles. De esta manera el paralelogramo tiende a ser la suma de indivisibles de los dos triángulos, por lo tanto, la suma de las primeras potencias de los segmentos en uno de los dos triángulos es la mitad de la suma de las primeras potencias de los segmentos en el paralelogramo.

En la misma línea Pierre de Fermat (1601-1665) desarrolló métodos innovadores y prácticos para determinar soluciones a problemas de máximos y mínimos, junto al cálculo de probabilidades. Intentó demostrar la conjetura de Cavalieri mediante estas pruebas. Además, utiliza progresiones geométricas para cuadrar parábolas e hipérbolas. Como sigue (ver figura 4.16); se divide el intervalo de $x = 0$ hasta $x = a$ en una cantidad infinita de subintervalos, tomando como dominio las abscisas $a, ab, ab^2, ab^3$ ... donde $b$ es un número menor que 1.

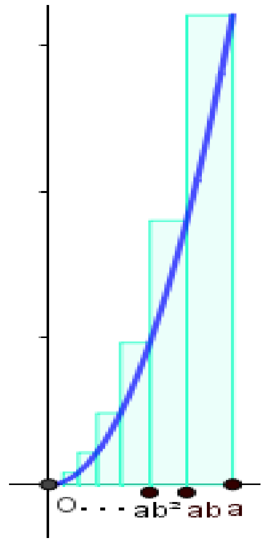



*Figura 4.16.* Representación de la cuadratura de una parábola forma Fermat. Fuente: (Elaboración Propia)

De esta forma el área de los rectángulos consecutivos, comenzando desde el más grande viene secuenciado por la serie geométrica de razón $b^{n+1}$:

$$a^n.(a-a.b)$$

$$(a.b)^n.(a.b-a.b^2)=a^n.b^{n+1}(a-a.b)$$

$$(a.b^2)^n.(a.b^2-a.b^3)=a^n.b^{2(n+1)}(a-a.b)$$

$$\vdots$$

$$(a.b^k)^n.(a.b^k-a.b^{k+1})=a^n.b^{k(n+1)}(a-a.b)$$

Donde la suma de estos infinitos términos es:

$$\frac{a^n.(a-a.b)}{1-b^{n+1}}=\frac{a^{n+1}}{1+b+b^2+b^3+\cdots+b^n}$$

Luego como $b$ se acerca a 1, los rectángulos tienden a acercarse uno a otro, de tal manera que el área bajo la curva es la suma de las áreas de estos rectángulos. Luego si b=1, se obtiene la suma de la serie la cual representa el área bajo la curva.

$$\frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Pronto Fermat probó, que bajo este razonamiento se podía determinar el área bajo la curva para curvas con exponentes racionales y negativos mayores que 1 (lo cual fue su obstáculo, hacia esta época).

En la alta edad media surge el desarrollo del cálculo infinitesimal como un preámbulo al nacimiento del Cálculo Integral, pues Viete con su "nueva Álgebra" había hecho una recopilación de gran parte del trabajo griego de forma algorítmica, con esto habría abierto un camino hacia la geometría Analítica, donde Descartes y Fermat fueron pioneros y artífices.

En el resumen de este inicio de periodo se observa la geometría analítica como un modelo en el cual las curvas de las funciones se podían analizar de forma más fácil y práctica, sin recurrir al método de exhausción, es decir, resurge la aritmética a través del estudio de series y cuadraturas.

En el término de este análisis se involucra la aparición de la geometría analítica la cual, busca desatascar los problemas que no se podían realizar de forma analítica por su composición de variable continua, se resaltan nombres como Wallis, Fermat, Pascal, y Barrow como los matemáticos que elevaron el cálculo hacia la parte infinitesimal.

**Configuración Epistémica 4.1 (CE4.1): Problema de Cuadratura**

**Problema 4.1** El problema de Cuadratura de una hipérbola
*"Digo que todas estas infinitas hipérbolas, excepto la de Apolonio, que es la primera, pueden ser cuadradas por el método de la progresión geométrica, de acuerdo a un procedimiento uniforme general." (Fermat, 1655).*

**Significado Parcial SP4.2: Integral Indefinida**

**Solución dada al problema 4.1:**

Supóngase la hipérbola $y = \frac{1}{x^2}$ para $x \geq a$.

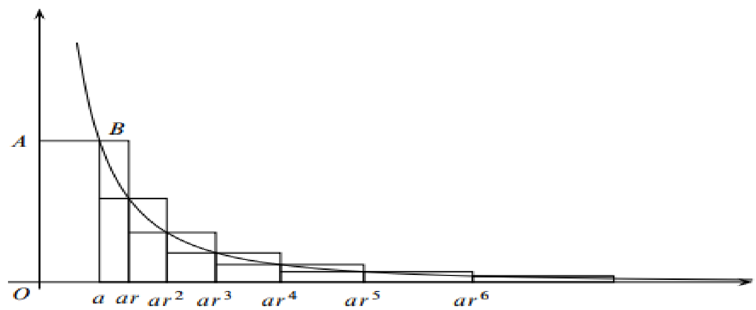



*Figura 4.17. Representación de la cuadratura de una hipérbola por Fermat. Fuente: (Fermat, 1655).*

Se elige un número $r > 1$ el cual segmenta las abscisas en los puntos $a, ar, ar^2, ar^3$ ....

Por tanto, los rectángulos inscritos tienen como área

$$(ar-a)\frac{1}{(ar)^2}+(ar^2-ar)\frac{1}{(ar^2)^2}+(ar^3-ar^2)\frac{1}{(ar^3)^2}+\cdots=\frac{r-1}{ar^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k}=\frac{1}{ar}$$

De otra manera. El área de los rectángulos circunscritos está dada por

$$(ar-a)\frac{1}{a^2}+(ar^2-ar)\frac{1}{(ar)^2}+(ar^3-ar^2)\frac{1}{(ar^2)^2}+\cdots=\frac{r-1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k}=\frac{1}{ar}$$

Por tanto, si S es el área bajo la curva, se tiene que

$$\frac{1}{ar}<S<\frac{r}{a}$$

Pero como la desigualdad es validad para todo $r > 1$, se concluye que $S = \frac{1}{a}$.

**Análisis de la Configuración epistémica 4.1**

Uno de los *procedimientos* que dieron origen a la edad moderna fue el método de los indivisibles de Cavalieri, por tanto en el problema 4.1 del presente documento, a partir del *argumento Digo que todas estas infinitas hipérbolas, excepto la de Apolonio, que es la primera, pueden ser cuadradas por el método de la progresión geométrica, de acuerdo a un procedimiento uniforme general*, y se encuentra expresado en un *lenguaje* geométrico, algebraico, y numérico a partir de los *conceptos* de hipérbola, cuadrado, progresión geométrica, intervalo, rectángulo, área bajo curva, serie, igualdades y desigualdades, además se utilizan *propiedades* de área.

El conjunto de prácticas asociadas a esta configuración da origen al significado parcial de integral indefinida (SP4.2).

En esta perspectiva, fue Grégorie de Saint Vicent (1584-1667) quien identifica que el área bajo una curva en un intervalo [a, b] es la misma en el intervalo [c, d], la cual es cierta si la razón de a/b es proporcional a la razón c/d. es decir el área es una suma infinita de elementos infinitesimales.

Un ejemplo es:

"Si tomamos a lo largo del eje OX, puntos tales que los intervalos que determinan van creciendo en progresión geométrica, y si en dichos puntos levantamos las ordenadas correspondientes a la hipérbola $y = 1/x$, entonces las áreas bajo la curva, entre cada dos abscisas sucesivas, son iguales. Es decir, según crece la abscisa geométricamente, el área bajo la curva lo hace aritméticamente."  (Boyer, 1949, p. 72)

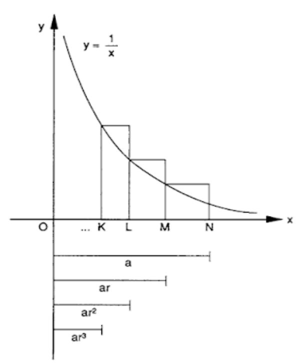



*Figura 4.18.* Representación de la cuadratura de una hipérbola según Saint Vicent. Fuente: (Boyer, 1949).

Lo que quería Saint Vicent en nuestro lenguaje moderno es:

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \int_a^c \frac{1}{x} dx = \ln(c) - \ln(a).$$

En esta misma línea se encuentra Gilles Personne de Roberval (1602-1675) quien utiliza la idea de los indivisibles, pero de una forma más técnica y rigurosa, es así como determina el área encerrada en una curva, en especial de área bajo un arco de cicloide, y la integral de $x^n$, $donde$ $0 \leq n \leq 1$. De igual manera Jhon Wallis asigna valores numéricos a los indivisibles de Cavalieri, por lo tanto Wallis realiza una conversión de lo que en el momento se trabajaba geométricamente como cálculos aritméticos, al efectuar la cuadratura de $y = xk$, lo cual puede considerarse una integral definida. Por otra parte Francisco Vieta (1540-1603), fue uno de los precursores del álgebra generaliza los primeros problemas de la integral para las curvas $x^n, n \in \mathbb{N}$ en un intervalo $[0, a]$.

De esta forma se puede evidenciar que, aproximadamente en la mitad del siglo XVII, además del uso de los indivisibles, infinitesimales en la solución de problemas, el lenguaje era menos gráfico y resuelto en forma de ecuaciones llevadas al análisis geométrico, las cuales partían el análisis de la geometría analítica desarrollada por Rene Descartes (1596-1650), y la nueva álgebra de Vieta, al igual que los trabajos desarrollados por Colin Maclaurin (1698 -1746).

Según González (1992, p. 57) la geometría de Fermat y Descartes fueron las que proporcionan importantes aportes al cálculo infinitesimal, debido a su razonamiento algebraico para determinar áreas y tangentes, lo cual desarrolló el concepto de integrales para las primeras curvas, y además junto a Pascal (1623-1662), empiezan aritmetizar el método de exhausción, a partir de los números poligonales y el triángulo aritmético; y es específicamente Pascal quien trabajó sobre las ideas de Cavalieri no desde el punto geométrico, sino a través de las series $\frac{n^3}{3}$.

Los estudios hechos a la curva $x^n$ en la expresión $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$, para cualquier racional $n$ diferente a -1, hechos por Torricelli, Cavalieri y Roberval, los complementa y tecnifica Fermat de una manera general, sin conocer la operación Integral y calculando el área para una curva en particular. Entonces,

> "Fermat no estudia la variación de la cuadratura de una curva respecto a una abscisa variable, luego no aprecia el hecho de que tal cuadratura genera otra curva, que es el germen del Cálculo Integral, como se muestra en el trabajo de Newton con su estudio de la razón de cambio de esta nueva curva" (González, 1992, p. 272).

Fue uno de los primeros en pensar en los números infinitamente pequeños los cuales, por su razonamiento no hizo tender a cero, sino los hace cero directamente.

En este mismo periodo de tiempo James Gregory (1638-1675) pone en conocimiento la relación entre el problema de áreas y tangentes, aunque fue muy poco conocido. En este mismo pensamiento trabaja Isaac Barrow (1630-1677) quien a partir de encontrar cuadrados de área semejante al de una figura establecida, termina descubriendo el teorema fundamental del cálculo como se muestra la figura 4.19.

**Configuración Epistémica 4.2 (CE4.2): Teoremas Fundamentales**

***Problema 4.2*** *Teorema fundamental del cálculo (versión Barrow)*
**Significado Parcial SP4.2=SP6.1: Teorema fundamental del cálculo. Forma 1**

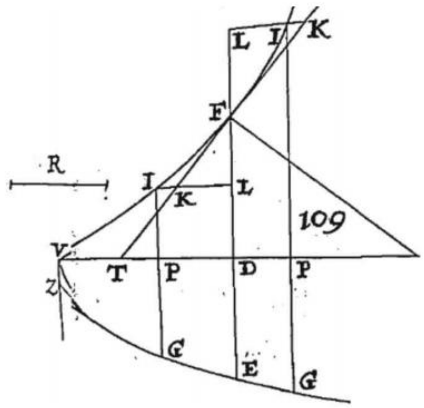



*Figura 4.19.* Representación gráfica del Teorema Fundamental del cálculo. Fuente (Ponce ,2013)

**Solución dada al problema 4.2**

Sea ZGE una curva cuyo eje es VD y consideremos las ordenadas (VZ, PG y DE) perpendiculares a este eje y continuamente creciendo desde la ordenada inicial VZ (Figura 4.19); también sea VIF una curva tal que, si una línea recta EDF es trazada perpendicular al eje VD, cortando a las curvas en los puntos E, F y VD en D, el rectángulo determinado por DF y una longitud dada R es igual al espacio VDEZ; también sea DE: DF = R: DT, y unimos [T y F]. Entonces TF cortará a la curva VIF.

Tomemos un punto I en la curva VIF (primero del lado F hacia V) y, a través de él, tracemos IG paralelo a VZ y IL paralelo a V D, cortando a las líneas dadas como se muestra en la figura 4.19; entonces, LF: LK = DF: DT = DE: R, es decir R × LF = LK × DE. Pero de la naturaleza de las líneas DF y LK se tiene R × LF = área (PDEG) por tanto se tiene que LK × DE = área (PDEG) < DP × DE, por lo tanto, se tiene LK < DP < LI. De forma análoga, si el punto I se toma del otro lado de F, se haría la misma construcción de antes y se puede fácilmente demostrar LK > DP > LI. De donde es completamente que toda línea TKF permanece en o debajo de la curva VIF. Resultados análogos se obtienen si las ordenadas VZ, PG y DE decrecen en forma continua, la misma conclusión se obtiene mediante un argumento similar; sólo una particularidad ocurre, a saber; en este caso, al contrario que en el otro, la curva VIF es cóncava respecto al eje VD (Barrow, 1735, p. 167).

**Análisis de la Configuración epistémica 4.2**

Para el análisis de esta configuración se presentan un problema geométrico en la relación de las tangentes y curvaturas, este problema fue presentado en el periodo cuatro del presente documento. Este problema fue abordado Por Isaac Barrow en principios de la edad moderna, donde se muestra la cuadratura de una curva a través de construcciones geométricas después de haberse trazado una tangente en un punto. Es aquí donde Barrow enlaza dos *conceptos* importantes como, la cuadratura de una curva y la tangente de una curva junto a unos *conceptos* generales como: curva continua creciente, longitud, perpendicularidad, perpendicularidad entre curvas rectángulo, ordenada, puntos, paralelismo, además se utilizan *procedimientos, propiedades y argumentos* que corresponden a construcciones geométricas euclidianas, heredadas de la cultura griega los cuales no eran tan rigurosos y formales para el trazo de cuadraturas y tangentes. Se prevalece que el *lenguaje* utilizado en el desarrollo de este problema es de índole geométrico.

El conjunto de prácticas geométricas utilizadas en el desarrollo de este problema hace emerger el significado parcial de Teorema fundamental del cálculo parte 1 (SP6.1=SP4.2).

Es de denotar que, en este periodo, nacieron las primeras universidades como la de Paris, Oxford y Cambridge las cuales toman como objetivo la creación del razonamiento matemático avanzado, bajo los trabajos hechos por los autores antes mencionados. Es así como a Barrow se le atribuye el reconocimiento del problema entre las cuadraturas y las tangentes en su relación inversa. Según Ordoñez (2011) la consecuencia de este problema es que permite calcular integrales, a través de la inversión de los problemas de derivación, es decir, se busca encontrar una primitiva. Por tanto, en términos matemáticos dada una función creciente y continúa definida en un intervalo [a, b]. Se define la curva continua que describe el área con la expresión

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

La demostración de este artificio matemático se puede encontrar en Ponce (2013, p 128), es así como en esta línea y época se identifica un físico y matemático llamado Isaac Newton (1642-1727), que trabajando simultáneamente con Barrow identifica dos razonamientos denominados derivada e integral, al introducir conceptos de fluxión (derivada respecto al tiempo de la fluente) y fluente (variable en función del tiempo), desarrollando problemas de movimiento, optimización y cuadraturas, y reglas básicas asociadas a la derivación, publicadas en su libro de cálculo *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687). Es en este libro donde Newton reconoce a un contemporáneo matemático Gootfried Leibinz (1646-1716) quien trabaja un método similar al de él, y había publicado siete años antes.

Aunque Newton no fue el precursor de realizar derivadas e integrales, ni mucho menos el observar la relación entre estas operaciones, es a él quien se le considera como el inventor del Cálculo, debido a que él detalló con más exactitud la relación entre la pendiente y el área, junto a algoritmos generales que se pueden aplicar a funciones algebraicas y trascendentes.

**Configuración Epistémica 4.3 (CE4.3): Problemas de cuadratura de una curva**

Problema 4.3. Cuadratura de una curva (versión Newton)

*"Sea aplicada la perpendicular BD a la base AB a una curva cualquiera AD, y llámese $AB = x$ y $BD = y$; y sean $a, b, c$, cantidades dadas y $m, n$ números entero. Por ende, Regla I: $ax^{\frac{m}{n}} = y$, será $\frac{an}{n+m} x^{\frac{n}{m+n}} = área\ ABD$" (Newton, 1686, p. 12,13).*

**Significado Parcial SP4.3: Antiderivada**

**Solución dada al problema 4.3**

Newton utiliza como base la solución descrita por Wallis en el *Arithmetica infinitourom* en la solución de un caso particular.

De la figura 4.20 se tiene que $AB = x$, base de la curva $AD\delta$, $BD = y$, la perpendicular en el punto B, el área $ADB = z$, luego sea $B\beta = o, BK = v$, y el rectángulo $B\beta HK(ov)$, equivalente en espacio a $B\beta\delta D$.

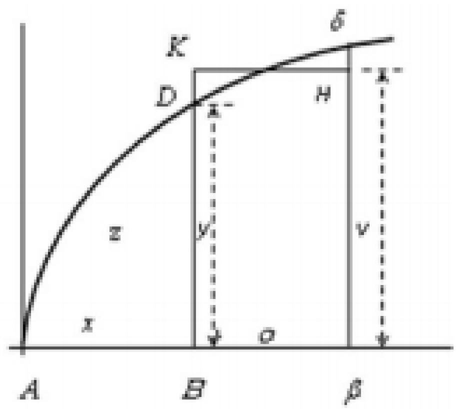



*Figura 4.20.* Cuadratura de una curva. Fuente: Ponce (2013)

A partir de $\boldsymbol{z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}$, y $\boldsymbol{z^2 = \frac{4}{9}x^3}$. Se busca obtener $y$ a partir de las relaciones $x$ y $z$. Por tanto, realizando una sustitución de variables se obtiene

$$(\boldsymbol{z} + ov)^2 = \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{9}}(\boldsymbol{x} + o)^{\boldsymbol{3}}$$

Solucionando las potencias de los binomios se obtiene

$$z^2 + 2zov + o^2v^2 = \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{9}}x^{\boldsymbol{3}} + \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{9}}3x^{\boldsymbol{2}}o + \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{9}}3xo^{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{9}}o^{\boldsymbol{3}}$$

Puesto que $\boldsymbol{z^2 = \frac{4}{9}x^3}$ se reduce el primer término por lo que se obtiene

$$2zov + o^2v^2 = \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{9}}3x^{\boldsymbol{2}}o + \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{9}}3xo^{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{9}}o^{\boldsymbol{3}}$$

Dividiendo ambos términos por $o$

$$2zv + ov^2 = \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{9}}3x^{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{9}}3xo + \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{9}}o^{\boldsymbol{2}}$$

Al hacer $B\ \ y\ \beta$, infinitamente pequeños, de tal manera que $\upsilon\ e\ y$ coincidan, entonces $o$ tiende a cero por lo que cada término que multiplica a $o$ desaparece. Por tanto, se obtiene:

$$2z\upsilon = \frac{4}{9}3x^{2} \text{ ó } 2zy = \frac{4}{9}3x^{2}$$

Sustituyendo el valor de $z$, se tiene:

$$2(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})y = \frac{4}{9}3x^{2}$$

Y despejando $y$ se llega a

$$y = x^{\frac{1}{2}}.$$

Se ha demostrado que para un caso particular en una curva, si se conoce la cuadratura, se puede hallar la ordenada de dicha curva, en términos modernos se puede establecer que la derivada de la función de área $z = \frac{2^{3}}{3}\ x^{3/2}$ es $y = x^{\frac{1}{2}}$. Y de manera general si la función expresada $\frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ representa una cuadratura entonces $y = ax^{\frac{m}{n}}$ corresponde a la función de la curva.

**Análisis de la Configuración epistémica 4.3**

El problema 4.3 presentado en el documento hace parte de uno de los dos *problemas* tratados por Isaac Newton en relación con el cálculo de fluxiones y fluentes es decir, cálculos de velocidades dada su longitud y su proceso de forma inversa, el cual describe el sistema de prácticas más importante en el desarrollo del Cálculo Integral, por lo que se utilizan *conceptos* como fluentes (cantidad de movimiento que varía respecto al tiempo), movimiento continuo, y se originan otros como "*o* es un intervalo de tiempo pequeño", "*momento de x"* el cual es un incremento infinitesimal. En la solución se encuentran *proposiciones* como "Dada la curva de ecuación $x^{3} - ax^{2} + axy - y^{3} = 0$, calcular las fluxiones" donde se utiliza como medio de demostración un *lenguaje* geométrico, algebraico y descriptivo y *argumentos* basados en consideraciones dinámicas e infinitesimales apoyadas en el álgebra y el análisis geométrico. Al igual se identifican *propiedades* como "$Si\ ax^{\frac{m}{n}} = y$, entonces el área será $z = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$", "dada una curva $y = max^{m-1}$, entonces el área comprendida es $z = ax^m$". El conjunto de prácticas asociadas a la solución de estos problemas da origen al significado parcial de Primitiva (SP 4.3).

A Leibniz es quien se le atribuye la notación para integral que utilizamos hoy en día, y la invención del cálculo, a través de la teoría de sumas infinitesimales en la relación inversa entre tangentes y cuadraturas en un aspecto más geométrico, años más tarde.

**Configuración Epistémica 4.4 (CE4.4). Problemas de cuadraturas**

***Problema 4.4****. Cuadratura de una curva (versión Leibniz)*
**Significado Parcial SP4.4: Antiderivada**

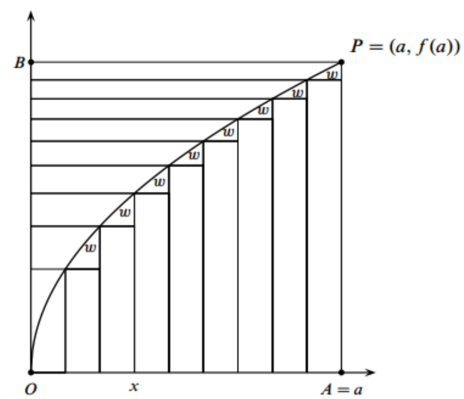



*Figura 4.21. Cuadratura de una curva versión Leibniz. Fuente (Pérez, 1988. p. 47)*

**Solución dada al problema 4.4**

El valor de $P$ es el área del rectángulo $OAPB$, entonces la integral en el intervalo OA con respecto a la curva $y = f(x)$ es el área del rectángulo OAP que queda bajo la curva. De otra manera la integral de OA en la curva $xf(x)$ representa el área del rectángulo OBP que queda por encima de la curva $y = f(x)$, en particular, está constituida por los rectángulos horizontales como muestra la figura 4.21, cuya base es un valor $x$ que pertenece al eje $X$, y altura igual a la diferencia inifinitamente pequeña entre dos ordenadas sucesivas, las cuales Leibniz las representa como $\omega = dy = f'(x)dx$; de otra manera el área de la región OAP es interpretada por Leibniz como una suma de ordenadas $y$. Luego eliminamos a $y$ ya que para Leibniz se podía obtener un valor a partir de la suma sucesiva de ordenadas. Por lo que se obtiene en lenguaje de Leibniz:

$$omn\overline{xw} \sqcap ult.x, \overline{omn.w}, - \overline{omn.omn.w}$$

Donde $\sqcap$ es el símbolo de igualdad, $ult.x$ significa el último de los x, es decir $OA = a$. El símbolo $omn$ representa "todas las líneas". Años posteriores este autor ante la dificulta de la escritura, vuelve a escribir la igualdad de la siguiente manera:

$$omn.x\ell \sqcap xomn.\ell - omn.omn\ell$$

Donde el símbolo $omn$ a una magnitud lineal expresa un área, y antepuesto a un área $x\ell$ expresa un volumen.

Pero ante esta dificultad Leibniz reescribe el término $omn$ como $\int$ por lo que la igualdad adopta una nueva escritura:

$$\int x\ell = x\int \ell - \iint \ell$$

Resaltando las reglas:

$$\int x = \frac{x^2}{2} \qquad y \qquad \int x^2 = \frac{x^3}{3}.$$

En términos actuales esta igualdad la conocemos como la integración por partes

$$\int_0^a xf'(x)dx = af(a) - \int_0^a f(x)dx = a\int_0^a f'(x)dx - \int_0^a \int_0^x f'(t)dt\,dx$$

**Análisis de la Configuración epistémica 4.4**

En relación al problema 4.4 presentado en el cuarto periodo y desarrollado por Leibniz fue el que dio origen al análisis de esta configuración y hace referencia a la relación entre las sumatorias y diferenciales. Se resalta que este autor es uno de los denominados padres del Cálculo Integral (Kline, 1972) por lo que él abordo *problemas* sobre tangentes, máximos y mínimos, y puntos de inflexión aplicando soluciones de tipo geométrico a través de *procedimientos* como el uso del triángulo diferencial en las transformaciones de las cuadraturas. Leibniz en el desarrollo del cálculo infinitesimal e integral utiliza un *lenguaje y conceptos* simbólicos propios como $\int y\ d$ que representan operadores de suma (ya sea de rectángulos, como de áreas), $\partial x\ y\ \partial y$ que representan los diferenciales infinitamente pequeñas, usado mediante fórmulas y procesos de razonamiento y argumentación es importante definir que las reglas de derivación básicas y la integración por partes hacen parte de las *proposiciones* y *propiedades* de esta configuración epistémica. Los conjuntos de prácticas analizadas en esta configuración hacen emerger el significado parcial de primitiva (SP4.4).

De esta forma esta configuración se caracteriza por el nacimiento del Cálculo Integral, junto a las reglas, lenguajes y procedimientos que tecnificaron la resolución de problemas infinitesimales, teniendo como grandes exponentes a Newton, Leibniz, Euler.

Sin embargo, cabe afirmar que, según los orígenes del cálculo, este se hizo para analizar cuatro problemas clásicos de la época que corresponden a: Definir la tangente a una curva en un punto, determinar máximos y mínimos de cantidades, determinar la longitud de una curva, área y volumen, encontrar la relación de la distancia, velocidad, y aceleración de un cuerpo en un instante preciso (tiempo). Se reconoce que las dos grandes mentes del momento (Newton y Leibniz) trabajaron de manera separada pero llegaron a la misma concepción, mientras que Newton hablaba de derivadas a través de fluxiones, Leibniz hablaba de incrementos infinitamente pequeños (diferenciales), como por ejemplo un incremento en $x$, se denomina diferencial de $x$, y se denota; $dx$, $\Delta$x, o $\partial$x lo mismo sucede para un incremento pequeño en $y$, una derivada para Leibinz es el cociente entre los diferenciales ($\frac{dx}{dy}, \frac{\Delta x}{\Delta y}$, o $\frac{\partial x}{\partial y}$). Para Mateus (2011), el cálculo de Newton se basaba en demostraciones poco aceptables, y mientras los diferenciales de Leibniz eran objetos inusuales, y no se comportaban como incrementos. Debido a la falta de rigidez en los argumentos hacía falta información en la época sobre la noción de función. Es por esto que el desarrollo del cálculo fue algo lento, debido a las pocas aplicaciones en el entorno, la rivalidad intelectual entre los seguidores de Newton y Leibniz, por la patente del nuevo razonamiento, hoy en día se les concede a ambos genios la simultaneidad y hallazgo del cálculo.

En la tabla 4.4 se recoge las entidades primarias relevantes al significado parcial en los primeros inicios del nacimiento del cálculo. Estos problemas se generalizan con la CE4.1: Problemas de cuadratura de curvas.

Tabla 4.4
*Análisis de entidades primarias del inicio del periodo Nacimiento del cálculo*

| Elementos de la configuración epistémica CE4.1 | Cálculo Integral<br>Significado Institucional |
|---|---|
| Situaciones | Calculo y trazo de tangentes, Calculo de integrales definidas, Calculo de integrales indefinidas, Calculo de áreas, volúmenes centros de gravedad a través de los indivisibles, Cuadraturas por medio de progresiones geométricas |
| Lenguajes | Geométrico, Aritmético-Geométrico, Algebraico |
| Procedimientos | Desarrollo de progresiones aritméticas y geométricas, Trazado de tangentes, La integral como una suma infinitesimal, Las integraciones de Wallis y Fermat, Trazos de tangentes a través de pendientes, Cuadraturas y curvaturas |
| Definiciones | Integral definida, Sumas infinitas para funciones continuas, Área, volumen, Infinitesimal |
| Proposiciones | Equivalencia de los infinitamente pequeños, La relación inversa entre tangentes y cuadraturas |
| Argumentos | Igualar o hacer tender a cero un infinitamente pequeño |

Fuente: (Elaboración Propia)

En esta trascendencia del cálculo integral, los estudiantes de Newton y Leibniz utilizaron estos estudios para resolver diversos problemas asociados a la astronomía, física e ingeniería, razón por la cual se descubrieron nuevos campos de conocimiento dentro de las matemáticas, es así como aparece Jakob Bernoulli (1654-1705), quien promueve la interpretación de la integración como la operación inversa a la derivación, utilizando un nuevo argumento denominado ecuaciones diferenciales. En 1742 es Jean Bernoulli quien orienta y publica su *Opera Omnia* el primer texto de carácter expositivo en Cálculo Integral, un curso sistemático de Cálculo Integral en la Royal Society of London, por lo cual es a él quien se le atribuye la postura de Cálculo Integral, ya que en este se expone la integral como una operación inversa de un diferencial en la suma constante de términos. En esta misma línea Gaspar Monge (1746-1818) crea la geometría descriptiva, Joseph Louis LaGrange (1736-1813) explora el campo de la mecánica de una forma analítica, algebraica y fundamentada en el concepto de las series infinitas, introduciendo el concepto de ecuaciones diferenciales, Pierre Laplace (1749-1827) quien escribe el libro de mecánica celeste al cual le dan el apodo de “el newton francés”.

De modo similar Leonard Euler (1707-1783) realizó bastantes trabajos en cálculo, mecánica y álgebra en los cuales aplica los métodos de integración de forma indefinida sin necesidad de conocer una función primitiva, recurriendo a una relación que vincula el proceso de la derivada, razón por la cual publica el libro *Institutionum calculi integralis*. Volumen primun (Fundamentos de Cálculo Integral. Volumen primero). Para Euler los modelos propuestos por Leibinz y Newton eran elementales (Pino y Gordillo, 2017 p. 11), ya que estos no resolvían problemas importantes.

Un importante problema se videncia en la siguiente configuración

**Configuración Epistémica 4.5 (CE4.5): Problemas con funciones**
**Problema 14 Integral de $e^{x^2}$**
**Significado Parcial SP4.5: Integral por series**

**Solución dada al problema 4.5**

La función $y = e^{x^2}$es continua pero no es elemental, por lo tanto no tiene antiderivada, por lo tanto, en el cálculo de su Integral:

Se expresa la función $e^{x^2}$ a través de las serie de Maclaurin

$$\boldsymbol{e^{x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots, \text{ por lo tanto,}$$

$$\int \boldsymbol{e^{x^2}} dx = \int \left(1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots\right) dx = C + x + \frac{x^3}{3.\,1!} + \frac{x^5}{5.2!} + \frac{x^7}{7.\,3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1).\,n!}$$

Luego se determinará si la serie es convergente por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{x^{2n}}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!.\, x^{2(n+1)}}{x^{2n}(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^2}{n+1} \right|$$

Entonces para cualquier valor que tome $x$, esta va a converger, por tanto se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{n+1}\right| = 0 < 1.$$

**Análisis de la Configuración epistémica 4.5**

En el análisis de la presente configuración se toma el problema 4.5 el cual se relaciona con la identificación de funciones elementales desarrollado por Euler basado en los problemas de Leibniz. A Euler se le atribuye *problemas* como la introducción de la constante de integración a una función primitiva, la diferencia entre la integral particular definida e indefinida. En el problema se trabaja, bajo el *argumento La integral se dice completa, cuando se representa la función buscada con cada extensión y con una constante arbitraria, pero cuando esa constante se ha determinado en cierta manera, debe ser llamada integral particular,* Además, Euler utiliza un *lenguaje* algebraico muy similar al moderno utilizando la *notación* de "+ C" para expresar el conjunto de funciones. Euler basaba sus *conceptos* en que no todas las funciones tienen primitiva, pero que se pueden solucionar a través de series, es decir el trabajo con funciones trascendentes, es claro que él utiliza y define *procedimientos* para el cálculo de integrales de las funciones trascendentes, los cuales son denominados métodos numéricos.

El conjunto de prácticas analizadas hace emerger el significado parcial de Integral por series (SP4.5).

Otro problema de la época es el reconocido problema de Basilea que también fue solucionado por Euler como se muestra a continuación.

**Configuración Epistémica 4.6 (CE4.6): Problemas de Sumatorias**
**Problema 4.6 El problema de Basilea**
"La suma infinita de los inversos cuadrados de los numero naturales es igual a…?"
**Significado Parcial SP4.5 Integral por series**
**Solución dada al problema 4.6**

A este problema planteado por Pietro Mongoli le han intentado dar diversas soluciones por lo que para el presenté trabajo se tomará la propuesta por Euler en 1731 de la siguiente forma:

Sabemos que la ecuación $sen(x) = 0$ tiene infinitas soluciones en $x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi \ldots \pm n\pi; n \in \mathbb{N}$ y $sen(x) = \mathrm{x} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$

Entonces supóngase que:

$$\frac{sen(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \ldots = 0$$

Como sabemos que el polinomio tiene infinitas raíces o soluciones se reescribe como:

$$\left(1 - \frac{\mathrm{x}}{\pi}\right)\left(1 + \frac{\mathrm{x}}{\pi}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{x}}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{\mathrm{x}}{2\pi}\right) \ldots$$

Ahora bien, aplicando productos se obtiene:

$$\left(1 - \frac{\mathrm{x}^2}{\pi}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{x}^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{x}^2}{9\pi^2}\right) \ldots$$

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \ldots = \left(1 - \frac{\mathrm{x}^2}{\pi}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{x}^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{x}^2}{9\pi^2}\right) \ldots$$

Analizando término a término a cada lado de la ecuación y simplificando se encuentra que:

$$-\frac{1}{3!} = -\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots\right)$$

Ahora multiplicamos por $\pi^2$ a ambos lados y reduciendo obtenemos que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Análisis de la Configuración epistémica 4.6**

En el análisis de la presente categoría se toma como referencia el problema 4.6 denominado el problema de Basilea el cual parte de la *proposición*: “La suma infinita de los inversos cuadrados de los numero naturales es igual a…?”, este problema fue solucionado por Euler bajo los *procedimientos* de las funciones trascendentes, utilizando un *lenguaje* algebraico y analítico; en el desarrollo de este problema se encuentran *propiedades* y *argumentos* propios de la integración descrita por Euler para funciones no elementales. Los desarrollos y análisis de estas prácticas hacen emerger el significado parcial de Integral por partes (SP4.5).

Hasta este momento el surgimiento de los cuatro problemas clásicos del cálculo como el de encontrar la tangente a una curva en un punto, hallar el valor máximo y mínimo de una cantidad, el cálculo de la longitud de una curva, el área de una región, el volumen de un sólido; dada la velocidad y aceleración de un cuerpo encontrar la distancia recorrida en cualquier instante fueron problemas que inquietaron a muchos matemáticos de la alta edad media, llegando a resultados parciales pero fue alrededor de los años setenta del siglo XVII donde dos genios de la matemática dieron a conocer el cálculo, que de forma independiente dieron respuesta a estos problemas; Euler toma la figura como traductor, recolector y transformador de la información allegada, construye el cálculo univariacional a partir de diversas técnicas y soluciones a problemas particulares. Estos problemas originan la configuración epistémica 4.2: Problemas de integrales en funciones no elementales.

En la tabla 4.5 se recoge las entidades primarias relevantes al significado parcial de integral por series.

Tabla 4.5
Análisis de Entidades Primarias del periodo Nacimiento del Cálculo

| Elementos de la configuración epistémica 4.2 | Cálculo Integral<br>Significado Institucional |
|---|---|
| Situaciones | Cuadraturas a partir de los rectángulos infinitamente pequeños, Cuadraturas y Tangentes (teorema fundamental del cálculo), Desarrollo de curvas a través de curvaturas |
| Lenguajes | Geométrico, Aritmético-Geométrico, Algebraico |
| Procedimientos | La integral como una suma infinitesimal y operaciones con cantidades infinitas pequeñas, Uso de la sumatoria y series, Operaciones con infinitesimales, Cálculo de curvas a partir de cuadraturas , Cuadraturas y curvaturas, Exhausción intuitivo en la construcción de volúmenes |
| Definiciones | Integral definida, Sumas infinitas para funciones continuas, Triangulo característico, Definiciones de $dy, dx$, Fluxiones y Fluentes, Infinitos pequeños |
| Proposiciones | La integral como una suma de rectángulos encerrados en una curva, La relación inversa entre tangentes y cuadraturas, $\int dy = y.$, Tabla de integrales |
| Argumentos | Las reglas del cálculo dan validez a los resultados obtenidos |

Fuente: (Elaboración propia)

Se resalta que hacia esta época todos los estudios matemáticos relacionados con el cálculo infinitesimal eran carentes de la lógica griega y una escritura propia, en este orden de ideas es Jacques Bernoulli (1654-1705) quien utiliza por primera vez, la expresión integral en la obra isócrona en 1690, y se cree que él fue uno de los que intento aducir a Leibniz en llamar calculus integralis (calculo integral) a calculus summatorious (calculo sumatorio) ya que se desconocía un concepto clave como el de función; es gracias a Euler, LaGrange quienes dan los primeros aportes a la definición de este concepto, pero Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) es quien define este concepto en los términos modernos; además es en la mitad del siglo XIX que adquiere una fundamentación más rigurosa por parte de Augustin Louis Cauchy (1789-1857) a partir de la noción de límite, esto quiere decir que él encontró una función que puede ser derivable en un punto e incluso no continua, la cual podía tener un área definida. Lo cual lleva a la integración de una forma analítica, y no geométrica en intervalos cerrados y acotados, a través de la sucesión:

$$S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1}).$$

Este tipo de integración fue estudiada, y analizada de forma rigurosa de tal forma que Bernard Riemann (1826-1866) formaliza este concepto para todas las funciones continuas y acotadas, este concepto es conocido como la integral de Riemann.

Estas ideas fortalecerían las fundamentaciones del análisis matemático a base de las técnicas del cálculo. Otro notable estudio fue el que desarrolló Joseph Fourier (1768-1830) quien determina las sumas infinitas de expresiones trigonométricas y así es como cierra la matemática del siglo XIX. Con la idea de generalizar la hipótesis de Riemann y fue Jean Gaston Darboux (1842-1917) quien contribuye con definir las sumas superiores e inferiores en una curva, es decir, la definición de que una función sea integrable si la diferencia entre las sumas superiores e inferiores tiende a cero a medida que el tamaño se hace pequeño.

A inicios del siglo XX se resalta Henri León Lebesgue (1875-1941) quien realiza aportes a la teoría de la medida, y Cálculo Integral, y en especial este último al generalizar la noción de integral de Riemann, donde se determina el área bajo la curva para funciones discontinuas, el cual se complementa por lo hecho por Fourier, establece un aporte al problema del criterio de integrabilidad como sigue:

> "Para que una función acotada sea integrable (R) en [a, b], es necesario y suficiente que para cada par de números, $\omega > 0, \varepsilon > 0$ , exista una partición tal, que $\delta < \varepsilon$ la suma de subintervalos donde la oscilación supera a ω " (Rey Pastor et al., 1969, p. 686).

**Solución dada al problema 4.5**

Sea $f$ una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, se puede establecer una suma de Riemann tal que $L$ puede tomar las normas $\|\triangle\|$ de todas las particiones $\triangle$ de $[a, b]$ suficientemente pequeña de tal manera que el número $\omega_i$ esta en $x_{i-1} \leq \omega_i \leq x_i, i = 1,2,3 \dots n$. Entonces por definición de una función integrable en un intervalo cerrado, el límite L existe si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de tal manera que para toda partición $\triangle$ con $\|\triangle\| < \delta$ y para cualquier $\omega_i$ del intervalo $x_{i-1} \leq \omega_i \leq x_i, i = 1,2,3 \dots n$, se cumple la desigualdad:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\omega_i) \triangle_i x - L\right| < \varepsilon$$

Ahora bien por definición de límite, para un $\delta > 0$ particular existe un número infinito de particiones $\triangle$ que tienen norma $\|\triangle\| < \delta$.

En la misma dirección de estos problemas, en la conferencia Internacional de Matemáticos organizada en Paris, David Hilbert (1862-1943) retoma veintitrés problemas asociados a la matemática del nuevo siglo, de igual manera la invención de computadores y ordenadores, resolvió muchos problemas por siglos existentes y determinó el nacimiento de nuevas áreas del conocimiento tales como: el análisis numérico, ecuaciones diferenciales, y álgebra abstracta. En Mateús (2011, p. 35).

El asombroso avance y evolución en temas de la matemática, la física y la técnica a través de los siglos XVIII, XIX y XX, se debe al Cálculo infinitesimal, motivo por el cual se considera como la creación intelectual más grande de la que la humanidad pueda sentirse orgullosa.

Se puede concluir que la evolución del cálculo surgió a partir del siglo XVII quizá debido al descubrimiento de diversas áreas y problemáticas, tales como la medicina, tecnología, navegación, geográficos, pero fue más el interés racional que llevo a los grandes pensadores a descubrir las posibles soluciones, siguiendo un proceso lógico y riguroso, donde la principal limitación griega del infinito fue el centro del crecimiento intelectual matemático y por tanto del desarrollo del análisis matemático. En el siglo XVIII se manifiesta la abundancia de aplicaciones del cálculo; lo cual distrae la fundamentación de la matemática y del cálculo naciente, ya que todo se deja a la intuición geométrica. Es así, como conceptos como el de límite, fundamental en el estudio del cálculo, pero era aún impreciso. Entonces, como el trabajo arduo de Newton, Leibniz y sus discípulos fueron fundamentales en el cálculo infinitesimal, para el desarrollo de los cuatro problemas clásicos y el desarrollo de cursos y manuscritos en pro del nuevo concepto, a Euler se le atribuyen los métodos de integración indefinida tal y como los conocemos hoy en día. Es así como el Cálculo Integral toma gran rigor y disciplina; e inclusión de temáticas asociadas a la integración de funciones, aplicaciones de las integrales, ecuaciones diferenciales, y el cálculo de funciones especiales.

Uno de los conceptos primarios del Cálculo es el de Integral indefinida, el cual consistía en hallar una familia de funciones asociada a una función. Es decir, a una integral parcial se le asigna una constante arbitraria, y cuando se le asigna un valor a esta constante esta será una integral definida, este argumento fue poco valido por su rigurosidad. Durante el desarrollo del Cálculo Integral, se presentaron diversos problemas, los cuales al ser solucionados originaron otras áreas del conocimiento asociadas al Análisis Matemático. En el siglo XIX con la extensión de la noción de límites y continuidad, se fundamenta el análisis matemático ya que se trabaja con cantidades finitas a razón de los estudios hechos por Bolzano y Cauchy. Esto llevó a definir que las funciones derivables son continuas y a su vez son integrables, los trabajos de Cauchy y Riemann abren nuevos campos y teorías de trabajo en superficies tridimensionales, y geometría diferencial.

Estas teorías surgen a partir de la evolución de los problemas físicos es decir ya no se trataba con problemas relacionados con la mecánica, si no, a la dinámica y las leyes que transforman estas propiedades. Del aporte de Lesbegue se le reconoce el factor de aportar al desarrollo del conocimiento, en el cual se exalta textos de cálculo como: Tom Apóstol, Louis Leithold, James Stewart entre otros, otro factor que propicia la teoría de Lebesgue es su aplicación a diversas ramas de la matemática, tales como: variable compleja, cálculo y análisis matemático.

Dentro de los grandes resultados del cálculo se encuentran las ecuaciones diferenciales, el cálculo y análisis multivariado, la variable compleja, topologías (algebraica y diferencial), matemática Discreta, teoría de Probabilidades entre otras ramas, por tanto, se visualiza su desarrollo en las aplicaciones de estas líneas tales como: la construcción, dinámica, sistemas de enfriamiento y calefacción, transporte, finanzas, aviación, meteorología entre otras.

Es así como en el desarrollo del siglo XVIII se formula el Cálculo Integral como un conjunto de métodos en la solución de problemáticas particulares. Este Cálculo, genera a partir de su análisis y evolución nuevas ramas asociadas al Análisis Matemático, como la teoría de las funciones especiales, la cual al pasar periodos de tiempo se divide en campos matemáticos independientes, tales como: el cálculo variacional y la teoría de ecuaciones diferenciales.

Para concluir este periodo y recorrido histórico se observó el desarrollo y evolución del Cálculo Integral donde faltaba el rigor formalista y un lenguaje que se desprendiera del contexto físico y mecánico, ya que debido a la importancia que este iba adquiriendo se necesitaba enseñar en contextos universitarios. Lo cual incentivó un cambio de mentalidad en cuanto al hacer matemático, desde cuestionar la fundamentación de los problemas desde una perspectiva más general. Esto da origen al formalismo de nociones como límite, por parte de Cauchy a partir de la continuidad, función por Dirichlet, y culminando con Riemann que desarrolla la teoría de integración y análisis funcional en las versiones formalistas y calculistas como hoy se conoce. En la tabla 4.6 se presenta la consolidación de los aportes dados en la CE4.34.2: Problemas de integrabilidad.

Tabla 4.6

*Análisis de entidades primarias en el Periodo evolución del Cálculo*

| Calculo Integral | |
|---|---|
| Elementos de la configuración epistémica 4.3 | Significado Institucional |
| Situaciones | Cuadraturas a partir de los rectángulos infinitamente pequeños, Cuadraturas y Tangentes (teorema fundamental del cálculo), Desarrollo de curvas a través de curvaturas |
| Lenguajes | Geométrico, Aritmético-Geométrico, Algebraico |
| Procedimientos | La integral como una suma infinitesimal y operaciones con cantidades infinitas pequeñas, Uso de la sumatoria y series, Operaciones con infinitesimales, Cálculo de curvas a partir de cuadraturas, Cuadraturas y curvaturas, Exhausción intuitivo en la construcción de volúmenes |
| Definiciones | Integral definida, Sumas infinitas para funciones continuas, Triangulo característico, Definiciones de $dy, dx$, Fluxiones y Fluentes, Infinitos pequeños |
| Proposiciones | La integral como una suma de rectángulos encerrados en una curva, La relación inversa entre tangentes y cuadratura, $\int dy = y.$, Tabla de integrales |
| Argumentos | Las reglas del cálculo dan validez a los resultados obtenidos |

Fuente: (Elaboración Propia)

Por último, en este apartado se realiza una tabla (4.7) resumen, sobre las configuraciones epistémicas abordadas en el recorrido histórico, estas serán la base conceptual para identificar el significado Holístico del objeto Integral.

Tabla 4.7

*Configuraciones epistémicas emergentes en la historia para el objeto Integral.*

| **Configuración epistémica** | **Situación Problema** | **Significado Parcial** |
|---|---|---|
| CE1.1 | ¿Cuál es el área de un triángulo de lado 10 jet y base 4 jet? (papiro Rhind – aprox 1650 a.c). | SP 1.1. Área de una región por fórmula |

| | | |
|---|---|---|
| CE1.2 | "El problema 14 es de geometría y pide calcular el volumen de una pirámide truncada." | SP2.1 Volúmenes por fórmulas |
| CE1.3 | "El cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados sobre los catetos" | SP 3.1 método exhaustivo para calcular áreas |
| CE1.4 | "La diferencia en área entre un círculo y un polígono regular inscrito puede hacerse tan pequeño como se desee" (Kline,1972 pág. 117). | SP3.2 Método exhaustivo |
| CE1.5 | "El área A de un segmento parabólico es 4/3 veces el área T del triángulo inscrito" | SP3.3 Método exhaustivo |
| CE1.6 | El área del primer ciclo de una espiral es igual a una tercera parte del área del círculo circunscrito. | SP3.1=SP1.6 Método exhaustivo para calcular áreas |
| CE2.1 | "Un cuerpo en movimiento uniformemente acelerado recorre, en un determinado intervalo de tiempo, el mismo espacio que sería recorrido por un cuerpo que se desplazara con velocidad constante e igual a la velocidad media del primero." | SP4.1 Integral Indefinida |
| CE2.2 | "El método que el comerciante de vinos usó para medir el volumen del barril y que tanto extrañó a Kepler consistió en insertar una vara desde del agujero central (S en el diagrama) hasta el lado opuesto de la tapa del barril (en D)." (Cardil, R. 2010). | SP2.2 Volúmenes |
| CE3 | "El centro de gravedad de cualquier triángulo está en la línea que une el vértice con el punto medio de lado opuesto." Cantoral y Farfán (2004) | SP3=SP4.1 Integral definida |
| CE4.1 | "Digo que todas estas infinitas hipérbolas, excepto la de Apolonio, que es la primera, pueden ser cuadradas por el método de la progresión geométrica, de acuerdo a un procedimiento uniforme general." Fermat (1655). | SP4.2: Integral Indefinida |
| CE4.2 | Teorema fundamental del cálculo (versión Barrow) | SP4.2=SP6.1: Teorema fundamental del cálculo. Forma 1 |
| CE4.3 | Cuadratura de una curva (versión Newton)<br>"Sea aplicada la perpendicular BD a la base AB a una curva cualquiera AD, y llámese $AB = x$ y $BD = y$; y sean $a, b, c$, cantidades dadas y $m, n$ números entero. Por ende, Regla I: $ax^{\frac{m}{n}} = y$, será $\frac{an}{n+m} x^{\frac{n}{m+n}} = área\ ABD$" (Newton, 2003,p,12,13). | SP4.3: Antiderivada |
| CE4.4 | Cuadratura de una curva (versión Leibinz) | SP 4.4: Antiderivada |
| CE4.5 | Integral de $e^{x^2}$ | SP4.5: Integral por series |
| CE4.6 | El problema de Basilea<br>"La suma infinita de los inversos cuadrados de los numero naturales es igual a…?" | SP4.5 Integral por series |

Configuraciones epistémicas halladas en la historia, base para el significado global del objeto Integral Fuente: Elaboración propia.

## 4.2 Significado Holístico del objeto integral

En el desarrollo del estudio del objeto integral, surgen en forma natural tres preguntas importantes ¿Qué es el objeto integral? ¿Cuáles son los significados parciales del objeto integral?

¿Qué prácticas matemáticas se relacionan con el objeto integral? Estos interrogantes evidencian la necesidad de realizar en un primer momento, un análisis profundo del objeto Integral que permita determinar ¿Qué relación existe entre el significado del objeto integral y la dimensión epistémica y cognitiva del CDM de los profesores? Ya que se propone como objeto de investigación, determinar cuáles pueden ser los conocimientos matemáticos y didácticos que debe poseer el futuro profesor de matemáticas sobre esta temática para que la clase en el objeto integral tenga la mayor idoneidad epistémica y cognitiva posible. Por tanto, la investigación centro su atención en descubrir en primer lugar ¿Cuál es el significado del objeto integral? y ¿cuáles han sido sus significados en su evolución histórica? De esta forma, (Pino-Fan,2013) considera que el estudio de los significados toma gran relevancia puesto que el docente al conocer el significado global, determina e implementa los más apropiados en el desarrollo del proceso de instrucción del tópico matemático.

En los procesos de reconstrucción, identificación y análisis de los sistemas de prácticas emergentes en cada periodo histórico fue el soporte en la reconstrucción del significado holístico (Pino-Fan; Godino; Font, 2011) del objeto Integral. Cada sistema de prácticas está asociado a una configuración epistémica que es una herramienta proporcionada por el EOS compuesta por los objetos primarios (situaciones problema, lenguajes, procedimientos, conceptos, proposiciones y/o propiedades, argumentos) sujetos a ser analizados.

Cada configuración epistémica establece un significado parcial para el objeto Integral, en nuestro caso; se identificaron 15 configuraciones epistémicas abordadas en cuatro periodos de tiempo, las cuales son: (**CE1.1**) cálculo de áreas por regiones, (**CE1.2**) cálculo de volúmenes de sólidos por fórmulas, (**CE1.3**) problemas de área en la escuela Pitagórica, (**CE1.4**)**,** métodos de exhausción, (**CE1.5**) cuadratura de una parábola, (**CE1.6**)**,** método exhaustivo para el cálculo de áreas; estas configuraciones se agrupan en la configuración **CE1**. De igual forma, la (**CE2.1)** la distancia como área, (**CE2.2**) método de máximos para volúmenes, se agrupan en la configuración epistémica **CE2**. La (**CE3**) método de centros de gravedad, y la (**CE4.1**) cuadratura de una hipérbola, (**CE4.2**) teorema fundamental del cálculo, (**CE4.3**) cuadratura de una curva (fluentes), (**CE4.4**) cuadratura de una curva (Sumatorias), (**CE4.5**) funciones no elementales, (**CE 4.6**) Integral por series, las cuales se agrupa en la **CE4**. En la figura 4.22 se muestran cada uno de los significados parciales identificados, de igual manera se visualiza la relación entre configuraciones y significados de acuerdo a su generalización dentro de una línea de tiempo.

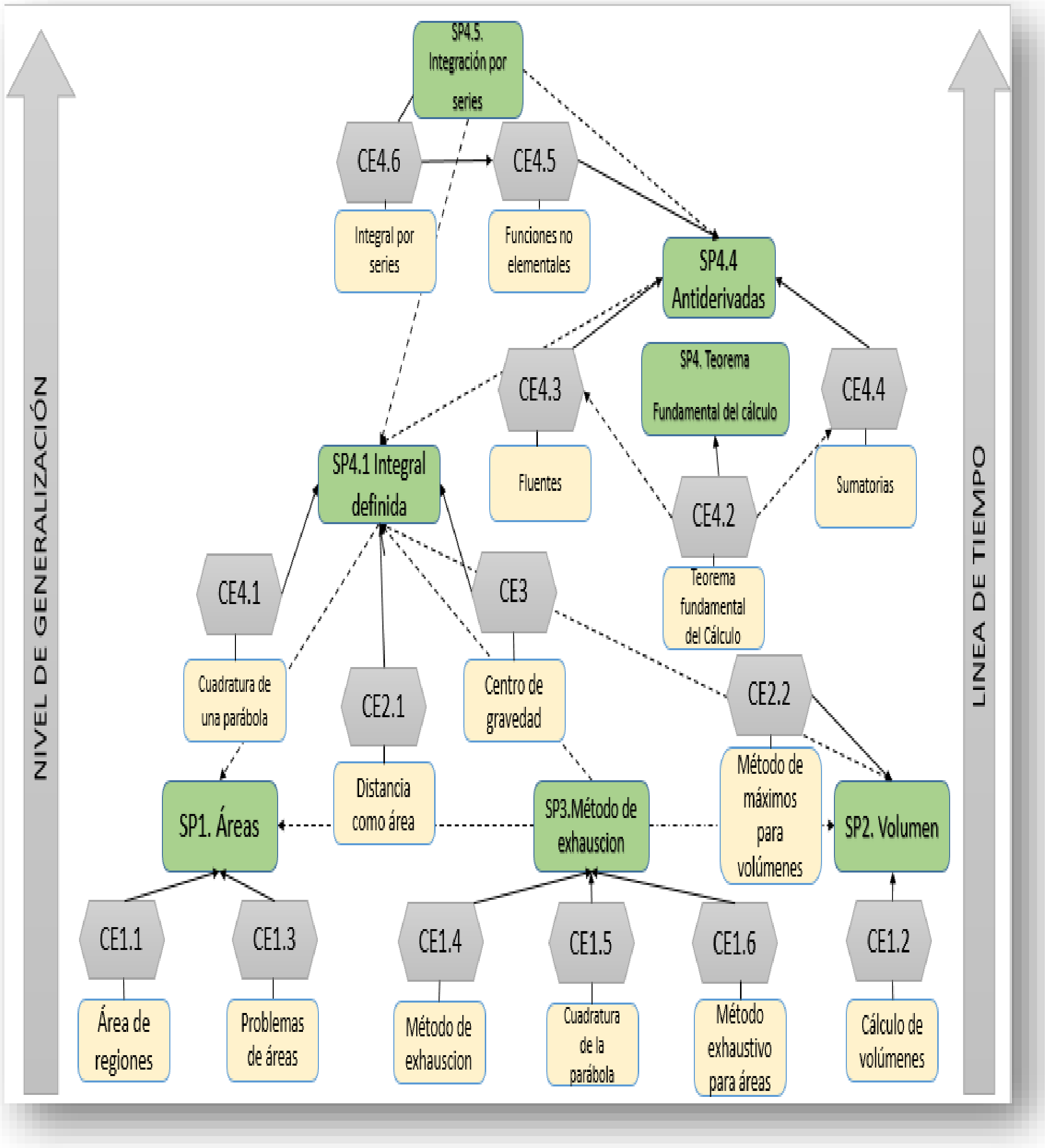



*Figura 4.22* Significado holístico del objeto Integral. Fuente: (Elaboración Propia).

En la figura se muestra las conexiones entre las configuraciones epistémicas, mediante líneas discontinuas, lo que indica que una situación problema, puede ser solucionada por cada configuración con la que hace el enlace.  Se puede describir que la configuración (CE4.6), es la más general puesto que se encuentra enlazada a otros sistemas de prácticas que pertenecen a otro periodo de tiempo. De igual manera se observa la evolución del objeto, con respecto a los elementos y características pertenecientes a las configuraciones CE1.1, CE1.2, CE1.3, CE1.4, CE1.5, y CE1.6 hacia la configuración CE4.6, determinando en este recorrido siete significados parciales, los cuales han sido similares pero modificados y tecnificados por algoritmos, lenguajes y notaciones a lo largo de la historia, estos se relación con una línea continua.

Ahora bien, en la evolución del objeto integral a lo largo de la historia se visualiza como una configuración epistémica toma elementos de otra configuración establecida para formar una nueva, es por esto que las configuraciones CE1.1, CE1.2, CE1.3, CE1.4, CE1.5, CE1.6 se pueden definir como "primarios" ya que cada una resuelve un problema con técnicas y procedimientos particulares.

Aunque los problemas de las primeras seis configuraciones son particulares como muestra el estudio histórico, estos al asociarse en un sistema de prácticas, hacen emerger los significados parciales de áreas, método exhaustivo, y volúmenes como muestra la figura, en un segundo nivel se muestran dos sistemas de prácticas (CE2.1 y CE2.2), que abordan el cálculo infinitesimal en la solución de problemas físicos de la época renacentista, que recogen en su orden los significados de área y volúmenes, en un tercer nivel, está la configuración CE3.1 que trata sobre el cómo hallar los centros de gravedad en superficies y de sólidos, a su vez la CE4.1 es un problema geométrico sobre cuadraturas de curvas, estas configuraciones (CE2.1, CE2.2,CE3.1, y CE4.1) se relacionan en el significado de integral definida, siendo así el significado que puede solucionar cada una de las problemáticas abordadas. En la evolución de la época moderna surge el nacimiento del Cálculo Integral por parte de Leibinz y Newton, en las configuraciones CE4.2, CE4.3, CE4.4, que se relacionan con el significado parcial de teorema fundamental del cálculo y primitivas que abordan el significado de integral definida a su vez las configuraciones primarias; en el formalismo de la matemática Euler es quien desarrolla las configuraciones CE4.5 y CE4.6 proponiendo el significado parcial de integral por series el cual sería el significado global del objeto Integral.

Tabla 4.8

*Significado Holístico del objeto Integral*

| **Configuración epistémica** | **Significado Parcial** |
|---|---|
| CE1. Problemas de cálculo de áreas en la edad antigua. | SP1. Método de exhausción |
| CE2. Problemas de cálculo de áreas y volúmenes en la edad media | SP4.2.Integral Indefinida |
| CE3. Problemas de aplicación en el renacimiento. | SP4.1. Integral definida |
| CE4.1. Problemas de cuadratura de curvas | SP4 Teorema fundamental del Cálculo |
| CE4.2. Problemas de integrales en funciones no elementales. | SP4.5 Integral Por series |
| CE4.3: Problemas de integrabilidad | SP5. Sumas de Riemann |

Fuente: (Elaboración Propia)

# Capítulo 5. Segundo Resultado: Diseño del cuestionario CDM Integral

*"La tarea del educador moderno no es cortar selvas,*
*sino regar desiertos"*
*Clive Lewis*

En este apartado se realiza el análisis al contexto curricular para el curso de cálculo Integral según las propuestas de las instituciones de educación superior en el contexto colombiano, para la asignatura, con el fin de identificar los significados parciales de referencia que se presentan en estos programas e identificar el núcleo común, para determinar en esta dirección el significado de referencia del objeto integral, es decir los contenidos que se deberían enseñar en estos cursos de cálculo integral. De igual forma, se realiza un análisis de textos a los principales libros universitarios en relación con la asignatura de Cálculo Integral para identificar de igual forma, los significados de referencia de los textos y compararlos con el significado global del objeto integral según el estudio histórico-epistemológico y en este aspecto identificar los significados comunes que constituyen el significado de referencia  o los significados para los libros de texto.

Ya con estas tres herramientas teóricas: significado global, significado de referencia de los programas, y significados de referencia de los textos, se pasa al diseño y análisis del instrumento CDM-Integral el cual incorpora los significados de referencia considerados como estructurantes del conocimiento común del contenido y del conocimiento ampliado, es decir son los significados que los estudiantes de cálculo integral han incorporado a sus estructuras mentales. En esta dirección se establecen los elementos que permiten caracterizar parte de la dimensión epistémica en el modelo CDM del profesor, en cuanto al conocimiento del significado global de la integral y el significado de referencia, queda faltando caracterizar las tareas propias del conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido respecto a la integral.

Para caracterizar las tareas propias del CCC y CAC y como resultado de igual forma relevante, se presenta un cuestionario definitivo para identificar estas tareas, es decir del estudio histórico y a partir de un banco de problemas, con unos criterios establecidos se llega a identificar las tareas propias de cada conocimiento, siguiendo el modelo teórico en el EOS.

## 5.1 Contexto curricular

En este apartado se describe el currículo de Cálculo Integral, partiendo de la visión internacional y pasar a realizar la triangulación con el análisis de textos universitarios, para identificar los significados de referencia pretendidos para el programa de cálculo integral o como se establece en este marco teórico, del objeto integral.

### 5.1.1 El Cálculo Integral en el currículo internacional

Para identificar el papel que asume el Cálculo Integral en el currículo escolar internacional, se toman en cuenta los principios y estándares para la educación matemática del National Council of Teachers of mathemathics (NCTM, 2000), y los estudios en Educación Matemática (Hitt, 2003; Milevicich, 2008; Contreras, 2000; Moratalla 1998), descritos en las problemáticas presentadas en este documento se infiere que actualmente no hay un consenso sobre qué es lo que debe abordar un curso de Cálculo Integral y que ante las nuevas demandas tecnológicas estas deben dinamizarse en el proceso de enseñanza y aprendizaje en el aspecto universitario.

Estudios como los de Orton (1979), ponen de manifiesto el reduccionismo de los conceptos matemáticos referentes al cálculo en procesos algebraicos, los cuales se basan en operaciones algebraicas con nociones como límites, derivadas e integrales, donde se debe tener en cuenta conceptos específicos del análisis, tales como las razones de cambio y la integral definida.

Milevivich (2008) y Hitt (2003) proponen modelos donde se dé a conocer el Cálculo Integral desde una perspectiva visual y geométrica para el aprendizaje del Cálculo Integral, puesto que los estudiantes en su primer año universitario carecen de un lenguaje formal para conocer los conceptos matemáticos como integral definida y área bajo una curva, y la mayor parte de profesores enseñan el concepto de forma expositiva y simplista sin interpretar algunas aplicaciones del Cálculo Integral, tales como cálculo de áreas, volúmenes, longitud de arco, relaciones con la ingeniería, y física.

Bajo estos argumentos, se puede considerar que, en el enfoque del EOS, los conceptos y procedimientos son parte de una dimensión que estructura el conocimiento del futuro profesor denominada la dimensión epistémica, al igual que la articulación de los otros objetos primarios (situaciones problema, lenguaje, proposiciones y argumentos) objetos que forman lo que se denomina una configuración epistémica, la cual caracteriza los significados de referencia de la Integral (significados que usa el profesor en su curso). Es por esto, que los sistemas de prácticas matemáticas se convierten en objeto de investigación y análisis para el diseño del proceso de enseñanza y aprendizaje idóneo, y a partir de este, la problemática de la construcción de un currículo significativo, el cual se origina de la identificación del significado global del objeto integral y su puesta en acción en los currículos.

### 5.1.2 El Cálculo Integral en el currículo de los estudiantes

El Cálculo Integral, es una asignatura dentro de los planes universitarios, para estudiantes de licenciatura en matemáticas y en general estudiantes de ingeniería. En este aspecto, en el estudio se busca relacionar la caracterización del conocimiento del contenido matemático (Pino, 2015) para los estudiantes de formación matemática en relación con el Objeto Integral y al igual se estudia en general, el tema del conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores, respecto al objeto matemático según la formación universitaria o formación de pregrado adquirida.

Según la resolución 5443 del 30 de junio de 2010, del Ministerio de Educación Nacional (MEN,2011) se definen las características específicas de calidad de los programas de formación profesional en educación, donde se relacionan una serie de artículos en referencia de estas:

El artículo 2, define el perfil del educador como:

> El educador es un profesional con formación pedagógica que, atendiendo a las condiciones personales y de los contextos, orienta procesos de enseñanza y de aprendizaje y guía, acompaña y promueve la formación y el desarrollo de las competencias de sus estudiantes.

Por tanto, los programas de formación deben fortalecer las competencias básicas del educador en los siguientes niveles:

- Conocer y utilizar procesos y conceptos fundamentales de las matemáticas que le permitan interpretar y representar situaciones cotidianas y especializadas de manera gráfica, simbólica, numérica y verbal y solucionar problemas en diversos contextos.
- Indagar y analizar de manera crítica y reflexiva las interacciones físicas, sociales y culturales que se desarrollen en contexto. Aplicar con responsabilidad social y ambiental, el conocimiento científico y tecnológico en soluciones innovadoras que posibiliten cambios y transformaciones ante los problemas identificados en contexto.
- Aprender de manera autónoma, por iniciativa personal y utilizar los conocimientos, y prácticas propias de su disciplina. Fortalecer sus competencias a través de su ejercicio profesional, la autoevaluación permanente y el intercambio con otros.

Además, esta resolución establece las competencias profesionales que le permitan al educador:

- Desarrollar actividades de enseñanza y aprendizaje fundamentadas en la articulación de conocimientos, conceptos y procedimientos de los saberes de la disciplina, de la didáctica, la historia, la epistemología y la pedagogía, para el caso de los licenciados, en relación con la Matemática.

En el artículo 5 de la presente resolución se define el currículo respecto a:

> La institución de educación superior demostrará a través de un currículo fundamentado, articulado, dinámico y flexible su pertinencia frente a las demandas del contexto, la coherencia entre los aspectos que lo componen y las estrategias pedagógicas y didácticas que le permitan lograr el perfil que se propuso en relación con el desarrollo de las competencias de sus estudiantes

Ahora bien, bajo la resolución presentada los egresados del programa de Licenciatura en Matemáticas se desempeñan en el campo profesional, como licenciados en Educación Básica y Media, bajo el currículo y estándares de aprendizaje diseñados por el MEN (1998), pero se observa que en las universidades colombianas son vinculados como profesores universitarios, egresados del programa de Licenciatura en Matemáticas; quienes deben diseñar actividades de enseñanza y aprendizaje donde se debe articular sus conocimientos matemáticos y didácticos, basado en sus concepciones, historia y epistemología del conocimiento interpuesto. De igual forma ya en muchas instituciones educativas en el grado 11 se trabajan objetos del cálculo integral, donde el profesor de matemáticas necesita poner a prueba su conocimiento común y su conocimiento ampliado respecto al objeto integral.

Entonces, un estudiante de licenciatura en matemáticas debe desarrollar o potenciar algunos de los conocimientos didácticos y matemáticos necesarios para la enseñanza, y en este aspecto es pertinente caracterizar la dimensión epistémica y cognitiva del estudiante de formación matemática específicamente, del estudiante de licenciatura en matemática para la enseñanza del objeto integral en la educación media y superior.

Siguiendo los argumentos expuestos, se realiza en primer lugar el estudio histórico, epistemológico y fenomenológico del objeto integral, para identificar los significados que este objeto toma a lo largo de su desarrollo histórico, por tanto, se constituyen en los significados pretendidos por el profesor para los programas de Cálculo Integral; pero de igual forma se analizan los significados pretendidos por la institución (universidad y textos) para poder diseñar un instrumento que permita reflexionar sobre  los conocimientos didáctico-matemáticos en relación con el objeto Integral necesarios para la enseñanza del objeto matemático. En la tabla 5.1 se resumen los contenidos mínimos de cuatro programas de Cálculo integral de universidades colombianas.

Se describen y amplían las temáticas comunes abordadas por estas universidades, las cuales establecen parte del criterio 1, para la selección de tareas en la construcción del instrumento CDM-Integral el cual nos lleva a la caracterización de las dimensiones epistémica y cognitiva del conocimiento del futuro profesor de matemáticas para el objeto integral.

Entre los temas comunes se encuentra: Antiderivadas, áreas, sumas de Riemann, integrabilidad de funciones continuas, propiedades de la integral definida, teorema del valor medio, los dos teoremas fundamentales del cálculo, integral impropia, integración numérica, aplicaciones de la integral: área entre curvas, volumen de sólidos, sólidos de revolución, longitud de arco, trabajo, centros y centroides de masa.

Tabla 5.1

*Contenidos mínimos del curso Cálculo Integral*

| Universidad | Contenidos |
|---|---|
| Universidad de los Andes<br>(licenciatura en matematicas) | 1. Métodos de Integración<br>2. Integrales Impropias<br>3. Series y Sucesiones<br>4. Números Complejos<br>5. Modelando con ecuaciones diferenciales<br>6. Variables separables<br>7. Ecuaciones lineales<br>8. Ecuaciones de 2° orden<br>9. Coeficientes indeterminados<br>10. Coordenadas polares<br>11. Áreas y longitudes en curvas paramétricas |
| Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Tunja<br>(Licenciatura en Matemáticas) | 1. Primitivas (antiderivadas)<br>2. Métodos de Integración<br>3. Integral definida<br>4. Teorema fundamental del cálculo<br>5. Sólidos de revolución<br>6. Longitud de Arco |
| Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.<br>(Matemáticas) | 1. Integración<br>2. Aplicaciones de la Integral<br>3. Métodos de Integración<br>Sucesiones y series |
| Universidad Nacional Abierta y a Distancia<br>(Licenciatura en matematicas) | 1. Integral de Riemann<br>2. Funciones Integrables<br>3. Teorema fundamental del cálculo<br>4. Métodos elementales de Integración<br>5. Integración Impropia<br>6. Aplicaciones<br>Ecuaciones Diferenciales |
| Universidad del Tolima<br>(licenciatura en matematicas) | 1. Integral Indefinida<br>2. Integral definida<br>3. Técnicas de Integración<br>4. Aplicaciones de la Integral<br>Series y sucesiones |

**Nota.** Descripción de los contenidos mínimos abordados en un curso de Cálculo Integral en universidades colombianas.

### 5.1.3 El Cálculo Integral en libros de texto

En este apartado se ha realizado el análisis semiótico a los libros de texto de carácter universitario, los cuales son un recurso importante para los cursos de Cálculo Integral en el currículo colombiano. En estos textos se analizan los significados parciales pretendidos para el objeto Integral, para llegar a determinar los significados institucionales de este objeto. Los libros de texto que se escogieron para este análisis pertenecen a editoriales de gran difusión a nivel universitario y de matemática avanzada. Son cuatro textos universitarios que dan lugar a la construcción del significado institucional de referencia pretendido.

En cada texto se consideró la unidad correspondiente al objeto Integral en cuanto a qué conceptos o significados institucionales incluye y qué tipos de problemas se presentan, (ver tablas 5.2-5.9). En cada tabla se realiza una descomposición en tres partes la primera y la segunda columna dan lugar a los títulos literales de cada texto y la tercera columna presenta los conceptos abordados en cada uno de estos apartados. En la última fila de cada tabla se describe el enfoque metodológico de las actividades, así como un recuento de los problemas, ejercicios de aplicación teórica y procedimental.

**Cálculo de una variable Larson R y Edwards B**.

El libro de texto de la editorial McGraw-Hill, denominado “Cálculo 1 De una variable 9ª edición” fue editado y publicado en el año 2010, en la ciudad de México (México): presenta una estructura curricular formada por un capítulo de preparación al Cálculo y nueve capítulos orientados al estudio de límites y sus propiedades, continua con derivación, aplicaciones de la derivada, integración, funciones logarítmicas, exponenciales y otras funciones trascendentes, ecuaciones diferenciales, aplicaciones de la integral, técnicas de integración, regla de L`Hôpital e integrales impropias y series infinitas. El concepto de Integral aparece en los capítulos 4, 5, 7,8 desde la página 247 hasta la 593.

Tabla 5.2

*Descripción libro Cálculo de una variable*

| Contenidos | |
|---|---|
| Antiderivadas o primitivas e integración indefinida | Antiderivada o primitiva<br>Definición, representación de antiderivadas o primitivas<br>Teorema y demostración de representación de antiderivadas<br>Notación para antiderivadas o primitivas<br>Reglas básicas de integración<br>Aplicación de las reglas básicas de integración<br>Integración de funciones polinomiales<br>Recomendación utilizando la tecnología<br>Condiciones iniciales y soluciones particulares<br>Solución de un problema de movimiento vertical (aplicación movimiento proyectiles física)<br>Ejercicios (76 ejercicios estructurados en el desarrollo del algoritmo de primitivas, 24 ejercicios direccionados a aplicaciones en física y biología, |
| Área | Notación sigma<br>Fórmulas de suma empleando la notación sigma<br>Anécdota Gauss<br>Área<br>Arquímedes y el método de exhausción (Aclaración)<br>El área de una región plana<br>Aproximación del área de una región plana<br>Sumas superior e inferior<br>Representaciones gráficas de área de regiones planas, regiones<br>Límites de las sumas superior e inferior<br>Definición del área de una región en el plano<br>Hallar el área mediante la definición de límite<br>Una región limitada por el eje y<br>Ejercicios una cantidad de 94 ejercicios identificando el algoritmo de notación sigma, sumas y límite de sumas |
| Sumas de Riemann e integrales definidas | Explicación de una Suma de Riemann<br>Una partición con subintervalos de anchos desiguales<br>Biografía de Georg Friedrich Bernhard Riemann<br>Definición de una suma de Riemann<br>Definición de Integrales definidas<br>Teorema de continuidad e integración<br>Evaluación de una integral definida como límite<br>Teorema y representación gráfica de la integral definida como área de una región |

**Nota**. Descripción de contenidos y actividades sobre Integral. Editorial McGraw-Hill.

Tabla 5.2 (continuación)

*Descripción libro Cálculo de una variable*

| Contenidos | |
|---|---|
| Sumas de Riemann e integrales definidas | Áreas de figuras geométricas comunes (gráficas y expresión algebraica de funciones que forman rectángulos, trapezoides, semicírculos)<br>Representación gráfica y enunciado del teorema de adición de intervalos<br>Evaluación de una integral definida<br>Ejercicios ( 80 ejercicios, los cuales vienen secuenciados para mecanizar el algoritmo de la suma de Riemann, Integral definida y algunas demostraciones de integrales) |
| El teorema fundamental del cálculo | Ilustración de **teorema fundamental del cálculo**<br>Definición y demostración del teorema fundamental del cálculo<br>Algoritmo para el desarrollo integral definida<br>Teorema del valor medio para integrales<br>Ilustración, definición, demostración del teorema del valor medio<br>Definición valor medio de una función<br>Interpretación de **segundo teorema del cálculo**<br>Función acumulación<br>Definición y demostración del segundo teorema fundamental del cálculo<br>Teorema del cambio neto<br>Algoritmo de aplicación del teorema del cambio neto<br>Ejercicios (117 ejercicios estructurados entre el algoritmo de primer y segundo teorema fundamental del cálculo, aplicaciones de estos teoremas e interpretación de gráficas) |
| Integración por sustitución | Reconocimiento de patrones<br>Teorema de antiderivación de la función compuesta<br>Algoritmo de antiderivación compuesta<br>Propiedades de integración<br>Cambio de variable<br>Algoritmo cambio de variable<br>Regla general de potencia para integrales<br>Teorema de la regla general de potencia para integrales<br>Cambio de variable para integrales definidas<br>Teorema de cambio de variable para integrales definidas<br>Integración de funciones pares e impares<br>Definición y demostración del Teorema integración de funciones pares e impares<br>Ejercicios (140 ejercicio estructurados entre el algoritmo de sustitución, cambio de variables, algunas aplicaciones y demostraciones de teorema) |
| Integración numérica | La regla de los trapecios<br>Ilustración y definición del Teorema dela regla de los trapecios<br>Regla de Simpson<br>Definición y demostración del Teorema de la integral de $p(x) = ax^2 + bx + c$<br>Definición y demostración regla de Simpson<br>Análisis de errores Ejercicios (56 ejercicios estructurados en algoritmos, aplicaciones y demostraciones utilizando la regla de los trapecios y Simpson)<br>Problemas (21 aplicando los temas vistos en el capítulo) |

**Nota**. Continuación de la descripción de contenidos y actividades sobre Integral. Editorial McGraw-Hill

Tabla 5.2 (continuación)

*Descripción libro Cálculo de una variable.*

| Contenidos | |
|---|---|
| Aplicaciones de la integral | Área de una región entre dos curvas<br>Área de una región entre curvas que se intersecan<br>La integración como un proceso de acumulación<br>Volumen: el método de los discos<br>Método de las arandelas (anillos)<br>Sólidos con secciones transversales conocidas<br>Método de las capas<br>Longitud de arco y superficies de revolución<br>Trabajo realizado por una fuerza constante<br>Momentos, centros de masa y centroides<br>Teorema de Pappus<br>Presión y fuerza de un fluido |
| Técnicas de integración e integrales impropias | Adaptación de integrados a las reglas básicas<br>Integración por partes<br>Método tabular<br>Integrales trigonométricas<br>Sustituciones trigonométricas<br>Fracciones simples o parciales<br>Integración por tablas<br>Fórmulas de reducción<br>Definición de integrales impropias con límites de integración infinitos |
| Análisis | Las unidades didácticas están divididas en secciones como se indica en la segunda columna, los ejemplos están estructurados en el desarrollo de una propiedad, definición o teorema con respecto al objeto integral y al término de cada una de ellas se proponen un conjunto variado de ejercicios de aplicación teórica y procedimental. Los ejercicios son de tipo gráfico, simbólico y los enunciados son verbales. |

**Nota**. Continuación de la descripción de contenidos y actividades sobre Integral. Editorial McGraw-Hill

Los significados institucionales pretendidos en el libro de la editorial Mc-Graw-Hill según la tabla 5.2 para la integral, corresponden a:

Tabla 5.3

*Significados pretendidos de la editorial Mc-Graw-Hill*

| Significado Institucional | |
|---|---|
| **SP1T1:** Área | **SP9:T1** Integral indefinida |
| **SP2T1:** Método de exhausción | **SP10T1:** Teorema Fundamental del Cálculo |
| **SP3T1:** Sumas de Riemann | **SP11T1:** Teorema del valor medio |
| **SP4T1:** Volumen | **SP12T1:** Integración numérica |
| **SP5T1:** Primitivas | **SP13T1:** Trabajo |
| **SP6T1:** Longitud de área | **SP14T1:** Centroides |
| **SP7T1:** Técnicas de integración | **SP15T1:** Integral impropia. |
| **SP8T1:** Integral definida | |

**Nota.** Significados parciales institucionales encontrados en el libro de la editorial Mc-Graw-Hill

**El Cálculo Leithold, L.**

El libro de texto de la editorial Harla, publicado en México, en el año 1998, y escrito por Leithlod, L, presenta una estructura curricular formada por catorce capítulos organizados en unidades didácticas y dos apéndices, cada unidad está dividida en distintos apartados. El concepto de Integral aparece en los capítulos 4, 5,6, 7, desde la página 296 hasta la 632.

Tabla 5.4
*Descripción libro Cálculo de Leithold.*

| Contenidos | | |
|---|---|---|
| Integral definida e integración | Antiderivación | Definición<br>Trece teoremas donde se define la antiderivación y algunas reglas para integrar<br>Demostración de cada teorema<br>Ejemplo ilustrativo en cada teorema<br>54 ejercicios de repaso de capitulo entre algoritmos y gráficas |
| | Algunas técnicas para integración | Dos teoremas haciendo énfasis en la regla de la cadena para integración<br>Demostración de los teoremas<br>Ejemplos ilustrativos de integración haciendo uso de la sustitución |
| | Área | Definición notación sigma<br>Seis teoremas del cálculo de sumatorias<br>Demostración de cada teorema<br>Definición de Área<br>Ejemplos ilustrativos del cálculo de áreas |
| | Integral definida | Explicación introductoria a las sumas de Riemann<br>Definición analítica integral definida (2)<br>Definición analítica de la medida del área de una región y ejemplo.<br>Definición de funciones continuas y positivas<br>Teorema y demostración de la sumatoria de particiones en una región plana<br>Cinco teoremas y demostración de las propiedades de la integral definida<br>Ejemplos ilustrativos para cada teorema |

**Nota.** Desarrollo de contenidos y actividades sobre Integral. Editorial Harla

Tabla 5.4 *(continuación)*
*Descripción libro Cálculo de Leithold.*

| **Contenidos** | | |
|---|---|---|
| | Teorema valor medio | Dos teoremas introductorios al valor medio de una integral con demostración y ejemplo ilustrativo<br>Teorema del valor medio con demostración y ejemplo ilustrativo |
| | Teorema fundamental del cálculo | Introducción histórica del objeto integral<br>Teorema fundamental del cálculo (I y II)<br>Demostraciones y ejemplos ilustrativos del teorema fundamental del cálculo. |
| | Área de una región plana | Ocho ejemplos ilustrativos encontrando el área de una región recurriendo a particiones, sumas e integral definida. |
| | Volúmenes de sólidos (discos y arandelas) | Explicación teórica de sólidos y volumen<br>Definición y teorema (2) de sólidos con ejemplos ilustrativos. |
| | Volúmenes de sólidos (capas) | Explicación teórica- analítica del volumen de un sólido<br>Teorema del volumen de sólidos por capas<br>Demostración y ejemplos ilustrativos |
| Aplicaciones adicionales de la integral definida | Longitud de arco | Explicación teórica<br>Definición<br>Teoremas de longitud de las curvas<br>Ejemplos ilustrativos |
| | Centro de masa de una barra | Explicación teórica- analítica<br>Ejemplos ilustrativos<br>Definiciones de centro y momentos de una barra |
| | Centro de masa de una lamina | Explicación teórica- analítica<br>Ejemplos ilustrativos<br>Definiciones de centro y momentos de una lamina<br>Teorema de Pappus |
| | Trabajo | Explicación teórica<br>Definición de trabajo<br>Ejemplos ilustrativos |

**Nota.** Continuación del desarrollo de contenidos y actividades sobre Integral. Editorial Harla

Tabla 5.4 *(continuación)*
*Descripción libro Cálculo de Leithold.*

| Contenidos | | |
|---|---|---|
| Aplicaciones adicionales de la integral definida | Fuerza | Explicación teórica<br>Principio de Pascal<br>Definición de fuerza en líquidos<br>Ejemplos ilustrativos |
| Técnicas de integración, formas indeterminadas, e integrales impropias | Integración por partes | Formulas básicas de integración<br>Explicación analítica de la integración por partes<br>Ejemplos ilustrativos |
| | Integrales trigonométricas | Explicación teórica y analítica<br>Ejemplos ilustrativos |
| | Integración por sustitución trigonométrica | Explicación teórica y analítica<br>Ejemplos ilustrativos |
| | Integración de funciones racionales | Explicación teórica y analítica<br>Ejemplos ilustrativos<br>Teorema de propiedad y ejemplo ilustrativo |
| | Integración numérica | Explicación teórica introductoria a las reglas de trapecios y Simpson<br>Ejemplo ilustrativo<br>Teorema regla de trapecio<br>Explicación de tipos de errores (truncado y redondeo)<br>Teorema error truncado (2)<br>Teorema de Simpson (2) |
| | Forma indeterminada o Teorema del valor medio cauchy | Explicación teórica<br>Definición de forma indeterminada<br>Teorema regla de L'hopital (2)<br>Ejemplos ilustrativos<br>Teorema del valor medio de cauchy<br>Demostración y ejemplo ilustrativo<br>Ejemplos ilustrativos |
| | Otra formas indeterminadas | Teoremas regla de L´hopital (2)<br>Ejemplos ilustrativos |

**Nota.** Continuación del desarrollo de contenidos y actividades sobre Integral. Editorial Harla.

Tabla 5.4 *(continuación)*
*Descripción libro Cálculo de Leithold.*

| Contenidos | | |
|---|---|---|
| Técnicas de integración, formas indeterminadas, e integrales impropias | Integrales impropias con límites de integración infinitos | Definiciones integrales impropia (3)<br>Ejemplos ilustrativos<br>Explicación teórica |
| | Otras integrales impropias | Definición integral impropia (3)<br>Ejemplos ilustrativos<br>Explicación teórica |
| Análisis | Las unidades didácticas están divididas en secciones como se indica en la segunda columna, los ejemplos están estructurados en ilustraciones, se observa demostración del desarrollo de una propiedad, definición o teorema con respecto al objeto integral y al término de cada una de ellas se proponen un conjunto variado de ejercicios de aplicación teórica y procedimental. Los ejercicios son de tipo gráfico, simbólico y los enunciados son verbales. | |

**Nota.** Continuación del desarrollo de contenidos y actividades sobre Integral. Editorial Harla

En la tabla 5.4 se evidencian los elementos matemáticos que configuran la construcción del objeto Integral y de sus aplicaciones, por lo que emergen los significados parciales de:

Tabla 5.5
*Significados pretendidos de la editorial Harla*

| Significado Institucional | |
|---|---|
| **SP1T2:** Área | **SP8T2:** Integral impropia |
| **SP2T2:** Integral definida | **SP9T2:** Integración numérica |
| **SP3T2:** Sumas de Riemann | **SP10T2:** Teorema del valor medio |
| **SP4T2:** Métodos de integración | **SP11T2:** Centroides |
| **SP5T2:** Primitivas | **SP12T2:** Trabajo |
| **SP6T2:** Teorema Fundamental del Cálculo | **SP13T2:** Fuerza |
| **SP7T2:** Volúmenes | |

**Nota.** Significados parciales institucionales encontrados en el libro de la editorial Harla

**Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas (6ª ed.).**

El libro de texto de la editorial Cengage Learning, escrito por James Stewart y colaboradores en el año 2008 en la ciudad de México, presenta una estructura curricular formada por una serie de exámenes preliminares para abordar el cálculo, continua con la presentación del libro en once capítulos orientados al estudio de: funciones y modelos, límites y derivadas, reglas de la derivación, aplicaciones de la derivación, integración, aplicaciones de la integración, técnicas de integración, continua con más aplicaciones de la integración, ecuaciones diferenciales, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares, sucesiones y series finitas. El concepto de Integral aparece en los capítulos 5,6, 7,8 desde la página 2354 hasta la 565.

Tabla 5.6

*Descripción del libro de cálculo de Stewart*

| Contenidos | | |
|---|---|---|
| Integrales | Áreas y distancias | El problema del área<br>Explicación teórica, gráfica y analítica<br>Ejemplos ilustrativos<br>Definición de área<br>El problema de la distancia<br>Ejemplo ilustrativo<br>Explicación teórica, gráfica y analítica |
| | La integral definida. | Definición<br>Nota sobre Bernard Riemann<br>Notas sobre integral definida, sumas de Riemann (5)<br>Teoremas sobre integral definida (2)<br>Evaluación de integrales (propiedades de la sumatoria)<br>Ejemplos ilustrativos<br>Regla del punto medio<br>Ejemplo ilustrativo<br>Propiedades de la integral definida<br>Ejemplos ilustrativos<br>Demostración de las propiedades |
| | Teorema fundamental del cálculo | Explicación teórica histórica y analítica<br>Teorema fundamental del cálculo (2)<br>Demostraciones y ejemplos ilustrativos |
| | Integrales indefinidas y el teorema del cambio total | Explicación teórica analítica<br>Tabla de integrales indefinidas<br>Ejemplos ilustrativos<br>Teorema del cambio total |
| | Regla de la sustitución | Explicación teórica analítica<br>Definición de la regla<br>Integral definida<br>Simetría de integrales<br>Teorema de simetría |

**Nota**. Desarrollo de contenidos y actividades sobre Integral. Editorial Cengage Learning

Tabla 5.6 *(continuación)*
*Descripción del libro de cálculo de Stewart*

| Contenidos | | |
|---|---|---|
| Aplicaciones de la integración | Áreas entre curvas | Explicación teórica analítica<br>Sumas de Riemann entre curvas<br>Definición de área ente curvas<br>Ejemplos ilustrativos |
| | Volúmenes | Explicación teórica gráfica analítica<br>Definición<br>Ejemplos ilustrativos |
| | Volúmenes mediante cascarones cilíndricos | Explicación teórica analítica<br>Definición de cascarones cilíndricos<br>Ejemplos ilustrativos |
| | Trabajo | Explicación teórica analítica<br>Definición de trabajo<br>Ejemplos ilustrativos |
| | Valor promedio de una función | Explicación teórica analítica<br>Ejemplo ilustrativo<br>Teorema del valor medio |
| Técnicas de integración | Integración por partes | Explicación teórica analítica<br>Formula de integración por partes<br>Ejemplo ilustrativo |
| | Integrales trigonométricas | Ejemplos ilustrativos<br>Estrategias para evaluar integrales trigonométricas (3) |
| | Sustitución trigonométrica | Explicación teórica analítica<br>Tabla de sustituciones trigonométricas<br>Ejemplos ilustrativos |
| | Integración de funciones racionales por fracciones parciales | Explicación teórica analítica<br>Ejemplos ilustrativos<br>Racionalización de funciones |
| | Estrategia para integración | Explicación teórica<br>Tabla de fórmulas de integración<br>Ejemplos ilustrativos |

**Nota**. Continuación del desarrollo de contenidos y actividades sobre Integral. Editorial Cengage Learning.

Tabla 5.6 *(continuación)*
*Descripción del libro de cálculo de Stewart*

| Contenidos | | |
|---|---|---|
| Técnicas de integración | Integración por medio de tablas y sistemas algebraicos | Tabla de integrales<br>Ejemplos ilustrativos<br>Sistemas algebraicos computacionales<br>Ejemplos ilustrativos |
| | Integración aproximada | Explicación teórica analítica<br>Regla del punto medio<br>Regla del trapecio<br>Ejemplos ilustrativos<br>Regla de Simpson<br>Explicación teórica analítica regla de Simpson<br>Ejemplos ilustrativos<br>Cota de errores de la regla trapecio y Simpson |
| | Integrales impropias | Explicación teórica analítica y gráfica<br>Intervalos infinitos<br>Definición de integral impropia (2)<br>Ejemplos ilustrativos<br>Integrandos discontinuos<br>Ejemplos ilustrativos<br>Teorema de comparación |
| Mas aplicaciones de la integración | Longitud de arco | Explicación teórica analítica y gráfica<br>Definición de longitud de arco<br>Ejemplos ilustrativos<br>Función de la longitud de arco |
| | Área de una superficie de revolución | Explicación teórica analítica y gráfica<br>Ejemplos ilustrativos |
| | Aplicaciones a la física y a la ingeniería | Fuerza y presión hidrostática<br>Explicación teórica analítica<br>Ejemplos ilustrativos<br>Momentos y centro de masa<br>Fuerza y presión hidrostática<br>Explicación teórica analítica<br>Ejemplos ilustrativos<br>Teorema de Pappus<br>Ejemplo ilustrativo |

**Nota**. Continuación del desarrollo de contenidos y actividades sobre Integral. Editorial Cengage Learning

Tabla 5.6 *(continuación)*
*Descripción del libro de cálculo de Stewart*

| Contenidos | | |
|---|---|---|
| Mas aplicaciones de la integración | Aplicaciones a la economía y a la biología | Superávit de consumo<br>Explicación teórica<br>Ejemplos ilustrativos<br>Flujo sanguíneo<br>Explicación teórica<br>Ejemplo ilustrativo<br>Rendimiento cardiaco<br>Explicación teórica<br>Ejemplo ilustrativo |
| | Probabilidad | Explicación teórica analítica<br>Ejemplos ilustrativos<br>Valor promedio<br>Explicación teórica analítica<br>Ejemplos ilustrativos<br>Distribución normal<br>Explicación teórica analítica<br>Ejemplos ilustrativos |

**Nota**. Continuación del desarrollo de contenidos y actividades sobre Integral. Editorial Cengage Learning

Las unidades están divididas en secciones como se indica en la segunda columna, los ejemplos están estructurados en una ilustración, y se desarrolla un algoritmo para el desarrollo de alguna propiedad, definición o teorema con respecto al objeto integral y al término de cada una de estas unidades, proponen un conjunto variado de ejercicios de aplicación teórica y procedimental. Los ejercicios son de tipo gráfico, simbólico y los enunciados son verbales.

En la tabla 5.6 se evidencian los elementos matemáticos que para este autor configuran la construcción del objeto Integral, los cuales hacen emerger los significados parciales:

Tabla 5.7

*Significados pretendidos de la editorial Cengage Learning*

| Significado Institucional | |
|---|---|
| **SP1T3:** Primitiva | **SP9T3:** Teoremas fundamentales de cálculo |
| **SP2T3:** Integración numérica | **SP10T3:** Teorema de valor medio. Aplicaciones de la integral |
| **SP3T3:** Área | **SP11T3:** Integral impropia |
| **SP4T3:** Distancia | **SP12T3:** Longitud de arco |
| **SP5T3:** Sumas de Riemann | **SP13T3:** Fuerza y presión, probabilidad |
| **SP6T3:** Integral definida | **SP14T3:** Aplicaciones a la economía |
| **SP7T3:** Integral indefinida | **SP15T3:** Aplicaciones a la biología. |
| **SP8T3:** Métodos de integración | |

Nota. Significados parciales institucionales encontrados en el libro de la editorial Cengage Learning

**CALCULUS, Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal. (Vol. 1). (2ª ed.).**

El libro de texto de la editorial Reverté, cuyo autor es Tom Apóstol y colaboradores, y su traducción en Barcelona en el año 2001, presenta cuatro apartados los cuales están orientados a preparar los elementos teóricos que conforman los dieciséis bloques temáticos que configuran la estructura curricular del mismo. El concepto de Integral aparece antes que el de derivada, en los apartados 1, 2 dando orientación al objeto matemático y posteriormente en los capítulos 5, 6 se expone los significaos y algoritmos asociados al cálculo de integrales. Estos están descritos de las páginas 59-153 y 247 a 328.

Tabla 5.8

*Descripción del libro Calculus*

| Contenidos | | |
|---|---|---|
| Los conceptos del Cálculo Integral | El concepto de área como función de conjunto | Explicación teórica<br>El área como función: axiomas y regiones<br>Definición axiomática |
| | Intervalos y conjuntos de ordenadas | Explicación teórica y gráfica |
| | Particiones y funciones escalonadas | Explicación teórica- analítica<br>Definición de partición<br>Definición de función escalonada |
| | Suma y producto de funciones escalonadas | Explicación teórica -gráfica |
| | Definición de integral para funciones escalonadas | Explicación teórica analítica y gráfica<br>Ejemplo ilustrativo |
| | Propiedades de la integral de una función escalonada | Explicación teórica<br>Siete enunciados de teorema con explicación teórica y/o gráfica |
| | Otras notaciones para las integrales | Explicación teórica |
| | La integral de funciones más generales | Explicación teórica analítica gráfica<br>Definición de integral de una función acotada. |
| | Integrales superior e inferior | Explicación teórica- analítica<br>Enunciado teorema |
| | El área de un conjunto de ordenadas expresada como una integral | Enunciado de dos teoremas<br>Demostración de teorema de área |
| | Observaciones relativas a la teoría y técnica de la integración | Explicación teórica<br>¿Qué funciones acotadas son integrables?<br>Si una función f es integrable, cómo se calcula la integral de f? |
| | Funciones monótonas y monótonas a trozos. | Presenta la gráfica de funciones crecientes, crecientes en sentido estricto, decreciente en sentido estricto y monótono a trozos.<br>Ejemplos ilustrativos |
| | Integrabilidad de funciones monótonas acotadas | Enunciado del Teorema de una función monótona y su demostración. |

**Nota.** Desarrollo de contenidos y actividades sobre Integral. Reverte.

Tabla 5.8 *(continuación)*
*Descripción del libro Calculus*

| **Contenidos** | | |
|---|---|---|
| Los conceptos del Cálculo Integral | Cálculo de la integral de una función monótona acotada | Teorema y demostración. |
| | Cálculo de la integral $\int_0^b x^p dx$ siendo p entero positivo | Teorema y demostración. |
| | Propiedades fundamentales de la integral | Teoremas (4) |
| | Integración de polinomios | Explicaciones analíticas. |
| | Demostraciones de las propiedades fundamentales de la integral | Demostraciones |
| Algunas aplicaciones del Cálculo Integral | El área de una región comprendida entre dos gráficas expresada como una integral | Explicación teórica analítica<br>Teorema<br>Demostración |
| | Ejemplos resueltos | Ejemplo ilustrativo (5)<br>Definición de $\pi$<br>Enunciado teorema |
| | Las funciones trigonométricas | Explicación teórica<br>Propiedades fundamentales del seno y coseno<br>Enunciado de teorema<br>Demostración |
| | Fórmulas de integración para el seno y el coseno | Teoremas (2) con demostración<br>Ejemplos ilustrativos |
| | Descripción geométrica de las funciones seno y coseno | Explicación teórica analítica y gráfica |
| | Coordenadas polares | Explicación teórica gráfica analítica |
| | La integral para el área en coordenadas polares | Explicación teórica gráfica analítica<br>Teorema<br>Demostración |

**Nota.** Continuación del desarrollo de contenidos y actividades sobre Integral. Reverte.

Tabla 5.8 *(continuación)*
*Descripción del libro Calculus*

| **Contenidos** | | |
|---|---|---|
| Algunas aplicaciones del Cálculo Integral | Aplicación de la integración al cálculo de volúmenes | Explicación teórica analítica<br>Teorema de sólido de Calieveri<br>Demostración<br>Ejemplo d un sólido de revolución |
| | Aplicación de la integración al concepto de trabajo | Explicación teórica<br>Ejemplo<br>Propiedades fundamentales del trabajo<br>Teorema y demostración<br>Ejemplo |
| | Valor medio de una función | Explicación teórica analítica |
| | La integral como función del límite superior. Integrales indefinidas | Explicación teórica analítica<br>Definición de integral indefinida<br>Definición de función convexa<br>Enunciado de teorema de función convexa y demostración<br>Ejemplo |
| Relación entre la integración y la derivación | La derivada de una integral indefinida. Primer teorema fundamental del cálculo | Enunciado del teorema fundamental del cálculo<br>Demostración |
| | Teorema de la derivada nula | Enunciado del teorema |
| | Funciones primitivas y segundo teorema fundamental del cálculo | Definición de función primitiva<br>Enunciado segundo teorema fundamental del cálculo<br>Demostración<br>Ejemplo ilustrativo |
| | Propiedades de una función deducidas de propiedades de su derivada | Explicación teórica |
| | La notación de Leibniz para las primitivas | Explicación teórica analítica |
| | Integración por sustitución | Explicación teórica analítica<br>Ejemplos ilustrativos<br>Enunciado de teorema de sustitución<br>Demostración |

**Nota.** Continuación del desarrollo de contenidos y actividades sobre Integral. Reverte.

Tabla 5.8 *(continuación)*

*Descripción del libro Calculus*

| Contenidos | | |
|---|---|---|
| Relación entre la integración y la derivación | Integración por partes | Explicación analítica<br>Ejemplos ilustrativos<br>Enunciado del segundo teorema de valor medio para integrales<br>Demostración |
| Función logaritmo Función exponencial y funciones trigonométricas inversas | Fórmulas de derivación e integración en las que intervienen logaritmos | Explicación teórica analítica y gráfica |
| | Funciones exponenciales | Explicación teórica analítica y gráfica |
| | Inversas de las funciones trigonométricas | Explicación teórica analítica y gráfica |
| | Integración por fracciones simples | Explicación teórica analítica<br>Ejemplos ilustrativos |
| | Integrales que pueden transformarse en integrales de funciones racionales | Explicación teórica analítica<br>Ejemplos ilustrativos |

**Nota.** Continuación del desarrollo de contenidos y actividades sobre Integral. Reverte.

Las unidades están divididas en secciones como se indica en la segunda columna, los ejemplos están estructurados en la ilustración y desarrollo de un algoritmo para el desarrollo de alguna propiedad, definición o teorema con respecto al objeto integral y al término de cada una de ellas se proponen un conjunto variado de ejercicios de aplicación teórica y procedimental. No aparece la noción de sumatoria de Riemann, el desarrollo del libro es teórico. Los ejercicios son de tipo gráfico, simbólico y los enunciados son verbales. En la tabla 5.8 se evidencian los elementos matemáticos configuran la construcción del objeto Integral, denotando los significados parciales de:

Tabla 5.9

*Significados pretendidos de la editorial Reverté*

| Significado Institucional | |
|---|---|
| **SP1T4:** Función | **SP6T4:** Volumen |
| **SP2T4:** Primitivas | **SP7T4:** Trabajo |
| **SP3T4:** Área | **SP8T4:** Teoremas fundamentales del cálculo |
| **SP4T4:** Integral definida | **SP9T4:** Continuidad de funciones |
| **SP5T4:** Integral indefinida | **SP10T4:** Métodos de integración. |

**Nota.** Significados parciales institucionales encontrados en el libro de la editorial Reverté

Como resumen en el análisis de los libros de texto se determinaron significados parciales emergentes comunes, los cuales configuran el significado institucional de referencia para el objeto Integral. En esta línea se ha realizado una síntesis o resumen de estos significados en los libros de texto analizados de acuerdo a la editorial a la que pertenece cada libro (ver tabla 5.10).

A partir del estudio realizado en los libros de texto podemos concluir que dos libros comienzan su explicación con la noción intuitiva de área y otros dos con la definición de anti derivada. Es común observar que los significados que más se presentan en estos textos son los que hacen referencia a las técnicas de integración, y a algunas aplicaciones en física. Debido a la fecha de edición se observa la incorporación de tecnologías en el desarrollo de algoritmos para el objeto integral como se ilustra en los libros más modernos, además dos libros hacen referencia a la construcción histórica del objeto integral describiendo los procesos y autores que aportaron e n este desarrollo en el tiempo, tres de los libros se centran en el desarrollo de algoritmos que llevan a solucionar una integral y no en la esencia del objeto integral visto desde el desarrollo histórico epistemológico, la mayoría de los libros presentan la aplicación de la integral en las ciencias sociales, física y geométrica, en el libro del cálculo de Apóstol no se hace énfasis en la noción de integral definida como el límite de sumas, es decir las sumas de Riemann como en los demás textos.

Tabla 5.10

*Tabla de significados en cada libro de texto*

| Significados de referencia del objeto integral | Editoriales | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Harla | Reverte | Cengage Learning | McGraw-Hill |
| Área | X | X | X | X |
| Método de exhausción | | X | | |
| Sumas de Riemann | X | | X | X |
| Primitiva | X | X | X | X |
| Integral definida | X | X | X | X |
| Volumen | X | X | X | X |
| Trabajo | X | X | X | X |
| Longitud de arco | X | | X | X |
| Fuerza y presión | X | | X | X |
| Centros de gravedad | X | | | X |
| Probabilidad | | | X | |
| Economía y Biología | | | X | |
| Teorema del valor medio | X | X | X | X |
| Integral indefinida | | X | X | X |
| Teorema fundamental del cálculo | X | X | X | X |
| Métodos de integración | X | X | X | X |
| Integral impropia | X | | X | X |
| Integral numérica | X | | | X |

**Nota.** Significados de referencia que configuran el concepto de integral en los libros de texto.

En la tabla 5.11 se realiza un resumen de los significados parciales encontrados en el recorrido histórico y epistemológico, al igual, que los significados de referencia encontrados en los libros de texto, y que de acuerdo al EOS y la herramienta de sistemas de prácticas en los significados (figura 2.5), la unión, de estos significados declaran lo que nosotros llamaremos el Significado Global del Objeto Integral.

Tabla 5.11

*Significado Global del objeto Integral*

| **Significados Parciales Estudio Histórico** | **Significados Parciales de referencia en los textos** | **Significado Parciales Globales** |
|---|---|---|
| SPH1.1. Área de una región por fórmula | SPR1.Área | SG1. Área |
| SPH2.1 Volúmenes por fórmulas | SPR2. Sumas de Riemann | SG2.Metodo de exhausción |
| SPH3.1 método exhaustivo para calcular áreas | SPR3. Primitiva (Antiderivada) | SG3.Sumas de Riemann |
| SPH3.2=SPH1.4 Método exhaustivo | SPR4. Integral definida | SG4. Primitivas |
| SPH3.3=SPH1.5 Método exhaustivo | SPR5. Volumen | SG5. Integral definida |
| SPH3.1=SPH1.6 Método exhaustivo para calcular áreas | SPR6. Trabajo | SG6. Integral Indefinida |
| SPH4.1 Integral Indefinida | SPR7. Longitud de arco | SG7. Teorema fundamental del cálculo |
| SPH2.2 Volúmenes | SPR8. Fuerza y presión | SG8. Continuidad de funciones |
| SPH4.2: Integral Indefinida | SPR9. Teorema del valor medio | SG9. Métodos de Integración |
| SPH6.1: Teorema fundamental del cálculo. Forma 1 | SPR10. Integral indefinida | SG10. Volumen |
| SPH4.3: Antiderivada | SPR11. Teorema fundamental del Cálculo | SG11.Longitud de arco |
| SPH4.4: Antiderivada | SPR12. Métodos de integración | SG12.Trabajo |
| SPH4.5: Integral por series | SPR13. Integral impropia | SG13. Fuerza y presión |
| SPH4.5 Integral por series | | SG14.Integral Impropia |
| | | SG15. Integral por series |

**Nota**. Significados: **SPH** (Significados parciales históricos), **SPR** (Significado Parcial de Referencia), **SG** (Significado Global).

### 5.2 Diseño del instrumento para caracterizar el conocimiento didáctico matemático del estudiante de formación matemática en el objeto integral

Bajo la noción de “sistemas de prácticas” se busca analizar y comparar la adaptación que se realiza a los conocimientos matemáticos en diferentes sistemas institucionales, contextos de uso y juegos de lenguaje (Wittgenstein, 1953). Para ello se hace uso de un conjunto de situaciones denominadas objetos primarios tales como: situaciones, procedimientos, lenguajes, conceptos, propiedades y argumentos; estas se relacionen entre sí para formar lo que llamaremos configuraciones epistémicas definidas como las redes de objetos emergentes de un sistema de prácticas (Godino, Contreras y Font, 2006). En este sentido, los estudios sobre el conocimiento que deber tener el futuro profesor de matemáticas o el profesor en ejercicio, para lograr un aprendizaje idóneo de sus estudiantes, parten del supuesto que el profesor posee un conocimiento amplio del contenido matemático, pero se considera que en esencia, se necesita de muchos otros conocimientos complejos que potencien en el estudiante de formación matemática, un conocimiento común del contenido matemático y un conocimiento ampliado de este contenido, al tomar como supuesto que el estudiante de licenciatura en matemática y el estudiante de matemática, necesitarán de este conocimiento del objeto integral para la labor de la enseñanza, puede ser en la educación media (Grado 11) o en la educación superior ya que no solo en la universidad se imparte este conocimiento sino también en algunos de los colegios del contexto Colombiano, ya se enseña este objeto matemático. Y con mayor razón el profesor en ejercicio.

En esta dirección, en primer lugar se describe el proceso de diseño e implementación del cuestionario (prueba piloto), que permite realizar el análisis a las dificultades de los estudiantes (dimensión cognitiva en el modelo CDM del conocimiento del profesor), y la identificación de problemáticas al interior del cuestionario para llegar a proponer la versión definitiva la cual no se implementa ya que el estudio se enfoca en la caracterización de la dimensión epistémica, es decir en cuanto a la identificación de *tareas propias* del conocimiento común y el ampliado que estructuran el Conocimiento del profesor (incluye futuro profesor) para la enseñanza de tópicos de Cálculo Integral ; es decir, en palabras de Shulman (1987), se caracteriza el conocimiento del contenido matemático para el profesor de tópicos de cálculo integral.

Se específica en este apartado como parte de justificación del argumento dado que la construcción del estudio epistémico histórico del objeto Integral resultó bastante complejo en cuanto al objeto y en cuanto al tiempo para realizar el recorrido histórico según una búsqueda documental cuidadosa. Este estudio se toma como base para caracterizar la dimensión epistémica o dimensión matemática siguiendo el modelo del CDM del profesor, en este aspecto algunas tareas o problemas identificados en el estudio forman parte del cuestionario y específicamente en cuanto a la identificación del Significado Global de la integral.

El cuestionario piloto, o prueba piloto se implementó con el objetivo de caracterizar las dificultades de los estudiantes (dimensión cognitiva) en primer lugar y como segundo aspecto para validar la identificación de la selección de tareas propias del CCC y el CAC lo cual que tiene mucha utilidad para la comunidad educativa (selección de profesores para la asignatura y análisis de planes de formación de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas).

### 5.2.1 Construcción del cuestionario CDM integral

#### Criterios para la selección de tareas

Para la elaboración del instrumento que permite la caracterización de la dimensión epistémica del Conocimiento del profesor, se sigue el modelo propuesto por Pino (2015). En este modelo, la dimensión epistémica hace referencia al conocimiento del objeto integral, respecto al contenido matemático y al contexto institucional en el cual se realiza el proceso de estudio en este sentido se identifican tareas propias del CCC y CAC. Para la construcción del instrumento CDM-Integral, se seleccionaron tareas de un banco de tareas de 30 posibles situaciones problemas, donde se incluyen todos los problemas emergentes del estudio histórico epistemológico. Para esta selección se tomaron tres criterios:

El **criterio 1**, respecto al contenido curricular: se relaciona con los contenidos propuestos en los programas de formación matemática (Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas) para el objeto Integral. De igual forma se revisaron los contenidos curriculares del programa de Cálculo Integral de las universidades: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Universidad de los Andes, Universidad Nacional Abierta y a Distancia y Universidad del Tolima.

El **criterio 2,** se toma respecto a la globalidad del significado del objeto integral, esto hace referencia a que las tareas proporcionen información sobre un significado de referencia respecto al significado institucional del objeto integral, el cual se define a partir de dos nociones: el significado global, que comprende los diversos significados parciales de un objeto matemático y el significado de referencia, entendido como los sistemas de prácticas que se usan como referentes para elaborar los significados que se pretenden incluir en los procesos de estudio de una institución de enseñanza concreta (significados institucionales). En esta dirección, el significado de referencia, hace parte del significado holístico del objeto matemático (Pino-Fan, Godino y Font, 2011).

El **criterio 3,** se relaciona con el conocimiento especializado de la *dimensión matemática* del conocimiento del profesor que en el modelo de Pino (2015) corresponde a caracterizar las tareas propias del conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido matemático. En la figura 2.7 (Pino-Fan y Godino, 2015) se establece la dimensión matemática del conocimiento didáctico matemático dividida en un conocimiento común del contenido matemático y el conocimiento ampliado del contenido. En la misma dirección, el conocimiento especializado sobre el contenido matemático se relaciona con tareas del profesor; estas incluyen elaborar la configuración de los objetos puestos en juego para la solución de la tarea, esto es, dada una situación problema identificar los conceptos, las proposiciones, los procedimientos, los lenguajes y los argumentos que se utilizan para solucionar el problema. El análisis de este conocimiento no forma parte del presente estudio, ya que se presenta un cuestionario que permite caracterizar CCC y CAC porque no se consideró la valoración de la idoneidad epistémica y por tanto no se implementa el cuestionario con los futuros profesores o con profesores en ejercicio. El conocimiento especializado se relaciona con el uso de los diferentes procedimientos (intuitivos y formales), con la identificación de los conceptos y propiedades puestos en juego para la solución de la tarea; así como con las explicaciones y justificaciones de las soluciones dadas a la tarea.

En la tabla 5.12 se presentan los tres criterios para la selección de tareas de un banco de 30 problemas. Cada problema se analizó respecto a su adaptación a cada uno de los tres criterios; se diseña el cuestionario CDM- integral y se valida por 6 expertos, Doctores en Matemáticas, Magíster en Matemáticas, y Doctores en Educación.

Tabla 5.12

*Criterios para la construcción del CDM-Integral*

| Criterio 1<br>Contenido Curricular | Criterio 2<br>Significados de la integral | Criterio 3<br>Conocimiento Matemático del Contenido |
|---|---|---|
| 1. Antiderivadas | 1. Áreas | CCC |
| 2. Áreas | 2. Sumas de Riemann | |
| 3. Sumas de Riemann | | CEC |
| 4. Integrabilidad de funciones Continuas | 3. Método de exhausción | CAC |
| 5. Propiedades de la integral definida | 4. Integrales definidas | |
| | 5. Primitivas | |
| 6. Teorema del valor medio | 6. integrales indefinidas | |
| 7. Los dos teoremas fundamentales del cálculo. | 7. volúmenes | |
| 8. Integral Impropia | 8. sólidos de revolución | |
| 9. Integración numérica | | |
| 10. Aplicaciones de la Integral | 9. TFC forma 1 | |
| 10.1 Área entre curvas | 10. TFC forma 2 | |
| 10.2 Volúmenes de Sólidos | 11. Longitud de arco | |
| 10.3 Sólidos de revolución | | |
| 10.4 Longitud de Arco | 12. Trabajo | |
| 10.5 Trabajo | 13. Integral impropia | |
| 10.6 Centros y centroides de masa | 14. Integración numérica | |

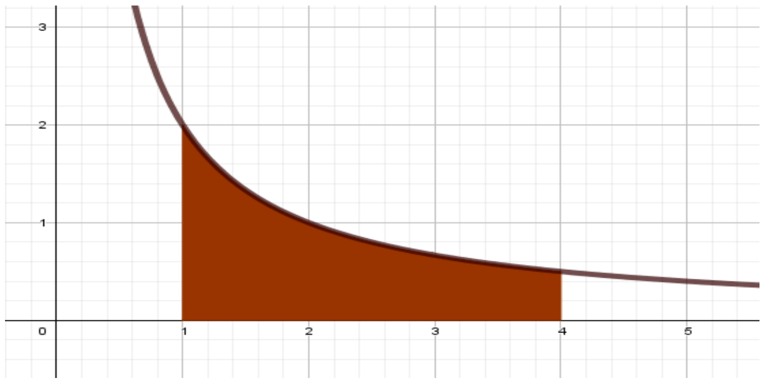
**Nota.** Criterios para la selección de tareas en el CDM-integral

### 5.2.2 Tareas del Cuestionario CDM–Integral

Se presenta el análisis a las tareas según el juicio de seis expertos y la experiencia del investigador en tópicos del Cálculo Integral, este proceso resultó bastante complejo en cuanto a la experiencia de los expertos y del investigador respecto al análisis de la dimensión epistémica del conocimiento didáctico matemático del objeto integral, debido a la complejidad del objeto matemático. Respecto al significado del objeto integral su complejidad se evidencia en la reconstrucción del estudio epistémico que llevo al surgimiento de este objeto matemático por parte del trabajo de los matemáticos en las diferentes épocas de la historia.

**Tarea 1:**

De acuerdo con la imagen:




a) Se puede afirmar que el área de la región sombreada es mayor que una unidad cuadrada y menor igual a tres unidades cuadradas. Justifique
b) Se puede hallar el valor del área de la región sombreada en forma más exacta. ¿Cómo? ¿Cuál sería el valor? Justifique

**Solución a la tarea 1:**

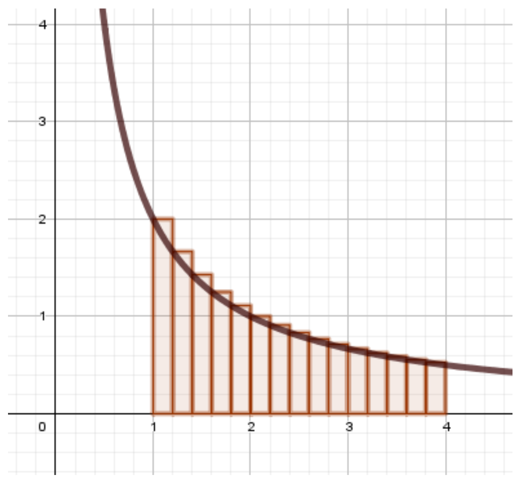
La solución a la tarea 1 corresponde a la solución exhaustiva a través de rectángulos inscritos en la curva o por encima de la curva,

a) Los gráficos muestran una posible solución a la aproximación del área bajo la curva

$$A_T = A_{r1} + A_{r2} + A_{r3} \qquad\qquad A_R = b \times h$$

$$A_{r1} = 1 \times 2 = 2\,;\, A_{r2} = 1 \times 1 = 1;\, A_{r3} = 1 \times 0.6 = 0.6$$

$$A_T = 2 + 1 + 0.6 = 3.6\, u^2$$




$$A_T = A_{r1} + A_{r2} + \cdots + A_{r15} \qquad\qquad A_R = b \times h$$

$A_{r1} = 0.2 \times 2 = 0{,}4$ ; $A_{r2} = 0{,}2 \times 1{,}7 = 0.34$ ; $A_{r3} = 0.2 \times 1.4 = 0.28$ ;

$A_{r4} = 0.2 \times 1.2 = 0.24$ ; $A_{r5} = 0.2 \times 1.1 = 0.22$ ; $A_{r6} = 0.2 \times 1 = 0.2$ ;

$A_{r7} = 0.2 \times 0.9 = 0.18$ ; $A_{r8} = 0.2 \times 0.85 = 0.17$ ; $A_{r9} = 0.2 \times 0.8 = 0.16$ ;

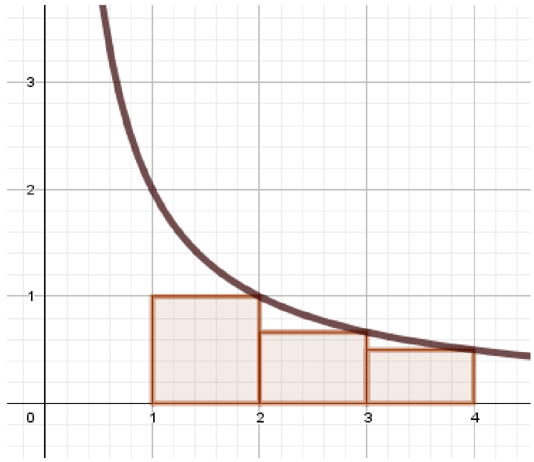
$A_{r10} = 0.2 \times 0.7 = 0.14$ ; $A_{r11} = 0.2 \times 0.65 = 0{,}13$ ; $A_{r12} = 0.2 \times 0.6 = 0.12$ ;

$A_{r13} = 0.2 \times 0.59 = 0.118$ ; $A_{r14} = 0.2 \times 0{,}57 = 0.114$ ; $A_{r4} = 0.2 \times 0.5 = 0.1$ ;

$$A_T = A_{r1} + A_{r2} + \cdots + A_{r15}$$

$$A_T = 0{,}4 + 0{,}34 + 0{,}28 + 0{,}24 + 0{,}22 + 0{,}2 + 0{,}18 + 0{,}17 + 0{,}16 + 0{,}14 + 0{,}13 + 0{,}12 + 0{,}118 + 0{,}114 + 0.1\, u^2$$

$$A_T = 2{,}912\, u^2$$



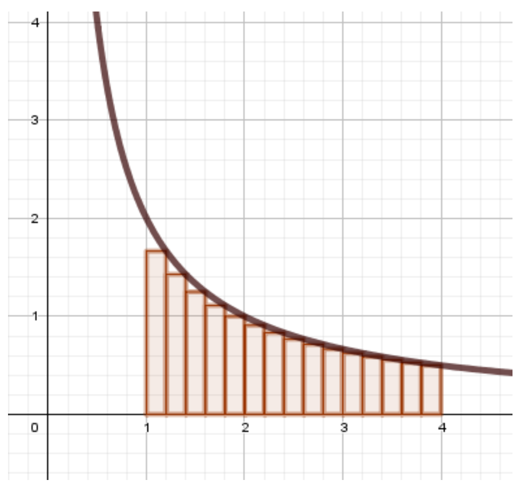

$A_T = A_{r1} + A_{r2} + A_{r3}$ $\qquad\qquad$ $A_R = b \times h$

$A_{r1} = 1 \times 1 = 1$ ; $A_{r2} = 1 \times 0{,}7 = 0.7$ ; $A_{r3} = 1 \ \times 0.5 = 0.5$ ;

$A_T = A_{r1} + A_{r2} + \cdots + A_{r15}$

$A_T = 1 + 0{,}7 + 0{,}5u^2$

$A_T = 2{,}2u^2$



$A_T = A_{r1} + A_{r2} + \cdots + A_{r15}$ $\qquad$ $A_R = b \times h$

$A_{r1} = 0.2 \times 1{,}7 = 0{,}34$ ; $A_{r2} = 0{,}2 \times 1{,}4 = 0.28$ ; $A_{r3} = 0.2 \times 1.25 = 0.25$ ;

$A_{r4} = 0.2 \times 1.1 = 0.22$ ; $A_{r5} = 0.2 \times 1 = 0.2$ ; $A_{r6} = 0.2 \times 0.9 = 0.18$ ;

$A_{r7} = 0.2 \times 0.85 = 0.17$ ; $A_{r8} = 0.2 \times 0.8 = 0.16$ ; $A_{r9} = 0.2 \times 0.7 = 0.14$ ;

$A_{r10} = 0.2 \times 0.65 = 0.13$ ; $A_{r11} = 0.2 \times 0.6 = 0{,}12$ ; $A_{r12} = 0.2 \times 0.59 = 0.118$ ;

$A_{r13} = 0.2 \times 0.57 = 0.114$ ; $A_{r14} = 0.2 \times 0{,}5 = 0.1$ ; $A_{r4} = 0.2 \times 0.45 = 0.09$ ;

$$A_T = A_{r1} + A_{r2} + \cdots + A_{r15}$$

$$A_T = 0{,}34 + 0{,}28 + 0{,}24 + 0{,}22 + 0{,}2 + 0{,}18 + 0{,}17 + 0{,}16 + 0{,}14 + 0{,}13 + 0{,}12 + 0{,}118 + 0{,}114 + 0.1 + 0.09 \ u^2$$

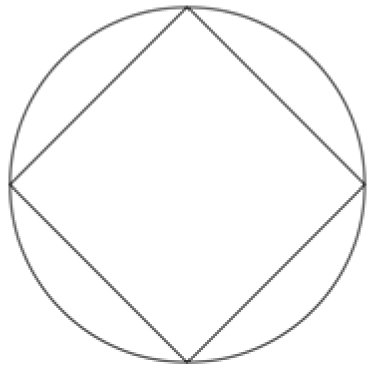
$$A_T = 2{,}602\, u^2$$

Por el método de Intervalos de Riemann se visualiza que el área es mayor que una unidad cuadrada y menor que tres unidades cuadradas.

b) Se puede obtener dos formas de solución: una incorporar el método de exhausción de forma infinita, hasta llegar a un aproximado del área debajo de la curva. Otra es disminuir el ancho de un rectángulo hasta llegar a la definición de Sumas de Riemann.

**Tarea 2:**

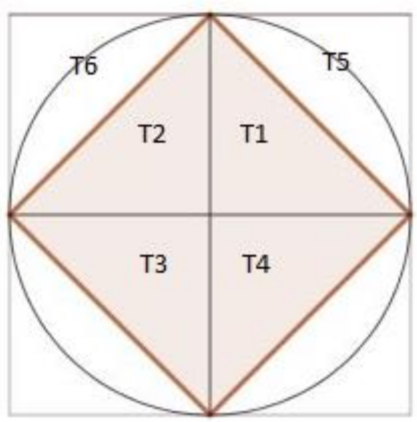
Según la figura:



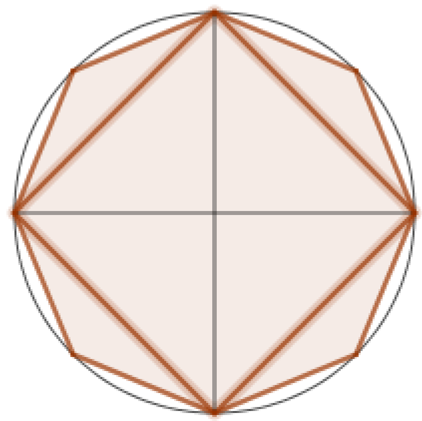
a) Es posible afirmar que el área del cuadrado es mayor a la mitad del área del círculo. Justifique
b) Si se duplica el número de lados al polígono inscrito. ¿el área de este nuevo polígono cubre o sobrepasa el área del círculo? Justifique
c) Se podría afirmar alguna relación entre las áreas de los polígonos que se generan y el área del círculo. Justifique

**Solución tarea 2:**

a) Como los triángulos T1, T2, T3, T4, T5, T6 son iguales, entonces el área del cuadrado inscrito es igual a la mitad del circunscrito, lo cual es mayor a la mitad del círculo.




b) No sobrepasa el área del círculo, ya que se observa que, con respecto a la figura del cuadrado original, se crean cuatro triángulos iguales que ocupan en gran parte el área sobrante entre el círculo y el cuadrado.

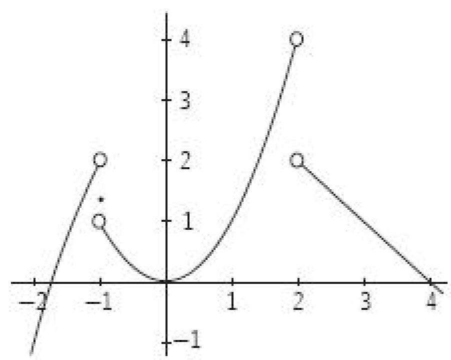


c) Si se repite el proceso anterior se puede afirmar que para algún polígono de infinitos lados tiende a cubrir o agotar el círculo.

**Tarea 3:**

Dada la función:

$$f(x)\begin{cases} -x^2+3 & x<-1 \\ 1.36 & x=-1 \\ x^2 & -1<x<2 \\ -x+4 & x>2 \end{cases}$$




a) Calcula, en caso que sea posible, el área de la región limitada por la curva en el intervalo [-2, 3].
b) Si es posible, estima el valor de la integral definida en el intervalo [-2, 3]. Si no es posible, explica por qué.

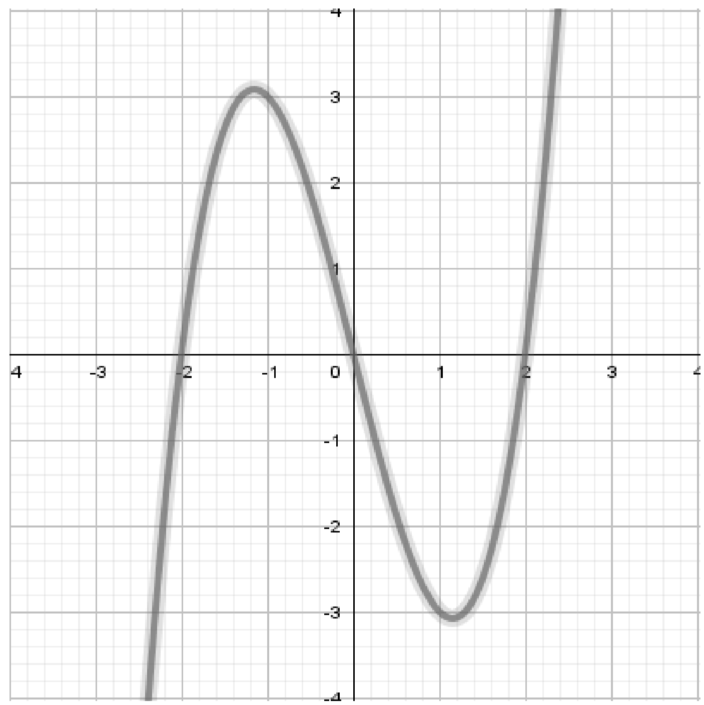
**Solución a la tarea 3:**

a) $\int_{-2}^{1}(-x^2+3)\,dx+\int_{-1}^{2}x^2\,\,dx+\int_{2}^{3}(-x+4)\,\,dx$

b) $\int_{-2}^{3}f(x)=5.17$

**Tarea 4:**

Dada la siguiente gráfica,




a) Halle la función sabiendo que esta pertenece a una función de tercer grado.
b) Calcule el área bajo la curva en el intervalo [-2,2]
c) Es posible afirmar que el área en el intervalo [-2,2] es 0. Justifique su respuesta

**Solución a la tarea 4:**

a) Puntos de corte en el eje x, $x = 0, x = 2, x = -2$

Por tanto, se construye la función

$$x(x-2)(x+2) = x^3 - 4x$$

b) $\int_{-2}^{0} x^3 - 4x\, dx + \int_{-2}^{0} x^3 - 4x\, dx = 8u^2$

c) No es posible ya que no existe área negativa, el valor negativo del área solo implica es la dirección del área.

**Tarea 5:**

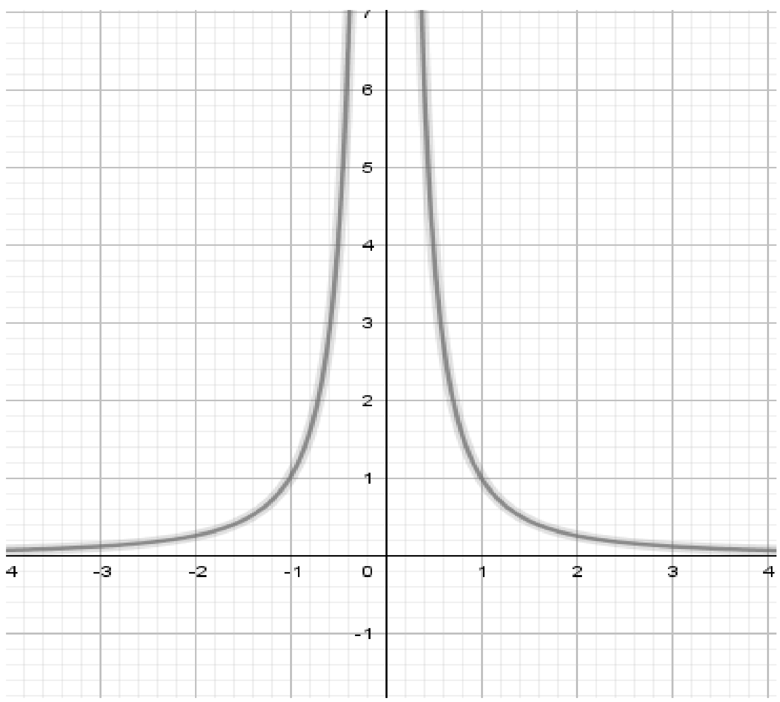
Dada la función

$$f(x) = 1/x^2,$$

a) Realice la gráfica de la función
b) Halle el área bajo la curva en el intervalo [-2,2]. Justifique su respuesta
c) ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?

**Solución a la tarea 5:**

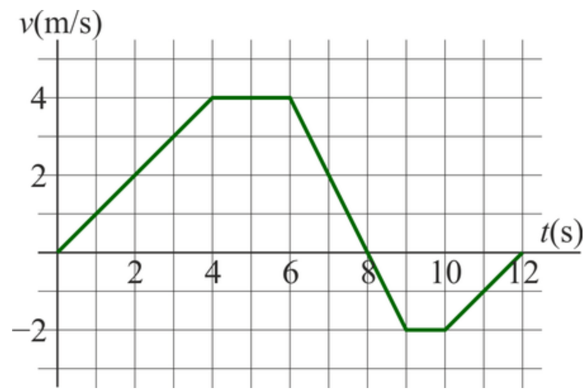
a)




b) No es posible determinar el área, ya que la función no es continua ni acotada, por ende, la integral que se formaría seria divergente
c) Continuidad de funciones, limites, integral, integral indefinida.

**Tarea 6:**

La siguiente gráfica corresponde al movimiento de un objeto en un tiempo. Determine la respuesta en cada caso.




a) ¿Cuál es la distancia recorrida por el objeto entre 0 y 4s?
b) ¿Cuál es la distancia recorrida por el objeto entre 8 y 12s?
c) ¿Cuál es la distancia total recorrida por el objeto?
d) ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?

**Solución a la tarea 6:**

a) $\int_0^4 t\ dt$

**b)** $\int_8^9 -2t + 16\ dt + \int_9^{10} -2\ dt + \int_{10}^{12} t - 2\ dt$

**c)** $\int_0^4 t\ dt + \int_4^6 4\ dt + \int_6^8 -2t + 16\ dt + \int_8^9 -2t + 16\ dt + \int_9^{10} -2\ dt + \int_{10}^{12} t - 2\ dt$

$$Distancia\ total = 8m + 8m + 4m + 5m = 25m$$

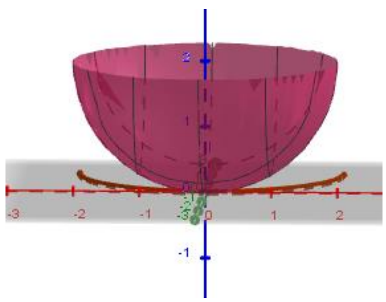
d) Área, distancia como área

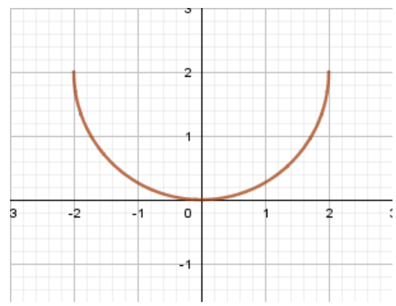
**Tarea 7:**

a) Realice le modelo gráfico y matemático de un tanque semiesférico lleno de agua, si el radio mide 2 m.
b) A partir del modelo matemático defina el cilindro genérico
c) Encuentre el trabajo que se requiere para bombear el agua. (Pista: diferencial de trabajo: $dW = \rho\, g\, V_{cil}$)
d) ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?

**Solución a la tarea 7:**

**a)**





Partimos de la idealización de la esfera como una circunferencia en el plano $\mathbb{R}^2$, entonces:

Se tiene la circunferencia centra en $(0,2)$ lo que sigue como:

$$x^2 + (y-2)^2 = 4$$

Desarrollando se obtiene el modelo del tanque

$$x^2 + y^2 - 4y = 0$$

b) Para determinar el radio del cilindro se despeja x en el modelo

$$r = x = \sqrt{4y - y^2}$$

c) Para determinar el trabajo primero se obtiene el diferencial de trabajo:

$$dW = \rho g V_{cil} \qquad\qquad V_{cil} = \pi r^2 h$$

$$dW = \rho g \pi (\sqrt{4y - y^2})^2 (2 - y)$$

Luego se determina el trabajo

$$\int_0^2 dW = \int_0^2 \rho g\pi(\sqrt{4y - y^2})^2(2 - y)\,dy$$

d) Trabajo, integral definida, ecuación de la circunferencia, conceptos de densidad y mm

**Tarea 8:**

Una partícula oscila con un movimiento armónico simple, de tal forma que su aceleración varía de acuerdo con la expresión $a(t) = -20\ cos(2t + \pi\ /6)$ . Donde la distancia se mide en cm y el tiempo en s. encuentre:

a) La función de desplazamiento
b) La distancia recorrida en $t = 4s$
c) ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?

**Solución a la tarea 8:**

Por definición física la integral se comprende la velocidad como la antiderivada de la aceleración, y a su vez la distancia es la antiderivada de la velocidad por lo que:

a) $v = \int a\ dt = \int -20\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)\ dt = -10\,\text{sen}\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) + c$

$$x = \int v\ dt = \int -10\,\text{sen}\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)\ dt = 5\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) + c$$

$$x\ (t) = 5\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) + c$$

b) $x\ (4) = 5\cos\left(2(4) + \frac{\pi}{6}\right) = 3.9401 - 4.330 = -0.389$

$$x\ (4) = 0.389$$

c) No tiene sentido encontrar una distancia negativa, la interpretación física es que el objeto ha retrocedido esta distancia de su punto de equilibrio.
d) Concepto de MAS, distancia, velocidad, aceleración, integral, función

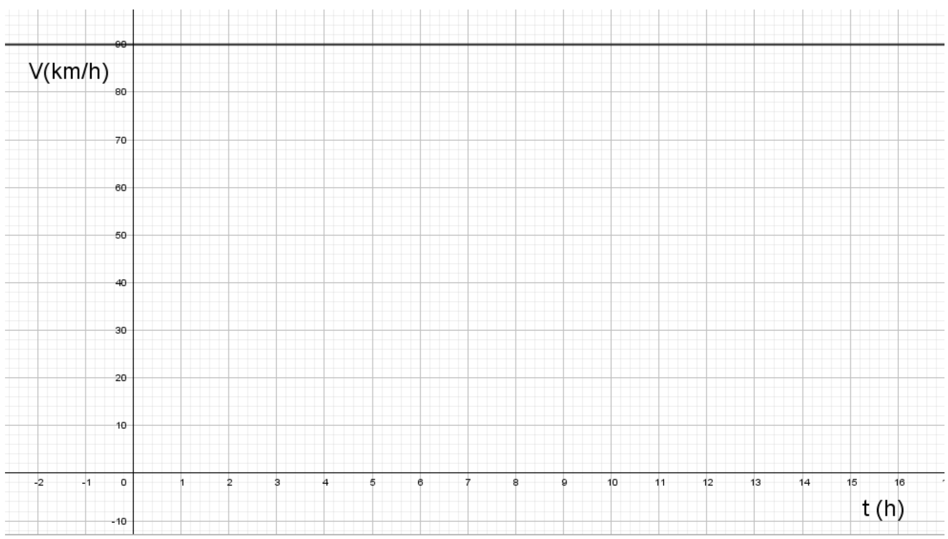
**Tarea 9:**

Un coche viaja de Cúcuta a Tunja a una velocidad constante de 90 km/h, a las 10 am pasó por Bucaramanga, la cual está ubicada a 196 km de Cúcuta

a) Realice un gráfico de velocidad vs tiempo y aproxime el paso por Cúcuta.
b) ¿A qué hora partió de Cúcuta?
c) Es necesario el uso del Cálculo Integral. Justifique su respuesta
d) ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?

**Solución a la tarea 9:**

**a)**




**b)** $\int_{x}^{10} v(t)dt = 196$

$$\int_{x}^{10} 90dt = 90\,t\Big|_{x}^{10} = 196$$

$$900 - 90x = 196$$

$$x = \frac{(196 - 900)}{-90} = 7.82$$

el automóvil partió a las 7:50 am aproximadamente.

c) No es necesario, ya que se puede aplicar principios físicos de velocidad y distancia
d) Integral definida.

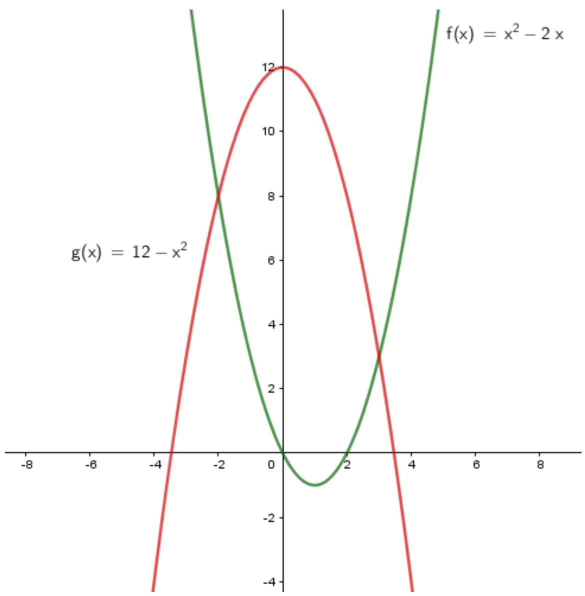
**Tarea 10:**

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 12 - x^2$.

a) Realice la gráfica de las funciones
b) Determine los puntos de intersección de las funciones
c) Determine el área comprendida entre las funciones
d) ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?

**Solución a la tarea 10:**

**a)**




**b)** $x^2 - 2x = 12 - x^2$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$x = 3\,, x = -2$$

**c)** $\int_{-2}^{3}[12 - x^2 - x^2 + 2x]dx$

$$\int_{-2}^{3}[12-2x^2+2x]dx=\frac{125}{3}\ u^2$$

d) El área como integral entre curvas, funciones

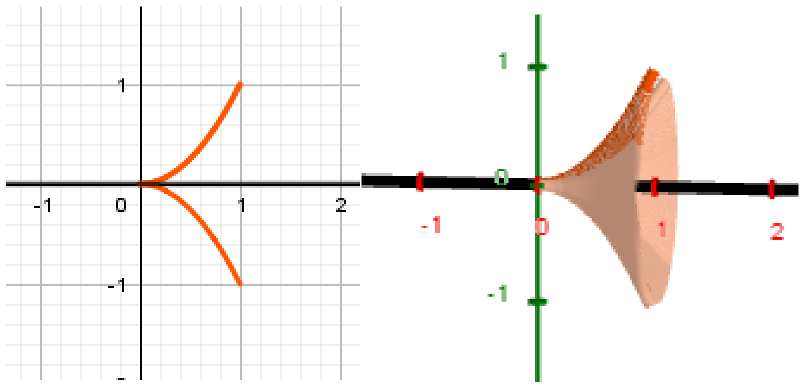
**Tarea 11:**

Dada la función $y\ = x^2$

a) Grafique el sólido que se forma al g al girar en torno al eje x la parábola en el intervalo [0, 1].
b) Determine el volumen del sólido anterior
c) ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?

**Solución a la tarea 11:**

a)




b) $V\ = \pi \int_{a}^{b}[f(x)]^2\ dx$

$$V\ = \pi \int_{0}^{1}[x^2]^2\ dx\ = \pi \int_{0}^{1} x^4\ dx\ = \pi \left.\frac{x^5}{5}\right|_{0}^{1} = \frac{\pi}{5}\ u^3$$

c) Sólidos de revolución a partir de una gráfica, funciones

**Tarea 12:**

A partir de una circunferencia de radio $r$

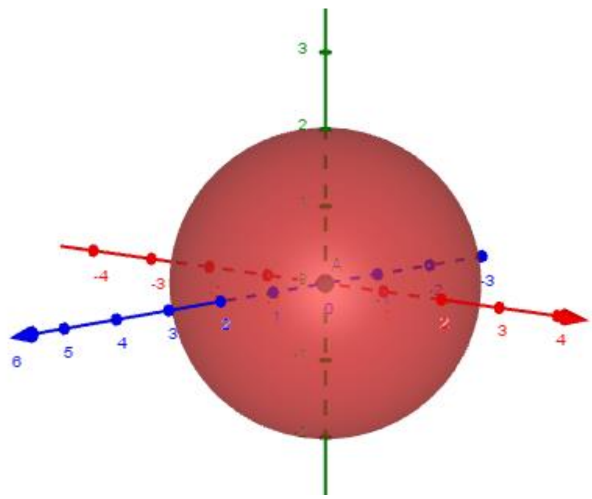
1) Grafique una esfera en un plano cartesiano
2) Demuestre porque $A = \pi . y^2$ es un corte transversal de la esfera graficada en el punto anterior
3) Demuestre que el volumen de una esfera de radio r es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

4) ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?

**Solución a la tarea 12:**

a)



b) Al realizar un corte lateral se visualiza el contorno de un círculo por lo que $\mathrm{A} = \pi \mathrm{y}^2$ representa el área del corte donde varia la altura por ende $\mathrm{A} = \pi \mathrm{y}^2$

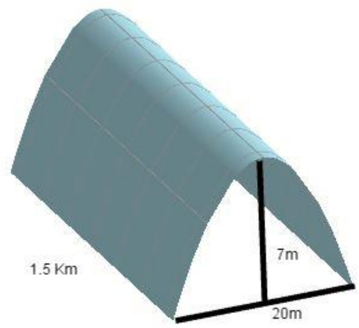
**c)** $\mathrm{V} = \int_a^b \mathrm{A(x)dx} = \int_{-r}^{r} \pi(x^2 - r^2)\,\mathrm{dx} = \int_{-r}^{r} \pi x^2 - \pi r^2\,\mathrm{dx}$

$$= \frac{\pi x^3}{3} - \pi r^2 x\Big|_{-r}^{r} = \left(\frac{\pi r^3}{3} - \pi r^2 r\right) - \left(\frac{\pi(-r)^3}{3} - \pi r^2(-r)\right) = \frac{2\pi r^3}{3} + \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

d) Funciones, ecuaciones de la circunferencia, áreas, integral indefinida.

**Tarea 13:**

Una empresa de Ingeniería se ofrece a construir un túnel, como muestra la figura.




a) ¿Qué cantidad de material debe extraerse para construir el túnel?
b) La parte superior del túnel se tratará con un sellador impermeable que tiene un costo de 5000 COP por metro cuadrado. ¿Cuál es el costo total de la aplicación del sellador?
c) ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?

**Solución a la tarea 13:**

Se asume el túnel de forma parabólica con vértice en $(0,7)$ y cortes en el eje x $(x = 10\,, x = -10)$ por lo que el modelo del túnel en forma matemática es $y = -0.07x^2 + 7$

a) Entonces para determinar el material que se debe extraer es el formado por el prisma cuya base es el área encerrada por la curva y altura 1.5km

$$\int_{-10}^{10} (-0{,}007x^2 + 7)\, dx = \frac{280}{3}$$

$$V = Ab \times h = \frac{280}{3} \times 1500 = 140000\ u^3$$

b) Es un problema de longitud de arco por ende se aplica la integral

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\ dx$$

Entonces $y'(x) = -0.14x$

$$L = \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + (-0{,}14x)^2}\ dx = 25.33m$$

Entonces el área de la superficie es

$$A = 25.33 \times 15000 = 380000\ m^2$$

Por lo tanto, el costo es de 1900000000 COP.

c) Funciones, parábola, longitud de curva, integral definida, área, volumen.

**Tarea 14:**

Se definen las funciones $f, h: R \to R$ , así:

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}, \qquad h(x) = \int_{cos2x}^{x^4} t^2 f(t)dt$$

a) Calcular $h'(t)$
b) Que elementos son necesarios para aplicar el teorema fundamental del cálculo
c) ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?
d) ¿Si tiene alguna dificultad con cada ítem del ejercicio desde las matemáticas, indique el por qué?

**Solución a la tarea 14:**

a) $h'(t) = \frac{d}{dx}\int_{\cos 2x}^{x^4} t^2 . e^{\frac{t^2}{2}}\, dt = t^2 . e^{\frac{t^2}{2}}\Big|_{cos2x}^{x^4} = x^8 e^{x^8/2} - (\cos(2x))^2 . e^{\frac{(cos2x)^2}{2}}$

b) que las funciones sean continuas e invertibles.

c) Teorema fundamental del cálculo.

Ahora bien, ya presentada la solución de la prueba piloto se procede a categorizar éste, con referencia a cada tarea, bajo los criterios establecidos anteriormente, es decir se describe el significado y tipo de conocimiento que se pretende evaluar.

Tabla 5.13

*Tareas del cuestionario piloto CDM-integral*

| Tarea | Significados | Subitem | Contenido curricular | Categoría del CDM |
|---|---|---|---|---|
| 1. | Sumas de Riemann | a. | Método de exhausción | CCC |
| | | | Sumas de Riemann | CCC |
| | | b. | Ejemplo y contraejemplos | CEC |
| 2. | Método de exhausción | a. | Áreas | CAC |
| | | b. | Áreas | CCC |
| | | c. | Método de exhausción | CAC |
| 3. | Integral definida | a | Integral definida | CCC |
| | | | Sumas de Riemann | CCC |
| | | | Integral Impropia | CAC |
| | | | Integración numérica | CAC |
| | | b. | Integral definida | CAC |
| 4. | Área | a | Resolver la tarea de construir una función | CCC |
| | | b | Integral definida | CAC |
| | | | Sumas de Riemann | CCC |
| | | | Propiedades de la integral | CAC |
| | | | Teorema fundamental del cálculo | CAC |
| | | | Integración numérica | CAC |
| | | c | Integral definida | CAC |
| 5. | Integral Impropia | a | Realizar la gráfica de la función | CCC |
| | | b | Integral definida | CCC |
| | | | Integral Impropia | CAC |
| | | c | Revisión de contenidos | CEC |

**Nota.** Descripción de criterios en la construcción del cuestionario CDM-Integral

Tabla 5.13 (continuación)

*Tareas del cuestionario piloto CDM-integral*

| **Tarea** | **Significados** | **Subitem** | **Contenido curricular** | **Categoría del CDM** |
|---|---|---|---|---|
| 6. | Área | a | Resolver con ecuaciones | CCC |
| | | | Integral definida | CAC |
| | | b | Resolver con ecuaciones | CCC |
| | | | Integral definida | CAC |
| | | c | Resolver con ecuaciones | CCC |
| | | | Integral definida | CAC |
| 7. | Trabajo | a | Graficar y modelar | CCC |
| | | b | Volúmenes | CCC |
| | | c | Trabajo | CAC |
| | | d | Revisión de contenidos | CEC |
| 8. | Integral indefinida | a | Integral indefinida | CAC |
| | | b | Integral definida | CAC |
| | | | Ecuaciones de MAS | CCC |
| | | c | Revisión de contenidos | CEC |
| 9. | Integral definida | a | Graficar modelo | CCC |
| | | b | Integral definida | CAC |
| | | c | Ejemplos y contraejemplos | CEC |
| | | d | Revisión de contenidos | CEC |
| 10. | Área entre curvas | a | Graficar funciones | CCC |
| | | b | Resolver sistemas de ecuaciones | CCC |
| | | c | Área entre curvas | CCC |
| | | d | Integral definida | CCC |

**Nota.** Continuación de descripción de criterios en la construcción del cuestionario CDM-Integral

Tabla 5.13 *(continuación)*

*Tareas del cuestionario piloto CDM-integral*

| Tarea | Significados | Subitem | Contenido curricular | Categoría del CDM |
|---|---|---|---|---|
| 11. | Sólidos de revolución | a | Graficar funciones | CCC |
| | | b | Volumen de sólido de revolución | CCC |
| | | c | Revisión de contenidos | CEC |
| 12. | Sólidos de revolución | a | Gráfico de funciones | CCC |
| | | b | Ejemplos y contraejemplos | CEC |
| | | c | Sólidos de revolución | CAC |
| | | d | Revisión de contenidos | CEC |
| 13 | Integral definida | a | Integral definida | CAC |
| | Longitud de arco | b | Longitud de arco | CAC |
| | | c | Revisión de contenidos | CEC |
| 14. | Teorema fundamental del cálculo | a | Teorema fundamental del cálculo | CAC |
| | | b | Revisión de contenidos | CEC |
| | | c | Revisión de contenidos | CEC |

**Nota.** Continuación de descripción de criterios en la construcción del cuestionario CDM-Integral

### 5.2.3 Análisis cuantitativo y cualitativo de la prueba piloto del Cuestionario CDM – Integral

El cuestionario piloto se aplicó a 2 grupos de 18 y 15 estudiantes, en la asignatura de cálculo Integral; donde se les solicitaba responder con el objetivo de evaluar aspectos cualitativos y cuantitativos, tales como; el tiempo de prueba, claridad, comprensión de las preguntas y dificultades del cuestionario. Se aplicó la prueba piloto para evaluar el índice de dificultad de las preguntas, y, de igual forma sustentar la validez y fiabilidad del cuestionario (Muñiz, 2010) y principalmente, con el objetivo de identificar las dificultades y errores de los estudiantes al dar respuesta a los problemas presentados lo cual permite caracterizar la dimensión cognitiva en el modelo CDM del conocimiento del profesor, es decir se identifican estas dificultades como aporte del trabajo para la práctica pedagógica que requiere que el profesor o el futuro profesor conozca en el diseño de un proceso de instrucción.

Al iniciar la prueba piloto se les dio a conocer a los estudiantes, las instrucciones claras y precisas sobre cómo responder el cuestionario, y el objetivo principal de este cumpliendo con el sentido ético de la investigación que según Meneses (2011) es responsabilidad del investigador habilitar los mecanismos que permitan informar los objetivos de la investigación y registra el consentimiento de los participantes, y de la misma forma respetar el derecho a la no participación en esta.

Los resultados individuales en la prueba piloto se presentan en la tabla 5.14. Para la valoración de la prueba se analizaron todas las preguntas diseñadas, con una escala de 0.0 a 5.0, como es habitual en el contexto universitario colombiano. Para este análisis se considera la variable “grado de corrección de respuestas al ítem”, donde se asigna 0 si la respuesta es incorrecta, 5 si la respuesta es correcta, y un valor entre 0 y 5 si la respuesta es parcialmente correcta.

Estos resultados permiten generar el análisis y caracterización de las dimensiones epistémica y cognitiva, las cuales fueron tomadas como categorías de la investigación, por lo que, estos resultados serán transformados a equivalencias entre 0 y 1, para conocer e interpretar las variables de índice de dificultad, los cuales se comportan de forma inversa, es decir un estudiante que obtiene como resultado un valor de 4,0 en su resultado del cuestionario, este obtendrá una nota equivalente a 0,8. Por tanto, en el análisis se puede concluir que el estudiante tiene un conocimiento alto como se describe en la tabla 5.16 y el índice de dificultad muestra que en el desarrollo del cuestionario, para el estudiante fue medianamente fácil (ver tabla 5.17), es decir la pregunta tiene un índice de dificultad que corresponde a la categoría de fácil; estos conceptos se trabajan siguiendo la teoría de los test de Muñiz (1994).

*Tabla 5.14*
*Resultados de prueba piloto.*

| | P1.a | P1.b | P2.a | P2.b | P2.c | P3.a | P3.b | P4.a | P4.b | P4.c | P5.a | P5.b | P6.a | P6.b | P6.c | P7.a | P7.b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | Grupo 1 | | | | | | | | |
| E1 | 2,5 | 5 | 2,5 | 2,5 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E2 | 0 | 0 | 0 | 2,5 | 2,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E4 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E6 | 2,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E7 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E8 | 2,5 | 0 | 0 | 0 | 2,5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E9 | 2,5 | 2,5 | 5 | 2,5 | 5 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E12 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E13 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 2,5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 |
| E14 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E15 | 2,5 | 0 | 0 | 2,5 | 2,5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E16 | 0 | 0 | 2,5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E17 | 2,5 | 0 | 0 | 2,5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E18 | 2,5 | 0 | 2,5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | Grupo 2 | | | | | | | | |
| E1 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 5 | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 |
| E2 | 0 | 5 | 2,5 | 0 | 0 | 2,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E3 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 2,5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,5 | 2,5 |
| E4 | 2,5 | 2,5 | 5 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E5 | 2,5 | 2,5 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E6 | 2,5 | 0 | 5 | 2,5 | 5 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 |
| E7 | 2,5 | 0 | 5 | 5 | 2,5 | 2,5 | 5 | 5 | 2,5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 2,5 | 0 | 0 | 0 |
| E8 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 5 | 0 | 2,5 | 2,5 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E9 | 2,5 | 2,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E10 | 2,5 | 0 | 2,5 | 5 | 2,5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 5 | 5 | 2,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E11 | 2,5 | 2,5 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E12 | 2,5 | 0 | 2,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| E13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| E14 | 2,5 | 0 | 2,5 | 2,5 | 5 | 2,5 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E15 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Nota.** Se describen los resultados de la prueba piloto en los grupos 1 y 2, en las tareas 1 a 7.

*Tabla 5.14* (continuación)
*Resultados de prueba piloto.*

| | P7.c | P8.a | P8.b | P9.a | P9.b | P10.a | P10.b | P10.c | P11.a | P11.b | P12.a | P12.b | P12.c | P13.a | P13.b | P14.a |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Grupo 1 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| E1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E3 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E4 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E5 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E6 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E8 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E9 | 0 | 0 | 2,5 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 2,5 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E12 | 2,5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 2,5 | 5 | 2,5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E14 | 0 | 5 | 2,5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E15 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 2,5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Grupo 2 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| E1 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 5 | 5 | 2,5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| E2 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E3 | 2,5 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| E4 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 2,5 | 5 | 5 | 0 | 2,5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E6 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E7 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 2,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E9 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 2,5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 |
| E10 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E11 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 5 | 2,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E12 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E13 | 5 | 2,5 | 2,5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| E14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| E15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Nota.** Se describen los resultados de la prueba piloto en los grupos 1 y 2, en las tareas 7 a 14

Realizando un análisis a los resultados presentados, se concluye que es necesario incluir en el instrumento CDM-Integral tareas con diferentes grados de dificultad; para obtener un nivel de dificultad medio, como lo establece la literatura especializada (Muñiz, 1994).

En este contexto, el índice de dificultad de la tarea (ítem), viene dado por la división entre número de personas que contesta bien el ítem, y total de personas: esta propuesta se aborda desde "la teoría de los test" planteada por Muñiz (1994), el cual establece los siguientes porcentajes y el nivel de dificultad de las preguntas. Para el cálculo del índice de dificultad de las preguntas, se tiene en cuenta las respuestas de los estudiantes, y en la tabla 5.15 se muestran los resultados del índice de dificultad para cada pregunta y cada grupo.

Tabla 5.15

*Índice de dificultad para el cuestionario CDM-Integral*

| Tarea | | R. Correctas | | R. Incorrectas | | R. Parcialmente Correctas | | Índice de dificultad | | Índice de dificultad promedio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Grupo 1 | Grupo 2 | Grupo 1 | Grupo 2 | Grupo 1 | Grupo 2 | Grupo 1 | Grupo 2 | |
| P1 | a | 1 | 1 | 8 | 3 | 9 | 11 | 0,55 | 0,8 | 0,67 |
| | b | 5 | 3 | 10 | 6 | 3 | 6 | 0,44 | 0,6 | 0,52 |
| P2 | a | 2 | 6 | 11 | 3 | 5 | 6 | 0,39 | 0,8 | 0,60 |
| | b | 2 | 6 | 10 | 6 | 6 | 3 | 0,44 | 0,6 | 0,52 |
| | c | 5 | 3 | 9 | 9 | 4 | 3 | 0,5 | 0,4 | 0,45 |
| P3 | a | 8 | 5 | 10 | 6 | 0 | 4 | 0,44 | 0,6 | 0,52 |
| | b | 6 | 4 | 12 | 10 | 0 | 1 | 0,33 | 0,33 | 0,33 |
| P4 | a | 7 | 5 | 11 | 10 | 0 | 0 | 0,39 | 0,33 | 0,36 |
| | b | 4 | 3 | 14 | 9 | 0 | 3 | 0,22 | 0,40 | 0,31 |
| | c | 7 | 6 | 11 | 9 | 0 | 0 | 0,39 | 0,40 | 0,40 |
| P5 | a | 13 | 14 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0,72 | 0,93 | 0,83 |
| | b | 6 | 4 | 11 | 10 | 1 | 1 | 0,39 | 0,33 | 0,36 |
| P6 | a | 2 | 4 | 16 | 11 | 0 | 0 | 0,11 | 0,26 | 0,19 |
| | b | 1 | 3 | 17 | 11 | 0 | 1 | 0,06 | 0,26 | 0,16 |
| | c | 1 | 3 | 17 | 12 | 0 | 0 | 0,06 | 0,20 | 0,13 |
| P7 | a | 0 | 1 | 18 | 13 | 0 | 1 | 0 | 0,13 | 0,06 |
| | b | 0 | 1 | 18 | 13 | 0 | 1 | 0 | 0,13 | 0,06 |
| | c | 0 | 1 | 17 | 13 | 1 | 1 | 0,06 | 0,13 | 0,1 |
| P8 | a | 2 | 1 | 16 | 13 | 0 | 1 | 0,11 | 0,13 | 0,12 |
| | b | 1 | 1 | 15 | 13 | 2 | 1 | 0,17 | 0,13 | 0,15 |
| P9 | a | 7 | 11 | 11 | 4 | 0 | 0 | 0,39 | 0,73 | 0,56 |
| | b | 10 | 9 | 8 | 6 | 0 | 0 | 0,55 | 0,6 | 0,58 |
| P10 | a | 10 | 11 | 7 | 4 | 1 | 0 | 0,55 | 0,73 | 0,64 |
| | b | 9 | 7 | 9 | 8 | 0 | 0 | 0,5 | 0,46 | 0,48 |
| | c | 6 | 2 | 10 | 9 | 2 | 4 | 0,44 | 0,40 | 0,42 |
| P11 | a | 12 | 9 | 6 | 6 | 0 | 0 | 0,66 | 0,6 | 0,63 |
| | b | 4 | 6 | 13 | 8 | 1 | 1 | 0,28 | 0,46 | 0,37 |
| P12 | a | 6 | 8 | 12 | 7 | 0 | 0 | 0,33 | 0,53 | 0,43 |
| | b | 2 | 3 | 16 | 11 | 0 | 1 | 0,11 | 0,26 | 0,19 |
| | c | 0 | 5 | 18 | 13 | 0 | 0 | 0 | 0,13 | 0,07 |
| P13 | a | 0 | 1 | 18 | 14 | 0 | 0 | 0 | 0,06 | 0,03 |
| | b | 0 | 0 | 18 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| P14 | a | 0 | 0 | 18 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Nota**. Descripción del índice de dificultad a las preguntas respuestas por los estudiantes.

Según el índice de dificultad se definen los niveles de dificultad para las preguntas:

Tabla 5.16
*Niveles de dificultad en orden decimal*

| Nivel de dificultad de la pregunta | Nota del estudiante traducida en porcentaje de 0 a 1 |
|---|---|
| Alto grado de dificultad | 0 |
| Difícil | (0 – 0,05] |
| Medianamente difícil | (0,05-0,25] |
| Media | (0,25-0,75] |
| Medianamente fácil | (0,75-0,95] |
| Fácil | (0,95-1) |
| Alto grado de facilidad | 1 |

**Nota.** Se describe los valores decimales de la escala de Muñiz tomada para analizar el índice de dificultad en el CDM-Integral

De igual manera, en la teoría de Muñiz (1994), según la escala dada, se establece los niveles de dominio de la *pregunta*, los cuales pueden ser ajustados según cada contexto educativo, y se toman los presentados según el índice de dificultad dado a las preguntas del cuestionario. (Tabla 5.15).

Tabla 5.17
*Nivel de Conocimiento*

| Nivel de Dominio | Nota traducida a porcentaje entre 0 y 1 |
|---|---|
| Bajo nivel | [0 - 0,25] |
| Nivel medio | (0,25- 0,75] |
| Alto nivel | (0,75-1] |

**Nota.** Se describen los niveles de dominio siguiendo el índice de dificultad.

Bajo lo anterior y según Muñiz (1994), el índice de dificultad refleja el grado de dificultad que lleva la resolución de la situación problemática planteada y se define como la relación entre “el número de aciertos sobre el número de respuestas”. Este índice varía entre un número real de 0 a 1, donde 0 significa un alto grado de dificultad, mientras 1 es un alto grado de facilidad.

De acuerdo a los resultados mostrados se muestran los resultados a cada variable en cada pregunta del cuestionario.

Tabla 5.18
*Índice de nivel de Conocimiento*

| Tarea | | Índice de dificultad promedio | Nivel de dificultad | Nivel de dominio |
|---|---|---|---|---|
| P1 | a | 0,67 | Nivel medio | Nivel medio |
| | b | 0,52 | Nivel medio | Nivel medio |
| P2 | a | 0,60 | Nivel medio | Nivel medio |
| | b | 0,52 | Nivel medio | Nivel medio |
| | c | 0,45 | Nivel medio | Nivel medio |
| P3 | a | 0,52 | Nivel medio | Nivel medio |
| | b | 0,33 | Nivel medio | Nivel medio |
| P4 | a | 0,36 | Nivel medio | Nivel medio |
| | b | 0,31 | Nivel medio | Nivel medio |
| | c | 0,40 | Nivel medio | Nivel medio |
| P5 | a | 0,83 | Medianamente fácil | Nivel alto |
| | b | 0,36 | Nivel medio | Nivel medio |
| P6 | a | 0,19 | Medianamente difícil | Nivel bajo |
| | b | 0,16 | Medianamente difícil | Nivel bajo |
| | c | 0,13 | Medianamente difícil | Nivel bajo |
| P7 | a | 0,06 | Medianamente difícil | Nivel bajo |
| | b | 0,06 | Medianamente difícil | Nivel bajo |
| | c | 0,1 | Medianamente difícil | Nivel bajo |
| P8 | a | 0,12 | Medianamente difícil | Nivel bajo |
| | b | 0,15 | Medianamente difícil | Nivel bajo |
| P9 | a | 0,56 | Nivel medio | Nivel medio |
| | b | 0,58 | Nivel medio | Nivel medio |
| P10 | a | 0,64 | Nivel medio | Nivel medio |
| | b | 0,48 | Nivel medio | Nivel medio |
| | c | 0,42 | Nivel medio | Nivel medio |
| P11 | a | 0,63 | Nivel medio | Nivel medio |
| | b | 0,37 | Nivel medio | Nivel medio |
| P12 | a | 0,43 | Nivel medio | Nivel medio |
| | b | 0,19 | Medianamente difícil | Nivel bajo |
| | c | 0,07 | Medianamente difícil | Nivel bajo |
| P13 | a | 0,03 | Dificultad alta | Nivel bajo |
| | b | 0 | Dificultad alta | Nivel bajo |
| P14 | a | 0 | Dificultad alta | Nivel bajo |

**Nota.** Descripción de niveles de dificultad y dominio en el cuestionario CDM-Integral

## Nivel de dominio del estudiante

En la tabla 5.19 se presenta el resumen de notas obtenidas en el cuestionario CDM-Integral por los estudiantes en su respectivo grupo, estas se encuentran inicialmente en una escale de 0.0 a 5.0, en una segunda parte su equivalencia (denotado con la letra E) en una escala de 0 a 1, denotando los niveles de dificultad (denotado con la letra ND) y dominio (denotado con la letra NC) al responder el cuestionario CDM-Integral.

Tabla 5.19

*Resultados Individuales del cuestionario CDM –Integral*

| | | Grupo 1 | | | Grupo 2 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Estudiante | Valoración | E | ND | NC | Estudiante | Valoración | EQ | ND | NC |
| E1 | 1,4 | 0,28 | Medio | Medio | E1 | 1,8 | 0,36 | Medio | Medio |
| E2 | 0,7 | 0,14 | N.M.D | Bajo | E2 | 0,7 | 0,14 | N.M.D | Bajo |
| E3 | 1,0 | 0,20 | N.M.D | Bajo | E3 | 2,1 | 0,42 | Medio | Medio |
| E4 | 1,3 | 0,26 | Medio | Medio | E4 | 1,9 | 0,38 | Medio | Medio |
| E5 | 1,8 | 0,36 | Medio | Medio | E5 | 0,7 | 0,14 | N.M.D | Bajo |
| E6 | 1,7 | 0,34 | Medio | Medio | E6 | 1,9 | 0,38 | Medio | Medio |
| E7 | 1,2 | 0,24 | N.M.D | Bajo | E7 | 1,4 | 0,28 | Medio | Medio |
| E8 | 0,9 | 0,18 | N.M.D | Bajo | E8 | 1,5 | 0,30 | Medio | Medio |
| E9 | 1,6 | 0,32 | Medio | Medio | E9 | 1,9 | 0,38 | Medio | Medio |
| E10 | 0,3 | 0,06 | N.M.D | Bajo | E10 | 2,1 | 0,42 | Medio | Medio |
| E11 | 1,3 | 0,26 | Medio | Medio | E11 | 1,5 | 0,30 | Medio | Medio |
| E12 | 1,3 | 0,26 | Medio | Medio | E12 | 1,5 | 0,30 | Medio | Medio |
| E13 | 3,2 | 0,64 | Medio | Medio | E13 | 2,6 | 0,52 | Medio | Medio |
| E14 | 2,1 | 0,42 | Medio | Medio | E14 | 1,6 | 0,32 | Medio | Medio |
| E15 | 2,1 | 0,42 | Medio | Medio | E15 | 2,1 | 0,42 | Medio | Medio |
| E16 | 0,7 | 0,14 | N.M.D | Bajo | | | | | |
| E17 | 0,3 | 0,06 | N.M.D | Bajo | | | | | |
| E18 | 0,3 | 0,06 | N.M.D | Bajo | | | | | |

**Nota.** Descripción de los resultados finales obtenidos por cada estudiante.

Según la tabla 5.19 se logra evidenciar que el 70% del total de los estudiantes presentaron un nivel de dificultad medio al responder el cuestionario, según las categorías del índice de dificultad, esto evidencia que tienen un nivel medio de dominio sobre el objeto Integral, y un 30 % equivalente a 10 estudiantes presentaron una dificultad medianamente difícil lo que demuestra un bajo dominio o conocimiento (palabra adecuada dominio porque son estudiantes) del objeto Integral, estos resultados junto a los de la tabla 5.18 y posteriores análisis, permiten analizar la reconstrucción de la versión final del cuestionario CDM-Integral, puesto que la teoría (Muñiz, 1994) plantea eliminar las preguntas fáciles y difíciles en el diseño del Instrumento.

En la siguiente gráfica se resume las notas finales obtenidas por los grupos 1 y 2, en una frecuencia absoluta y relativa porcentual de un total de 33 estudiantes que presentaron el cuestionario CDM-Integral en una escala de 0 a 5.

Tabla 5.20

*Distribución de frecuencias de la puntuación total*

| Intervalo de puntuación | Grupo 1 | | Grupo 2 | |
|---|---|---|---|---|
| | F. absoluta | Porcentaje | F. absoluta | Porcentaje |
| (0 - 0,5] | 3 | 16,7 | 0 | 0 |
| (0,5 - 1] | 4 | 22,2 | 2 | 13,3 |
| (1 - 1,5] | 5 | 27,8 | 1 | 6,6 |
| (1,5 - 2] | 3 | 16,7 | 8 | 53,3 |
| (2 - 2,5] | 2 | 11,1 | 3 | 20 |
| (2,5 - 3] | 0 | 0,0 | 1 | 6,6 |
| (3 - 3,5] | 1 | 5,6 | 0 | 0 |
| (3,5 - 4] | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (4 - 4,5] | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (4,5 - 5] | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Nota.** Relación de notas finales con frecuencias absolutas y porcentuales.

Según la tabla 5.20 de frecuencias, se observa que aproximadamente el 66,7 por ciento de los estudiantes del grupo 1 y el 20% de los estudiantes del grupo 2 obtienen una nota inferior a 1.5, lo que infiere cierto grado de dificultad alto para los estudiantes con una evidencia de soportar un bajo nivel de dominio. En lo que corresponde a un nivel medio y con una dificultad media para el estudiante, se toma la escala de notas de (1,5 - 4), donde se encuentra que para el grupo 1 existe un 33.3% y en el grupo 2 un 80%. No se evidencia porcentaje de la población en lo que refiere a un alto dominio del conocimiento matemático ya que no existen notas registradas superiores a 4.

Se presenta la tabla 5.21 algunas de las inferencias sobre las valoraciones de los estudiantes.

Tabla 5.21

*Tabla de estadísticos puntuaciones finales*

| *Parámetro* | *Estadístico* | |
|---|---|---|
| | *Grupo 1* | *Grupo 2* |
| Media | 1.3 | 1.7 |
| Mediana | 1.3 | 1.8 |
| Moda | 1.3 | 1.5 |
| Desviación estándar | 0.7 | 0.5 |
| Coeficiente de variación | 0.53 | 0.27 |
| Rango | 2.9 | 1.9 |
| Mínimo | 0.3 | 0.7 |
| Máximo | 3.2 | 2.6 |
| Cuartil 1 | 0.8 | 1.5 |
| Cuartil 2 | 1.3 | 1.8 |
| Cuartil 3 | 1.7 | 2 |

**Nota**. Descripción de los estadísticos asociados a las puntuaciones finales. *Fuente: (Elaboración propia)*

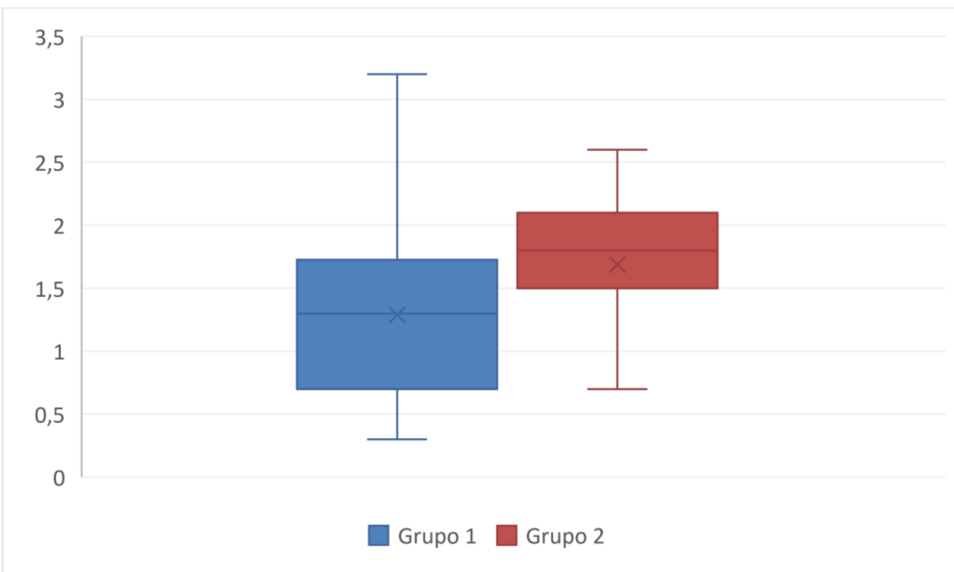



*Figura 5.1* Distribución de puntuaciones en la prueba piloto de los estudiantes. Fuente: (Elaboración propia)

Con respecto a la tabla se deduce que ningún estudiante obtuvo la máxima puntuación es decir 5.0, se observa que la calificación promedio es de 1.3 y 1.7 en los respectivos grupos, además, se observa que existe un coeficiente de variación de 0.53 representando una heterogeneidad en el primer grupo y 0.27 mostrando una homogeneidad leve en el segundo grupo, de esta forma, se visualiza que se obtuvo un porcentaje de logro del 5.6 por ciento y en el segundo grupo de 0 por ciento; de lo anterior se puede concluir que el instrumento CDM-Integral tiene un *alto grado de* *dificultad* para los estudiantes, aunque se puede visualizar que el segundo grupo tiene un *nivel de conocimiento o dominio medio* al enfrentar la prueba puesto que la mediana es más alta y su desviación estándar es menor, de igual manera se encuentra los rangos intercuartílicos de 0.9 y 0.5 unidades por lo que no se encuentran datos atípicos como muestra la figura.

### 5.2.4 Análisis de fiabilidad del cuestionario CDM-Integral

Del cuestionario piloto y los resultados dados en los dos grupos, se realiza un análisis de respuestas, ya que son observables y medibles para identificar las dificultades que presenta los estudiantes con el desarrollo de problemas relacionadas asociados a los significados de referencia del objeto Integral. Estas dificultades constituyen una herramienta para el futuro profesor al momento de realizar su análisis didáctico para la puesta en marchas de sus procesos de instrucción.

Para la validez del cuestionario se utiliza el estadístico "coeficiente alfa de Cronbach" ya que es uno de los más representativos al estudiar la fiabilidad de los datos, al analizar las varianzas y covarianzas lo que constituyen el Test (Muñiz, 1994). El coeficiente alfa de Cronbach, requiere de una sola administración del instrumento de medición, la cual se aplicó a la prueba piloto; este coeficiente genera valores entre 0 y 1, el cual refleja la consistencia interna, homogeneidad y fiabilidad del instrumento, este valor garantiza que las conclusiones sean estables y consistentes, entre más alto el valor del coeficiente, más fiable es el instrumento.

Para determinar el "coeficiente alfa de Cronbach" se procedió a utilizar un software estadístico como Excel, donde se insertan los valores de los resultados de las calificaciones de 0 a 5 obtenidas por los estudiantes, y se procede a calcular el índice mediante la fórmula propuesta por Lee Cronbach en 1951; por lo cual se calcula el índice alfa de Cronbach al cuestionario CDM-Integral el cual arrojo un valor $\alpha = 0{,}82$, este valor sugiere una alta confiabilidad en el instrumento en el primer grupo, en el segundo grupo el índice de Cronbach dio como resultado $\alpha = 0{,}53$, lo cual implica que la consistencia o fiabilidad de los resultados se encuentran en un nivel moderado, suficiente para deducir posibles conclusiones.

De acuerdo a los resultados obtenidos para el índice de fiabilidad y consistencia de Cronbach, junto al índice de dificultad de Muñiz, en la tabla 5.17, se pueden analizar las catorce tareas propuestas compuestas a su vez por treinta y tres ítems de valoración.

En el grupo 1 se considera que siete (20,6%) ítems tienen un alto grado de dificultad, 8 ítems (23,5 %) una dificultad medianamente difícil y 19 (55,9%) ítems en una clasificación de dificultad media. En la misma línea el grupo 2 presenta 3 (8,8%) ítems en un alto grado de dificultad, 8 (23,5%) ítems se clasifican en medianamente difícil, 20 (58,9%) ítems se encuentran en una dificultad media y 3 (8,8%) ítems en medianamente fácil.

### 5.2.5 Dificultades y errores de los estudiantes con el objeto integral

Inicialmente, se aclara que en este estudio no se evalúa el conocimiento común del estudiante y el ampliado, ya que estas categorías corresponden al modelo CDM del conocimiento del profesor, el objetivo del análisis es validar el índice de dificultad de la pregunta y validar o seleccionar las tareas que servirán para realizar dicha evaluación, en este sentido se realiza el presente análisis,

En la figura 5.2 se puede analizar que el cuestionario en general presenta una dificultad media, ya que, bajo los índices correlacionados se evidencia que este toma valores alrededor del coeficiente 0 y 0.7, con una tendencia de promedio de 0.33 en los dos grupos, de igual manera se comienza a exponer los principales hallazgos en las respuestas a los ítems de las preguntas.

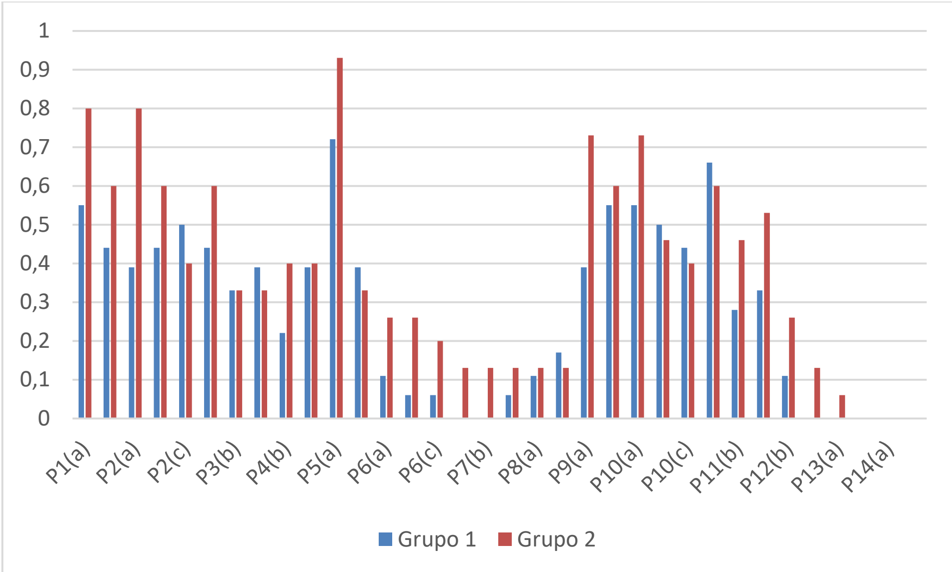



*Figura 5.2* Preguntas e Índice de dificultad Fuente: (elaboración propia)

**Pregunta 1.**

De acuerdo con la pregunta 1 y la tabla 5.15 se observa que en promedio el 59% de los estudiantes de los dos grupos lograron dar solución parcial y/o correctamente a la tarea planteada, ya que logran mostrar que el área esta en los límites planteados, pero no logran argumentar mediante un procedimiento (sumas de Riemann, método de exhausción) la solución a este. Además, se evidencia la necesidad de algebrizar el área mediante una función. Se establece que los estudiantes de los dos grupos en promedio tienen un *nivel de dominio medio* respecto a la pregunta.

En el *ítem a* se propone para evaluar el conocimiento del estudiante para determinar un área, es decir se diseña para evaluar el conocimientos común y ampliado del contenido en la solución que éste propone, al identificar prácticas asociado a Sumas de Riemann o el método de exhausción. Este ítem tuvo un índice promedio de dificultad de 0.6. Lo que corresponde a una dificultad media, ya que solo logran responder parcialmente la respuesta 20 estudiantes.

Respecto a las *dificultades*, para calcular el área de una región sombreada respecto a argumentar si esta área es mayor que una unidad cuadrada y menor igual a tres unidades cuadradas y hallar el valor del área de la región sombreada en forma más exacta: se observa que los estudiantes son dependientes de una función matemática para hallar el área bajo la curva, visualizar otra forma de solución a la tarea, un 30% de los estudiantes, trataron de inscribir polígonos en el área, pero no lograron argumentar los vacíos existentes entre figuras para completar el área.

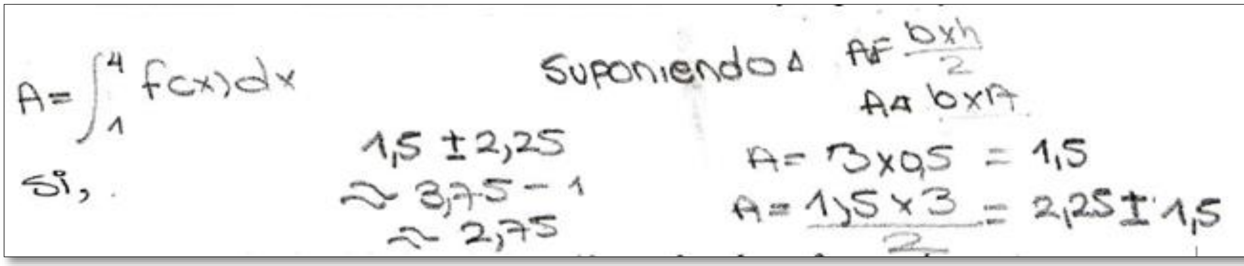
En cuanto los *errores* cometidos por los estudiantes (44%) se basan en su percepción visual para desmentir la afirmación propuesta , intentan proponer ecuaciones ($y = \frac{1}{x^2}, f(x) = \frac{2}{x}$) para llegar a una integral definida.

El ítem b presenta un índice promedio de dificultad de 0.5, lo cual corresponde a un nivel de dificultad medio de la pregunta y por tanto proporcionará un nivel de dominio medio de los estudiantes, respecto a la pregunta 1 ya que esta fue respondida por 17 estudiantes; este ítem servirá para evaluar el **conocimiento común del contenido** y corresponde a solucionar la tarea propuesta mediante algún contenido curricular.

En cuanto a *dificultades* es de resaltar que el 52% proponen soluciones como una integral definida, sumas de Riemann, no logran desarrollar estos procesos ya que indican la necesidad de una ecuación para desarrollarlos.

En relación a los *errores* por los 16 estudiantes restantes, reiteran la integral particular de una función asociada, o la necesidad de conocer un modelo matemático asociado a la curva que encierra el área en los límites.

Se evidencia el caso de una aproximación a la solución hecha por los estudiantes E7 grupo1 al *ítem a* y E3 grupo 2 al *ítem b* respectivamente.


$A = \int_1^4 f(x)dx$

Suponiendo Δ $A = \frac{b \times h}{2}$

A□ b×A

Sí,

$1,5 \pm 2,25$

$\approx 3,75 - 1$

$\approx 2,75$

$A = 3 \times 0,5 = 1,5$

$A = \frac{1,5 \times 3}{2} = 2,25 \pm 1,5$

*Figura 5.3: Respuesta E7 grupo 1, al ítem a pregunta 1*

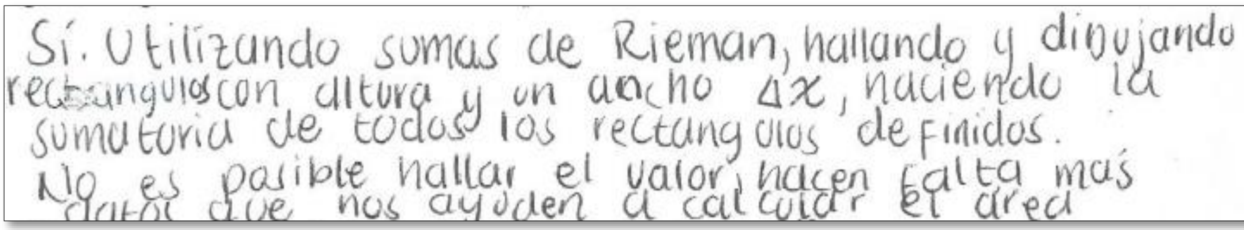

Sí. Utilizando sumas de Rieman, hallando y dibujando rectangulos con altura y un ancho $\Delta x$, haciendo la sumatoria de todos los rectangulos definidos.
No es posible hallar el valor, hacen falta más datos que nos ayuden a calcular el área

*Figura 5.4: Respuesta E3 grupo 2 al ítem b pregunta 1*

**Pregunta 2.**

En el análisis de la pregunta 2 se evidencia en la tabla 5.15 que obtuvo un promedio del 52% en respuesta por los estudiantes, estos lograron darle parcial y/o correctamente respuesta a la tarea planteada, esta tarea permitirá evaluar el conocimiento común del contenido en cuanto utilizar áreas para dar sentido al método de exhausción y un conocimiento ampliado del contenido al conectar propiedades existentes en la relación de polígonos inscritos en el círculo.

En el *ítem a* se observa la relación entre las áreas del cuadrado y el círculo de forma particular y general, se encuentran algunas *dificultades* en donde una parte de estudiantes no conocen el valor del radio del círculo, o el lado de un cuadrado. De la misma forma en el *ítem b* se encuentran *dificultades,* ya que se recurre a un proceso inductivo, donde se tiene que generalizar el área de los polígonos y la relación con el área del círculo, se observa que 17 estudiantes tuvieron una respuesta parcial pero no logran concluir con la generalización, se encuentra *errores* como el área de los polígonos inscritos supera al círculo, ya que se basan en la percepción visual del ejercicio, identificar el radio como diámetro. El *ítem c* tuvo una dificultad media ya que los 15 estudiantes que respondieron la pregunta logran dar una respuesta afirmativa a la relación entre los polígonos y el círculo, pero no logran argumentar formalmente dicha relación.

Se muestra una respuesta aproximada por parte de los estudiantes E1, E4, E9 del grupo 2 a los ítems planteados respectivamente.

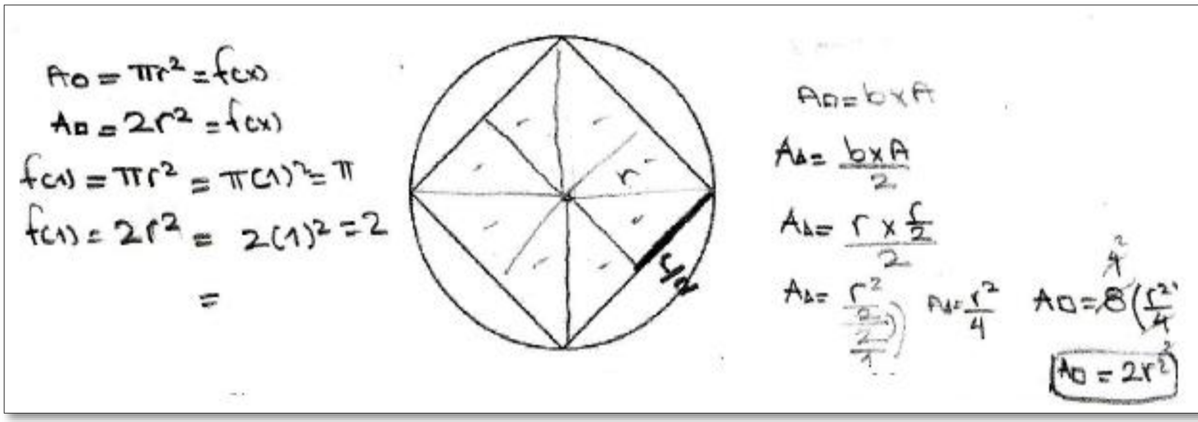



Figura 5.5: Respuesta E1 grupo 2 al ítem *a*, pregunta 2


Figura 5.6: Respuesta E4 grupo 2 al ítem *b*, pregunta 2

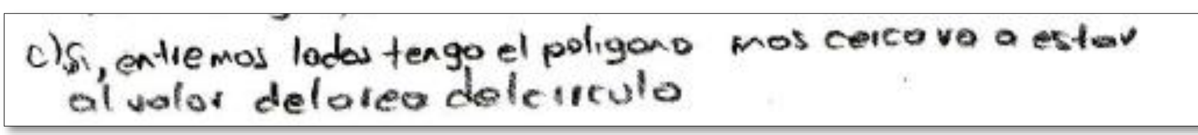



Figura 5.7: Respuesta E9 grupo 2 al ítem *c*, pregunta 2

**Pregunta 3**

Para la pregunta 3 se obtuvo un índice de dificulta promedio de 0.42, la cual se encuentra en un nivel medio, la pregunta permitirá evaluar los conocimientos común y ampliado del contenido, ya que se puede solucionar de diferentes formas y contenidos curriculares, se encuentran entre los resultados que:

El *ítem a* tiene un nivel de dificultad de 0.52 es decir una dificultad media respondido por 17 estudiantes, donde se pide calcular el área a través de funciones a trozos en un intervalo, para esto se utilizan contenidos como integral definida (21), integral impropia (2), integración numérica (1), determinando un 88% de conocimiento común y un 12% de conocimiento ampliado. Se evidencian *dificultades* al encontrar funciones acotadas en un extremo abierto, el área de un punto. Se encuentran *errores* en los cálculos de las integrales.

En el *ítem b* se encuentra en un nivel de dificultad medio con un índice de 0.33 donde fue respondida por 11 estudiantes, este buscaba confrontar las propiedades del área bajo la curva, donde los estudiantes llegaron a presentar dificultades y errores asociados a la continuidad de funciones, descartando la solución hecha en el ítem a.

A continuación, se muestra la solución propuesta por un estudiante (E8) del grupo2

$$\rightarrow \int_{-2}^{-1} -x^2+3\,dx + \int_{-1}^{2} x^2\,dx + \int_{2}^{3} -x+4\,dx$$

$$\rightarrow -\frac{x^3}{3}+3x\Big|_{-2}^{-1} + \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} + -\frac{x^2}{2}+4x\Big|_{2}^{3}$$

$$\frac{2}{3}+3+\frac{3}{2}$$

$$\rightarrow \frac{31}{6}\ \text{unidades}^2\ //R$$

Figura 5.8: Respuesta E8 grupo 2 a la pregunta 3

**Pregunta 4**

En el análisis de la pregunta 4 se obtuvo un índice de dificultad promedio de 0.35, esta servirá para evaluar el conocimiento común del contendido, ya que debe construir el modelo de una función de tercer grado, calcular el área bajo la curva, se encuentran *dificultades* en la construcción del modelo del gráfico, esta tarea obedece al *ítem a*, este ítem fue respondido por 12 estudiantes correctamente (36%), un error presentado es tomar el modelo matemático como función coseno ($f(x) = cosx$). En el *ítem b* debido a que no encuentran el modelo no pueden calcular el área de la integral, de igual manera entre los que respondieron este ítem se encuentran *errores* en el cálculo de las integrales. El ítem c trata sobre la propiedad de no negatividad del área, puesto que el área al ser la función simétrica esta da como resultado 0. Este último ítem arrojo una dificultad de 0.4 ya que solo fue respondida correctamente por 13 personas. A continuación, se videncia las respuestas correctas y aproximadas a cada literal por parte de dos estudiantes.

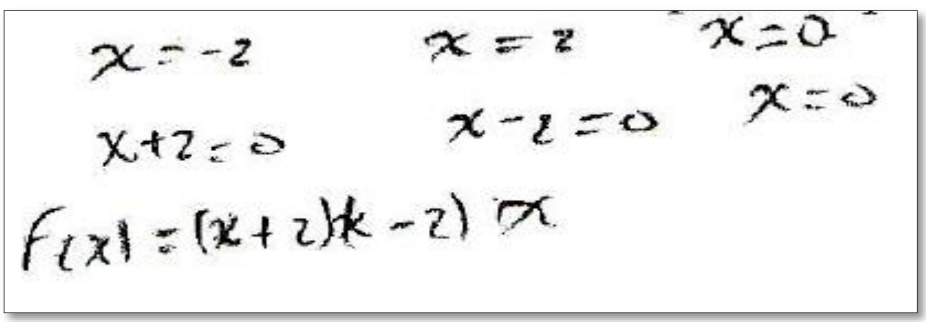



Figura 5.9: Respuesta E9 grupo 2 al ítem *a*, pregunta 4

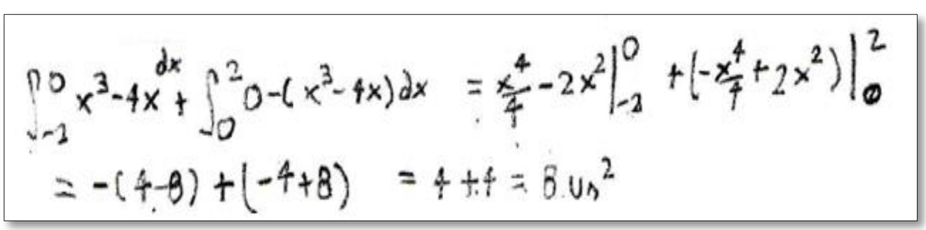


Figura 5.10: Respuesta E3 grupo 1 al ítem b, pregunta 4

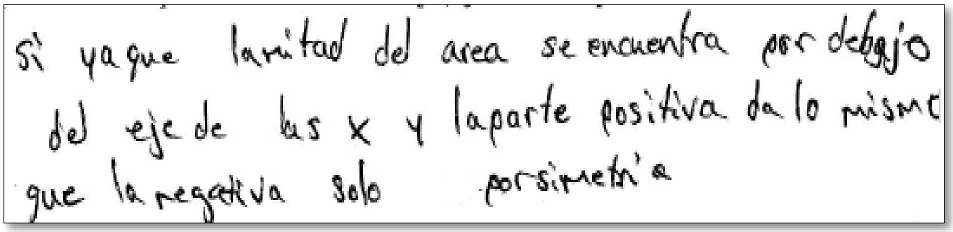



Figura 5.11: Respuesta E8 grupo 2 al ítem *c*, pregunta 4

## Pregunta 5

En el análisis de la pregunta 5 se evidencia que esta tuvo un índice de dificultad promedio de 0.6 clasificándola en una dificulta media, y servirá para evaluar el conocimiento común (integral definida) y ampliado del contenido (integral impropia, propiedades de la integral), al evaluar el área bajo una curva en una curva discontinua. En esta se evidencio *dificultades* en la continuidad de la función al momento de determinar el área, el 18% tuvo dificultades en el bosquejo de la gráfica. *Errores* como integrar la función de forma directa sin observar la discontinuidad en el punto $x = 0$. Se muestra una solución aproximada hecha por los estudiantes a cada ítem.

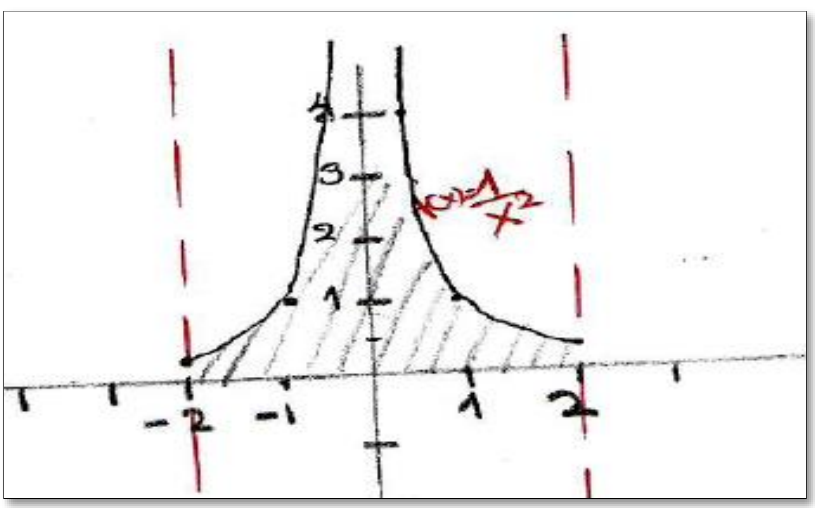



Figura 5.12: Respuesta E5 grupo 1 al ítem *a*, pregunta 5

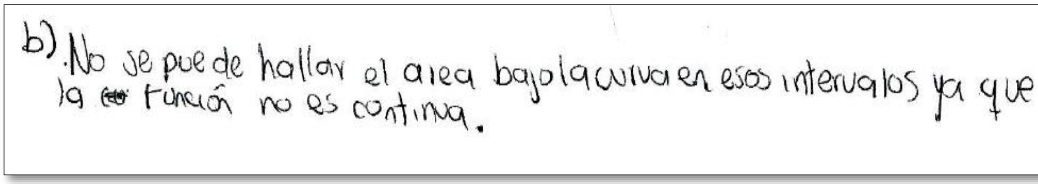



Figura 5.13: Respuesta E5 grupo 1 al ítem *b*, pregunta 5

**Pregunta 6**

En el análisis de la pregunta 6, esta tuvo una dificultad de medio difícil con un índice promedio de 0.16, la cual servirá para evaluar el conocimiento ampliado del contenido en un contexto físico, donde se interpreta la distancia como el área bajo la curva; por lo que se podría decir que los grupos de estudiantes, tienen un conocimiento matemático ampliado bajo. Entre las respuestas se identifican *errores* como asimilar el trazo de la función como la distancia recorrida, además existen *dificultades* en la determinación de las ecuaciones asociadas al movimiento, determinar la integral definida del movimiento para cada trayecto, se resalta que entre los que respondieron correctamente el 85,7% lo realizan utilizando la ecuación física $v = \frac{x}{t}$, a continuación se presenta la solución propuesta asociada al Cálculo Integral hecha por el estudiante E8 del grupo 2.

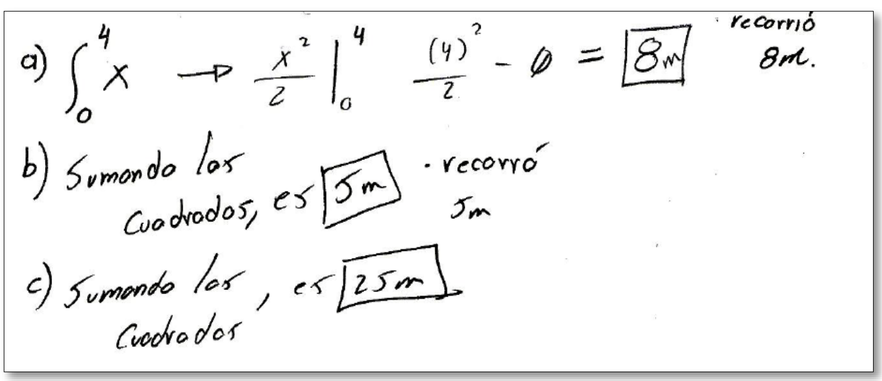



Figura 5.14: Respuesta E8 grupo 2 a la pregunta 6

**Pregunta 7**

En la pregunta siete se encuentra un índice de dificultad promedio de 0.07, ya que esta fue respuesta solo por dos estudiantes de los dos grupos, se interpreta que los estudiantes tuvieron *dificultad* en generar un modelo matemático asociado al vaciado de tanques, la relación existente con el Cálculo Integral y el trabajo mecánico.  A continuación, se muestra una solución aproximada de la tarea por parte de un estudiante (E3 grupo2).

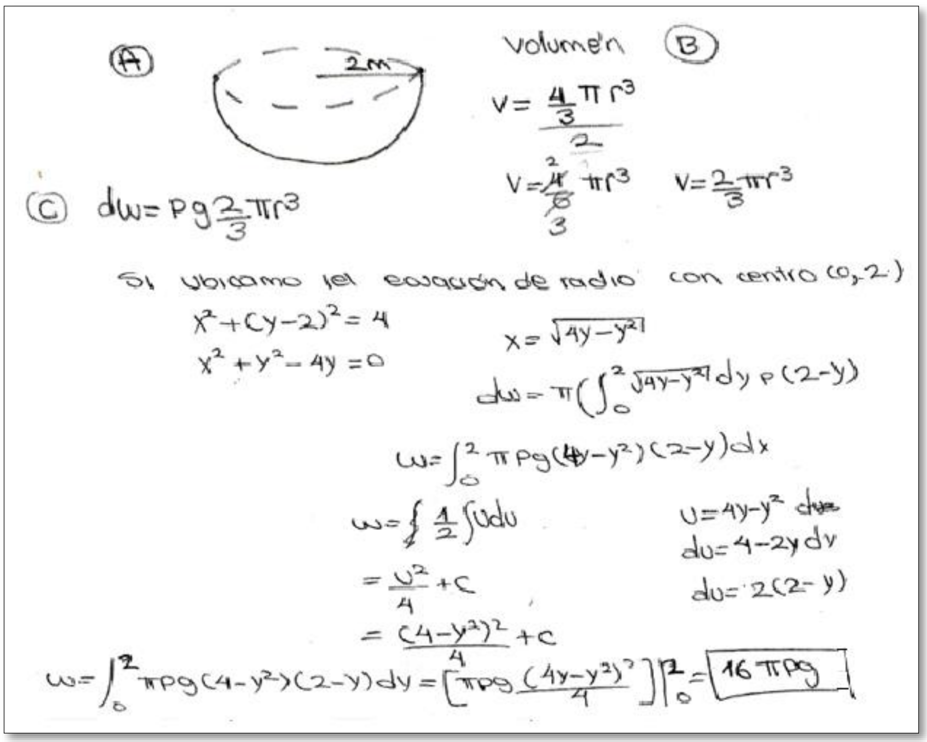



Figura 5.15: Respuesta E3 grupo 2 a la pregunta 7

**Pregunta 8**

La pregunta 8 servirá para evaluar el Conocimiento Ampliado del Contenido al transversalizar la integral indefinida como el proceso inverso de las magnitudes fundamentales de la cinemática (distancia, velocidad, aceleración) asociadas a un Movimiento Armónico Simple, en esta pregunta se encuentra un índice de dificultad promedio de 0.14, lo cual la ubica en una dificultad de la pregunta de un nivel medio difícil, ya que fue respondida parcialmente por el 13% de los estudiantes, lo cual puede establecer un bajo conocimiento ampliado del contenido matemático en el grupo de estudiantes, en este se encuentran *dificultades* como: interpretar la velocidad como la integral indefinida de la aceleración y a su vez la distancia como la integral de la velocidad se identifican *errores* al operar la tarea como un ejercicio de aplicación de ecuaciones, como utilizar la noción de derivada como la operación que permite determinar la distancia, la sustitución del valor del tiempo en la ecuación de aceleración propuesto. A continuación, se evidencia una respuesta parcial de la correcta solución propuesta por el estudiante E5 grupo 2.

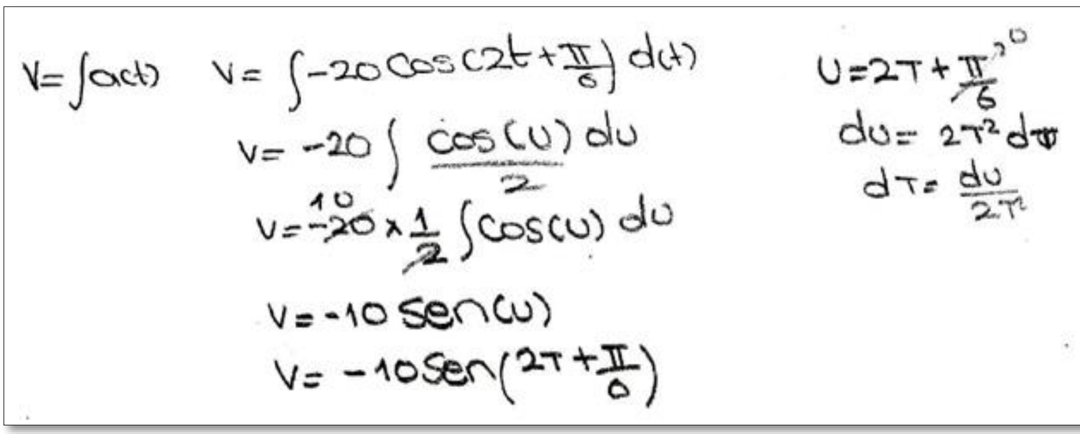


Figura 5.16: Respuesta E5 grupo 2 a la pregunta 8

**Pregunta 9**

La pregunta 9 servirá para evaluar el conocimiento común del contenido al desarrollar la tarea del *ítem a* propuesta, servirá para evaluar el conocimiento ampliado del contenido al desarrollar el *ítem b*, en el momento que relaciona el objeto integral con la parte física de un movimiento constante, para esto se puede definir que los estudiantes se encontraron con un índice de pregunta de 0.56 y 0.57, respectivamente para cada ítem, se puede decir que estos tienen un nivel medio de conocimiento común y ampliado del contenido, en lo que refiere a *dificultades* se presenta: el trazo del grafico en función de las variables distancia vs tiempo, memorización de fórmulas físicas asociadas al movimiento, en cuanto *errores* se visualiza el tratamiento incorrecto de unidades, y sistemas decimales a sexagesimales. A continuación, se presentada una propuesta de solución aproximada al conocimiento común del contenido propuesta por un estudiante E13 del grupo 1.

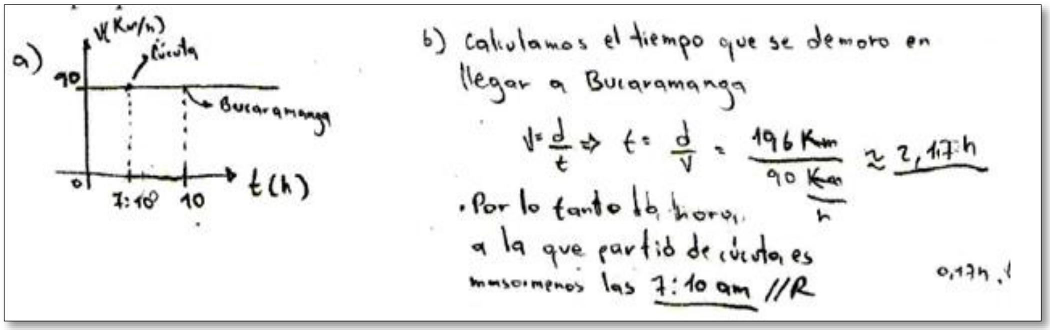



Figura 5.17: Respuesta E13 grupo 1 a la pregunta 9

**Pregunta 10**

En el análisis de la pregunta 10 se encuentra en un índice de dificultad de 0.51 ubicándola en una dificultad media; esta pregunta servirá para evaluar el conocimiento común del contenido al resolver la tarea de graficar, encontrar intercepto y encontrar el área entre curvas. Se puede interpretar que el 51 % los estudiantes, poseen un conocimiento común del contenido ya que esta fue respuesta parcialmente por 12 estudiantes, en las *dificultades* se presentan el trazo de algunos bosquejos, en el cálculo del área entre curvas, entre los errores se identifican los procesos de cálculo de intercepto, solución de integrales. A continuación, se plantea una aproximación a la solución propuesta por un estudiante

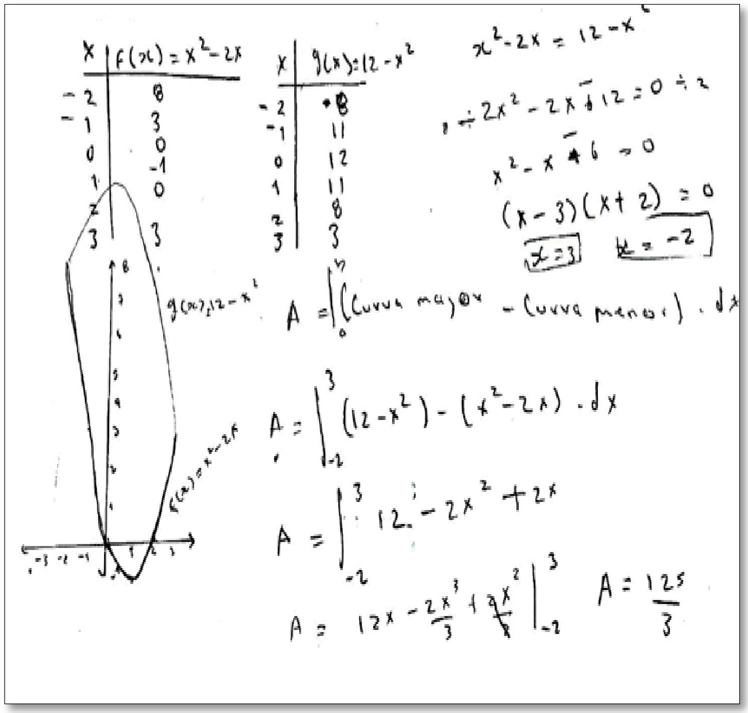



Figura 5.18: Respuesta E3 grupo 1 a la pregunta 10

**Pregunta 11**

La pregunta 11 servirá para evaluar los conocimientos, común y ampliados del contenido, esta se categorizo con una dificultad media con un índice de 0.5, y se podría interpretar que, el 63 % de los estudiantes tienen un conocimiento común del contenido matemático y un 37% de los estudiantes con conocimiento ampliado del contenido, ya que la tarea consiste en graficar el sólido de revolución, y determinar el volumen asociado a este. En cuanto a *dificultades,* en la solución del sólido de revolución no definen un método para encontrar el volumen, la construcción del sólido, y los *errores* presentados, están al considerar el método de arandelas como solución al volumen de este, la rotación del eje de revolución en el cálculo de la integral. Se describe una solución propuesta a la tarea por un estudiante.

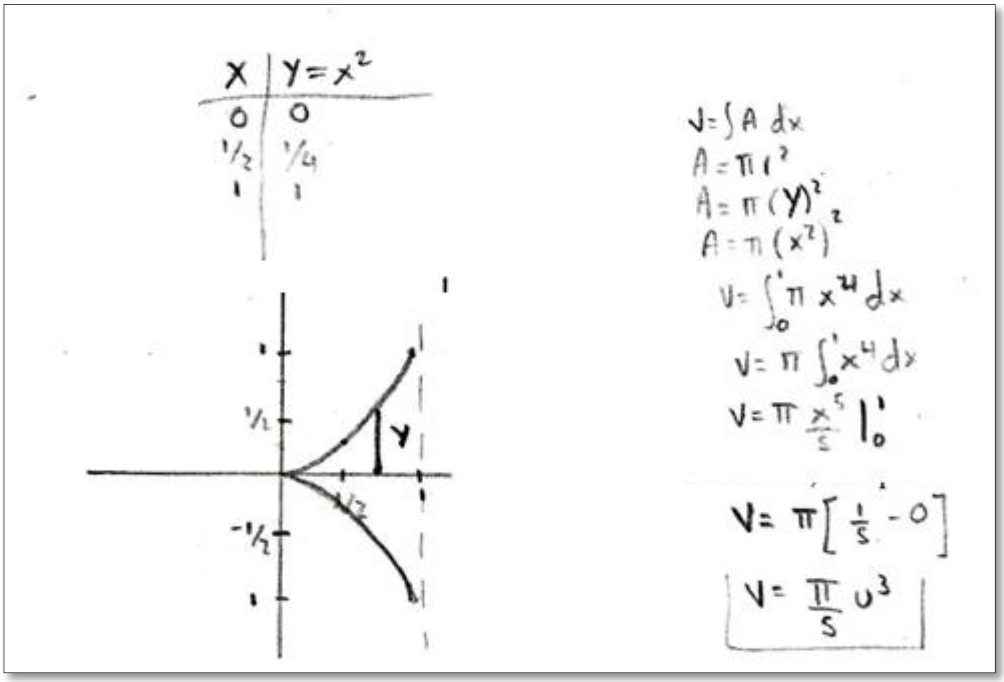


Figura 5.19: Respuesta E3 grupo 2 a la pregunta 11

**Pregunta 12**

La pregunta 12 servirá para evaluar los conocimientos común y ampliado del contenido, esta arrojo un índice de dificultad promedio de 0.2 por lo que se categoriza en una dificultad medio difícil, ya que se busca argumentar desde el Cálculo Integral la demostración del volumen de una esfera, esta pregunta fue respondida por 7 estudiantes, *se puede observar en este aspecto, aunque no sean profesores que poseen u*n bajo conocimiento común y ampliado puesto que; los estudiantes presentan dificultades en la transposición de sólidos a un plano, la vista de un corte lateral para identificar el volumen de un sólido en revolución.

A continuación, se presenta una respuesta parcial presentada por un estudiante (E8 grupo2) promedio que ha tenido sus respuestas correctas.

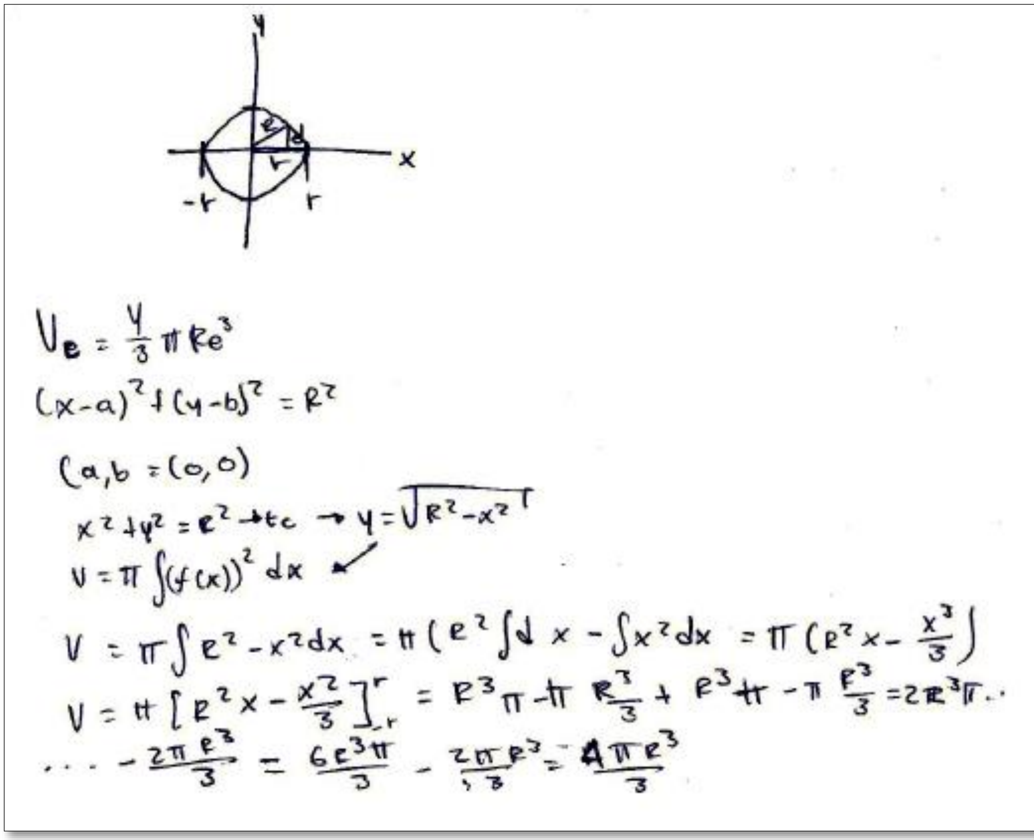



Figura 5.20: Respuesta E8 grupo 2 a la pregunta 12

**Pregunta 13**

En la pregunta 13 se encuentra un índice de dificultad de 0, denotando el nivel máximo de dificultad ya que esta no fue respondida por los estudiantes de los dos grupos, esta pregunta servirá para evaluar el CAC, en este aspecto se podría categorizar a los estudiantes con un bajo concomimiento ampliado del contenido, se interpreta que los estudiantes tuvieron *dificultad* en generar un modelo matemático asociado a modelar el cuerpo que genera un túnel parabólico, de igual manera en encontrar la longitud de arco correspondiente al modelo parabólico.

**Pregunta 14**

En la pregunta 14 se encuentra un índice de dificultad de 0, denotando el nivel máximo de dificultad ya que esta no fue respondida por los estudiantes de los dos grupos, esta pregunta servirá para evaluar el CAC y en este sentido se puede categorizar a los estudiantes con un bajo conocimiento ampliado del contenido, se interpreta que los estudiantes tuvieron *dificultad* interpretar el teorema fundamental del cálculo cuando los límites son dos funciones, el lenguaje formal utilizado en la propuesta de la tarea, fue poco conocido por estos.

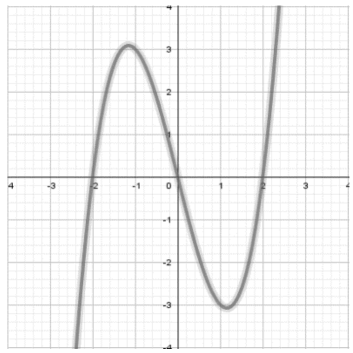
### 5.2.6 Versión final del cuestionario CDM integral

A partir de las respuestas dadas por los estudiantes en la prueba piloto, se observaron algunos aspectos importantes en la construcción del cuestionario CDM-Integral como: el tiempo de aplicación de la prueba piloto fue insuficiente para las 14 preguntas, luego bajo los índices de dificultad presentados se procede a eliminar algunas preguntas y sustituir los ítems donde se presenta gran dificultad, se reorganiza el orden del cuestionario para visualizar si el factor tiempo es causal de la no respuesta a tales preguntas.

Se muestran las tareas de la versión piloto y las tareas definitivas, luego de los análisis cualitativos y cuantitativos teniendo en cuenta el juicio de expertos en matemáticas y Cálculo Integral. Estas tareas tienen como objetivo caracterizar la dimensión epistémica del modelo CDM de profesor, es decir especifican que tareas debería poder realizar el profesor respecto a un conocimiento común y uno ampliado que al igual lo tienen todos los profesionales ya que en nuestro contexto colombiano cualquier profesional puede ser docente tanto en educación básica y media como en la educación superior.

## Tarea antigua

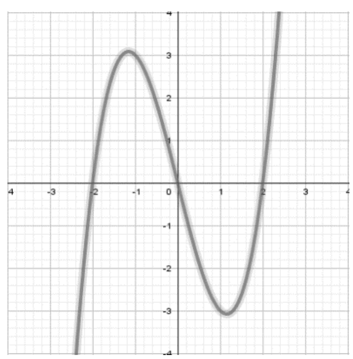
**Tarea 4.** Dada la siguiente gráfica,



a) Halle la función, sabiendo que esta pertenece a una función de tercer grado.
b) Calcule el área bajo la curva en el intervalo [-2,2]
c) Es posible afirmar que el área en el intervalo [-2,2] es 0. Justifique

## Tarea reformulada

**Tarea 8.** Dada la siguiente gráfica,



a) La función del grafico es $x^3 - 4x$. Justifique
b) Calcule el área bajo la curva en el intervalo [-2,2]
c) Bajo que propiedad no se puede garantizar que el área en el intervalo [-2,2] es 0. Justifique

**Tarea antigua**

**Tarea 7**

a) Realice el modelo gráfico y matemático de un tanque semiesférico lleno de agua, si el radio mide 2 m.
b) A partir del modelo matemático defina el cilindro genérico
c) Encuentre el trabajo que se requiere para bombear el agua. (Pista: diferencial de trabajo: $dW = \rho\, g\, V_{cil}$)
d) ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?

**Tarea que se cambia por**

**Tarea10.** Un módulo espacial pesa 15 toneladas métricas en la superficie de la Tierra. (Considerar 4 000 millas como el radio de la Tierra. Omitir el efecto de resistencia al aire o el peso del combustible.)


a) ¿Halle el valor de la constante de proporcionalidad es?
b) ¿Cuánto trabajo es necesario para propulsar el módulo a una altura de 800 millas sobre la Tierra, como se muestra en la figura
c) ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?
d) Que dificultades encontró en la solución de la presente tarea.

La tarea se seleccionó del texto "Cálculo de una variable de Ron Larson" (Mc Graw Hill, 2010), en el capítulo 7, correspondiente a la lección: Trabajo y permite explorar el significado parcial de Trabajo del objeto Integral, atendiendo a las sugerencias de los expertos en la relación con otros contextos, y al bajo índice de dificultad en las respuestas propuestas por los estudiantes.

**Solución a la tarea**

a) Porque el peso de un cuerpo varía inversamente al cuadrado de su distancia del centro de la Tierra, la fuerza $F(x)$ ejercida por la gravedad es

$$F(x) = \frac{C}{x^2} = \frac{C}{(4000)^2}$$
$$15 = C/(4000)^2$$
$$C = 240000000$$

b) Así el incremento es $dW = (Fuerza)(incremento\ de\ distancia)$

$$dW = \frac{240000000}{x^2}\Delta x$$

Este se propulsa desde el exterior de la tierra hasta la superficie deseada. Es decir, de 4000 a 4800 millas al centro de la tierra

Entonces el trabajo ejercido es igual a:

$$W = \int_a^b F(x) = \int_{4000}^{4800} \frac{240000000}{x^2} dx =$$

$$= -\frac{240000000}{x}\Bigg|_{4000}^{4800} = -50000 + 60000 = 10000\ milla/ton$$

$$W = 1{,}164\ \times 10^{11}\frac{lib}{pie} = 1{,}578\ Joules$$

c) Trabajo, integral definida, ley de la gravedad, unidades en C.G.S y S.I

**Tarea antigua**

**Tarea 12.** A partir de una circunferencia de radio r

a) Grafique una esfera en un plano cartesiano
b) Demuestre porque $A = \pi . y^2$ es un corte transversal de la esfera graficada en el punto anterior
c) Demuestre que el volumen de una esfera de radio r es:

$$V = \frac{4}{3}\ \pi r^3$$

d) ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?

**Tarea reformulada**

**Tarea 4.** A partir de una circunferencia de radio r

a) Grafique una esfera en un plano cartesiano
b) Demuestre que el volumen de una esfera de radio r es:

$$V = \frac{4}{3}\,\pi r^3$$

c) ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?

Se presenta la tabla 5.22 la distribución de las tareas del cuestionario final, luego de los análisis detallados respecto al juicio de expertos, criterio de investigación y revisión de los resultados de la prueba piloto.

Estas tareas se organizaron de tal forma que se las respuestas que no se alcanzaron analizar por el tiempo de la prueba, y a partir de los subitems en busca de claridad y tratando de simplificar las tareas del cuestionario para adecuarlas a un tiempo de dos sesiones de dos horas.

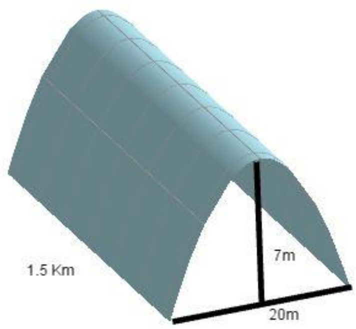
Tabla 5.22
*Organización de tareas del cuestionario CDM- Integral*

| Tarea nueva | Tarea Antigua | Tarea nueva | Tarea Antigua |
|---|---|---|---|
| 1 | 13 | 8 | 4 |
| 2 | 14 | 9 | 6 |
| 3 | 1 | 10 | 7 (se cambia) |
| 4 | 12 | 11 | 8 |
| 5 | 2 | 12 | 9 |
| 6 | 3 | 13 | 10 |
| 7 | 5 | 14 | 11 |

**Nota.** Descripción de la organización de preguntas en el cuestionario CDM- integral versión final.

**Cuestionario CDM-Integral**

1. Una empresa de Ingeniería se ofrece a construir un túnel, como muestra la figura.



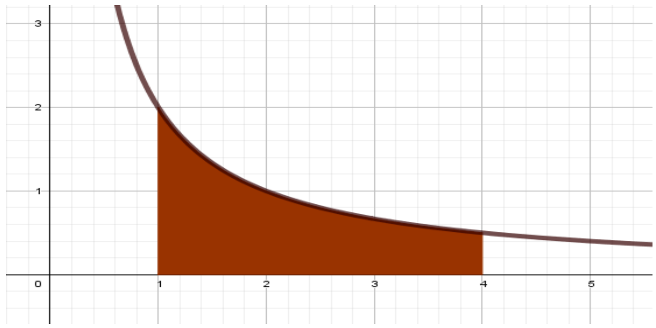

a. ¿Qué cantidad de material debe extraerse para construir el túnel?
b. La parte superior del túnel se tratará con un sellador impermeable que tiene un costo de 5000 COP por metro cuadrado. ¿Cuál es el costo total de la aplicación del sellador?
c. ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?

2. Se definen las funciones $f, h: R \to R$, así:

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}, \qquad h(x) = \int_{cos2x}^{x^4} t^2 f(t)dt$$

a. Calcular $h´(t)$
b. Que elementos son necesarios para aplicar el teorema fundamental del cálculo
c. ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?
d. ¿Si tiene alguna dificultad con cada ítem del ejercicio desde las matemáticas, indique el por qué?

3. De acuerdo con la imagen:




a. Se puede afirmar que el área de la región sombreada es mayor que una unidad cuadrada y menor igual a tres unidades cuadradas. Justifique
b. Se puede hallar el valor del área de la región sombreada en forma más exacta. ¿Cómo? ¿Cuál sería el valor? Justifique

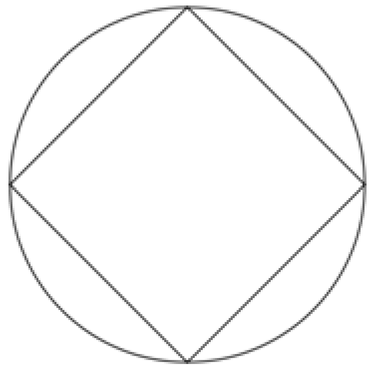
4. A partir de una circunferencia de radio r

a. Grafique una esfera en un plano cartesiano
b. Demuestre que el volumen de una esfera de radio r es:

$$V = \frac{4}{3}\,\pi r^3$$

c. ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?

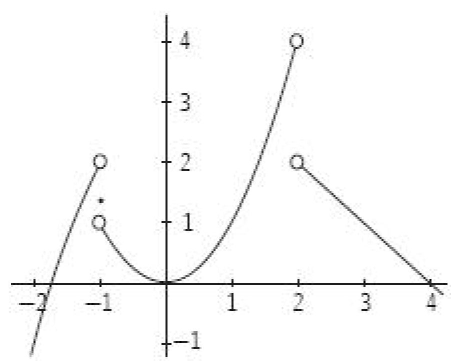
5. Según la figura:



a. Es posible afirmar que el área del cuadrado es mayor a la mitad del área del círculo. Justifique
b. Si se duplica el número de lados al polígono inscrito. ¿el área de este nuevo polígono cubre o sobrepasa el área del círculo? Justifique
c. Se podría afirmar alguna relación entre las áreas de los polígonos que se generan y el área del círculo. Justifique su respuesta

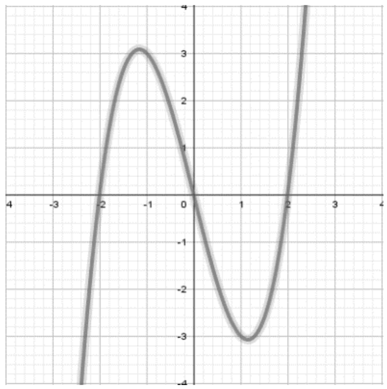
6. Dada la función

$$f(x)\begin{cases} -x^2+3 & x<-1 \\ 1.36 & x=-1 \\ x^2 & -1<x<2 \\ -x+4 & x>2 \end{cases}$$




a. Calcula, en caso que sea posible, el área de la región limitada por la curva en el intervalo [-2, 3].
b. Si es posible, estima el valor de la integral definida en el intervalo [-2, 3]. Si no es posible, explica por qué.

7. Dada la siguiente gráfica,



a. La función del grafico es $x^3 - 4x$. Justifique
b. Calcule el área bajo la curva en el intervalo [-2,2]
c. Bajo que propiedad no se puede garantizar que el área en el intervalo [-2,2] es 0. Justifique

8. Un módulo espacial pesa 15 toneladas métricas en la superficie de la Tierra. (Considerar 4 000 millas como el radio de la Tierra. Omitir el efecto de resistencia al aire o el peso del combustible.)

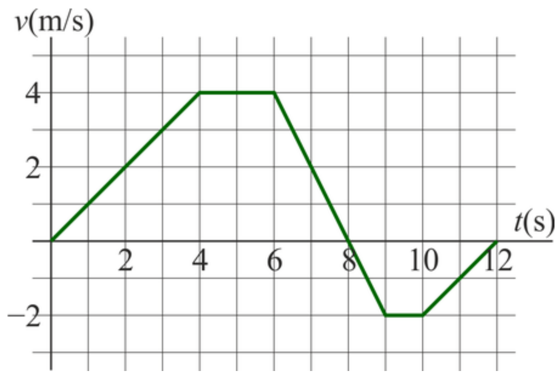

a. ¿Halle el valor de la constante de proporcionalidad es?
b. ¿Cuánto trabajo es necesario para propulsar el módulo a una altura de 800 millas sobre la Tierra, como se muestra en la figura
c. ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a esta tarea?
d. Que dificultades encontró en la solución de la presente tarea.

9. Dada la función

$$f(x) = 1/x^2,$$

a. Realice la gráfica de la función.
b. Halle el área bajo la curva en el intervalo [-2,2]. Justifique su respuesta.
c. ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?

10. La siguiente gráfica corresponde al movimiento de un objeto en un tiempo. Determine la respuesta en cada caso.




a. ¿Cuál es la distancia recorrida por el objeto entre 0 y 4s?
b. ¿Cuál es la distancia recorrida por el objeto entre 8 y 12s?
c. ¿Cuál es la distancia total recorrida por el objeto?
d. ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?

11. Una partícula oscila con un movimiento armónico simple, de tal forma que su aceleración varía de acuerdo con la expresión $a(t) = -20\ cos(2t + \pi\ /6)$ . Donde la distancia se mide en cm y el tiempo en s. encuentre:
a. La función de desplazamiento
b. La distancia recorrida en t=4s
c. ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?

12. Un coche viaja de Cúcuta a Tunja a una velocidad constante de 90 km/h, a las 10 am pasó por Bucaramanga, la cual está ubicada a 196 km de Cúcuta
a. Realice un gráfico de velocidad vs tiempo y aproxime el paso por Cúcuta.

b. ¿A qué hora partió de Cúcuta?
c. Es necesario el uso del Cálculo Integral. Justifique su respuesta
d. ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?

13. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 12 - x^2$.
a. Realice la gráfica de las funciones
b. Determine los puntos de intersección de las funciones
c. Determine el área comprendida entre las funciones
d. ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?

14. Dada la función $y = x^2$
a. Grafique el sólido que se forma al g al girar en torno al eje x la parábola en el intervalo [0, 1].
b. Determine el volumen del sólido anterior.
c. ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los estudiantes para dar solución correcta a este problema?

# Capítulo 6. Tercer resultado: Caracterización de la Dimensión cognitiva y epistémica del CDM del profesor

*"El educador es el hombre que hace que las cosas difíciles parezcan fáciles"*

*Waldo Emerson*

En el presente capítulo se describe el resultado correspondiente a la caracterización de la dimensión epistémica y cognitiva del modelo del Conocimiento Didáctico Matemático -CDM- del profesor de Cálculo Integral o del futuro profesor según la línea de investigación en formación inicial de profesores desde donde se aborda el presente estudio y como respuesta al cumplimiento del objetivo general propuesto según el modelo propuesto por Pino-Fan y Godino (2015). En el capítulo anterior, se analizó cuantitativamente y cualitativamente, el cuestionario CDM-Integral, bajo la variable "grado de corrección de las respuestas" de esta forma se estudió la distribución de puntuaciones totales y el índice de dificultades de los subitems al igual que los aspectos relacionados con la caracterización de las tareas relacionadas con el objeto Integral (dimensión epistémica) que tienen como objetivo convertirse en un instrumento para evaluar el Conocimiento del contenido matemático del profesor. En este capítulo se describen los errores y dificultades de los estudiantes con el objeto integral. Por tanto, en este apartado se presenta en forma clara la caracterización de las Dimensiones epistémica y cognitiva para el modelo CDM del conocimiento del profesor (lo que incluye futuro profesor).

En este sentido, se caracteriza dos de las dimensiones propuestas en el modelo CDM estructuradas desde la dimensión matemática y la dimensión didáctica, dentro de la cual se encuentra el conocimiento especializado del contenido matemático que no fue objeto de investigación del presente estudio.

La dimensión epistémica, se compone de los conocimientos CCC, CAC para el objeto integral considerados necesarios en la enseñanza idónea. En este sentido, se toma la relación presentada por Rojas y Flores (2011), en cuanto al conocimiento matemático para la enseñanza y su relación con los análisis didácticos abordados como se muestra en la figura 6.1, donde se establecen los componentes para llegar a la caracterización del CDM de profesor para el objeto Integral. En la caracterización de la *dimensión epistémica* del conocimiento del profesor, es fuente de información el estudio histórico epistemológico y fenomenológico descrito en el capítulo 4, y el análisis a los libros de texto, en cuanto al estudio de los significados dados a la integral y para categorizar la *dimensión cognitiva* fue necesario construir un instrumento que permitiera determinar las dificultades y errores presentados por los estudiantes al solucionar situaciones propuestas del objeto integral el cual corresponde al cuestionario piloto aplicado a los estudiantes y al igual este instrumento sirvió para identificar y validar las tareas propias del CCC y CAC presentándose este cuestionario como un instrumento que tiene muchas aplicaciones entre ellas la de evaluar el conocimiento de los profesores de Cálculo integral, aspecto que no se consideró en la tesis ya que este estudio presenta varias líneas abiertas de investigación, entre ellas la mencionada. Los estudios realizados en la investigación se encuentran relacionados con el Conocimiento del profesor, como se presenta en la figura 6.1.

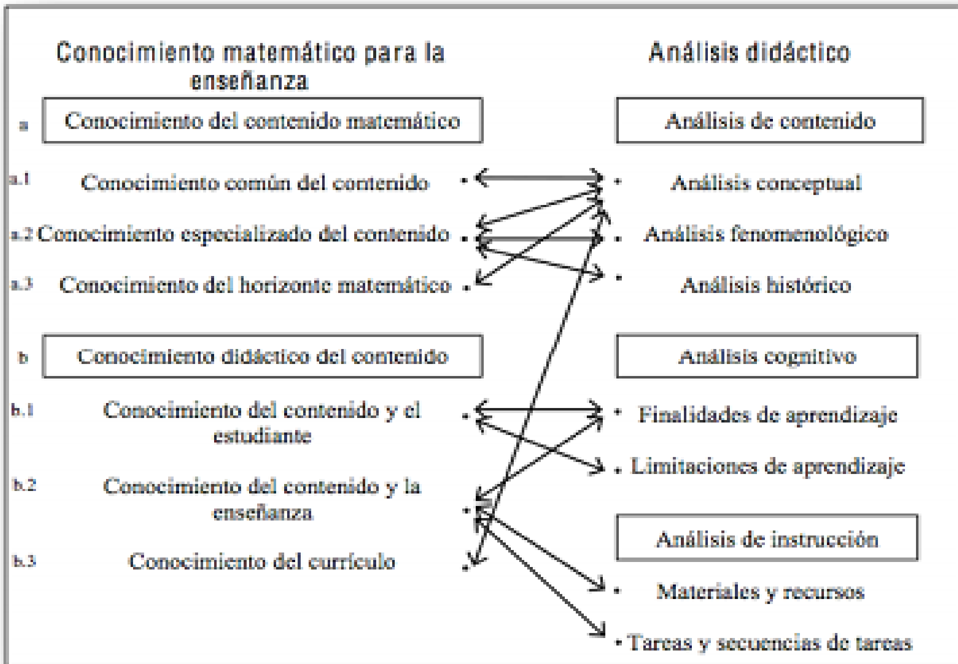



Figura 6.1 Conocimiento para la enseñanza y Análisis didáctico Fuente: (Rojas y Flores 2011 p.22)

En esta dirección, se caracterizan la dimensión epistémica y cognitiva, con el objetivo de brindar herramientas a los estudiantes de formación matemática para su labor de enseñanza en tópicos relacionados con cálculo integral desde la perspectiva del CCC y CAC, al tener presente que ya en algunas instituciones educativas en grado 11 se enseñan tópicos de Cálculo Integral en un nivel menor al de la universidad, pero es necesario manipular este objeto matemático.

### 6.1 El Conocimiento Didáctico Matemático del estudiante de formación matemática

Para Pino-Fan y Godino (2015) el Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) interpreta y caracteriza los conocimientos del profesor o del futuro profesor a partir de tres dimensiones: dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión meta didáctico-matemática. La dimensión matemática del CDM se relaciona con el conocimiento del profesor sobre el contenido matemático, y se estructura a partir de las dos subcategorías: conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido (Figura 2.7). En este apartado se analiza y caracteriza la dimensión epistémica del CDM del profesor de cálculo integral, enmarcada en la dimensión didáctica del modelo del CDM, propuesto en el enfoque EOS, como el conjunto de conocimientos que necesitan los estudiantes de formación en Matemática (futuros profesores) o en general el profesor de tópicos de cálculo integral; conocimientos considerados; necesarios para la enseñanza idónea del Cálculo Integral. Por tanto, se establece esta primera propuesta de caracterización utilizando el instrumento CDM- Integral, en relación con las tareas propias del contenido matemático que debe trabajar el profesor o el futuro profesor de cálculo integral (Godino, 2009). De esta forma el instrumento analiza aspectos de la faceta epistémica para la caracterización del CCC, y CAC del objeto integral, y buscando evidenciar las dificultades y errores de los estudiantes al resolver situaciones problemas relacionadas con la integral, lo cual da la información para caracterizar la dimensión cognitiva.

## 6.2 Caracterización de la dimensión cognitiva del CDM del profesor en el objeto integral

En la sección 5.2.5 se presenta el análisis cualitativo y cuantitativo de las preguntas del cuestionario CDM-Integral, el cual aporta información para el estudio de la dimensión cognitiva en cuanto a las dificultades y errores presentados por los estudiantes. En la tabla 6.1 se relacionan las dificultades y errores presentados por los estudiantes de ingeniería, los cuales constituyen una parte importante al estudio de la dimensión cognitiva del objeto integral. Esta información la debe conocer el profesor al momento de diseñar su clase o una situación didáctica que se sugiere se tome del estudio epistemológico-histórico, buscando la comprensión de los objetos del cálculo Integral.

Tabla 6.1
*Dimensión Cognitiva*

| Dimensión Cognitiva | | |
|---|---|---|
| Pregunta | Dificultades | Errores |
| 1 | • Encontrar el área bajo la curva, donde esta carece de una expresión algebraica.<br>• Encontrar exactitud en el área al utilizar el inscribir polígonos<br>• Determinar el ancho de los rectángulos inscritos bajo la curva<br>• Determinar el área de la región de una forma más exacta<br>• Identificar un método de solución para la tarea, pero no recordar el algoritmo | • Definir una expresión algebraica para el trazo de la función<br>• Asociar la integral definida para una expresión algebraica particular |
| 2. | • Generalizar las ecuaciones de área para el cuadrado y el círculo.<br>• Probar conjeturas en la relación de las áreas del cuadrado y el círculo.<br>• Argumentar la relación del área del cuadrado con el área del círculo<br>• No recordar el algoritmo para hallar el área de un polígono regular superior a 5 lados. | • Generalizar la tarea con un radio particular<br>• Confundir diámetro con radio de un círculo.<br>• Tomar el lado del cuadrado inscrito como un radio del círculo<br>• Tomar el sentido visual para comparar áreas<br>• Confundir la ecuación de área con la de perímetro |

**Nota.** Descripción de la Dimensión cognitiva de los estudiantes

Tabla 6.1 (Continuación)
*Dimensión Cognitiva*

| Dimensión Cognitiva | | |
|---|---|---|
| Pregunta | Dificultades | Errores |
| 3 | • No identificar el acotamiento de la función lo cual permite evaluar la integral definida en la función a trozos.<br>• Argumentar la solución propuesta en el primer ítem | • Definir el área para un punto<br>• Definir que la tarea no tiene solución por encontrarse en un intervalo abierto<br>• Calcular erróneamente el algoritmo de la integral |
| 4 | • Definir el modelo matemático asociado a un polinomio de tercer grado<br>• Necesidad a una expresión algebraica para aplicar un procedimiento en el cálculo del área | • Identificar la función como la función $f(x) = cosx, f(x) = sen\ x$<br>• Calcular erróneamente el algoritmo de la integral<br>• Omitir la propiedad de no negatividad para el área bajo el eje x |
| 5 | • Determinar la convergencia de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$.<br>• Hacer una aproximación al trazo de la figura | • Aplicar el algoritmo de la integral definida a la función $f(x) = 1/x^2$ |
| 6 | • Asociar la distancia como área bajo la curva de velocidad (contexto físico)<br>• Identificar expresiones algebraicas para determinar el área a través de una integral | • Identificar el trazo de la gráfica como la distancia |
| 7 | • Identificar un modelo geométrico relativo a media esfera en el plano cartesiano<br>• Generar un modelo matemático asociado al vaciado de tanques<br>• Identificar el trabajo como una aplicación del cálculo integral | |
| 8 | • Relacionar la integral indefinida como el proceso inverso de las magnitudes fundamentales de la cinemática (distancia, velocidad, aceleración) en un Movimiento Armónico Simple | • Operar la tarea como un ejercicio de aplicación de ecuaciones<br>• Utilizar la noción de derivada como la operación que permite determinar la distancia<br>• Calcular erróneamente el algoritmo de la Integral asociada al movimiento |

**Nota.** Descripción de la Dimensión cognitiva de los estudiantes

Tabla 6.1 (Continuación)
*Dimensión Cognitiva*

| Dimensión Cognitiva | | |
|---|---|---|
| Pregunta | Dificultades | Errores |
| 9 | • Trazar un gráfico que permite evidenciar el planteamiento de la tarea<br>• Definir una integral para el movimiento<br>• Definir como único método de solución las ecuaciones físicas para movimiento, pero no recordar cómo es cada una | • Mal uso de las unidades sexagesimales<br>• Conversión de unidades |
| 10 | • Trazar el grafico de las funciones<br>• Encontrar los interceptos de las funciones mediante algún sistema de ecuaciones<br>• Determinar el área encerrada en las curvas | • Determinar los interceptos de las curvas<br>• Operar inadecuadamente el algoritmo de la integral |
| 11 | • Realizar el gráfico de un sólido de revolución sobre el eje X<br>• Determinar un método para encontrar el volumen de un sólido de revolución | • Encontrar el volumen utilizando el método de arandelas<br>• Girar el sólido en torno al eje Y |
| 12 | • Reconocer un método que lleve a demostrar el volumen de una esfera a partir del área superficial<br>• Trasponer un sólido en el trazo sobre un plano cartesiano | |
| 13 | • Generar un modelo matemático asociado a modelar el cuerpo que genera un túnel parabólico<br>• Visualizar la longitud de arco como una aplicación del cálculo integral | |
| 14 | • Interpretar el teorema fundamental del cálculo cuando los límites son dos funciones<br>• Comprender el lenguaje matemático | |

**Nota.** Descripción de la Dimensión cognitiva de los estudiantes

### 6.3 La dimensión epistémica en el modelo CDM del futuro profesor para el objeto integral

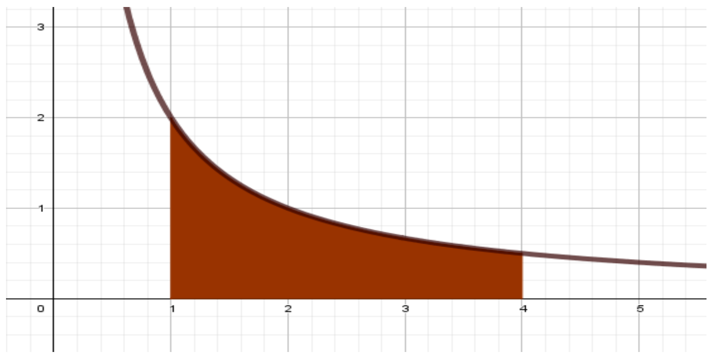
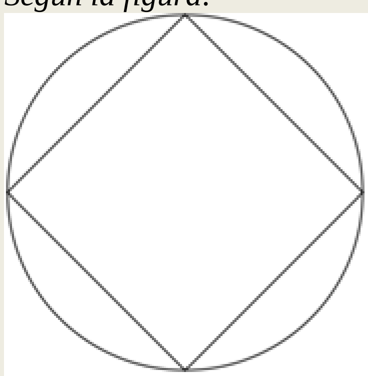
En la caracterización de la dimensión epistémica se establece desde el análisis al CCC y CAC del objeto integral; es decir, se clarifica el conocimiento común y el conocimiento ampliado que debe poseer el profesor de cálculo integral para una enseñanza idónea y desde la propuesta de las tareas propias para cada conocimiento. Por tanto, para esta primera aproximación se presentan en la Tabla 5.13 las tareas que incluyen los significados de referencia emergentes del estudio histórico epistemológico y del análisis a los libros de texto. Estas tareas se condensan en el cuestionario CDM-Integral, y se parte del fundamento de que esta dimensión aporta al futuro profesor o al profesor en ejercicio en la constitución de un conocimiento común, ampliado para su puesta en acción en su práctica (Pino, 2015).

#### 6.3.1 Conocimiento común del contenido

Para Pino (2015), el CCC se encuentra dentro de la dimensión matemática del conocimiento y obedece a los tipos de conocimiento que cualquier profesional que ha tomado un curso de cálculo integral puede solucionar. Para caracterizar las tareas propias del conocimiento común del contenido de los profesores o futuros profesores, se diseñaron los subitem (ver tabla 5.13); **1a, 2b, 3a, 4a, 4b, 5a, 7a, 8b, 9a, 10a, 10b, 10c, 11a, 11b, y 12a,** los cuales corresponden al 44% de los ítems planteados en el cuestionario (33 en total).

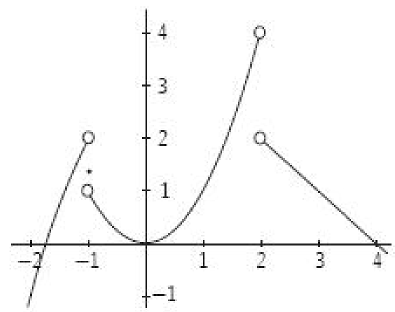
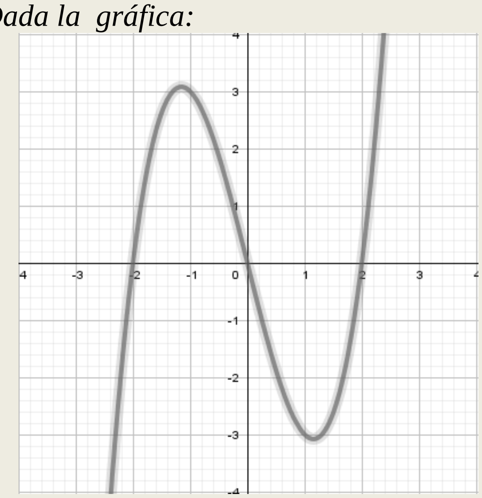
Según Godino, Batanero y Font (2007), este conocimiento no es observable, pero se puede analizar en el conjunto de prácticas realizadas para dar respuesta a las tareas propuestas, se presenta una tabla 6.1 de análisis que identifica en esta primera aproximación las tareas propias del Conocimiento Común del Contenido.

Tabla 6.2
Conocimiento Común del contenido

| Subitem | Consigna en relación con el CCC |
|---|---|
| 1ª | De acuerdo con la imagen:   *Pregunta: ¿Se puede afirmar que el área de la región sombreada es mayor que una unidad y menor o igual a tres unidades cuadradas?* Se espera que para cualquier función dada el profesor o futuro profesor pueda evaluar la noción de Sumas de Riemann como la suma infinita de rectángulos al completar el área bajo la curva (ccc). |
| 2b | *Según la figura:*  . *¿Si se duplica el número de lados al polígono inscrito el área de este nuevo polígono cubre o sobrepasa el área del círculo?* En este ítem el profesor o futuro profesor debe poder evaluar la construcción de polígonos a través de la duplicación y el cálculo de áreas de forma sucesiva y denotar la diferencia entre el área del círculo y el área del polígono formado. |

**Nota**. Descripción del Conocimiento común del contenido

Tabla 6.2 (continuación)
Conocimiento Común del contenido

| Subitem | Consigna en relación con el CCC |
|---|---|
| 3ª | *Dada la función:*<br>$$f(x)\begin{cases} -x^2+3 & x<-1 \\ 1.36 & x=-1 \\ x^2 & -1<x<2 \\ -x+4 & x>2 \end{cases}$$<br><br><br>*Calcula, en caso que sea posible, el área de la región limitada por la curva en el intervalo [-2, 3].*<br>En este ítem, correspondiente al cálculo del área de una función a trozos, el profesor o futuro profesor debería hallar el cálculo del área mediante diferentes métodos como: Integral definida, integral Impropia, Sumas de Riemann. |
| 4ª | *Dada la gráfica:*<br><br>El profesor o futuro profesor debe poder hallar la función sabiendo que esta corresponde a un polinomio de tercer grado. Por tanto, debe conocer temáticas como interceptos, modelos matemáticos a partir de puntos. |
| 4b | A partir del modelo matemático construido el profesor o futuro profesor debería calcular el área que se encuentra encerrada por la gráfica en el intervalo [-2,2], esta puede ser mediante: Integral definida, integral Impropia, Sumas de Riemann, teniendo en cuenta las propiedades de la integral para funciones simétricas y de áreas no negativas. |
| 5ª | En este ítem el profesor o futuro profesor puede evaluar el trazo de gráficos discontinuos, como es el caso de la función $f(x) = 1/x^2$, ya que en $x = 0$, presenta una discontinuidad. |

**Nota**. Descripción del Conocimiento común del contenido

Tabla 6.2 (continuación)
Conocimiento Común del contenido

| Subitem | Consigna en relación con el CCC |
|---|---|
| 7ª | Mediante el análisis y conocimiento relacionado con el trazo de gráficas el profesor o futuro profesor puede evaluar el gráfico y modelamiento matemático asociado a un tanque semiesférico. |
| 8b | En el ítem se espera que el profesor o futuro profesor evalué la distancia en un tiempo limitado habiendo definido el modelo matemático de la distancia como la integral de la velocidad, y esta última como la integral de la aceleración (es lo que plantea la tarea), si este se soluciona con ecuaciones características del MAS. |
| 9ª | En esta tarea se espera que el profesor o futuro profesor conozca temáticas relacionadas con cinemática en cuanto a trazar el gráfico de una velocidad constante con respecto a la distancia en un plano cartesiano. |
| 10a | El profesor o futuro profesor en esta tarea debe poder evaluar el trazo de dos curvas, dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 12 - x^2$ (dadas dos funciones en general). |
| 10b | En esta tarea el profesor o futuro profesor debe poder calcular los interceptos de funciones, mediante el uso de sistemas de ecuaciones, o técnicas relacionadas con el álgebra lineal en la solución de ecuaciones. |
| 10c | En este ítem el profesor o futuro profesor debe poder: evaluar el hallazgo del área encerrada en dos curvas a partir de trazar los puntos de intersección de las curvas, cálculo de áreas y posteriormente la diferencia entre estas áreas, los métodos utilizado puede ser Integral definida, sumas de Riemann, método de trapecio, integral impropia, integral por series. |
| 11a | En este ítem el profesor o futuro profesor debe poder: evaluar el trazo de gráficas, además la noción de solido de revolución el cual gira alrededor de un eje horizontal. |
| 11b | Con esta tarea, el profesor o futuro profesor debe poder evaluar: el método que se utiliza para determinar el volumen de un sólido que gira en torno del eje X por la función $y = x^2$, entonces debe conocer la temática relacionada con sólidos de revolución. (en general cualquier función dada). |
| 12a | En esta tarea el profesor o futuro profesor, debe poder: graficar una esfera y evaluar la temática relacionada con el gráfico de sólidos. |

**Nota**. Descripción del Conocimiento común del contenido

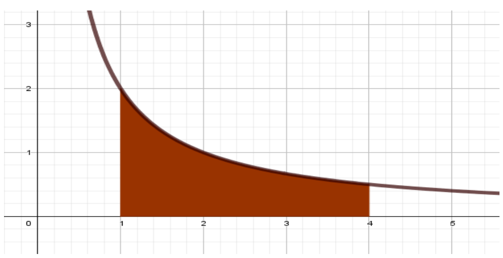
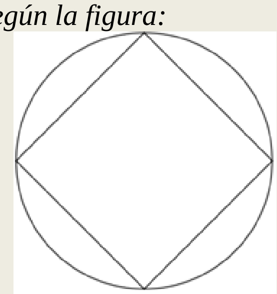
### 6.3.2 Conocimiento Ampliado del contenido

Para Pino (2015), el CAC, se encuentra dentro de la dimensión matemática del conocimiento didáctico-matemático del profesor y se relaciona con los conocimientos más avanzados en el currículo, o con las relaciones de los tópicos de cálculo que integran otros contextos. Por tanto, se espera que el profesor de Cálculo Integral, adquiera en su formación, conocimientos sobre propiedades de la integral, para luego aplicarlas a un contexto extra-matemático, en el marco de orientar a sus futuros estudiantes en el desarrollo de diferentes problemáticas y en el desarrollo de diversas competencias.

Para analizar el conocimiento Ampliado del contenido se analizan los subitem (ver tabla 5.13); **1b, 2a,2c, 3a, 3b, 4a, 4b, 4c, 5b, 6a, 6b, 6c, 7b, 7c, 8a, 8b, 9b, 9c, 12b, 12c, 13a, 13b, y 14a** que corresponden al 55% de los ítems planteados (33 en total). Se presenta en la tabla 6.3 la caracterización de las tareas propias para el Conocimiento Ampliado del Contenido, según el análisis al cuestionario CDM-Integral.

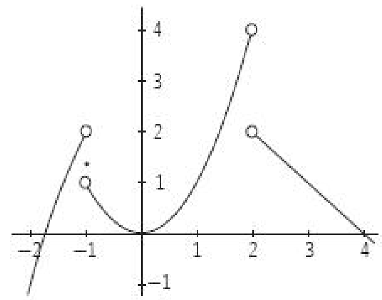
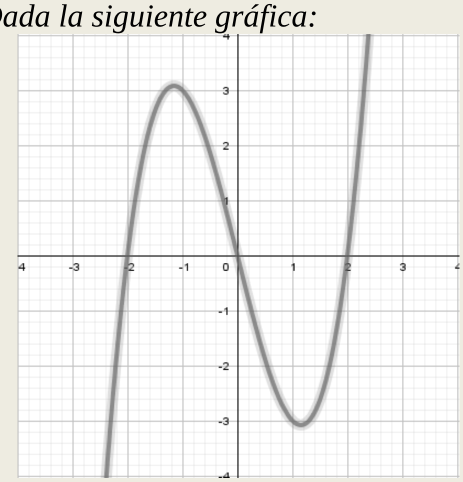
Tabla 6.3

*Conocimiento Ampliado del contenido*

| Subitem | Consigna en relación con el CAC |
|---|---|
| 1b | *Según la figura:*  El profesor o futuro profesor debe poder: calcular el área que se encuentra dentro del intervalo estimado, y argumentar mediante un proceso formal las propiedades relevantes relacionadas con las sumas infinitas de Riemann. |
| 2a | *Según la figura:*  . El profesor o futuro profesor debe poder: Identificar que el área del cuadrado es mayor a la mitad del área del círculo. En este ítem se evalúa la comprensión de las propiedades asociadas al cálculo de áreas de una forma general, dentro de la relación de un cuadrado inscrito en un círculo. |

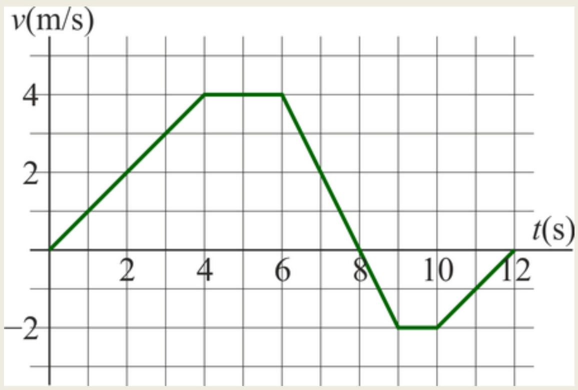
**Nota.** Descripción del Conocimiento Ampliado del Contenido

Tabla 6.3 (Continuación)
*Conocimiento Ampliado del contenido*

| Subitem | Consigna en relación con el CAC |
|---|---|
| 2c | En este ítem el profesor o futuro profesor debe poder: aplicar el proceso de generalización para demostrar el método de exhausción como el agotamiento del área de una curva. Por lo tanto, se busca que el profesor amplié su conocimiento al demostrar la relación entre las áreas del circulo y de los polígonos inscritos. |
| 3ª | *Dada la función:*<br>$f(x)\begin{cases} -x^2+3 & x<-1 \\ 1.36 & x=-1 \\ x^2 & -1<x<2 \\ -x+4 & x>2 \end{cases}$<br><br>El profesor o futuro profesor debe poder: calcular, el área de la región limitada por la curva en el intervalo [-2, 3]. Como se trata de una función a trozos, debe utilizar diferentes métodos para solucionar el problema propuesto, como: integral definida, integral impropia, integral por series, partiendo de la propiedad que las funciones están acotadas y por lo tanto se puede integrar y encontrar el área bajo la curva. |
| 3b | En este ítem el profesor o futuro profesor debe poder: calcular el área de una función a trozos, por algún método distinto a la integral definida o justificada mediante propiedades de la Integral. |
| 4b | *Dada la siguiente gráfica:*<br><br>El profesor o futuro profesor debe poder: calcular el área bajo la curva en el intervalo [-2,2]. En este ítem se evalúa los conocimientos utilizados en el cálculo de áreas, por lo que puede utilizar métodos como la regla del trapecio, integral por series, integral impropia, Sumas de Riemann. |

**Nota.** Continuación de descripción del Conocimiento Ampliado del Contenido

Tabla 6.3 (Continuación)
*Conocimiento Ampliado del contenido*

| Subitem | Consigna en relación con el CAC |
|---|---|
| 4c | El profesor o futuro profesor debe poder: Evaluar la propiedad de no negatividad en áreas de funciones simétricas, y argumenta o negar la proposición planteada ¿Si es posible que el área de como resultado 0? |
| 5b | En el ítem el profesor o futuro profesor debe: justifica la divergencia de la función $1/x^2$ y el no cálculo del área bajo la curva de la función $f(x) = 1/x^2$ |
| 6ª | La siguiente gráfica corresponde al movimiento de un objeto en un tiempo. |
| 6b | Determine la respuesta en cada caso. |
| 6c | <br>El profesor o futuro profesor debe: identificar un contexto físico de cinemática asociado a la distancia que se desea hallar, por tanto, debe recurrir a modelar funciones asociadas a las gráficas y realizar el desarrollo de las respectivas integrales. |
| 7b | El profesor o futuro profesor debe evaluar la relación existente entre el volumen y el diferencial de trabajo en la que se pide determinar el cilindro genérico que corresponde al modelo del tanque. |
| 7c | El profesor o futuro profesor debe: Conocer la relación existente entre el volumen y el diferencial de trabajo, por lo tanto, en la solución puede evaluar el trabajo realizado para bombear el agua del tanque. |
| 8ª | El profesor o futuro profesor debe hacer uso de otro contexto del currículo al definir el significado de antiderivada en el uso de la integral en contextos físicos, en lo que refiere a un Movimiento Armónico Simple, y la determinación de la función de desplazamiento. |
| 8b | El profesor o futuro profesor debe: Relacionar la noción de antiderivada, y el uso de la integral en contextos físicos, en lo que refiere a un Movimiento Armónico Simple, en la determinación de la distancia recorrida en un intervalo de tiempo. |

**Nota.** Continuación de descripción del Conocimiento Ampliado del Contenido

Tabla 6.3 (continuación)
*Conocimiento Ampliado del contenido de los estudiantes*

| Subitem | Consigna en relación con el CAC |
|---|---|
| 9b | En esta tarea el profesor o futuro profesor debe poder: Relacionar el uso de la integral con el contexto de la velocidad, por lo tanto, utilizar las componentes de la integral definida, y sistemas de medición, en el momento de fijar un punto de partida en el recorrido de Cúcuta a Tunja |
| 12b | El profesor o futuro profesor debe poder: Realizar la demostración geométrica del volumen de una esfera. |
| 12c | EL profesor o futuro profesor debe: Hallar de forma general el volumen de una esfera utilizando definiciones y artificios matemáticos. |
| 13a | El profesor o futuro profesor debe salir del contexto matemático y aplicar un evento extra-matemático el cual consiste en calcular la extracción de material de un túnel parabólico, implicando la conversión de medidas y cálculo del modelo matemático del túnel |
| 13b | En esta tarea el profesor o futuro profesor debe poder calcular la longitud de arco como herramienta para determinar la cantidad de sellante necesario para recubrir las paredes del túnel. |
| 14a | El profesor o futuro profesor debe poder: Identificar el teorema fundamental del cálculo planteado en un lenguaje formal y aplicarlo en contexto extramatemáticos |

**Nota.** Continuación de descripción del Conocimiento Ampliado del Contenido

# Capítulo 7. Conclusiones

*"Hacer una tesis significa divertirse y la tesis es como el cerdo, en ella todo tiene provecho."*
*Umberto Eco*

En el presente capítulo se describen los resultados de los estudios realizados para el logro de cada una de las fases de investigación, las cuales dieron cumplimiento al objetivo general de la investigación, el cual se centra en: *Caracterizar el conocimiento del estudiante de formación Matemática relativo al contexto institucional, para que la enseñanza del objeto integral tenga la mayor idoneidad epistémica y cognitiva.*

## 7.1 Primera fase de investigación

Para el logro del objetivo ***OBE1.*** *Caracterizar los pares (Prácticas, Configuración de objetos en las prácticas) a partir del estudio histórico- epistemológico del objeto integral, para identificar los significados parciales del objeto matemático y así reconstruir el significado global del objeto integral.* El cual se basa en la pregunta ¿cuál es el significado global del objeto matemático Integral? Para dar respuesta al interrogante, se realizó el estudio histórico- epistemológico y fenomenológico, determinando los significados parciales asociados a las prácticas realizadas en cuatro periodos de tiempo. En la figura 4.22 del capítulo 4, se presenta el significado holístico, construido a partir de las configuraciones epistémicas y significados parciales, de los problemas emergentes en la génesis y evolución del objeto Integral a partir del estudio histórico, epistemológico y fenomenológico; con este estudio se demuestra la complejidad del objeto de estudio, el cual evidencia las dificultades en el aprendizaje de los estudiantes.

## 7.2 Segunda fase de investigación

En el desarrollo de la segunda fase de investigación se dieron respuesta a los objetivos; ***OBE2.*** *Caracterizar el significado global del objeto integral pretendido en los planes de estudio del programa de licenciatura en matemáticas,* ***OBE3.*** *Caracterizar el significado de referencia del objeto integral pretendido por los libros de texto (4 libros).*

### 7.2.1 Caracterización del significado del objeto Integral por los planes de estudio.

Al triangular los contenidos mínimos de la asignatura Cálculo Integral en programas de licenciaturas en matemáticas, de varias universidades de índole nacional, se observa que en la primera unidad, se propone el desarrollo del significado parcial de referencia de antiderivada, el cual corresponde a la relación existente entre el cálculo diferencial e integral, seguido de los métodos de integración, el cual hace parte de un significado parcial de referencia emergente propio de los procesos de enseñanza, y para culminar el curso se propone aplicaciones de la integral, entre los cuales se encuentran los significados parciales institucionales de, integral definida, longitud, volumen, longitud de arco y sólidos de revolución.

De igual forma el programa de Cálculo Integral, evidencia los significados pretendidos para el objeto Integral según los contenido mínimos presentados como el criterio 1 en el diseño del instrumento, de acuerdo con el marco legal (ver capítulo 5.2) del Ministerio de Educación Nacional (MEN), que rige los programas de licenciatura, ubica el Cálculo Integral como el área disciplinar, fundamentada en las competencias que el profesor debe apropiarse de los contenidos y de su disciplina para interactuar en una labor investigativa. Es así como según los lineamientos dados por el MEN, se concluye que el estudiante de licenciatura en matemáticas debe tener un conocimiento del objeto Integral en su naturaleza y sus contextos de uso.

### 7.2.2 Significado del objeto Integral pretendido por los libros de texto

En el análisis de los significados emergentes, se realizó una triangulación en los libros de texto universitarios más utilizados, se identificó que en común el significado de Integral comienza desde el problema asociado al área, se identifica en común los significados parciales de antiderivada (primitivas), integral definida e integral indefinida, volumen, trabajo, teorema del valor medio, métodos de integración, teorema fundamental del cálculo, y parcialmente es trabajado los significados de integración numérica, integración impropia, longitud de arco, sumas de Riemann, fuerza y presión.

En conclusión, al análisis de texto, se evidencia que no se encuentra el significado de método de exhausción, y el significado de probabilidad que pueden ampliar el conocimiento del futuro profesor. Se recomienda el uso de los libros teóricos (Apóstol) y aplicados (Stewart), ya que estos aportan mayor conocimiento común y ampliado del contenido, los cuales generan mayor idoneidad en el desarrollo del curso.

## 7.3 Tercera fase de investigación

La tercera fase de la investigación corresponde al logro del objetivo ***OBE4.*** *Caracterizar la dimensión cognitiva y epistémica en el modelo del CDM del conocimiento del profesor para el objeto integral según el significado global del objeto matemático y el establecimiento de un significado de referencia propuesto en los libros de texto.* Donde se estableció el diseño de un cuestionario denominado CDM-Integral para validar las tareas que se consideran propias o representativas y que pueden servir para evaluar el conocimiento común y ampliado del contenido matemático, como base para potenciar el conocimiento especializado del profesor o del futuro profesor (estudiantes de formación matemática).

### 7.3.1 Caracterización de la faceta epistémica del CDM

Se plantea como uno de los objetivos de la investigación (OBE4) la caracterización de las categorías del conocimiento común y ampliado del contenido según Pino (2015), como conocimientos base para el desarrollo de un conocimiento especializado del contenido necesario en la labor profesor y en el proceso de enseñanza del objeto matemático. Según Pino (2015) el *conocimiento común del contenido* hace referencia al conocimiento matemático implícito que cualquier persona utiliza en el desarrollo de una situación problemática de acuerdo al nivel educativo, en este caso en solucionar tareas relacionadas al objeto Integral.

En esta línea, se establece que el conocimiento común del contenido, se relaciona con los procesos de la actividad matemática en el desarrollo del pensamiento matemático avanzado de los estudiantes, tales como representar, definir, abstraer, generalizar, refutar entre otros.

De igual forma el **conocimiento ampliado del contenido,** el cual se relaciona con los conocimientos matemáticos del estudiante, en el desarrollo de situaciones que involucran un nivel superior de los procesos matemáticos del pensamiento matemático avanzado adquiridos a lo largo de una trayectoria académica. Por tanto, es claro que este conocimiento se relaciona con el currículo en la conexión de propiedades y saberes propios de la matemática, junto a otros contextos extra-matemáticos.

## 7.4 Aportes de la investigación

Dentro del desarrollo del proceso investigativo se interpreta la reflexión pedagógica del autor en cuanto al proceso de investigación en el marco del Enfoque Ontosemiótico, el desarrollo de un conocimiento especializado en torno del Cálculo Integral, desde la génesis, evolución y procesos de enseñanza y de aprendizaje del objeto matemático, descritos en las problemáticas y la construcción del significado Global a partir del estudio epistemológico.

De igual forma el estudio o reconstrucción de los significados emergentes del objeto integral que salen del estudio epistemológico, potencian el desarrollo de un conocimiento especializado y otra parte del conocimiento especializado fue la identificación de las configuraciones epistémicas; es decir, en el análisis a las problemáticas el autor de la tesis realizó el análisis semiótico llegando a la comprensión del par (objetos matemáticos y configuraciones epistémicas), obstáculos y dificultades en cuanto prácticas relacionadas con el objeto integral. En esta dirección se construyó y validó el instrumento cuestionario CDM-Integral para caracterizar las dimensiones epistémicas y cognitivas, como un aporte importante para el futuro profesor en especial en cuanto al conocimiento matemático de la Integral, desde su fase de diseño, y validación. Además, este instrumento se deja a la comunidad investigativa en función de ampliar el campo investigativo en la línea de formación de profesores de la asignatura de cálculo Integral, como también los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En una tercera parte en este documento se caracteriza la dimensión epistémica del futuro profesor, en otras palabras, se describen las tareas que el profesor o futuro profesor debería poder hacer (Pino y Godino, 2015) según las tablas expuestas en el capítulo 6: estas tareas van en función del CCC y CAC. En la dimensión cognitiva se identifican y analizan los errores y dificultades que los estudiantes presentaron al resolver la versión piloto del cuestionario CDM-Integral. Y finalmente, se destaca la participación como ponente en el X Simposio de Matemáticas y Educación Matemática con la ponencia “Caracterización del conocimiento matemático del profesor en la enseñanza del objeto Integral” y en foros realizados en el grupo de investigación de Álgebra y Análisis, la comprensión de la complejidad de la escritura de artículos y libro en proceso de evaluación.

# Referencias Bibliográficas

Albendea, P. C. (2011). La historia del álgebra en las aulas de Secundaria. (Tesis de maestría). Universidad de Cantabria. España.

Alcaraz, A. B. (2006). Matemáticas en el antiguo Egipto. Universidad del País Vasco -Euskal. Recuperado el, 5 de abril de 2020. Euskal. España.

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática, Bogotá, v.8, n.1, p.30-46, abr. 2003.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario. Boletín de la asociación matemática venezolana, 10(2), 117-134.

Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*(2), 231-261.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. Journal of teacher education, 59(5), 389-407.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*, 241-247.

Barón, E. M. (1987), The Origins of the infinitesimal Calculus, Dover Publications, New York, 1987.

Barrow, I (1735). Geometrical Lectures. Translated from the Latin Edition by Edmund Stone. Londres: Cambridge University.1735.

Barzanallana, R. (2016). Biografía de Pierre Laplace, una vida dedicada a la ciencia. Recuperado 23 de agosto de 2019, de https://www.um.es/docencia/barzana/BIOGRAFIAS/Laplace_Pierre.html.

Bos, H. J. M. (1984) Newton. Leibniz y la tradición leibniziana. In: grattan-guinness(Coord.). Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica. Traducción M. Martínez. Madrid: Alianza Universidad.1984. p.69-124.

Boyer, C. B., y Merzbach, U. C. (2019). História da matemática. Editora Blucher.

Boyer, C. B. (2010). A History of Mathematics. Uta Merzbach. Tercera edición. ISBN 978-0470-630563. QA21.B767. 2010. Recuperado el 27 sep. 2019 a las 8.50 p.m.

Boyer, C. (1949). The history the calculus and its conceptual developtmen. New York: Dover Publications, inc.1949.

Bobadilla, M. L. (2012). Constitución histórica de la teoría de la medida y la integral de lebesgue: Un tránsito entre lo geométrico y lo analítico. Tesis de doctorado. Universidad del Valle, Santiago de Cali.

Bohrnstedt, G. W. (1976). Evaluación de la confiabilidad y validez en la medición de actitudes. GF Summers (comp.), Medición de actitudes. México, DF: Ed. Trillas, 103-127.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: Didactico/Didactic to Algebra Study (Vol. 7). Libros del Zorzal.

Buchman, M. (1984). The Priority of Knowledge and Understanding in Teaching. En L. Katz and J. Raths (Eds.). Advances in Teacher Education. Vol. 1. Norwood, pp. 29-50

Cabañas, G. S. (2011). El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico.2011. 455p. Tesis (Doctorado en Ciencias)-Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México,2011

Camacho, M., Depool, R. y Santos-Trigo, M. (2004). Promoting students' comprehension of definite integral and area concepts through the use of *DERIVE* software, *Proceedings of the 26th North American Chapter of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME-NA26), vol. 2, pp. 447-454, Toronto (Canada).

Calvo, C. (1997). Bases para una propuesta didáctica sobre integrales. Tesis de maestría. Universitat Autònoma de Barcelona. España

Cantoral, R.y Farfán, R. (2004) Desarrollo conceptual del cálculo. Australia: Thompson., 2004.

Cantoral, R (2000). Desarrollo del pensamiento matemático. México: Trillas, 2000.

Cardil, R (2010), Kepler: el volumen de un tonel de vino, matemáticasVisuales, publicados el 8 January of 2010

Castañeda Cortes, M. E., y Sáenz Bravo, S. (2012). La demostración geométrica de la Ley de Merton: un pretexto para el estudio de área bajo la curva.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas del profesor en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en didactique des mathématiques, 19(2), 221-266.

Collete, J. Historia de las matemáticas II. México: Siglo XXI, 1985.

Contreras, A (2000). La enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato y primer curso de universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. España, Huelva, 71T94.

Cordero, F. (2002) Reconstrucción de significados del Cálculo Integral: La noción de acumulación como una argumentación. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Corella, F.(2013). Lineamientos para diseñar un estado de la cuestión en investigación educativa. Revista Educación, 37(1), 65-87.

Crisostomo, E. (2014). Idoneidad de Procesos de estudio del Cálculo Integral en la formación de Profesores de matemáticas: Una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional. Tesis Doctorado en Didáctica de la Matemática)-Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Granada, España

Crisóstomo, E. (2014). *Idoneidad de procesos de estudio del Cálculo Integral en la formación de profesores de matemáticas.* Granada, España: Universidad de Granada.

Czarnocha, B., Dubinsky, E., Loch, S., Prabhu, V. y Vadakovic, D. (2001). Conceptions of area: In students and in history. *College Mathematics Journal*, 32 (2), 99-109.

Del Moral, A. M., y Gómez, J. L. L. (2005). Los nuevos Principios y Estándares del NTSC en castellano.

Díaz, N. (2017, septiembre 13). Historias de Matemáticas. Recuperado 23 de agosto de 2019, de http://historiasdematemáticas.blogspot.com/2017/

Doorman, M.y Maannen, J.V (2008). A historical perspective on teaching and learning calculus. Australian Senior Mathematics Journal, Adelaide, v.22, n.2, p.4-14. 2008.

Duval, R. (1993) Registres d représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensé. Annales de Didactique et de science Cognitives 5 (1993) 37-65. Traducción DME-Cinestav,1997, México.

D'Ambrosio, U. (2013). Priorizar história e filosofia da matemática. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, San José, v.8, n.11, p.175-186, dic. 2013.

Edwards, C. (1979) The Historical Development of the Calculus, Springer-Verlag New York,

Elliot, J. (2000). El cambio educativo desde la investigación–acción. 4ta. Edición. Editorial Morata.

Elliott, J. (1994). El cambio educativo desde la investigación acción. Madrid: Morata

Euler, L.  (1770) Intitutionum Calculi Integralis.Translated from the Author's Latin Original. St. Petersburg. 1770.

Euler, L. (1748). Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes. *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlín, Tom IV*, 219-233.

Faceta epistémica del CDM sobre la derivada Educaçao Matemática Pesquisa (2011) - Scientific Figure on ResearchGate. Available from: https://www.researchgate.net/figure/Figura-2-Facetas-y-niveles-del-conocimiento-del-profesor-Nosotros-usamos-la expresion_fig2_280131342 [accessed 18 Oct, 2019]

Fermat (1969). Ocuvres de Fermat. Publiées par P.Tannery.Paris 189-1912. Gauthier-Villars

Fernández, F, L. (2011). La Historia como herramienta didáctica: el concepto de integral. Tesis de maestría. Universidad Complutense de Madrid. España

Fiorentini, D., y Lorenzato, S. (2015). Investigación en Educación Matemática: recorridos históricos y metodológicos. Tunja, Colombia. Autores Associados (Editora Autores Associados LTDA).

Freudenthal, H. (1983). Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. *Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel*.

Fuster, J., y Gómez, F. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. Divulgaciones Matemáticas, 5(1/2), 61-76.

García, M. (1992). Como conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre conocimiento didáctico del contenido. Ponencia presentada al Congreso "Las didácticas específicas en la formación del profesorado". Santiago, 6-10 de julio 1992.

Gillis, R. J. (1972). Mathematics in the Time of the Pharaohs. Cambridge: MIT Press.

Giacomone y L.M. (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13-31.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B.

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, Á., y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. Avances de Investigación en Educación Matemática, (10).

Godino, J. D., Aké, L., Contreras, Á., Estepa, A., Fernandez, T., Neto, T., ... y Lasa, A. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. Enseñanza de las Ciencias, 33(1), 0127-150.

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 111-132

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). Un enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39, 127-135.

Godino, J. D.; Batanero, C.; Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematicseducation. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, Dordrecht, v. 39, p.127-135, mar. 2007.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D.; Batanero, C. (1998) Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. In: Sierpinska, A; Kilpatrick, J (Orgs.). Mathematics education as a research domain: A search for identity. Dordrecht: Kluwer, 1998. p. 177-195.

Godino, J. D.; Batanero, C. (1994) Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, Paris, v. 14, n. 3, p. 325-355, 1994.

Gordillo, T, W., y Pino-Fan, L. (2015). Reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. *Conferencia Interamerica de Educación Matemática*, (págs. 1-12). Chiapas.

González, F. J. P (2008). Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable. Universidad de Granada, Italia.

González, A. S. (2005). La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje. Universidad de La Laguna, Servicio de Publicaciones.

González, P. (1992), Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII. Madrid: Alianza Editorial.

González, U. P. M. (2008). El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años. Sigma, 32, 103-130.

Gordillo, W., y Pino-Fan, L. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 535-558.

Grossman, P. (1990). The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education. New York and London: Teachers College Press.

Hederich-M, Christian y Caballero-D, Carmen C. (2016) Validation of Maslach Burnout Inventory-Student Survey (MBI-SS) in Colombian academic context. CES Psicol [online]. 2016, vol.9, n.1, pp.1-15. ISSN 2011-3080.

Hernández, R., y Mendoza, C. P. (2008). El matrimonio cuantitativo cualitativo: el paradigma mixto. In JL Álvarez Gayou (Presidente), 6º Congreso de Investigación en Sexología. Congreso efectuado por el Instituto Mexicano de Sexología, AC y la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Villahermosa, Tabasco, México.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). Metodología de la investigación 6° edición. Editorial Mc Graw Hill

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. Journal for research in mathematics education, 372-400.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. In XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico).

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *Décimo Primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, México. Descargado el 8 de mayo de 2010 de *http://www.matedu.cinvestav.mx/librosfernandohitt/Doc-6.doc*.

Klein, F (2004) Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Arithmetic, Algebra, Analysis (p. 209), Dover Publications, New York,

Lamora, A. (2014). Tema 3: Del Cálculo Diferencial a las Ecuaciones diferenciales. Recuperado 16 de julio de 2019, de https://slideplayer.es/slide/321584

Laërtius, D (c. 230). «Pyrrho». Vidas, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres IX.

passage 72. ISBN 1-116-71900-2.

Leibniz, W.G. (1920) The early mathematical manuscripts of Leibniz.New York: Dover Publications, inc.1920.

Leinhardt, G. and Smith, D. (1985). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. Journal of Educational Psychology, Vol. 77, No. 3, pp. 247-271.

Lois, A. E., y Milevicich, L. M. (2008). La enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral desde La perspectiva del nuevo paradigma de la sociedad del conocimiento. Revista Iberoamericana De Educación, 47(5), 1-15. https://doi.org/10.35362/rie4752272.

Martinez, N. (2011). Gaspard Monge, el gran matemático del s. XVIII. Recuperado 16 de junio de 2019, de https://www.rtve.es/noticias/20110603/gaspard-monge-gran matemático-del-sxviii/436743.shtml

Mateus, E. (2011) Epistemología de la derivada como fundamento del cálculo diferencial. Voces y silencios: revista latinoamericana de educación, Bogotá, v.2, p. 3-21, dic. 2011.

MEN. (2011). Resolución 5443 del 30 de junio del 2010; Resolución 6966 de 6 de agosto del 2010. PPDQ Boletín, (47).

Meneses, J., y Rodríguez, D. (2011). El cuestionario y la entrevista

Miguel, M. S. (2008). Orígenes del Cálculo Diferencial e Integral. En Historia del Análisis Matemático.

Milevicich, L. (2008). La enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral en el contexto de primer año de la universidad. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*, (págs. 338-349). México.

Moratalla, P. T. (1998). Del área a la integral: un estudio en el contexto educativo. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 16(2), 233-250.

Moratalla, P. T. (1994). Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal (Doctoral dissertation, Universitat de València).

Moreno, G., y Grijalva, A. (2013). Evaluación del desarrollo de competencias en el bachillerato. Un estudio con situaciones que involucran la integral de una función.

Muñiz, J. (2010). Las teorías de los tests: teoría clásica y teoría de respuesta a los ítems. Papeles del psicólogo, 31(1), 57-66.

Muñiz, J. (1994). Traducción/Adaptación de tests educativos y psicológicos. *Papeles del psicólogo*, *59*(1), 1-2.
Muñoz, G. (2007) Rediseño del Cálculo Integral escolar fundamentado en la predicción. En C.

Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds.), *Matemática Educativa: Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 27-76). Ciudad de México: Díaz de Santos.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM

Newton, I. (1686) Philosophiae naturalis principia mathematica. Translated from the Author's Latin Original. Londres, 1686.

Newton, I. (1736) The method of fluxions and infinite series. Translated from the Author's Latin Original by John Colson.Londres.

Nieves, E. M., (2011). Historia y filosofía de las matemáticas. Colombia, D. U. B

Nikolski, S.M. (1895) Elementos de Análisis Matemático. Moscú: Editorial Mir,1985.

O, Connor, J., y Robertson, E. (2000). Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Recuperado 16 de 2019, de http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dirichlet.html

Ordóñez, C. L. (2011). Restricciones institucionales en las matemáticas de 2° de bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida. Andalucía. España

Ortiz, O. C. (2013). La integral definida en la noción de efecto acumulado. Una mirada para la formación en los primeros semestres de la universidad. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Ortiz, F, A. (1936). Historia de la Matemática. *Volumen I. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.*

Orton, A. (1983) Students Understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics* 14, 1-18. 1983.

Orton, A. (1979). An investigation into the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults. En Cognitive Development. Research in Science and Mathematics, Universidad de Leeds (pp.201–215). Gran Bretaña.

Pacheco, P. (2015). Construcción y validación de los instrumentos para la medición de la influencia de los campos emocionales en los aprendizajes significativos/Construction and Validation of Instruments for the Measurement of the Influence of the Emotions in Significant Learning. Revista Internacional de Educación y Aprendizaje, 3(1)

Pastor, J. R., Calleja, P. P., y Trejo, C. A. (1969). Analisis Matemático (Vol I). *Kapelusz. Bs. As, 196.*

Parra, E. (2008). Arquímedes: su vida, obras y aportes a la matemática moderna. Revista Digital

Matemática, 9(1), 1-40.

Pérez, C. (1988). Algunas consideraciones sobre la primera etapa de la génesis del análisis infinitesimal. *Ciencia y sociedad*.

Pino, F. L. (2017). Contribución del Enfoque Ontosemiótico a las investigaciones sobre didáctica del cálculo. In Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Granada.

Pino, F. L. (2015). Conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre la derivada: clarificando los significados de la derivada desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje. España: Editorial Académica Española, 2011.

Pino, F. L. y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109

Pino-Fan, L. (2014) Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada. Granada: Universidad de Granada, 2014.

Pino, L (2013). Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada. Universidad de Granada.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., Font, V., y Castro, W. F. (2012). Key Epistemic Features of Mathematical Knowledge for Teaching the Derivative. In Tso, T.Y. (Ed). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 297-304). Taipéi, Taiwán: PME.

Pino-Fan, L.; Godino, J. D.; Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, Brasil v.13, n.1, p.141-178, ene. 2011.

Ponce, J. C. (2013) Isaac Barrow y su versión geométrica del teorema fundamental del cálculo. Números: Revista de Didáctica en Matemáticas. Las Palmas de Gran Canarias, Canarias, v.83, p.123-130, jul. 2013.

Radford, A. (1997). Syntactic theory and the structure of English: A minimalist approach. Cambridge University Press.

Rasslan, S., y Tall, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. In pme conference (Vol. 4, pp. 4-089).

Rico, L., Lupiáñez, J. L., y Molina, M. (2013). Análisis Didáctico en Educación Matemática.

Rojas, N; Flores, P. (2011). El análisis didáctico como una herramienta para identificar los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza de las fracciones. En Lupiáñez, José Luis; Cañadas, María C.; Palarea, María Mercedes; Maz, Alexander (Eds.), Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática (pp. 17-28). Granada: Grupos de Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática.

Ruiza, M., Fernández, T. y Tamaro, E. (2004). Biografía de Colin Maclaurin. En Biografías y Vidas. La enciclopedia biográfica en línea. Barcelona (España). Recuperado de https://www.biografiasyvidas.com/biografia/m/maclaurin.htm el 20 de abril de 2019.

Ruiza, M., Fernández, T. y Tamaro, E. (2004). Biografía de David Hilbert. En Biografías y Vidas. La enciclopedia biográfica en línea. Barcelona (España). Recuperado de https://www.biografiasyvidas.com/biografia/h/hilbert.htm el 20 de abril de 2020.

Salinas, P., y Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 12(3), 355-382.

Schoenfeld, A. H., y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. In International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2 (pp. 321-354). Brill Sense.

Sepúlveda, D. O. (2016). Conocimiento didáctico-matemático del profesor universitario para la enseñanza del objeto grupo. Tesis Doctoral. Tunja. Colombia

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22

Stewart, I. (2008). Historia de las matemáticas: en los últimos 10.000 años (No. Sirsi) i9788474238419).

Stewart, J. (2015). Cálculo de una variable transcendentes y tempranas.6. Ed. México: Cengaje Lerning, 2013.Submetido em Outubro de 2014.Aprovado em abril de 2015.

Tall, D. y Sheath, G. (1983). Visualizing Higher Level Mathematical Concepts Using Computer Graphics. En *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (pp.357–362). Israel.

Toeplitz, O (1963) The Calculus: A Genetic Approach (pp. 82-83), University of Chicago Press

Traver M, J. A., y García. L.R. (2007). Construcción de un cuestionario-escala sobre actitud del profesorado frente a la innovación educativa mediante técnicas de trabajo cooperativo (CAPIC). Revista electrónica de investigación educativa, 9(1), 1-14.

Valdés, J. E. N. (2008). De Leibniz a D'alembert: Diez problemas que marcaron un siglo. *Boletín* *de Matemáticas*, *15*(2), 130-161.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2015). Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesorado de Educación Primaria sobre Probabilidad: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 29(52), 681-703.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. Recherches en didactique des mathématiques, 10(2), 3.

Vile, A., y Radford, L. (1997). Semiotic theory and practice in mathematics education. In PME conference (Vol. 1, pp. 1-214). The program committee of the 18th pme conference.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 65-80). Netherlands: Kluwer, A. P.

Wilson, S. and Shulman, L. (1987)."150 Different Ways" of Knowing: Representations of Knowledge in Teaching". En J. Calderhead (Ed.). Exploring Teacher Thinking, Eastbourne, England, pp. 104-124.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: critica,1988.