CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS: UNA PERSPECTIVA SEMIÓTICA

LENNYS FABIAN PEDRAZA ESPINDOLA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TUNJA

2021

CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS: UNA PERSPECTIVA SEMIÓTICA

LENNYS FABIAN PEDRAZA ESPINDOLA

TRABAJO PARA OPTAR AL TÍTULO DE

MAGISTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DIRECTOR

Dr. PUBLIO SUÁREZ SOTOMONTE

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TUNJA

2021

Página de aceptación

Jurado

Jurado

Director

Publio Suárez Sotomonte

Dedicatoria

A mi hijo, Alan Said Pedraza Alba, quien ha sido la fuente de inspiración en todos los proyectos que realizo.

A mi esposa, Cristina Alba Granados, mi apoyo incondicional en los vaivenes de mi vida.

Agradecimientos

A mi madre María Espindola y mi hermano Cristhian Pedraza, quienes me han brindado un apoyo incondicional en el desarrollo de mis proyectos de vida.

A mis suegros Stella Granados y Efraín Alba, quienes me han brindado un soporte en mi diario vivir.

Al Doctor Publio Suárez Sotomonte, mi mentor en la vida académica y la persona que más admiro: gracias por guiar mi camino en el aprendizaje y despertar en mi un gusto por la geometría, por permitirme aprender a su lado y brindarme su experiencia en el campo investigativo.

A mis profesores y amigos, quienes han aportado a mi desarrollo como profesional e investigador.

A mi amigo y colega Diego González, quien me acompaño con consejos y propuestas en los años de desarrollo de esta investigación.

A Darío Fonseca, Adriana Molina y al grupo Dinámico Pedagogía y Diseño, quienes brindaron muchas herramientas para llevar a cabo esta investigación.

Tabla de contenidos

Introducción

Este estudio se realiza en la línea de investigación de geometría e informa el proceso investigativo con el cual se dio respuesta a la pregunta de investigación ¿Cómo evolucionan las representaciones de conceptos y procesos empleados por los estudiantes, relativos a las construcciones con regla y compás griegos, de sistemas de polígonos a la luz de la teoría noético semiótica de Duval? El marco teórico que permitió el desarrollo del estudio corresponde al enfoque Semiótico y, por tanto, se relaciona con sus planteamientos y metodologías, la investigación se desarrolló bajo un enfoque de investigación mixta.

El proceso investigativo reportado se estructura en siete capítulos: El primero se centra en la descripción de las problemáticas relacionadas con las construcciones con regla y compás griegos, en donde se dan a conocer los resultados de algunas investigaciones desarrolladas en torno a este tema y el panorama nacional desde las propuestas del Ministerio de Educación Nacional relacionadas a la geometría. Teniendo en cuenta las problemáticas identificadas se hace un planteamiento del problema, con la estructuración de la pregunta de investigación, objetivo general y objeticos específicos.

En el segundo capítulo se abordan los referentes teóricos enmarcados en el enfoque Semiótico, donde se presentan nociones de signo, representación, entradas clásicas a la geometría y se da un recorrido epistemológico por el desarrollo conceptual de la semiótica. Estas herramientas teóricas permiten el desarrollo de la investigación.

En el tercer capítulo se presenta el marco metodológico con el cual se desarrolló el estudio: se precisa el enfoque de la investigación, así como el diseño y las fases que se siguieron para el cumplimiento de los objetivos y, por tanto, el recorrido para dar respuesta a la pregunta de investigación. Se describe la unidad de análisis y las categorías procedentes de la práctica matemática de los estudiantes. Por último, se da a conocer las herramientas y técnicas empleadas en la recolección de la información.

En el cuarto capítulo se abordan las nociones conceptuales: elementos de geometría básica, los tres problemas clásicos de la antigüedad, construcciones con regla y compas, bisectriz, mediatriz, punto medio, rectas perpendiculares, rectas tangentes, triángulo equilátero, cuadrado, entre otros, nociones necesarias para la construcción de una actividad llamada *Aventura Espacial* la cual permitió recopilar representaciones en lenguaje natural y gráficas.

En el quinto capítulo se describen los elementos que componen la actividad *Aventura Espacial*, sus fundamentos teóricos y conceptuales, usados en la construcción de la actividad, así como el funcionamiento de la misma, las mecánicas de juego y los elementos que priman en la determinación de los retos.

El sexto capítulo presenta el análisis de las representaciones usadas por los estudiantes, caracterizándolas como construcciones primitivas, primarias y secundarias, en tres sesiones desarrolladas por los estudiantes. El análisis cognitivo se realiza desde la interpretación de las representaciones dadas por los estudiantes, clasificadas en formales, mixtas y coloquiales.

En el séptimo capítulo se dan las conclusiones generales, a partir del análisis sistemático del desarrollo de la investigación, además del futuro del trabajo y las reflexiones por parte del autor, del mismo modo se describe el cumplimiento de los objetivos específicos y la respuesta a la pregunta de investigación.

Marco de la investigación

Entre todos los campos de conocimiento en los que estudiantes
deben entrar, la geometría es la que exige la actividad
cognitiva más completa, ya que apela
al gesto, al lenguaje y a la mirada
(Duval 2016)

En este capítulo se presentan las dificultades y problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las construcciones con regla y compás, resultado de análisis realizados a trabajos investigativos relacionados con este tema, en el marco de la Educación Matemática como ciencia. A partir de la descripción de las problemáticas identificadas, se plantea la pregunta de investigación junto con el objetivo general y los objetivos específicos del estudio.

Así mismo, se describen los argumentos que dieron origen a esta investigación, a partir de la comprensión teórica del enfoque semiótico, alrededor de las construcciones con regla y compás. Para este fin, se tuvieron en cuenta consultas bibliográficas y el análisis de las prácticas matemáticas de un grupo de estudiantes de grado noveno, al momento de solucionar situaciones relacionadas con construcciones empleando regla y compás.

Descripción del problema de estudio

La necesidad que ha tenido el hombre para interpretar los fenómenos que suceden diariamente y explicar la forma del entorno en el que vive, ha llevado a la humanidad a desarrollar técnicas que representan y modelar situaciones, elementos y comportamientos. En particular, la preocupación por generar espacios que fomenten el desarrollo cognitivo de los seres humanos, ha permitido que los estudios relacionados con la educación afloren en el seno de la ciencia, estudiando contextos, modos de aprendizaje, los contenidos a tratar, entre otros aspectos fundamentales en la educación.

La matemática en el contexto educativo se ha visto caracterizada por su importancia en el desarrollo académico del estudiante, dando paso así a un sinfín de ideas para su enseñanza. Autores como Bueno, et al. (2012) plantean que "en el transcurso del desarrollo de las matemáticas se consideran cada vez objetos más abstractos", lo cual conduce al docente a repensar la forma en que relata sus clases, es en este punto donde la didáctica retoma un papel fundamental en el quehacer del profesor. Guy Brousseau y sus colaboradores en los años 70 proponen una teoría que agrupa las diferentes interacciones entre el estudiante, el docente y el saber, haciendo referencia en la elaboración de medios impersonales que permitan al estudiante construir conceptos de manera autónoma. Brousseau agrupa las nociones de contrato didáctico, las situaciones didácticas y a-didácticas para dar vida a una formulación relacionada con los fenómenos producidos en los procesos de aprendizaje de la matemática.

Raymod Duval propone un estudio enfocado en la importancia de representar y transformar los objetos matemáticos, dando paso a una teoría de registros de representación semiótica, cuya importancia recae en la reflexión constante sobre la manera en que se plantean propuestas de medios de aprendizaje para desarrollar en las aulas de clase.

En los diversos tejidos teóricos de la educación matemática se encuentra el aprendizaje de la geometría, la cual, desde la perspectiva semiótica, es rica en representaciones y "entre todos los campos de conocimiento en los que los estudiantes deben entrar, la geometría es el que exige la actividad cognitiva más completa, ya que apela al gesto, al lenguaje y la mirada" (Duval y Sáenz, 2016, p.13). En este punto es indispensable revisar la forma en que se abordan los objetos matemáticos relativos a la geometría en los niveles escolares de la educación primaria, básica y media, con el fin de interpretar la pertinencia de la inclusión en los currículos, y la forma en que es desarrollada, particularmente, lo relacionado a las construcciones con regla y compás.

Desde la perspectiva del pensamiento espacial se plantea la necesidad de desarrollar procesos en los cuales se pueda vincular las representaciones desde varias perspectivas. “Los sistemas geométricos pueden modelarse mentalmente o con trazos sobre el papel o el tablero y describirse cada vez más finamente por medio del lenguaje ordinario y los lenguajes técnicos y matemáticos” (MEN, 2002, p.62), esta concepción es la que se liga en el desarrollo de los currículos colombianos, y su desarrollo es distribuido a lo largo de la formación de los estudiantes. En la Tabla 1 se muestra la distribución de las competencias relativas a las construcciones con regla y compás en los diferentes grados de la educación primaria, básica y media.

Tabla 1

Estándares básicos de competencias relacionados con la geometría

	Pensamiento espacial y sistemas geométricos	**Pensamiento métrico y sistemas de medidas**
Al terminar tercer grado	Reconozco nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos y su condición relativa con respecto a diferentes sistemas de referencia. Represento el espacio circundante para establecer relaciones espaciales. Reconozco congruencia y semejanza entre figuras (ampliar, reducir). Realizo construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o figuras geométricas bidimensionales.	Comparo y ordeno objetos respecto a atributos medibles. Realizo y describo procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto. Analizo y explico sobre la pertinencia de patrones e instrumentos en procesos de medición.
Al terminar quinto grado	Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características. Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas. Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.	Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies)

Fuente (Adaptado de los Estándares Básicos de Competencias MEN, 2002).

	Pensamiento espacial y sistemas geométricos	Pensamiento métrico y sistemas de medidas
Al terminar séptimo grado	Clasifico polígonos en relación con sus propiedades. Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales. Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos. Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas. Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas). Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.	

Fuente. Adaptado de los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006).

En la propuesta de Ministerio de Educación Nacional (MEN) no se encuentra de manera explícita una forma de abordar las construcciones con regla y compás, y tampoco se argumenta su importancia en la concepción de objetos matemáticos desde el punto de vista geométrico. Las representaciones enfocadas en la constructibilidad, juegan un papel importante en la consolidación de la comprensión, ya que permiten evidenciar hechos que dificultan los procesos de aprehensión en geometría, como por ejemplo la percepción. Para Duval (2016) la percepción causa problemas, ya que en muchas ocasiones no se disocia los aspectos de magnitudes y distinción visual, por lo cual los estudiantes se inclinan por adoptar a la medición como aspecto mediador en la solución de situaciones que requieren una representación de tipo gráfico. En los Estándares Básicos de Competencias (EBC) planteados por el MEN (ver Tabla 1) la comprensión de formas y sus propiedades se relegan únicamente a la movilización de procesos matemáticos desde el sentido de las propiedades asociadas a la medición, y se deja de lado la importancia de la concepción de invarianza de las formas como proceso inicial en la consolidación de estructuras mentales relativas a la configuración de formas.

En cuanto a los derechos básicos de aprendizaje (DBA, 2006), se abordan las construcciones con regla y compás en algunas etapas de los procesos de formación, pero tampoco se realizan de manera explícita, quedan a criterio de los docentes su uso e incorporación en las mallas curriculares. En la Tabla 2 se muestran los DBA que pueden llevar a propiciar el desarrollo de trabajos relacionados con las construcciones con regla y compás.

Tabla 2

Derechos básicos de aprendizaje relacionados con la geometría

Grado	DBA
Primero	Realiza medición de longitudes, capacidades, peso, masa, entre otros, para ello utiliza instrumentos y unidades no estandarizadas y estandarizadas. Compara objetos del entorno y establece semejanzas y diferencias empleando características geométricas de las formas bidimensionales y tridimensionales (Curvo o recto, abierto o cerrado, plano o sólido, número de lados, número de caras, entre otros). Describe y representa trayectorias y posiciones de objetos y personas para orientar a otros o a sí mismo en el espacio circundante.
Segundo	Compara y explica características que se pueden medir, en el proceso de resolución de problemas relativos a longitud, superficie, velocidad, peso o duración de los eventos, entre otros. Utiliza patrones, unidades e instrumentos convencionales y no convencionales en procesos de medición, cálculo y estimación de magnitudes como longitud, peso, capacidad y tiempo. Clasifica, describe y representa objetos del entorno a partir de sus propiedades geométricas para establecer relaciones entre las formas bidimensionales y tridimensionales. Describe desplazamientos y referencia la posición de un objeto mediante nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en la solución de problemas.
Tercero	Describe y argumenta posibles relaciones entre los valores del área y el perímetro de figuras planas (especialmente cuadriláteros). Realiza estimaciones y mediciones de volumen, capacidad, longitud, área, peso de objetos o la duración de eventos como parte del proceso para resolver diferentes problemas. Describe y representa formas bidimensionales y tridimensionales de acuerdo con las propiedades geométricas.
Cuarto	Caracteriza y compara atributos medibles de los objetos (densidad, dureza, viscosidad, masa, capacidad de los recipientes, temperatura) con respecto a procedimientos, instrumentos y unidades de medición; y con respecto a las necesidades a las que responden. Elige instrumentos y unidades estandarizadas y no estandarizadas para estimar y medir longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez, temperatura, y a partir de ellos hace los cálculos necesarios para resolver problemas. Identifica, describe y representa figuras bidimensionales y tridimensionales, y establece relaciones entre ellas. Identifica los movimientos realizados a una figura en el plano respecto a una posición o eje (rotación, traslación y simetría) y las modificaciones que pueden sufrir las formas (ampliación-reducción).
Quinto	Explica las relaciones entre el perímetro y el área de diferentes figuras (variaciones en el perímetro no implican variaciones en el área y viceversa) a partir de mediciones, superposición de figuras, cálculo, entre otras. Identifica y describe propiedades que caracterizan en cuerpo en términos de la bidimensionalidad y la tridimensionalidad y resuelve problemas en relación con la composición y descomposición de las formas.

Fuente. Adaptado de los Derechos Básicos de aprendizaje (MEN, 2006).

Grado	DBA
Sexto	Utiliza y explica diferentes estrategias (desarrollo de la forma o plantillas) e instrumentos (regla, compás o software) para la construcción de figuras planas y cuerpos. Propone y desarrolla estrategias de estimación, medición y cálculo de diferentes cantidades (ángulos, longitudes, áreas, volúmenes, etc.) para resolver problemas.
Séptimo	Representa y construye formas bidimensionales y tridimensionales con el apoyo en instrumentos de medida apropiados. Utiliza escalas apropiadas para representar e interpretar planos, mapas y maquetas con diferentes unidades. Observa objetos tridimensionales desde diferentes puntos de vista, los representa según su ubicación y los reconoce cuando se transforman mediante rotaciones, traslaciones y reflexiones.
Octavo	Describe atributos medibles de diferentes sólidos y explica relaciones entre ellos por medio del lenguaje algebraico. Identifica relaciones de congruencia y semejanza entre las formas geométricas que configuran el diseño de un objeto. Identifica regularidades y argumenta propiedades de figuras geométricas a partir de teoremas y las aplica en situaciones reales.
Noveno	Utiliza teoremas, propiedades y relaciones geométricas (teorema de Thales y el teorema de Pitágoras) para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes. Conjetura acerca de las regularidades de las formas bidimensionales y tridimensionales y realiza inferencias a partir de los criterios de semejanza, congruencia y teoremas básicos. Interpreta el espacio de manera analítica a partir de relaciones geométricas que se establecen en las trayectorias y desplazamientos de los cuerpos en diferentes situaciones.

Fuente. Adaptado de los Derechos Básicos de aprendizaje (MEN, 2006).

En este punto se puede observar que los criterios empleados en la comprensión de formas derivan del uso de métricas, funciones y teoremas, además de solicitar las evidencias en torno a la construcción de representaciones que permitan ver aspectos geométricos, sin ahondar en la pertinencia de crearlas de una manera que no lleve a generar conflictos con la percepción. La importancia de construir y usar representaciones optimas que modelen situaciones, lleva a constituir criterios de análisis en estos aspectos.

Algunas investigaciones sobre las construcciones con regla y compás

En este apartado se expondrán algunos trabajos relacionados con las construcciones con regla y compas, con el fin de evidenciar las diferentes problemáticas que constituyen la investigación en este tema.

Un primer trabajo corresponde a Ramírez (2011) “construcción de polígonos regulares”. En este escrito se plantea una preocupación por las nociones y conceptos presentes en las construcciones con regla y compás de algunos polígonos regulares. El autor plantea que “los estudiantes no reconocen propiedades de los polígonos regulares ni sus elementos involucrados en su construcción, estas dificultades tienen su origen en la falta de fundamentación en geometría que están asociadas con obstáculos de tipo epistemológico, cognitivo y metodológicos" (p.1). En el desarrollo del trabajo se presenta un capítulo de fundamentación relacionadas con algunas construcciones con regla y compás, con la intención de profundizar en estos temas, dando así algunos elementos que permitirán emplear estas construcciones en la enseñanza de la geometría desde el análisis y planteamiento de dos etapas del modelo de Van Hiele, la visualización (percibe los objetos en su totalidad y como unidades) y el análisis (Percibe los objetos como formados por partes y dotados de propiedades, aunque no identifica las relaciones entre ellas). Para lograr realizar el análisis, el autor plantea actividades relacionadas con los conceptos básicos de la construcción de polígonos regulares, con el fin de afianzar propiedades y relaciones de estos. Al finalizar, se concluye que el uso de la regla y compás favorece el desarrollo de las capacidades cognitiva, práctica, comunicativa, interpretativa, además de afirmar que el manejo de estas herramientas requiere conocer y comprender parte de la geometría.

Un segundo trabajo de Itzcovich (2005) denominado "iniciación al estudio de la geometría: de las construcciones a las demostraciones". En el libro se describe una perspectiva de análisis acerca del papel de las construcciones geométricas en los procesos formativos de los estudiantes.

El autor comenta que "la práctica geométrica tal como la estamos entendiendo (…) tiene un alto valor formativo y es por tal motivo que todos los alumnos tienen derecho a acceder a ella", es decir por un lado los procesos empleados por los estudiantes requieren de un análisis detallado y por otro el profesor debe realizar actividades que permitan el acceso a los objetos geométricos. Para proponer una forma de superar estos obstáculos se plantea el interrogante "¿Cómo ayudar a los alumnos a comprender que los objetos con los que trabaja la geometría son teóricos y no reales?" a partir del cual desglosa algunos pasos para abordar "problemas geométricos", y teniendo en cuenta la característica de que "los dibujos son leídos por los alumnos de una cierta manera que no siempre es aceptada por la geometría".

La intención del libro es proponer y analizar situaciones permitan a los alumnos realizar un trabajo geométrico articulado, para lo cual propone cuatro particularidades que debería tener una situación para ser llamada "problema geométrico". La primera particularidad hace énfasis en la necesidad de poner en juego las propiedades de los objetos geométricos, la segunda hace énfasis en la interacción del estudiante con objetos que no existen en el mundo físico, por el contrario, pertenecen a un espacio conceptual, en donde los trazos y dibujos son meras representaciones de estos objetos.

En la tercera realiza una significación de la función de los dibujos en la solución de problemas, pero hace hincapié en que no son suficientes para dar una solución empleando métodos sensoriales. En la cuarta particularidad plantea que la validación de la respuesta (por parte de los estudiantes) depende de la utilización de las propiedades de los objetos geométricos, es decir no se da de manera empírica, además dispone que las argumentaciones, a partir de las propiedades, permiten que los estudiantes generen un nuevo conocimiento.

Por último, en el texto se plantean cinco etapas para desarrollar la pregunta planteada al inicio, y lo hace de la siguiente manera: Como primera medida se hace un análisis desde la premisa que "bajo ciertas condiciones, las construcciones con instrumentos clásicos de la geometría permiten explorar, identificar, conjeturar y validar propiedades de las figuras", para lo cual, realiza un análisis de los datos con los que se debe construir una figura y como las relaciones entre dichos datos y la construcción, convergen útil para abordar objetos geométricos. En segundo lugar, propone un análisis de los argumentos que permiten abordar los objetos geométricos. Como tercera etapa se plantea la validación de respuestas a partir de la utilización de argumentos conocidos de la geometría. Como cuarta etapa plantea la relación entre construcciones geométricas y el álgebra, con el fin de exponer la importancia de los recursos algebraicos en el intento de comunicar los procesos empleados en las construcciones. Por último, propone una secuencia de trabajo para abordar contenidos particulares de la geometría, para este caso ángulos inscritos en una circunferencia y ángulos centrales.

Un tercer trabajo desarrollado por Menares (2013) se titula "Construcciones geométricas solo con compás". Este artículo inicia haciendo énfasis en la importancia de las construcciones con regla y compás de la geometría clásica euclidiana, resaltando que la regla es un instrumento de borde recto cuya única función es trazar líneas rectas y no realizar medidas. Bajo este argumento plantea la demostración por medio de ejemplos del teorema de Mohr-Mascheroni, el cual plantea que todas las construcciones con regla y compás también son posibles empleando únicamente el compás. En el artículo plantea 4 ítems basados en la observación hecha por Mascheroni, los cuáles son:

1. Dibujar un círculo de centro y radio dados.
2. Encontrar los puntos de intersección de dos círculos dados.
3. Encontrar los puntos de intersección de un círculo dado con una recta dada, definida está por dos puntos.
4. Encontrar el punto de intersección de dos rectas, cada una determinada por dos puntos dados.

El autor plantea que las dos primeras tienen solución inmediata, por el contrario, Las dos últimas necesitan de una demostración un poco más elaborada. Para mostrar la validez de los dos ítems finales, en el texto se mencionan algunos ejemplos que permiten ver la posibilidad de construcción empleando únicamente compás. Al terminar el autor propone cinco problemas que admiten consolidar la hipótesis propuesta sobre las construcciones usando únicamente compás.

Formulación del problema de investigación

Las perspectivas planteadas hasta el momento dejan a la vista problemas frecuentes en la realización de representaciones gráficas y dan paso al planteamiento desde este trabajo, centrado en las representaciones originadas de la interacción de los estudiantes con las nociones de objetos geométricos.

En este sentido, se plantea la pregunta de investigación: ¿Cómo evolucionan las representaciones de objetos y procesos empleados por los estudiantes, relativos a las construcciones con regla y compás griegos, de sistemas de polígonos a la luz de la teoría noético semiótica de Duval?

La pregunta planteada se aborda desde la concepción de los problemas que pueden generar las representaciones gráficas en torno a las dificultades de comunicación. En el desarrollo del trabajo se propone una clasificación de las representaciones obtenidas de la interacción de los estudiantes con actividades que implican el uso de construcciones con regla y compás creadas con el fin de analizar su uso como herramienta de comprensión y comunicación. Por otra parte, se analizan definiciones propuestas en textos académicos relacionadas con la concepción de polígonos, particularmente triángulos y cuadriláteros, además de revisar las construcciones propuestas en los textos. En otra instancia, se realizar una indagación sobre la forma en que las prácticas de los estudiantes se involucran con aspectos teórico del enfoque semiótico.

En última instancia se desarrolla una evaluación sobre los procesos cognitivos de los estudiantes con el fin de constituir un ambiente que permita la comprensión del uso de representaciones empleando regla y compás.

Objetivo general (OG)

Analizar las representaciones de objetos y procesos empleados en las construcciones de formas geométricas relativas a sistemas de polígonos empleando regla y compás griegos en medio virtual.

Objetivos específicos

- Diseñar situaciones que permitan la producción de representaciones de objetos geométricos relativos a sistemas de polígonos construidas con regla y compás griegos en ambientes de geometría.
- Caracterizar en registros las representaciones y los obstáculos emergentes en la dinámica del aprendizaje de formas geométricas construidas con regla y compás griegos, enfatizando en las entradas clásicas a la geometría de la teoría semiótica.
- Detectar los elementos teóricos usados en los registros de representación y su estructura, para contextualizar el desarrollo del análisis del enfoque semiótico de las prácticas de los estudiantes al aprender construcciones con regla y compás griegos.
- Evaluar los procesos cognitivos del pensamiento espacial de los estudiantes, involucrados en el aprendizaje de construcciones con regla y compás griegos en ambientes virtuales de aprendizaje.

Justificación

En el contexto educativo colombiano la matemática en los niveles escolares se ha dividido en cinco pensamientos que describen las formas en que los estudiantes deben abordar los procesos de comprensión en esta asignatura. Particularmente, los Derechos Básicos de Aprendizaje han agrupado estos cinco pensamientos en tres vertientes, las cuales fundamentan el desarrollo curricular de las instituciones educativas en torno a la matemática, aquí se encuentra el pensamiento numérico variacional, el pensamiento aleatorio y el pensamiento métrico espacial.

Este último pensamiento se centra en el desarrollo de sistemas geométricos, su representación y conceptualización. Debido la incorporación de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en el ámbito académico, la representación gráfica de formas geométricas se ha trasladado al uso de software, que simula los trazados necesarios para dibujar lugares geométricos, lo cual, en muchos casos, ha reemplazado el uso conceptual de instrumentos de trazado como la regla y el compás. Estas nuevas tecnologías han permitido que en muchos casos las situaciones planteadas por los profesores evolucionen, pero en otros, han reducido la creación de situaciones que fortalezcan la comprensión de objetos geométricos a partir de su construcción geométrica.

El trazado de formas, es un tema que se ha relegado a la inclusión de software que simulan su construcción, y según Duval (2016) "entre todos los campos de conocimiento en los que los estudiantes deben entrar, la geometría es la que exige la actividad cognitiva más completa, ya que apela al gesto, al lenguaje y a la mirada" (p.13), razón por la cual, es importante fortalecer la creación de actividades que incluyan el trazado de formas, para comprobar cualidades de objetos y construir significados eficientes en las prácticas de los estudiantes.

Las representaciones en matemática son fundamentales, ya que de estas depende la comprensión, particularmente en geometría, es importante incluir por lo menos tres tipos de representación en las actividades desarrolladas por los estudiantes, una representación en palabras (lingüística), una representación gráfica, y representaciones que designen objetos con el fin de ser señalados. En referencia a las representaciones, la investigación en didáctica ha abordado este tema con sumo interés, ya que es posible determinar conflictos asociados a la comunicación y obstáculos que se asocian a la identificación de objetos en matemática.

Esta investigación se desarrolla con el fin de indagar en la manera como los estudiantes emplean las representaciones en situaciones que requieren el uso de la regla y el compás griegos (a partir de ahora los términos regla y compás, harán referencia a los instrumentos con las limitaciones griegas, ya que su uso a lo largo del trabajo es frecuente) y concretar una sistematización en torno a la creación de material de apoyo para el desarrollo de ambientes de aprendizaje que permitan a los estudiantes superar conflictos relacionados con la construcción de sistemas de polígonos y sus componentes, empleando la regla y el compás.

Marco teórico

La particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que estas actividades cognitivas requieran de la utilización de sistemas de expresión y de representación distintos a los del lenguaje natural o de las imágenes

(Duval, 1991)

Esta investigación está contextualizada teóricamente en los registros de representaciones semióticas y su análisis se centra en la forma como el estudiante gestiona el lenguaje natural, gráfico y numérico, para lo cual, es necesario evidenciar las características conceptuales que llevan a su interpretación. En primer lugar, es indispensable comprender que la caracterización y la comprensión de un objeto matemático depende de la diferenciación de su representación, en palabras de Duval (1999) “no puede haber comprensión en matemática si no se distingue un objeto de su representación” (p.13). En este capítulo se muestran nociones referentes a la semiótica en la didáctica de la matemática, tal como, signo, representación, sistema semiótico, comunicación, objeto matemático, entre otros, con el fin de puntualizar en aspectos teóricos necesarios para la descripción de las estructuras de aprehensión de los estudiantes.

Semiótica en la didáctica de la matemática

La didáctica de la matemática como ciencia cubre aspectos amplios concernientes a la estructuración cognitiva en el aprendizaje de las matemáticas entre otras cosas. Tal es el caso de la semiótica, la cual ha puesto un punto de sumo interés en la investigación en educación matemática. Este campo de estudio ha tomado fuerza desde los años ochenta, estudiando algunos problemas inmediatos e inherentes a la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Uno de los autores más relevantes es Raymond Duval, quien, desde los aportes de Vigotski, plantea un esquema de investigación basado en el papel de las representaciones en la formación de los esquemas cognitivos del ser humano.

Comprender el campo de la semiótica en la didáctica de la matemática requiere una profundización en aspectos epistemológicos y teóricos de esta ciencia, recorrido que se hace de manera magistral en D'Amore, Fandiño y Iori (2013), donde se plantea una senda iniciando con los orígenes del término semiótica, pasando por Platón, Aristóteles, los estoicos, Epicúreos, Euclides, hasta los exponentes modernos como Pierce y De Saussure, indagando también en planteamientos de Piaget, Vygotsky y Eco, con el fin de sentar el precedente histórico en el desarrollo humano.

La aparición de la semiótica en la matemática es un aspecto que ha estado presente en toda la evolución humana, hecho que se hace evidente cuando indagamos en la esencia de los grafos, gestos, señales y aspectos que se emplean para comunicarnos matemáticamente, lo cual es un campo fundamental en lo concerniente a la enseñanza y el aprendizaje de esta ciencia. Los griegos en su afán por comprender el universo codificaban información en números, los cuales empleaban para dar sentido a lo existente en su mundo sensible, esta forma de entender el entorno llevo a un aporte significativo, según Kline (1992):

> Una de las grandes contribuciones griegas al concepto mismo de la matemática fue el reconocimiento consciente y el énfasis puesto en el hecho de que los objetos matemáticos, números y figuras geométricas, son abstracciones, ideas producidas por la mente y claramente distintas de los objetos o imágenes físicas. (p. 54)

Este aporte llevo a los griegos a desarrollar una matemática en torno a la numerología y la geometría, pero lo esencial en estos aspectos, es la forma sublime en que simplificaban la información empleando signos, de los cuales se hablará en otro apartado.

Estas concepciones sobre los objetos permiten ampliar el espectro de entendimiento sobre lo que se comunica, el poder de cada grafo empleado (signo, símbolo, explicados más adelante) y como estos estructuran el sentido de una idea. En D’Amore, Fandiño y Iori (2013) se muestra que “Platón consideraba los nombres como medios para representar cosas en forma aproximada, imprecisa o incompleta” (p. 23) lo cual daba un punto para comprender la separación entre el objeto y sus representaciones, además de la línea fina que une la comprensión de los objetos con sus signos. A partir de este planteamiento el signo aparece como un aspecto fundamental en el aprendizaje y es de hecho primordial en la comprensión de los objetos matemáticos.

Por otra parte, el planteamiento de Aristóteles fundamentaba un aspecto esencial en la comprensión de la semiótica, el cual ligaba el pensamiento de una persona con las representaciones producidas, de acuerdo con Eco (como se citó en D’Amore, Fandiño y Iori 2013) para Aristóteles “las palabras pueden ser consideradas como síntomas de las afecciones del alma, en el sentido que una emisión verbal puede ser síntoma del hecho que el emisor tiene algo en mente “(p. 28), lo cual nos conduce a una de los pilares en la comunicación, el intento por darnos a entender.

Así mismo, otro planteamiento que aporta al desarrollo de la semiótica es el de los Estoicos, quienes establecieron una relación entre el lenguaje y las cosas, según lo cual planteaban dos temas de trabajo que se diferenciaban ampliamente, el primero de ellos liga al pensamiento, la realidad y el lenguaje en una amalgama de relaciones que dan forma a las expresiones lingüísticas y el segundo es la apropiación del signo como parte fundamental de las proposiciones en el seno del análisis de naturaleza lógica (D’Amore, Fandiño y Iori, 2013, p.32), esta forma de percibir la comunicación desde la teoría del signo permitió desglosar a las expresiones lingüísticas en partes más finas (el significado, el significante y el referente) y así facilitar su análisis.

Simultáneamente los Epicúreos desarrollaban un pensamiento en torno a los sentidos, en donde mencionaban a las representaciones como las manifestaciones de la interacción de los humanos con los objetos; los objetos desprenden capas de átomos que interactúan con los sentidos y estos crean imágenes mentales que dibujan una imagen aproximada del objeto. Para los Epicúreos estas representaciones solo permiten conocer parcialmente los objetos, es decir, solo muestran algunas de sus características. El aporte de los Epicúreos permite tomar el camino referente a la forma de pensar las representaciones propias, en las cuales Duval profundiza.

El trabajo realizado por Euclides se centra en la fundamentación de la geometría, en donde revela aspectos que desligan la concepción que se tenía en la época del número. La introducción de elementos de tipo cualitativo como la recta, el punto, el segmento, entre otros permite una renovada forma de estudiar los aspectos abstractos de la geometría. Su relación con la semiótica radica en el hecho de las representaciones de números mediante segmentos y su construcción, construcciones que son esquemas de descripción de los elementos que componen la representación del objeto, en este caso geométrico, que se desea trabajar.

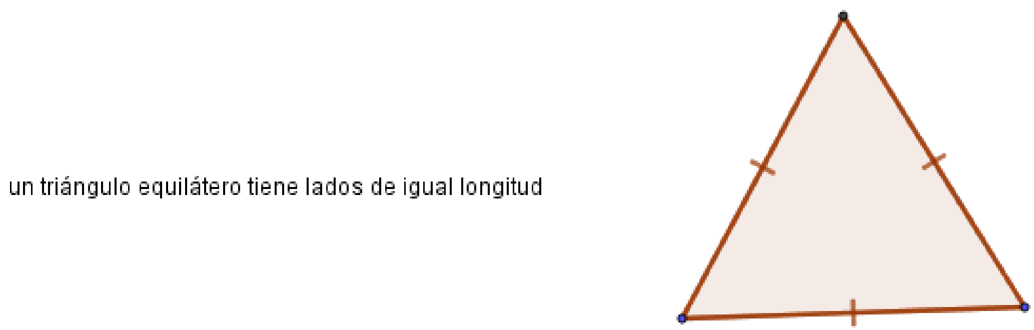
En el siglo XII Descartes se involucra en cuestiones referentes a los signos y hace su irrupción en la semiótica en el sentido en que particulariza una forma de representación a partir de la experiencia con los elementos del entorno, para él, las representaciones creadas por la experiencia funcionan como mecanismos, que permiten asociar nuestra experiencia con un discurso, es decir, “en la explicación general del movimiento corporal no se hacen intervenir sino los procesos de estímulo y respuesta, sean estos estímulos externos como los objetos fuera de la mente o internos como las pasiones que provienen de ella” (Benítez, 2010, P. 10), según lo cual nuestra idea de las cosas también adquiere un estatus derivado de lo empírico, lo cual permite el estudio de un contexto, así pues, Descartes también menciona a los signos que existen en la naturaleza, en concordancia con Descartes Benítez (2010) afirma que “la naturaleza ha establecido signos visibles que nos remiten a la existencia de entidades, realidades o “cosas en sí” las cuales no se asemejan a tales signos" (P. 13), pensamiento que coincide con los Epicúreos y son una afirmación del pensamiento Platónico.

En la cúspide de los estudios en torno a los signos se encuentra Charles Sanders Peirce a quien se debe el uso actual de la palabra semiótica, estudio formal de los signos, y quien aborda un esquema en el que las ideas pueden ser dinamizadas o alcanzadas mediante signos, según Radford (2006), quien afirma que la doctrina instaurada por Peirce, se centra en la manera en que un individuo genérico utiliza signos para formar nuevas ideas y nuevos conceptos para alcanzar la verdad, perspectiva que centra la atención en lo cognitivo de las personas, es decir en como las representaciones evolucionan con el fin de comunicar y significar características, propiedades, o incluso objetos. Por otra parte, D'Amore, Fandiño y Iori (2013) interpretan que "los signos de Peirce son medios para representar algo para alguien, son medios de pensamiento, de comprensión, de razonamiento, de aprendizaje" (P. 54), interpretación que centra el estudio en la forma en que se representa un objeto.

A modo de ejemplo, en un dialogo sobre geometría, particularmente sobre triangulo, un individuo 1 intenta comunicarle a otro individuo 2 su comprensión del triángulo equilátero, para hacerlo el individuo 1 recurre a representaciones sobre lo que entiende de triángulo equilátero y en una primera instancia lo hace por medio de palabras, alegando que "un triángulo equilátero tiene lados de igual longitud". En este momento la idea de triángulo equilátero se ha movilizado del individuo 1 al 2 en una representación de un aspecto particular del objeto, es decir se ha codificado, el emisor (individuo 2) recibe esta representación y la decodifica, convirtiéndola en una idea, a continuación, él (individuo 2) emplea una nueva representación en busca de aprobación por parte la otra persona (individuo 1) y lo hace mediante una representación, en este caso gráfica (ver Figura 1, imagen de la izquierda) donde dibuja un triángulo señalando la congruencia entre lados, esta representación viaja hasta el nuevo emisor (individuo 1), es decodificada y convertida en idea nuevamente, en donde se continua la conversación repitiendo esta dinámica indefinidamente, o hasta que los dos individuos consideren satisfecha su intención de comprensión.

Figura 1

Representaciones de un Triángulo Equilátero



Fuente: Elaboración propia.

Lo mencionado en el ejemplo anterior es puesto en formalidad por D'Amore, Fandiño y Iori (2013) haciendo referencia a una interpretación de signo dada por Pierce, donde exponen que:

> De esta definición emerge una relación fundamental que involucra tres elementos: un *representamen*, es decir el vehículo, la parte "material" del signo; un *objeto,* eso a lo cual el *representamen* reenvía; un *interpretante*, es decir lo que deriva o viene generado de la relación entre *representamen* y el *objeto.* (P.55)

Esta interpretación constituye uno de los aspectos fundamentales en el estudio de la semiótica en la didáctica de la matemática, ya que es bajo estos criterios, que se piensa la comunicación y el uso de signos.

Con respecto a la definición de signo dada por Peirce, se destaca también una interpretación esencial sobre objeto, en donde, se da una dualidad entre la comprensión de este. El objeto puede ser "*inmediato*, es decir, el objeto tal y como es representado por el signo, *dinámico*, es decir, el objeto realmente eficiente, pero no inmediatamente presente; lo que guía la producción del signo, y de lo cual el *objeto inmediato* representa únicamente un aspecto particular". (D'Amore, Fandiño y Iori 2013)

Esta dualidad remite al hecho que para comunicarnos en necesario emplear más de una representación (hipótesis planteada por Duval, de la cual se hablará en otro apartado), y se da en el intercambio constante de representaciones mostradas en el planteamiento de Pierce.

A partir de este punto es necesario iniciar con la particularización de algunos elementos necesarios en la constitución de una comprensión sobre el papel de la semiótica en la investigación que se plantea en este escrito.

El signo

En este apartado se dará una breve descripción de la concepción sobre signo, debido a su complejidad y extensión investigativa, con el fin de puntualizar en algunos aspectos relevantes para la investigación.

El entendimiento concerniente a la comunicación inicia en el seno de la indagación sobre los elementos que la componen. El signo es el pilar de toda forma de comunicación, el cual es el que evoca de manera dinámica todos los significados, imágenes, esquemas, relaciones, entre otros (Zeccheto, 2002), referentes a objetos que se movilizan en un proceso de aprendizaje.

Nuestra naturaleza como seres humanos nos lleva a cuestionar constantemente sobre las cosas que percibimos, y estas cosas plantean la necesidad de nombrarlas o disfrazarlas de alguna forma que sea comprensible para las personas. Estas percepciones de las cosas son las que generan nuestra visión del mundo y en este sentido, para los Epicúreos, el mundo es una experiencia única para cada individuo, lo cual lleva a pensar que la realidad es una construcción de carácter individual y luego compartida por medio de los elementos que empleamos para comunicar nuestra comprensión. Esta forma de ver el mundo fue la que dio origen a la necesidad de establecer estas relaciones por medio de signos, que en sus orígenes está asociado con el termino griego *semeion* y que etimológicamente hace referencia a un síntoma, para los griegos una afección del alma.

La relación con las cosas permite pensar el sentido de la existencia de los signos, desde la perspectiva de las cosas como seres, según Zecchetto (2002) "si queremos tener un contacto significativo con la realidad o sea, con el ser y los seres, nos vemos obligados a construir otros seres llamados signos y ellos nos permiten captar las cosas con algun significado" (P. 66). Esta relacion se puede ver claramente en los procesos de construccion del lenguaje en un niño, donde en su afan por comprender el mundo codifica lo que persibe en ruidos, y poco a poco refina estos signos hasta llegar a construir una palabra (signo linguistico) que le permita comunicar su afeccion. En matemática, es necesario poder vincular este proceso, ya que de este depende enteramente la constitucion de una comunicación global y efectiva.

Pierce plantea tres tipos de signos de acuerdo con su relación con el objeto, el primero es el icono, el cual tiene una relación con el objeto de manera directa, es decir, posee alguna cualidad del objeto, el índice señala cualidades del objeto, así pues, no se parecen a los objetos, pero evocan de manera directa al objeto. Por último, está el símbolo, que está relacionado con el objeto mediante el interpretante, el cual le da sentido teniendo en cuenta un acuerdo estipulado en la relación comunicativa (D'Amore, Fandiño y Iori 2013).

En la Figura 2 se muestran los signos en un ejemplo particular de concepción sobre un segmento, la imagen de la izquierda es el icono de un segmento, la imagen central es la palabra que funciona como índice, ya que conduce al objeto una vez se lee, la imagen de la derecha es un símbolo del segmento, el cual solo tiene sentido si un interpretante lo asocia con el objeto.

Figura 2.

Signos del Objeto Segmento

Segmento AB

Fuente: Elaboración propia.

La representación

En la década de los 90 Raymond Duval plantea un panorama de análisis de las insidias generadas en la educación matemática, abriendo así un campo de estudio en la didáctica de la matemática enfocado en el análisis semiótico, tomando como eje fundamental las representaciones presentes al momento de abordar y conceptualizar objetos matemáticos. Duval en su libro Semiosis y Pensamiento Humano, aborda la importancia de la representación en los procesos de aprehensión desde la perspectiva de Piaget, en donde “lo que puede parecer un error es considerado una visión distinta de las cosas o de otra lógica” (Duval, 1999, p. 25), lo que lleva a pensar las diferentes formas en que las representaciones permiten abordar objetos matemáticos.

Las representaciones son el eje fundamental en los procesos de cognición y han aparecido como diversas interpretaciones, en particular como tres acepciones importantes, tal y como lo plantea Duval (1999). La primera de ellas es propuesta por Piaget y consiste en el proceso de evocación de los objetos ausentes por medio de representaciones mentales, esto en el marco de la apropiación del entorno por parte de los niños en el último estadio de la inteligencia sensomotriz.

La segunda se presentó como representación interna o computacional, que se centra en los sistemas de símbolos que son necesarios para la aprehensión y que, por el contrario de la propuesta de Piaget, se trata de codificar información (Duval, 1999, p. 26). La tercera forma se muestra como representación semiótica, en esta concepción los sistemas de símbolos empleados como representación son susceptibles de ser transformados en representaciones equivalentes, las cuales, desde el punto de vista de Pierce, pueden llegar a significar otra cosa para un interpretante (Duval, 1991, p. 26-27).

Estas interpretaciones de la representación dejan al descubierto la fragilidad de la mente al momento de construir estructuras de concepciones, ya que es relativamente sencillo crear una estructura errónea o parcialmente acertada, de aquí también se efectúan investigaciones sobre las teorías de errores y obstáculos, tal y como se plantea en D'Amore (2006).

La comprensión profunda de las dificultades que entraña la conciencia de trabajar pensando en la pertinencia de las representaciones, atormenta hasta al maestro más experimentado, ya que implica la concepción de su clasificación y diferenciación, en este punto, Duval (1999) plantea un cuestionamiento de sorprendente profundidad, ¿Qué tienen en común fenómenos tan diferentes como creencias, codificación de la información, expresiones lingüísticas, imágenes mentales o figuras trazadas sobre un soporte físico, para que a todos se les clasifique bajo el término de representación? (p. 32) de donde describe una clasificación desde dos miradas, la oposición interno/externo y la oposición consciente/no-consciente.

La conciencia para Duval (1999), se traduce en el estatus de presencia de algo, que para el interpretante se convierte en objeto (P. 32), foco de su atención, y que lo lleva a intentar comprenderlo desde varias miradas. La no-conciencia se asocia con la incapacidad de observar elementos, factores, signos, entre otros, los cuales no se asocian como objeto y se pierden del interés de su comprensión (Duval, 1999, p.32). Pasar de la no-conciencia a la conciencia se interpreta como un proceso de objetivación, el cual para Duval (1999), "corresponde al descubrimiento por el sujeto mismo de aquello que hasta entonces no sospechaba, incluso si otros se lo hubieran explicado" (p. 32). Este proceso despierta en el sujeto un sinfín de conexiones cognitivas que amplían su panorama de comprensión sobre los objetos.

Por otro lado, "la oposición externo/interno es la oposición entre lo que de un individuo, de un organismo o de un sistema es directamente visible y observable y lo que, por el contrario no lo es" (Duval 1999, p. 33), de hecho, una gráfica, un dibujo, una palabra son expresiones que traducen nuestra forma de ver a los objetos, dicho en otras palabras: si la expresión forma parte de la esfera de lo material, hablaremos de representaciones públicas (o externas, si por externas entendemos que forma parte de la esfera de lo público), mientras que, si forma parte de la esfera de lo mental, hablaremos de representaciones privadas (o internas, si por interna entendemos no-pública) (Font 2000, p.5).

Las representaciones externas juegan un papel fundamental en los procesos de comunicación, ya que se trata de la exteriorización de pensamientos (representaciones internas) con el fin de que un interpretante conciba los pensamientos del emisor, esta interpretación por parte del interpretante solo es posible si conoce el mismo sistema semiótico que el usado por el emisor (Duval 1999, p.33).

Estas dos formas de interpretar la representación dan validez al hecho de que son el producto de una interacción con el objeto en sus diferentes formas de verlo, al respecto, Suarez y Reyes (2018) comentan que "uno de los medios para que se produzca el aprendizaje es comprender y encontrar el significado en las representaciones del objeto que es abstracto" (P. 83), lo cual lleva a que cada representación permita visibilizar un aspecto concreto del objeto del cual se está hablando, y la comprensión radica en la identificación de los que hace significar cada representación.

Pero no es suficiente con identificar las cualidades o características en concreto que se tratan en las representaciones del objeto, es también necesario comprender que “las distintas representaciones de un mismo objeto no presentan las mismas propiedades y a su vez ninguna de las representaciones de ese objeto es completa” (Damisa y Ponzzeti, 2015, p.136), lo cual, lleva a considerar la cantidad y la pertinencia de las representaciones que se emplean en una clase, lo que en palabras de Duval (1998) desemboca en que:

> Para los sujetos una representación puede funcionar verdaderamente como una representación, es decir, permitirle el acceso al objeto representado, solo cuando cumplen dos condiciones: que dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una situación, de un proceso (…) y que “espontáneamente” puedan convertir de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo (p.30)

La producción de representaciones es una acción indispensable en un proceso de aprehensión, ya que de ellas depende la determinación de la forma pura del objeto estudiado. En este proceso una persona debe transitar por algunas etapas que permiten la formación de una idea clara del objeto. Hay que notar, la necesidad de crear representaciones semióticas y representaciones mentales, las cuales son el paso de la conciencia y la no conciencia, además de incluir las representaciones externas e internas (Duval, 1999).

Las representaciones semióticas guardan una relación estrecha con la percepción sensorial, ya que permiten observar cualidades del objeto que toman un estatus icónico, y son indispensable para señalar o resaltar atributos propios del objeto, ya que son a la vez representaciones conscientes y externas (Duval, 1991, P. 34), y es debido a que el objeto guarda relaciones con sus representaciones, como lo plantea Pierce, en el sentido icónico, si los signos empleados representan al objeto por medio de una semejanza simplemente cualitativa, lo que constituye una imagen.

La relación es estructural, como en el caso de un diagrama, cuando la representación evoca relaciones entre cualidades, como en el caso del dibujo de un polígono, en el cual la relación entre lados y superficie desemboca en el área. La relación entre semejanza (metáfora), que liga las cualidades de un objeto a situaciones concretas, como en el caso de usar un polígono para analizar, por ejemplo, la superficie de un terreno (D'Amore, Fandiño y Iori, 2013, p.64). Teniendo en cuenta estas relaciones las representaciones semióticas se clasifican en analógicas y no analógicas (Duval, 1991, p. 34).

Así mismo, se puede hablar de representaciones mentales, para las cuales, es imperativo entender que es una imagen mental. Según D'Amore (2006):

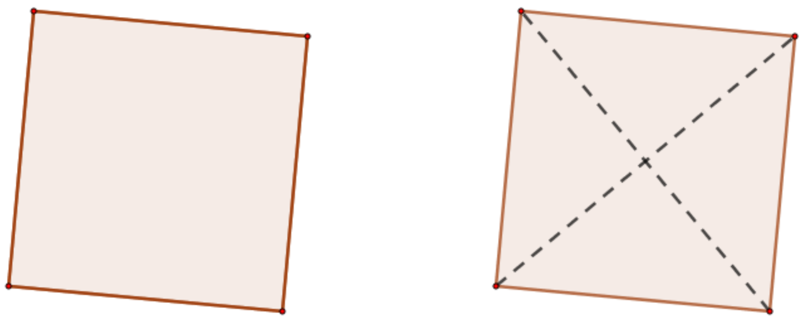
> Una imagen mental es el resultado figural, proposicional o mixto producido por un estímulo (interno o externo). La imagen mental se halla condicionada por la experiencia personal, por las influencias culturales, por los estilos personales, en pocas palabras se trata de un producto típico del individuo, pero con constantes y connotaciones comunes entre individuos diferentes. Puede más o menos elaborarse conscientemente (pero también esta capacidad de elaboración depende del individuo). Sin embargo, la imagen mental es interna y, al menos en primera instancia, involuntaria (p.164).

Aquí la imagen mental funciona como una interpretación de los estímulos, y trabaja como un mediador en el proceso de comunicación, para interiorizar representaciones de la esfera de lo público e interiorizarse para crear nuevas representaciones.

Las representaciones mentales cumplen un papel primordial en la comprensión del entorno, ya que, al guardar una relación con lo sensorial, son las que permiten mirar el objeto en ausencia total de un significante perceptible (Duval, 1991), como en el caso de ver el dibujo de un cuadrado e identificar sus diagonales, aunque no se encuentren dibujadas (Figura 3).

Figura 3

Visualización de Diagonales en un Cuadrado



Fuente: Elaboración propia.

La relación entre las representaciones mentales y semióticas se ve ligeramente relacionada con las exteriorización mediante representaciones semióticas de las representaciones mentales, en el sentido, que las segundas requieren de una fuente arraigada no solamente en lo conceptual, sino en la incorporación de fantasías y creencias, en el sentido que estas concepciones son las que generan la interiorización de una representación, para posteriormente realizar tratamientos y hacerlas visible en un contexto en el que intervienen los protagonistas de una comunicación bilateral.

Las transformaciones efectuadas sobre las representaciones semióticas son de dos tipos, en la primera se efectúan representaciones semióticas correspondientes al mismo registro de representación, se conoce como *tratamiento*, mientras que las otras están relacionadas con representaciones del mismo objeto que se encuentran en registros diferentes, lo que conoce como *conversión* (Duval, 1991).

Realizar un tratamiento sobre sobre una representación implica concebir diferentes cualidades del objeto al que se hace referencia, lo cual permite partir de una representación en un registro, y pasar a otra representación, del mismo registro, que actúe como mediador en la solución de una situación concreta (Duval, 1991), esta habilidad permite identificar en un aprendiz la manera en que interpreta al objeto, teniendo en cuenta las representaciones que emplea, por ejemplo, mostrar cuatro puntos y ser capaz de identificar que representan un cuadrado para posteriormente trazar diagonales, lados o ángulos que expandan la calidad de la representación inicial.

Al hablar de conversión, se puede interpretar desde las acciones de traducción, transposición, codificación, interpretación, entre otras, que permitan señalar alternativas de representación de una cualidad de un objeto, cambiando de registro de representación (Duval, 1991), esta operación se efectúa sobre representaciones externas, en las que se interpreta información de una representación de partida y se muestra en otra que permite una comprensión desde una perspectiva nueva.

Los cambios de registro son primordiales en el aprendizaje de la geometría, ya que es necesario tener a disposición representaciones que permitan ver la figura en todas sus dimensiones. Ver en geometría requiere tres registros, el de escrituras simbólicas, el del lenguaje y el de representaciones sinópticas, que son incompatibles entre sí, pero necesarias para la comprensión (Duval, 2015). Estos tres registros dejan en evidencia que, desde el punto de vista matemático, la figura deja ver ciertas relaciones sobre los trazos que la componen y que las propiedades que determinan todo lo que representa son la forma en que la figura se debe ver, ya que estas determinan las cualidades, indispensables en la solución de un problema que requiera de su uso (Duval, 2015).

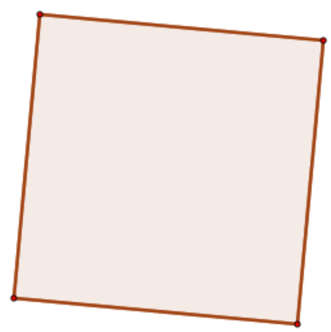
Enunciar las propiedades de una figura es una acción necesaria, ya que al movilizarse en un registro de representación de lenguaje permiten designar y definir propiedades, las cuales posibilitan la construcción de inferencias válidas. Tener conciencia sobre las diferentes maneras de ver es indispensable para comprender y utilizar conocimientos en geometría.

Entradas clásicas a la geometría

Para abordar este tema se dará un ejemplo que será descrito en cuestión. Si tenemos una forma (Figura 4), a simple vista podemos clasificarla como cuadrado o rectángulo. Pero entender la forma desde solo sus atributos icónicos nos sitúa en la forma de ver del *Botánico*.

Figura 4

Un cuadrado de lado x unidades



Fuente: Elaboración propia.

Esta entrada clásica "se trata de aprender a reconocer y a nombrar las formas elementales que se utilizan en geometría plana" (Duval y Sáenz, 2016, p. 17). Clasificar la forma en este primer intento es trivial e ingenua, ya que se requiere de un conocimiento más amplio de las cualidades de la forma observada.

Se puede iniciar describiendo las características que su representación deja ver. La forma corresponde a un cuadrilátero, en este punto se está evidenciando la cualidad de tener lados, que posteriormente se cuentan, que a su vez son segmentos, por lo cual es un polígono.

La forma se puede clasificar en una primera etapa de acuerdo con las propiedades de estos lados, por ejemplo, su cantidad, en este caso 4. Si ahora se comparan estos lados entre sí, se puede inferir si cuenta con lados congruentes o no. Las clasificaciones de cuadriláteros que se crea tomando como criterio la comparación de solo sus lados son los equiláteros y no equiángulos.

Este proceso de medición se puede llevar a cabo empleando dos instrumentos ancestrales, la regla y el compás (instrumentos de los que se hablará en otro apartado). Se seleccionan dos lados (segmentos) de la forma, a continuación, se toma el compás y se abre de tal manera que la punta coincida con uno de los extremos de uno de los lados, y el grafito coincida con el otro extremo. Con esta medida (sin cerrar el compás), se transporta el compás al otro lado, de tal manera que la punta del compás coincida con uno de los extremos. A continuación, se traza una circunferencia o un arco, que se intercepte con el lado (en uno de los posibles casos el arco no se tocará con el segmento). Si el arco coincide con el otro extremo del lado, se puede decir que los segmentos tienen la misma medida, en el caso que el arco corte al lado en un punto diferente al extremo, se puede decir que este lado, respecto al tomado inicialmente, es de mayor longitud. En el caso en que el arco no corte al lado, se puede decir que el segmento es de menor longitud que el inicial.

En el caso de que se trate de un cuadrilátero equilátero se puede clasificar en el nivel de los paralelogramos y no paralelogramos. Para ser paralelogramo se debe incluir la medición de otra cualidad, los ángulos internos (explicar la manera en que se pueden comparar ángulos empleando solo la regla y el compás se tratará en otro apartado, pero para efectos de esta situación se incluirá el uso de un transportador).

Empleando este nuevo instrumento podemos medir los ángulos internos y se pueden presentar cuatro casos.

El primero es que por lo menos dos ángulos sean congruentes, el segundo, que dos ángulos congruentes sean opuestos (por consecuencia el otro par de ángulos son congruentes), el tercer caso es que todos sean congruentes y, el último caso es en el que ningún ángulo es congruente. Si combinamos la manera en que podemos medir la forma, obtendremos todas las clasificaciones posibles de la forma (de este tema se hablará más adelante).

Esta manera de ver moviliza las propiedades geométricas con fines de medir, a la cual Duval (2016) llama la entrada clásica del *Agrimensor geómetra*. Esta entrada "se trata de aprender a medir longitudes de un terreno, del suelo, o distancias entre dos puntos de referencia, y anotarlas sobre un dibujo que toma el estatus de plano" (Duval y Sáenz, 2016), y este proceso se torna complejo para el observador inexperto (aunque un experto podría presentar dificultades).

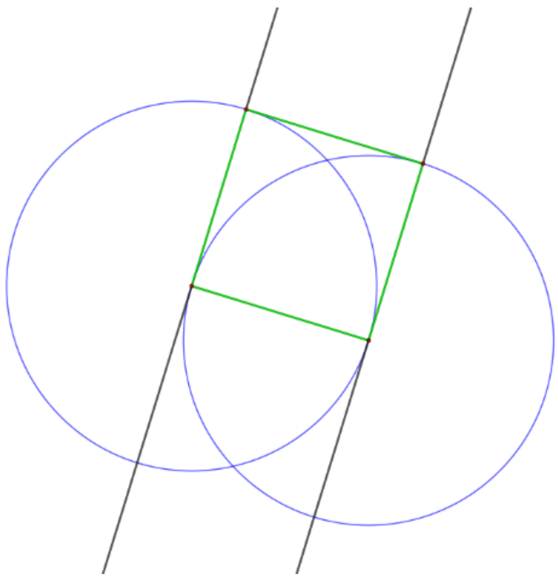
El carácter icónico de las formas es de vital importancia para la comprensión en sí de la forma, ya que es la primera impresión que permite al observador crear una referencia mental, pero es necesario que los elementos planteados en un gráfico, en un dibujo o diagrama, vengan acompañadas de leyendas que codifican información adicional (Duval y Sáenz, 2016).

La representación gráfica de formas requiere del uso de instrumentos que ayuden a guiar los trazados hechos con la mano, estos a su vez son indispensables para el trazado de formas, ya que permiten verificar las propiedades implícitas de la forma.

Construir un cuadrado requiere de la comprensión de cualidades como la longitud, la congruencia, medidas de ángulos, entre otras. En primer lugar, es necesario construir un segmento, a continuación, trazar dos perpendiculares al segmento, una que pase por uno de los extremos del segmento y la otra por el otro extremo. Luego se transporta la medida del segmento inicial a cada una de las perpendiculares desde los extremos del segmento. A continuación, se unen las dos perpendiculares con el trazado de un segmento, lo cual deja visible la forma del cuadrado (figura 5).

Figura 5

Una Construcción de un Cuadrado



Fuente: Elaboración propia.

Esta representación gráfica sólo es posible desde la entrada del *Constructor*, que según Duval y Sáenz (2016) es la entrada necesaria, y constituye los procesos empleados para el trazado de las formas, aquí, las propiedades se pueden hacer visibles al momento de su construcción.

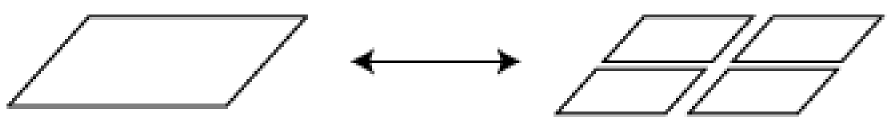
El trazado de la forma requiere de una serie de instrucciones en la que el estudiante puede evidenciar que las propiedades están presentes de manera implícita, y son indispensables para su comprensión.

Por otra parte, el dominio de las cualidades icónicas y no icónicas de la forma, permite realizar transformaciones sobre ella. Para este uso heurístico es necesario poder dividir la figura en unidades figurales, como en el caso de un rompecabezas; a esta división se le llama mereológica, la cual hace referencia a la división de un todo en partes que se pueden yuxtaponer o superponer (Duval & Sáenz, 2016). La descomposición mereológica es posible realizarse de tres formas; estrictamente homogénea, homogénea o heterogénea.

La descomposición estrictamente homogénea, consiste en romper la figura inicial en unidades figurales, que por lo general se realizan por medio de una cuadricula, la cual cumple la función de soporte de representación (Figura 6). La descomposición homogénea (Figura 7) se hace en unidades figurales de diferentes formas a la figura de partida, pero todas ellas tienen la misma forma. La descomposición heterogénea (Figura 8), consiste en descomponer una figura en unidades figurales de diferentes formas (Duval y Sáenz, 2016)

Figura 6

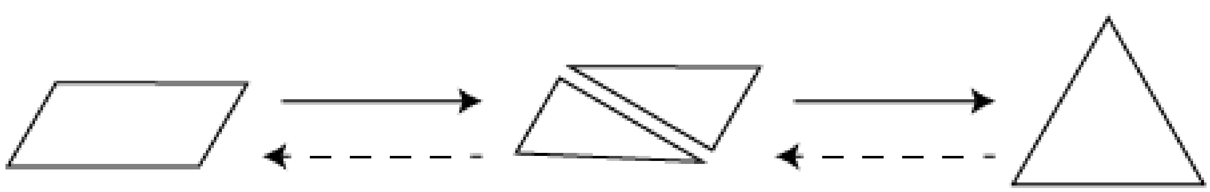
Desconstrucción mereológica estrictamente homogénea



Fuente: Adaptado de Duval y Sáenz (2016, p.29)

Figura 7

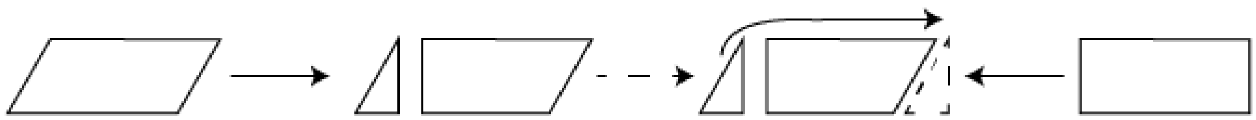
Desconstrucción mereológica homogénea



Fuente: Adaptado de Duval y Sáenz (2016, p.29)

Figura 8

Desconstrucción mereológica heterogénea



Fuente: adaptado de Duval y Sáenz (2016, p.29)

Fuente: adaptado de Duval y Sáenz (2016, p.29)

En la comprensión de formas se considera también la descomposición dimensional de las formas, en la que es necesario comprender una forma a un nivel de entender las relaciones de objetos representados por unidades figurales en 0, 1 y 2 dimensiones. La deconstrucción en esencia requiere de una revolución cognitiva que transforme el funcionamiento de la visualización, enfocando la atención en un cambio de mirada, propicio para comprender muchos elementos de las formas geométricas (Duval y Sáenz, 2016).

La descomposición por deconstrucción dimensional requiere de la reorganización visual, determinando los elementos figúrales que constituyen a las formas, articulando necesariamente esta actividad con el discurso. El uso del lenguaje para justificar el trazado de formas requiere de una organización de los trazos, partiendo de la determinación de puntos para la representación de rectas, a partir de estas se constituyen segmentos y la delimitación de estos permiten la identificación de polígonos (Duval, 2004)

Marco conceptual

Dos maneras de ver las figuras que se requieren en la enseñanza de las matemáticas:
una, centrada en la construibilidad de las figuras con ayuda de instrumentos,
y la otra, centrada en su enriquecimiento heurístico para hacer
aparecer formas que son las que la mirada ve.
(Duval y Sáenz, 2016).

El capítulo presenta nociones sobre elementos básicos de la geometría como el punto, el segmento, la recta y la circunferencia, además de su uso representacional en el desarrollo de este trabajo. Por otro lado, se presenta una breve descripción de los tres problemas clásicos de la antigüedad y su implicación en el desarrollo de la geometría. Así mismo, se hablará sobre los instrumentos regla y compás y su importancia en las construcciones de lugares geométricos y de algunos polígonos como triángulos y cuadriláteros. La comprensión de estas nociones conceptuales permite al autor caracterizar las representaciones obtenidas en la aplicación de las actividades creadas para este trabajo.

Elementos básicos de geometría

El reconocimiento de los objetos punto, segmento, recta y circunferencia son primordiales para el desarrollo conceptual de la geometría, muchos de ellos se abordan desde sus representaciones, lo cual permite describir algunas características y usos de estos.

La definición de estos elementos es un tema de estudio en educación matemática tiene una amplia trayectoria, según D’Amore y Pinilla (2013) en muchos casos se confunden con denominaciones y descripciones, ya que su construcción representa conflictos de tipo conceptual, por este motivo en este apartado solo plantearemos interpretaciones dadas por algunos autores y como se usaron en el trabajo.

En primer lugar, tenemos al punto, el cual es considerado como un pilar de la geometría, su definición es compleja de proponer, pero es posible crear una noción a partir de sus usos. En

Clemens, O'Daffer y Cooney (1998) se trata al punto como parte de un objeto físico, como la marca más pequeña que se puede dibujar o como una idea o abstracción que no puede definirse con términos sencillos, es decir es indefinido. En las dos primeras se habla de este objeto en términos representacionales, lo cual desemboca en conflictos relacionados con la confusión del objeto con su representación, aunque son de extrema utilidad para entenderlo. En Rich (1991), se aborda desde los aspectos representacionales, como indícales, es decir, un punto solo tiene posición, se puede representar mediante un dibujo, pero se hace referencia en no confundir con el objeto, además se menciona la designación empleando una letra mayúscula. Para efectos de este trabajo, el punto se entiende como una posición en un plano, un lugar al cual señalar, también como el lugar de intersección de dos curvas o rectas.

En el caso de la recta, en Rich (1991), se determina en términos de representación, es decir, una recta se puede representar por medio de un trazo guiado por un instrumento, o como una banda estirada, además como un punto en movimiento que no cambia de dirección, dando argumentos a la representación mediante un gis. En Clemens, O'Daffer y Cooney (1998), la recta se aborda como parte de una situación física, como la línea más delgada que se puede dibujar, como una idea o abstracción, lo cual está dado en términos de un desplazamiento o una trayectoria infinita, interpretación que tomaremos para este trabajo.

El segmento se puede entender a partir de la comprensión del objeto recta, ya que muchas de sus descripciones están en función de ella, como lo señala Alexander y Koeberlein (2013) en donde, “un segmento de recta es la parte de una recta que consiste en dos puntos, conocidos como puntos extremos, y todos los puntos entre ellos” (P. 22), o como se puede ver en Pogorélov (1974), “Se llama segmento AB a la parte de la recta a cuyos puntos son todos los puntos X de la recta situados entre A y B. Los puntos A y B se denominan extremos del Segmento” (p. 17), o una interpretación similar dada en Clemens, O'Daffer y Cooney (1998) “un segmento, AB, es el conjunto de los puntos A y B y de todos los puntos que están entre A y B” (p. 17), estas interpretaciones permiten crear una representación gráfica a partir de las representaciones empleadas para la recta. Por último, en Samper, Echeverry, y Molina (2013) se plantean cuatro “definiciones” que recogen y amplían las interpretaciones dadas por los autores anterior mente mencionados, en la primera, se considera al segmento como un conjunto de todos los puntos que están entre dos puntos fijos, lo cual dificulta una comprensión de la geometría dinámica, en la segunda, el segmento es el conjunto de todos los puntos que están entre dos puntos, que están sobre la recta que los contiene, la tercera, plantea que es un subconjunto de una recta, y por último, es el conjunto que consiste de dos puntos A y B y todos los puntos entre ellos. Estas interpretaciones son útiles para lograr una aproximación al objeto, aunque pueden acarrear diferentes obstáculos. En este trabajo se interpretará al segmento en el sentido representacional, como una porción de recta limitada por dos puntos.

Por último, abordaremos a la circunferencia. Este objeto geométrico posee características asombrosas, que ya los griegos habían adoptado para construir muchas nociones geométricas. Autores como Alexander y Koeberlein (2013), Pogorélov (1974), Rich (1991) y Clemens, O'Daffer y Cooney (1998), coinciden en describir a la circunferencia como el lugar geométrico en el que todos los puntos equidistan de otro llamado centro, que es posible representar empleando un instrumento como el compás. Esta interpretación es tomada para el desarrollo de este trabajo.

Los tres problemas de la antigüedad y las representaciones gráficas

La necesidad de emplear representaciones gráficas es un hecho que ha sido evidente a través de la historia. “los griegos querían números exactos expresados racionalmente y al no ser exactamente calculables los irracionales, buscaron la manera de representarlos, de construirlos geométricamente" (Sánchez, 1994, P.2), dando paso al planteamiento de tres problemas indispensables en el estudio de las construcciones con regla y compás, llamados los *tres problemas de la antigüedad*.

Dichas construcciones tienen como soporte tres de los cinco postulados de Euclides, propuestos en el libro de los elementos, los cuales se transcriben como sigue.

Postulado 1. Trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.

Postulado 2. Prolongar de una manera ilimitada en línea recta, una recta limitada.

Postulado 3. Describir un círculo para cada centro y cada radio.

Estos reciben el nombre de "*postulados de construcción* y de ellos se desprenden algunos teoremas de suma importancia en la geometría, y por los cuales la regla y el compás reciben la designación de "herramientas euclidianas". Con ellas un punto se determina por medio de la intersección de dos rectas, de dos círculos o de una recta y un círculo" (Sánchez, 1994, P.6). Los teoremas de construcción son:

Teorema 1. Sobre un segmento dado construir un triángulo equilátero.

Teorema 2. Dado un punto construir un segmento igual a un segmento dado.

Teorema 9. Bisecar un ángulo rectilíneo dado.

Teorema 46. Construir un cuadrado sobre un segmento dado.

Retomando los tres problemas de la antigüedad, el primero de ellos, consiste en encontrar la construcción de un cuadrado que tenga la misma área de un círculo dado o viceversa, para lograr estas construcciones se seguían normas que describe Kline citado por Sánchez (1994) como sigue:

> la restricción de la línea recta y los círculos, auto impuesta y arbitraria, fue motivada por el deseo de guardar la simplicidad en la geometría, guardar la armonía y por tanto apelaba a la estética. Platón tenía otras razones de igual peso para imponer la restricción. La

introducción de instrumentos más complicados que podrían ser adecuados a las construcciones requieren destreza manual indigna de un pensador. Platón opinaba que empleando instrumentos complicados la bondad de la geometría es colocada y destruida, pues nuevamente la reduciríamos al mundo de los sentidos en lugar de llevarla e imbuirla con las imágenes eternas e incorpóreas del pensamiento, así como son empleadas por Dios (P.6).

Esta restricción permitió que los intentos de solución dieran origen a métodos extravagantes y cada vez más complejos, como por ejemplo el propuesto por Antífon (420 a. C.) "quien consiguió acercarse bastante a la solución del problema al considerar un círculo como el límite de una sucesión de polígonos regulares inscritos en él, cada polígono con el doble del número de lados del anterior en la sucesión" (Sánchez, 1994, P.16).

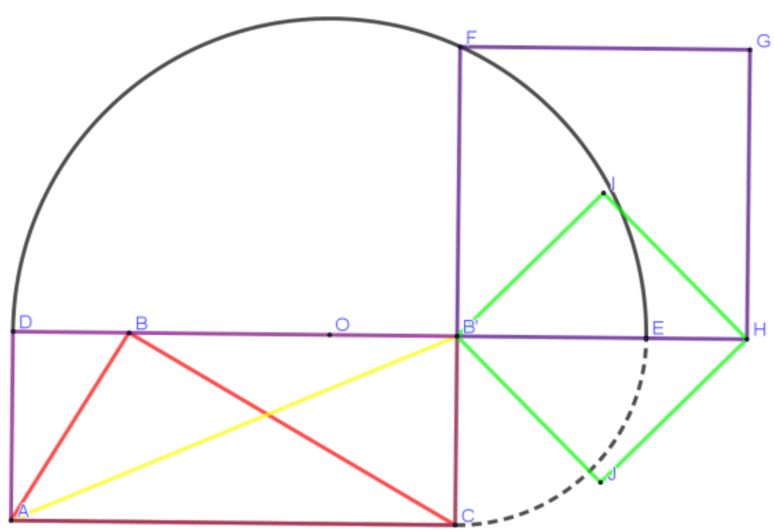
Este intento de construcción necesita claramente de algunas representaciones gráficas de carácter semiótico, pero para comprender el significado de esta en el infinito es necesario recurrir a representaciones mentales, las cuales solo pueden ser exteriorizadas por otras representaciones semióticas de carácter descriptivo en lenguaje formal o en su defecto en lenguaje natural, es decir, "el desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones semióticas de la misma manera que las imágenes mentales son una interiorización de los preceptos" (Vigotski, 1985; Piaget, 1968; Debía, 1989; citados por Duval, 1999, P. 16).

Otro intento por conseguir cuadrar un círculo dio origen al estudio de las lúnulas y fue propuesto por Hippocrates de Chíos (470 A. C.), el cual permitió cuadrar algunas áreas curvilíneas, pero no dio una solución al problema.

Una propuesta pensada desde los intentos de solución de este problema, permitió también cuadrar áreas de cualquier polígono, como lo muestra Sánchez (sf) "primero descomponían el polígono de n lados en n-2 triángulos con un vértice común, enseguida cuadraban cada triángulo (figura 10) y por último unían las áreas de los cuadrados usando el teorema de Pitágoras (figura 11)" (p. 7). Esta ingeniosa propuesta se valía de representaciones gráficas del teorema de Pitágoras, y llevaba a que los griegos emplearan deconstrucciones dimensionales, las cuales son de suma importancias en la geometría, ya que "la manera matemática de ver las figuras consiste en descomponer cualquier forma distinguida, es decir, reconocida como una forma nD/2D, en unidades figúrales de un número de dimensiones inferior al de esta forma" (Duval, 2016, p. 28), además de proponer otro tipo de representación en un lenguaje algebraico como se muestra en la figura ##, la cual permite comprobar la coherencia de la propuesta, "Dicho de otra forma, la marca de un punto sobre un trazo o fuera de él (por ejemplo para fijar los extremos de un segmento o su punto medio) corresponde a una codificación simbólica. ¡Es además a esta codificación simbólica a la que se le asocian generalmente letras!" (Duval, 2016, p. 28).

Figura 10

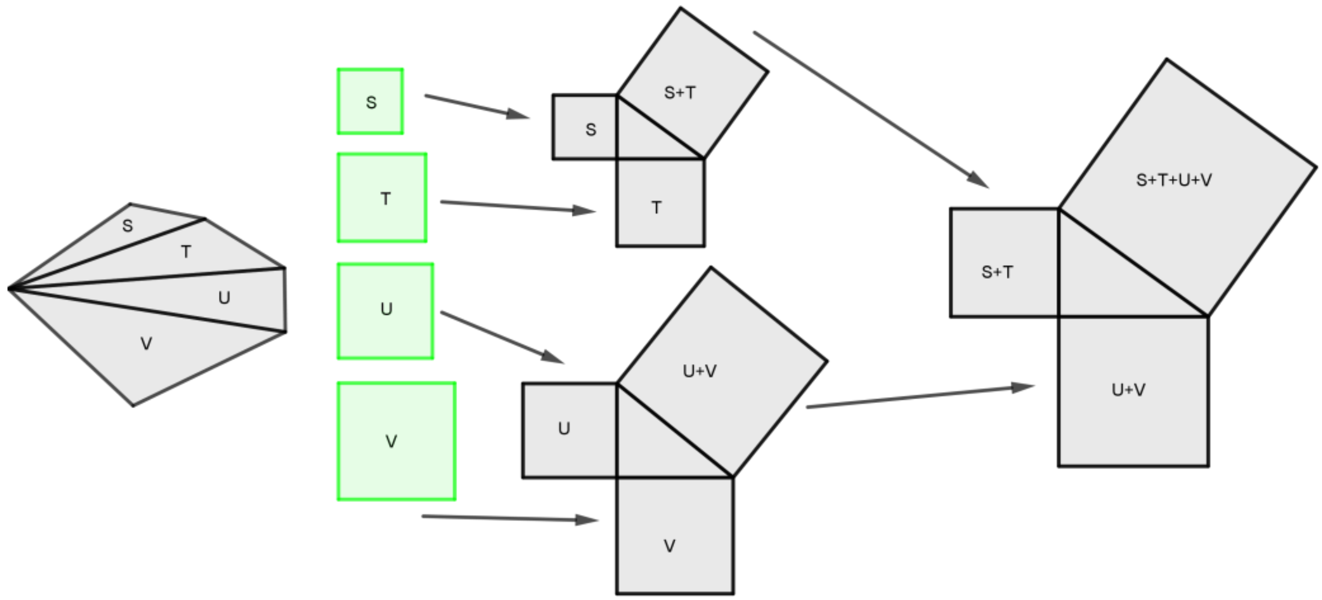
Construcción de la Trisección de un Triángulo Empleando Regla y Compás.



Fuente: Adaptado de Sánchez (1994, p.8)

Figura 11

Forma Empleada por los Griegos para Cuadrar Cualquier Polígono



Fuente: Adaptado de Sánchez (1994, p.7)

El segundo problema planteado por los griegos es la trisección de ángulos, el cual consiste en encontrar un método para dividir un ángulo en tres partes iguales empleando únicamente las herramientas Euclidianas, en donde se dieron diversas aproximaciones. Por ejemplo, el método mostrado en Sánchez (1994):

> "inventaron un método que los llevaba a reducirlo a otro problema. Este método recibió el nombre de neusis que en español se traduciría por inclinación o aproximación y consiste en lo siguiente: Supongamos que ABC es el ángulo dado. Se traza AC perpendicular a BC, se completa el paralelogramo ACBF y se prolonga el lado FA hasta E de tal manera que si BE corta a AC en D entonces DE = 2AB.
>
> Se biseca DE en G y se une A con G. Entonces
>
> DG = GE = AG = AB y < ABG = < AGB = 2 < AEG = 2 < DBC

Puesto que FE y BC son paralelas. Entonces como

< ABC = < AGB + < DBC = 3 < DBC se tiene que < DBC = 1\3 < ABC y el < ABC es trisecado por BE. Así el problema se reduce a encontrar BE de tal manera que corte a AC y AE haciendo DE = 2AB" (p.24)

Otra propuesta interesante es la planteada por Nicómedes (c. 200 A. C), conocida como la conoide, la cual plantea una solución mecánica, basada en el método de la neusis, en donde se propuso un instrumento que dibuja esta curva.

Por otra parte, Arquímedes (c. 287-211 A. C) propone en Líber Assumptorum una serié de lemas en donde uno de ellos permite la trisección de un ángulo, el cual es descrito por Sánchez (1994) como sigue:

"sea AB una cuerda de un círculo con centro O. Se prolonga AB en línea recta hasta C de tal manera que BC sea igual al radió; si CO encuentra al círculo en los puntos D y E entonces el arco AE será igual a tres veces el arco BD." (p. 27)

Esta propuesta concluye que la solución no es plana.

Otro aporte importante lo da Hipias de Elis, quien propone la cuadratriz como método de solución.

El ultimo problema es la duplicación del cubo, que según Eves citado por Sánchez (1994) muestra la leyenda que dio origen al problema:

un poeta griego aficionado a las matemáticas, quien mostró al rey Minos insatisfecho con el tamaño de la tumba que habían erigido a su hijo Glauco. Minos ordenó que el tamaño de la tumba fuese duplicado. El poeta dice que cada dimensión de la tumba debía ser doblada. Este error del poeta habría llevado a los matemáticos a estudiar el problema de la duplicación de un sólido guardando su forma (p. 31)

Este estudio desembocó en propuestas de muchos pensadores, los cuales son evidenciados en Sánchez (1994), por ejemplo, la de Hipócrates de Chíos quien "redujo el problema de la duplicación del cubo a encontrar dos medidas proporcionales entre un segmento de longitud a y otro de longitud 2a" (Sánchez, 1994, p.31), o la propuesta de Archytas (428-347 A. C) en donde se emplean dos superficies para desde su intersección encontrar las medidas de los segmentos.

Otros pensadores que intentaron solucionar el problema fueron Menecmo (c. 350 A. C), Platón (427-374 A. C), Eratóstenes (c. 230 A. C) y Nicómedes (c. 230 A. C) los cuales propusieron soluciones mecánicas, que se escapaban de la pureza de la geometría.

En el estudio formal de las construcciones con regla y compás se efectúa desde la designación de números construibles, así pues, un numero x es construible si se podemos construir un segmento cuya longitud sea exactamente ese número, teniendo en cuenta una unidad de medida. Teniendo en cuenta estos parámetros es posible construir un segmento proveniente de sumar dos números, o como el producto de dos números, incluso, el cociente entre dos números. El conjunto de números construibles forma un subcampo del campo de los números reales.

Si se tiene un plano real euclidiano, es posible determinar cualquier punto de coordenadas (x, y), cualquier recta que pase por un par de puntos tiene una ecuación de la forma $ax + by + c = 0$ y también se puede determinar cualquier circunferencia que tenga como centro un punto en el plano y como radio cualquier número (ya que es construible) y tiene una ecuación $x^2 + y^2 + ax + by = 0$. La intersección de rectas o circunferencias, son por consiguientes determinadas a partir de las ecuaciones de los lugares geométricos que se intersecan.

En Herstein (1970) se enuncian teoremas que formalizan las construcciones con regla y compas como, por ejemplo, “el número real α es constructible si y sólo si podemos encontrar un número finito de números reales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que:

1) ${\lambda_1}^2 \in F_0$
2) ${\lambda_1}^2 \in F_0\,(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1})\ para\ i = 1, 2, \dots, n, tales\ que\ \alpha \in F_0\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$” (Herstein, 1970, P. 221)

En este libro también se encuentran las demostraciones relacionadas con la imposibilidad de trisecar un ángulo, la duplicación del cubo y la duplicación del cubo, además de la prueba de la no construibilidad de un heptágono regular (Herstein, 1970).

Construcciones con regla y compás

Las formas geométricas se construyen con regla y compás. La importancia de la representación gráfica para visualizar cualidades de objetos geométricos permite hacer visible las propiedades geométricas que se movilizan. La regla y el compás son instrumentos que han sobrevivido al paso del tiempo, los griegos de la antigüedad concebían estos instrumentos como la manifestación corpórea de los elementos puros del pensamiento, ya que su afección en el mundo físico se traducía en poder visualizar una recta, un segmento o una circunferencia, Duval y Sáenz-Ludlow (2016) plantean que un instrumento permite reproducir un una forma, dotada de propiedades geométricas, es decir representan sus propiedades, pero además, las formas visuales construidas constituyen las primitivas del instrumento.

Las construcciones con regla y compás requieren de una capacidad de dibujar dada por la práctica, mejora las capacidades cognitivas y esto se debe a que también requieren de conocer y comprender parte de la geometría (Ayala, 2009). Según Pogorélov (1974), la regla es un instrumento que permite trazar una recta, y con ella no se puede realizar ninguna otra operación, se trata de un elemento de borde recto que guía el movimiento de la mano, y en particular, la regla permite, en términos más estrictos, construir segmentos. Esta manera de usar también es propuesta en Ferraris (1996).

El compás, al igual que la regla, cumple la función de trazar circunferencias, además de permitir la determinación de los extremos de un segmento (Pogorélov, 1974), también se emplea para determinar puntos de intersección, indispensables en las construcciones.

Es importante destacar que la regla y el compás son instrumentos ideales, y en la práctica representan aproximaciones, es decir en muchos de los casos en que se realizan trazos con ellos, existe un margen de error que puede terminar en un dibujo con desajustes imperceptibles, o en otros casos, bastante notables. Ramírez (2011) plantea que los instrumentos ideales son conceptos matemáticos abstractos, en lugar de instrumentos físicos, y que representan la perfección de la mente, en el sentido de la creación de representaciones mentales.

Para este trabajo se determinaron algunas construcciones teniendo en cuenta a autores como Clemens, O'Daffer y Cooney (1998), En Rich (1991), Alexander y Koeberlein (2013), Pogorélov (1974), y Samper, Echeverry, y Molina (2013).

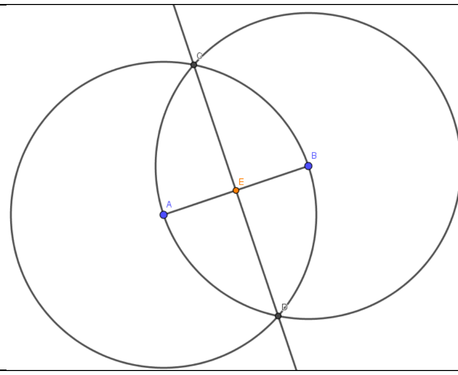
A continuación, se presentan las construcciones elegidas para el desarrollo de este trabajo, describiendo su construcción desde tres tipos de representación, en lenguaje natural (entendido como representaciones lingüísticas), gráfica (dibujos, esquemas, trazados) y representación mental transformándose a externa (descripción de la secuencia de pasos de construcciones necesarias para trazar la forma solicitada).

Punto medio

El punto medio de un segmento es el lugar en el que los dos extremos del segmento equidistan de este. Su construcción se describe en la Tabla 5

Tabla 5

Representaciones para la construcción de un punto medio

Representación en lenguaje natural	Representación gráfica	Representación mental transformándose a externa
Sobre el segmento AB trace una circunferencia con centro en A y que pase por B. A continuación, dibuje otra circunferencia con centro en B y que pase por A. Marque las intersecciones de las dos circunferencias con la letra C y D, Trace una recta que pase por C y D. A la intersección de la recta CD con AB se le llama punto medio de AB.		Dos circunferencias, dos puntos de intersección, una recta y un punto de intersección.

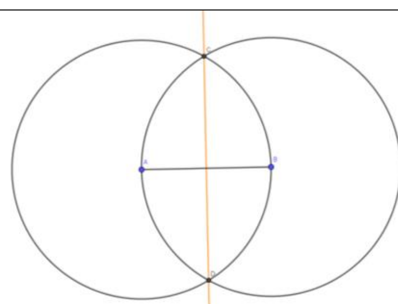
Fuente. elaboración propia.

Mediatriz

Una mediatriz a un segmento es una recta que pasa por el punto medio del segmento y forma ángulos de noventa grados. Su construcción se describe en la Tabla 6.

Tabla 6

Representaciones para la construcción de una mediatriz

Representación en lenguaje natural	Representación gráfica	Representación mental transformándose a externa
Sobre el segmento AB trace una circunferencia con centro en A y que pase por B. A continuación, dibuje otra circunferencia con centro en B y que pase por A. Marque las intersecciones de las dos circunferencias con la letra C y D, Trace una recta que pase por C y D. Esta recta es la mediatriz del segmento AB.		Dos circunferencias, dos puntos de intersección y una recta

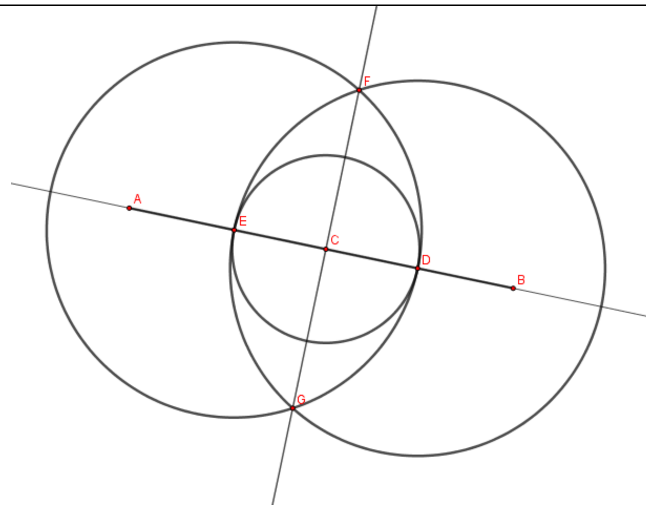
Fuente. elaboración propia.

Perpendicular

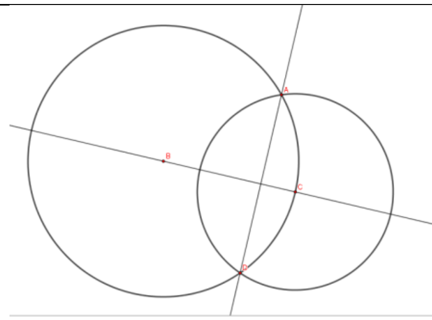
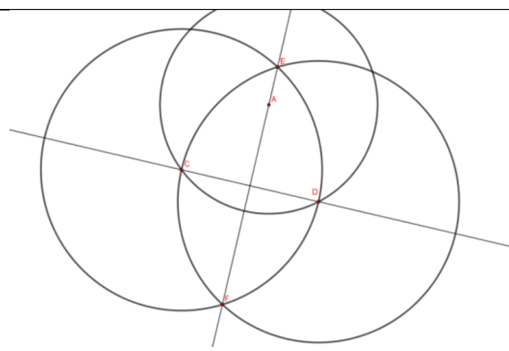
Una perpendicular a una recta o un segmento es una recta que forma ángulos de noventa grados con el segmento o la recta inicial. Para esta construcción se tuvieron en cuenta tres tipos de perpendiculares de acuerdo a la variedad de sus construcciones. Su construcción se describe en la Tabla 7.

Tabla 7

Representaciones para la construcción de una perpendicular

Tipo de perpendicular	Representación en lenguaje natural	Representación gráfica	Representación mental transformándose a externa
Perpendicular a un segmento o recta que pasa por un punto contenido en el segmento o recta inicial.	Marque un punto C sobre la recta o segmento diferente de A y B, trace una circunferencia con centro en C de cualquier radio. Marque los puntos de intersección con la recta o segmento AB con las letras D y E. A continuación, dibuje una circunferencia con centro en D y que pase por E. Trace otra circunferencia con centro en E y que pase por D. Marque las intersecciones de las dos circunferencias con las letras F y G. Trace una recta que pase por F y G. Esta recta es perpendicular a la recta o al segmento AB.		Un punto, una circunferencia, dos puntos de intersección, dos circunferencias, dos puntos de intersección y una recta

Fuente. elaboración propia.

Tipo de perpendicular	Representación en lenguaje natural	Representación gráfica	Representación mental transformándose a externa
Perpendicular a un segmento o recta que pasa por un punto no contenido en el segmento o recta inicial método 1.	Marque un punto sobre la recta y asignele la letra B. Trace una circunferencia con centro en B y que pase por A. Marque una de las intersecciones de la circunferencia con la recta y asigneles la lera C. Ahora trace una circunferencia con cento en C y con radio CA. Marque la intersección restante de las dos circunferencias y asignele la letra D. Una con una recta los puntos A y D. La recta trazada es perpendicular a la recta inicial.		Un punto, una circunferencia, un punto de intersección, una circunferencia, un punto de intersección y una recta.
Perpendicular a un segmento o recta que pasa por un punto no contenido en el segmento o recta inicial método 2.	Dada una recta y un punto A fuera de ella, trace una circunferencia con centro en A y de cualquier radio, de tal manera que esta corte a la recta en dos puntos. Marque las intersecciones de la circunferencia con la recta con las letras C y D. Trace una circunferencia con centro en C y que pase por D. Dibuje una circunferencia con centro en D y que pase por C. Marque las intersecciones de las circunferencias con radio CD y use las letras E y F para nombrarlas. Dibuje una recta que pase por los puntos E y F. La recta EF es perpendicular a la recta inicial y pasa por A.		Una circunferencia, dos puntos de intersección, dos circunferencias, dos puntos de intersección y una recta.

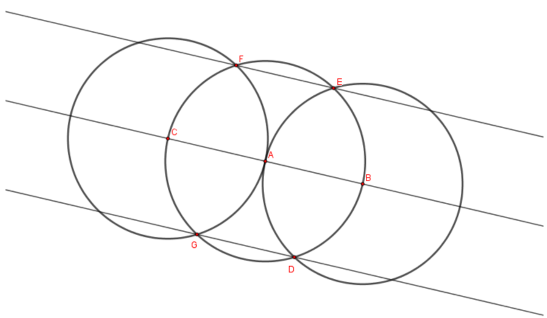
Fuente. elaboración propia.

Paralelas

Dos rectas son paralelas si al trazar dos perpendiculares a una de las rectas por cualquier par de puntos, la distancia entre las intersecciones de las rectas es siempre la misma. Se dice que dos segmentos son paralelos si las rectas en que están contenidas cumplen las condiciones anteriores. Su construcción se describe en la Tabla 8.

Tabla 8

Representaciones para la construcción de una recta paralela

Representación en lenguaje natural	Representación gráfica	Representación mental transformándose a externa
Sobre la recta, marque un punto y nómbrelo A. Con centro en A dibuje una circunferencia de cualquier radio y marque los puntos de intersección con la recta empleando las letras B y C. Con centro en B trace una circunferencia de radio AB y con centro en C trace otra circunferencia de radio AC. Nombre las intersecciones de la circunferencia con centro en B y la circunferencia con centro en A y asígneles las letras D y E. Marque las intersecciones de la circunferencia con centro en C y la circunferencia con centro en A y nómbrelas F y G. Las rectas FE y GD son paralelas entre sí y a la recta AB.		Un punto, dos circunferencias, cuatro puntos de intersección y dos rectas

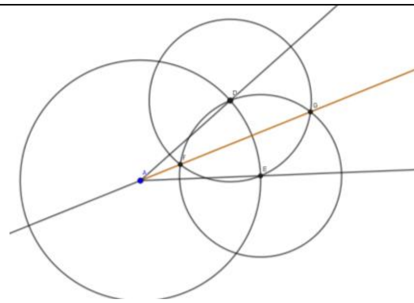
Fuente. elaboración propia.

Bisectriz

Una bisectriz es una recta que divide en dos ángulos congruentes un ángulo dado. Su construcción se describe en la Tabla 9.

Tabla 9

Representaciones para la construcción de una bisectriz

Representación en lenguaje natural	Representación gráfica	Representación mental transformándose a externa
Dados dos rayos con el mismo vértice A, trace una circunferencia centrada en A y con cualquier radio. A las intersecciones de la circunferencia con los rayos márquelos con las letras B y C, A continuación, trace dos circunferencias, una centrada en B y que pase por C y la otra centrada en C y que pase por B. Las intersecciones de las dos circunferencias dibujadas anteriormente nómbrelas con las letras D y E. Por último, trace una recta que pase por D y E. Esta recta se le llama la bisectriz de los ángulos formados por los rayos.		Una circunferencia, dos puntos de intersección, dos circunferencias, dos puntos de intersección y una recta.

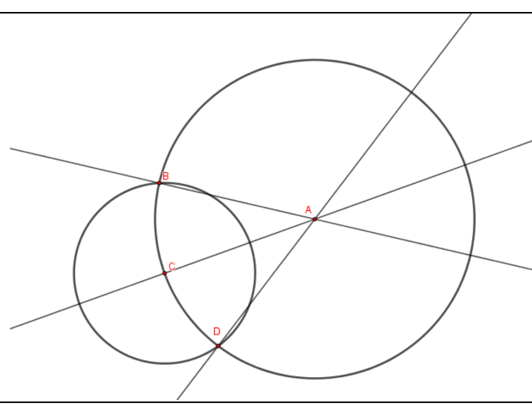
Fuente. elaboración propia.

Ángulo doble

Un ángulo doble es aquel en el que su amplitud es dos veces la medida del ángulo inicial. Su construcción se describe en la Tabla 10.

Tabla 10

Representaciones para la construcción de un ángulo doble

Representación en lenguaje natural	Representación gráfica	Representación mental transformándose a externa
Dadas dos rectas que se cortan en A, dibuje una circunferencia con centro en A y de cualquier radio. Marque una de las intersecciones de la circunferencia con una de las rectas y nómbrela B. Marque una intersección de la circunferencia con la recta y nómbrela C. Dibuje una circunferencia centrada en C		Una circunferencia, dos puntos de intersección, una circunferencia, un punto de intersección y una recta.

y que pase por B. Marque la otra intersección de las circunferencias de radios AB y AC y asígnele la letra D. Trace una por A y D. El ángulo BAD tiene el doble de amplitud del ángulo BAC.		

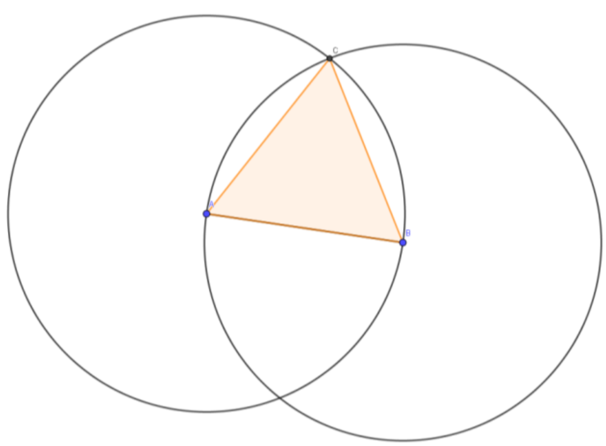
Fuente. elaboración propia.

Triángulo equilátero

Un triángulo es equilátero si todos sus lados y ángulos son congruentes. Su construcción se describe en la Tabla 11.

Tabla 11

Representaciones para la construcción de un triángulo equilátero

Representación en lenguaje natural	**Representación gráfica**	**Representación mental transformándose a externa**
Trace un segmento y a los extremos nómbrelos A y B. Sobre el segmento AB trace una circunferencia con centro en A y que pase por B. A continuación, dibuje otra circunferencia con centro en B y que pase por A. Marque una de las intersecciones de las circunferencias con la letra C. Por ultimo una los puntos A, B y C con segmentos. La forma obtenida es un triángulo equilatero.		Un segmento, dos puntos, dos circunferencias, un punto de intersección. Se pueden usar dos segmentos más, pero basta con determinar los tres puntos del triángulo.

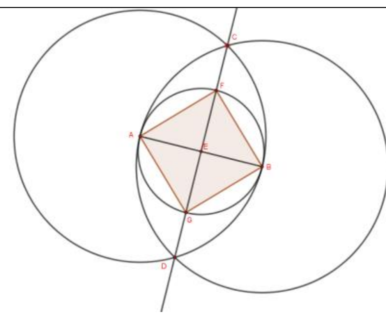
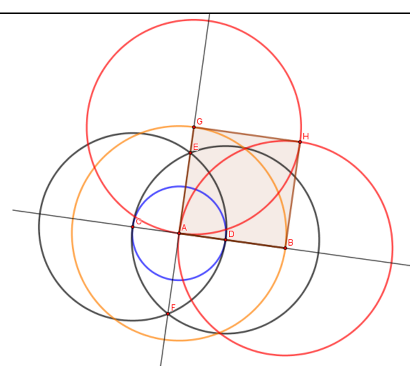
Fuente. elaboración propia.

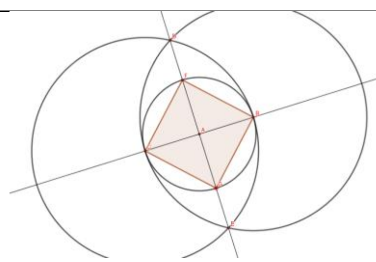
Cuadrado

Un cuadrado es un polígono, que es cuadrilátero, que a su vez es trapecio, paralelogramo y rectángulo, con todos los lados y ángulos congruentes. Las construcciones para esta figura son variadas, en la Tabla 12 se describen algunas de las construcciones posibles.

Tabla 12

Representaciones para la construcción de un cuadrado

Tipo de construcción	Representación en lenguaje natural	Representación gráfica	Representación mental transformándose a externa
Cuadrado dados dos puntos.	Dibuje dos puntos y nómbrelos A y B, a continuación, únalos con un segmento. Con centro en A trace una circunferencia de radio AB. Trace otra circunferencia de radio AB con centro en B. Marque los puntos de intersección de las dos circunferencias con las letras C y D. Trace una recta por C y D. Marque la intersección de la recta CD con el segmento AB empleando la letra E. Con centro en E trace una circunferencia que pase por A y marque las intersecciones con la recta CD nombrándolas F y G. Los puntos A, B, F y G determinan un cuadrado.		Dos puntos, un segmento, dos circunferencias, dos puntos de intersección, una recta, un punto de intersección, una circunferencia y dos puntos de intersección.
Cuadrado dado uno de sus lados.	Trace un segmento cuyos extremos se llamen A y B. Proyecte una recta que contenga este segmento. Tomando como centro en A, trace una circunferencia de cualquier radio. Marque las intersecciones de la circunferencia con la recta y nómbrelos C y		Un segmento, una recta, una circunferencia, dos puntos de intersección, dos circunferencias, dos puntos de intersección, una recta, una circunferencia, un punto de intersección, una circunferencia un punto de intersección.

	D. Con centro en C trace una circunferencia que pase por D y otra circunferencia con centro en D y que pase por C. Marque los puntos de intersección de las circunferencias de radio CD y nómbrelas E y F. Trace una recta que pase por E y F. Con centro en A trace una circunferencia de radio AB y marque una de las intersecciones con la recta EF y nómbrela G. Con centro en G trace una circunferencia que pase por A. Con centro en B dibuje una circunferencia que pase por A. Marque la otra intersección de las circunferencias de radio AG y AB y nómbrela H. Los puntos A, B, H y G determinan un cuadrado.	
Cuadrado inscrito en una circunferencia dado su centro.	Trace una circunferencia de cualquier radio y llame al centro A. Trace un diámetro de la circunferencia y nombre a sus extremos B y C. Con centro en C trace una circunferencia de radio CB y otra con centro en B que pace por C. Marque los puntos de intersección de las circunferencias con las letras D y E. Trace una recta que pase por D y E. Marque las intersecciones de DE con la circunferencia de centro A y nómbrelos F y G. Los puntos B, C, F y G determinan un cuadrado.	

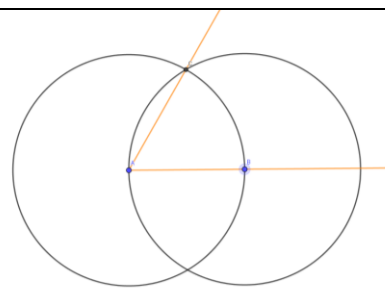
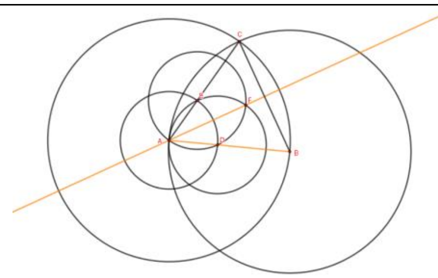
Fuente. elaboración propia.

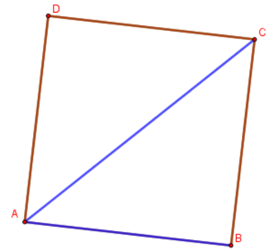
Ángulos notables

El grupo de ángulos notables está conformado por aquellos que tienen un uso frecuente, y son usados como referencia para establecer soluciones a situaciones relacionadas con triángulos. Este grupo de ángulos está conformado por el ángulo de 30°, el de 45° y el de 60°. Su construcción se describe en la Tabla 13

Tabla 13

Representaciones para la construcción ángulos notables

Tipo de ángulo	Representación en lenguaje natural	Representación gráfica	Representación mental transformándose a externa
Ángulo de 60°	Sobre el rayo AB dibuje una circunferencia con centro en A y con radio de cualquier medida. Al punto de intersección de la circunferencia con el rayo marquelo con la letra C. Con centro en C trace una circunferencia que pase por A. Marque uno de los puntos de intersección de las dos circunferencias con la letra D. Para finalizar, trace una recta desde el punto A hasta el puto D. El ángulo formado entre la recta y el rayo inicial mide 60°.		Una circunferencia, un punto de intersección, una circunferencia, un punto de intersección, una recta
Ángulo de 30°	Dibuje un segmento y nombre los extremos con las letras A y B. Construya un triángulo equilatero sobre el segmento y asigne la letra C al otro vértice. A continuación, biseque uno de los ángulos. Los ángulos formados en la bisección miden 30° cada uno.		Un segmento, Dos circunferencias, un punto de intersección, una recta, una circunferencia, dos puntos de intersección, dos circunferencias, un punto de intersección, una recta.

Ángulo de 45°	Sobre un segmento AB trace un cuadrado. Marque una de sus diagonales. El lado que comparte vértice con la diagonal trazada, forman entre sí un angulo de 45°.	

Fuente. elaboración propia.

Marco metodológico

> En virtud de su pluralidad potencial, las diversas representaciones
> semióticas de los objetos matemáticos serían, pues,
> secundarias y extrínsecas a la aprehensión
> conceptual de los objetos.
> (Duval, 1991)

Enfoque de la investigación

Esta investigación centró su interés en caracterizar las representaciones y procesos empleados por los estudiantes, referentes a las construcciones con regla y compás (CRC) emergentes a las prácticas de estudiantes de grado noveno de una institución educativa de la ciudad de Tunja, al solucionar situaciones problema relacionadas con las construcciones de sistemas de polígonos empleando regla y compás. El estudio se realizó bajo un enfoque mixto con ejecución secuencial, (Hernández, Fernández y Baptista 2014, p. 547 – 548), con preponderancia a lo cualitativo, siguiendo un diseño de triangulación concurrente (Hernández, Fernández y Baptista, 2014, P. 557).

De acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2014) el enfoque de investigación mixto permite abordar un fenómeno de manera objetiva y subjetiva en simultáneo, a través de procesos de clasificación cuantitativa e indagación cualitativa. Desde este enfoque es posible que el profesor efectúe procesos de observación sofisticados y amplios, que permitan dar cuenta del impacto que tiene su actividad de enseñanza, además de identificar los modos y estructuras de aprendizaje presentes en las situaciones de clase, además de permitir una clasificación de las representaciones empleadas en los procesos de comunicación sobre el abordaje de nociones específicas de los objetos matemáticos trabajados.

Al incorporar el enfoque semiótico en esta investigación, como referente teórico y metodológico, es necesario considerar la complejidad de los procesos de aprendizaje, particularmente en los de comunicación, en donde emergen representaciones en diversos registros y lenguajes, especialmente los relacionados con el aprendizaje de la geometría (Duval 1999). Las herramientas que brinda el enfoque semiótico, se centran en la comprensión y evolución de las representaciones, en sus diversas formas, usadas por una persona o un grupo de personas al enfrentarse a situaciones que se localizan en un contexto específico.

Diseño y fases de la investigación

El proceso de investigación se ejecutó de acuerdo con un diseño de triangulación concurrente (DITRIAC). En este diseño el investigador corrobora y confirma resultados cuantitativos y cualitativos, efectuando a la vez una validación cruzada, lo cual permite que se recolecten datos casi en simultaneo, dando así una interpretación globalizada del problema investigado (Hernández, Fernández y Baptista 2014).

Por medio de este diseño es posible identificar características propias de la población estudiada, a partir de la interpretación de los aspectos teóricos contemplados en la investigación, al tiempo se presentan los datos cuantitativos comentados por las interpretaciones de datos cualitativos, esto permite que se pueda validar criterios a partir de la comprobación o validación cruzada de datos cuantitativos (Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

Para efectos de investigaciones similares, el profesos puede usar el DITRAC para investigar directamente en el aula, recopilando datos cualitativos y cuantitativos por medio de la observación y el análisis de las experiencias de los estudiantes con las diferentes situaciones planteadas, así mismo, es posible efectuar estudios sobre la manera en que los estudiantes comunican sus hallazgos en actuaciones gráficas, orales, escritas, entre otras, para consolidar modelos basados en interpretaciones.

La clasificación de representaciones semióticas de construcciones de sistemas de polígonos empleando regla y compás a partir del DITRAC permite acceder a la multiplicidad de interpretaciones de los estudiantes frente a situaciones que requieren el uso de la regla y el compás, que navegan entre la interiorización (por medio de representaciones mentales) y la exteriorización (representaciones semióticas de la esfera de lo público). En este sentido, para el desarrollo de esta investigación el DITRAC permitió el logro de los objetivos planteados, abordando sistemáticamente cuatro fases, con las cuales se dio respuesta a la pregunta de investigación. Las fases que se tuvieron en cuenta en el estudio se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3

Fases de la investigación

Fases	Diseño
1. Diseño y aplicación de la actividad	DITRAC
2. Caracterización de las representaciones y los obstáculos emergentes	DITRAC
3. Detección y clasificación de elementos teóricos de las representaciones semióticas.	DITRAC
4. Evaluación de procesos cognitivos	DITRAC

Fuente. Elaboración propia.

La primera fase llamada *Diseño y aplicación de la actividad* se realizó teniendo en cuenta los diferentes registros de representación semiótica, además de las entradas clásicas a la geometría, articulándolos con la revisión conceptual sobre los elementos geométricos presentes en la construcción de sistemas de polígonos. Esta fase permitió definir las construcciones más empleadas en la solución de situaciones concernientes al trazado formas geométricas empleando la regla y el compás (griego), clasificándolas en cuatro tipos de actividad, caracterizada por un tipo de representación dominante y teniendo en cuenta las entradas clásicas a la geometría, estos cuatro tipos de actividad se encuentran visibles en la Tabla 4.

Tabla 4

Tipos de actividad creadas

Nombre de la actividad		Tipo de representación dominante	Entradas clásicas asociadas
1.	Alfa	Representación gráfica icónica	Botánico
2.	Beta	Representación en lenguaje natural	Constructor, agrimensor
3.	Gamma	Representación mental	Constructor, Inventor-artesano
4.	Delta	Representación gráfica	Constructor, agrimensor, Inventor-artesano

Fuente. Elaboración propia.

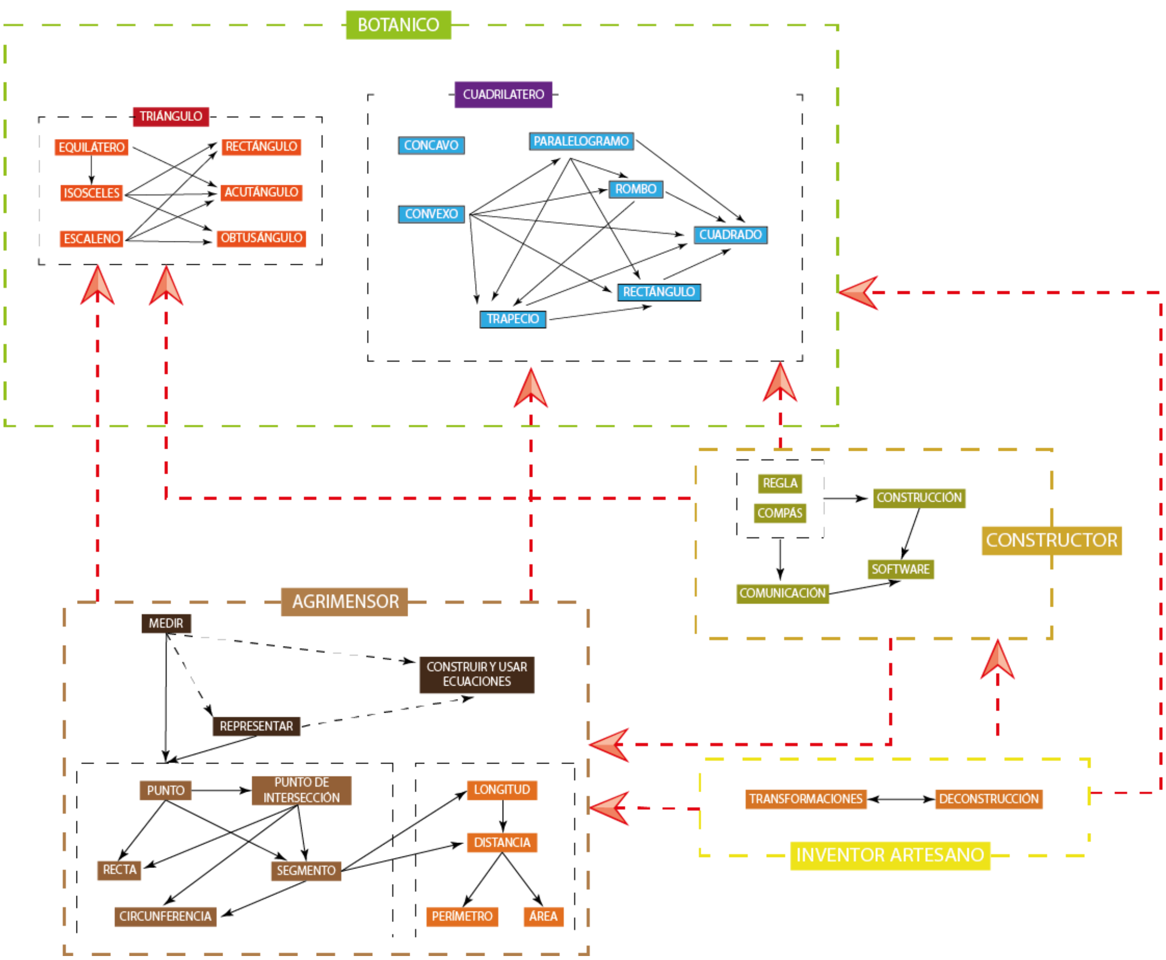
La segunda fase, denominada *Caracterización de las representaciones y los obstáculos emergentes,* se realizó a partir de la recopilación de las representaciones propuestas por los participantes, estructurando su clasificación de acuerdo a diferentes registros de representación. En esta fase se agrupan las representaciones que comparten similitudes conceptuales con el fin de cuantificarlas y caracterizar la frecuencia de uso, para así determinar elementos comunicativos en las propuestas de solución de la actividad, además de identificar obstáculos emergentes de las prácticas.

La tercera fase de la investigación se denomina *Detección y clasificación de elementos teóricos de las representaciones semióticas,* en ella se clasifican las representaciones recopiladas teniendo en cuenta elementos teóricos. Por otra parte, se comparan las representaciones usadas en las dos aplicaciones de la actividad, con el fin de evidenciar la evolución de las representaciones empleadas en el aprendizaje de construcciones con regla y compás (griego).

En la cuarta fase llamada *Evaluación de procesos cognitivos*, se evaluaron procesos cognitivos teniendo en cuenta la diversidad de representaciones empleadas para comunicar la solución de una situación, además de la complejidad de la comprensión en las construcciones con regla y compás (griego) empleadas. En la Figura 9 se muestra los elementos empleados en la evaluación de los procesos cognitivos.

Figura 9

Diagrama de Elementos que Constituyen una construcción con regla y compás



Fuente: elaboración propia.

Relación entre las fases de la investigación y los objetivos específicos del estudio

En este apartado se da a conocer la relación entre las fases del estudio y las actividades propuestas que permiten el cumplimiento de los objetivos planteados, los cuales permitieron dar respuesta a la pregunta de investigación: ¿Cómo evolucionan las representaciones de conceptos y procesos empleados por los estudiantes, relativos a las construcciones con regla y compás de sistemas de polígonos a la luz de la teoría semiótica de Duval?

Fase 1: diseño y aplicación de la actividad

Actividades desarrolladas para el cumplimiento del primer objetivo específico.

Primer objetivo. Diseñar situaciones que permitan emerger representaciones de formas geométricas relativas a sistemas de polígonos construidas con regla y compas en ambientes de geometría dinámica.

- Revisión de construcciones con regla y compás en artículos, libros y aplicativos para smartphone.
- Clasificación de las representaciones a mostrar en la actividad propuesta a los estudiantes.
- Creación de un juego de mesa estructurando las representaciones semióticas en diferentes registros con las clasificaciones de las construcciones con regla y compás seleccionadas como indispensables en la investigación.
- Creación de un resumen digital de construcciones con regla y compás empleando representaciones gráficas, representaciones de manera escrita y medios audiovisuales.

Fase 2: Caracterización de las representaciones y los obstáculos emergentes

Actividades desarrolladas para el cumplimiento del segundo objetivo específico.

Segundo objetivo. Caracterizar las representaciones y los obstáculos emergentes en la dinámica del aprendizaje de formas geométricas construidas con regla y compas, enfatizando en las funciones de tratamiento y conversión de la teoría semiótica.

- Aplicación de la actividad creada siguiendo la secuencia didáctica mostrada en el anexo 1
- Clasificación de las representaciones empleadas en la solución de las actividades en las sesiones uno y tres de acuerdo a similitudes.
- Aplicación de cuestionarios en las sesiones uno y tres.
- Clasificación de los obstáculos emergentes en la aplicación de la actividad.

Fase 3: Detección y clasificación de elementos teóricos de las representaciones semióticas

Actividades desarrolladas para el cumplimiento del tercer objetivo específico.

Tercer objetivo. Detectar los elementos teóricos y la forma como se estructuran, al desarrollar el análisis del enfoque semiótico de las prácticas de los estudiantes al aprender construcciones con regla y compas.

- Clasificar los tipos de representación usados por los estudiantes en la primera sesión de la actividad, teniendo en cuenta los elementos teóricos del enfoque semiótico.
- Clasificar los tipos de representación usados por los estudiantes en la tercera sesión de la actividad, teniendo en cuenta los elementos teóricos del enfoque semiótico.

Fase 4: Evaluación de procesos cognitivos

Actividades desarrolladas para el cumplimiento del cuarto objetivo específico

Cuarto objetivo. Evaluar los procesos cognitivos del pensamiento espacial de los estudiantes, involucrados en el aprendizaje de construcciones con regla y compas en ambientes de aprendizaje.

- Comparación de las actividades empleadas por los estudiantes en las sesiones uno y tres.
- Evaluación del desarrollo cognitivo de los estudiantes en el desarrollo de la actividad.
- Conclusiones generales del proceso investigativo.

Unidad de análisis

La unidad de análisis se constituye a partir de las representaciones emergentes de 5 estudiantes de grado noveno de una institución educativa en la ciudad de Tunja, quienes se enfrentaron a una situación creada bajo el modelo de enfoque semiótico. La actividad aplicada se desarrolló en tres sesiones con un total de ocho (8) horas (ver Anexo 1).

Técnicas y herramientas para la recolección y análisis de la información

En la recolección de la información se usó la grabación de las sesiones de encuentro con los estudiantes, además de aplicar cuestionarios con el fin de recopilar información sobre la percepción de la actividad, dificultades y fortalezas presentes en la solución de las actividades. Se empleó el software Atlas ti para el procesamiento de la información y la creación de redes conceptuales relacionados con los procesos llevados a cabo durante la investigación.

Categorías de análisis

Las categorías de análisis se plantearon desde los diferentes tipos de representación empleadas por los estudiantes, en estas se tuvo en cuenta, la frecuencia de uso de las representaciones, la complejidad de estas y la dependencia en las construcciones con regla y compás. Las categorías creadas son:

- Construcciones primitivas
- Construcciones primarias
- Construcciones secundarias

La descripción de estas categorías se encuentra en el capítulo 6.

Una vez realizada la categorización, se realiza un proceso de empalme con el estatus de las representaciones teniendo en cuenta las cuatro entradas clásicas a la geometría.

Diseño de la actividad "Aventura Espacial"

Es la tarea propuesta la que determina la relación con las figuras.
La manera de ver una figura depende de la actividad
en la que sea movilizada
Duval (2016)

En este capítulo se hace una descripción de los elementos que componen la actividad diseñada para esta investigación, comentando los parámetros establecidos en la creación de los retos y el funcionamiento global de la actividad. Por otra parte, se describe la creación de un material de apoyo en el que se agrupan las construcciones descritas en el capítulo anterior, con ayuda de material audiovisual. Esta actividad constituye el logro del primer objetivo de esta investigación y se abordan desde aspectos teóricos mostrados en el marco teórico del enfoque semiótico.

Actividad "Aventura Espacial"

La actividad diseñada para este trabajo se estructuró desde las cuatro entradas clásicas a la geometría, considerando cuatro etapas, basadas en las actividades planteadas en la aplicación EUCLÍDEA y consiste en un juego de mesa con elementos de las construcciones con regla y compás. Está compuesta por un tablero dividido en cuatro etapas, cinco fichas de jugador, cinco tarjetas de jugador en donde se lleva el registro del avance de cada participante, 60 retos consignados en 4 tipos de tarjetas, α, β, γ, δ, piezas de construcción, hojas de contextos y hojas de formas.

Tablero

El tablero cuenta con cuatro etapas diferenciadas por colores (Azul, morado, naranja y verde, ver Figura 12). Los participantes se mueven por el tablero en cada una de las etapas empezando por la azul, luego la morada, a continuación, por la naranja y por último la verde. Cada participante solo podrá moverse en una etapa, para pasar a la siguiente, debe completar cuatro retos, los cuales se registran en la tarjeta del jugador.

Cada etapa del tablero tiene siete casillas marcadas con letras del alfabeto griego, las cuales identifican el tipo de reto al que se debe enfrentar cada jugador al situarse en una casilla. El movimiento por las casillas es libre, siempre y cuando las casillas estén conectadas por un lado y no estén ocupadas por otro participante.

Figura 12.

Tablero de la actividad Aventura Espacial

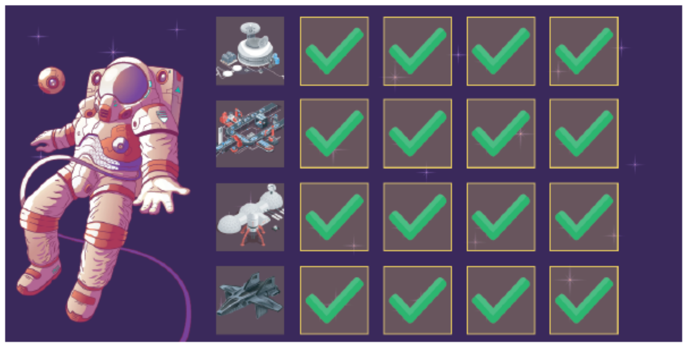
Fuente: Elaboración propia

Retos

En la actividad existen cuatro tipos de retos marcados con las letras α, β, γ, δ, las cuales describen situaciones diferentes (Anexo 2). Cada vez que el jugador complete un reto, se le entregará una ficha de aprobación, la cual se incorpora a la tarjeta del jugador para registrar su avance (Figura 13).

Figura 13

Tarjeta del Jugador



Fuente: Elaboración propia

Categoría α. Esta categoría cuenta con 11 retos en donde se da una situación enmarcada en la historia creada para la actividad, la cual debe ser solucionada empleando una construcción visual propuesta en cada tarjeta, y se debe ejecutar su solución en la hoja de contexto (Figura 14). En esta etapa se propone el reconocimiento de construcciones con regla y compás, a partir de la interpretación de una representación gráfica, con miras a reproducirla en un orden que permita solucionar la situación.

Figura 14

Tarjeta tipo Alfa y hoja de contexto

Fuente: Elaboración propia

Categoría β. Esta categoría contiene 17 retos en los cuales, se da una situación de la historia que se debe solucionar empleando una construcción representada en palabras, proporcionada por cada tarjeta y se debe ejecutar en la hoja de contexto de manera gráfica (Figura 15). Las representaciones en palabras cumplen la función de conversión entre dos registros, el lenguaje natural y el gráfico, con la intención de comunicar la eficiencia de interpretar la secuencia de construcción.

Figura 15.

Tarjeta tipo Beta y hoja de contexto

Fuente: Elaboración propia

Categoría γ. Esta categoría cuenta con 12 retos. Aquí se solicita nombrar la construcción enunciada en la tarjeta, usando las piezas de construcción en el orden que se emplean. Por ejemplo, si la tarjeta pide el nombre de los lugares en que se cortan dos circunferencias, el participante deberá responder, puntos de intersección, y a continuación, organizar las piezas de construcción (Figura 16), para este caso, dos circunferencias y dos puntos de intersección (Figura17). Esta actividad pretende exteriorizar representaciones mentales mediante el orden secuencial de trazos con regla y compás.

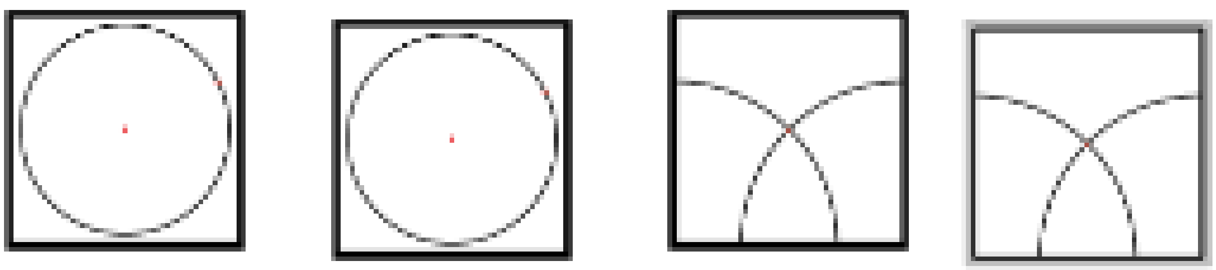
Figura 16

Tarjeta tipo Gamma

Fuente: Elaboración propia

Figura 17

Fichas de construcción para los puntos de intersección de dos circunferencias



Fuente: Elaboración propia

Categoría δ. En esta categoría se plantea un reto de construcción, el cual se debe solucionar en la hoja de formas (Figura 18). La categoría tiene 19 retos. La intención de esta categoría es que el participante encuentre una secuencia de pasos que le permitan solucionar la situación empleando representaciones gráficas y representaciones verbales, apelando a representaciones mentales de otras construcciones ya interiorizadas o construidas durante el desarrollo del juego.

Figura 18

Tarjeta tipo Delta y hoja de formas

Fuente: Elaboración propia

El juego

La mecánica de juego contiene un componente aleatorio en la selección de los retos a desarrollar, el cual depende de las casillas que estén libres en cada turno.

Para empezar, se elige un narrador del juego (en este caso el profesor), el cual será el encargado de entregar las tarjetas, las hojas de contexto, hojas de formas, piezas de construcción, además de garantizar el cumplimiento de las normas de juego. El narrador verifica la validez de las respuestas y entrega las fichas de aprobación de la tarjeta de jugador. Los participantes deben lanzar el dado, la persona que tenga el número mayor inicia y los turnos continúan por la derecha. En el primer turno, cada participante inicia en el lugar que desee en la etapa azul. Cada participante dispondrá de un tiempo de cinco minutos para solucionar el reto. Una vez culminado el tiempo, podrá elegir entre desechar el reto, ceder el turno y continuar con el reto o entregar la solución del reto y continuar jugando. Al completar satisfactoriamente el reto, el jugador podrá conservar la tarjeta y la solución del reto en caso de que pueda usarlos en otro reto. Cada vez que se devuelva una tarjeta de reto se pondrá al final de las tarjetas de la categoría correspondiente. El participante que complete la tarjeta de jugador será el ganador de la actividad.

Caracterización de representaciones y obstáculos

> Podemos subrayar que cada manera de ver induce un tipo particular y limitado
> de comprensión. El conocimiento desarrollado no es el mismo
> según la mirada que un estudiante esté o no en capacidad
> de movilizar en presencia de la misma figura.
> Duval (2016)

En este capítulo se presenta el análisis de las representaciones emergentes de las prácticas matemáticas efectuadas por los estudiantes al solucionar las actividades propuestas. En el análisis de representaciones se consideran el lenguaje formal y coloquial, y se hace desde la perspectiva del autor, teniendo en cuenta la configuración de representaciones externas, internas y semióticas de la teoría de la semiótica. El análisis se asume desde una etapa a priori, con la intención de prever las posibles representaciones que comunica y construyen los estudiantes. El análisis cognitivo se centra en la interpretación de los posible conflictos y obstáculos emergentes en la práctica de los estudiantes. La caracterización de las representaciones propuestas por los estudiantes al solucionar situaciones empleando la regla y el compás se efectúa a partir de las configuraciones cognitivas, las cuales, permiten comprender la efectividad de la comunicación desde la interpretación de representaciones semióticas.

Análisis de representaciones de construcciones con regla y compás

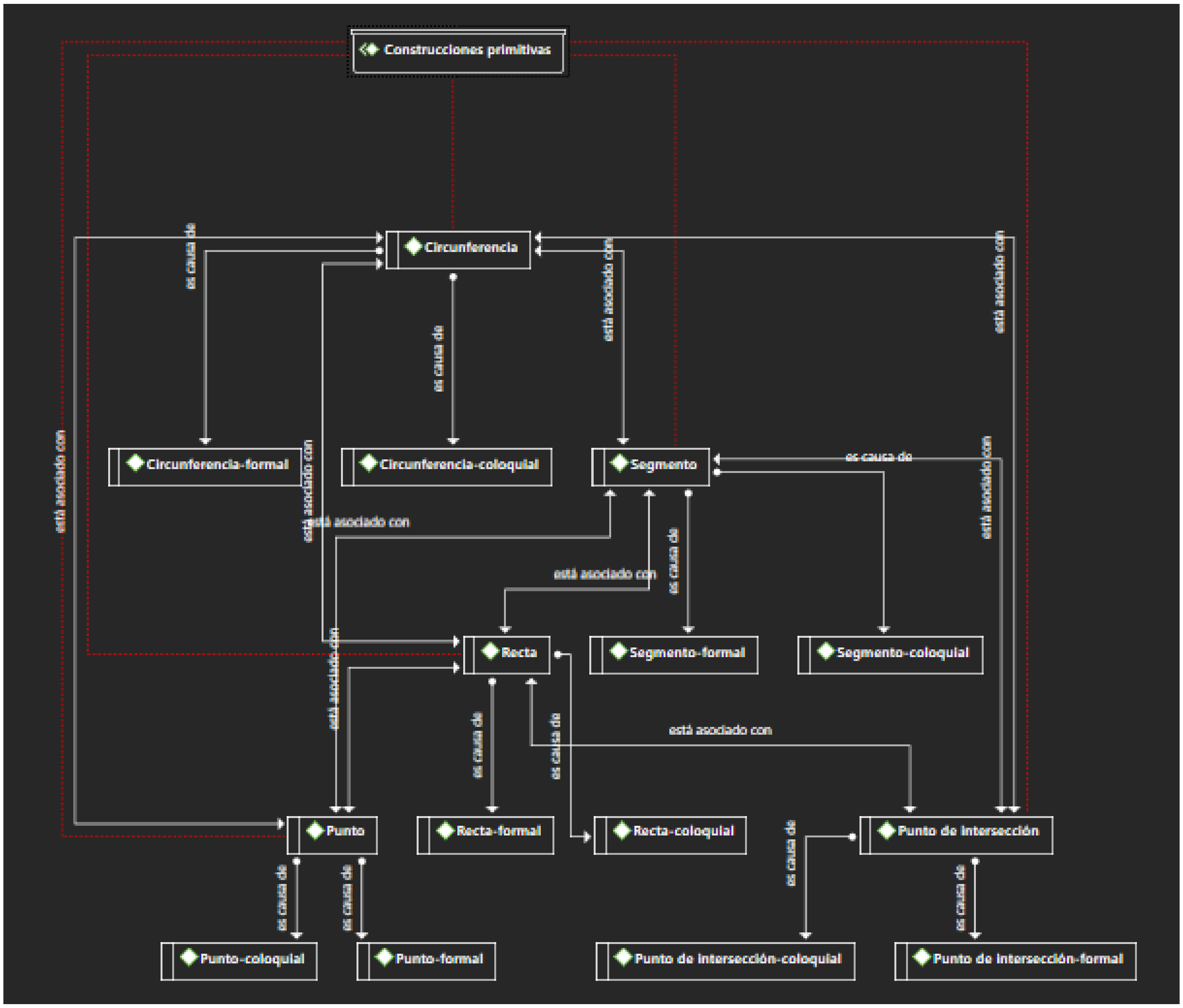
El análisis de representaciones se efectuó desde la interpretación de tres tipos de representación, en lenguaje natural, gráfica y representación mental transformándose a externa, creando tres categorías de construcciones con regla y compás, construcciones primitivas, construcciones primarias y construcciones secundarias.

Construcciones primitivas

Estas construcciones comprenden el trazado de puntos, segmentos, circunferencias, rectas, y puntos de intersección, desde la perspectiva de un lenguaje formal y coloquial en la configuración de representaciones en lenguaje natural (Figura 19).

Figura 19

Representaciones para construcciones primitivas



Fuente: Red de análisis construida con Atlas ti. Elaboración propia

La construcción de puntos constituye una acción intuitiva en geometría la cual se centra en la comprensión de posiciones. En la representación formal se sitúa la indicación de un lugar, marcándolo con una letra del abecedario en mayúscula. La representación coloquial se trata del señalamiento de un lugar sin usar una designación de este, o cualquier referencia a una posición en la que se señale empleando gestos de indicación.

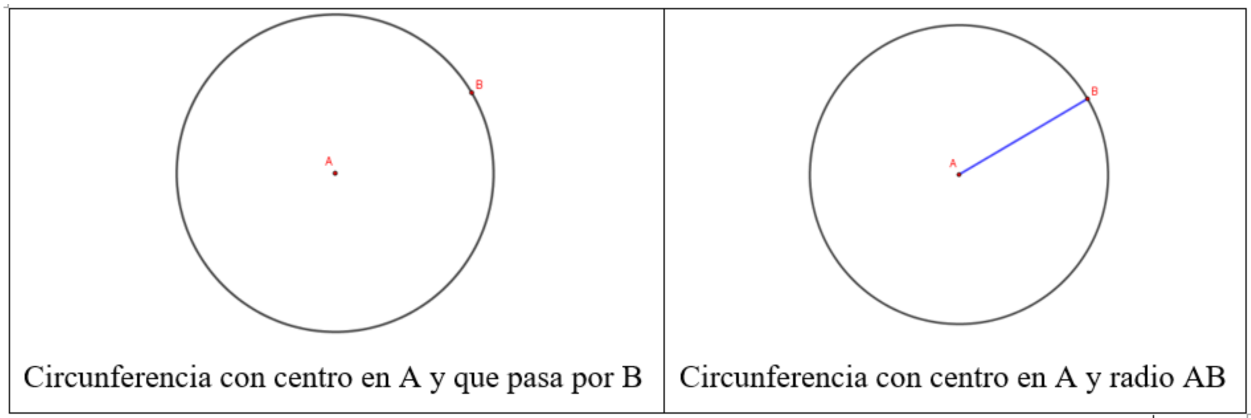
La construcción de rectas refiere al trazado de estas, empleando herramientas que guíen su trazo. En la representación formal se emplean designaciones de puntos por donde la recta pasa, por ejemplo, en el caso de construir una recta que pase por dos puntos, se designa como la recta que pasa los puntos A y B, o también se nombra como la recta AB. La representación coloquial se asume desde la indicación de una recta que se traza, sin tener en cuenta los puntos que permiten nombrarla, o en los casos en que solo se indique uno de los puntos por los que pasa. En esta representación también se dan los casos en que se indica con gestos los lugares por donde pasa o el recorrido efectuado al trazarla.

La construcción de segmentos se entiende como el trazo guiado a partir de la noción de porción de recta, desde la determinación de dos puntos que definen los límites de estos. En la representación formal se considera la designación de los extremos, por ejemplo, el segmento AB, hace referencia a un segmento en el que sus extremos están determinados por los puntos A y B. La representación coloquial se entiende como cualquiera en la que esté presente un gesto de indicación que no refiera a los puntos que determinan los límites del segmento, o simplemente, la acción de mencionar solo uno de estos extremos.

La construcción de circunferencias constituye el trazado de estas, con un instrumento que guie su trazado, a partir de la determinación de dos puntos, su cetro (lugar en donde se ubica la punta del compás) y un punto por donde pasa (punto donde se ubica el grafito del compás). La representación formal constituye el proceso de determinar el punto designado como centro, con su respectiva denotación, y el punto por donde el trazo pasa, con su respectiva denotación. También se considera el caso en el que se denota el centro de la circunferencia (punto) y la longitud de su radio (un segmento). Dos ejemplos de esta representación son, circunferencia con centro en A y que pase por B o circunferencia con centro en A y de radio AB (Figura 20)

Figura 20

Dos representaciones formales de una circunferencia



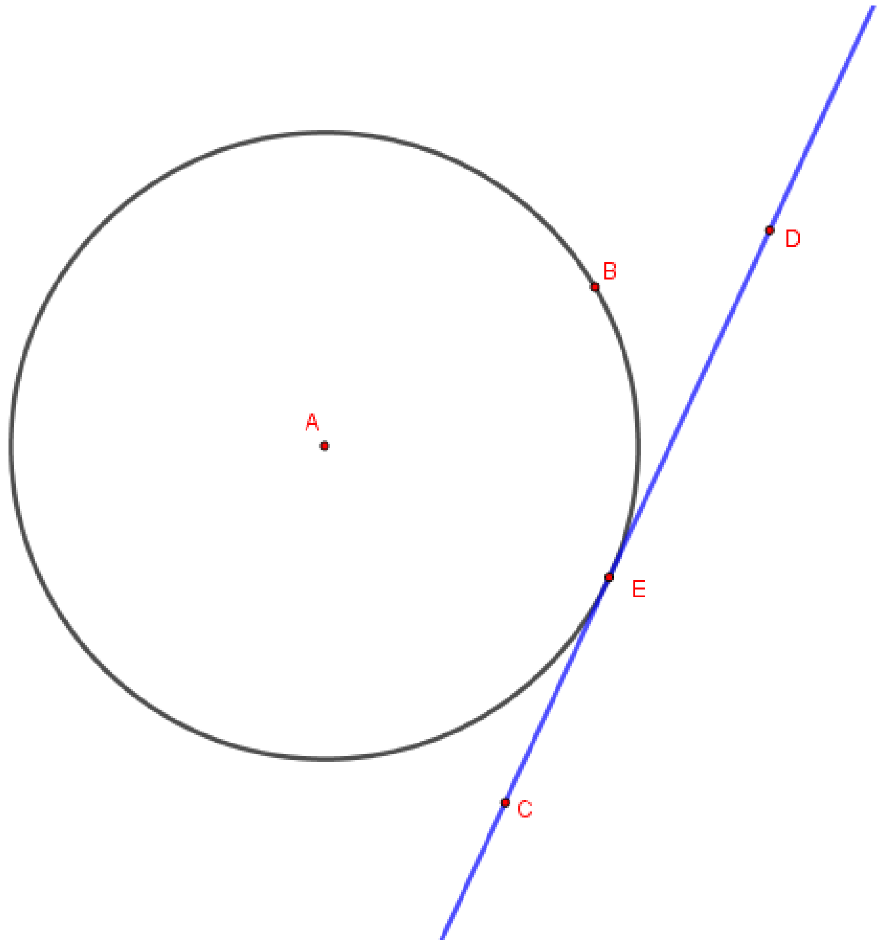
Fuente: Elaboración propia

En la representación coloquial se considera Cualquier acción de señalar la circunferencia, el uso de nombres que refieran al objeto, la designación solo del centro de la circunferencia o expresiones que designen el centro y el lugar por donde pasa sin referir las palabras descritas en la representación formal.

La construcción de puntos de intersección consiste en la determinación de posiciones del cruce de dos rectas, segmentos, curvas o cualquier combinación de estas. La representación formal considera el uso de expresiones que relacionen las líneas que se cortan, mencionando la designación empleada para la construcción de estas líneas, además de la denotación para el punto de intersección. Un ejemplo de eso es el caso en que una circunferencia se corta con una recta, en este caso refiere la construcción como, al punto de intersección E de la circunferencia con centro en A y que pasa por B con la recta CD (Figura 21)

Figura 21

Punto de intersección de una recta que corta en un punto a una circunferencia



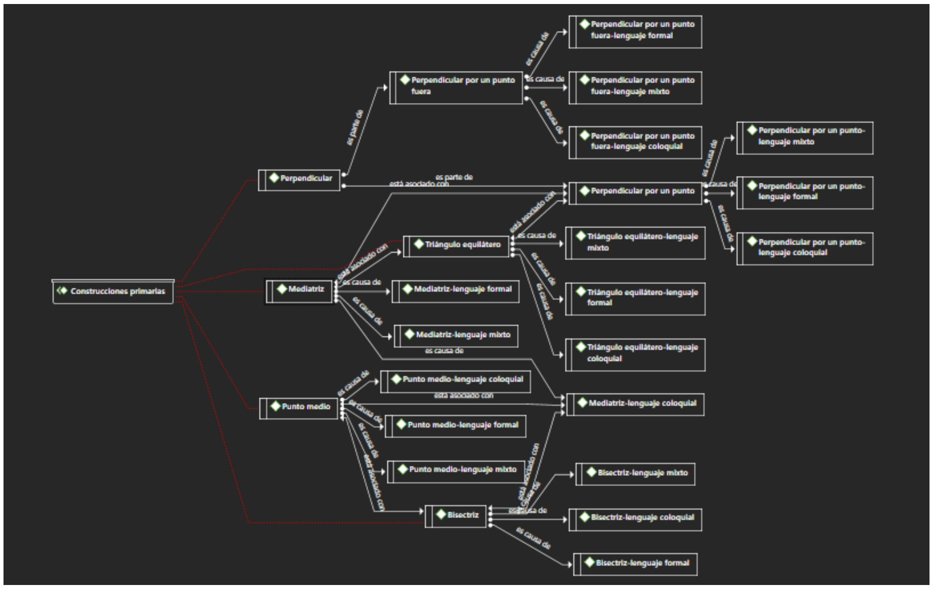
Fuente: Elaboración propia

Construcciones primarias

Esta categoría de construcciones está conformada por, punto medio, mediatriz, bisectriz, perpendicular, tangente a una circunferencia y triángulo equilátero. La principal característica de estas construcciones es que se emplean combinaciones de construcciones primitivas y como máximo una de las construcciones de la misma categoría, además de ser la base de muchas construcciones de polígonos. Para estas construcciones se consideran tres tipos de representaciones, las formales, las coloquiales y las representaciones mixtas (Figura 22).

Figura 22

Diagrama de representaciones formales, mixtas y coloquiales



Fuente: Red de análisis construida con Atlas ti. Elaboración propia

Las representaciones de tipo formal para el punto medio comprenden el uso de trazados de segmentos, circunferencias y puntos de intersección, razón por la cual se deben usar las designaciones de estas construcciones primitivas. Por ejemplo, Si se quiere trazar un punto medio a un segmento AB, primero se debe trazar una circunferencia centrada en A y que pase por B y luego una circunferencia con centro en B y que pase por A, a continuación, marcar los puntos de intersección de las circunferencias y designarles letras para hacer referencia a ellos, para el caso C y D, luego se traza una recta que pase por C y D y se marca la intersección con el segmento AB (en caso de no tener de manera icónica el segmento AB, se realiza su trazo, aunque en la representación lingüística se asume su existencia física) y se designa con la letra E. E corresponde al punto medio de AB. En ejemplo es claro que se necesita de un encadenamiento de pasos que requieren del uso de las designaciones, de lo contrario sería necesaria una representación gráfica para su comprensión. Es importante resaltar que las representaciones lingüísticas se encuentran apoyadas de representaciones mentales, que cumplen una función de gráfica, acorde al planteamiento de Duval sobre el mínimo de representaciones a usar para que exista comprensión. En el caso de la construcción del punto medio se requiere del trazado de una mediatriz al segmento AB, lo cual también permite proponer como construcción formal trazar una mediatriz al segmento AB y designar la letra C al punto de intersección de la mediatriz con el segmento AB, siendo este el punto medio de AB.

Las representaciones de carácter coloquial, incluyen el uso de gestos que indiquen los trazados o las construcciones primitivas, sin la necesidad de usar designaciones. Aquí se encuentran representaciones como "Trazo dos circunferencias y dibujo una recta que en donde se unen y luego marco la intersección con el segmento". También se consideran representaciones en las que menos de la mitad de las referencias de construcciones primitivas se efectúen con designaciones formales, por ejemplo, "hice acá una circunferencia y hice la circunferencia que tuviera por centro A que pasar a por B y acá hice lo mismo pero que tuviera por centro B y pasará por A y pues acá marque los puntos de intersección y acá también que son dos y luego hice una que una recta que pasará por los puntos de intersección", En esta representación se usó la construcción de dos circunferencias comunicadas de manera formal, tres puntos de intersección de manera coloquial y una recta de manera coloquial. Al usar menos de la mitad de las representaciones de construcciones primitivas de manera formal, constituye en su global una representación coloquial.

Las representaciones mixtas hacen referencia a aquellas que usan por lo menos la mitad de las representaciones de construcciones primitivas de manera formal. A modo de ejemplo, "trace una circunferencia con centro en A y que pase por B y trace otra circunferencia que con centro en B y que pase por A marque las intersecciones de las circunferencias con C y D y trace una recta y donde se corta con el segmento es el punto de intersección". Aquí se emplearon representaciones de dos circunferencias de manera formal, dos puntos de intersección formalmente, una recta de manera coloquial y un punto de intersección de manera coloquial, como se puede apreciar el total de construcciones primitivas usadas es de 6, cuatro de ellas se representaron de manera formal y dos de manera coloquial, por lo que la representación global se considera mixta.

La categorización de las demás construcciones primarias se realizó bajo los ismos parámetros.

Construcciones secundarias

Estas construcciones están constituidas por construcciones que requieren de la articulación de construcciones primitivas y construcciones primarias, además de que el ultimo trazo no es una construcción primaria. Por ejemplo, la construcción de un cuadrado inscrito en una circunferencia, la construcción de un ángulo de 30, inscribir una circunferencia en un rombo, entre otros. Su representación se clasifica en tres tipos, formal, coloquial y mixta.

La representación formal requiere de la designación de las construcciones primitivas y primarias de manera formal, por ejemplo, inscribir una circunferencia en un rombo ABCD. Su representación formal es: se trazan las diagonales AC y BD, se marca el punto de intersección de ellas y se nombra E. Sobre uno de los lados del rombo, por ejemplo, AD, se traza una perpendicular que pase por E, y se marca la intersección con la letra F. Con centro en E se traza una circunferencia que pase por F. La circunferencia de centro E y radio EF está inscrita en el rombo ABCD. Aquí se empleó la construcción de dos segmentos, un punto de intersección, una mediatriz, un punto de intersección y una circunferencia, todos en una representación formal.

Las representaciones coloquiales son aquellas en las que las designaciones de las construcciones empleadas se hacen sin designar, solo empleando gestos que refieran a los trazos que se mencionan.

Las representaciones mixtas incorporan representaciones formales y coloquiales, teniendo en cuenta que el uso de las representaciones formales no supere la mitad del total empleado.

Análisis de la primera sesión

Para el desarrollo de la primera sesión se contó con un tiempo de dos (2) horas, en el cual, los estudiantes propusieron soluciones a las situaciones de la actividad "Aventura espacial", siguiendo sus mecánicas. Se realizó la grabación de la sesión y posteriormente se efectuó el análisis haciendo transcripciones de las conversaciones y empleando el software Atlas ti como herramienta de sistematización. Las situaciones a las que se enfrentaron los estudiantes están descritas en la Tabla 14.

Tabla 14

Situaciones asignadas en la primera sesión

	Situación a desarrollar
Estudiante 1	Alfa 1, Alfa 8, Gamma 2, Delta 2
Estudiante 2	Alfa 3, Alfa 4, Delta 5
Estudiante 3	Alfa 6, Alfa 11, Gamma 7, Delta 5
Estudiante 4	Beta 3, Beta 13, Delta 11, Delta 16
Estudiante 5	Alfa 2, Beta 12, Gamma 3, Delta 17

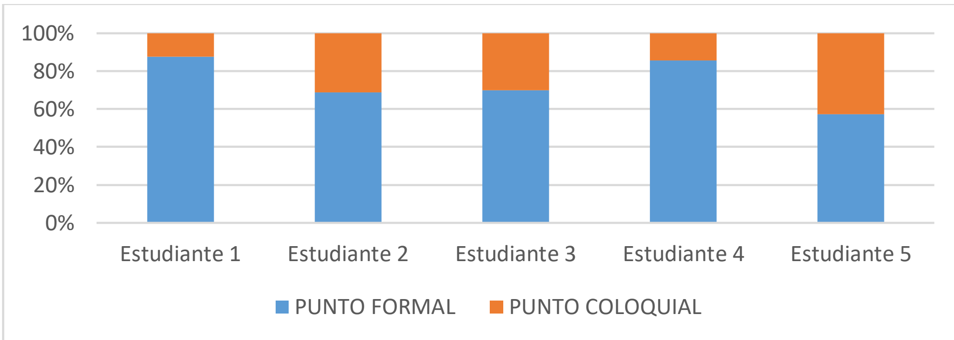
Fuente. Elaboración propia.

Análisis de construcciones primitivas

En el análisis efectuado sobre las transcripciones se realizó el conteo de las representaciones lingüísticas, asociadas a construcciones primitivas, empleadas por cada estudiante en el tiempo de participación en la sesión. Posteriormente se realizó una comparación entre las representaciones formales y coloquiales, para determinar el porcentaje de uso de las mismas (Figura, 23, 24, 25, 26 y 27).

Figura 23

Uso de las representaciones de punto en lenguaje natural

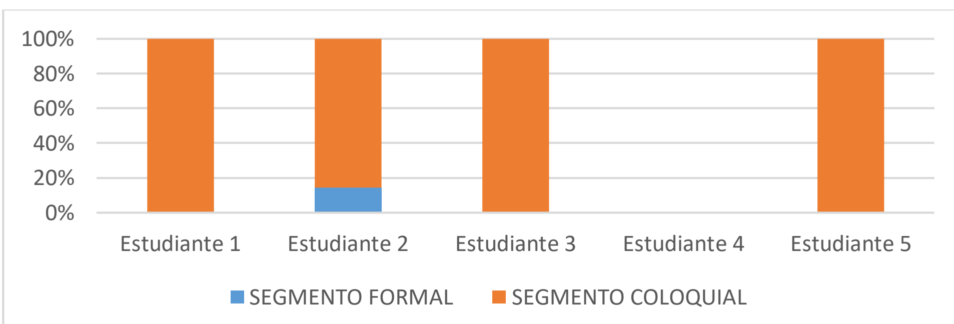


Nota: Esta tabla muestra la relación entre uso de lenguaje formal y coloquial de 5 estudiantes, obtenida en la transcripción de dos (2) horas de interacción de los estudiantes con el profesor en la primera sesión, la relación está dada en porcentaje, comparando la frecuencia de uso de representaciones de punto.

Fuente: Elaboración propia.

Figura 24

Uso de las Representaciones de Segmento en Lenguaje Natural

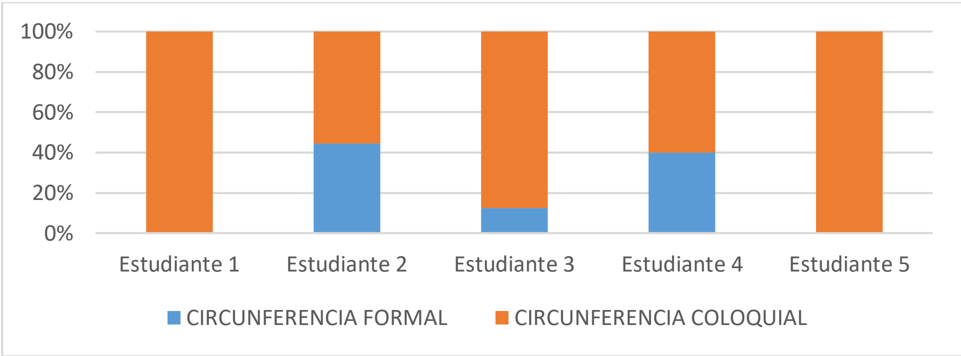


Nota: Esta tabla muestra la relación entre uso de lenguaje formal y coloquial de 5 estudiantes, obtenida en la transcripción de dos (2) horas de interacción de los estudiantes con el profesor en la primera sesión, la relación está dada en porcentaje, comparando la frecuencia de uso de representaciones de segmento.

Fuente: Elaboración propia.

Figura 25

Uso de las representaciones de circunferencia en lenguaje natural

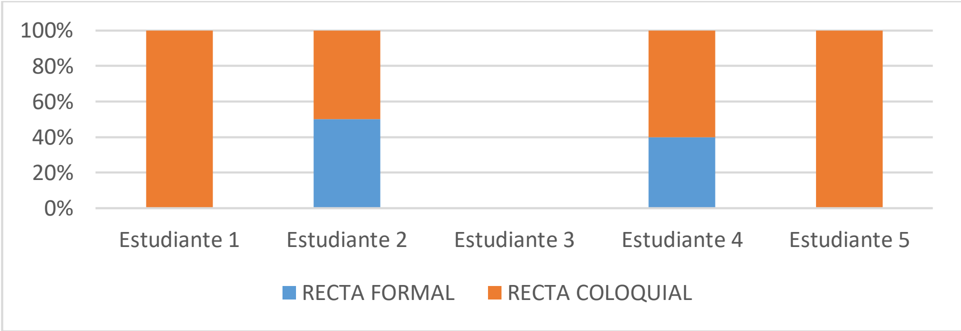


Nota: Esta tabla muestra la relación entre uso de lenguaje formal y coloquial de 5 estudiantes, obtenida en la transcripción de dos (2) horas de interacción de los estudiantes con el profesor en la primera sesión, la relación está dada en porcentaje, comparando la frecuencia de uso de representaciones de circunferencia.

Fuente: Elaboración propia

Figura 26

Uso de las representaciones de recta en lenguaje natural

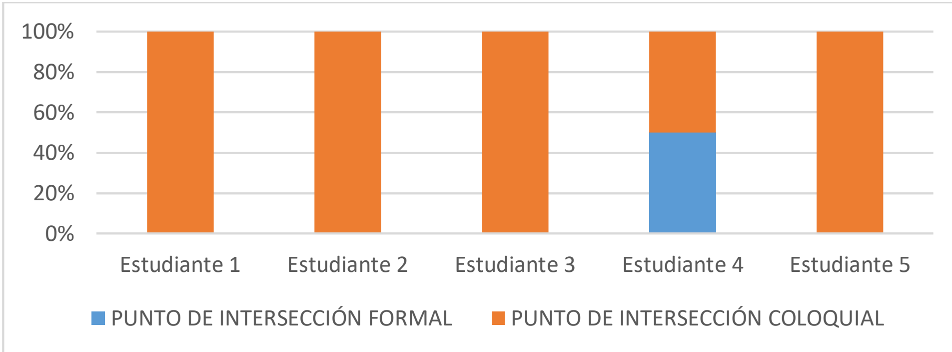


Nota: Esta tabla muestra la relación entre uso de lenguaje formal y coloquial de 5 estudiantes, obtenida en la transcripción de dos (2) horas de interacción de los estudiantes con el profesor en la primera sesión, la relación está dada en porcentaje, comparando la frecuencia de uso de representaciones de recta.

Fuente: Elaboración propia

Figura 27

Uso de las representaciones de punto de intersección en lenguaje natural



Nota: Esta tabla muestra la relación entre uso de lenguaje formal y coloquial de 5 estudiantes, obtenida en la transcripción de dos (2) horas de interacción de los estudiantes con el profesor en la primera sesión, la relación está dada en porcentaje, comparando la frecuencia de uso de representaciones de punto de intersección.

Fuente: Elaboración propia

A partir de esta información se puede inferir que los estudiantes usan en su gran mayoria representaciones de punto de manera formal, ya que esta requiere una desiganación unitaria, es decir no requieren de otras construcciones para su representación. Para las representaciones relacionadas con segmentos, circunferencias, rectas y puntos de intersección, los estudiantes efectuan con mayor frecuencia representaciones coloquiales, ya que estas construcciones dependen de la denotación de dos puntos o más, como ejemplo particular, la comprensíon de la delimitación de un segmento, lo cual deriva de una necesidad de señalar, usando gestos indixecales, para hacer referencia a los trazos realizados. Para el caso de los puntos de intersección, la preferencia en el uso de gestos que señalen el lugar referido, están asociados a la dificultad de exteriorizar secuencias de designación más elaboradas, las cuales requieren de una representación interna secuenciada, que posteriormente debe ser exteriorizada de la misma manera.

La frecuencia de uso de representaciones que requieren más de una designación, disminuye a medida que la cantidad de designaciones aumenta, es decir existe una relación inversa entre su uso y la cantidad de designaciones empleadas.

En las intervenciones de los estudiantes prima el uso de expresiones como "los puntos que están ahí", "las uniones de los círculos", "acá hice una circunferencia", entre otras, que apelan al gesto de señalar usando un índice que no requiera nombrar el lugar referido. El principal obstáculo en el uso de representaciones formales, radica en la dificultad de identificar que las construcciones dependen de elementos primitivos y una secuencia ordenada de su uso.

Otro obstáculo que emerge en la práctica de los estudiantes, está relacionado con las complicaciones en identificar, en las situaciones alfa, las designaciones mostradas de manera gráfica, lo cual dificulta la mimesis de la representación dada en la hoja de contexto, ya que se obvian las conexiones necesarias para la construcción. En el caso de las situaciones beta, el seguimiento de las instrucciones se dificulta, debido a que se presenta un obstáculo relacionado con el uso de lenguaje formal en la generación de representaciones mentales (que permitan seguir la secuencia) para su posterior representación de manera gráfica.

Para el caso de las situaciones gamma, los estudiantes ejecutan el uso de las construcciones primitivas, refiriéndose a misconcepciones sobre la construcción solicitada, esto genera que no puedan conectar la dependencia de las construcciones primitivas y posteriormente no puedan ser comunicadas de manera formal, lo cual representa un obstáculo en el uso de las ideas relacionadas con la denotación y designación empleadas en sus aprendizajes anteriores.

En las situaciones Delta al no existir un apoyo visual o en forma de instrucciones, los estudiantes acuden a usar las representaciones construidas por la percepción visual de sus experiencias previas y dejan en evidencia la carencia de palabras, de tipo formal, que aludan a las representaciones mentales usadas para su posterior exteriorización. Aquí el obstáculo evidente subyace en la imposibilidad de usar deconstrucciones dimensionales que permitan recrear los esquemas mentales, de manera física, y acertada.

Análisis de construcciones primarias

Las construcciones primarias usadas por los estudiantes son comunicadas mediante el uso, en su mayoría, de representaciones mixtas, ya que la mayoría de las construcciones primitivas comunicadas se realizan desde lo coloquial, y son combinadas con representaciones coloquiales.

Situaciones Alfa.

Las situaciones alfa consisten en replicar las construcciones dadas de manera gráfica, asociándolas a un contexto dado en la situación. A continuación, se muestran algunas de las soluciones propuestas por los estudiantes.

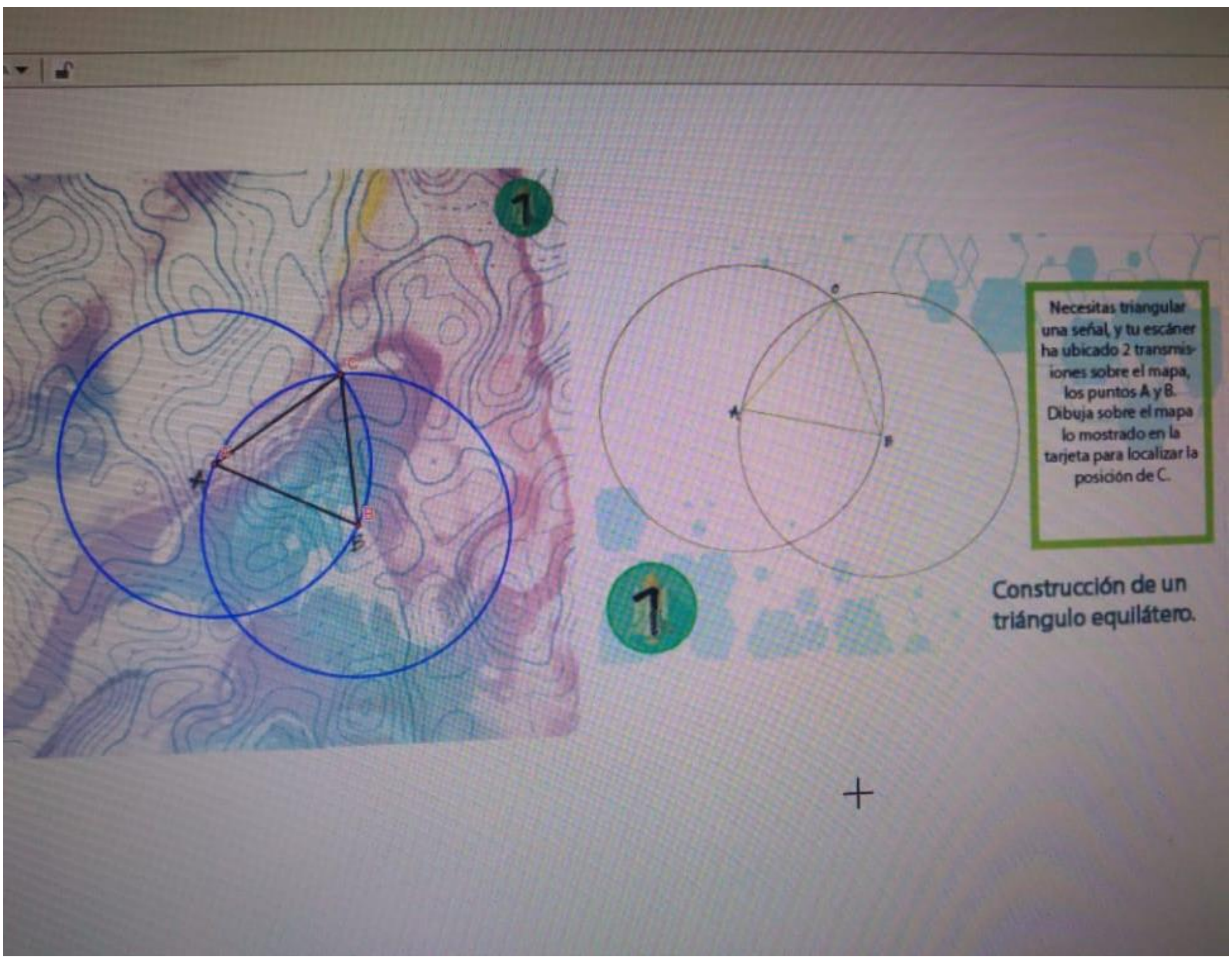
El estudiante uno inició la construcción de la situación 1 Alfa, en la cual debía replicar la construcción de un triángulo equilátero (Figura 28), en la hoja de contexto se plantea el dibujo de un terreno (vista aérea), con dos puntos (A y B) marcados, que contextualizaban la narración mostrada en la tarjeta. A continuación, se muestra el dialogo entre el profesor P y un estudiante (E1), en el cual se evidencia el uso de representaciones lingüísticas para argumentar la representación gráfica usada en la solución de la situación.

En el dialogo se puede evidenciar el uso de representaciones formales como “el segmento, de A a B” y representaciones de carácter coloquial como “hice los círculos esos, lo puse del punto A a B y al revés”, las cueles están acompañadas de señalamientos en la representación gráfica para indicar los trazos a los que hace referencia. En la construcción del triángulo equilátero, el estudiante empleó tres representaciones formales y dos representaciones coloquiales, con lo cual la representación lingüística de la construcción primaria se da de manera mixta. El estudiante logro solucionar la situación de manera satisfactoria.

Dialogo 1. Transcripción de un diálogo del profesor y el estudiante E1.		
1	**E1:**	Pues lo replique, ahí decía qué que lo dibuje sobre el mapa y pues en la tarjeta.
2	**P:**	¿Y cómo hiciste ese dibujo?
3	**E1:**	Pues con la, con los bichitos de arriba, que aparecen ahí para formarlos.
4	**P:**	Mmm… bueno ¿me puedes decir cómo es el orden de la construcción?
5	**E1:**	Ah sí profe, primero hice el segmento, de A a B, después hice la los círculos esos, lo puse del punto A a B y al revés, puse otra vez segmento, de A a C y de C a B y ya.

Figura 28

Construcción de un triángulo equilátero



Fuente: construcción realizada por E1

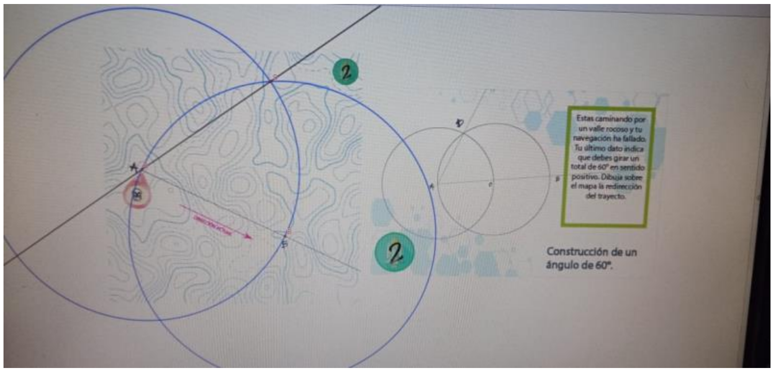
Otra solución de una situación Alfa se describe en el siguiente dialogo entre el profesor (P) y un estudiante (E5). Aquí el estudiante propuso una solución para la situación 2 Alfa, en la que debía construir un ángulo de 60 (figura 29). En la hoja de contexto se muestra la vista aérea de un terreno, la posición del personaje y la dirección de su recorrido inicial. En el dialogo se puede ver que el estudiante usa expresiones de tipo coloquial como "la de A me toco unirla hasta la B", haciendo referencia a una circunferencia con centro en A y que pasa por B, y representaciones formales en la designación de puntos. Las construcciones usadas fueron dos circunferencias, un punto de intersección y una recta, todas representadas coloquialmente, lo cual sitúa la representación de toda la construcción primaria en representación coloquial. A pesar de los tropiezos en la comunicación el estudiante logra cumplir satisfactoriamente con el requerimiento.

Dialogo 2. Transcripción de un diálogo del profesor y el estudiante E5.

1	**E5:**	Me pedían que hiciera una construcción de un ángulo de 60, hice lo que eran… los… ya se me olvidó el nombre otra vez…
2	**P:**	circunferencias
3	**E5:**	circunferencias, me tocó unirlas para que me dieran
4	**P:**	¿y como dibujaste a circunferencias, de dónde hasta dónde, por donde pasan, con centro en dónde?
5	**E5:**	La de A me toco unirla hasta la B, para que me dieran uno, porque antes intenté hacerla como si fuera la A, que llegara a la mitad de los dos, pero cuando intenté hacer lo mismo con la anterior, no me daba cómo éste de referencia, no me daba la referencia, cuando intente volver a hacerla, pero desde A llegar a B, me salieron así, y lo mismo B hacia A, me salieron así y lo que era para sacar el ángulo, usé lo que es la recta y la puse en la… en la unión de las dos, en la parte de arriba.

Figura 29.

Construcción de un Ángulo de 60 Grados



Fuente: construcción realizada por E5

Situaciones Beta.

En las situaciones Beta el estudiante debe seguir una serie de instrucciones (representación lingüística formal) para realizar la construcción solicitada, lo debe hacer sobre una hoja de contexto que representa la situación planteada en las tarjetas. A continuación, se muestran algunas soluciones de las situaciones de este tipo, planteadas por los estudiantes.

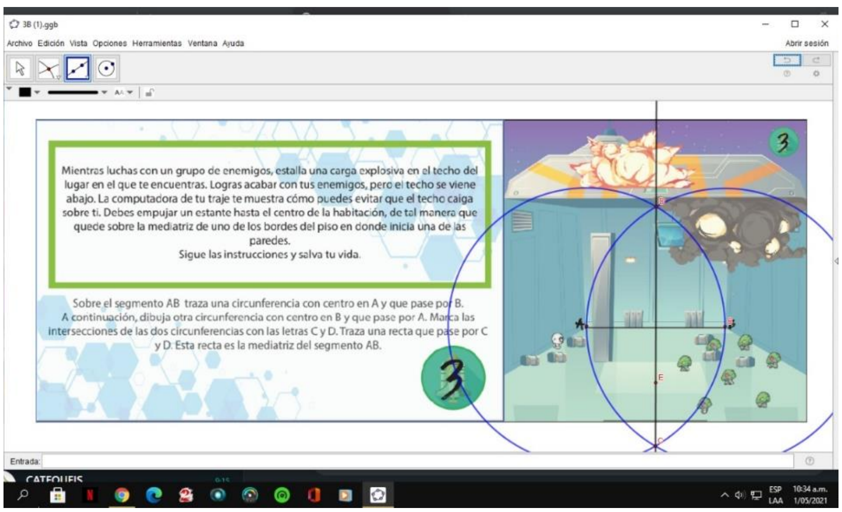
Una solución a una situación Beta se presenta en el dialogo mostrado enseguida, entre el profesor (P) y un estudiante (E4). Aquí el estudiante sigue las instrucciones de manera correcta y logra representar gráficamente la construcción. Al momento de comunicar efectúa las representaciones lingüísticas de manera formal, señalando los trazos dibujados en la hoja de contexto. La situación requiere del uso de dos circunferencias, dos puntos de intersección y una recta, todas representadas de manera formal, por lo cual, la representación secundaria propuesta se considera formal.

Dialogo 3. Transcripción de un diálogo del profesor y el estudiante E4.		
1	**E4:**	Pues yo lo primero que hice, fue ubicar un punto en la recta que aparecía ahí y lo nombré cómo B, y luego hice una circunferencia que tenía como centro B y qué pasó por A y luego marque la intersección, qué es el punto C, y luego trace una circunferencia, que tenía que

		tener como centro, pues, el punto C y como radio C y A, y luego hice una recta, no mentirás, luego hice una intersección, entre la circunferencia de C y A, y la nombre como D y luego hice una recta que unía el punto A y el punto D. Y ya
2	**P:**	¿Y cómo se llama esa recta?
3	**E4:**	Perpendicular
4	**P:**	¿Perpendicular a qué?
5	**E4:**	A la recta inicial

Figura 30

Construcción de una mediatriz



Fuente: construcción realizada por E4

Análisis de construcciones secundarias

En el desarrollo de la primera sesión este tipo de construcciones representaron un reto para los estudiantes, en gran medida se debe a que requieren de un dominio de las construcciones primarias. Los obstáculos emergentes en las construcciones primarias y primitivas no permiten abordar situaciones de mayor complejidad, en consecuencia, las secuencias de construcciones se limitan al señalamiento de lugares sin una designación, y en ocasiones se usan representaciones formales de construcciones primitivas.

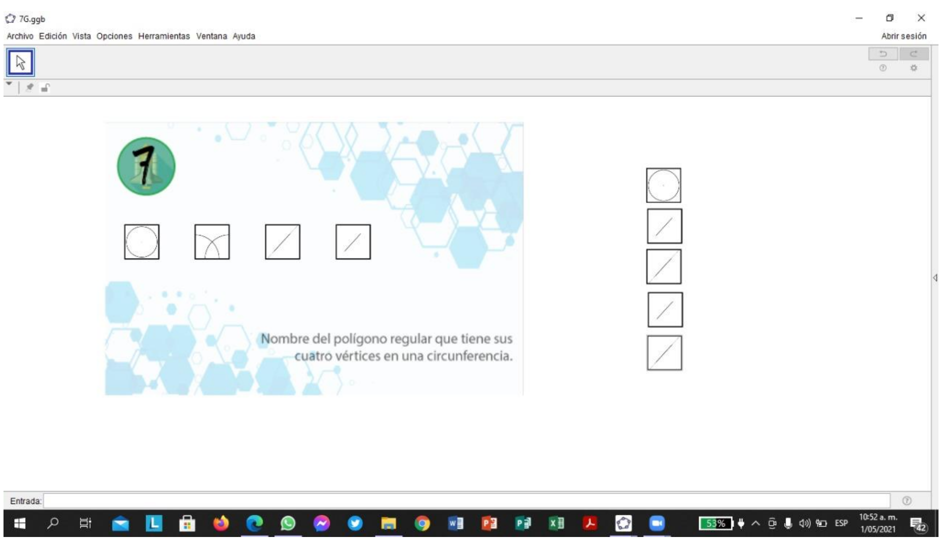
Situaciones Gamma.

Las situaciones Gamma requieren de la consolidación de representaciones mentales que posteriormente son exteriorizadas usando símbolos que representan las construcciones primitivas usadas, se trata de ejecutar el orden de las representaciones de tal manera que correspondan a la solución de la situación. Adicionalmente se debe dar el nombre de la construcción de acuerdo a las características descritas en la tarjeta.

A continuación, se muestra un dialogo entre el profesor (P) y un estudiante (E3). En el dialogo se aprecia que el estudiante comprende que polígono está asociado a las características descritas, pero también se puede evidenciar que sus representaciones mentales están asociadas a percepciones visuales, y se le dificulta el uso de representaciones que hagan visibles las cualidades del polígono. En las representaciones lingüísticas empleadas se hace alusión a construcciones primarias de manera coloquial, lo cual sitúa a toda la representación como coloquial.

Figura 31

Secuencia de construcciones primitivas para un cuadrado inscrito en una circunferencia



Fuente: construcción realizada por E3

Dialogo 4. Transcripción de un diálogo del profesor y el estudiante E3.

1	**E3:**	Pues yo lo hice así, porque decía, nombre del polígono regular que tiene sus cuatro vértices en una circunferencia, entonces, sería un cuadrado, entonces, hice la circunferencia y los cuatro lados
2	**P:**	¿La circunferencia y los cuatro lados? ¿Y con eso ya sabes que es un cuadrado? ¿Con sólo dibujarlos cuatro lados?
3	**E3:**	Sí profe
4	**P:**	Entonces porfa abres GeoGebra, el que les envié de prueba, el que está en blanco.
5	**E3:**	Sería pues, se hace la circunferencia y se ponen los cuatro lados, digamos ahí. Ah se puede segmento. Y así profe
6	**P**	¿Eso es un cuadrado?
7	**E3**	Sí sería un cuadrado
8	**P**	El resto que dice, ¿Parece un cuadrado? Vamos a comprobar, si es un cuadrado. Selecciona la herramienta circunferencia, con centró en G traza una circunferencia que pase por C. Si fuera cuadrado esa circunferencia también debería pasar por F. ¿Si me entiendes?
9	**E3**	No profe, ¿cómo así?
10	**P**	Mira, ahí trazaste esa circunferencia que pasa por C, ¿cierto? no, incluso pasa por H. Dale ctrl z. Circunferencia con centro en G que pase por C. Concentró en G y que pase por C, toca el punto G, no, no, no, ahí ya está bien. Dale control z. Selecciona circunferencia, toca una vez en G, da un clic, ahora, da un clic en C. Mira, la circunferencia no está tocando al punto F, ¿si ves? Si fuera equilátero, debería tocar a F, si fuera un cuadrado, entonces, mira, por ejemplo, ahí hay dos lados, eso quiere decir que el segmento GC mide más que el segmento GF, tiene mayor longitud.
11	**E3**	Osea que está circunferencia tiene que pasar por F
12	**P**	Sí, debería haber pasado por ahí, estar tocando los dos puntos. Porque mira, es una circunferencia y si tú te das cuenta, ese es un radio, ¿cierto? para que el otro lado, GF midiera lo mismo también, debería ser un radio de la circunferencia, con eso garantizamos que es la misma medida cierto. Listo, entonces ahí ya sabemos que el segmento GC es más largo que el

		segmento GF, entonces, no es un cuadrado. Bueno, otra cosa, ¿estás segura que los ángulos que forman ahí son de 90°?
13	**E3**	No, pues no estoy segura
14	**P**	Entonces, otra vez lo hiciste a ojo. Entonces la construcción no es válida, porque tiene que ser precisa. ¿Listo?

Situaciones Delta.

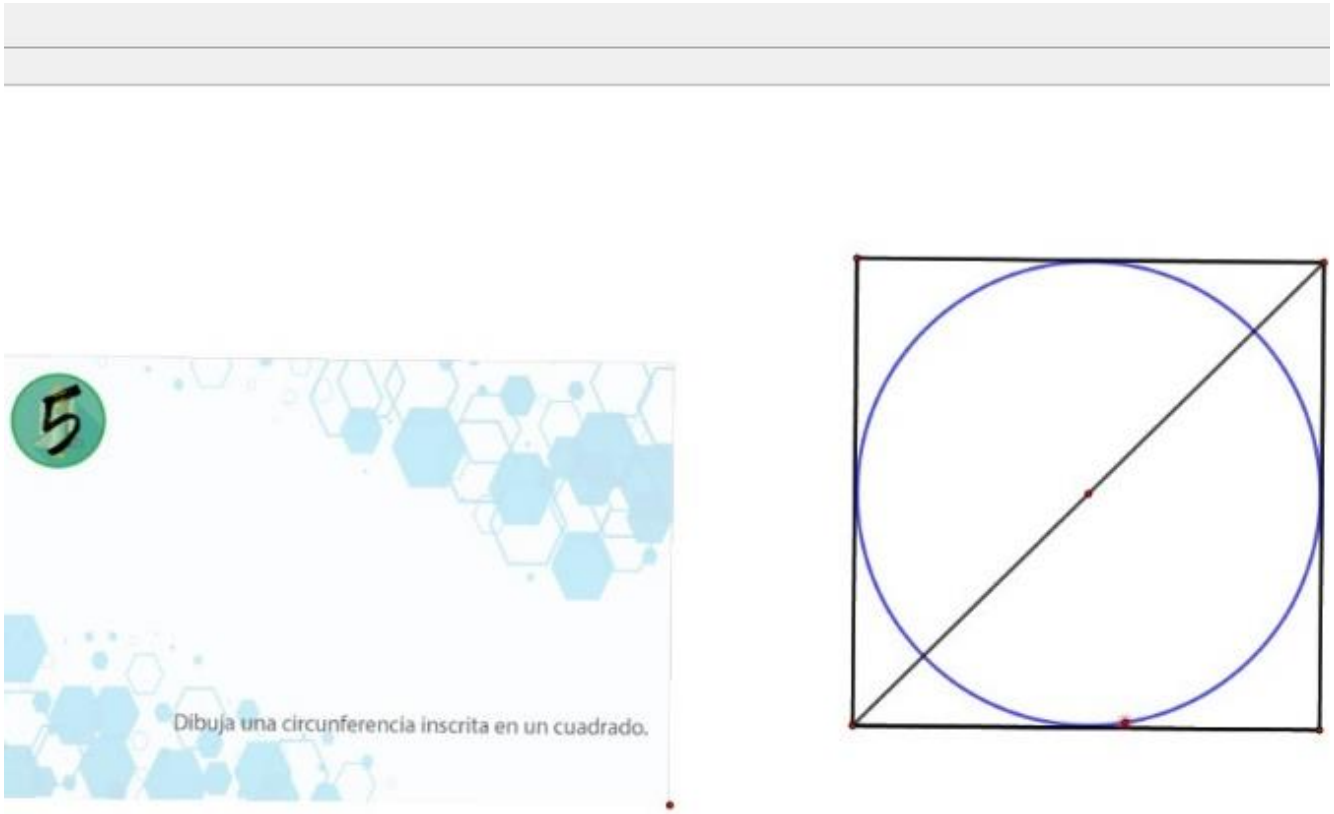
Este tipo de situaciones plantean la realización de construcciones sin ningún tipo de apoyo visual. Aquí se debe proponer una representación de carácter gráfico, y se sustenta empleando representaciones lingüísticas. A continuación, se muestra el dialogo entre un estudiante (E5) y el profesor (P). El primer obstáculo presente en el dialogo es la imposibilidad de trabajar con formas que no se encuentren en posiciones prototipadas, es el caso de un cuadrado, en donde el estudiante (E5) expresa la necesidad de reacomodarlo para que uno de los lados sea "horizontal". El segundo obstáculo está relacionado con la determinación de propiedades por percepción visual, en este caso la determinación del centro del cuadrado. Las construcciones primitivas empleadas son un punto, una circunferencia y un segmento, y las representaciones asociadas se comunican de manera coloquial, lo cual convierte al global de la representación en una coloquial.

Dialogo 5. Transcripción de un diálogo del profesor y el estudiante E2.		
1	**E2:**	Profe pues a mí ya me aparecía así el cuadrado, pero estaba entonces de lado, entonces, lo que hice fue así como cogerlo con esta herramienta de acá y le di la vuelta y cogí y hice un círculo, sino que es que en el pantallazo no... osea todavía no había tomado la foto bien, entonces no alcancé a mandar esta línea y coloqué el círculo y después acá… en este ajuste de acá, hice para que la línea quedar así y coloqué la línea de acá hasta acá, así, bueno y eso fue lo que hice.

2	**P:**	Bueno, ¿cómo garantizas que esa circunferencia realmente está por el punto medio? perdón, ¿es tangente o está inscrita ahí en el cuadrado?
3	**E2:**	Pues yo calculé ahí más o menos, pues... para que quedara bien en la mitad y para que no se saliera como del cuadrado
4	**P:**	Voy a intentar hacer tu construcción. Tienes que tener cuidado con eso, porque la construcción debe ser 100% segura, ¿listo? entonces, pues no hay, así como tal una forma de asegurar que realmente eso que acabas de dibujar es de una circunferencia inscrita y ya te voy a mostrar por qué. Entonces mira, tú tienes un cuadrado, entonces lo primero que hiciste fue acomodarlo ¿cierto?
5	**E2:**	Sí señor
6	**P:**	Después trazaste esta línea
7	**E2:**	No profe, después hice el círculo
8	**P:**	Hiciste el círculo ah listo, entonces medio ojeaste que por acá fuera el centro y más o menos que no se fuera a salir, ¿cierto?
9	**E2:**	Sí señor
10	**P:**	Y lo cuadraste yo creo que como así, cómo así ¿cierto? eso creo que fue lo que hiciste y después trazaste este segmento ¿sí?
11	**E2:**	Sí señor
12	**P:**	Si eso fuera como tal una circunferencia inscrita entonces, este punto… esa circunferencia debería intersecarse por acá, en algún lado con ese segmento y ¿si ves que no marca nada? Pero si me corro un poquito me marca dos intersecciones entonces como que no hay una certeza, algo que me diga 100% estoy seguro de que, si va a estar inscrito y va a tocar en un solo un punto la circunferencia a cada lado, entonces tu construcción no es válida, porque la hiciste a ojo, como intentando acomodar las cosas.

Figura 31

Construcción de una circunferencia inscrita en un cuadrado



Fuente: construcción realizada por E2

Segunda sesión: Material de apoyo para construcciones con regla y compás

Para la segunda sesión se diseñó un material de apoyo para fortalecer procesos de solución de situaciones relacionadas con las construcciones con regla y compás. El material incluye el acceso a una página web y a una aplicación para smartphone.

La página web creada, consta de representaciones en lenguaje natural, lenguaje gráfico, además de material audiovisual sobre las construcciones (Figura 32, 33 y 34). La finalidad de este material consiste en que los estudiantes se relacionen con algunas construcciones con regla y compás.

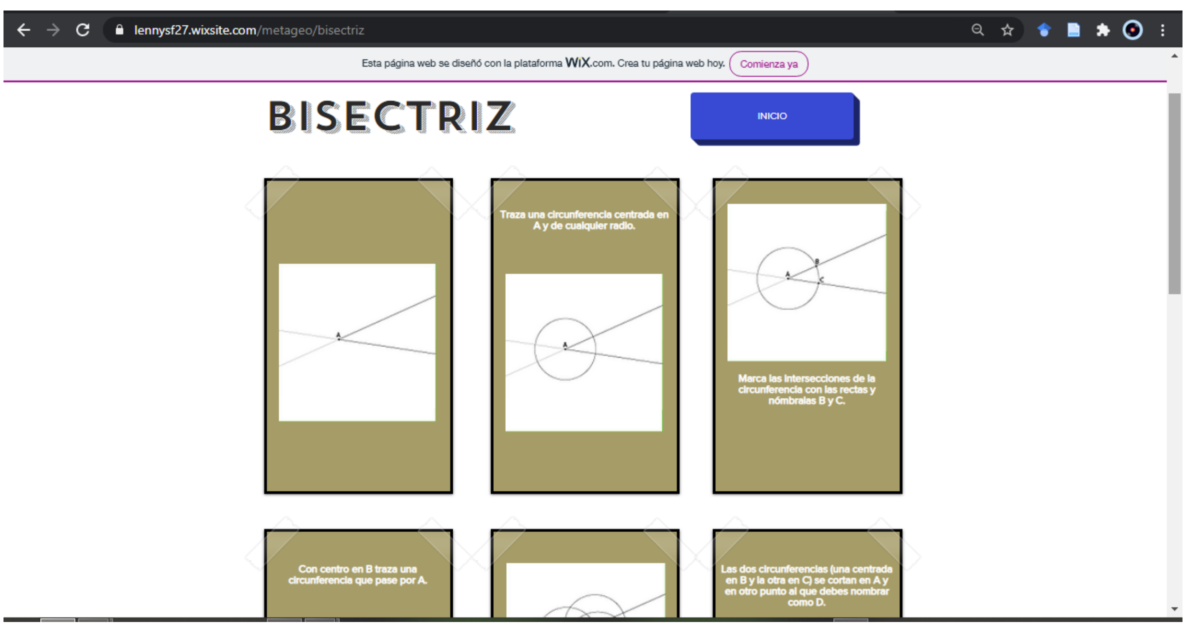
Figura 32

Interfaz de inicio de página Web

Fuente: tomado de lennysf27.wixsite.com/metageo

Figura 33

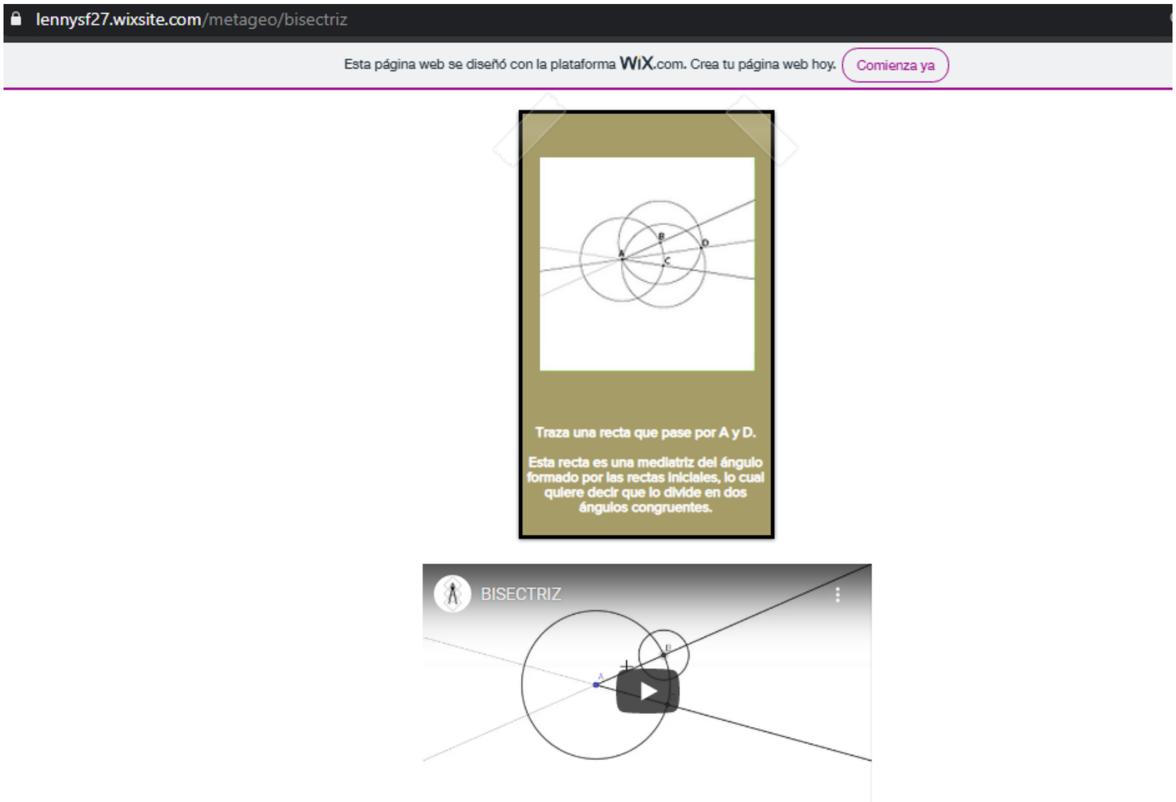
Ejemplo de una construcción en la página Web



Fuente: tomado de lennysf27.wixsite.com/metageo/bisectriz

Figura 34

Ejemplo de una construcción con video de apoyo en la página Web



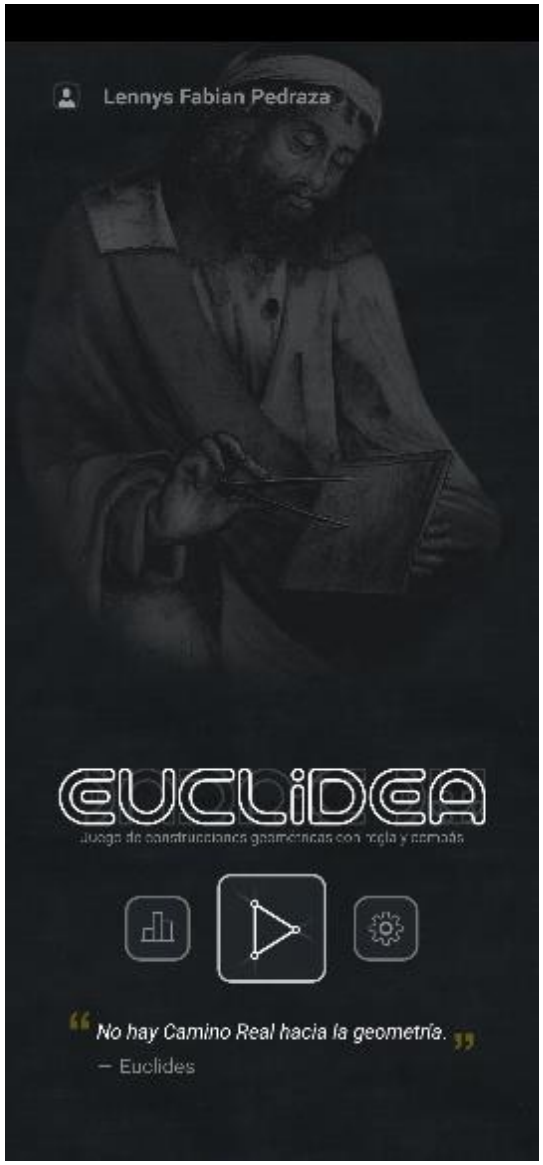
Fuente: tomado de lennysf27.wixsite.com/metageo/bisectriz

Las construcciones descritas corresponden a una secuencia de instrucciones de carácter formal que van acompañadas de dibujos que ilustran la construcción. Los videos anexos a las construcciones describen la secuencia de construcciones al tiempo que se realizan los trazos. El fin del material es el de proporcionar al estudiante herramientas de estudio que les permitan enfrentarse a las situaciones propuestas en la actividad “Aventura espacial” en su segunda interacción con esta.

La aplicación propuesta como herramienta de estudio es “Euclidea”, la cual cuenta con construcciones primitivas, primarias y secundarias, junto con ayudas para su solución y referencias bibliográficas de las construcciones empleadas (Figura 35).

Figura 35

Pantalla de Inicio de la Aplicación Euclidea

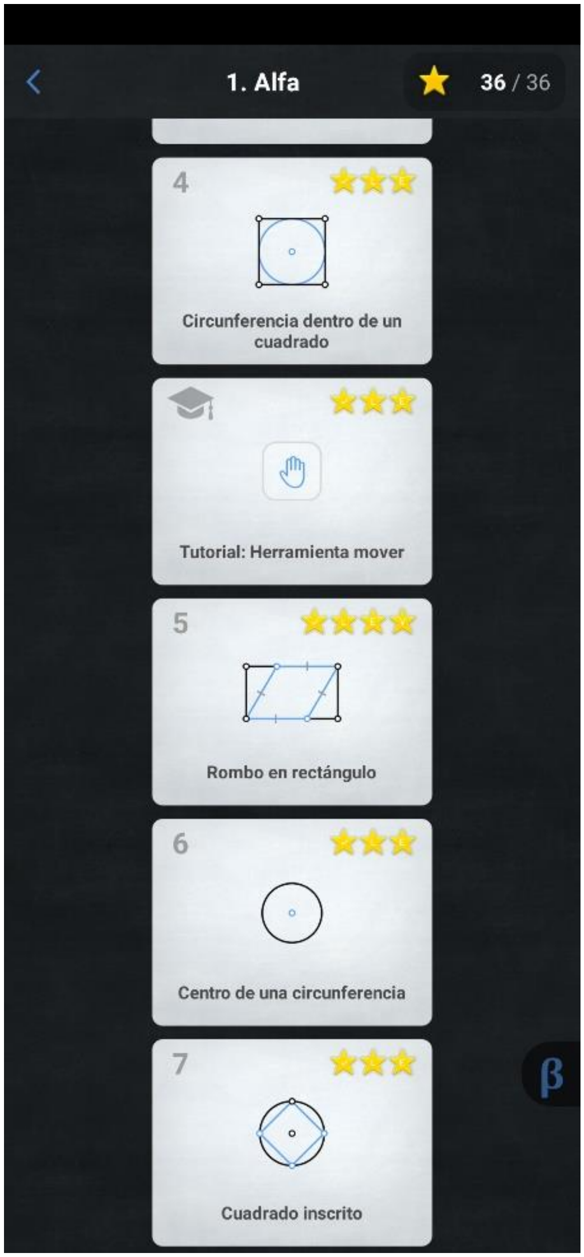


Fuente: Aplicación euclídea

Esta aplicación usa la geometría dinámica (Figura 36) para crear secuencias de construcciones empleando un límite de paso, lo cual optimiza las construcciones al mínimo de pasos necesarios para efectuar las construcciones.

Figura 36

Pantalla de Actividades de la Aplicación Euclidea



Fuente: Aplicación euclídea

Análisis tercera sesión

Para el desarrollo de la tercera sesión se contó con un tiempo de 2 hora, en el cual, los estudiantes propusieron soluciones a las situaciones de la actividad "Aventura espacial", siguiendo sus mecánicas. Se realizó la grabación de la sesión y posteriormente se efectuó el análisis haciendo transcripciones de las conversaciones y empleando el software Atlas ti como herramienta de sistematización. Las situaciones a las que se enfrentaron los estudiantes están descritas en la Tabla 15.

Tabla 15

Situaciones asignadas en la tercera sesión

	Situación a desarrollar
Estudiante 1	
Estudiante 2	Alfa 1, Alfa 5, Alfa 11, Delta 2, Delata 4
Estudiante 3	Beta 4, Beta 6, Beta 14, Gamma 15
Estudiante 4	Alfa 3, Alfa 4, Beta 7, Delta 7, Delta 17
Estudiante 5	Alfa 7, Alfa 10, Beta 14, Gamma 4

Fuente. Elaboración propia.

Esta sesión constituye la última aplicación de la actividad "Aventura espacial", se siguen los mismos parámetros de la primera sesión, con la diferencia que los estudiantes han interactuado con el material de apoyo. La intención de esta sesión fue evaluar la evolución de las representaciones hacia un carácter formal, con el fin de indagar sobre la eficacia de toda la actividad.

En las tablas 16 y 17 se presenta la frecuencia con la que fueron usadas las representaciones de las construcciones primitivas, punto formal (PF), punto coloquial (PC), segmento formal (SF), segmento coloquial (SC), circunferencia formal (CF), circunferencia coloquial (CC), recta formal (RF), recta coloquial (RC), punto de intersección formal (PIF) y punto de intersección coloquial (PIC).

Tabla 16

Frecuencia de uso de representaciones primitivas en la primera sesión

	PF	PC	SF	SC	CF	CC	RF	RC	PIF	PIC
Estudiante 1	21	3	0	5	0	11	0	2	0	1
Estudiante 2	11	5	1	6	4	5	2	2	0	6
Estudiante 3	7	3	0	5	1	7	0	0	0	1
Estudiante 4	12	2	0	0	2	3	2	3	1	1
Estudiante 5	4	3	0	4	0	8	0	1	0	9

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 17

Frecuencia de uso de representaciones primitivas en la segunda sesión

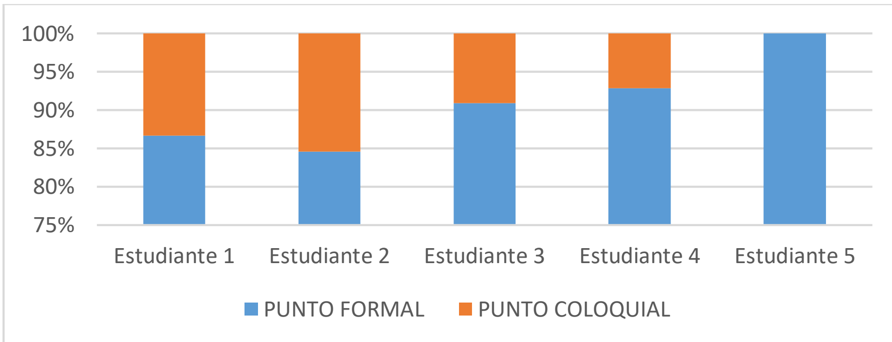
	PF	PC	SF	SC	CF	CC	RF	RC	PIF	PIC
Estudiante 1	13	2	4	3	0	9	0	0	0	2
Estudiante 2	22	4	4	3	5	3	3	3	3	4
Estudiante 3	10	1	6	3	0	1	0	1	2	4
Estudiante 4	26	2	1	4	6	4	4	1	5	3
Estudiante 5	21	0	0	3	0	7	0	7	2	1

Fuente. Elaboración propia.

La cantidad de representaciones de cada tipo aumento en muchos casos respecto a la primera sesión, lo cual es un índice de conciencia de la dependencia de construcciones primitivas para comunicar efectivamente las propuestas de solución a las situaciones, sin embargo, las representaciones de tipo coloquial continúan siendo una tendencia de uso. En el caso de las representaciones de tipo formal de segmentos aumento en tres estudiantes (Figura 37), las de circunferencia aumento en dos estudiantes (Figura 38), las de recta aumento en dos estudiantes (Figura 39) y las de puntos de intersección en cuatro estudiantes (Figura 40), lo cual es un síntoma de la interacción con el material de apoyo, ya que en este se mostraba en todo momento representaciones formales, además de que cada instrucción se encuentra acompañada de una representación gráfica que se ligada a la instrucción en cuestión, esto ayudó a que los estudiantes estuvieran inmersos en la importancia de las representaciones formales al momento de exteriorizar representaciones mentales.

Figura 37

Uso de las representaciones de punto en lenguaje natural

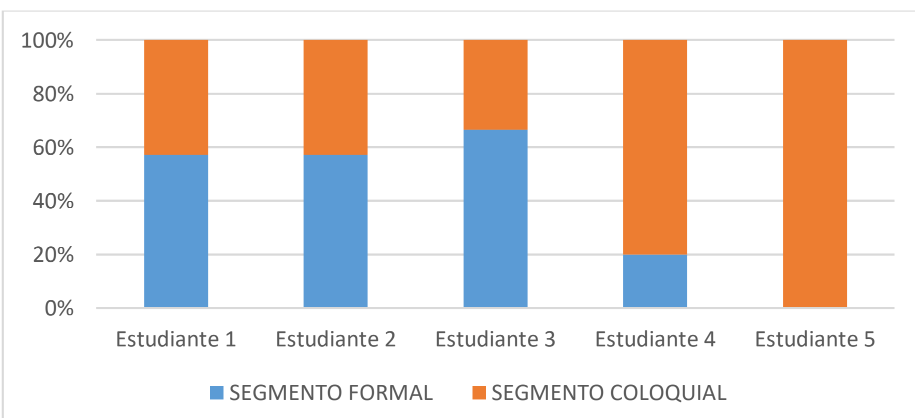


Nota: Esta tabla muestra la relación entre uso de lenguaje formal y coloquial de 5 estudiantes, obtenida en la transcripción de dos (2) horas de interacción de los estudiantes con el profesor en la tercera sesión, la relación está dada en porcentaje, comparando la frecuencia de uso de representaciones de punto.

Fuente: Elaboración propia

Figura 38

Uso de las representaciones de segmento en lenguaje natural

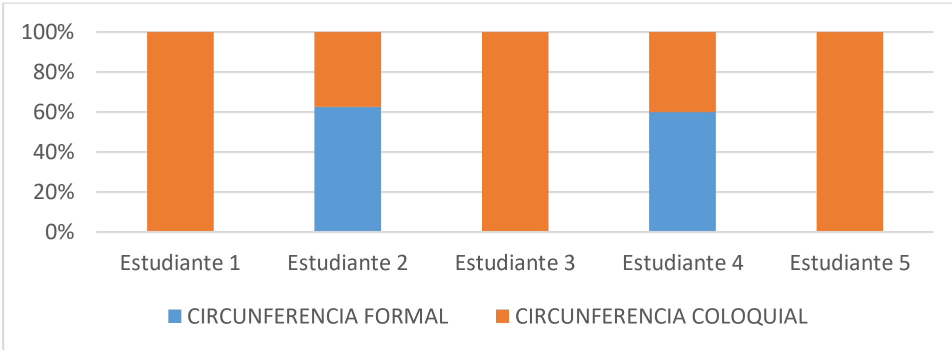


Nota: Esta tabla muestra la relación entre uso de lenguaje formal y coloquial de 5 estudiantes, obtenida en la transcripción de dos (2) horas de interacción de los estudiantes con el profesor en la tercera sesión, la relación está dada en porcentaje, comparando la frecuencia de uso de representaciones de segmento.

Fuente: Elaboración propia

Figura 39

Uso de las representaciones de circunferencia en lenguaje natural

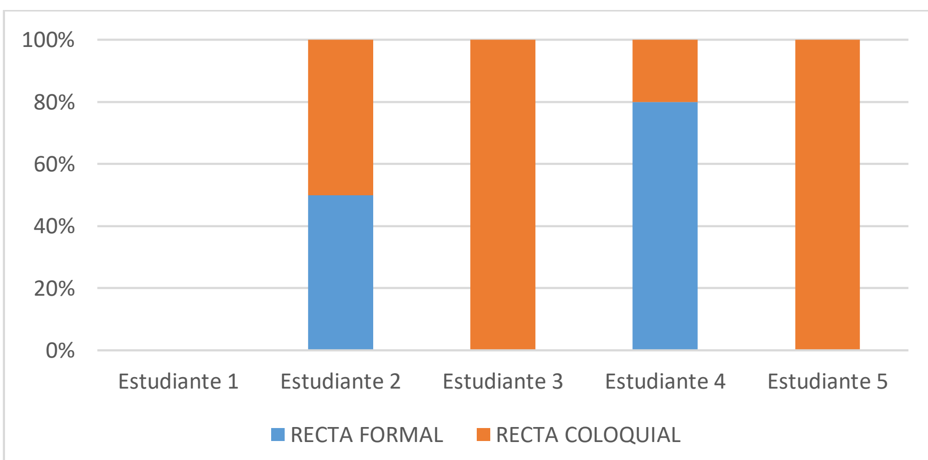


Nota: Esta tabla muestra la relación entre uso de lenguaje formal y coloquial de 5 estudiantes, obtenida en la transcripción de dos (2) horas de interacción de los estudiantes con el profesor en la tercera sesión, la relación está dada en porcentaje, comparando la frecuencia de uso de representaciones de circunferencia.

Fuente: Elaboración propia

Figura 40

Uso de las representaciones de recta en lenguaje natural

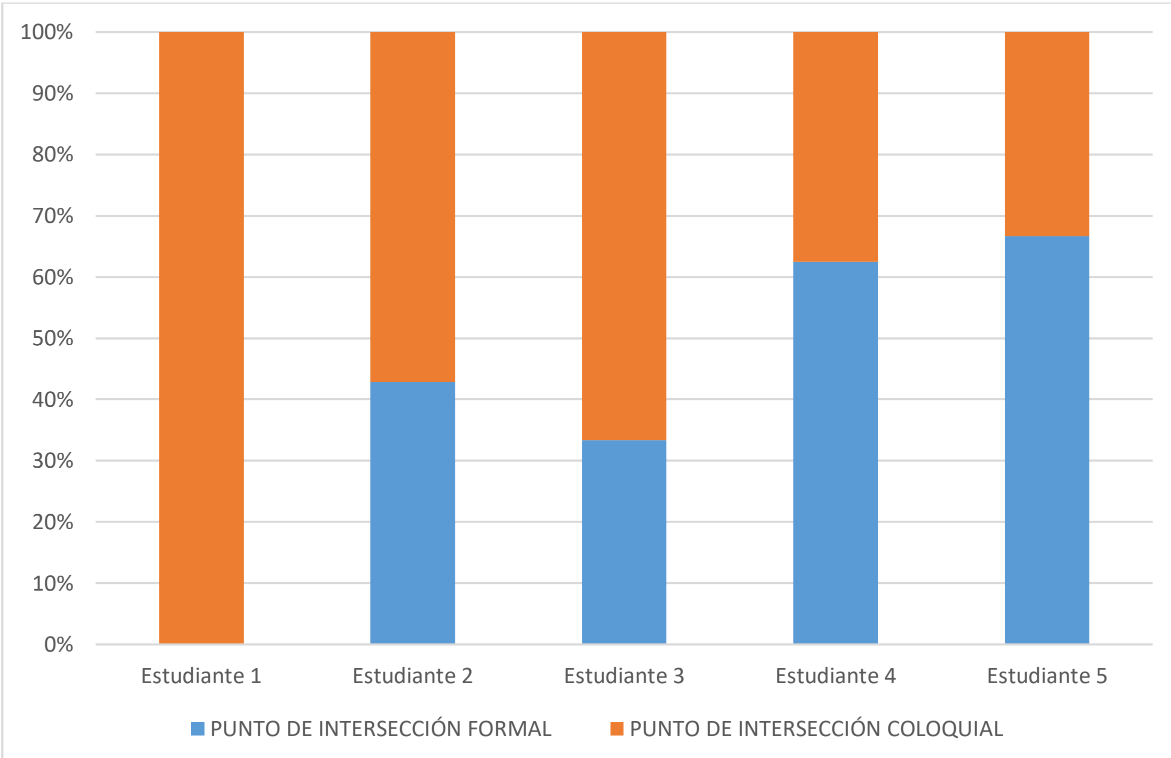


Nota: Esta tabla muestra la relación entre uso de lenguaje formal y coloquial de 5 estudiantes, obtenida en la transcripción de dos (2) horas de interacción de los estudiantes con el profesor en la tercera sesión, la relación está dada en porcentaje, comparando la frecuencia de uso de representaciones de recta.

Fuente: Elaboración propia

Figura 41

Uso de las representaciones de punto de intersección en lenguaje natural



Nota: Esta tabla muestra la relación entre uso de lenguaje formal y coloquial de 5 estudiantes, obtenida en la transcripción de dos (2) horas de interacción de los estudiantes con el profesor en la tercera sesión, la relación está dada en porcentaje, comparando la frecuencia de uso de representaciones de punto de intersección.

Fuente: Elaboración propia

El aumento de la frecuencia de uso de representaciones formales de construcciones primitivas tiene una implicación en el uso de construcciones primarias, ya que se efectúa una comunicación empleando más designaciones. A continuación, se ejemplifica esta relación en un dialogo efectuado entre el profesor (P) y un estudiante (E1), en torno a dos construcciones, de la primera y tercera sesión respectivamente, que implican el uso de la construcción de mediatrices (Figura 42 y 43).

Dialogo 6. Transcripción de un diálogo del profesor y el estudiante E1 en la primera sesión.

1	**E1:**	Primero hice una circunferencia, en el del punto I al punto J y del punto J al punto I y para hacer la… la… la recta, la recta vertical, después hice la recta horizontal y después hice el, el, el cuadro, el cuadro dentro del círculo.
2	**P:**	Bueno ¿y ahí te daban el centro de la circunferencia?
3	**E1:**	sí.
4	**P:**	Bueno, pero recuerda que estaba a partir de un punto B que hay. Mira, aquí donde tengo la Lupita, ahí había un punto, revisa allá. ¿si está marcado?
5	**E1:**	ah sí profe sí sí ya miré.
6	**P:**	Osea tenías que partir de ese punto. Pues la construcción está bien hecha, listo, pero tenías que partir de ese punto, ¿vale?

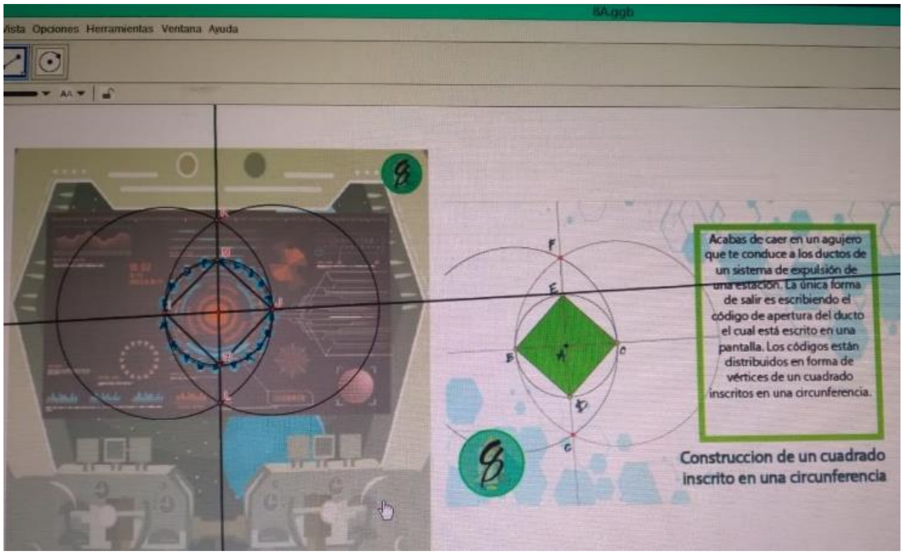
Dialogo 7. Transcripción de un diálogo del profesor y el estudiante E1 en la segunda sesión.

1	**E1:**	Pues decía que trazara las diagonales de los… osea los segmentos, si, entonces yo lo puse del… donde dice el punto A al C y de D a B y le hice una circunferencia de C a D y de A a B y después de eso no entendí y no sé qué fue lo que hice.
2	**P:**	Osea ¿no seguiste el orden de las instrucciones? ¿Qué te tocaba dibujar?
3	**E1:**	Sí pero no lo entendí
4	**P:**	¿Qué te tocaba dibujar al final?
5	**E1:**	Es que no entendí eso profe, lo último
6	**P:**	Revivamos lo que estabas haciendo, en un cuadrado ABCD, ¿Cuál es el cuadrado ABCD? El que te daban ahí. Traza sus diagonales. Hasta ahí vas bien, las trazaste. A su intersección asignarle la letra G. ¿Cuál es la intersección de las dos diagonales, en el dibujo que hiciste? ¿Qué nombre tiene ese punto?
7	**E1:**	¿Medio?
8	**P:**	¿Pero qué nombre tiene ahí en el dibujo? Océano ¿cómo se llama, qué letra le asignaste?
9	**E1:**	Ah la G ahí le puse la letra, pero apareció E

10	**P:**	Listo E. Ese es el punto E. A continuación, sobre uno de los lados del cuadrado, traza una circunferencia con centro en un extremo, y radio la longitud del segmento. ¿Cuál lado tomaste? El lado DC, el lado CB, el lado BA o el lado AD
11	**E1:**	El lado CD
12	**P:**	El lado CD, trazaste una circunferencia ¿Concentró en dónde?
13	**E1:**	En C
14	**P:**	¿Y qué pasará por D?
15	**E1:**	Si
16	**P:**	Ahí vamos bien. Dice, repite este procedimiento sobre ese mismo segmento, o sea el mismo segmento, ¿Cuál es el segmento en el que estás trazando esa circunferencia? (Silencio prolongado) ¿Cuál segmento elegiste inicialmente?
17	**E1:**	El inicial, escogí a él C
18	**P:**	CD, acuérdate que son los dos puntos de extremo. En ese mismo segmento tienes que repetir el procedimiento anterior, o sea volver a dibujar otra circunferencia, Pero. ¿cuál sería esa?
19	**E1:**	¿De D a C?
20	**P:**	Listo, centro en D y que pase por C
21	**E1:**	Pero ahí ya la hice
22	**P:**	Ya está hecha, osea ahí llevaríamos el siguiente paso, con el otro extremo del segmento. Ahora, marca las intersecciones de las dos circunferencias, ¿Cuáles circunferencias?
23	**E1:**	De las que acabo de hacer
24	**P:**	Con la letra C y F. ¿Ya están marcadas esas intersecciones?
25	**E1:**	Sí, pero las marqué fue, pero abajo, en la izquierda, como en el centro.
26	**P:**	Ah listo, es que está, así como de lado. Entonces tomaste fue el segmento AD. Bueno y entonces ahí continúa con todas las instrucciones, ahí ya trazaste la recta qué te piden ahí, ahora te faltas marcar las intersecciones
27	**E1:**	Pues en la línea que partía el cuadrado, puse la L y abajo la M y en el punto E, osea en la mitad, tracé una circunferencia hasta la L y ya

Figura 42

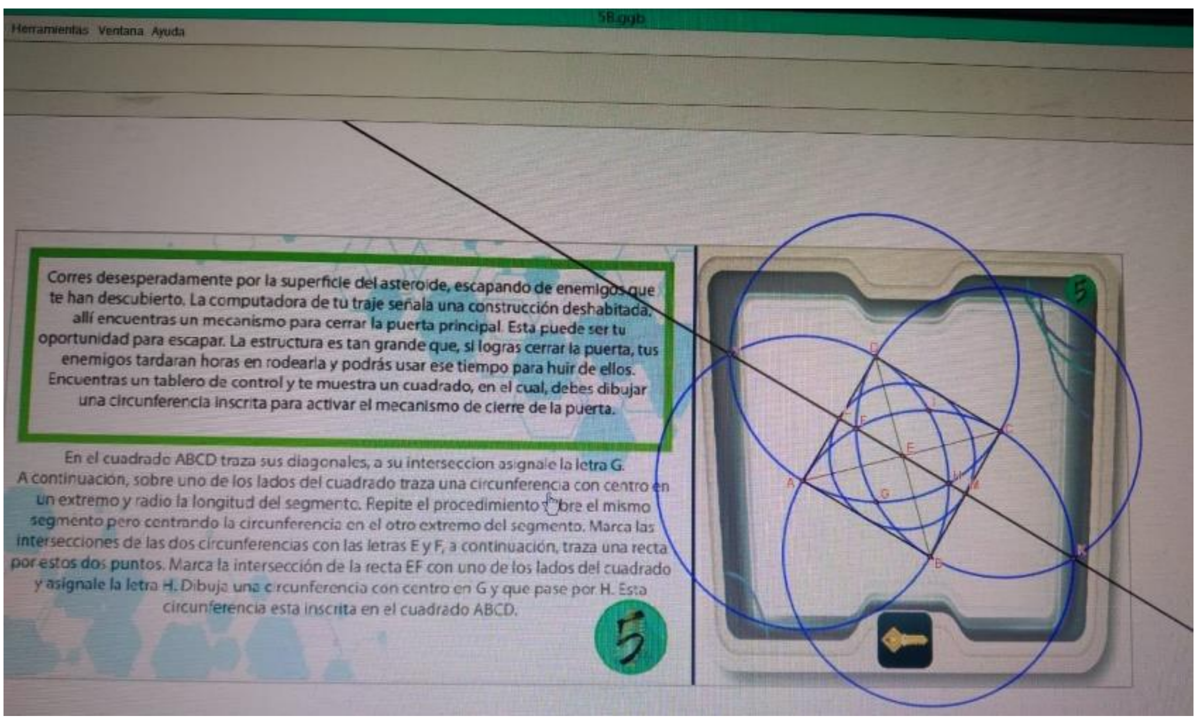
Construcción de un cuadrado inscrito en una circunferencia



Fuente: construcción elaborada en la primera sesión por E1

Figura 43

Construcción de una Circunferencia Inscrita en un Cuadrado

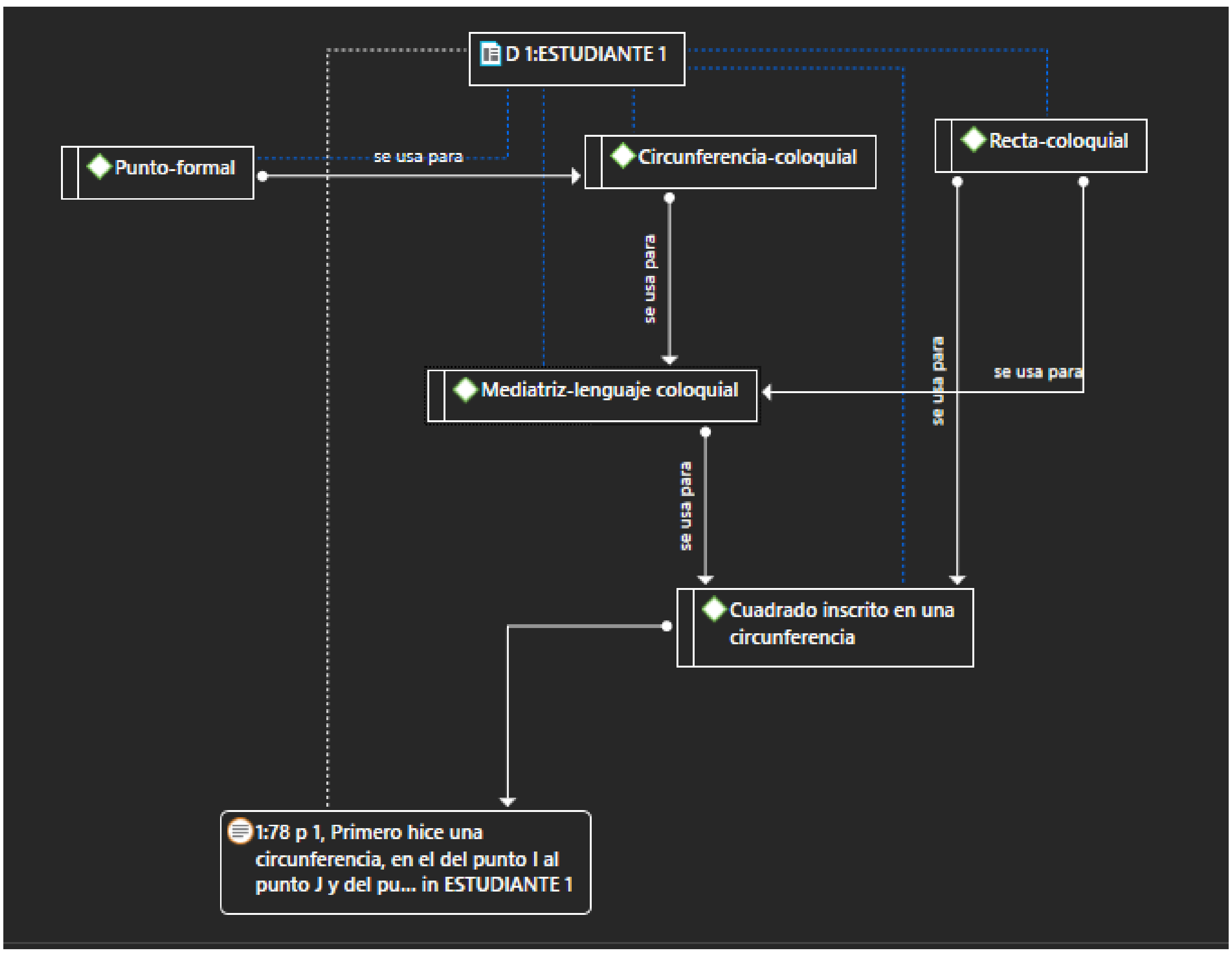


Fuente: construcción elaborada en la segunda tercera sesión por E1

En la línea 1 del dialogo 6, el estudiante (E1) comunica la construcción de una mediatriz con el uso de dos circunferencias centradas en I y J, y una recta "vertical" que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias. La representación usada está en términos coloquiales (Figura 44).

Figura 44

Diagrama de Construcción Empleada por E1de un Cuadrado Inscrito en una Circunferencia en la Primera Sesión

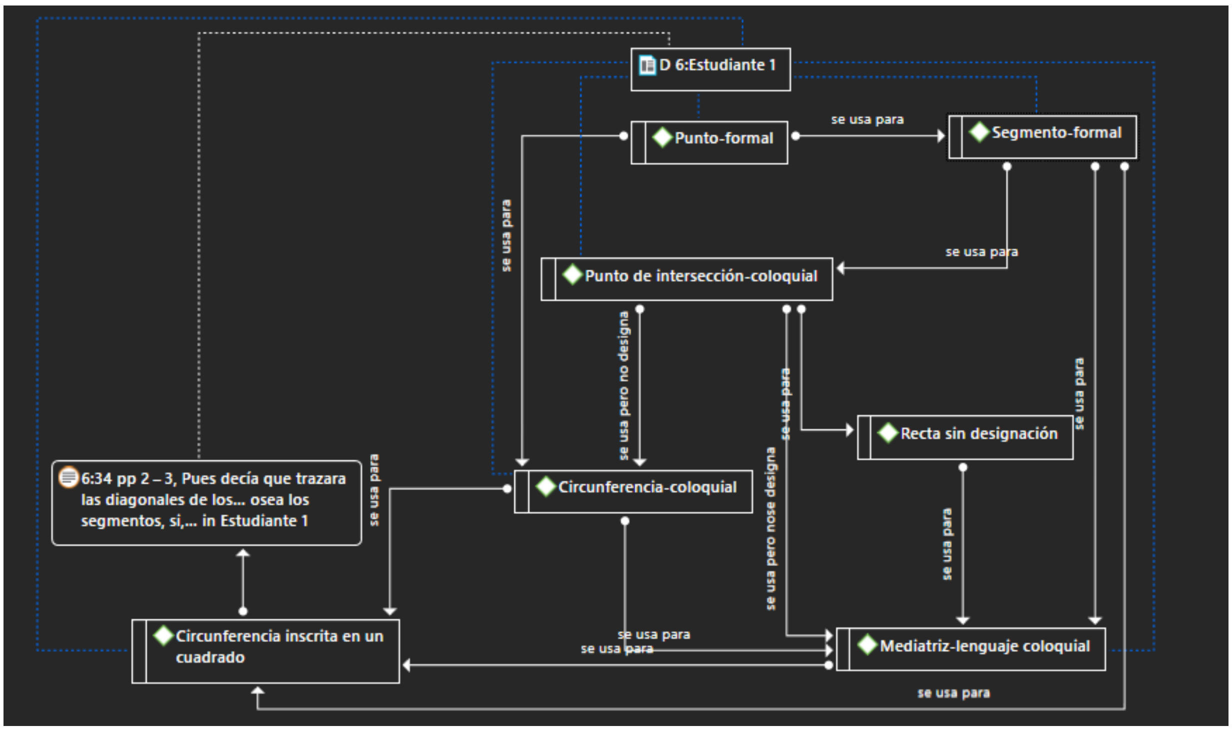


Fuente: Red de análisis construida con Atlas ti. Elaboración propia

En la construcción de la segunda sesión, el estudiante (E1) emplea muchas más designaciones, y en particularmente, en la construcción de la mediatriz empleó en su mayoría representaciones formales, lo cual, concierte la representación completa en mixta.

Figura 45

Diagrama de Construcción Empleada por E1de una Circunferencia Inscrita en un Cuadrado en la Tercera Sesión



Fuente: Red de análisis construida con Atlas ti. Elaboración propia

De esta comparación se puede concluir que la evolución del tipo de representaciones se sitúa en el peldaño siguiente, a pesar de que el estudiante en ocasiones demuestra inseguridad, logra comunicar la construcción. Un conflicto que permanece constante en las construcciones primarias es la dificultad para mencionar de manera formal las construcciones previas, ya que siempre se recurre a la indicación con gestos no formales, sin considerar que la designación juega un papel decisivo para el observador en el seguimiento de la secuencia de construcción. Por otra parte, el uso de trazos adicionales es un recurso de bastante uso, por ejemplo, en la Figura 43, se muestra el trazado de dos circunferencias adicionales (no mencionadas en la representación lingüística), que a su vez cumplen un papel importante en la exploración de conexiones (puntos de intersección) para realizar los trazos necesarios en la solución del problema, y en la mayoría de ocasiones no se hace mención al uso de los puntos de intersección usados.

En las construcciones secundarias se evidenció un aumento del uso de construcciones primarias y primitivas, aunque se encuentra presente un obstáculo relacionado con el uso de algunas construcciones primarias en situaciones que requieren de ellas, por ejemplo, en el uso de mediatrices, perpendiculares y bisectrices, para inscribir circunferencias o construir polígonos, ya que los estudiantes no logran identificar efectivamente las construcciones al momento de ser evocadas por su nombre (representación acústica). A continuación, se muestran algunos ejemplos en dos diálogos con estudiantes (E2 y E3).

Dialogo 8. Transcripción de un diálogo del profesor y el estudiante E2.

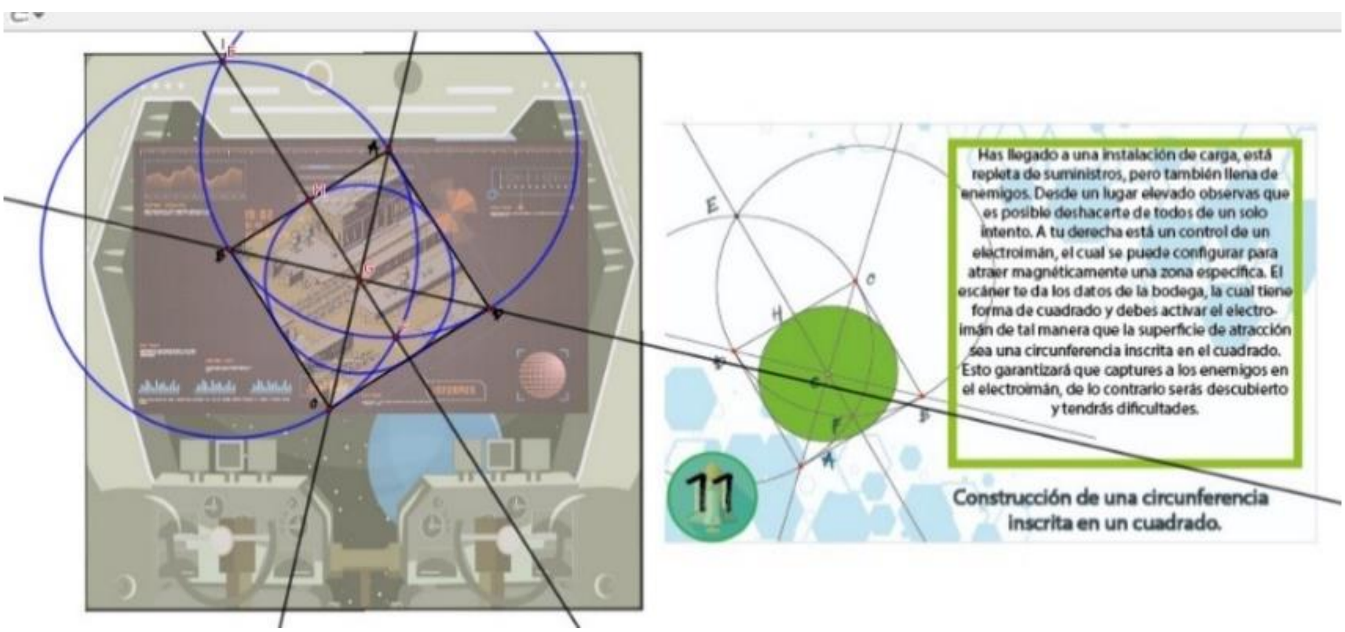
1	**E2:**	Profe pues ahí lo que me pedían era construir una circunferencia inscrita en un cuadrado, entonces pues primero yo hice las… los que… las rectas creo que es que se llaman, y ósea las tracé así, de A hasta C y acá la trace de B hasta D… luego hice las circunferencias, una la hice con centro A, que pasará por B y por D y la otra la hice con centro B, que pasará por A y por C y ya luego hice los puntos de intersección de esas rectas que acá quedó el punto E y acá el F, y en esos puntos de intersección hice otra recta que osea pasará por esos dos puntos y luego ya hice acá un punto de intersección que es G, osea como en el medio de todas las rectas. Y ya después hice el círculo. Y acá quedó el punto H de ese círculo
2	**P:**	Bueno, osea, ese último círculo tiene… cómo es ese círculo
3	**E2:**	¿Cómo así profe?
4	**P:**	¿Tiene centro en dónde o por donde pasa?
5	**E2:**	Con centro en C y que pasa por… no sé profe, no sé cómo explicarlo.

6	**P:**	¿Con centro en C y qué pasa por dónde?
7	**E2:**	¿Por H?

Dialogo 9. Fragmento de la transcripción de un diálogo del profesor y el estudiante E3.		
1	**E2:**	Bueno, aquí lo que hice fue, decía que sobre una… un rectángulo ABCD traza una de sus diagonales, y pues decía que una de sus diagonales, entonces tracé una diagonal de A a D y dice y dibuja la mediatriz de la diagonal, entonces pues hice aquí una recta y dice marca una de las intersecciones de la mediatriz con los lados del rectángulo con las letras G y H, entonces cogí la intersección y cogí este segmento lo toque con este, para que quedara G y hice lo mismo para que quedara H y dice por último une los extremos de la diagonal con los puntos G y H, la forma obtenida, bueno que quedara un rombo inscrito y pues uní de A a H, de H a D, de D a G y de G a A.

Figura 46

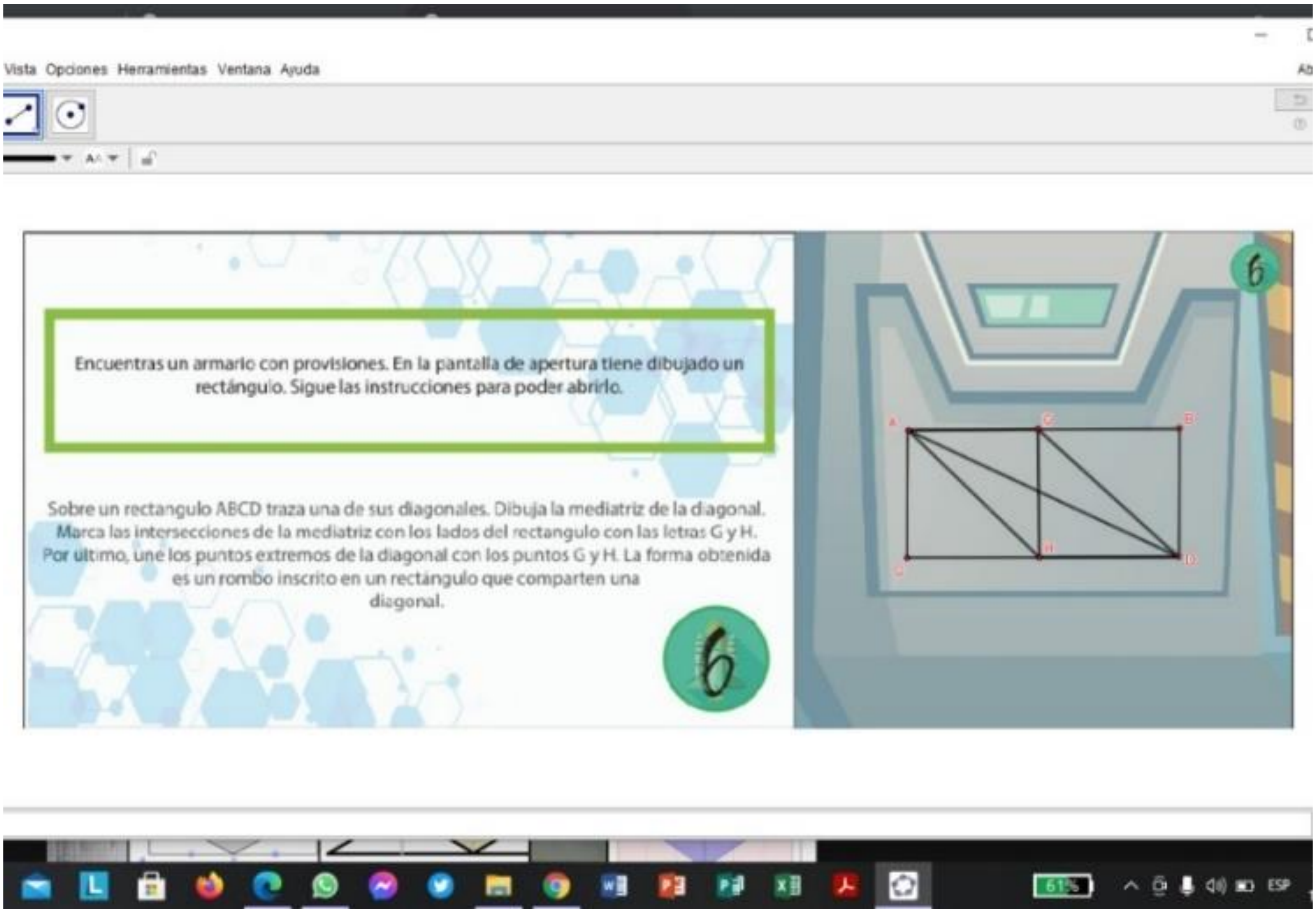
Construcción de un Cuadrado Inscrito en una Circunferencia



Fuente: construcción elaborada por E2

Figura 47

Construcción de un Rombo Inscrito en un Rectángulo que Comparten una Diagonal

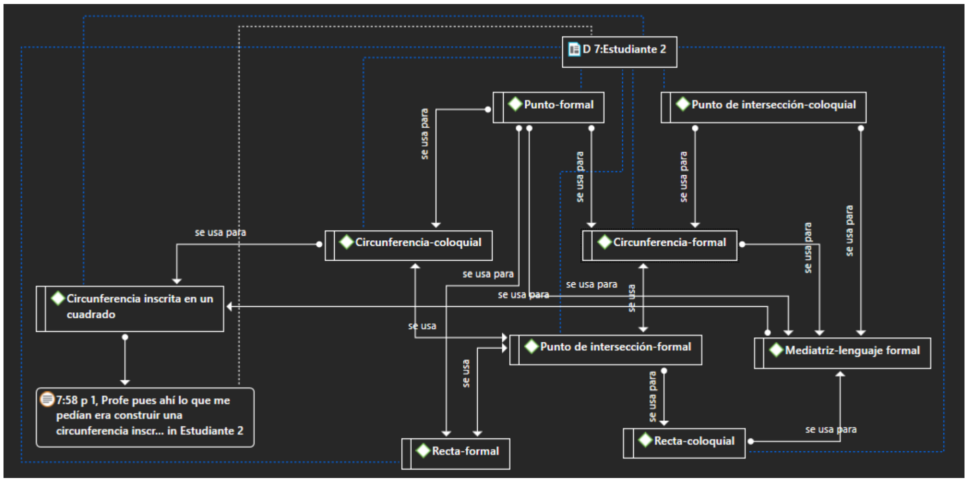


Fuente: construcción elaborada por E3

En las dos representaciones está presente el uso de la construcción de una mediatriz, en el dialogo 8, el estudiante (E2) comprende cómo realizar la secuencia de pasos que debe efectuar para su construcción, y en el dialogo 9 el estudiante realiza esta construcción dando una ubicación perceptiva, es decir ubica a "ojo" la construcción de la mediatriz, lo cual desemboca en una construcción fallida, aunque se evidencia, en los dos casos, que el uso de construcciones primitivas se hace de una manera formal. La relación de las construcciones para la solución de las situaciones se encuentra en las Figuras 48 y 49.

Figura 48

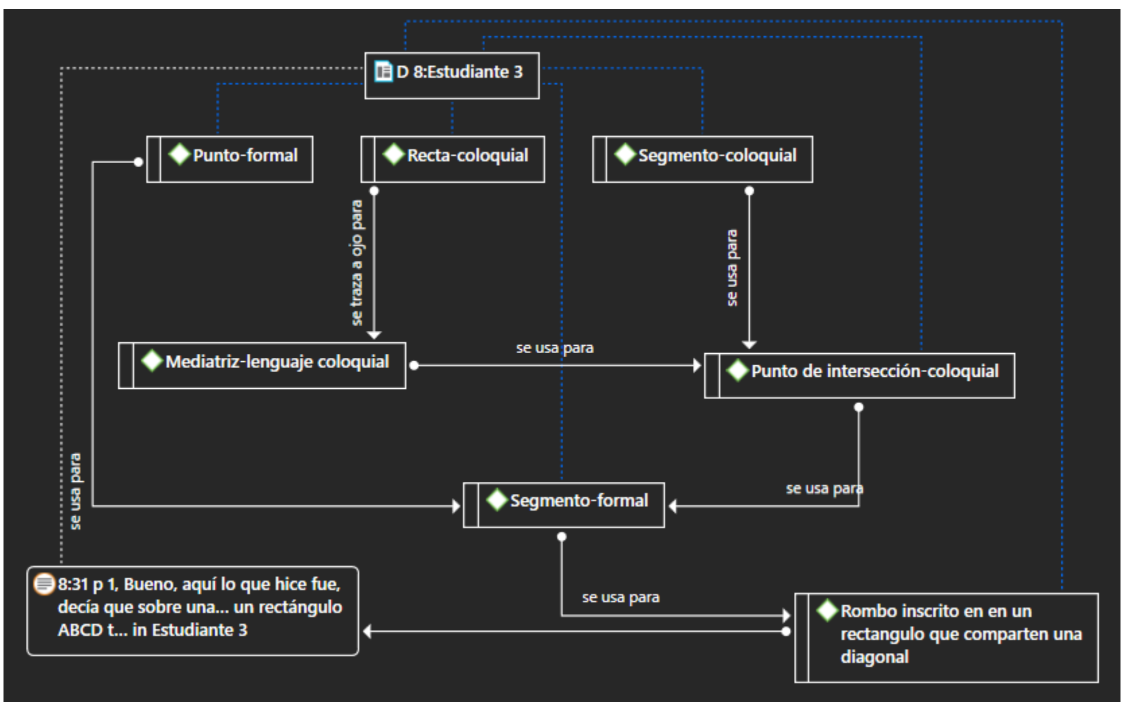
Diagrama de construcción empleada por E2 de un cuadrado inscrito en una circunferencia



Fuente: Red de análisis construida con Atlas ti. Elaboración propia

Figura 49.

Diagrama de construcción empleada por E3 de un rombo inscrito en un rectángulo que comparten una diagonal

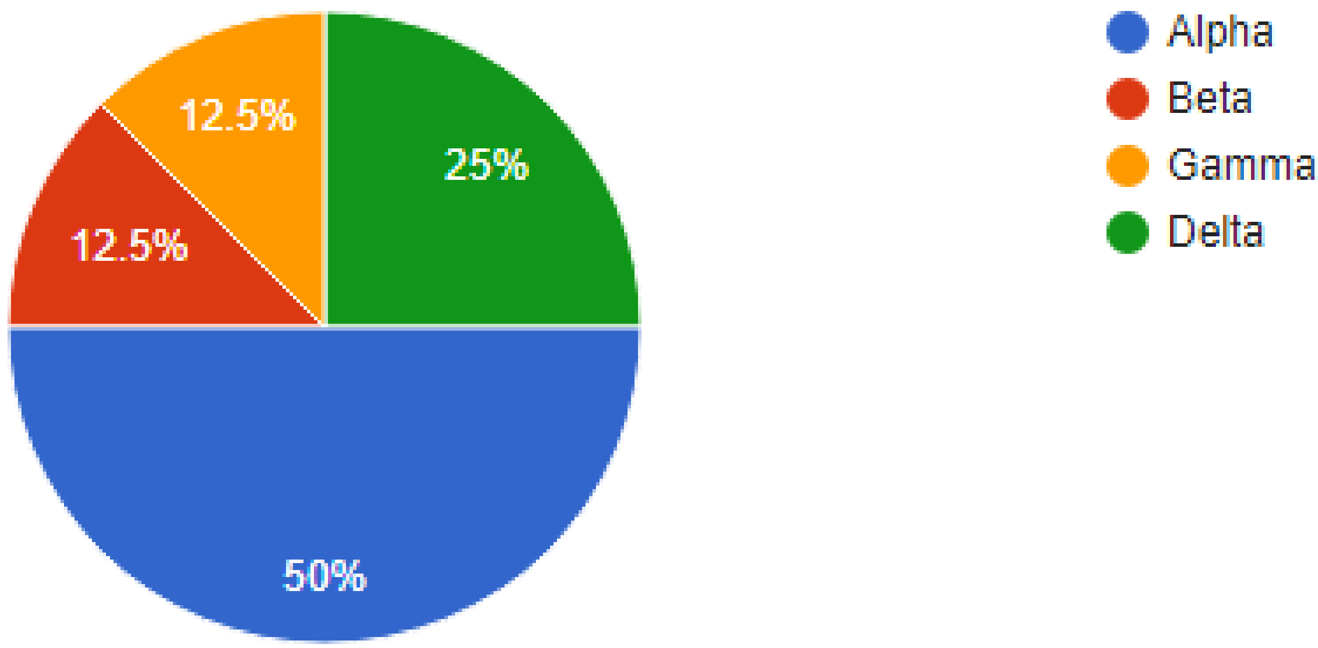


Fuente: Red de análisis construida con Atlas ti. Elaboración propia

Es importante resaltar que la actividad “Aventura Espacial” tuvo gran acogida por parte de los estudiantes, quienes manifestaron una empatía por situaciones de construcción empleando lenguaje gráfico y en palabras (Figura 45), en efecto, el hecho de tener ayudas de carácter visual permitió que los estudiantes abordaran las situaciones con mayor facilidad y emplearan representaciones formales en mayor medida.

Figura 50

Respuestas de estudiantes a la pregunta ¿Cuál de las cuatro categorías le gusto más?

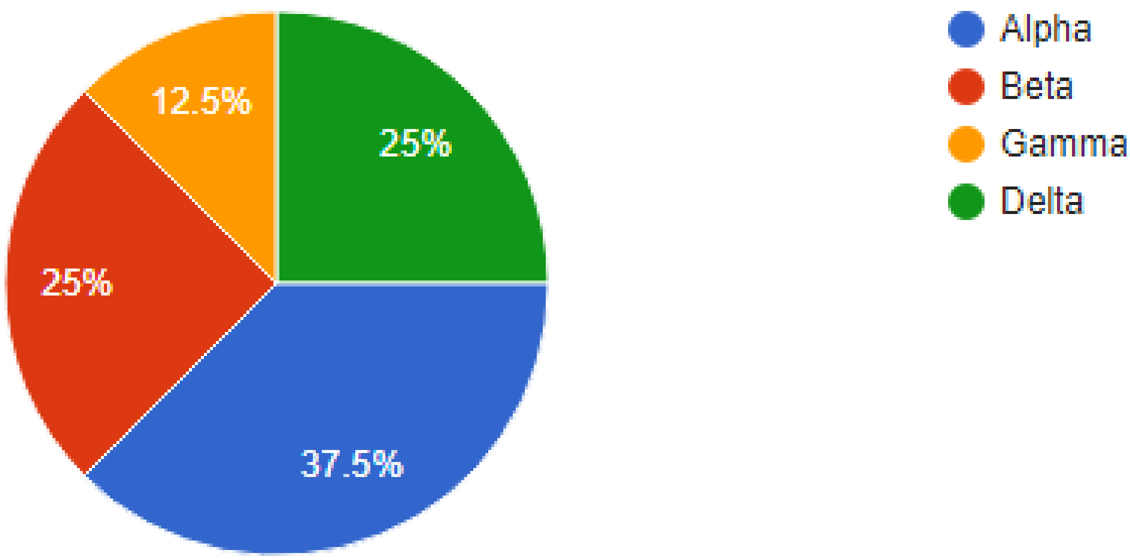


Fuente: elaboración propia

Por otra parte, la categoría Alfa, fue la de mayor dificultad de solución, hecho que manifestaron los estudiantes (Figura 46), ya que en esta categoría es indispensable definir el orden correcto en el que se debe reproducir los trazos.

Figura 51

Respuestas de estudiantes a la pregunta ¿Qué categorías le pareció más difícil?



Fuente: elaboración propia

Conclusiones generales

En este capítulo se da respuesta a la pregunta de investigación planteada ¿Cómo evolucionan las representaciones de conceptos y procesos empleados por los estudiantes, relativos a las construcciones con regla y compás de sistemas de polígonos a la luz de la teoría semiótica de Duval?, donde a través de un proceso sistemático basado en la metodología del enfoque mixto, se dio respuesta al objetivo general planteado como, analizar las representaciones de nociones y procesos empleados en las construcciones de formas geométricas relativas a sistemas de polígonos empleando regla y compás griegos en medio virtual.

Las conclusiones planteadas se formulan teniendo en cuenta el análisis sistemático de resultados obtenidos en las fases propuestas a lo largo del trabajo.

El objetivo específico que corresponde a diseñar de situaciones que permitan emerger representaciones de formas geométricas relativas a sistemas de polígonos construidas con regla y compas en ambientes de geometría dinámica, el cual se logró con la estructuración de la actividad "Aventura Espacial", la cual fue diseñada teniendo en cuenta el marco teórico de representaciones semióticas y las situaciones planteadas en la aplicación Euclidea. "Aventura Espacial" propone actividades con la intención de hacer emerger representaciones en lenguaje natural, gráficas y representaciones internas transformándose a externas.

La descripción de la actividad, en el capítulo 5, muestra cómo se tuvieron en cuenta las entradas clásicas a la geometría en la consolidación de la actividad "Aventura Espacial".

El proceso investigativo llevado a cabo, permitió que el autor reflexionara sobre la importancia del uso de estructuras teóricas de la semiótica, como el uso de lenguaje natural y ayudas gráficas, en el diseño de actividades que contextualicen el uso de regla y compás. El objetivo específico 2 corresponde a la caracterización de las representaciones y los obstáculos emergentes en la dinámica del aprendizaje de elementos como el punto medio, la mediatriz, la bisectriz, perpendiculares, rectas tangentes, construidas con regla y compás, enfatizando en las entradas clásicas a la geometría de la teoría semiótica. El logro de este objetivo se obtiene como resultado de la ejecución de la fase 2 descrita en el capítulo 3 (marco metodológico).

La caracterización de obstáculos y representaciones usadas por los estudiantes, fue realizada teniendo en cuenta la creación de las categorías de análisis, determinadas como construcciones primitivas, construcciones primarias y construcciones secundarias, en las cuales se logró identificar conflictos y obstáculos emergentes de las construcciones con regla y compás.

El primer obstáculo identificado está relacionado con la designación de construcciones primitivas que requieren de más de un uso de la representación de punto, ya que estas requieren del paso de 0 dimensiones a 1 y 2 dimensiones, proceso que los estudiantes llevan a cabo con el uso de gestos para señalar los trazos empleados, como es el caso de mostrar un punto de intersección, sin designar que se está intersecando y cuál es el nombre asignado a este punto. En relación a este obstáculo, en la primera sesión se evidenció una frecuencia de uso de las construcciones primitivas, en mayor medida hacia el uso de representaciones de tipo coloquial, frecuencia que cambió significativamente en la tercera sesión, ya que los estudiantes interactuaron con la página web, que se centraba en el uso de representaciones formales y dio herramientas comunicativas que permitieron expresar de manera formal, a los estudiantes, muchas de las construcciones planteadas en las categorías de la actividad "Aventura Espacial".

Teniendo en cuenta los tipos de situaciones planteados en las categorías Alfa, Beta, Gamma y Delta, emergen de la práctica de los estudiantes varios obstáculos, como el uso de las designaciones mostradas de manera gráfica, lo cual dificulta la mimesis de la representación dada en la hoja de contexto, ya que pasan por alto las conexiones necesarias para la construcción de punto medio, mediatriz, bisectriz, perpendiculares y rectas tangentes.

El principal obstáculo identificado en el uso de representaciones formales, radica en la dificultad de identificar que las construcciones dependen de elementos primitivos y una secuencia ordenada de su uso. El seguimiento de las instrucciones se torna difícil, debido a que se presenta un obstáculo relacionado con el uso de lenguaje formal en la generación de representaciones mentales para su posterior representación de manera gráfica. Los estudiantes ejecutan el uso de las construcciones primitivas, empleando misconcepciones, creadas en sus experiencias previas, sobre las construcciones solicitadas, lo que genera la imposibilidad de conectar la dependencia de las construcciones primitivas y ulteriormente no puedan ser comunicadas de manera formal, esto representa un obstáculo en el uso de las ideas relacionadas con la denotación y designación empleadas en sus aprendizajes anteriores.

Al no existir un apoyo visual o en forma de instrucciones, los estudiantes acuden a usar las representaciones construidas por la percepción visual de sus experiencias previas y dejan en evidencia la carencia de palabras, de tipo formal, que aludan a las representaciones mentales usadas para su posterior exteriorización.

En cuanto a los prototipos de representación de formas, se evidencia que los estudiantes muestran una resistencia a observar formas en posiciones no estándar, tal es el caso de ver un rectángulo o un cuadrado en la misma posición, esto genera un impulso instintivo en situarlas de una manera familiar.

Las estructuras teóricas presentes en la práctica de los estudiantes, desde el punto de vista de las entradas clásicas a la geometría, se evalúan desde la detección de los elementos teóricos y la forma como se estructuran, al desarrollar el análisis del enfoque semiótico de las prácticas de los estudiantes al aprender construcciones con regla y compás y la evaluación de los procesos cognitivos del pensamiento espacial de los estudiantes, involucrados en el aprendizaje de construcciones con regla y compas en ambientes de aprendizaje.

Los estudiantes objeto de este estudio, perciben la identificación de punto medio, bisectriz, mediatriz, perpendiculares, rectas tangentes, desde el punto de vista del botánico, ya que movilizan las propiedades geométricas, como la de garantizar distancias iguales con circunferencias, los ángulos formados en una perpendicular, la división de un segmento en dos congruentes, entre otros, desde la percepción visual, es decir, guían algunas de sus construcciones con regla y compás desde lo que las formas que replican dejan ver. La determinación de cualidades, como la congruencia, ángulos internos, mitad de un segmento, de cuadriláteros, triángulos y lugares geométricos como rectas y circunferencias, están ligadas a la construcción de representaciones mentales, formadas en su experiencia previa, en el sentido de que determinan posiciones empleando ensayo y error, lo cual dificulta un completo uso de los trazos en la precisión de las construcciones.

Los estudiantes manifiestan una necesidad de tener información numérica de magnitudes como la longitud de segmentos, amplitud de ángulos, distancias, entre otras, lo que no les permite desligar su actividad del carácter de medición desde patrones establecidos (segmentos de referencia, ángulos iniciales, radios de circunferencias). Esto constituye un desarrollo de la entrada del agrimensor en una medida mínima, en donde, por ejemplo, en un segmento que queda dividido en dos partes congruentes, no logran detectar que si lo son.

En cuanto a la entrada del constructor, logran emplear instrumentos para dibujar segmentos, rectas y circunferencias, pero no logran establecer una relación clara entre los trazos auxiliares que determinan la posición de los elementos que constituyen a las formas construidas y en ocasiones no ven la necesidad del uso de dibujar líneas auxiliares, ya que no logran discernir entre los esbozos realizados y formas que componen estos trazos.

La determinación de las secuencias de trazos necesarios para producir formas, es una dificultad latente en la construcción con regla y compás, ya que, aunque en sus representaciones mentales existe una figura bien definida, no logran determinar que trazos son necesarios para hacer evidentes las propiedades geométricas de los objetos que construyen, tal es el caso de una construcción de un cuadrado, en donde los ángulos internos no se trazan como rectos, o no se encuentra relación entre la congruencia y perpendicularidad de las diagonales.

Es evidente que en el uso de software geométrico es necesario determinar las designaciones de construcciones primitivas, como nombrar puntos, para estructurarlas en construcciones primarias y posteriormente en las secundarias, ya que, por ejemplo, el trazado de una circunferencia requiere de identificar el centro y el lugar por donde va a pasar, dejando implícitamente el radio, y es en este proceso donde se ve la necesidad de fortalecer el uso de construcciones que permitan dibujar fielmente un objeto, como es el caso de la circunferencia, para su posterior uso en procesos como la determinación de superficie o la medida de contorno, al igual que construir ecuaciones.

El ingreso a la forma de ver del inventor artesano se ve interrumpido por la dificultad de discernir entre las unidades figurales de una y dos dimensiones, como por ejemplo, entre los trazos realizados para dibujar un punto medio, identificar específicamente el punto medio, ya que ante la imposibilidad de realizar un señalamiento, empleando designaciones, no es posible identificar las formas, objetivo de construcción, en una gama de trazos (curvas, rectas, puntos de intersección) y del mismo modo, en sus representaciones mentales es difícil construir una secuencia eficaz.

El proceso investigativo permitió que la práctica docente del autor se viera favorecida en relación con el desarrollo heurístico de procesos que permiten la construcción conceptual puntos de intersección, circunferencias, rectas, segmentos, mediatrices, bisectrices, tangentes, perpendiculares, triángulos y cuadriláteros, así como el desarrollo de un prototipo de actividades, como lo es Aventura Espacial", enfocado en el carácter lúdico y la incorporación del enfoque semiótico en la estructuración de las mismas.

La narración de situaciones problema asociadas a un contexto permite que el estudiante esté inmerso en situaciones familiares para su edad cronológica, lo cual favorece su incorporación en el desarrollo de procesos matemáticos de una manera más discreta, colocando a la matemática en situaciones en las que son necesarias para solucionar problemas. Este trabajo dio al autor un enfoque en el diseño de material de apoyo de clase para los estudiantes, tal como la creación de ayudas audiovisuales o la escritura de cuentos desarrollados en torno a la geometría.

Actualmente, se encuentra en desarrollo un cuento que estructura una narración ficticia usando como elementos matemáticos las construcciones con regla y compás descritas en esta investigación, el cual tiene como objetivo superar los conflictos y obstáculos descritos en este trabajo, un ejemplo de estas narrativas se encuentra en el anexo 3

El futuro de esta investigación se centra en la producción de material de apoyo, ya que es de suma importancia incorporar herramientas heurísticas que permitan al estudiante ver la aplicación de las construcciones con regla y compás en la solución de situaciones problema, que expandan las problemáticas descritas.

Referencias

Alexander, D., Koeberlein, G. (2013). Geometría. Cengage Learning Editores, S.A.

Ayala, N. (2009). Construcciones geométricas con regla y compás: pasos. Revista argentina de psicopedagogía, (62), 4.

Benites, L. (2010). El problema de los signos en Descartes y la interpretación semántica del mundo. El hombre y la máquina, 34, 8.

Clemens, S. R., O'Daffer, P. G., & Cooney, T. J. (1998). Geometría. Pearson Educación.

Damisa C., Ponzetti S. (2015). Los objetos matemáticos y sus representaciones: ¿lo que ves es lo que es? Actas del CUREM, 5, 136-143.

D'Amore. (2006). Didáctica de la matemática. Editorial Magisterio.

D'Amore, B., Fandiño, M., y Iori, M. (2013). La semiótica en la didáctica de la matemática. Editorial Magisterio.

D'Amore, B., & Pinilla, M. I. F. (2013). Sobre algunas 'd'en didáctica de la matemática: designación, denotación, denominación, definición, demostración. Reflexiones matemáticas y didácticas que pueden conducir lejos. Praxis & Saber, 4(8), 291-309.

Duval, R. (1993), Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, en Investigaciones en Matemática Educativa II (Ed. Hitt), 173-201, Université Louis Pasteur de Strasbourg, France; México: Grupo editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In Annales de didactique et de sciences cognitives (Vol. 5, No. 1, pp. 37-65).

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Peter Lang S. A. Editions scientifiques européennes.

Duval, R. (2004). Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas: cuatro entradas y... una quinta. In *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 159-188). Subdirección General de Información y Publicaciones.

Duval, R. (2015). Figures et visualisation géométrique : «voir» en géométrie. Dans Lima, J. (Eds) Du mot au concept. Figure, 147-182. Grenoble : Presses Universitaires.

Duval, R., y Sáenz-Ludlow, A. (2016). Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas (pp. 1-264). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Ferraris, C. (1996). Construcciones con regla y compás. Revista de educación matemática, 11(3), 26-38.

Font, V. (2000). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. Philosophy of Mathematics Education Journal, 14, 1-35.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría: de las construcciones a las demostraciones* (Vol. 3). Libros del Zorzal.

Klane, M. (1992). El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. Alianza Editorial S. A.

Menares, R. (2013). Construcciones geométricas sólo con compás. Revista del profesor de matemáticas (Año 8 Nº1)

Nardín, A., Álvarez, A., Blanco, R., Bueno, S., & Mora, J. A. (2012). Registros semióticos y enseñanza del tema integrales.

Pogorélov, A. V. Geometría Elemental, Editorial Mir, Moscú, (1974). Índice de Materias.

Radford, L. (2006). Introducción semiótica y educación matemática. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9, 103.

Ramírez Chaparro, R. (2011). Construcción de polígonos regulares. Sede Caribe.

Rich, B. (1991). Geometría. McGRAW-HILL interamericana de México S.A.

Roberto, H., Carlos, F., y María, B. (2014). Metodología de la Investigación (sesta edición). *Editorial McGraw-Hill Education. México*.

Samper, C., Echeverry, A., & Molina, O. (2013). Elementos de Geometría: aprendizaje y enseñanza de la geometría.

Sánchez, C.H. (1994). Los famosos problemas de construcción de la geometría griega y su historia en Colombia. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Suárez, P., Reyes A. (2018). Aprendizaje del objeto fracción en diferentes registros semióticos a partir de una secuencia didáctica. Voces y realidades educativas, 2, 81-96.

Zecchetto, V. (2002). La danza de los signos nociones de semiótica general. Ediciones Abya–Yala.

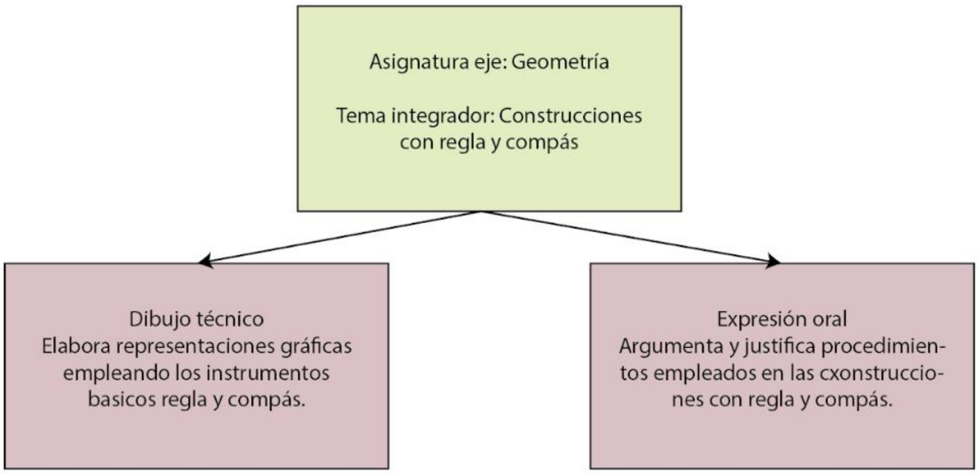
Anexos

Anexo 1. Secuencia didáctica

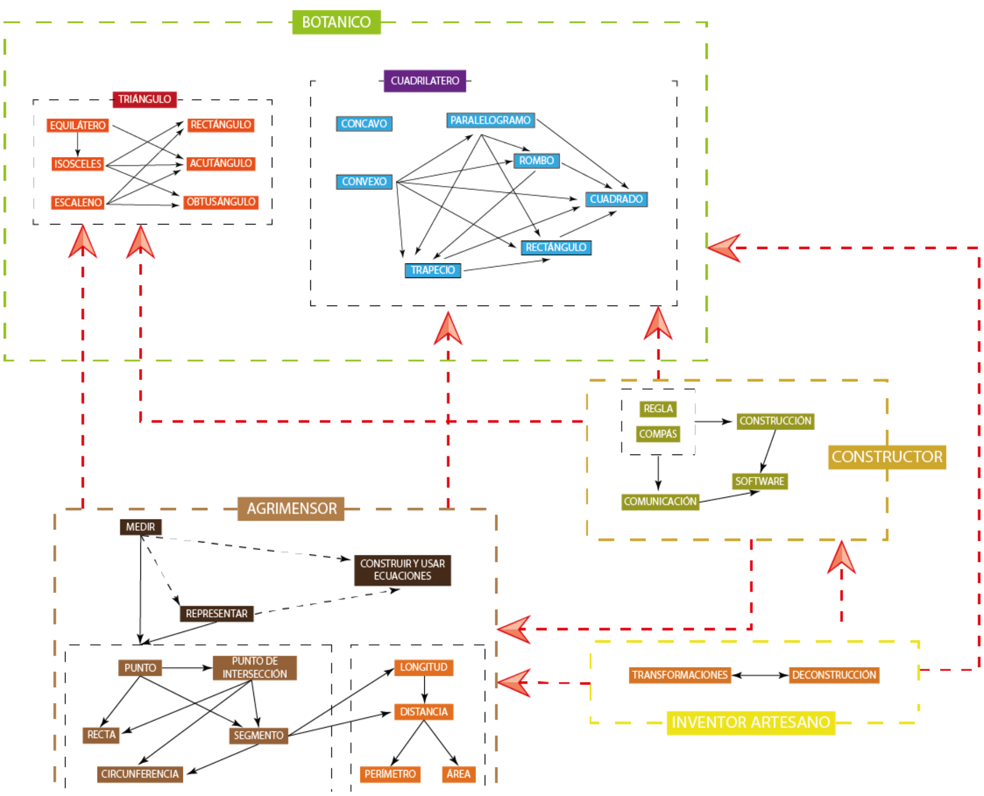
<table>
<tr><td colspan="6">Secuencia Didáctica</td><td rowspan="28">Fase pre activa</td></tr>
<tr><td colspan="6">1. Datos generales o identificación</td></tr>
<tr><td>Número de la secuencia didáctica a desarrollar</td><td>1</td><td>Periodo de aplicación</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>Nombre del autor</td><td colspan="2">Lennys Fabian Pedraza Espindola</td><td colspan="2">Nombre de coautor</td><td>No aplica</td></tr>
<tr><td>Nombre de la asignatura o eje atendido</td><td>Geometría</td><td>Grupos</td><td>2</td><td>Número de alumnos atendidos por grupo</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Duración en horas</td><td>8</td><td colspan="3">Número de temas del programa de estudio que abordará la secuencia didáctica</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="6">2. Intenciones de aprendizaje de la secuencia didáctica</td></tr>
<tr><td colspan="6">Propósito de la secuencia didáctica</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nombre del tema integrador</td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Construcción de sistemas de polígonos</td><td colspan="4">Asignaturas que se interdicsciplinan con la materia eje</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tipo de contexto a entender</td><td colspan="4" rowspan="2">Dibujo técnico, expresión oral</td></tr>
<tr><td colspan="2">imaginario, semi imaginario y real</td></tr>
<tr><td colspan="2">Taxonomía(s) empleada(s)</td><td colspan="4">Ambientes de aprendizaje a promover</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="4">Información, interacción, producción, heurístico</td></tr>
<tr><td>Categorías:</td><td colspan="5">Representaciones semióticas</td></tr>
<tr><td colspan="6">Contenidos curriculares (Tipos de saberes)</td></tr>
<tr><td colspan="6">Saber declarativo</td></tr>
<tr><td colspan="6">Identificación y aplicación de construcciones empleando regla y compás de sistemas geométricos</td></tr>
<tr><td>Conceptos fundamentales</td><td colspan="5">Construcción de elementos de sistemas de polígonos</td></tr>
<tr><td colspan="6">Saber procedimental</td></tr>
<tr><td colspan="6">Leer, Analizar, Construir, aplicar, representar, justificar, proponer y comunicar</td></tr>
<tr><td colspan="6">Saber actitudinal</td></tr>
<tr><td colspan="6">Honestidad, respeto, participación
Cuestionar, conjeturar, hipotetizar, concluir</td></tr>
<tr><td colspan="6">Descripción de las competencias a desarrollar</td></tr>
<tr><td>Pensamiento Espacial y Métrico</td><td colspan="5">Empleo las construcciones con regla y compás para representar en diferentes sistemas semióticos, sistemas de polígonos identificando sus características</td></tr>
</table>

	Justifico el uso de representaciones en diferentes registros, de las construcciones con regla y compás
	Analizo las propiedades de los sistemas de polígonos para su posterior construcción

Mapa de contenidos del programa de estudios



Mapa de contenidos del programa de estudios



Fase de aplicación

3. Momentos que conforman la secuencia didáctica

Apertura

	Componentes considerados			
	Actividades de aprendizaje	**Tiempo (min)**	**Tipo de evaluación**	**Producto(s) de aprendizaje y evidencias**
	Actividad 1: el docente explica la mecánica de la actividad, junto con los parámetros empleados necesarios para su desarrollo.	20	Declarativa	Video de la socialización
	Actividad 2: El docente muestra cada uno de los elementos del material y su funcionamiento dentro del global de la actividad.	20	Declarativa	Video de la socialización
Desarrollo Primera sesión				
Momento	**Componentes considerados**			
	Actividades de aprendizaje	**Tiempo (min)**	**Tipo de evaluación**	**Producto(s) de aprendizaje y evidencias**
	Actividad 3: Los estudiantes inician la aplicación de la actividad, teniendo en cuenta que la asignación de retos es aleatoria, se pueden realizar múltiples actividades.	90		Video del desarrollo de la actividad
	Actividad 3.1: Los estudiantes inician la actividad, desarrollando sus mecánicas y preguntando sobre el funcionamiento de las tarjetas de trabajo, hojas de contexto y demás elementos empleados.			

	Actividad 3.2: el docente orienta el desarrollo de la actividad, observando comportamientos y orientando la actividad autónoma de los estudiantes sobre su interacción con el material.				
	Actividad 3.4: En caso de que el estudiante tenga que solucionar un reto tipo Alpha, tendrá que realizar los trazos respectivos sobre la hoja de contexto.				
	Actividad 3.5: En caso de que el estudiante tenga que solucionar un reto tipo beta, tendrá que realizar los trazos respectivos sobre la hoja de contexto.				
	Actividad 3.6: En caso de que el estudiante tenga que solucionar un reto tipo delta, tendrá que realizar los trazos respectivos sobre la hoja de contexto.				
	Actividad 3.7: En caso de que el estudiante tenga que solucionar un reto tipo gamma, tendrá que				

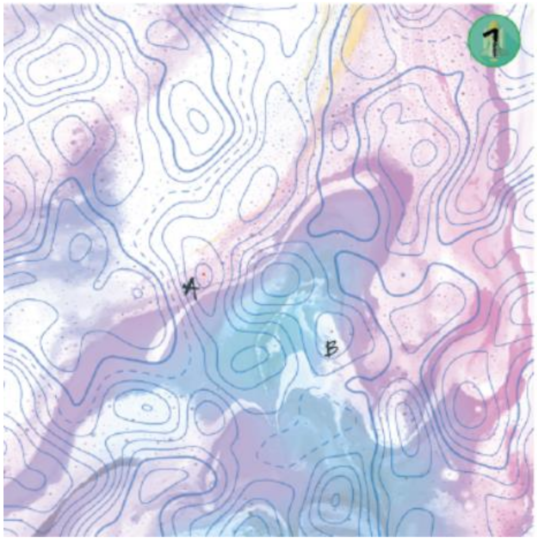
	realizar una descripción verbal de la construcción realizada mentalmente.				
	Actividad 4: Los estudiantes diligencian dos cuestionarios sobre el desarrollo de la actividad.	20		Cuestionario sobre desarrollo de la actividad	
Desarrollo segunda sesión					

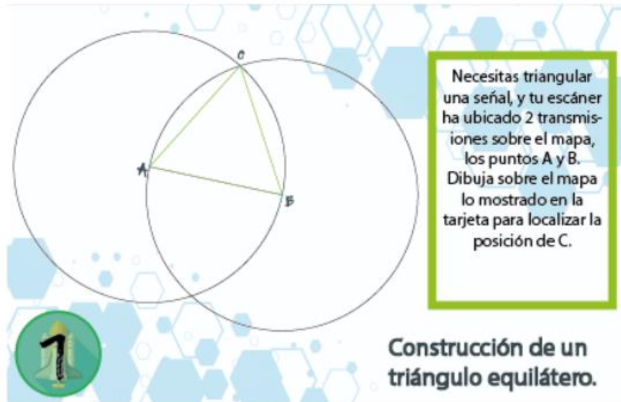
	Componentes considerados				
	Actividades de aprendizaje	**Tiempo (min)**	**Tipo de evaluación**	**Producto(s) de aprendizaje y evidencias**	
	Actividad 5: Los estudiantes recibirán el acceso a una página web y a una aplicación con información sobre construcciones con regla y compás	360			
Desarrollo tercera sesión					

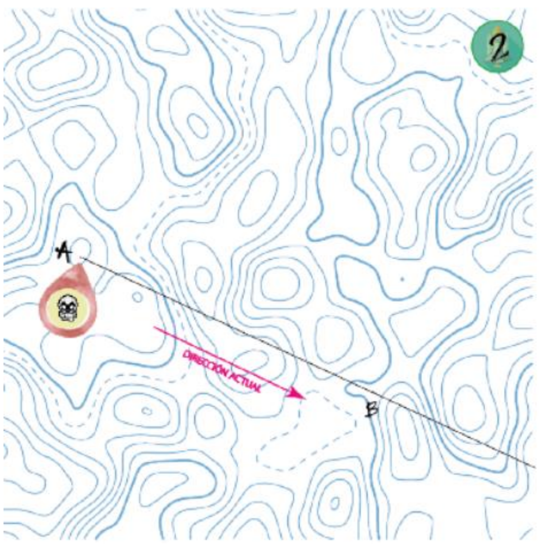
	Componentes considerados				
	Actividades de aprendizaje	**Tiempo (min)**	**Tipo de evaluación**	**Producto(s) de aprendizaje y evidencias**	
	Actividad 7: los estudiantes se enfrentan a la misma situación de la primera sesión, con las mismas condiciones.	90		Videos del desarrollo de la actividad	
	Actividad 8: Los estudiantes diligencian una encuesta relacionada con la actividad.	30		Cuestionario sobre el desarrollo de la actividad	

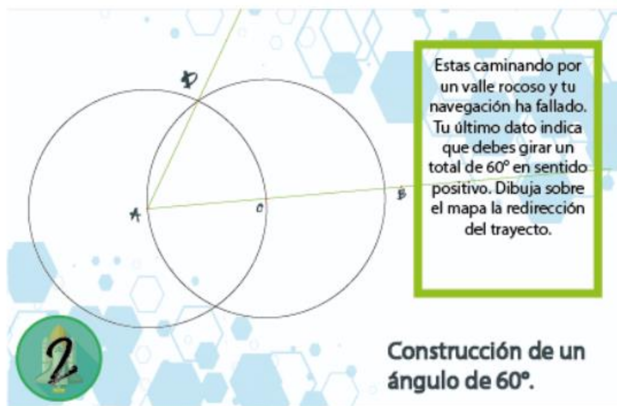
Anexo 2. Tarjetas de la actividad “Aventura Espacial”

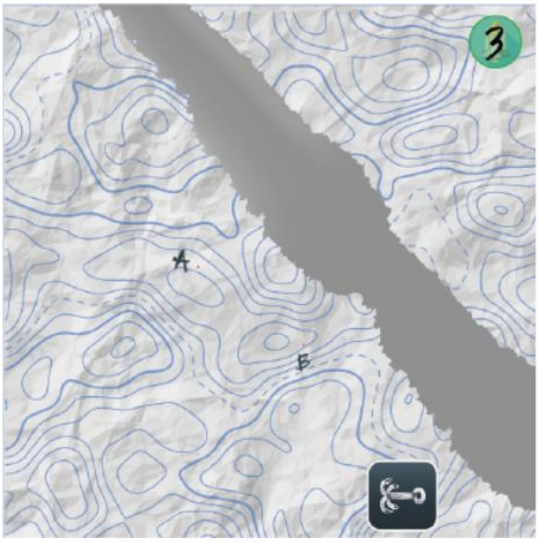
Tarjetas Alfa

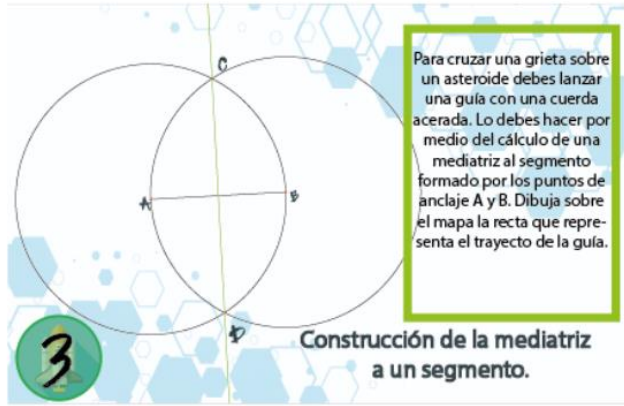


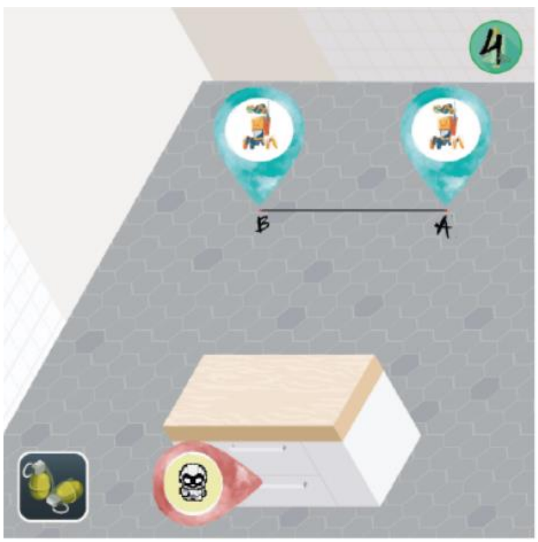


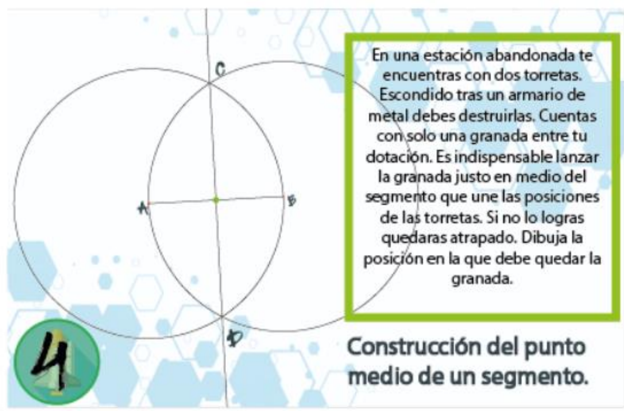


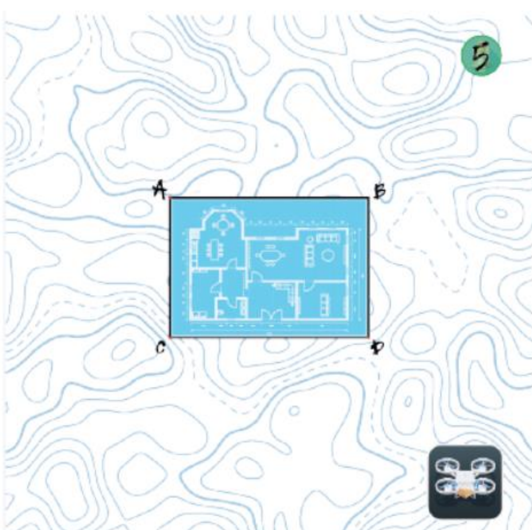


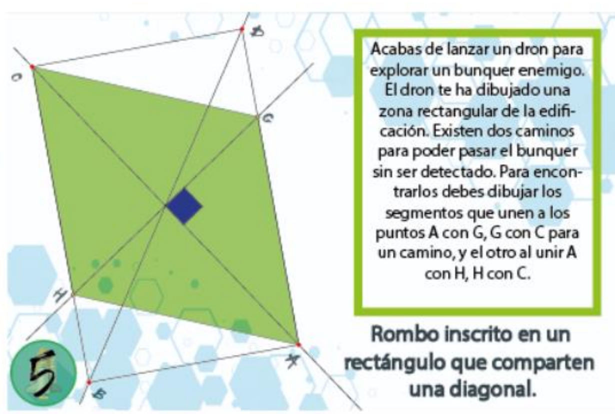

3
A
B


Para cruzar una grieta sobre un asteroide debes lanzar una guía con una cuerda acerada. Lo debes hacer por medio del cálculo de una mediatriz al segmento formado por los puntos de anclaje A y B. Dibuja sobre el mapa la recta que representa el trayecto de la guía.
Construcción de la mediatriz a un segmento.
3
C
A
B
D

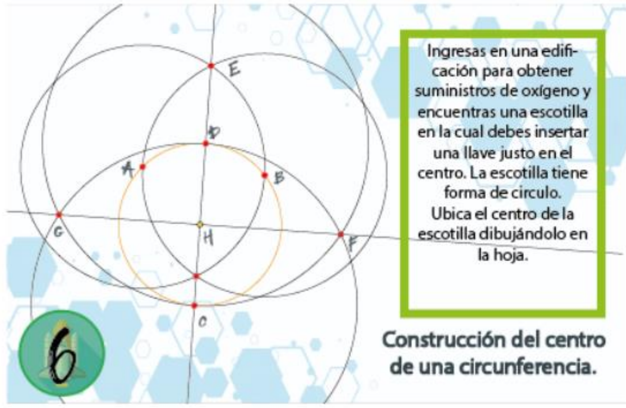

4
B
A

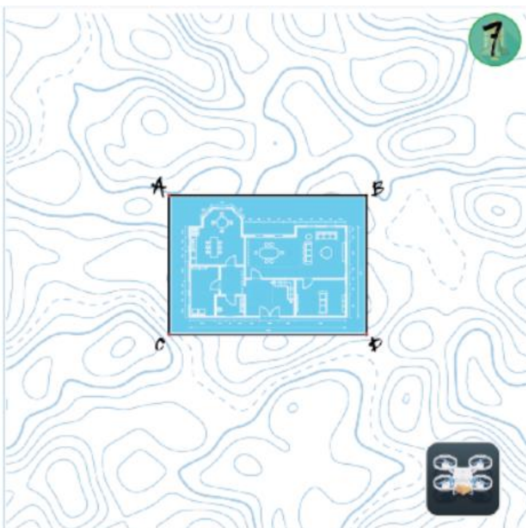

En una estación abandonada te encuentras con dos torretas. Escondido tras un armario de metal debes destruirlas. Cuentas con solo una granada entre tu dotación. Es indispensable lanzar la granada justo en medio del segmento que une las posiciones de las torretas. Si no lo logras quedaras atrapado. Dibuja la posición en la que debe quedar la granada.
Construcción del punto medio de un segmento.
4
C
A
B
D

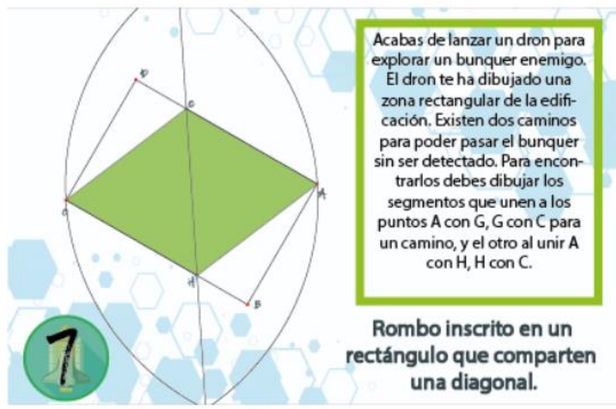

5
A
B
C
D

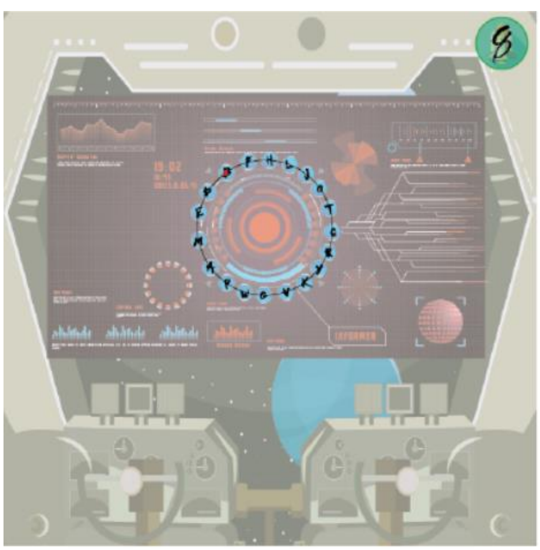

Acabas de lanzar un dron para explorar un bunquer enemigo. El dron te ha dibujado una zona rectangular de la edificación. Existen dos caminos para poder pasar el bunquer sin ser detectado. Para encontrarlos debes dibujar los segmentos que unen a los puntos A con G, G con C para un camino, y el otro al unir A con H, H con C.
Rombo inscrito en un rectángulo que comparten una diagonal.
5
C
D
G
H
A
B

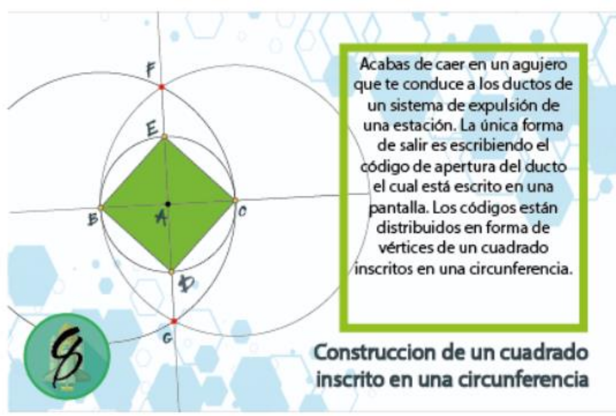

6

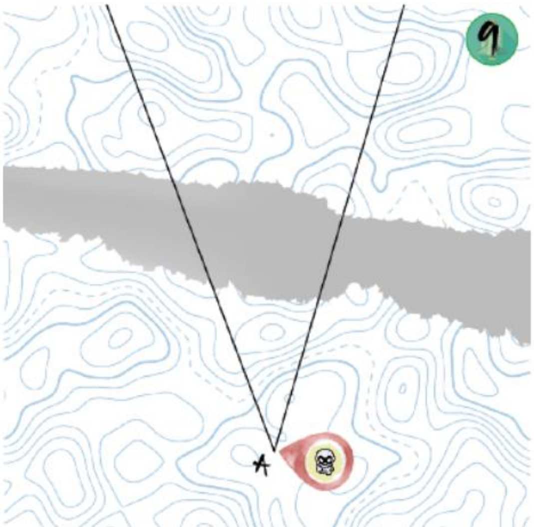

Ingresas en una edificación para obtener suministros de oxígeno y encuentras una escotilla en la cual debes insertar una llave justo en el centro. La escotilla tiene forma de circulo. Ubica el centro de la escotilla dibujándolo en la hoja.
Construcción del centro de una circunferencia.
6

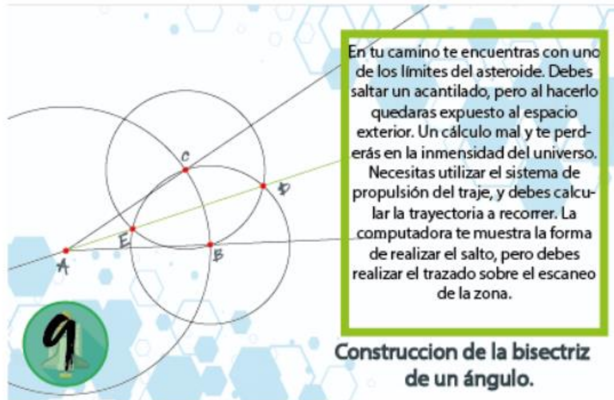

7
A
B
C
D

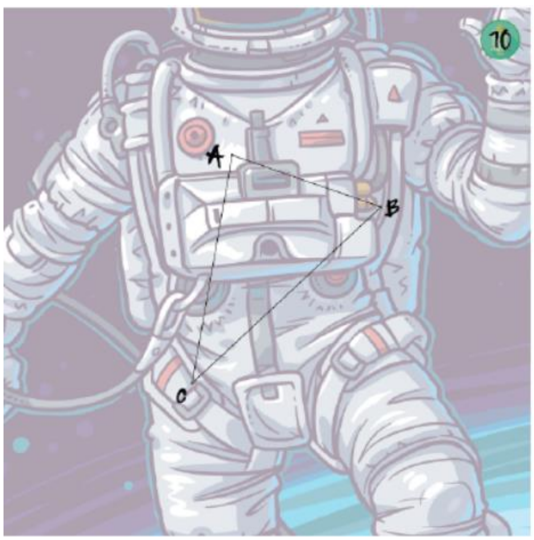

Acabas de lanzar un dron para explorar un bunquer enemigo. El dron te ha dibujado una zona rectangular de la edificación. Existen dos caminos para poder pasar el bunquer sin ser detectado. Para encontrarlos debes dibujar los segmentos que unen a los puntos A con G, G con C para un camino, y el otro al unir A con H, H con C.
Rombo inscrito en un rectángulo que comparten una diagonal.
7

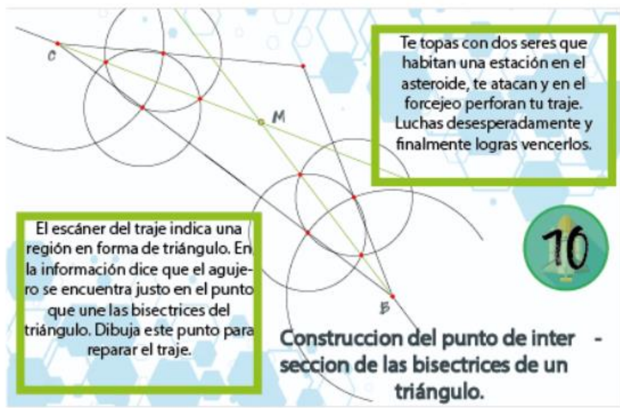

8

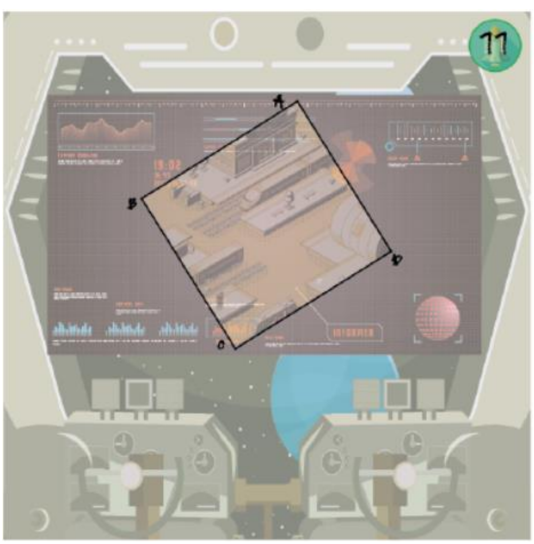

Acabas de caer en un agujero que te conduce a los ductos de un sistema de expulsión de una estación. La única forma de salir es escribiendo el código de apertura del ducto el cual está escrito en una pantalla. Los códigos están distribuidos en forma de vértices de un cuadrado inscritos en una circunferencia.
Construccion de un cuadrado inscrito en una circunferencia
8

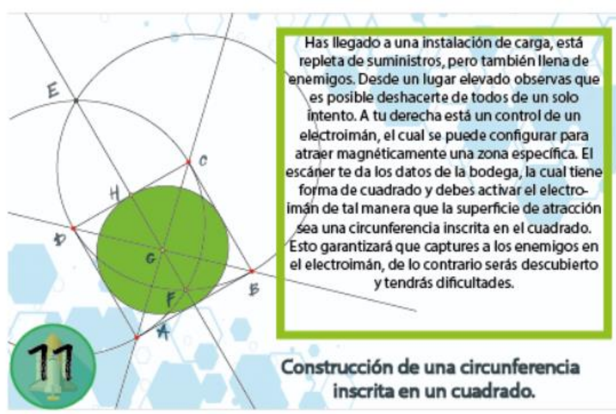

9
A


En tu camino te encuentras con uno de los límites del asteroide. Debes saltar un acantilado, pero al hacerlo quedaras expuesto al espacio exterior. Un cálculo mal y te perderás en la inmensidad del universo. Necesitas utilizar el sistema de propulsión del traje, y debes calcular la trayectoria a recorrer. La computadora te muestra la forma de realizar el salto, pero debes realizar el trazado sobre el escaneo de la zona.
Construccion de la bisectriz de un ángulo.
9
A
B
C
D
E


10
A
B
C


Te topas con dos seres que habitan una estación en el asteroide, te atacan y en el forcejeo perforan tu traje. Luchas desesperadamente y finalmente logras vencerlos.
El escáner del traje indica una región en forma de triángulo. En la información dice que el agujero se encuentra justo en el punto que une las bisectrices del triángulo. Dibuja este punto para reparar el traje.
Construccion del punto de interseccion de las bisectrices de un triángulo.
10
C
M
B


11
A
B
C
D


Has llegado a una instalación de carga, está repleta de suministros, pero también llena de enemigos. Desde un lugar elevado observas que es posible deshacerte de todos de un solo intento. A tu derecha está un control de un electroimán, el cual se puede configurar para atraer magnéticamente una zona específica. El escáner te da los datos de la bodega, la cual tiene forma de cuadrado y debes activar el electroimán de tal manera que la superficie de atracción sea una circunferencia inscrita en el cuadrado. Esto garantizará que captures a los enemigos en el electroimán, de lo contrario serás descubierto y tendrás dificultades.
Construcción de una circunferencia inscrita en un cuadrado.
11
E
C
H
D
G
F
B
A

Tarjetas Beta

Acabas de llegar a una estación enemiga, te encuentras rodeado, la única forma de escapar es sujetar un gancho a una viga en el techo, que se encuentra a una distancia igual a la de tu posición y un depósito frente a ti. Sigue las instrucciones para encontrar el lugar al que debes lanzar el gancho.

Sobre el segmento AB traza una circunferencia con centro en A y que pase por B. A continuación, dibuja otra circunferencia con centro en B y que pase por A. Marca una de las intersecciones de las circunferencias con la letra C. Por último, une los puntos A, B y C con segmentos. La forma obtenida es un triángulo equilátero.

Para poder atravesar una barricada enemiga debes inmovilizar a tus enemigos. Cuentas con una granada aturdidora, la cual, debes lanzar con un ángulo de 60°. Realiza el dibujo correspondiente al ángulo para realizar el lanzamiento.

Sobre el rayo AB dibuja una circunferencia con centro en A y con un radio de cualquier medida. Al punto de intersección de la circunferencia con el rayo, marcalo con la letra C. Con centro en C, traza una circunferencia que pase por A. Marca uno de los puntos de intersección de las dos circunferencias con la letra D. Para finalizar, traza un rayo desde el punto A hasta el puto D. El ángulo formado entre los dos rayos mide 60°.

Mientras luchas con un grupo de enemigos, estalla una carga explosiva en el techo del lugar en el que te encuentras. Logras acabar con tus enemigos, pero el techo se viene abajo. La computadora de tu traje te muestra cómo puedes evitar que el techo caiga sobre ti. Debes empujar un estante hasta el centro de la habitación, de tal manera que quede sobre la mediatriz de uno de los bordes del piso en donde inicia una de las paredes.

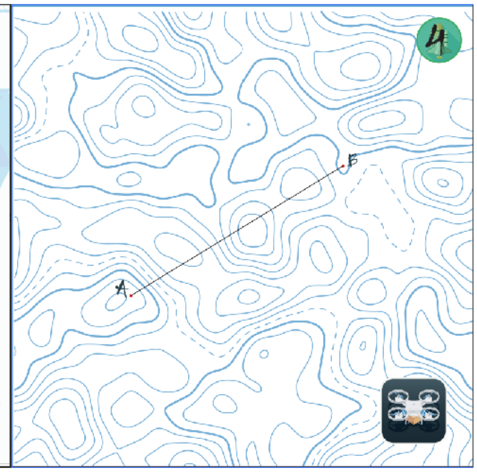
Sigue las instrucciones y salva tu vida.

Sobre el segmento AB traza una circunferencia con centro en A y que pase por B. A continuación, dibuja otra circunferencia con centro en B y que pase por A. Marca las intersecciones de las dos circunferencias con las letras C y D. Traza una recta que pase por C y D. Esta recta es la mediatriz del segmento AB.

En medio de una batalla con muchos enemigos, te encuentras totalmente acorralado. Es tu fin. Tu nave se comunica con tigo y te pide la posición en la que te encuentras para poder enviar drones a ayudarte. Debes dibujar sobre la pantalla de tu computadora el punto medio del segmento marcado en el mapa, el cual es tu posición actual.

Sobre el segmento AB traza una circunferencia con centro en A y que pase por B. A continuación, dibuja otra circunferencia con centro en B y que pase por A. Marca las intersecciones de las dos circunferencias con la letra C y D. Traza una recta que pase por C y D. A la interseccion de la recta CD con AB se le llama punto medio de AB.

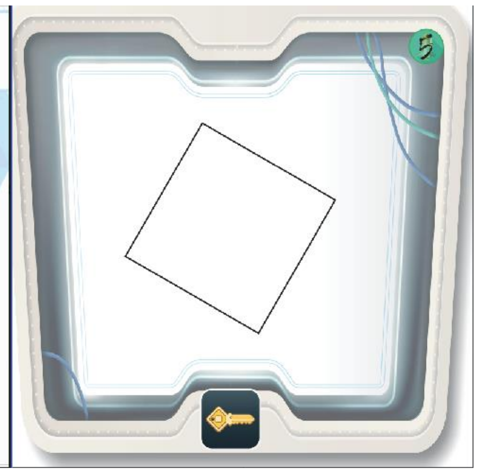
4



Corres desesperadamente por la superficie del asteroide, escapando de enemigos que te han descubierto. La computadora de tu traje señala una construcción deshabitada, allí encuentras un mecanismo para cerrar la puerta principal. Esta puede ser tu oportunidad para escapar. La estructura es tan grande que, si logras cerrar la puerta, tus enemigos tardaran horas en rodearla y podrás usar ese tiempo para huir de ellos. Encuentras un tablero de control y te muestra un cuadrado, en el cual, debes dibujar una circunferencia inscrita para activar el mecanismo de cierre de la puerta.

En el cuadrado ABCD traza sus diagonales, a su interseccion asignale la letra G. A continuación, sobre uno de los lados del cuadrado traza una circunferencia con centro en un extremo y radio la longitud del segmento. Repite el procedimiento sobre el mismo segmento pero centrando la circunferencia en el otro extremo del segmento. Marca las intersecciones de las dos circunferencias con las letras E y F, a continuación, traza una recta por estos dos puntos. Marca la intersección de la recta EF con uno de los lados del cuadrado y asignale la letra H. Dibuja una circunferencia con centro en G y que pase por H. Esta circunferencia esta inscrita en el cuadrado ABCD.

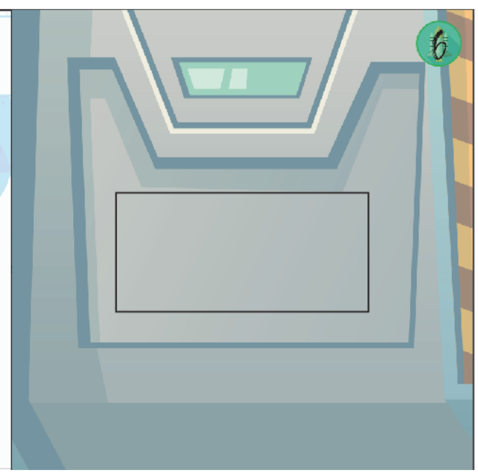
5



Encuentras un armario con provisiones. En la pantalla de apertura tiene dibujado un rectángulo. Sigue las instrucciones para poder abrirlo.

Sobre un rectangulo ABCD traza una de sus diagonales. Dibuja la mediatriz de la diagonal. Marca las intersecciones de la mediatriz con los lados del rectangulo con las letras G y H. Por último, une los puntos extremos de la diagonal con los puntos G y H. La forma obtenida es un rombo inscrito en un rectángulo que comparten una diagonal.

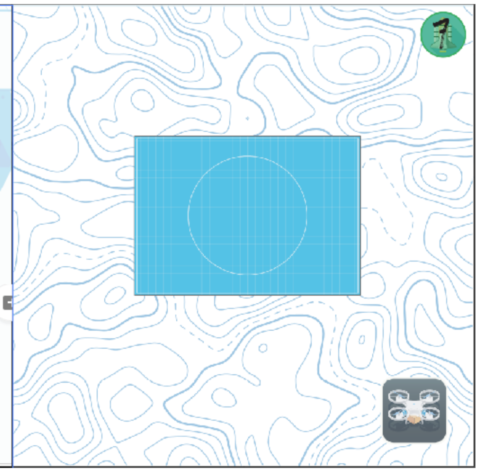
6



Has perdido la comunicación con tu nave. Un dron acaba de encontrar la entrada a un puesto de comunicación, el cual te permitirá recalibrar la frecuencia de tu nave y volver a estar en contacto. La edificación tiene forma de cilindro, y la única forma de entrar es en el techo. El dron te informa que la entrada es un ducto en el centro de la circunferencia que forma el techo. Sigue las instrucciones para conocer la ubicación del ingreso.

Sobre la circunferencia ubica dos puntos y nombralos con las letras A y B. Traza la mediatriz de AB y marca las intersecciones de esta con la circunferencia empleando las letras C y D. Ahora dibuja el punto medio de AB. Este punto es el centro de la circunferencia.

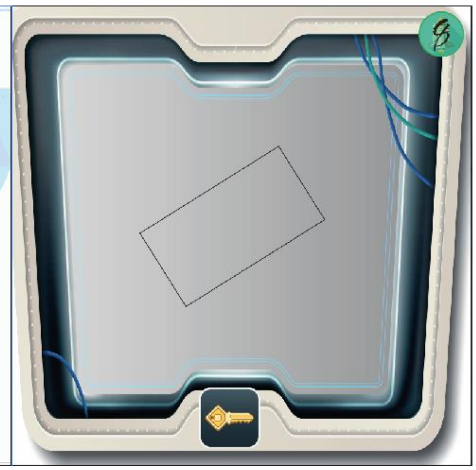
7



Encuentras una bodega de suministros, la cual tiene una puerta que se puede abrir desde un interruptor ubicado a la derecha. El tablero del interruptor muestra un rectángulo, en el cual debes dibujar un rombo inscrito en él, de tal manera, que los dos compartan una diagonal. Sigue las instrucciones para abrir la puerta y quedarte con los suministros.

En el rectángulo, selecciona dos puntos que no hagan parte del mismo segmento. Toma uno de ellos como centro y traza una circunferencia que pase por el otro punto. Repite el procedimiento tomando como centro el otro punto. A los puntos de interseccion de las circunferencias nombralos con las letras E y F, unelos con una recta. A las intersecciones de esta recta con el rectángulo, designalas con las letras G y H. Por ultimo, traza el cualdrilatero conformado por los puntos G, H y los puntos tomados inicialmete. Este cuadrilatero es un rombo inscrito en el rectángulo que comparten una diagonal.

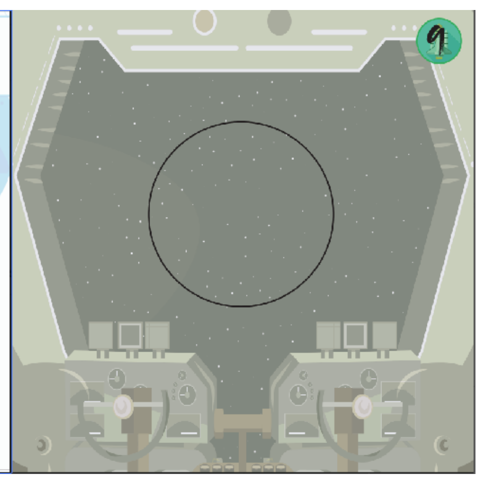
8



Acabas de caer en una trampa. Has sido lanzado en una nave averiada hacia el espacio. Tu única salida es activar un sistema de eyección en la bahía de carga. Para ello debes dibujar en una pantalla la forma del perfil de la caja que va a ser expulsada. Encuentras un manual para lograrlo. Sigue las instrucciones.

Sobre la circunferencia traza un diametro, a continuación, marca los extremos del diametro con las letras B y C. Traza la mediatriz del segmento BC.
A las intersecciones de la mediatriz de BC y la circunferencia asignales las letras D y E.
Por último, une los puntos B con D, B con E, D con C, C con E. La forma trazada es un cuadrado inscrito en la circunferencia.

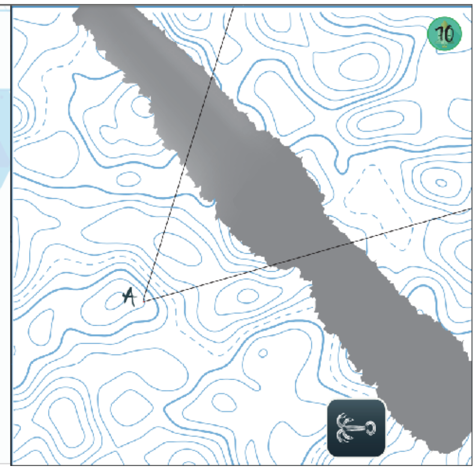
9



Tus enemigos te persiguen. Te encuentras corriendo para huir de tus atacantes. En tu carrera te aproximas al borde de un abismo sí saltas quedarás flotando sin poder maniobrar y tienes dos opciones. La primera es realizar un salto al azar con cualquier ángulo, pero te percatas qué saltando de esta manera te encontrarás al otro extremo con más enemigos. La segunda opción, es realizar un salto con la mitad de amplitud del ángulo que decidas escoger para tu Salto. La computadora ha realizado los cálculos y te da una serie de instrucciones para calcularlo. Realiza el dibujo del trayecto que debes recorrer.

Dibuja dos rayos y nombra su vértice con la letra A. Traza una circunferencia centrada en A y con cualquier radio. A las intersecciones de la circunferencia con los rayos márcalas con las letras B y C.
A continuación, traza dos circunferencias, una centrada en B y que pase por C y la otra centrada en C y que pase por B. las intersecciones de las dos circunferencias dibujadas anteriormente nómbralas con las letras D y E. Por último, traza una recta que pase por D y E.
A esta recta se le llama la bisectriz del ángulo formados por los rayos.

10



¡¡¡Te están atacando!!! Ingresaste en una estructura que creías deshabitada, pero allí se encontraban cinco enemigos, los cuales, iniciaron su ataque ferozmente. Tienes pocas municiones, y tu única escapatoria es debilitar una estructura que se encuentra sobre ellos. Para lograr este fin, debes realizar disparos, con las pocas municiones que te quedan, a una parte debilitada de la estructura que se encuentra a 30 grados de tu posición. Para garantizar la caída de la estructura, no puedes fallar. La computadora de tu traje ha creado una serie de instrucciones para calcular la trayectoria de tus disparos. Síguelas y escapar de allí con vida.

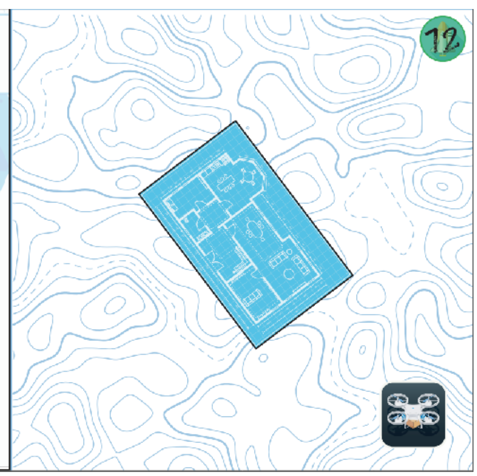
Dibuja un segmento y nombra los extremos con las letras A y B. Construye un triángulo equilátero sobre el segmento y asigna las letras B y C a los otros dos vértices.
A continuación, biseca uno de los ángulos. Los ángulos formados en la bisección miden 30° cada uno.

11

Tus enemigos logran detectar tu presencia cerca de una base de comunicaciones. La computadora ha logrado bloquear momentáneamente las transmisiones de la base, pero es cuestión de tiempo para que tus enemigos logren activar nuevamente la transmisión, si lo hacen llegara una nave a tu posición y estarás acabado. Logras tener acceso a un arma en órbita al asteroide, esta arma envía un pulso láser al suelo, pero debes lograr debilitar la estructura para que quede inservible. La computadora ha escaneado la base, la cual tiene forma de rectángulo, y la única forma de inhabilitar toda la estructura es partiéndola en dos partes iguales. Sigue las instrucciones y lleva a cabo la destrucción. Solo tienes una oportunidad.

Sobre el rectángulo ABCD traza las diagonales. Marca la intersección con la letra E.
Une el punto E y F con una recta. Las intersecciones de la recta con ABCD forman dos superficies cuya área es la misma.

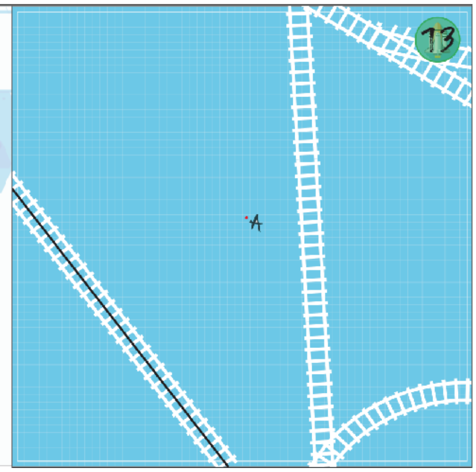
12



Has detectado una señal a 5 km de tu ubicación. Encuentras un sistema subterráneo de transporte por rieles el cual, te llevará a la señal. En la computadora del sistema, ves que dos rieles que deberian estar ubicados de forma perpendicular están desalineados. Para poder poner en funcionamiento los vagones y llegar a la señal debes ajustar los rieles. Sigue las instrucciones y coloca en marcha el sistema.

Marca un punto sobre la recta y asignale la letra B. Traza una circunferencia con centro en B y que pase por A. Marca una de las intersecciones de la circunferencia con la recta y asignales la lera C. Ahora traza una circunferencia con cento en C y con radio CA. Marca la intersección restante de las dos circunferencias y asignale la letra D. Une con una recta A y D. La recta trazada es perpendicular a la recta inicial.

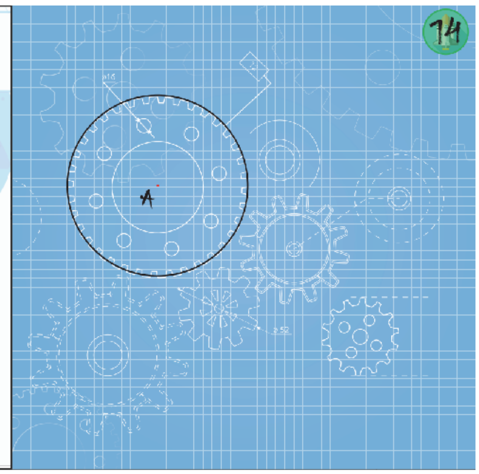
13



Encuentras una caja de suministros. La intentas abrir, pero una pieza sale del mecanismo de apertura. Tiene forma de circulo. Debes colocarla nuevamente de tal manera que sea tangente a la correa transportadora. Sigue las instrucciones que da tu computadora.

Sobre la circunferencia de centro A traza uno de sus radios, y a su extremo asignale la letra B. Traza una perpendicular a AB que pase por B. La recta trazada es tangente a la circunferencia en el punto B.

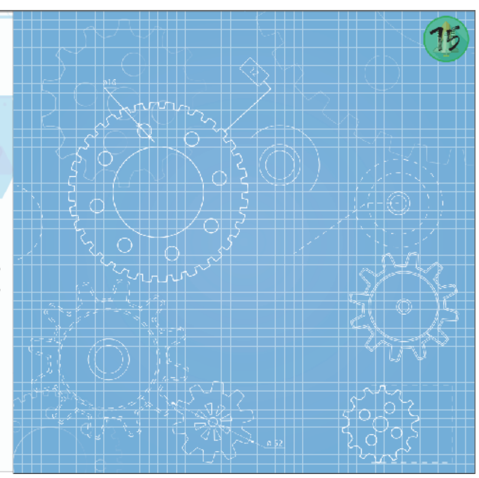
14



Uno de tus drones ha sido averiado y es indispensable repararlo. Al revisarlo encuentras que una correa transportadora esta desalineada. Tu computadora te muestra instrucciones para corregir el funcionamiento de la correa. Arregla tu dron.

Traza una recta y asignale la letra l. Dibuja un punto que no pertenezca a l, asignale la letra A. Traza una perpendicular a l que pase por A y marca la intersección de las rectas con la letra B. Traza una circunferencia con centro en A y que pase por B. Esta circunferencia es tangente a la recta l.

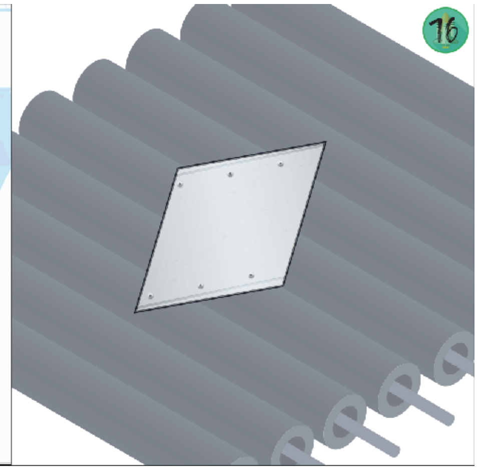
15



Has entrado a una fábrica abandonada intentando escapar de un grupo de enemigos, debes accionar una grúa para pasar por un puente roto, colocando una viga en el camino. A la grúa le falta una pieza circular. En una máquina de diseño de piezas puedes construirla. Y solo cuentas con una lámina metálica con forma de rombo. Sigue las instrucciones para crear la pieza.

Sobre el rombo ABCD traza sus diagonales. Marca la interseccion con la letra E. Construye una perpendicular a uno de los lados de ABCD que pase por E. Marca una de las intersecciones de la recta con ABCD y asignale la letra F. Dibuja una circunferencia con centro en E y que pase por F. Esta circunferencia está inscrita en ABCD.

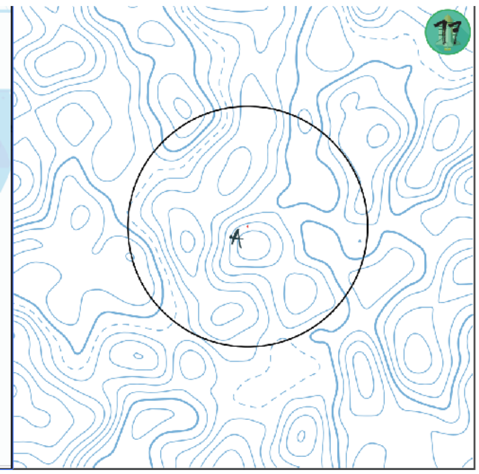
16



¡¡¡Tú traje se ha roto!!! La nave te va a enviar equipo para poder repararlo. Pero solo conoce la circunferencia alrededor de donde te encuentras. Sigue las instrucciones para poder ubicar tu posición y enviar el dron con los elementos de reparación.

En la circunferencia de centro A, ubica un punto en el interior distinto de A y asignale la letra B. Traza una recta que una B con A. Construye una perpendicular a la recta que pase por B. Por último, marca las intersecciones de la recta perpendicular con la circunferencia y asignales las letras C y D. El punto medio de CD es B.

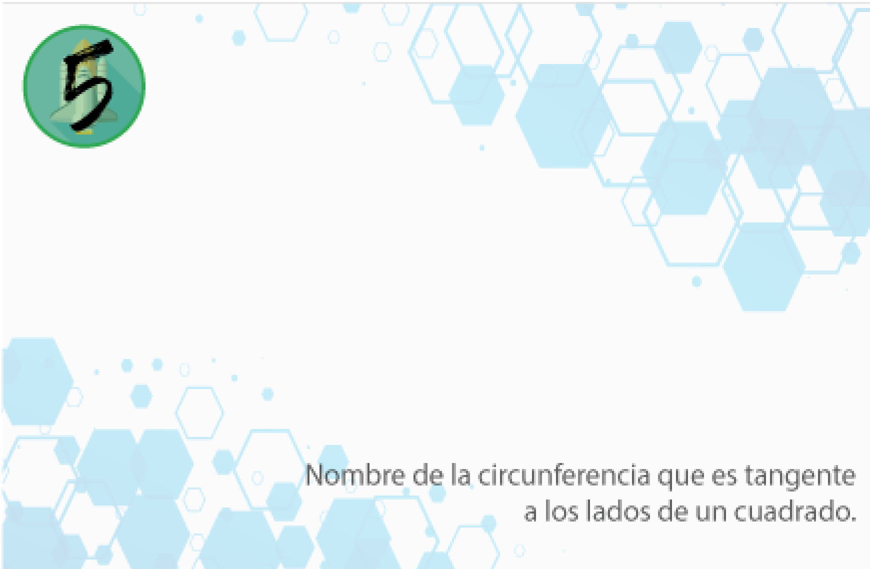
17

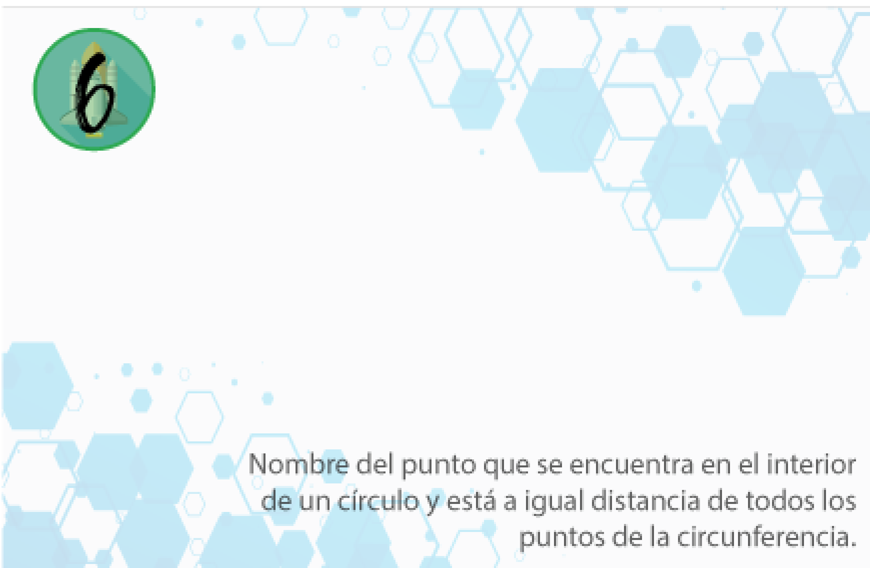


Tarjetas Gamma


3
Nombre de la recta que es perpendicular a un
segmento y pasa por su punto medio.


4
Nombre del punto que divide en dos
segmentos congruentes a un segmento.

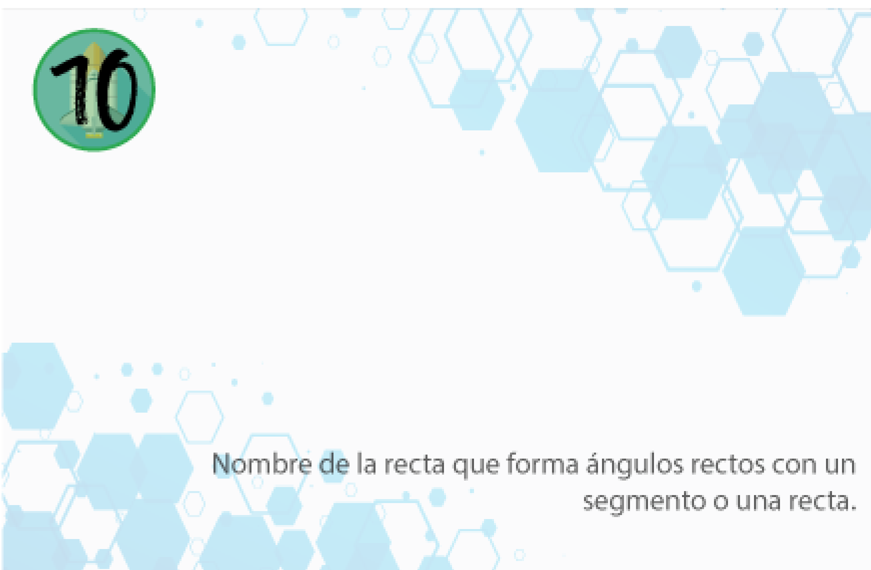

5
Nombre de la circunferencia que es tangente
a los lados de un cuadrado.


6
Nombre del punto que se encuentra en el interior
de un círculo y está a igual distancia de todos los
puntos de la circunferencia.


7
Nombre del polígono regular que tiene sus
cuatro vértices en una circunferencia.


8
Nombre de la recta que divide en dos ángulos
congruentes a un ángulo dado.

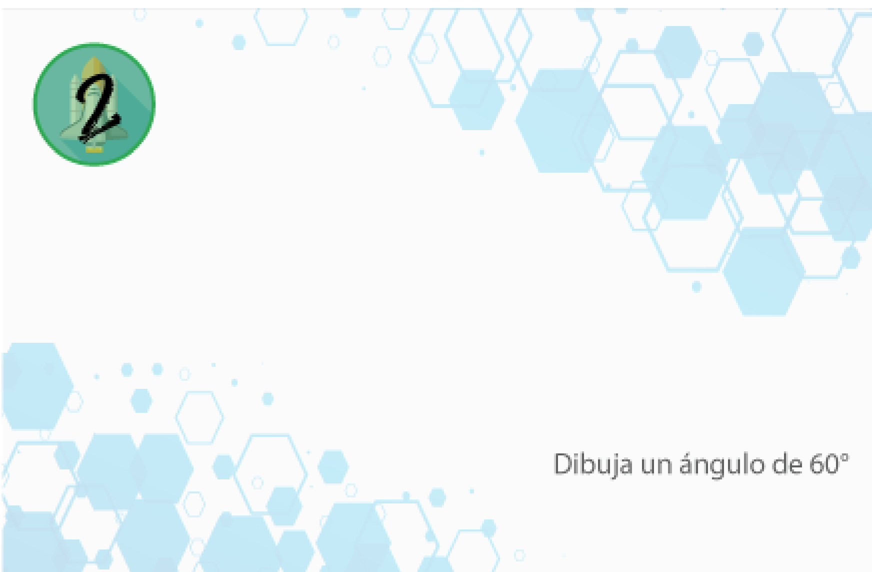

9
Nombre del punto de intersección de las bisectrices de un triángulo.


10
Nombre de la recta que forma ángulos rectos con un segmento o una recta.


11
Medida del ángulo formado al dividir un cuadrado por una de sus diagonales.


12
Nombre de la recta que toca en un solo punto a una circunferencia.

Tarjetas Delta




3
Traza la mediatriz de un segmento.


4
Dibuja el punto medio de un segmento.


5
Dibuja una circunferencia inscrita en un cuadrado.

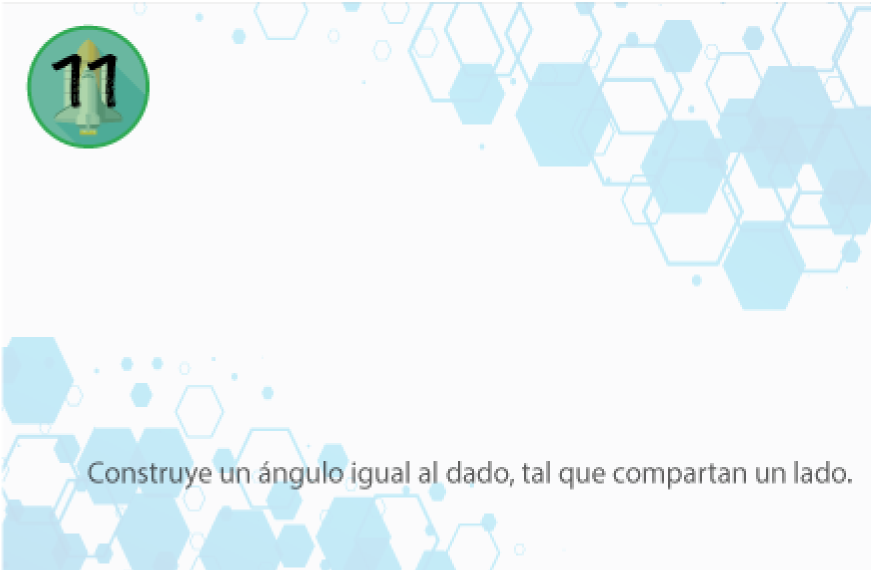

6
Dibuja un rombo inscrito en un rectangulo de tal manera que
ambos compartan una diagonal.


7
Dibuja la bisectris de un ángulo.

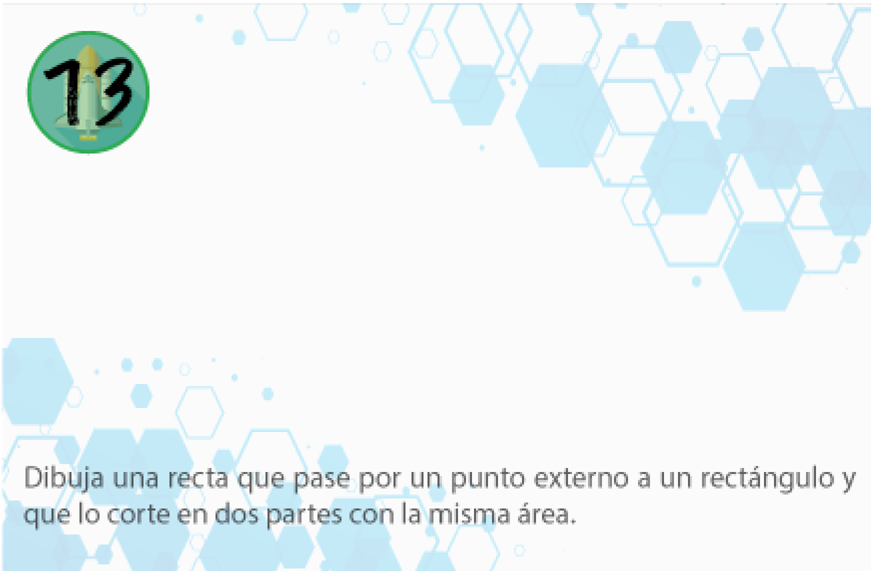

8
Inscribe un cuadrado en una circunferencia que tenga como uno de sus vertices el punto marcado sobre la circunferencia.

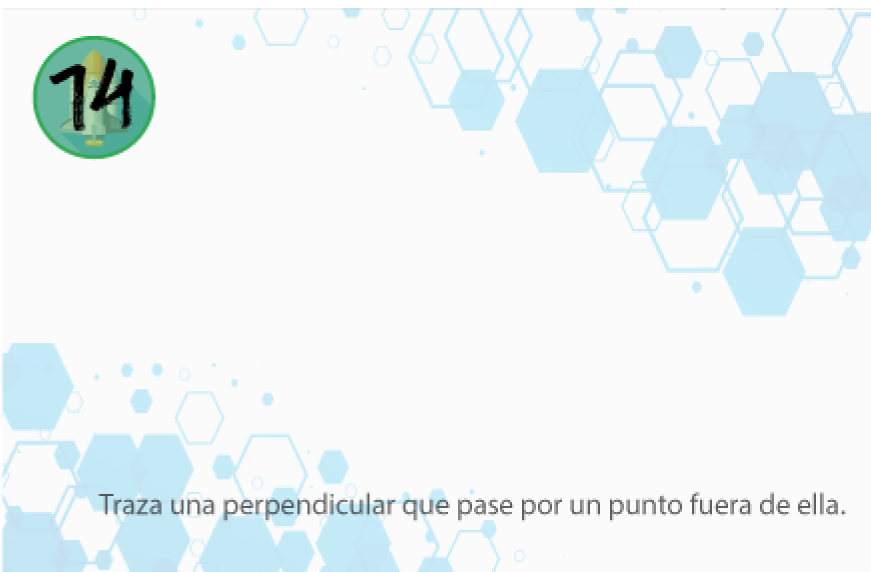

9
Construye el punto de intersección de las bisectrices de un triángulo.

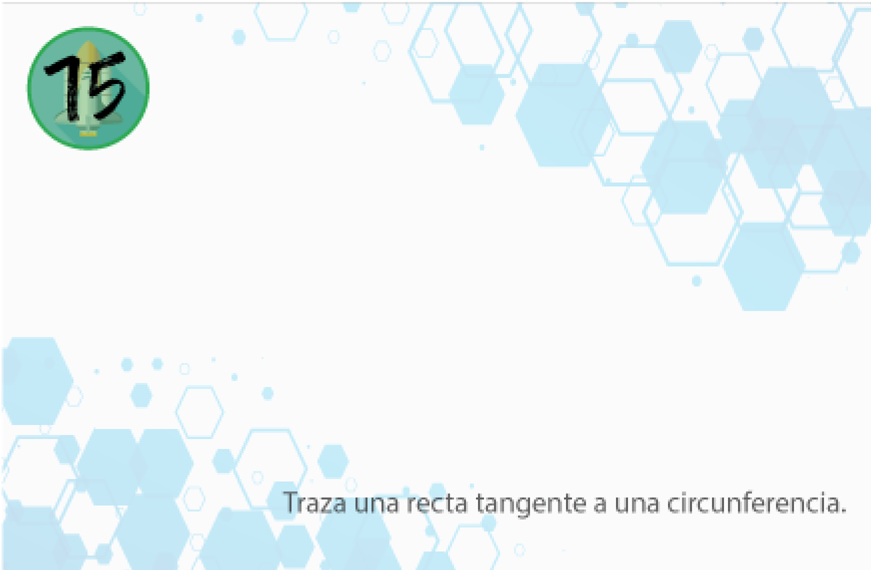

10
Construye un ángulo apartir de otro que tenga el doble de
su amplitud.


11
Construye un ángulo igual al dado, tal que compartan un lado.


12
Construye un ángulo de 30°


13
Dibuja una recta que pase por un punto externo a un rectángulo y que lo corte en dos partes con la misma área.


14
Traza una perpendicular que pase por un punto fuera de ella.


15
Traza una recta tangente a una circunferencia.


16
Construye una circunferencia tangente a una recta cuyo centro sea
un punto que no este sobre la recta.


17
Inscribe una circunferencia en un rombo.


18
Traza la cuerda que tiene como punto medio un punto en el interior
de la circunferencia.


Construye un ángulo de 45°

Anexo 3. Narrativa derivada de la investigación.

Capítulo 1

En la inmensidad del sistema solar existen lugares fascinantes, llenos de belleza y grandeza, por ejemplo, contemplar el mar de tranquilidad en la luna, con una bella vista de nuestro planeta, o marte y su imponente Monte Olimpo, las gigantescas manchas rojas de Júpiter, producto de una tormenta con ráfagas de hasta 400 Km/h, que lleva produciéndose durante 500 años. Los enormes géiseres de Europa, una luna del gigante gaseoso, los cuales pueden expulsar chorros de agua de hasta 200 Km de alto. Los ríos y lagos de titán, uno de los satélites naturales de Saturno, el esplendoroso planeta anillado. Estos maravillosos lugares forman el vecindario de la humanidad, pero no son el límite de la ambición humana.

Una expedición de reconocimiento conformada por un valiente científico a bordo de la esplendorosa nave GALOIS, parte con destino al sistema estelar más cercano a la tierra. Ubicado a 4,2 años luz en la constelación de centauro. Alpha Centauri es un sistema binario conformado por dos estrellas que danzan entre sí en un baile de armonía y estabilidad en una órbita de 80 años. La misión tiene como objetivo explorar el sistema en busca de un planeta con condiciones que permitan su colonización.

Es el año 2526, Alan el único tripulante de la nave es despertado por una extraña señal proveniente del cinturón de asteroides ubicado entre Marte y Júpiter. Este cinturón divide los planetas del sistema solar en interiores y exteriores, nunca ha sido explorado en su totalidad y la señal proviene de una de las zonas más peligrosas. En los parámetros de la misión se encuentra una directriz que se ejecuta en el caso de detectar señales desconocidas en cualquier lugar del recorrido. Alan se ubica en la consola de mando y revisa la señal. No se trata de un error, la computadora ha desplegado el protocolo y el científico debe abordar una nave de exploración con dirección a la señal.

La nave de reconocimiento está equipada con drones de reconocimiento, sistemas médicos, y otros apoyos vitales en caso de que la misión se torne peligrosa. Mientras dejan a GALOIS, Alan repasa en su mente las directrices creadas para estas situaciones. En su mente se maldice, y se repite constantemente los números que determinaban la improbabilidad de encontrar vida. Alan se comunica con la IA que lo acompañará en su viaje.

- Pyxída, que tan lejos estamos de la señal.

- Nos encontramos a 260,5 km

- Necesito que escanees la zona y cargues los planos del lugar a la computadora de mi traje.

- Entendido, cargando la información. La señal proviene de un asteroide con forma de elipsoide, con un tamaño similar a Vesta. Posee un núcleo metálico bastante denso (de hierro y níquel), un manto compuesto de olivino, y una corteza muy fina de apenas unos kilómetros de grosor, su superficie es muy inestable.

Repentinamente una turbulencia sacude la nave.

- ¿Qué fue eso Pyxída?

- Parece una onda electromagnética, similar a un EP (pulso electromagnético)

- ¿Cuál es su fuente?

- Parece lanzada desde la zona a la que nos dirigimos… cuidado, se aproxima otra onda.

- Inicia acciones para que GALOIS se aleje de la zona, no queremos que sea dañada.

- Protocolo de camuflaje iniciado, la nave GALOIS estará lejos de nuestro destino esperando instrucciones.

La nave es golpeada por la segunda onda y sufre daños considerables. En la turbulencia Alan se golpea contra los controles y pierde la conciencia. La IA inicia los protocolos para un choque inminente.

- Protocolo de impacto activado, los datos de la nave serán purgados, los sistemas vitales se han desviado a la cabina de control y las bahías médicas y de exploración serán expulsadas para garantizar que no sufran daños.

El choque es inevitable. El protocolo disminuye los daños del impacto, pero la nave quedará inservible.

Capítulo 2

-Analizando la superficie para minimizar daños en la colisión. Objetivo encontrado, activando protocolo regla y compás.

Mientras la nave cae hacia el asteroide, Pyxída activa las maniobras de aterrizaje, programadas en el protocolo regla y compás. Este protocolo fue diseñado exclusivamente para esta misión, y también está incorporado en el traje de Alan y en todos los elementos de exploración de la nave. El protocolo funciona proyectando escenarios peligrosos, en donde se registra una zona para encontrar posibles soluciones a la situación. Cuando la zona en cuestión ha sido escaneada, se muestra el lugar y la instrucción más efectiva para evadir, atacar, correr, saltar, o realizar cualquier acción que aumente la probabilidad de supervivencia de Alan.

Los primeros experimentos se hicieron con saltos de obstáculos de acantilados, en las bases militares de Marte. El protocolo era implantado en drones de combate, manipulados por pilotos de manera remota. La primera prueba exitosa llevó a un dron al borde de una grieta para saltarla, la distancia más corta de orilla a orilla era de 500 metros en promedio, el protocolo escaneo la zona y en pantalla del piloto aparecieron dibujados dos puntos, marcados con las letras A y B, la instrucción principal PUNTO MEDIO DE AB. El piloto había hecho pruebas en el simulador e inmediatamente reconoció la instrucción, rápidamente en su pantalla dibujo dos circunferencias, una centrada en A y otra centrada en B, las dos con radio AB, a continuación, trazó por las intersecciones de las circunferencias una recta, y marcó el punto de intersección con el segmento AB. Este punto era el lugar óptimo para saltar y aterrizar. El dron saltó.

La gravedad en Marte es de 0,4 veces la de la Tierra, por lo cual es posible recorrer más distancia que en un salto ordinario en la tierra.

En la cámara del piloto estaba fijo el punto que había elegido, mientras el dron flotaba encima de la grieta. Un momento de tensión iluminó la sala de control a medida que el dron se acercaba al punto señalado, cuando por fin aterrizó, justamente en el lugar deseado sin ningún daño, se escuchó un grito de regocijo, el protocolo regla y compás había nacido. En la pantalla de la nave apareció dibujado un rectángulo, con la instrucción principal CENTRO DEL POLÍGONO. Pyxída estaba diseñada para ejecutar las inscripciones del protocolo regla y compás, y en la pantalla sobre el rectángulo trazó las diagonales, y marcó el punto de intersección de estas. El lugar marcado, representaba el lugar con mayor probabilidad de aterrizar sin que Alan sufriera daños.

La nave descendió velozmente, y desde la superficie un grupo de seres extraños observaba cómo la nave se desplomaba, intentando predecir el lugar donde caería, para poder capturar a cualquier sobreviviente.

La trayectoria trazada por Pyxída llevaba a la nave a un cráter extenso, la ubicación situaría a la nave en una especie de cueva, fuera de la vista de cualquier merodeador. Pyxída había hecho los cálculos y la nave no sufriría daños graves a los soportes vitales, incluido el sistema de camuflaje, el cual proyectaba el entorno para hacerla virtualmente indetectable.

Mientras la nave caía hacia el cráter, Pyxída activó el sistema de protección anti impactos de la cabina, envolviendo a Alan en una cápsula, la cual garantiza que no sufra algún daño en el choque. La caída de la nave produjo un estruendo, rocas y polvo volaron en todas direcciones, las chispas producidas por la fricción de la nave con la superficie parecían un infierno. La nave se detuvo dentro de la cueva como se había pronosticado y Pyxída activó inmediatamente el camuflaje, que por fortuna no había sufrido daños. De la nave salió un dron de reconocimiento, el cual volará por la zona en busca de amenazas.

Pyxída evaluó los daños de la nave y el estado de Alan. Un fuerte golpe lo había noqueado, pero las lecturas de la resonancia electromagnética no mostraban alguna anomalía. La cápsula antichoque, contenía un avanzado sistema médico, que evalúa las condiciones de su ocupante y suministra atención inmediata en caso de emergencia.

El dron de reconocimiento alertó a la nave sobre un vehículo acercándose. En la pantalla de la nave apareció un cronómetro en cuenta regresiva. Tiempo estimado de llegada, una hora.

Capítulo 3

Una sensación de felicidad recorría la mente de Alan mientras leía la teoría de Galois sobre la constructividad geométrica empleando la regla y el compás. Había dedicado gran parte de su tiempo en la universidad a comprender cómo funcionaban estas construcciones, y estaba feliz de poder embarcarse en una exploración científica que le permitiera aplicar todo lo aprendido durante sus años de investigación, además que el espacio exterior siempre le había fascinado e inquietado.

Para su viaje había decidido llevar como amuleto un compás color plata brillante, con regiones pintadas con un color negro mate, que cortaba el brillo del resto del compás, en uno de los brazos estaba grabada una frase, "la grandeza del geómetra está en usar este instrumento". Este fino compás había sido un regalo de su padre tras obtener su doctorado y él lo atesoraba más que nada.

Instantáneamente este recuerdo se nublo y lentamente Alan abría sus ojos, el ruido de alerta de la nave le produjo un fuerte dolor punzante en la base de la cabeza, la cámara que lo envolvía, le inyectó un fuerte analgésico en las entradas de medicamentos de su traje. En la pantalla de su casco pareció un medidor de medicina, que se encontraba al 100%, la cápsula había llenado el traje con todo tipo de medicamentos, para los casos más extremos.

La cápsula se abrió y lentamente Alan salió. Una vez afuera inició a revisar el tablero de control.

-Pyxída, informe de la situación.

-La nave ha activado el camuflaje, pero tenemos enemigos en el perímetro. El tiempo estimado de llegada (ETA) del enemigo es de 50 minutos. Es imperativo neutralizar las amenazas para evitar la localización de la nave.

Alan frunció el ceño y revisó la información del dron de vigilancia. Repentinamente esbozó una sonrisa y dijo con voz firme:

-Tengo una mejor idea. Pyxída, despliega un dron de ataque, activa el modo furtivo. Carga tu conciencia a mi traje, vamos de cacería.

Pyxída activo las secuencias de despliegue de drones y lanzó al aire un dron con capacidad de camuflaje y un armamento sofisticado. Estos drones poseían tecnología de reconocimiento y estaban diseñados para ejecutar órdenes desde el protocolo regla y compás.

Mientras el dron sobrevolaba la zona Alan recibía los datos cartográficos en su traje, para hacer un mapa preciso del cuadrante. Rápidamente identificó una región inestable, justo en el camino que los enemigos estaban tomando.

En el monitor de su brazo Alan disponía del mapa, en el cual ubica dos puntos A y B.

-Pyxída, envía al dron a la posición correspondiente al punto medio de A y B, estoy trazando el lugar al que debe disparar un misil de bajo rango, esto desestabiliza la zona y creará un agujero lo suficientemente profundo para capturar a los enemigos. A mi señal activa el misil.

Alan trazaba dos circunferencias del mismo radio en el mapa, una con centro en A y que pasa por B y otra con centro en B. A las intersecciones de estas circunferencias las marca y nombra como C y D. Luego traza una recta por C y D. Por último, marca la intersección de esta recta con AB y este punto corresponde al punto medio de AB, el lugar en donde el dron debe disparar.

El traje de Alan guarda esta construcción con el nombre de punto medio de un segmento, como código del protocolo.

Uno de los desarrollos del protocolo regla y compás permite que el traje almacene situaciones y las codifique para su posterior uso, esto permite que el traje se adapte a las adversidades de la misión y ayude a Alan a solucionar inconvenientes eficazmente. El traje de Alan posee una IA, en la categoría de red convolucional, por medio de la cual aprende y se entrena, es decir, entre más situaciones enfrente más efectivas serán sus respuestas.

Los enemigos corren a la zona esperada por Alan, pacientemente, él espera la oportunidad.

-Ahora Pyxída.

El dron dispara el misil y el terreno empieza a ceder creando un enorme cráter.

-Pyxída, reconocimiento de la zona.

-Muchas rocas cayeron sobre los enemigos, solo hay un sobreviviente, al parecer está inconsciente.

-Perfecto. Envía el dron de reconocimiento para asegurar la zona. Avísame de cualquier novedad.

-Entendido.

Alan corre velozmente hacia el cráter. La gravedad del asteroide se siente similar a la de la Tierra, el traje marca un 57%, lo cual hace que la carrera sea menos agotadora.

Al llegar al cráter Alan observa dos criaturas con aspecto similar a lagartos, uno de ellos está aplastado completamente por una roca, el otro se encuentra inconsciente con daños leves.

- Pyxída, escanea los seres e informa detalladamente que son.

- La estructura anatómica es similar a la de un reptil, del reino Animalia, filo Chordata, clase Sauropsida, subclase lepidosauria del orden de squamata, pertenece a la subclase diapsida, superorden Lepidosauria, orden Squamata, suborden Lacertilia. Son seres bípedos. Están equipados con trajes, lo cual revela avanzada tecnología. En la tráquea parecen tener un sistema de distribución de oxígeno, por lo cual no necesitan de un casco, el traje brinda un suministro de calor mediante radiación similar a la del sol, además de estar compuesto principalmente por aleaciones de grafeno. El traje posee tecnología de armamento y herramientas diseñadas para surcar el terreno. Las señales no indican emisión de datos, razón por la cual no hemos recibido más visitantes. El análisis muestra rutinas similares al protocolo regla y compás, por lo que infiero que su tecnología está en un nivel similar al de los humanos.

- ¿Puedes descargar las rutinas?

- No, parecen tener una fuerte barrera que protege los datos. Pero he podido extraer un mapa de la zona, que indica un lugar, al parecer la ubicación de una estación. El mapa posee una representación gráfica, idéntica a la construcción de un triángulo equilátero. La estoy cargando a tu visor.

Alan abrió su visor y sorprendido identificó la construcción, un segmento, dos circunferencias y un punto que al parecer es la localización de la instalación enemiga. El protocolo regla y compás guardó la construcción y la etiquetó como triángulo equilátero.

- Pyxída, iremos al lugar indicado. Rompe las comunicaciones de estos seres, al que está vivo, captúralo y llévalo a la nave.