

EL CERO: ALGUNAS INTERPRETACIONES DESDE EL AULA

JONATHAN STEVEN VILLAMIL PACHÓN



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TUNJA

2019

EL CERO: ALGUNAS INTERPRETACIONES DESDE EL AULA

JONATHAN STEVEN VILLAMIL PACHÓN

Trabajo de grado, requisito parcial para optar al título de Magíster en Educación Matemática

Directora: Dra. LIDA ESPERANZA RISCANEVO ESPITIA



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TUNJA

2019

MACROPROCESO: DOCENCIA
 PROCESO ADMISIONES Y CONTROL DE REGISTRO ACADÉMICO
 PROCEDIMIENTO: PROCEDIMIENTO PARA GRADOS
 ACTA DE SUSTENTACIÓN DEL TRABAJO DE GRADO O DE TESIS - PROGRAMAS DE POSGRADO


Código: D-AR-P03-F05	Versión: 01	Página 1 de 1
FACULTAD: CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN		
PROGRAMA: MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA		
NOMBRE DEL AUTOR: VILLAMIL PACHÓN JONATHAN STEVEN	NÚMERO DE CÉDULA: 1,053,324,334	CÓDIGO: 201714112

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TRABAJO DE GRADO O DE TESIS No. 19 DE: 2019

En la Ciudad de Tunja, el día 8 del mes de Noviembre del año 2019 a las 8:00 a.m. horas, previa autorización del Comité Curricular y en concordancia con el Decreto 1295 de 2010 y lo dispuesto en el Capítulo IV del Acuerdo 052 de 2012, se reunieron los jurados lectores para evaluar la sustentación pública del trabajo de grado: "EL CERO: ALGUNAS INTERPRETACIONES DESDE EL AULA"

TÍTULO: "EL CERO: ALGUNAS INTERPRETACIONES DESDE EL AULA"

JURADO 1			
ASPECTOS	CALIFICACIÓN		
	CALIFICACIÓN	VALOR %	CALIFICACIÓN PONDERADA
Evaluación informe final escrito	48	60%	288
Evaluación sustentación pública	5.0	40%	200
TOTAL	49	100%	490

JURADO 2			
ASPECTOS	CALIFICACIÓN		
	CALIFICACIÓN	VALOR %	CALIFICACIÓN PONDERADA
Evaluación informe final escrito	48	60%	288
Evaluación sustentación pública	50	40%	200
TOTAL	49	100%	490

La calificación otorgada por el Jurado (o Tribunal) Evaluador fue de: Número: 4.9 Letras: Cuatro Nueve.

En concordancia con el Artículo 40 del Acuerdo No. 052 de 2012, o la norma que lo modifique o sustituya la evaluación de trabajos de grado o de tesis de programas de posgrado se regirán por la siguiente escala de valoración:

LAUREADA: Calificación (5.0)	PARA CONSTANCIA SE FIRMA:	
MERITORIA: Calificación (4.5 - 4.9)	NOMBRES:	FIRMAS
SOBRESALIENTE: Calificación (4.0 - 4.4)	DIRECTOR DEL TRABAJO DE GRADO O DE TESIS:	LIDA ESPERANZA RISCANEVO ESPITIA
SATISFACTORIO: Calificación (3.5 - 3.9)	COORDIRECTOR (si aplica):	
DEFICIENTE (inferior): Calificación (3.5)	JURADO 1:	ALFONSO JIMÉNEZ ESPINOSA
	JURADO 2:	PUBLIO SUÁREZ SOTOMONTE
	PRESIDENTE COMITÉ CURRICULAR:	PUBLIO SUÁREZ SOTOMONTE

OBSERVACIONES:

Dedicado a

*Andrea Carvajal, mi esposa, por creer en mí y
colmar mis días de su amor, paciencia y comprensión.*

*Emmanuel, nuestro hijo, quien llena de momentos
mágicos nuestras vidas y nos impulsa a
trabajar con esmero y dedicación.*

Agradecimientos

Principalmente a Dios por ser mi guía constante y depositar en mí la sabiduría para culminar con éxitos las metas propuestas.

A Andrea y Emmanuel por el amor, los sacrificios, la paciencia y ser los principales promotores de mis logros profesionales.

A mi mamá, Rosa Imelda, por inculcarme desde pequeño los valores y principios necesarios para formarme como docente.

A la Dra. Lida, quien me orientó con su experiencia y conocimientos en el desarrollo y consolidación de este trabajo investigativo.

Al Dr. Alfonso y al Dr. Publio por su amistad, sus consejos, enseñanzas y sobre todo, por las observaciones realizadas que contribuyeron a mejorar el informe final.

A mi alma mater, la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, y particularmente a la Maestría en Educación Matemática por ser el epicentro de todo el conocimiento adquirido en estos años.

A mis compañeros, estudiantes y profesores, del grupo de investigación Somos Maestr@s por ser parte de este proceso colaborativo de investigación.

A los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas que participaron a lo largo de este proceso investigativo.

A mis maestros y compañeros de la Licenciatura en Matemáticas con los que aprendo continuamente en cada momento que compartimos de la academia.

Resumen

Esta investigación pretende contribuir al campo investigativo en formación inicial del profesor de matemáticas, con el fin de analizar las interpretaciones de estudiantes en formación inicial de matemáticas sobre el cero como número. La base conceptual se asume desde el reconocimiento de la historia como valor pedagógico en la enseñanza de las matemáticas y su articulación con la formación de profesores como campo investigativo. El estudio se realizó bajo el paradigma interpretativo y estuvo enfocado en un estudio de caso, tomando como unidad de análisis un grupo de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, que cursaban la asignatura Didáctica y Pedagogía II. Las fuentes de información que se tuvieron en cuenta fueron dos situaciones didácticas y un cuestionario, además de las grabaciones de audio y video de cada una de las sesiones. Para organizar la información se establecieron a priori dos categorías de análisis relacionadas con la historia y los usos del número cero; adicionalmente, en el transcurso del análisis surgieron dos categorías a posteriori enfocadas a establecer la relación de las interpretaciones de los estudiantes sobre el cero como número y su uso en contextos de enseñanza. El análisis se basó en la triangulación hermenéutica de la información, desde la cual se pudo establecer algunos problemas cognitivos relacionados con el cero y sus interpretaciones desde la posición discente de los participantes. Entre los resultados se evidencia que las dificultades relacionadas con el cero, desde el aspecto histórico y epistemológico, han perdurado sin importar el contexto y, en consecuencia, son dificultades que trascienden y permean su enseñanza.

Palabras clave: número cero, formación inicial en matemáticas, historia y epistemología.

Abstract

This research intends to contribute to the research field in initial training in mathematics, in order to analyze students' interpretations in initial mathematics training about zero as a number. The conceptual basis is assumed from the recognition of history as a pedagogical value in the teaching of mathematics and its articulation with the training of teachers as a research field. The study was conducted on the interpretive paradigm and focused on a case study, taking as a unit of analysis a group of students of the Bachelor of Mathematics at the Pedagogical and Technological University of Colombia, who were studying the Didactics and Pedagogy II course. The sources of information that were taken into account were two didactic situations and a questionnaire, as well as the audio and video recordings of each of the sessions. To organize the information, two categories of analysis related to the history and uses of the number zero were established a priori; Additionally, in the course of the analysis, two a posteriori categories emerged which were focused on establishing the relationship of students' interpretations of zero as a number and its use in teaching contexts. The analysis was based on the hermeneutic triangulation of the information, from which it was possible to establish some cognitive problems related to zero and its interpretations from the participants' position. Among the results it is evident that the difficulties related to zero, from the historical and epistemological view, have endured regardless of the context and, consequently, are difficulties that transcend and permeate its teaching process.

Keywords: number zero, initial training in mathematics, history and epistemology.

Resumo

Esta pesquisa tem como objetivo contribuir com o campo de treinamento inicial em matemática, a fim de analisar as interpretações dos alunos na formação inicial da matemática do zero como um número. A base conceitual é assumida a partir do reconhecimento da história como valor pedagógico no ensino da matemática e sua articulação com a formação de professores no campo de pesquisa. O estudo foi realizado no paradigma interpretativa e focou-se em um estudo de caso, tendo como unidade de análise um grupo de estudantes do grau em Matemática da Universidade Pedagógica e Tecnológica da Colômbia que cursavam a disciplina de Didática e Pedagogia II. As fontes de informação levadas em consideração foram duas situações didáticas e um questionário, além das gravações de áudio e vídeo de cada uma das sessões. Para organizar as informações, foram estabelecidas a priori duas categorias de análise relacionadas à história e aos usos do número zero; além disso, no decorrer da análise, emergiram duas categorias a posteriori, focadas em estabelecer a relação das interpretações dos alunos do zero como um número e seu uso no contexto de ensino. A análise baseou-se na triangulação hermenêutica da informação, a partir da qual foi possível estabelecer alguns problemas cognitivos relacionados ao zero e suas interpretações a partir da posição dos participantes. Dentre os resultados, evidencia-se que as dificuldades relacionadas ao zero, do ponto de vista histórico e epistemológico, persistem independentemente do contexto e, conseqüentemente, são dificuldades que transcendem e permeiam seu ensino.

Palavras-chave: número zero, treinamento inicial em matemática, história e epistemologia.

Contenido

Introducción	15
Capítulo 1. ¿Cómo se generó el objeto de estudio?	18
Descripción de la problemática	18
Objetivos de la investigación.....	24
Objetivo general.....	24
Objetivos específicos.	24
Justificación.....	24
Capítulo 2. Sobre la teoría, los conceptos y los referentes.....	27
Algunos estudios precedentes.....	27
Formación de profesores como campo investigativo	33
Los números y el hombre	37
Perspectivas históricas y epistemológicas del número cero	39
Primeros indicios del cero.....	40
El cero como número.....	48
Un símbolo para el cero.....	52
Origen de la palabra cero.....	53
El cero y las operaciones básicas.....	54

El cero llega de Oriente a Europa.	59
La aceptación del cero en Europa.	61
El cero en contextos educativos	63
Cero para contar.	64
Cero para numerar.	64
Cero para medir.	64
Cero para operar.	65
Capítulo 3. Trazando la ruta desde y con el cero	67
Estudio de caso	68
Categorías de análisis	70
Historia y epistemología del número cero.	71
Usos del cero como número.	72
Conceptualización del número cero.	74
El cero como número en situaciones de enseñanza.	75
Consideraciones éticas.	77
Capítulo 4. Interpretaciones en el aula y su análisis	79
Algunas interpretaciones del cero	81
Usos del cero como número	87
El cero en contextos de enseñanza	95
Conclusiones	106

Referencias	110
Anexos.....	120
Anexo 1	120
Anexo 2	122
Anexo 3	123
Anexo 4	124
Anexo 5	126

Lista de Figuras

Figura 1. Hueso de Ishango.....	38
Figura 2. Representación simbólica numeración egipcia.....	40
Figura 3. El papiro Boulaq: una síntesis actualizada.	41
Figura 4. Representación numérica babilónica.	42
Figura 5. Representación simbólica en el sistema babilónico del número 3600.	43
Figura 6. Numeración china de varillas.	44
Figura 7. Espacio en blanco como representación de varios ceros.	45
Figura 8. Representación numérica maya para el 120.	46
Figura 9. Algunos símbolos mayas para el cero.	46
Figura 10. Representación simbólica inca.	47
Figura 11. Representación simbólica inca de una posición vacía.	48
Figura 12. Inscription Khmère de Sambór.....	49
Figura 13. MS Sansk. d.14 fol. 16v por Bodleian Libraries.	50
Figura 14. Sistemas de numeración hindú.	51
Figura 15. Posible separación del símbolo pisciforme usado para 10.	53
Figura 16. Cero a lo largo de su historia.	58
Figura 17. Ejemplos del cero como representación de la nada dada por algunos estudiantes.82	
Figura 18. Interpretaciones de Vilma sobre el cero.	82
Figura 20. Ejemplos del cero para medir	92
Figura 21. Respuestas relacionadas con la división por cero.....	93
Figura 22. Billete cero euros Descartes.	96

Figura 23. Interpretaciones del billete de cero euros	97
Figura 24. Situación de enseñanza propuesta por Sandra.	98
Figura 25. Situación de enseñanza propuesta por Ana.	98
Figura 26. Propuesta de enseñanza de Juan.	99
Figura 29. Propuesta de Vilma para la enseñanza de las operaciones con cero.....	102
Figura 30. Propuesta de Tatiana para la enseñanza de las operaciones con cero.	102
Figura 31. Propuestas sobre el cero para medir	104

*Si uno mira al 0 no ve nada;
Pero si mira a través de él, ve el mundo.*

Robert Kaplan

Introducción

En el campo de la educación matemática se pueden encontrar varios problemas relacionados con las interpretaciones del número cero; la mayoría de estos problemas pueden basarse en conflictos epistemológicos que trascienden en su enseñanza (Contreras, 2013). En la historia de las matemáticas, el origen del cero no es similar al de los demás números, pues “muy pocas culturas antiguas apreciaron su necesidad” (Barrow, 2012, p. 67), de manera que el cero surge en un tiempo y contexto diferentes a los de los demás números; desligar los números de su representación concreta para ser tratados como entes abstractos favoreció la constitución del cero como número (Ciro, 2011; Nieder, 2016).

Al tratar el cero como número y en virtud de sus propiedades particulares, surgen otros problemas que se encuentran relacionados con su uso, pues este requiere de un cuidado especial, ya que produce, en algunos casos, resultados extraños y complicados de comprender, de manera que muchas veces se prefiere evitar su uso en la aritmética (Joseph, 2008; Webb, 2015). Aun con los problemas que tuvo que pasar el cero para ser aceptado como número, se considera un objeto matemático importante en el estudio de las matemáticas, por lo que se debe realizar una apropiada conceptualización desde la escuela.

Para lograr la conceptualización del cero en la escuela es importante que se cuente con el ambiente propicio, siendo el docente el encargado de dirigir a los estudiantes en la construcción del concepto (D’Amore & Fandiño, 2012). En este aspecto, las creencias y concepciones que posee el docente sobre el número cero repercuten en su enseñanza y se van formando a medida que el docente

interactúa con el número cero, incluso antes de llegar a la práctica como docente; en este punto se asume que el estudiante en formación inicial en matemáticas posee un componente matemático consistente, en el que ha tenido la oportunidad de conceptualizar el cero como número, lo que nos lleva suponer que cuenta con las herramientas cognitivas necesarias para su enseñanza.

Es así como surge la siguiente investigación en el campo de la educación matemática enfocada en el problema presente en las interpretaciones que realiza el estudiante en formación inicial en matemática sobre el número cero para su enseñanza. El proceso investigativo posee dos pilares principales, la historia y epistemología del número cero, y la formación de profesores en matemáticas como campo investigativo.

La investigación se basó en estos dos componentes y se desarrolló desde el paradigma interpretativo en un estudio de caso, fundamentando el análisis en la información obtenida en la aplicación de un cuestionario y dos situaciones didácticas en un curso de Didáctica y Pedagogía, al que asistían diez estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Uno de los aspectos cruciales en la investigación es la comunicación, por lo que fue necesario realizar grabaciones de audio y video de cada una de las sesiones, para establecer algunas representaciones del número cero en las que los estudiantes justificaban verbalmente sus interpretaciones. Para organizar la información se establecieron cuatro categorías de análisis, dos a priori y dos a posteriori, que sirvieron para determinar recurrencias, patrones y relaciones, importantes para el proceso de triangulación de la información.

Finalmente, como producto del análisis realizado, se lograron identificar algunos usos del número cero recurrentes en su interpretación; estas interpretaciones se basan en la relación del contexto

con las creencias y concepciones de los estudiantes en formación y son descritas en las conclusiones.

El presente informe se encuentra dividido en cuatro capítulos. En el primero se abordan los aspectos que dieron lugar a la investigación; en el segundo se consolidan algunos referentes teóricos en los que se basa el estudio; en el tercero se describe el proceso que se llevó a cabo para el cumplimiento de los objetivos; y en el cuarto se articulan la teoría, la información recolectada y su análisis, para finalizar con las conclusiones y aportes a la investigación en educación matemática en la línea de formación de profesores de matemáticas.

Capítulo 1. ¿Cómo se generó el objeto de estudio?

En este apartado se presentan los aspectos que se tuvieron en cuenta en la consolidación del problema por investigar, los cuales implicaron asumir una visión global de educación matemática y contextualizarla en el ámbito local, resaltando en ello el papel de la historia de las matemáticas en la formación de profesores. Lo anterior generó la delimitación de la formulación de la pregunta y los objetivos de la investigación.

Descripción de la problemática

En el campo de la educación matemática, investigadores en Francia y México, en la década de los 80 y 90 principalmente (Brousseau, 1986; Filloy, 1981; Waldegg, 1989), señalaron que el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en contextos educativos debe tener en cuenta, en la medida de lo posible, aspectos epistemológicos e históricos del surgimiento de la disciplina. Bajo este delineamiento y apertura a un campo de investigación, recientemente se considera “como la referencia paradigmática por excelencia para entender la evolución de las ideas y las necesidades de adecuar el pensamiento” (D’Amore, 2007a, p. 16). Desde esta perspectiva, la matemática se interpreta como “[...] una ciencia intensamente dinámica y cambiante [...]” (Guzmán, 1991, p. 10); lo cual permitió asumir su recorrido histórico como herramienta didáctica en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

La creciente participación de la comunidad matemática en investigaciones desde la perspectiva de considerar la historia como herramienta didáctica, se consolida en una nueva propuesta didáctica, a la que Torres, Guacaneme y Arboleda (2014) sugieren llamar “didáctica de la historia de las

matemáticas”. Esta propuesta enfatiza la importancia de enseñar las matemáticas desde su historia, de tal forma que fomente un adecuado ambiente de aprendizaje para conocer y comprender “[...] la evolución dinámica de las ideas que han llevado a los conceptos y técnicas que conforman el contenido de la educación matemática actual” (González, 2004, p. 19). De acuerdo con esto, al considerar las matemáticas como una ciencia dinámica, su enseñanza se puede basar en la revisión de los constructos históricos que dan sentido a los conceptos, de manera que se reconozcan los aspectos que llevaron a la construcción de los objetos matemáticos a lo largo de su extensa historia.

La historia tiene el propósito de dar a conocer el proceso mediante el cual se han construido las matemáticas, un proceso muchas veces hermético, lineal y rígido, que puede ser incluido en la enseñanza de las matemáticas como herramienta pedagógica, aunque no siempre se realice de manera adecuada (Arboleda, 1984). La pertinencia de la historia de las matemáticas en su enseñanza puede considerarse bajo tres criterios (Clark, Kjeldsen, Schorcht, Tzanakis & Wang, 2016): para *reemplazar* la visión de las matemáticas “perfectas”, por la perspectiva de las matemáticas como proceso intelectual del hombre susceptible a los errores; *reorientar* el sentido que se le da a las matemáticas, de algo estático e inmovible en el tiempo, a una actividad humana en constante evolución; y como un proceso *cultural* que tiene lugar en un contexto específico, en un lugar y momento determinados.

Cabe destacar que la enseñanza de las matemáticas es responsabilidad del docente, quien “no es un creador de teoremas ni de teorías, es un profesional, experto en Matemáticas, a quien la sociedad le propone de hacer sí que los jóvenes ciudadanos construyan y aprendan a usar competencias matemáticas” (D’Amore, 2007a, p.8). Esta visión del docente le implica hacer una adecuada transposición didáctica del conocimiento para comunicar la matemática. De esta manera, debe

presentar una matemática en equilibrio con los aspectos pedagógicos y didácticos, contruidos desde su formación.

Dentro de la formación de profesores de matemáticas es fundamental reconocer las matemáticas como una actividad humana que surge de la interacción social en un contexto específico. Así pues, “las matemáticas se encuentran ineludiblemente ligadas a su historia; una historia que da cuenta de su desarrollo conceptual, sobre la base de que tal desarrollo tiene lugar en medio de complejas dinámicas sociales” (Anacona, 2003, p.32). Es conveniente reconocer que esta historia es un factor importante en la formación didáctica de los profesores, lo cual permite tener una concepción más amplia de los objetos matemáticos y de su construcción.

En este sentido, en el contexto nacional también a mediados de los 80, el investigador Luis Carlos Arboleda propuso incluir en el estudio de las ciencias, concretamente de las matemáticas, la historia como disciplina teórica. Arboleda (1984) afirma que “La Historia de las Ciencias tiene un valor pedagógico intrínseco que debe ser puesto al servicio de los proyectos de mejoramiento de la docencia” (p. 176), de manera que se piense la historia como un factor pedagógico y una de las tesis por considerar en la crisis de la enseñanza tradicional de la época.

En el campo de la formación de profesores, investigadores como Torres, Guacaneme y Arboleda (2014), recientemente aluden a “la necesidad de investigar sobre las prácticas de formación en y desde la HM [Historia de las Matemáticas] para favorecer el conocimiento del profesor de Matemáticas para trascenderlas como acción y generar conocimiento desde ellas” (p. 221), lo cual resalta la importancia de reconocer la historia como herramienta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La visión epistemológica de la historia de la matemática ha generado varias perspectivas; una de ellas considera las matemáticas como entes abstractos en un mundo ideal, y otra las considera una construcción del hombre; esta última como posibilitadora de forma más amplia de los contextos de aplicación de las matemáticas, sobre los cuales tiene sentido relacionar sus inicios prehistóricos con la creación del lenguaje o el arte, actividades propias de la interacción cultural y social del hombre. Además, uno de los propósitos iniciales de las matemáticas es suplir la necesidad de resolver problemas prácticos del entorno en el que debe realizar procesos racionales, de manera consciente y con un fin establecido.

Uno de los primeros acontecimientos relacionados con las matemáticas empíricas se encuentra en los problemas que tenía que resolver el hombre neandertal, aproximadamente 40.000 años a. C. se relaciona con el conteo para la supervivencia. Evidencia de esto se encuentra en los huesos de lobos o babuinos, según lo documentado por historiadores, y particularmente por antropólogos y etnólogos, pues gracias a sus trabajos “[...] podemos intentar reconstruir el proceso natural que el hombre primitivo ha podido utilizar para enumerar objetos concretos o para tratar de hacer balance de los elementos contados” (Collette, 1991, p. 5). De manera que tiene sentido hablar del surgimiento de las matemáticas como invención del hombre para suplir una necesidad.

Las primeras nociones de matemáticas empíricas tienen que ver con el conteo, así en el diario vivir del hombre es común hablar de cinco vacas, tres pirámides o un sol. Sin embargo, específicamente en ese conteo encontramos dificultades para asociar al número cero con objetos concretos. Antes del siglo IX d. C. no se consideraba como un número (Stewart, 2016); la idea del cero no es tan inmediata como ocurre con los otros números y su evolución histórica ratifica su complejidad a la hora de concebirlo como número.

Dantzig (citado en Seife, 2006) piensa que “el descubrimiento del cero se puede considerar como uno de los grandes logros de la humanidad” (p.20), pues su uso permite contextualizar situaciones de la vida cotidiana con bastante familiaridad; por ejemplo, hablar de temperaturas bajo cero, ver en el reloj 00:00 horas, tener en una báscula 0 kg, ubicarse en la latitud cero (línea ecuatorial) y otros ejemplos más, son aceptados en el lenguaje común y en ellos el cero no es interpretado como “nada”. Otro ejemplo es su uso en la codificación del lenguaje en programación, que ha permitido el avance de la tecnología, y con ella el acceso a la información de manera rápida, fácil y eficiente, impulsando el avance de las ciencias. De manera que su importancia ha crecido con el paso de los años, aunque esto obedece a las diversas interpretaciones que le han dado a lo largo de su historia y que lo convierten en un objeto matemático complejo de entender.

En el contexto educativo la complejidad en la conceptualización del cero como número, muchas veces se encuentra relacionada con sus características particulares propias de su evolución histórica (D’Amore y Fandiño, 2012), y en otros casos, porque su construcción no se realiza de manera gradual, sino que es presentado como un objeto complejo e inmutable lo que acarrea que el niño a temprana edad se apropie de concepciones erróneas que pueden persistir en el futuro (Jooste, 2012).

Desde mi experiencia como formador de profesores de matemáticas vinculado a un programa de formador de formadores, he podido orientar la asignatura Epistemología e Historia de las Matemáticas y reconocer el valor histórico de las matemáticas ligado al aporte pedagógico y didáctico que surge de su inclusión en el estudio de la geometría, la aritmética y demás partes que conforman las matemáticas. Por tanto, desde esta perspectiva surge la pregunta ¿Cómo interpretan los estudiantes en formación inicial de matemáticas el cero como número y sus posibles situaciones

de enseñanza? De manera que se pueda determinar la postura del estudiante dentro del contexto en el que se encuentra respecto al cero como objeto matemático y sus posibles usos, en lo abstracto y en lo concreto.

Objetivos de la investigación

Objetivo general.

Analizar las interpretaciones de estudiantes en formación inicial de matemáticas sobre el cero como número y en situaciones de enseñanza.

Objetivos específicos.

- Establecer los aspectos históricos y epistemológicos del cero como número.
- Categorizar las interpretaciones de los estudiantes del cero como número.
- Relacionar las posibles interpretaciones del cero como número en situaciones de enseñanza.

Justificación

Llegar a hablar del número cero con propiedad es algo complejo, es considerado por muchos como un número “extraño”, debido a que no es positivo ni negativo y dividir por él es imposible, incluso el origen de su nombre evoca misterio (Waterson, 2017). El cero está relacionado con la nada y filosóficamente “en la mente humana el concepto de ‘nada’ es difícil de asumir” (Crespo, 2003, p.33). En este sentido, el cero se considera un número enigmático, en esencia diferente a los demás, con una historia compleja y epistemológicamente confusa, pero que ha formado parte de las matemáticas de manera especial a tal punto que es imprescindible, no solo en ellas, sino también para el avance de otras ciencias (Seife, 2006).

Naturalmente, en el estudio de las matemáticas es necesario conocer cómo surgen y han evolucionado los objetos matemáticos, de manera que la historia proporciona una visión más humana y menos engreída de su construcción, considerando que en ocasiones es inexacta y con

errores, pero siempre en busca de la perfección, en la cual grandes personalidades de hombres han impulsado su estudio y también su mejoramiento (Guzmán, 1991). Este punto de vista aporta un valor pedagógico en su enseñanza y permite reconocer la importancia de los objetos matemáticos, su evolución y los obstáculos epistemológicos que hacen parte de su construcción.

En la enseñanza de las matemáticas, según Ventura & Rosa (2015) se debe asumir que los profesores en ejercicio y los profesores en formación pueden reconocer el valor pedagógico que se logra al conocer la evolución de cada concepto, la relación con otros, las dificultades y retos en su construcción o descubrimiento, para tomar una postura crítica frente a las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje.

Así mismo, la facilidad que existe en la actualidad para acceder a la información es una herramienta necesaria para llevar la historia a la enseñanza de las matemáticas de manera vivencial, como motor motivante en el estudio de las matemáticas, que enfatiza en los procesos que ha realizado el hombre para llegar a los avances en la ciencia, y no solo basar su estudio en productos finales bien estructurados que son guardados en cajones ordenados y sin relación con el trabajo en el aula de clase (Freudenthal, 1981); así que la historia de los objetos matemáticos debe ser un componente para tener en cuenta en su enseñanza.

En este sentido, D'Amore (2007a) se refiere al alcance que tiene para los futuros maestros en matemáticas, una preparación fuerte en epistemología e historia de las matemáticas con fundamento en dos factores principales, el cultural y el didáctico o profesional. Desde lo cultural, este mismo autor afirma que las construcciones conceptuales del maestro en formación deben ser personalizadas y proyectadas a partir de la epistemología, destacando el esfuerzo y las dificultades vividas en la construcción histórica de los objetos matemáticos; desde lo didáctico, menciona que

se debe forjar una herramienta en articulación con las convicciones del maestro con base en lo epistemológico y didáctico, a fin de que sea útil en el ejercicio de la docencia para lograr entender la evolución de las situaciones en el aula.

De hecho, en el rol de formador de formadores, se pretende guiar al estudiante por los diferentes referentes históricos y sociales que han contribuido al avance de las matemáticas, de manera que le permita reconocer el papel del hombre en la construcción de los objetos matemáticos, pensar las matemáticas de manera diferente y así tomar una posición personal como futuro docente en matemáticas, que lo caracterice y lo diferencie de los demás.

Partiendo de las contribuciones que pueda realizar desde su formación en el estudio histórico del cero y teniendo en cuenta sus experiencias y perspectivas, se espera que el futuro profesor logre un conocimiento más amplio sobre la evolución del cero, especialmente en su construcción como número, la cual no se logró dentro de una matemática estática y atemporal, sino que fueron necesarios muchos años, e incluso siglos, de estudio.

En síntesis, se pretende destacar la importancia de la historia en la formación de formadores, reconocer la historia como factor fundamental en la construcción de los objetos matemáticos, y destacar los aciertos y desaciertos históricos como contribución de las interacciones sociales y culturales del hombre, todo dirigido al estudio del cero como número, la influencia del contexto y las interpretaciones que logran los estudiantes desde su experiencia.

Capítulo 2. Sobre la teoría, los conceptos y los referentes

Algunos estudios precedentes

Existen diversos estudios desde perspectivas diferentes sobre el reconocimiento del cero como número, de su evolución histórica y epistemológica, así como de la necesidad de ser incorporado como contenido escolar en la enseñanza de las matemáticas. Según D'Amore y Fandiño (2012), la complejidad en algunos casos no radica en el objeto cognitivo en sí, sino en la posibilidad que existe de apropiarse de dicho objeto para ser usado en nuevos contextos. Bajo esta premisa, el estudio del cero se constituye en una fuente importante de conocimiento para investigaciones dirigidas a analizar su uso en contextos culturales, en estudiantes de cualquier nivel educativo; por tal motivo, se hace necesario en este apartado analizar las contribuciones de investigadores de los ámbitos nacional e internacional, que han focalizado su interés investigativo en esa dirección.

Uno de los estudios más recientes en el ambiente internacional lo realizó Novoszel (2016) donde pretende explicar los aspectos que definen el cero. Con ese propósito divide la investigación en dos partes, en la primera describe algunos aspectos históricos y epistemológicos de su evolución, y en la segunda parte se dedica a verificar la importancia del cero en el contexto escolar, partiendo de las nociones en primaria, secundaria y su relación con otras áreas del conocimiento, basado en un estudio documental bajo el paradigma interpretativo.

Como resultado destaca que la consolidación histórica del cero ha sido compleja, desde sus inicios en Babilonia hasta los pueblos del Nuevo Mundo, en la que fue necesario el intercambio cultural para darle una interpretación y uso adecuados. Sobre el cero en el contexto escolar menciona que

la mayoría de los textos escolares usados en la escuela primaria se enfocan en realizar representaciones gráficas y algunas propiedades elementales del cero lo que contribuye a tener una comprensión básica, sin detenerse en el estudio de su complejidad como número; en el nivel secundario, el estudio se basa en la discusión de las operaciones básicas con el cero. Entre las conclusiones de la investigación sugiere que en el aula se debe prestar mayor atención a los errores relacionados con operar con el cero, a fin de dotar al estudiante de herramientas que le permitan ampliar la visión que tiene sobre este número.

El trabajo de Jooste (2012) en Grahamstown (Sudáfrica), bajo el paradigma interpretativo y el enfoque cualitativo, se basó en la teoría del constructivismo, que pretendía observar las interacciones, las respuestas orales y escritas de estudiantes de tercero a sexto grado y maestros, con el fin de comprender las concepciones que tenían sobre la multiplicación y división por cero.

La metodología usada se basó en el estudio de caso y la recolección de información se realizó con la observación participante, diseño y aplicación de cuestionarios de preguntas abiertas y entrevistas. Para el análisis de la información se tuvo en cuenta los procesos de asimilación, acomodación, equilibrio y mediación de las actividades con el fin de comprender las creencias y experiencias personales de los participantes de la investigación y poder identificar misconcepciones y errores de los estudiantes y maestros.

En los resultados logrados cabe destacar que la construcción del significado del cero como número se debería desarrollar gradual y progresivamente a través de experiencias de aprendizaje significativas apropiadas para los niveles de comprensión de los estudiantes, ya que las concepciones erróneas del cero en los niños pueden persistir en el futuro y ser perjudiciales para

el desarrollo de conceptos numéricos, propiedades, relaciones, razonamiento y pensamiento algebraico futuro.

El análisis del concepto de cero, según Jooste (2012), no es específico en los planes de estudios de matemáticas, ni en la mayoría de los libros de texto en Sudáfrica. Adicionalmente, afirma que los programas de desarrollo y educación de docentes no tienen en cuenta la comprensión del concepto, los usos como número y su historia, de manera que se evidencia la falta de conocimiento del cero por parte de un buen número de docentes lo que repercute en su enseñanza, pues muchas veces se realiza desde la transmisión de reglas que los profesores no pudieron conceptualizar.

Otro aporte que se tuvo en cuenta es el estudio de maestría realizado por Padrão (2008) en São Paulo (Brasil), el cual fue una investigación bibliográfica basada en el análisis documental sobre las principales contribuciones teóricas existentes en la historia del cero, con el fin de conocer las dificultades que surgieron en las diferentes civilizaciones antiguas para que el cero fuera considerado un objeto de las matemáticas. El problema investigado se sintetizó en la pregunta ¿Cuáles fueron las dificultades encontradas por las civilizaciones, a lo largo de la historia, hasta instituir el cero como un elemento integrante de las matemáticas?

Del estudio se logró identificar que las civilizaciones babilónica, maya y china presentaron dificultades para representar el vacío a pesar de crear un símbolo para el cero como dígito. Sobre la civilización hindú, menciona que por siglos perfeccionaron la idea del cero, lo que los llevo a convertirse en los pioneros en la concepción del cero como número formando parte de su sistema numérico que, gracias a la difusión y perfeccionamiento de los árabes, se convirtió en el sistema de numeración indoarábigo que es usado de manera universal en la actualidad. De otra parte afirma

que la asociación que se realiza en la actualidad del cero con la nada a menudo genera una mala interpretación al operarlo como número y sugiere trabajar el tema en el contexto educativo con los estudiantes, de manera que se prolifere la historia del cero y se logre así una mejor comprensión de este.

Una de las principales contribuciones la realizó D'Amore (2007b) orientada a determinar el origen de las dificultades del aprendizaje del cero en estudiantes de edad temprana y establecer las posibles causas de los obstáculos epistemológicos y didácticos relacionados con su estudio, problematizados en las preguntas: ¿El cero es en realidad un concepto no espontáneo para los niños en edad preescolar? y ¿es verdad que la dificultad de su construcción conceptual radica en el evidente hecho de que se trata de un obstáculo epistemológico? La investigación se llevó a cabo en varias ciudades italianas y se enfocó en el análisis de entrevistas individuales y grupales con niños de tres a seis años con el fin de comprobar los conocimientos que tenían los niños del tema y la manera en que interactuaban al hablar espontáneamente sobre el cero.

Entre los resultados D'Amore (2007b) destaca que la mayoría de los niños a edad temprana reconocen y representan correctamente el cero y lo asocian con la nada; además que el cero, en esencia, se puede considerar un obstáculo epistemológico, aunque se encuentre presente de manera ingenua en niños muy pequeños; de otro lado, reconoce que las imágenes mentales que el niño crea desde su ingenuidad sobre el cero son necesarias para que las imágenes posteriores se organicen y conviertan en modelos estables y correctos en el momento oportuno.

En la investigación realizada por Cataño (2007) se analizó las ideas de estudiantes de primer semestre de ingeniería sobre el cero, con el fin de conocer las interpretaciones que hacían en el

aula y en casos particulares en los que se trabaja con este número. El estudio se efectuó dentro del marco referencial denominado construcción social del conocimiento, en el que se tuvo en cuenta una revisión histórica del cero, su registro en libros de texto y su uso en el aula; para la recolección de información se diseñó y aplicó un cuestionario aplicado a estudiantes de Ingeniería de dos universidades de México, y para complementar la información recolectada por el cuestionario se hicieron varias entrevistas.

De las respuestas de los estudiantes y su análisis, Cataño (2007) concluyó que hay diversos manejos de los significados del cero en el ámbito escolar a nivel universitario. Además, uno de los problemas que se evidenciaron fue que el estudiante en procesos algorítmicos, al encontrarse con un dato cuyo valor es cero, le confiere mayor importancia respecto a los demás y en ocasiones no sabe cómo operarlo. En cuanto al uso didáctico del manejo de los libros y la historia, enfatiza en la necesidad de introducir gradualmente el concepto del cero desde etapas tempranas, para lograr construir una idea más amplia del número.

En el ámbito nacional se destaca la investigación de Rodríguez (2016) en la Universidad del Valle; esta investigación de corte documental busca “presentar una génesis histórica epistemológica del número cero en los sistemas de numeración: mediterráneo, oriental y americano” (Rodríguez, 2016, p. 17), partiendo de una fundamentación teórica para identificar los aspectos epistemológicos en la construcción histórica del concepto del número cero.

Entre los resultados logrados en la investigación, Rodríguez destaca que una de las causas por las que fue demorada la constitución del cero como número, se debe a su concepción inicial relacionada con la nada, surgida de la idea filosófica griega del ser y no ser; adicionalmente, concluye que los obstáculos epistemológicos relacionados con cero son posiblemente producidos

por la negación de su existencia en sus inicios históricos, la falta de representación en algunas civilizaciones y las dificultades para reconocerlo como número.

Finalmente, Cock y Rodríguez (2013) realizaron una investigación con el objetivo de identificar y categorizar las concepciones de 114 estudiantes de primaria y 25 de secundaria, sobre los usos y significados que le atribuyen al cero como cardinal y número posicional. Para lograr el objetivo, en el marco de la investigación mixta, los autores se basaron en una metodología que asumen como propia, en las que establecen algunas categorías para el análisis fundamentadas en el marco teórico, sin nada novedoso o particular. El análisis lo dividen en dos momentos: en el primero, recolectaron la información, para lo cual elaboraron tres situaciones o guías; y en el segundo, a partir de las respuestas dadas por los estudiantes, hicieron algunas entrevistas.

En los resultados Cock y Rodríguez (2013) afirman que es necesario que el estudiante desligue el cero de las representaciones visuales de los conjuntos y de algunas afirmaciones del vocablo común, para lograr superar los obstáculos relacionados con el cero cardinal. Además mencionan que las concepciones que tienen los estudiantes sobre el cero como cardinal, logradas por el niño de manera completa en la escuela primaria, influyen considerablemente sobre las concepciones del cero posicional. Por otro lado, manifiestan que algunos estudiantes expresan dificultades en identificar las diferencias del cero cuando ocupa diferentes posiciones, todo esto relacionado con la concepción que tienen del cero como nada o ninguno.

En resumen, los problemas relativos al cero son un tema importante de investigación, que en los últimos años se ha enfocado en analizar su historia, verificar las dificultades en su aprendizaje y determinar las concepciones necesarias para su enseñanza. La consolidación histórica y epistemológica del cero es compleja (Novoszel, 2016), posiblemente producto de su relación con

la nada y sus concepciones filosóficas (Padrão, 2008; Rodríguez, 2016), que en gran medida permean el campo educativo, pues en ocasiones no es específico en los planes de estudio (Novoszel, 2016) y el estudiante se enfrenta a un objeto matemático complejo de comprender.

Para garantizar un adecuado aprendizaje sobre el cero es necesario partir de reconocer las representaciones que el estudiante realiza a edad temprana (D'Amore, 2007b), con el fin de introducir el concepto del cero de manera gradual en cada uno de los niveles educativos (Cataño, 2007; Jooste, 2012). En ocasiones, los docentes se dedican a transmitir reglas no conceptualizadas sobre sus propiedades como número (Jooste, 2012), y muchas de estas son memorizadas con el fin de justificar algunas particularidades de las operaciones en las que aparece el cero. Según Ponte (1994) en los últimos años, en el docente recae la mayor parte de la responsabilidad y el éxito de las reformas actuales en educación matemática, lo que ofrece un foco importante para investigar, desde los problemas relacionados con su labor docente o discente.

Formación de profesores como campo investigativo

En los últimos tres siglos, las problemáticas en educación relacionadas con el docente han generado un campo cada vez más creciente en investigación, enfocado, entre otras cosas, a describir y comprender el pensamiento del profesor como factor importante en su desarrollo profesional (Perafán & Adúriz, 2002). En educación matemática, la mayoría de estos estudios se centran en una postura epistemológica de las matemáticas basadas en el constructivismo (Flores, 1998), tendencia bajo la cual se estudia el aprendizaje del profesor en dos sentidos, como resultado de interacciones sociales en contextos específicos y como un proceso individual y personal (Riscanevo & Jiménez, 2017).

El aprendizaje producto de la interacción social puede ser estudiado desde el referente teórico del constructivismo social de Vigotsky, que lo considera como el desarrollo cognitivo del individuo producto de procesos sociales ligados al contexto sociocultural en el que se lleva a cabo (Marcelo, 2002; Riscanevo, 2017). Para comprender las funciones cognitivas relacionadas al aprendizaje, es necesario observar al sujeto en interacción con su contexto y la manera en que se va apropiando de estas interacciones para internalizarlas (Riscanevo, 2017).

Estas interacciones son promovidas principalmente por el lenguaje tomado como una práctica social, medio necesario entre el individuo y la cultura para construir, comunicar ideas y formar conceptos (Vigotsky, 1962; Marcelo, 2002). En el contexto educativo es posible considerar la comunicación como un proceso de interacción social que permite al estudiante construir nuevos significados, analizando e intercambiando información producto de la intervención de sus compañeros (Jiménez, Suárez & Galindo, 2010).

Particularmente en clase de matemáticas, se espera que el estudiante logre dotar de significado las ideas matemáticas que se promueven gracias a la comunicación con el docente y sus compañeros; en consecuencia, es importante que el docente genere el ambiente necesario para que los estudiantes expresen libremente sus ideas e interactúen entre ellos y así, promover la discusión y reflexión sobre la intervención del otro, con el fin de llegar a consensos que les permita reflexionar, argumentar y proponer sus ideas en la construcción de un nuevo saber (Jiménez & Pineda, 2013).

El aprendizaje como proceso individual es posible problematizarlo desde las estructuras cognitivas que hacen parte del paradigma del pensamiento del profesor, en el cual es posible analizar los procesos de formación de conceptos como representaciones mentales emergentes (Flores, 1998;

Sotos, 2004). Existen dos vertientes desde las cuales se pueden estudiar los conceptos; por una parte está la teoría realista y por la otra, la pragmática. D'Amore (2001) menciona que la primera se basa en la objetividad de las ideas platónicas de las matemáticas, de manera que los conceptos son descubiertos para lograr un conocimiento absoluto, en el que los signos lingüísticos son independientes de las ideas, y que la segunda parte se fundamenta en la subjetividad de los objetos, de forma que las expresiones lingüísticas y las palabras poseen significados personales que dependen de sus usos y del contexto.

El concepto (espontáneo o científico) se toma como un proceso dinámico que dota de significado a un objeto, ya sea concreto o abstracto (D'Amore, 2006a; Sotos, 2004); al respecto, Gardner (1993) menciona que “los conceptos espontáneos (como hermano o animal) se toman de la vida cotidiana, mientras los conceptos científicos (como gravedad o mamífero) se aprenden sobre todo en un ambiente escolar” (citado en D'Amore, 2006a, p. 216). Esta clasificación es adecuada para el estudio de ciertos conceptos en el contexto educativo de las matemáticas, como es el caso del número cero, ya que sus interpretaciones muchas veces dependen de los conceptos espontáneos que tiene el estudiante.

Adicionalmente, en la construcción de conceptos es importante tener en cuenta la propuesta de Vinner (1983), quien distingue entre la definición del concepto, que puede ser formal (cuando proviene de sistemas ya establecidos, como la matemática) o informal (cuando proviene de la experiencia), y la imagen del concepto (representaciones). Sotos (2004) afirma que “cuando una persona se enfrenta al nombre de un concepto, lo que se estimula en la memoria no suele ser la definición del concepto, sino un conjunto de representaciones que es lo que denomina imagen del concepto” (p. 95).

En cuanto a las imágenes del concepto, se tendrán en cuenta desde la perspectiva de las creencias y concepciones, que D'Amore y Fandiño (2004) definen como:

Convicción (belief) (o creencia): opinión, conjunto de juicios/expectativas, aquello que se piensa a propósito de algo; el conjunto de las convicciones de alguien (A) sobre un determinado aspecto (T) forma la concepción (K) de A relativa a T; si A pertenece a un grupo social (S) y comparte con los demás miembros de S el mismo conjunto de convicciones relativas a T, entonces K es la concepción de S relativa a T. (p. 26)

Las imágenes del cero como número que poseen los estudiantes en formación inicial, se tomarán desde esta perspectiva, como las concepciones de los estudiantes en formación inicial relativas al número cero; se pretende encontrar las creencias relativas al cero del grupo de participantes y su relación con los contextos de enseñanza, ya que tienden a determinar las respuestas de los estudiantes que, en ocasiones, no son compatibles con las definiciones formales en matemáticas (Leder, Pehkonen & Torner, 2002).

Existe una vertiente en la investigación didáctica que propone llevar a cabo los estudios relativos a la cognición, desde factores que tengan en cuenta los diferentes contextos y el entramado institucional que la condicionan, de modo que la comprensión y significado que se le pueden atribuir a las concepciones y creencias de los estudiantes, sean vistos a partir de las relaciones institucionales y no solo como constructos cognitivos individuales (Flores, 1998). Es habitual que en matemáticas se hable de objetos matemáticos para referirse a los conceptos matemáticos (D'Amore & Fandiño, 2012), para referirnos a los aspectos cognitivos relacionados con el cero, se adoptarán las nociones de *significados del objeto* y *objeto* desde las dimensiones personales e institucionales (Flores, 1998; D'Amore, 2006).

Los significados del objeto (personales e institucionales) se toman como emergentes de procesos pragmáticos basados en la subjetividad desde la cual se logra un acercamiento parcial al objeto, ligado al tiempo y al contexto en el que se desarrollan (D'Amore, 2001); y del objeto, como “todo lo que es indicado, señalado nombrado cuando se construye, se comunica o se aprende matemáticas” (Godino, 2002, citado en D'Amore, 2006b, p. 182).

Desde esta perspectiva y con el fin de establecer las interpretaciones que le atribuyen al cero en situaciones de enseñanza, se tendrán en cuenta las imágenes que tienen los estudiantes sobre el número cero, relativas a sus creencias como docentes en formación inicial, para identificar los posibles significados que se movilizan en el desarrollo de las situaciones didácticas planteadas.

Además de la formación de profesores como eje articulador de la investigación, se establece en la historia y epistemología del cero como número, una de las bases teóricas fundamentales de la investigación; de modo que se presentan a continuación algunas nociones históricas y epistemológicas del número cero, tomando como punto de partida las primeras concepciones de número en la vida del hombre.

Los números y el hombre

La matemática ha estado presente en la vida del hombre desde tiempos inmemoriales; aunque no es posible determinar su origen con claridad, los primeros registros que se conocen datan del 35.000 al 20 000 a.C. y están relacionados con problemas primitivos de conteo (Burton, 2011; Gutiérrez, 2009). Para comprender su inicio, arqueólogos, paleontólogos e historiadores han tenido

que reconstruir los sucesos de nuestro pasado prehistórico basándose en fragmentos de piedras y huesos conservados en las entrañas de la tierra (Mankiewicz, 2000; Seife, 2006).

Uno de los registros más antiguos hasta ahora descubiertos se trata del hueso de un babuino con 29 muescas, que data del 35.000 a. C. y fue encontrado en África; aproximadamente de la misma fecha, en la República Checa se encontró el hueso de un lobo con 55 muescas, divididos en dos grupos, uno de 30 y el otro de 25 (Barrow, 2012; Ifrah, 1987). Le sigue el hueso de Ishango (ver Figura 1), registro de gran importancia en la historia de las matemáticas que fue encontrado en la ribera del lago Edward en África Central y data, aproximadamente, del 20.000 a. C.

Se sugiere que estos registros están relacionados con el *conteo* de una colección de la misma cantidad de objetos, posiblemente de los animales que cazaban o para *medir* el paso del tiempo, lo que coincidiría con las fases lunares o el calendario menstrual de la mujer (Mankiewicz, 2000; González, Martín & Silván, 2010; Burton, 2011). De esta manera se perciben las primeras nociones que tenía el hombre primitivo sobre los números, relacionadas con algunos de sus usos: contar y medir (Gómez, 1993).

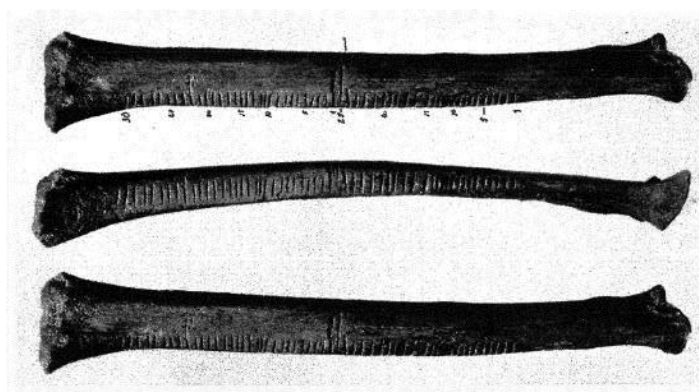


Figura 1. Hueso de Ishango.

Fuente: Burton (2011)

El uso de marcas para el conteo fue evolucionando a medida que el hombre fue adoptando la agricultura como su principal actividad para alimentarse, de manera que registrar el paso del tiempo, llevar un control de los alimentos y posiblemente realizar trueques, eran algunas actividades que requerían métodos más efectivos para registrarlos (Burton, 2011); aproximadamente en el 8.000 a. C., según Dantzig (1971) e Ifrah (1987), surgen las cuentas o fichas para contar, pequeños objetos en arcilla de diferentes tamaños y formas (las más usadas eran los círculos, triángulos y conos) que eran usados para el recuento o para numerar que fueron evolucionando y gracias a la aparición de la escritura, el uso de estas fichas fue rápidamente remplazado por el uso de símbolos para el registro numérico, lo que promovió el surgimiento de los primeros sistemas numéricos desarrollados por los egipcios y babilonios alrededor del 3500 a. C. Estas dos civilizaciones lograron un único desarrollo cultural, un sistema numérico usado para contar, numerar, medir y operar (Barrow, 2012, Gómez, 1993).

Perspectivas históricas y epistemológicas del número cero

El número cero es considerado por muchos como la gema más preciada de las matemáticas o, en palabras de Aczel (2016), “el mayor logro intelectual de la mente humana” (p. 201). Su origen es todo un enigma y da lugar a una historia llena de secretos y muchas preguntas, que han llamado la atención de matemáticos, historiadores, arqueólogos, docentes investigadores, entre otros. Para lograr comprender el papel del cero en las matemáticas, es necesario contextualizarlo en el surgimiento de esta disciplina a través de los avances investigativos en los que es posible considerar particulares convergencias.

comentan que alrededor de 1770 a. C., en el Imperio Medio de esta civilización y que corresponde a la dinastía XIII, surge el cero por primera vez en la vida del hombre, interpretado de dos modos diferentes: como *valor de referencia* era usado en los planos de las construcciones para referirse al nivel de la base; y para *denotar equilibrio* en los estados de cuentas mensuales. Su símbolo fue el jeroglífico *nfr* (ver Figura 3) y se encontró en el papiro Boulaq 18.



Figura 3. El papiro Boulaq: una síntesis actualizada.

Fuente: tomado y adaptado de Jaramago (2008).

La civilización babilónica, a mediados del 3000 a. C., desarrolló un sistema numérico posicional en base 60 que, a diferencia de los egipcios, favoreció el registro de grandes cantidades con un número menor de símbolos y así podían llevar un mejor control de sus bienes o de los intercambios comerciales (Ifrah, 1987; Sen & Agarwal, 2015). Gracias al uso de estiletes y arcilla para escribir, hoy en día se conservan muchos registros de sus avances (Collette, 1991), lo que permite realizar un estudio más cuidadoso del surgimiento del cero como marcador de posición.

Kaplan (2004) menciona que a mediados del 2000 a. C. los babilonios usaban dos símbolos para escribir números, ▼ para el uno, y < para el diez; por ejemplo, para representar el 13, usaban

<▼▼▼ , para el 59 <<<<▼▼▼▼ para representar el 60, como coincide con la base del sistema,
▼▼▼▼ ▼ ▼▼▼▼

usaban el mismo símbolo del uno; así, en el caso del número 63, en ocasiones lo escribían en el que aumentaban el tamaño del uno que representaba 60 para diferenciarlo de los demás símbolos; en ocasiones, dependiendo del escriba, dejaban un espacio para separándolo de los demás,

Esto, muchas veces, generaba ambigüedades y para poder interpretar la cantidad que se representaba era necesario tener en cuenta el contexto en el que se escribían los datos (Kaplan 2004; Seife, 2006). El problema se complicaba aún más cuando era necesario dejar una casilla vacía, como es el caso de la representación de 3610 (ver Figura 4), pues se usaban los mismos símbolos que para escribir 610.

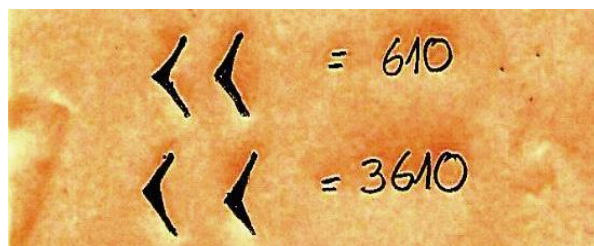


Figura 4. Representación numérica babilónica.

Fuente: elaboración propia.

Para evitar los problemas de ambigüedades de interpretación surge la necesidad de un marcador que permita reconocer cuando hay una casilla vacía, como lo afirma Burton (2011): “solo en un sistema posicional se debe especificar la existencia de un espacio vacío, problema que no tuvieron los egipcios” (p. 25). En consecuencia, en el año 300 a. C., los babilonios usaban dos cuñas inclinadas para representar una posición en blanco o vacía, lo que permitía observar con claridad la posición que tenían los símbolos al ocupar una cifra determinada de un número (Seife, 2006).

Siguiendo con el ejemplo de la representación de 3610, se observa en la Figura 5 el uso del nuevo marcador de posición; al respecto, Ifrah (1987) afirma: “el doble clavo oblicuo de los sabios mesopotámicos fue comprendido en el sentido de vacío” (p. 231), es así como surge una de las interpretaciones que se le da al cero, *marcador de posición de una casilla vacía*, aunque no se consideró como número (Stewart, 2016).

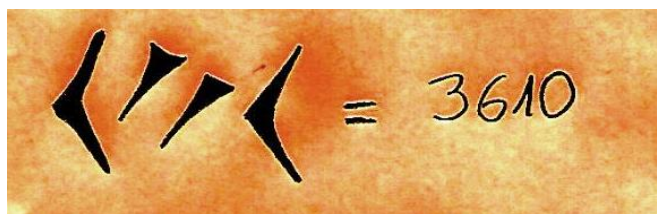


Figura 5. Representación simbólica en el sistema babilónico del número 3600.

Fuente: elaboración propia.

Sobre las matemáticas desarrolladas en Egipto y Mesopotamia cabe destacar la evolución que lograron del pensamiento matemático y la comprensión de los sistemas numéricos, ya que dieron el importante paso de lo concreto a lo abstracto al comprender que tres manzanas, tres vacas y tres espigas representaban la misma cantidad (Aczel, 2016). Así, la concepción de número se dota de un sentido abstracto, muy importante para comprender el cero como número.

Otra de las civilizaciones del viejo Oriente que se destacó por sus avances en matemáticas y, en especial, sobre sistemas numéricos, es China. En la dinastía de los Han (200 a. C.), independientemente del trabajo realizado en Mesopotamia, se desarrolló un sistema numérico posicional en base 10 en el que se usaban barras verticales y horizontales (Ifrah, 1987). Este fue el primer sistema numérico decimal en considerar nueve símbolos, en el que según Gómez (2009) y Katz (2009) se rotaban las barras para diferenciar las cifras contiguas.

De modo que las varillas ubicadas verticalmente (ver Figura 6a) eran usadas para las unidades, centenas, decenas de mil... y al ubicarlas horizontalmente (ver Figura 6b) representaban las decenas, unidades de mil, centenas de mil; a diferencia de la civilización babilónica, este método les permitía diferenciar cuando existía una casilla vacía sin la necesidad de dejar un espacio o adicionar otro símbolo (ver Figura 6c).

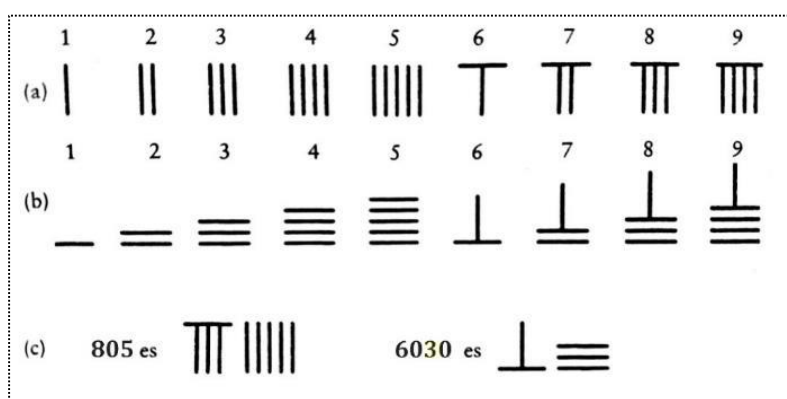


Figura 6. Numeración china de varillas.

Fuente: tomada y adaptada de Barrow (2012).

El método era efectivo cuando se trataba de una sola casilla vacía, pero fallaba cuando se necesitaba representar más de una casilla vacía en el mismo número (ver Figura 7a). En este caso, el contexto jugaba un papel fundamental para interpretar adecuadamente la representación numérica; adicionalmente, Gutiérrez (2009), Ifrah (1987) y Nieder (2016) afirman que el sistema numérico de varillas era comúnmente usado por los calculistas de la época, quienes recurrían a las baldosas del piso como cuadrícula para ubicar las varillas (ver Figura 7b), método que les permitía percibir fácilmente las casillas vacías.

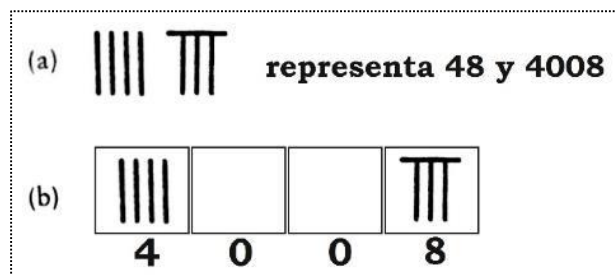


Figura 7. Espacio en blanco como representación de varios ceros.

Fuente: adaptado de Lam (1988).

El cero es interpretado por la civilización china como la *ausencia de elementos*. Es de destacar que los chinos comprendieron el uso del cero, aunque no desarrollaron un símbolo para representarlo; Según Gómez (2009) e Ifrah (1987) no fue sino hasta mediados del siglo VIII d. C. cuando arribó el cero hindú gracias a los intercambios comerciales con India y por influencia de astrónomos y matemáticos.

Otra de las primeras civilizaciones del mundo antiguo que creó un sistema numérico con la presencia del cero fue la civilización maya en la región Mesoamérica en el periodo Preclásico Tardío (400 a. C.–200 d. C.); se considera como un gran logro intelectual y uno de los más antiguos ejemplos del cero en el mundo (Sharer, 2003). El sistema numérico que desarrollaron los mayas era posicional en base 20 y lo escribían de manera vertical usando la combinación de tres símbolos: un punto (•) para el uno, la barra (—) para el cinco y una concha () para el cero (Fedriani & Tenorio, 2004). Así, por ejemplo, para escribir el número 120 (Figura 8), los mayas ubicaban un punto sobre una barra en el segundo nivel y una concha en el primer nivel.

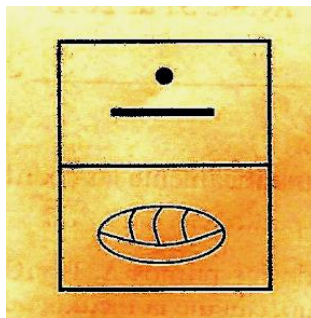


Figura 8. Representación numérica maya para el 120.

Fuente: elaboración propia.

Además de la concha de caracol, que hacía alusión al ciclo del molusco que llegaba a su fin, los mayas emplearon otros símbolos para representar el cero (ver Figura 9), entre los que se destacan: la semilla de maíz, que simbolizaba el inicio y el fin del ciclo que cumple la semilla antes de llegar a la tierra y pasar al siguiente nivel; y la flor, que simboliza el paso de la categoría espiritual a lo material. Todos evocan completitud y expresan que para seguir al próximo nivel es necesario estar en paz o en plenitud (Duque, 2013).

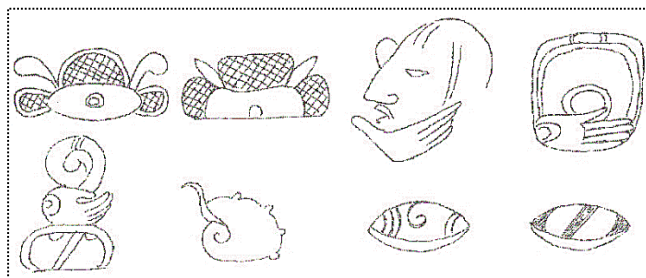


Figura 9. Algunos símbolos mayas para el cero.

Fuente: Kaplan (2004).

Los Mayas interpretaron el cero como *plenitud o estado completo* y aunque no era considerado como número, se dotó de un sentido especial que permitía al sistema numérico ser operativo (Duque, 2013).

Continuando con las civilizaciones en América, cabe resaltar las concepciones numéricas desarrolladas por los incas en Perú, que a falta de un método escrito para registrar cantidades, emplearon cuerdas de varios colores y diferentes nudos para llevar sus registros contables (ver Figura 10); Para Burton (2011), Fedriani & Tenorio (2004), y Schmidt & Dos Santos (2016) el *quipu*, como se conoce, era un método muy efectivo en el que no era necesario emplear símbolos elaborados para el registro de cantidades y era usado exclusivamente por un oficial de nudos, llamado *quipu-camayoc*, quien era el encargado de registrar y conservar cualquier información contable (Burton, 2011).

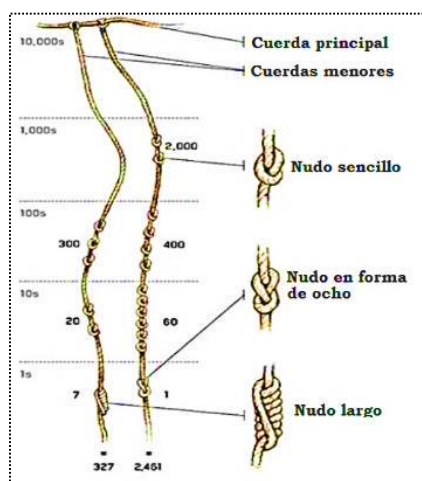


Figura 10. Representación simbólica inca.

Fuente: tomada y adaptada de Pilgaonkar (2014).

Sus representaciones estaban basadas en un sistema numérico decimal, en el que usaban tres tipos de nudos: un nudo sencillo, uno en forma de ocho y otro formado por varias vueltas (según la cantidad que simbolizaba). Cada uno representaba una cantidad específica dependiendo de su ubicación; adicionalmente, Armengol (2010) afirma que “también había un símbolo para el cero: una cuerda sin nudos” (p. 177), de modo que era posible identificar cuando había una posición

vacía (ver Figura 11), logrando representar la ausencia de unidades (Schmidt & Dos Santos, 2016). Los incas, aunque no lograron desarrollar un lenguaje escrito para su sistema numérico, comprendieron la interpretación del cero como *casilla vacía* o *ausencia de unidades*.

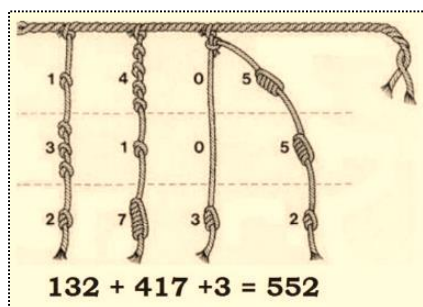


Figura 11. Representación simbólica inca de una posición vacía.

Fuente: tomada y adaptada de Pilgaonkar (2014).

Es de resaltar que ninguna civilización antigua llegó a concebir el cero como número, sin embargo, todas lograron desarrollar un símbolo para representar la ausencia de objetos, designar un valor de referencia o para denotar plenitud, algunas de las interpretaciones que se le atribuyen al cero como número.

El cero como número.

El cero es considerado una de las grandes conquistas del intelecto humano, rodeado de misticismo, tropiezos y magnificencias (Seife, 2006). Para Stewart (2016), “antes del siglo IX d. C., el cero era visto como un símbolo práctico para los cálculos numéricos, pero no se le consideraba un número como tal; probablemente, porque no contaba nada” (p. 146). Se observa entonces que el cero, para ser considerado como un número, ha tenido que atravesar un camino largo de interpretaciones y atribución de significados. Ciro (2011) afirma que “pasó mucho tiempo, siglos y milenios para que nos diéramos cuenta de que los números se definen por sus propiedades, de ahí que el símbolo de

un espacio vacío pasara a ser un número” (p. 31); según Berlinghoff & Gouvêa (2010) y Nieder (2016) para considerar el cero como número es necesario desligarlo de la experiencia empírica y llevarlo al plano abstracto, con el fin de brindar las condiciones necesarias para definirlo como un objeto matemático.

El origen del cero ha pasado de especulaciones a importantes investigaciones; es así como Waerden (1988), refiriéndose a la teoría de Freudenthal sobre el origen del número cero, menciona que fue desarrollado por los hindúes gracias a la influencia de los astrónomos griegos y el sistema sexagesimal de los babilónicos (en el periodo comprendido entre 200 d. C. y 600 d. C.), aspecto que se evidencia en *Sûrya Siddhânta*, tratado hindú sobre astronomía en el que abundan términos griegos.

Por otra parte, en Diller (1996), Cœdès (1931) y Divakaran (2018) se reconoce a George Cœdès como el historiador y arqueólogo francés que concluyó a partir de sus investigaciones que el origen del cero y su valor posicional están relacionados con inscripciones en sánscrito (ver Figura 12) provenientes de Camboya en el sur de la península de Indochina, las cuales relatan el inicio de la era Çaka en el año 605.

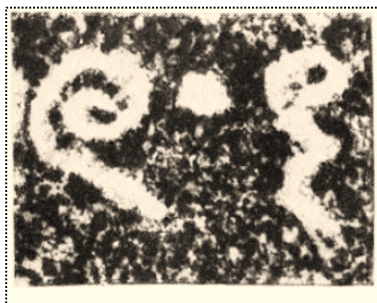


Figura 12. Inscription Khmère de Sambór

Fuente: Cœdès (1931, p. 326).

Según Aczel (2016) por muchos años el descubrimiento realizado por Cœdès y conocido como “inscripción K-127” era considerado el primer registro escrito del cero como número. Sin embargo, las investigaciones realizadas por la Biblioteca Bodleianas de la Universidad de Oxford sobre la datación del manuscrito Bakhshali proveniente de India, en que se registran varios ceros, lo ubican entre el 224 y 383 d. C. (Bodleian Libraries, University of Oxford, 2017). Este importante documento está compuesto por 70 hojas de corteza de abedul y en sus páginas se encuentran registrados varios puntos, símbolo usado en la época para el cero; un ejemplar de su aparición se observa en la Figura 13, correspondiente al folio 16.

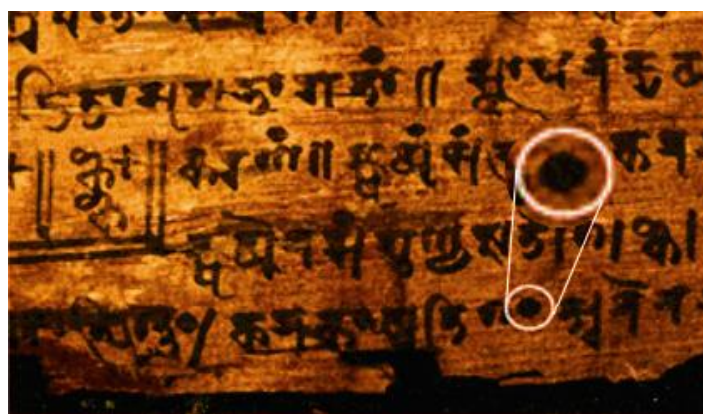


Figura 13. MS Sansk. d.14 fol. 16v por Bodleian Libraries.

Fuente: tomada y adaptada de University of Oxford (2017).

A mediados del siglo VI d. C, según Castillo (2011) y Gómez (1993) la genialidad de los hindúes y su pasión por los números los llevó a conformar el sistema numérico karosthi, un sistema numérico posicional en base 10; este sistema fue evolucionando gradualmente hasta la numeración Brahmi (ver Figura 14a), la cual estaba conformada por diferentes símbolos del 1 al 10 y potencias superiores, sin contar en ese momento con la presencia del cero (Gutiérrez, 2009; Mankiewicz, 2000); alrededor del 876 d. C., estos numerales fueron evolucionando hasta conformar el sistema

Gwalior¹ (ver Figura 14b), con diez símbolos en los que se incluía un óvalo que representaba el número cero, muy similar al usado actualmente (Castillo, 2011; Webb, 2015).

(a)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	—	=	≡	𑆳	𑆴	𑆵	𑆶	𑆷	𑆸	𑆹
(b)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
	𑆺	𑆻	𑆼	𑆽	𑆾	𑆿	𑇀	𑇁	𑇂	𑇃

Figura 14. Sistemas de numeración hindú.

Fuente: tomado y adaptado de Castillo (2011, p. 29).

De acuerdo con Ifrah (1987) el sistema numérico hindú se destacó de los demás sistemas por dos grandes aspectos: uno de ellos, es que estaba conformado por símbolos diferentes entre sí que no evocaban la cantidad que representaban; y el otro es que verbalmente estaban dotados de un lenguaje con sentido posicional, ya que realizaba pequeñas variaciones según la posición que ocupaba cada número. Joseph (2008) afirma que en este sistema se destaca particularmente el cero, ya que es multifacético gracias a que era usado como símbolo, número, magnitud, separador de dirección y marcador posicional, todo dentro de un sistema numérico posicional completamente establecido.

Los árabes que llegaron a la India se percataron de las grandes ventajas que tenía el sistema numérico hindú, se apropiaron de él y lo divulgaron entre el mundo islámico; de esta forma nace el sistema numérico indo-arábigo, el cual “(...) se puede colocar con todo merecimiento entre los

¹ Aczel (2016) y Webb (2015) afirman que los registros de este sistema se encontraron en un templo de la fortaleza hindú de la ciudad de Gwalior en el noroeste del estado de Madhya Pradesh.

mayores descubrimientos técnicos de la humanidad, junto con la invención de la rueda, el fuego y la agricultura” (Paulos, 1993, p.181).

Para Asimov (2000) y Castillo (2011) el matemático árabe Al-Jwarizmi escribió uno de los primeros tratados (*Kitāb al-Jam ‘wa-l-tafrīq bi-isāb al-Hind*, que traduce “Libro para el cálculo con números hindú”) en el que expone sus ventajas y, al tratarse de un libro importante como referencia para el estudio de las matemáticas, es traducido al latín para ser divulgado en Europa, aunque su arribo fue lento y retrasado por concepciones religiosas, filosóficas y políticas que truncaron el desarrollo de las ciencias en lo que se conoce como oscurantismo medieval.

Un símbolo para el cero.

Para tratar el cero como número era indispensable un símbolo que lo representara y, a la vez, lo diferenciara de los demás; por una parte, se cree que el símbolo 0 es originario de Grecia, posiblemente propuesto por el astrónomo Claudio Ptolomeo, que usó la primera letra (omicrón) de la palabra οὐδεν, para referirse a la nada o, de una manera ideológica, al paso de algo a la nada (Betti, 2017). Este punto de vista tiene gran relación con la teoría de Freudenthal sobre el origen del número cero, aunque Kaplan (2004) refuta esta idea afirmando que “Otto Neugebauer, la autoridad más importante en textos griegos sobre astronomía, descarta de manera tajante toda esta explicación; [...] los griegos ya habían asignado el valor numérico 70 a omicrón” (p. 37).

Por otro lado, Kak (1990) citado en Barrow (2012) propone que evolucionó del símbolo que era usado en Brahmi para el número 10 semejante a un pez, el cual se fue separando para dar lugar al uno y al cero (ver Figura 15); finalmente, Ifrah (1987) menciona que inicialmente se simbolizó con un punto (*bindu*), que evolucionó hasta convertirse en un pequeño círculo (en sánscrito *chidra*,

palabra para agujero). Este último coincide con los primeros registros del cero expuestos por Cœdès (1931) y la Biblioteca de Bodleian de la Universidad de Oxford (2017).

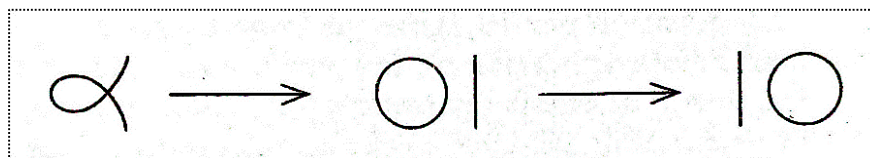


Figura 15. Posible separación del símbolo pisciforme usado para 10.

Fuente: Barrow (2012, p. 54).

Origen de la palabra cero.

Este símbolo (independientemente de la concepción de su origen) fue ganándose un lugar muy importante en el sistema numérico como un elemento más; para referirse a él, Barrow (2012), Betti (2017) e Ifrah (1987) mencionan que entre los siglos VI y VIII los sabios hindúes empiezan a usar la palabra *śūnya*, que significa vacío o ausencia de algo que puede ser llenado. Según Barrow (2012), Burton (2011), Castillo (2011) y Joseph (2008) producto de los intercambios comerciales liderados por los árabes y su deseo de recopilar y traducir los manuscritos que iban adquiriendo en sus conquistas por el Viejo Mundo, a mediados del siglo IX surge la palabra *as-sifr* traducción árabe para *śūnya*, la cual conservó su significado original.

Pogliani, Randic & Trinajstić (1998) afirman que la evolución de la palabra *as-sifr*, que es el origen etimológico de la palabra *cero*, siguió su curso y en el siglo XIII es traducida al latín, dando origen a las palabras *cifra* y *zefirum*; la primera adoptó el significado amplio para referirse a cualquier símbolo numérico, y la segunda mantuvo su significado, la cual es traducida al italiano en el siglo XIV, encontrándose en varios escritos como *zefiro*, *zephyr*, *zefro* o *zevero*, que en el dialecto veneciano se abrevió como *zero*, palabra que es usada actualmente en el inglés y francés para

indicar cuando una potencia de diez no se tiene en cuenta al escribir los dígitos de un número (Barrow, 2012).

El cero y las operaciones básicas.

Históricamente, operar con el número cero requiere de un cuidado especial en virtud de las propiedades particulares que lo diferencian de los demás números, que muchas veces lleva a evitar operarlo dada la complejidad en su comprensión (Joseph, 2008). Al respecto, Webb (2015) afirma que “la práctica de aritmética con el cero solía dar resultados extraños, a veces tanto que hubo que prohibirlos” (p. 149). Para comprender las propiedades aritméticas del cero, es necesario describir la génesis de su relación con los demás números.

Uno de los primeros registros del cero como número se encuentra en el manuscrito Bakhshali, el cual data del siglo III d. C. y fue escrito, posiblemente, por cuatro o cinco escribas; en él se describen algunos problemas de aritmética, geometría y medición (Bodleian Libraries University of Oxford, 2017; Puttaswamy, 2012). Betti (2017), Joseph (2008) y Logan (2017) mencionan que, desde entonces, en los textos dedicados al estudio de las matemáticas se incluían un capítulo para la aritmética (ganita o patiganita) y otro para el álgebra (aryakat-ganita o bijaganita), en los que se desarrollaron procesos puramente algorítmicos, facultad que les permitió operar números muy grandes de manera fácil y efectiva.

Según Webb (2015), en el siglo VII Brahmagupta fue el pionero en el estudio del cero y sus propiedades, definiéndolo inicialmente como “el resultado de sustraer cualquier número de sí

mismo” (Barrow, 2012, p. 53); en su obra *Brahma-Sphuta-Siddhanta*² (El inicio del universo), dedica un capítulo completo al estudio de problemas aritméticos y de progresiones aritméticas y geométricas (Joseph, 2008; Mankiewicz, 2000; Webb, 2015), y en la que Brahmagupta menciona tres términos importantes: los bienes (números positivos), las deudas (números negativos) y la nada (número cero). Ifrah (1987) al respecto menciona:

[...] el sabio descubría una de sus reglas fundamentales: *una deuda deducida de la nada se transforma en un bien, y un bien deducido de la nada se transforma en una deuda*³ (el número opuesto a un número positivo es un número negativo y a la inversa). (p. 277)

Adicionalmente, refiriéndose al trabajo de Brahmagupta, Barrow (2012) indica que “cuando se añade *sunya* a un número o se sustrae de un número, el número permanece invariable; y un número multiplicado por *sunya* se convierte en *sunya*” (p. 53). Estas reglas, que Brahmagupta relacionó principalmente con la solución de expresiones algebraicas, están relacionadas de igual forma con los números positivos y negativos que abarcan tanto la aritmética como el álgebra (Divakaran, 2018).

Según Divakaran (2018) Aunque Brahmagupta logró definir con increíble exactitud las propiedades sobre adición, sustracción y producto con cero, con la división no tuvo el mismo éxito, ya que definió $0/0$ como 0, y cuando el numerador fuera distinto a cero, al dividir por cero se debía dejar como quedaba, ya que no era posible definirlo. Seife (2006), al respecto, menciona que

² Webb (2015) Escrita en sánscrito a mediados del 628 d. C., basada en dos versiones anteriores del libro *Brahma Siddhantas*, un tratado sobre astronomía, basado en Brahama, creador del universo. Brahmagupta corrigió y agregó algunos capítulos a la nueva versión que está dividida en 24 capítulos escritos en verso, de los cuales la mayoría trata sobre astronomía.

³ Cursivas del autor.

“multiplicar por cero desploma la línea numérica. Pero dividir por cero destruye por completo el armazón de las matemáticas” (p. 31).

No transcurrió mucho tiempo hasta que bhāskarāchārya (conocido como Bhaskara II), en su obra *Siddhanta Siromani*⁴ hiciera un compendio completo sobre aritmética y álgebra basado en el trabajo de sus predecesores (Brahmagupta, Sridhara, Padmanabha y posiblemente Mahavira), en el que retoma las operaciones con cero, definiendo especialmente la división por cero como infinito (Berlinghoff & Gouvêa, 2010; Divakaran, 2018).

En Castillo (2011) se encuentra la siguiente afirmación que hace parte del capítulo *Bijaganitha*:

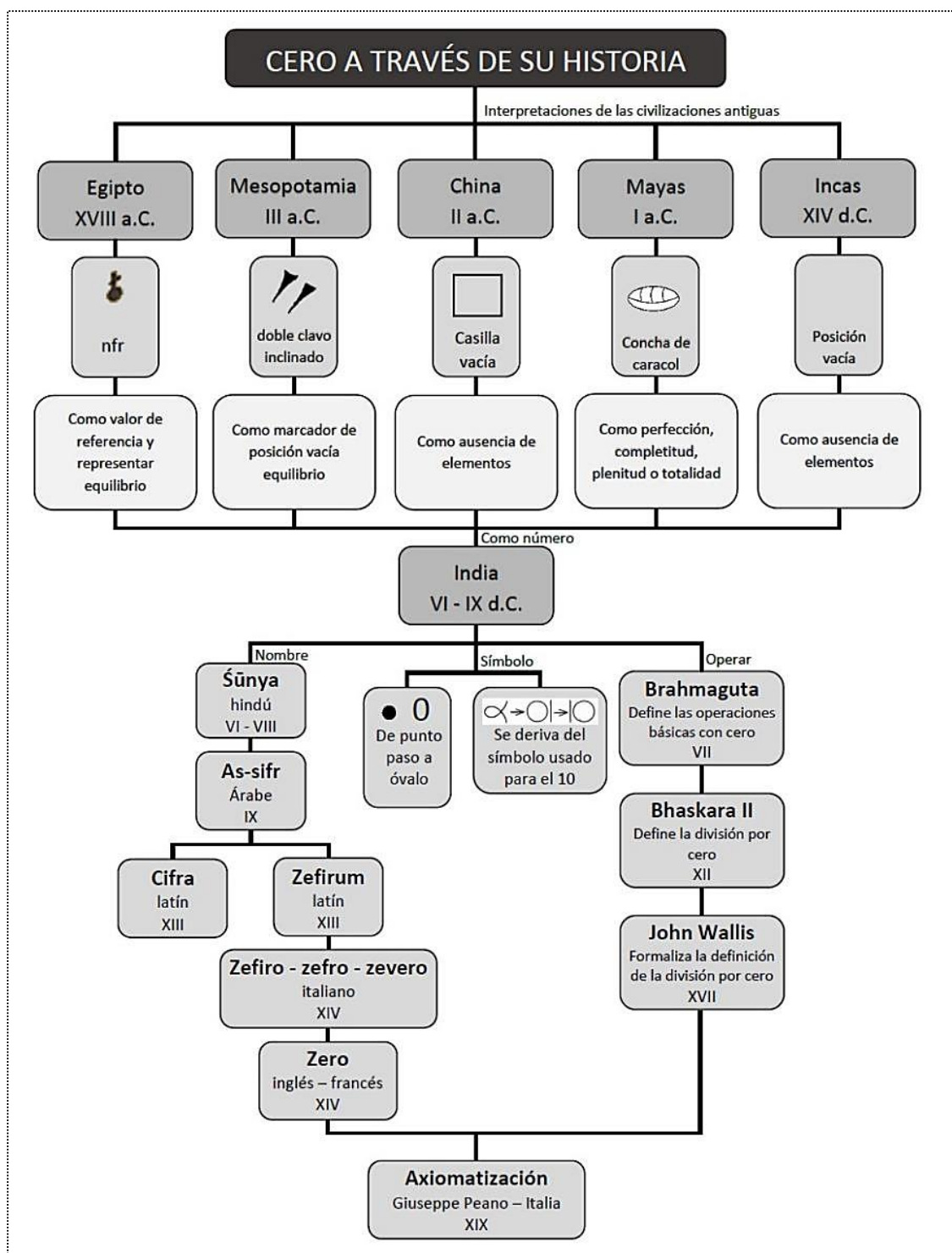
La fracción en la que el denominador es cero se llama cantidad infinita. En esta cantidad en la cual cero es el divisor no hay alteración posible por mucho que se añada o se quite, lo mismo que no hay cambio en Dios infinito e inmutable. (p. 84)

Posteriormente, sobre el siglo XVII, la división por cero es definida formalmente por John Wallis⁵ desde el cálculo infinitesimal (Romig, 1924). No obstante, es de gran importancia destacar la genialidad de los hindúes y su gran aporte a las matemáticas pues llevaron los números de lo tangible a lo abstracto, paso crucial para el desarrollo de las matemáticas en el mundo, en el que juega un papel fundamental el número cero (Webb, 2015).

⁴ Divakaran (2018) menciona que fue escrita a mediados del 1150 d.C., y dividida en cuatro capítulos: Los dos primeros, *Leelavati* y *Bijaganitha*, sobre matemáticas, y los otros dos, *Goladhaya* y *Grahaganitha*, sobre astronomía. Dada la importancia del tratado de Leelavati en matemáticas, el comité organizador del Congreso Internacional de Matemáticas (ICM) crea el premio que lleva su nombre para destacar la publicación y divulgación de trabajos en matemáticas; se entrega por primera vez en el ICM del 2010, celebrado en India.

⁵ A quien se le atribuye el símbolo que es usado para referirnos al infinito.

En síntesis, del recorrido histórico del cero por algunas civilizaciones antiguas, además de los significados, símbolos y nombres que le atribuyeron se observan algunas contribuciones para su interpretación en diferentes contextos (Figura 16); aunque el panorama era alentador sobre la evolución del cero, su paso por Europa estuvo lleno de tropiezos y rechazos.

**Figura 16.** Cero a lo largo de su historia.**Fuente:** creación propia.

El cero llega de Oriente a Europa.

Según Castillo (2011) la proliferación de las matemáticas de la India a Occidente inicia con los árabes, quienes llegan a la India (al principio de manera pacífica a través de los intercambios comerciales) con el ánimo de promover el islam y adquirir nuevas ideas. Berggren (1987), Arsham (1994) y Catillo (2011) asumen que a mediados del siglo VIII el matemático árabe Al-Jwarizmi estudió la numeración hindú influenciado por la visita de eruditos hindúes a la corte del califa al-Ma'mūn⁶ en Bagdad, de los que logró aprender el avance en matemáticas y astronomía desarrollado en India; de sus estudios consiguió escribir su obra *Kitāb al-Jam 'wa-l-tafrīq bi-isāb al-Hind'* (Libro para el cálculo con números hindú) del que solo se conservan algunas traducciones ().

Sobre las apreciaciones de Al-Jwarizmi sobre la numeración hindú, Barrow (2012) resalta la siguiente:

Quando [después de restar] no queda nada, ellos escriben el círculo pequeño, de manera que el lugar no queda vacío. El círculo pequeño tiene que ocupar la posición, porque de otra forma habría menos lugares, de modo que el segundo podría tomarse erróneamente como el primero. (p.62)

Por otro lado, el matemático árabe Kūshyār ibn Labbān, alrededor del siglo XI escribe *U'ul isāb al - hind* (Principios de la contabilidad hindú), obra dedicada al estudio de la aritmética elemental basada en el sistema de numeración hindú, en el que aparece el cero como marcador de una

⁶ Berggren (1987) y Arsham (1994). Hijo del cuarto califa Harun al-Rashid, conocido por el libro de *Las mil y una noches*. Al-Ma'mūn fundó en Bagdad la *Casa de la Sabiduría*, una biblioteca de grandes proporciones en la que enseñaban las ciencias y eran traducidas al árabe las obras provenientes de la antigüedad tardía, así como de las matemáticas griegas de Euclides, Ptolomeo, entre otros.

⁷ Webb (2015) Esta obra está basada en gran parte por el *Brahma-Sphuta-Siddhanta* de Brahmaguta, escrita medio siglo después por Al-Jwarizmi, en la que explica el uso de la nueva notación numérica y su ventaja para realizar cálculos; es el primero en separar las cifras de los números en grupos de a tres, separándolos por comas.

posición vacía (*as-sifr*); esta obra adquirió gran importancia en el mundo islámico (Berggren, 1987; Vogel, 1966).

Para Burton (2011) la ciencia, el arte y la filosofía que promulgaban los árabes provenía en gran medida de las tierras que habían invadido, de esta manera es posible que haya llegado el sistema numérico indoarábigo a Europa. Bettiv (2017), Burton (2011) y Doval (2005) mencionan que la expansión árabe no se llevó a cabo por la península balcánica, como se podría suponer, sino que su paso a Europa se dio por el mar Mediterráneo hasta llegar a la península ibérica (concretamente a España), de manera que el cero hindú, después de realizar su aparición en Bagdad, pasó a Córdoba y de aquí a Europa.

D'Amore & Fandiño (2012) mencionan que su divulgación en Europa estuvo a cargo de dos grandes matemáticos; el primero es el francés Gerberto de Aurillac⁸ (945-1003), quien tuvo la oportunidad de conocer el sistema numérico indoarábigo y sus ventajas en uno de sus viajes por España; sus trabajos estuvieron enfocados en la geometría, astronomía y métodos de cálculo, en los cuales usaba una ficha de cuero llamada Sipos para referirse al cero (Barrow, 2012).

Según Burton (2011), el segundo es Leonardo Pisano (1175-1240), conocido bajo el seudónimo de Fibonacci y a quien se le atribuye el inicio del renacimiento matemático de Europa occidental; gracias a la profesión de su padre como comerciante, Leonardo viaja por varios países a través del mar Mediterráneo teniendo la oportunidad de conocer el sistema numérico hindú, del cual no dudó en reconocer las ventajas que tenía sobre los demás sistemas numéricos. D'Amore & Fandiño

⁸ Elegido papa en el año 999 bajo el nombre de Silvestre II.

(2012) y Sigler (2012) encontraron que Fibonacci, en su obra culmen *Liber Abaci*⁹ (Libro de las cuentas) hace un estudio completo sobre la matemática del siglo XIII, con el fin de llevar a Italia las mejores matemáticas para su uso en general; los temas que comprenden el Liber Abaci son aritmética, álgebra y resolución de problemas, en los que emplea nociones geométricas euclidianas para realizar sus pruebas, y expone en su primer capítulo las ventajas del sistema numérico, comprendido por nueve cifras y un marcador de posición, que él llamo zephyr (Burton, 2011,).

Gracias a estos dos precursores, se da a conocer en Europa el sistema numérico hindú (o indoarábigo), y con este, el cero hindú; su uso estandarizado fue posible debido a la invención de la imprenta, de manera que los símbolos que se usan en la actualidad no han sufrido modificaciones considerables desde el siglo XV (Burton, 2011).

La aceptación del cero en Europa.

Desde su salida de India, el panorama del cero era prolífero, sin embargo, su aceptación en Europa estaba condicionada por varios factores. Barrow (2012), Betti (2017) y Joseph (2008) afirman que uno de ellos, es que la influencia de la matemática que desarrollaron los griegos estuvo enmarcada por la lógica y la geometría, aspectos en los que se buscaba una consistencia teológica por encima del desarrollo de la ciencia, lo que impidió un avance sobre la concepción del cero como número.

El sistema numérico de los griegos¹⁰ era muy complejo de usar, ya que los símbolos que usaban no les permitían realizar cálculos con ellos, así que las operaciones las hacían con elementos

⁹ Apareció por primera vez en 1202, en 1228 aparece una segunda versión; aunque circuló ampliamente en manuscritos, no se imprimió en Italia hasta 1857, y su traducción al inglés se realizó en el 2002.

¹⁰ Desarrollado alrededor del siglo V a. C.

concretos como los dedos de las manos, el ábaco y las tablas de contar. La aritmética que desarrollaron estuvo a cargo, principalmente, de los mercaderes y comerciantes. Sobre los métodos que usaban los griegos para llevar las cuentas, Kaplan (2004) menciona que

[...] nada no era una cosa, un número, sino una condición —muchas veces transitoria— de parte de la tabla. Lo mismo ocurría con el cálculo con los dedos, [...] allí, el cero se indicaba por la posición relajada o normal de los dedos: en otras palabras, no era un gesto. (p. 42)

Adicionalmente, Seife (2006) y Webb (2015) mencionan que el cero estaba enmarañado por las concepciones peligrosas sobre el ser y no ser, el universo y la nada, lo tangible y lo imaginable; ideas que permearon la filosofía cristiana muy promulgada por Europa, que entraba en conflicto con las ideas que llegaban de Oriente, con el islamismo y el ingenioso sistema indoarábigo.

Por otro lado, el sistema numérico indoarábigo estaba expuesto a los fraudes, ya que sus cifras se podían fácilmente alterar o modificar, particularmente el cero con una pequeña modificación se podía hacer pasar por un 6 o un 9, razones suficientes para que fuera prohibido su uso en Florencia en el año 1299 (Barrow, 2012; Burton, 2011).

Finalmente, según Ifrah (1987), Rotman (1993) y Webb (2015) los métodos poco prácticos para realizar cálculos con el ábaco, populares en la Europa medieval, fueron perdiendo poco a poco la contienda con la aritmética usada con los números indoarábigos y la comprensión del cero como número, ideas fundamentales para el renacimiento de la matemática y la ciencia en el mundo.

Para algunos, como lo expone Jaouiche (2011), el cero no fue considerado un número hasta que Peano realizara la axiomatización de los números naturales en el siglo XIX, aun cuando históricamente su invención sea de siglos atrás.

El cero en contextos educativos

La historia del cero nos brinda algunos vestigios sobre las dificultades que pueden tener los niños en la escuela en su aprendizaje; aunque sea natural encontrar en su construcción algunos obstáculos, su paso al contexto educativo muchas veces se encuentra inmerso en una variedad de construcciones sobreelaboradas para su enseñanza (propias de la transposición didáctica), que complican aún más su aprendizaje, en palabras de D'Amore y Fandiño “[...] se crea en torno al objeto matemático ‘cero’ un halo de complejidad que, en primera instancia, no tiene razón de ser” (2012, p. 79).

El aprendizaje debería partir de las concepciones y usos espontáneos que posee el niño antes de entrar a la escuela, de manera que pueda articularse con una adecuada enseñanza. Los “Lineamientos Curriculares en Matemáticas”, emitidos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 1998), establecen las pautas que se deben tener en cuenta en la enseñanza de las matemáticas; estas se dividen en cinco categorías o pensamientos matemáticos que, para el caso de la concepción del cero, se relacionan con *el numérico y los sistemas numéricos*.

En esta subdivisión se menciona que la construcción de los sistemas numéricos debe ser gradual para una adecuada comprensión de sus significados, que le permitan al estudiante usarlos en diferentes contextos (MEN, 1998). Particularmente, los números naturales pueden ser usados para contar (cardinal y ordinal), numerar, medir y operar (Gómez, 1993); aunque el cero posea propiedades particulares, también es considerado como número natural y, por tanto, puede ser usado de igual manera.

Cero para contar.

Principalmente, el cero se encuentra relacionado con el *cardinal* del conjunto vacío, aunque no sea común hablar de “cero cosas” o el conjunto de “cero manzanas”, se usa un lenguaje que evoca su presencia. Para hablar de *ordinal* es necesario un orden con un elemento inicial, que en los conjuntos discretos corresponde al número uno (primero); el cero aparece como elemento inicial cuando se trata del orden en algunos conjuntos continuos, por ejemplo, para referirnos al primer año de vida de una persona (Castro, Rico & Castro, 1996; Gómez, 1993).

Es difícil comprender los usos que puede tener el cero como número ordinal, evidencia de esto se percibe cuando la mayoría de las personas celebraron el cambio de milenio el 1 de enero del 2000, cuando solo han pasado 1999 años desde la constitución del calendario (O'Connor & Robertson, 2000), lo que demuestra la omisión del cero como el “ceroavo” año.

Cero para numerar.

En Gómez (1993) se pueden encontrar algunos usos de los números para numerar; puntualmente, para el cero se destacan identificar, diferenciar, delimitar o señalar y codificar. Algunos ejemplos del cero para numerar son: se puede observar en los códigos de barras (identificar), en el indicativo de una ciudad o país (diferenciar), en una báscula lista para usar (delimitar o señalar), en física para representar un circuito abierto (codificar).

Cero para medir.

Para medir, el cero es usado como valor de referencia y sus usos se pueden evidenciar en la recta numérica como el número que separa los negativos de los positivos; nivel de referencia en la escala usada para medir la altura en metros sobre el nivel del mar (msnm); en un reloj digital cuando marca la media noche (D'Amore & Fandiño, 2012); cuando un juego de fútbol queda empatado sin goles, entre otros.

Cero para operar.

La utilización de las operaciones está directamente relacionada con la resolución de problemas y la posibilidad de aplicar los números en diversos contextos (MEN, 1998); uno de los principales usos de los números es el operacional, la propiedad de convertirse a partir de “[...] un conjunto de acciones coordinadas y reversibles” (Castro, Rico & Castro, 1996, p. 125). Al operar con el cero se consiguen resultados importantes que, según Seife (2006), desploman por completo el sentido operacional de los números.

Muchos de estos usos son aprendidos empíricamente por el estudiante antes de llegar a la escuela (Gómez, 1993), creando en la mente del estudiante una imagen del cero muy importante en el afianzamiento del pensamiento numérico. Al respecto D'Amore y Fandiño (2012) mencionan que la mayoría de los niños en edades tempranas (entre 3 y 6 años) logran asociar el cero con la falta de objetos, conocen su representación e intuitivamente lo consideran como número; este hecho se debería tenerse en cuenta a la hora de conceptualizar en la escuela el cero como número, de manera que no se presente como un objeto nuevo lleno de misticismo.

Según Padrão (2008) la construcción histórica del cero como número desde sus inicios estuvo inmersa en más tropiezos que aciertos lo que repercute en su enseñanza, tal y como lo corrobora D'Amore y Fandiño (2012) cuando afirman que “el cero constituye un obstáculo epistemológico [...] basta ver su controvertida, larga y tortuosa historia” (p. 101).

De otro lado, Jooste (2012) afirma que los programas de formación docente pocas veces tienen en cuenta la comprensión que posee los estudiantes sobre el cero, sus diversos usos y la importancia de conocer su historia. Adicionalmente menciona que muchas veces por la falta de una apropiación del concepto, se recurre a la memorización de reglas que el docente debe adquirir para enseñar el cero como número.

En la enseñanza del cero, el docente juega un papel fundamental, pues sus creencias, concepciones y las interpretaciones que realiza sobre el cero influyen considerablemente en el aprendizaje conceptual del cero como número, de ahí la importancia de esta investigación.

Capítulo 3. Trazando la ruta desde y con el cero

En el camino trazado hacia las interpretaciones de los estudiantes en formación inicial de matemáticas sobre el cero como número, surgieron varias preguntas sobre la ruta a seguir para dar respuesta al problema por investigar; según Rodríguez, Gil y García (1996) se trata de ubicar al investigador en el mundo empírico y establecer las actividades que le permitan cumplir con el objetivo propuesto para la investigación. Para despejar el panorama fue necesario establecer una postura clara sobre la ciencia y la manera en que se genera nuevo conocimiento, pues en la actualidad existen varias tendencias que posibilitan este proceso investigativo.

Según Fiorentini & Lorenzato (2010) una de las tendencias actuales en educación matemática es el estudio como un área importante del conocimiento, desde la cual se ha establecido un grupo significativo de investigadores internacionales, que han contribuido en su consolidación como campo investigativo de las Ciencias Sociales y Humanas, y su relación con la matemática, desde la cual, es posible enfocarse en el estudio estructurado de los problemas presentes en esta área emergente del conocimiento.

Dentro de este campo investigativo una de las líneas presentes en los estudios de los últimos años es la *formación y desarrollo profesional del docente*, desde la cual se promueve el debate sobre el saber matemático y el componente pedagógico que debe tener el futuro docente (Fiorentini & Lorenzato, 2010); de manera que el aprendizaje profesional debe estar basado en una adecuada articulación de estos dos componentes, que le permita al futuro docente promover un ambiente adecuado para la enseñanza de las matemáticas. Así, uno de los problemas que se percibió en el

aprendizaje de los estudiantes en formación inicial, desde el papel del investigador como formador de formadores, es la relación entre las interpretaciones del número cero y su enseñanza.

Bajo el *paradigma interpretativo* este problema está relacionado con los significados atribuidos por los actores sociales sobre su realidad, lo cual señala la importancia de la subjetividad de los procesos de comprensión por parte del investigador, lo que establece una manera diferente de abordar algunos interrogantes, que desde enfoques positivistas no ha sido posible responder (Krause, 1995). Este aspecto es crucial, pues se articula adecuadamente con la visión constructivista del aprendizaje (Flores, 1998) en la que se fundamenta el planteamiento del problema.

Según Fiorentini y Lorenzato (2010), el enfoque metodológico debe brindar las herramientas necesarias que le permita al investigador establecer con claridad el fenómeno educativo que desea conocer, dentro de las tendencias investigativas contemporáneas enfocadas en la comprensión, interpretación y acción. En consecuencia, para el desarrollo del proceso investigativo dirigido a categorizar las interpretaciones de estudiantes en formación inicial de matemáticas sobre el cero como número, se estableció el diseño cualitativo como metodología, basado en un estudio de caso.

Estudio de caso

Un estudio de caso según Rodríguez, Gil y García (1996) “implica un proceso de indagación que caracteriza por el examen detallado, comprehensivo, sistemático y en profundidad del caso objeto de interés” (p. 115), por lo que la investigación se centra en un grupo reducido de individuos, con características bien definidas, que facilita el trabajo personalizado del investigador sobre la unidad de análisis (Godino & Rodríguez, 1991); esta característica permite conocer a profundidad a los

individuos elegidos para el estudio, en una perspectiva particularista que no busca las generalidades, sino describir la realidad de manera profunda y con rigor, asumiendo cada situación como única o especial (Ponte, 2006; Canedo, 2009).

Además de ser particularista y descriptivo, el estudio de caso se caracteriza por ser heurístico, en la medida que se basa en la experiencia misma y del grupo para el descubrimiento de nuevos significados (Canedo, 2006); es fácil que el investigador sea sorprendido por los resultados y genere algún tipo de emociones, pero esto no debe influir en la objetividad y el rigor de la investigación (Ponte, 2006). Para Godino & Rodríguez (1991) este tipo de estudio tiene en cuenta los aspectos culturales del grupo con el fin de comprender y conocer mejor el caso, para lo que es recurrente usar como instrumentos de recolección de información, cuestionarios, entrevistas, grabaciones de audio y video, y los registros escritos de los participantes.

En educación matemática se ha utilizado el estudio de caso para investigar problemas relacionadas con el aprendizaje del estudiante, el conocimiento del profesor, las prácticas en el aula, entre otras (Ponte, 2006); por lo que puede ser usado en cualquier ámbito educativo, particularmente cuando se investiga sobre los problemas relacionados con el aprendizaje del docente. Bajo esta perspectiva, como unidad de análisis se eligió un grupo de diez estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, que cursaban la asignatura *Didáctica y Educación Matemática II*, perteneciente a los contenidos programáticos de séptimo semestre; el curso hace parte del segundo momento del Modelo Pedagógico Gradual Investigativo (MPGI) de la Licenciatura, el cual se dirige a la fundamentación de los contenidos disciplinares y fundantes del saber hacer como docente (Jiménez, Díaz & Leguizamón, 2011); el curso es teórico-

práctico orientado a la discusión curricular en matemáticas de la Educación Básica y Media, y su articulación con las primeras prácticas disciplinares.

En esta etapa se promueve en el docente en formación el desarrollo de las competencias interpretativa e investigativa necesarias en un docente crítico e investigador, aspecto característico y diferenciador del grupo que es objeto de estudio; por tal razón, se cuestionó las concepciones que tienen estos futuros docentes sobre el número cero, partiendo por identificar los significados que le atribuyen y la manera que lo interpretan en contextos de enseñanza. Para lograr un adecuado análisis de estas interpretaciones se establecieron algunas categorías y subcategorías desde los aportes teóricos, distinguiendo algunos tópicos que permitieron la organización de la información (Cabrera, 2005).

Categorías de análisis

Uno de los factores principales que se tuvo en cuenta para el diseño de los instrumentos usados para recolectar la información, fue la elaboración de las categorías de análisis. Monje (2011) menciona que “las categorías son las clasificaciones más básicas de conceptualización y se refieren a clases de objetos de los que se puede decirse algo específicamente” (p. 92), en el caso particular, estas categorías están relacionadas con las interpretaciones del cero como número. Teniendo en cuenta que la investigación es de corte cualitativo, se privilegia un proceso inductivo de análisis; sin embargo, dado que uno de los objetivos principales de la investigación era realizar un estudio histórico y epistemológico del número cero, fue posible identificar de manera a priori formas de interpretación del cero derivadas del surgimiento del concepto, las cuales fueron tenidas en cuenta de forma relevante para la construcción y planteamiento de las situaciones de enseñanza; según

Páramo (2017) en este caso son consideradas en esta investigación como categorías a priori u orientadoras.

Las categorías emergentes o inductivas, según Páramo (2017) surgen a partir del contacto del investigador con las diferentes fuentes de información, de manera que se abre la posibilidad de establecer algunas categorías producto del análisis realizado a la información. Al respecto Fiorentini & Lorenzato (2010) mencionan que estas categorías surgen de la interpretación que realiza el investigador sobre el material de campo y que son producto de un proceso práctico en el que juega un papel importante la capacidad del investigador para percibir las relaciones o recurrencias importantes en la información.

En primer lugar, se describen las categorías a priori que fueron identificadas a partir del estudio epistemológico e histórico del número cero y seguidamente se describen las categorías emergentes.

Historia y epistemología del número cero.

Uno de los aspectos fundamentales para lograr categorizar las interpretaciones de los estudiantes en formación inicial en matemáticas es el aspecto histórico y epistemológico del número cero; la consolidación del cero como número fue un proceso largo y complejo de más de dos milenios de historia (D'Amore & Fandiño, 2012); su origen un poco confuso y diferente al de los demás números naturales, no estaba ligado a la representación de algún objeto concreto (Stewart, 2016), por lo que fue necesario un estado superior de abstracción para que fuera aceptado como número (Berlinghoff & Gouvêa, 2010).

Históricamente se pueden identificar varias interpretaciones del cero, que le otorgan un sentido especial sobre los demás números; gracias a los primeros registros escritos del cero en Egipto (aún

sin considerarse un número), se evidenció que era interpretado como *valor de referencia* y como *signo de equilibrio* (Lumpkin, 2004; Joseph, 2008). En Babilonia el cero aparece como *marcador posicional*, debido a la necesidad que surgió en el sistema numérico de separar los símbolos y representar una *posición vacía* (Ifrah, 1987; Kaplan, 2004; Burton, 2011); en China lo relacionaron con *la ausencia de elementos* y aunque no lograron desarrollar un símbolo para representarlo, comprendieron su uso (Ifrah, 1987; Nieder, 2016).

Adicionalmente, los Mayas en Mesoamérica desarrollaron un sistema numérico que era representado por niveles de manera vertical (Fedriani & Tenorio, 2004), lo que promovió la creación de un símbolo para expresar cuando un nivel estaba completo y podía pasarse al siguiente (Sharer, 2003; Duque, 2013); de esta manera lograron interpretar el cero como *plenitud, estado completo o perfección*, usando una concha de caracol para simbolizarlo. Por otra parte, los Incas no desarrollaron un lenguaje escrito para su sistema numérico, ellos empleaban nudos en cuerdas (quipus) para llevar sus cuentas, en las que era necesario dejar un espacio vacío interpretado como *la ausencia de unidades* (Burton, 2011; Gutiérrez, 2009; Schmidt & Dos Santos, 2016).

Para percibir las interpretaciones que realiza el estudiante sobre el número cero se diseñó una situación didáctica (ver Anexo 1) dividida en dos actividades; la primera, formada por tres preguntas sobre el origen de los números e interpretaciones del cero; la segunda, *plantea* relacionar algunas interpretaciones del cero con una propuesta de enseñanza.

Usos del cero como número.

Históricamente, el cero es considerado como número desde mediados del siglo VI d. C., gracias al ingenio de los hindúes, que lograron concebir los números a partir de sus propiedades abstractas

(Berlinghoff & Gouvêa, 2010; Ciro, 2011; Nieder, 2016), dándole un lugar especial al cero entre los demás números, debido a su característica multifacética, pues era usado como símbolo, número, magnitud, separador de dirección y marcador posicional en el sistema numérico decimal y posicional que desarrollaron (Ifrah, 1987; Joseph, 2008).

Varias teorías sobre los números se basan en la axiomatización de los números naturales realizada por Giuseppe Peano, en la que es posible considerar el cero como el primer elemento (Jaouiche, 2011). Los números naturales pueden ser usados de cuatro maneras distintas.

En primer lugar, pueden ser usados para contar, ya sea como *cardinal* asociado a un conjunto o para describir una propiedad de orden (*ordinal*) en los objetos (Gómez, 1993); en particular, el cero es el cardinal del conjunto vacío y como ordinal atiende a la primera posición cuando los datos son continuos (como ocurre con el año cero).

En segundo lugar, pueden ser usados para *numerar*, ya sea para delimitar, señalar, identificar o codificar, en los que el cero se puede encontrar en el código de barras de algún producto, en el indicativo usado en algunos números telefónicos, en electrónica para señalar cuando un circuito está abierto, entre otros.

En tercer lugar, es posible usarlos como medida, con el fin de describir medidas, clasificar, evaluar o puntuar (Gómez, 1993); algunos ejemplos del cero usado para medir se encuentran en las mediciones de la altura sobre el nivel del mar (como valor de referencia) o en un juego de fútbol para expresar la paridad sin goles.

Finalmente, los números naturales pueden ser usados para operar, gracias a la característica abstracta que poseen, que les permite transformarse a partir de la aplicación de algunas reglas

regidas por la aritmética (Castro, Rico & Castro, 1996). La particularidad del cero permite tener resultados interesantes que desploman por completo el sentido operacional de los números (Seife, 2006). Para esta categoría se realizó un cuestionario (ver Anexo 2) con seis preguntas sobre los posibles usos del cero como número.

Resultados de relacionar los usos que identificaron los estudiantes con las propuestas de enseñanza para el número cero, surgieron las siguientes categorías emergentes.

Conceptualización del número cero.

En matemáticas existe la dificultad para definir algunos conceptos, lo que nos lleva a reconocerlos gracias a la experiencia y los usos en contextos adecuados (Tall & Vinner, 1981); bajo esta premisa, un concepto en matemáticas puede considerarse como un *proceso dinámico* que dota de significado a un objeto, ya sea concreto o abstracto (D'Amore, 2006a; Sotos, 2004). Además de concebirse como un proceso dinámico, Alcalá (2002) los denomina idiosincráticos, pues el concepto es personalizado en el aprendizaje, creando una imagen del concepto que solo puede ser comunicada parcialmente.

En el proceso de construcción de conceptos o conceptualización es necesario distinguir entre el concepto, definición del concepto e imagen del concepto; la definición del concepto es una secuencia verbal que no necesariamente le agrega significado (Sotos, 2004), y suele ser formal (cuando proviene de sistemas ya establecidos) o informal (cuando es producto de la experiencia) (Vinner, 1983); la imagen del concepto corresponde a las representaciones simbólicas promovidas por la experiencia del sujeto (Soto, 2004).

En la conceptualización del número cero en la escuela es necesario promover un buen número de contextos en los que se vean inmersos los diferentes usos del cero como número, con el fin de generar una visión del cero más allá de su relación con el vacío. Estos contextos se pueden clasificar de dos maneras: las matemáticas y lo cotidiano. Bajo esta perspectiva, se propuso una tercera actividad (ver Anexo 3) en la que se pedía la creación de una situación de enseñanza del número cero, con el fin de establecer la relación entre el conocimiento del estudiante en formación inicial en matemáticas, el contexto y los usos que lograba promover.

El cero como número en situaciones de enseñanza.

En la conceptualización en matemáticas (Tall & Vinner, 1981) es posible encontrar dos posturas en las que se basa la construcción de significados; por un lado, la teoría realista, y por el otro, la teoría pragmatista (D'Amore, 2005). Dos posturas (no necesariamente disyuntas) desde las cuales es posible establecer la naturaleza de los significados que adquiere el concepto en su construcción.

La teoría realista se basa en una visión platónica de las matemáticas que las considera verdades absolutas e inmutables (Godino, 2010); desde esta perspectiva, los significados del número cero estarían ligados directamente con su definición matemática. La teoría pragmatista considera los conceptos de manera más amplia, sin reducirlos únicamente a su definición, lo que permite que se promuevan significados personales del concepto y no significados absolutos; además, toma en cuenta el contexto cultural en la conceptualización que permite que vaya evolucionando con el tiempo (D'Amore, 2006b). Desde esta perspectiva, la conceptualización del cero es promovida por las situaciones de enseñanza que propusieron los estudiantes en formación inicial de matemáticas, analizadas desde dos perspectivas: las situaciones que se enfocan en el cero como un ente rígido, estático en el tiempo que se rige por las reglas de la lógica, un concepto que es *dogmático*; y por

otro lado, se concibe el cero como un objeto dinámico, moldeable a cada situación y atemporal, un concepto *cuestionable* que permite la subjetividad, de manera que cada individuo crea su propio significado.

Para esta categoría se diseñó una actividad (Anexo 3) en la que los docentes en formación debían proponer una situación de enseñanza para el cero como número, tomada en cuenta como la función de ejercitarse en su trayectoria como profesor en formación o discente (Godino, 2002); esta propuesta pretende conocer las creencias sobre el cero de los participantes y la articulación con las concepciones sobre los usos que le atribuyen al cero; esto con el fin de identificar los significados que le atribuyen al cero como número.

Reconociendo que las categorías de análisis poseen algunos aspectos en común para el análisis de la información se realizó de manera transversal, teniendo en cuenta simultáneamente cada categoría (Fiorentini & Lorenzato, 2010). Las categorías de análisis se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 1. Categorías de la investigación

Categorías
<i>A priori</i>
Historia y epistemología del número cero
Usos del cero como número
<i>A posteriori</i>
Conceptualización del número cero
El cero como número en situaciones de enseñanza

Consideraciones éticas

Los estudios desde el paradigma interpretativo se desarrollan, por lo general, en un ambiente sociocultural en el que el investigador interpreta los significados atribuidos por un grupo de personas o sus acciones frente a una situación particular, usando métodos que no perjudiquen la integridad de los participantes y que sean acordes con el tipo de investigación, para lo que fue necesario un proceso constante de reflexión en torno a los alcances y consecuencias de la investigación (Noreña, Alcaraz, Rojas & Rebolledo, 2012). En el campo de la educación, Sañudo (2015) menciona que es primordial que esta reflexión se realice de manera crítica y se fundamente en un propósito educativo, buscando la armonía entre la teoría, la práctica y la investigación.

Con este propósito, la investigación fue dirigida por principios éticos que garantizaron un proceso confiable y verídico; Fiorentini y Lorenzato (2010) establecen que estos principios deben tender a “[...] las relaciones de buena convivencia, respeto a los derechos del otro y al bienestar de todos” (p. 140). Paz (2018) menciona que algunos problemas éticos que perjudican la investigación están relacionados con los participantes (irrespeto a la autonomía), el desarrollo del trabajo (falta de rigor investigativo y uso inadecuado de los resultados), el investigador (pretensiones particulares sobre la investigación), el informe escrito (plagio), o la información (utilización de datos falsos). Estos problemas fueron reconocidos para ayudar a desarrollar un proceso investigativo consciente y con mayor responsabilidad, dentro de una dimensión ética que fue parte fundamental de esta investigación.

En consecuencia, los principios y cuidados que se tuvieron en cuenta estaban relacionados, principalmente, con la participación de los sujetos; estos fueron informados por escrito (ver anexos 4 y 5) sobre los objetivos de la investigación, los métodos usados para la recolección de la

información, y del uso y divulgación de la información suministrada (Fiorentini & Lorenzato, 2010). Estos principios éticos, que se tuvieron en cuenta durante toda la investigación, fueron aceptados y firmados voluntariamente por ocho de los diez participantes. Con el fin de preservar la integridad física y la imagen pública de los integrantes que aceptaron participar en la investigación, se utilizaron pseudónimos para identificarlos (ver anexo 4).

Capítulo 4. Interpretaciones en el aula y su análisis

El procesamiento y el análisis se realizaron triangulando la información entre las respuestas dadas por los participantes en cada una de las fuentes de información usadas y los referentes teóricos, en lo que Cabrera (2005) llama *triangulación hermenéutica*, que consiste en la selección y cruce dialéctico de la información. Para garantizar que la información recolectada fuera pertinente y relevante al estudio, se basó en la codificación de la información producto de las categorías de análisis.

Según Quecedo & Castaño (2002) al tratarse de un estudio de corte cualitativo, la información recolectada debe permitir al investigador dar cuenta de la realidad de los sujetos en un contexto particular, por lo que las palabras y la conducta de los participantes son de gran importancia; así, la información que se recolectó estaba apoyada en la aplicación de dos situaciones didácticas y un cuestionario abierto, los cuales se diseñaron a partir de los referentes teóricos y de las categorías de análisis establecidas.

En una primera sesión, los participantes desarrollaron la primera situación de enseñanza intitulada *construyendo la historia desde “cero”* (Anexo 1), la cual estaba dividida en dos actividades, la primera dirigida a identificar las interpretaciones del cero como número, y la segunda buscaba que los participantes propusieran una situación de enseñanza del cero a partir de un ejemplo en el que se percibía una representación de este. En la segunda sesión se aplicó el cuestionario (Anexo 2) y en la tercera sesión se desarrolló la segunda situación de enseñanza, *contexto de aplicación* (Anexo 3), en la que se solicitó a los estudiantes que propusieran una situación de enseñanza para el cero.

La comunicación jugó un papel importante en el desarrollo de las situaciones de enseñanza, según Jiménez & Pineda (2013) promueve la interacción de los estudiantes en un ambiente de confianza, generando consensos que les permitió reflexionar, argumentar y proponer sus ideas en la construcción de un nuevo saber en torno al número cero y sus interpretaciones. De las grabaciones de audio y video fue necesario verificar la pertinencia de la información que expresaron los estudiantes de manera oral con el fin de transcribir únicamente aquellos elementos pertinentes para la investigación que complementaban las respuestas escritas desde una concepción realista de la transcripción, desde la cual Payrató (1995) asume que “[...] se transcribe (y/o se describe como complemento) en función de lo que se pretende analizar” (citado en Riscanevo, 2017, p. 96).

El análisis, en primer lugar, contempló la selección de información de primer nivel, lo cual generó subcategorías de análisis, las cuales se relacionan a continuación.

Tabla 2. Categorías y subcategorías de análisis

Categoría	Subcategorías
	A priori
Historia y epistemología del número cero	Valor de referencia Representación de equilibrio Marcador de posición vacía Plenitud, perfección o completitud Ausencia de elementos o de unidades
Usos del cero como número	Para contar Para numerar Para medir Para operar

A posteriori	
Conceptualización del número cero	Matemáticas Cotidiano
El cero como número en situaciones de enseñanza	Dogmático Cuestionable

A partir de esta subcategorización se seleccionó información de segundo nivel para relacionar las interpretaciones con las situaciones de enseñanza para dar respuesta al tercer objetivo y de esta forma presentar un análisis para dar respuesta global a la pregunta que orienta la investigación; seguidamente se integró la información obtenida por cada instrumento de recolección para determinar la coherencia en las respuestas dadas por los participantes; adicionalmente, se buscó el dialogo entre los resultados y la teoría en la que se fundamentó la investigación.

Algunas interpretaciones del cero

En la primera actividad propuesta en la situación de enseñanza *construyendo la historia desde “cero”* (Anexo 1), los estudiantes debían elaborar de manera individual un escrito argumentando y ejemplificando sus respuestas en torno a tres preguntas sobre el origen de los números y las posibles interpretaciones del cero. En un segundo momento compartieron y discutieron sus respuestas con dos o tres compañeros de clase, para finalizar con una discusión general con todo el grupo sobre las diferentes interpretaciones que fueron identificadas en el desarrollo de la actividad.

De los textos producidos por algunos participantes se evidencia que el cero es interpretado reiteradamente como la ausencia de objetos (ver Figura 17), mediante expresiones como no hay, falta de o, simplemente, escribiendo cero o nada como sinónimos.

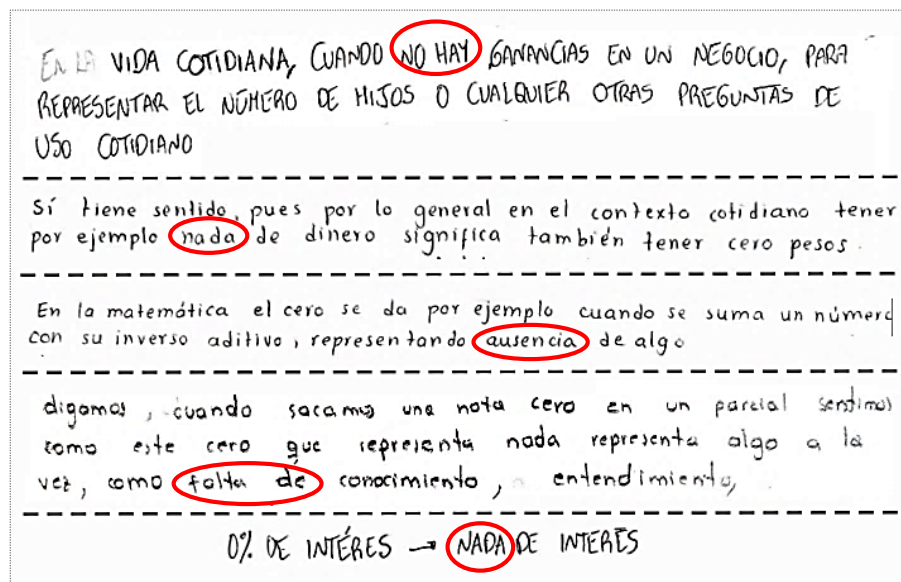


Figura 17. Ejemplos del cero como representación de la nada dada por algunos estudiantes.

Del trabajo individual otro escrito que se destaca es el que realizó Vilma (figura 19), ya que en él se perciben varias interpretaciones del cero en contextos de la vida cotidiana.

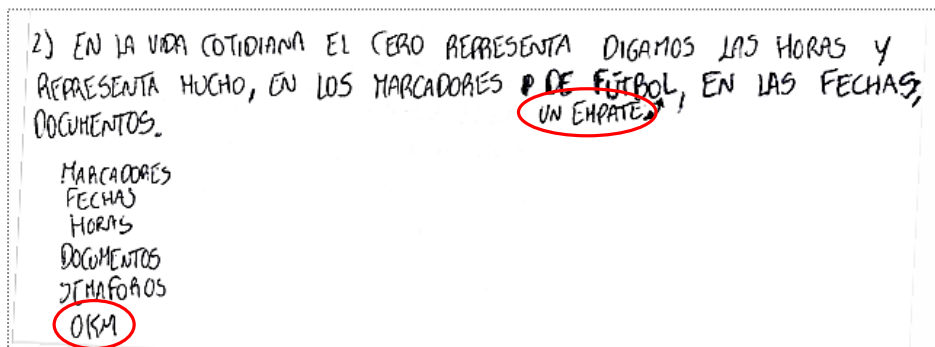


Figura 18. Interpretaciones de Vilma sobre el cero.

En los ejemplos que propone Vilma se resalta la interpretación que realiza del cero al relacionarlo como empate sin goles en el marcador de un juego de fútbol, pues es un ejemplo del cero como *representación de equilibrio*; otro ejemplo para resaltar es cero kilómetros, que evidencia la interpretación del cero como *valor de referencia*.

El segundo momento del desarrollo de la actividad promovió la generación de un buen número de interpretaciones del cero, gracias a la interacción del estudiante con sus compañeros. Al inicio no hablaban mucho es el caso del grupo formado por Eduardo, Tatiana, Carlos y Sandra pero que generó una discusión rica en sus intervenciones. Así, en un momento de gran silencio, la intervención de Eduardo promovió la participación de sus compañeros en una discusión que dio como resultado un buen número de interpretaciones diferentes a la habitual. A continuación se presenta la transcripción de la discusión.

92. Profesor: -a ver, por ejemplo, en matemáticas, en que área ustedes han trabajado en las asignaturas, clases, cursos...

93. Sandra: - Geometría

94. Profesor: - Listo!, en geometría, ¿es posible ver el cero en alguna parte?

95. Eduardo: - ¡Sí, claro!

96. Profesor: - ¿En qué?

97. Carlos: - En los ángulos, los perímetros, las distancias...

98. Tatiana: - En la dimensión

99. Profesor: - Puede ser la dimensión. ¿Qué sería la dimensión cero?

100. Sandra: - Un punto

101. Tatiana: - Ah sí, un punto, [queda pensativa] sí, un punto.

102. Carlos: - No

103. Tatiana: - Sí, sí es un punto

104. Sandra: - Sí

105. Profesor: - ¿Y ahí está representando la nada?

106. Eduardo: - No, porque dicen que un punto es un objeto adimensional, o sea que sí hay algo, entonces no es "nada".

[El grupo asienta con la cabeza]

107. Profesor: - Entonces ahí el cero está representando algo distinto a la "nada". Ese es un ejemplo, ¿Qué otro?

108. Sandra: - Una recta que tenga pendiente cero.

109. Profesor: - ¿Y qué estaría representando?

110. Ana: - Que es constante

Transcripción de la grabación de video n.º 1

En la discusión se destaca el aporte de Sandra y Ana (línea 108 y 110) cuando relacionan el cero con la pendiente de una recta, representación en este caso de una función constante, interpretado como *representación de equilibrio*.

De momento en las intervenciones que han realizado los estudiantes se observa que la mayoría piensa en el cero desde el contexto de las matemáticas, sin reconocer las interpretaciones que puede tener en contextos diferentes. D'Amore y Fandiño (2012) mencionan que es incorrecto afirmar que el cero no está presente en el contexto cotidiano, por lo que se busca en el desarrollo de la actividad promover ejemplos en contextos distintos al de las matemáticas, con el fin de percibir cómo lo interpretan en la vida cotidiana.

Algunos de los ejemplos que consideró Vilma en sus escritos son expuestos de manera oral en una conversación entablada con César y el profesor; el diálogo fue el siguiente:

164. Vilma: - *Profe, por ejemplo, es pensar en el cero digamos en el marcador de fútbol, no solo representa el cero sino un empate, o ¿no?*

165. Profesor: - *Muy bien, esa es una buena interpretación del cero y no está representando la “nada”*

166. Vilma: - *No significa “nada”, sino empate*

167. Profesor: - *Muy bien*

168. Vilma: - *Ummm, otro ejemplo podría ser cuando se refiere a un carro nuevo, se dice que es cero kilómetros, está representado por un número, ¿cierto?*

169. Profesor: - *Si señora, muy bien*

170. Vilma: - *O un semáforo también, cuando sale el cero para unos quiere decir que no pasa y para otros continuar, ¿no?*

171. Profesor: - *Esas son representaciones del cero, muy bien. Esos ejemplos son los que se ven en la vida cotidiana.*

172. César: - *En la hora, en la hora militar cuando dice cero, cero, cero, cero*

173. Profesor: - *¿Qué quiere decir?*

173. César: - *Representa las doce*

174. Vilma: - *La media noche, es decir que el día terminó*

175. Profesor: - *Muy bien, hay no está representando...*

176. Vilma: - *Para las fechas también, o ¿no?*

177. Profesor: - *¿Cómo sería en las fechas?*

178. Vilma: - *Mmmm, en la fecha...*

179. César: - *Bueno, ya en la fecha varía, por ejemplo, en el calendario, pero, por ejemplo, cuando nos habla de cero nueve, va precedido de un cero, pero de otro número, sí o no. Que nos representa...*

180. Vilma: - *Cero ocho del cero nueve [escribiendo en una hoja]*

181. César: - *¡Eso!, el ocho de septiembre. Ahí el cero representa alguna otra cosa diferente.*

Transcripción de la grabación de video n.º 1

En este diálogo se percibe la importancia de la comunicación como el medio mediante en el cual el estudiante puede construir nuevos significados, analizando e intercambiando información (Suárez, Galindo & Jiménez, 2010); en este caso, sobre las interpretaciones del número cero. Vilma y César, a partir de la interacción y el intercambio de información, logran desligar el cero de su relación intrínseca con la nada para darle nuevos significados desde algunos contextos de la vida cotidiana.

Además de interpretar el cero como *valor de referencia y representación de equilibrio*, se percibe en la conversación (líneas 172 a 174) como llegan a interpretar el cero como *completitud* al relacionarlo con la hora de la medianoche expresada en horario militar (00:00) que representa el día que termina. Adicionalmente en las líneas 179 a 181 establecen el cero como *ausencia de unidades* cuando mencionan su uso en la escritura numérica de las fechas.

Otra interpretación importante del cero es como *cifra o marcador de una posición vacía*; este uso está ligado directamente con su aparición en el contexto de las matemáticas, gracias a la genialidad de los matemáticos hindúes (mediados del siglo VII), a quienes se atribuye el sistema numérico más usado en la actualidad, el sistema numérico indoarábigo que es aceptado en todo el mundo sin importar el idioma, pues son usados los mismos símbolos para representarlos en lo que se puede considerar un lenguaje de símbolos universal (Ifrah, 1987; Barrow, 2012).

En este sistema numérico el cero juega un papel importante en su consolidación, pues gracias a él es posible indicar una posición vacía (D'Amore & Fandiño, 2012); de manera que, al representar una cantidad numérica, los símbolos van adquiriendo un significado relativo a la posición (Ifrah, 1987); el cero como cifra, por ejemplo, puede representar la ausencia de unidades (como pasa en el número 980), o la ausencia de centenas (ejemplo 12091). El valor posicional del cero es reconocido por Carlos y Ana que intentan explicarlo a Juan.

12. Carlos: - *Depende en dónde se coloque*

13. Juan: - *Pero es el mismo*

14. Ana: - *Nooooo*

15. Carlos: - *¿Qué pasa si el cero lo colocamos a la izquierda?*

16. Juan: - *Pues no es nada*

17. Ana: *No, si lo coloca a la izquierda no representa mayor cosa*

18. Juan: - *¿Sí?*

19. Ana: - *Lo colocamos a la izquierda con una coma*

20. Juan: - *Igual no representa nada*

21. Carlos: - *Pero sí, representa algo muy pequeño, sería cero coma algo*

22. Juan: - *Mmmmm*

18. Ana: - *¿Pero si lo ponemos a la derecha?*

19. Carlos: - *Representa una cantidad mayor, coja el 9 y póngale un cero, va a ser mayor, pero si le agrega otro más, va a ser más grande*

20. Juan: - *Ah, pues claro*

Transcripción de la grabación de audio n.º 2

Carlos, en su intervención (línea 19), describe cómo es posible comparar dos números a partir de la cantidad de cifras que lo componen; Asimov (2000) describe la misma situación “[...] nada más que por el número de cifras, es evidente que el número 12.000 es más grande que el 787. Esto no se puede hacer en ningún otro sistema de numeración” (p. 15); esta característica se le atribuye al cero, ya que históricamente su génesis está ligada a la necesidad de representar la ausencia de cifras en la escritura de los números para evitar las ambigüedades (Berlinghoff & Gouvêa, 2010).

Usos del cero como número

Además de las interpretaciones que realizaron los estudiantes del cero, se pudo evidenciar algunos usos como número. Particularmente, es habitual que el cero sea *usado para contar*, al relacionarse con la nada o la ausencia de cosas y más aún cuando históricamente su creación como número está condicionada por la concepción del vacío de los matemáticos hindúes del siglo VI (Webb, 2015); de manera que el cero es usado con facilidad como el *cardinal* del conjunto vacío, como se evidencia en la Figura 18 correspondiente a la respuesta escrita por Ana.

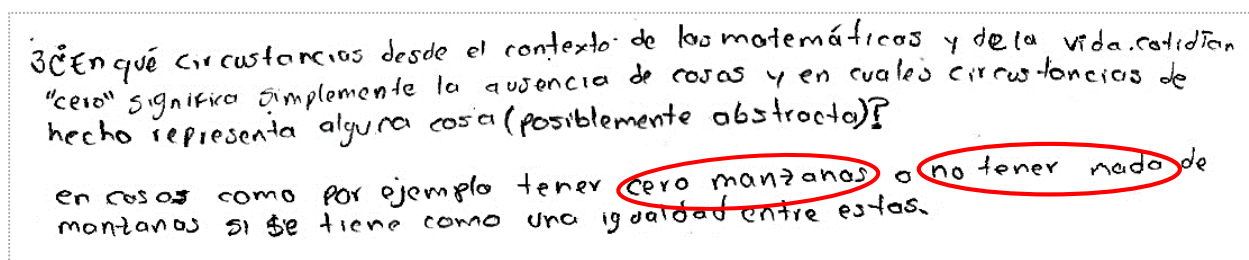


Figura 19. Ejemplo del cero como cardinal propuesto por Ana

Por otro lado, se evidenció gran dificultad para proponer ejemplos del uso del cero como *ordinal*, según se evidencia en la conversación entre Sandra, Carlos y Juan.

28. **Profesor:** - ¿Qué pasó?

29. **Sandra:** - Que estamos pensando si existía el año cero y yo digo que sí, porque ya vamos en el año 2019

[risas]

30. **Juan:** - Es que se dicen que algo fue antes de Cristo y después de Cristo. Es que se empieza a hablar del cero cuando Cristo nació

31. **Carlos:** - Pero no hay año cero, se pasa del menos uno al uno

32. **Sandra:** - Y entonces, ¿qué paso del menos uno al uno?

33. **Carlos:** - Pues pasaron dos años en uno

[risas]

34. **Juan:** - No, porque entonces el año cero no se contaría

35. **Sandra:** - Si se tiene que contar, pasaría lo mismo con un bebe que tiene cero años, no podemos decir que no tiene vida porque de pronto no ha nacido

36. **Juan:** - o cero días ¿no?, porque cero años podría tener seis meses

37. Sandra: - *Ajá, ciertamente*

38. Carlos: - *Pero igual, no se tiene en cuenta el cero, siempre los años van de uno en uno empezando por el uno*

Transcripción de audio n.º 1

Los números ordinales, según D'Amore & Fandiño (2012), son usados de manera puntual para responder ¿Cuál? o ¿en qué puesto se encuentra? Estas preguntas permiten asignar un número a cada elemento de una colección, pero es poco probable que se empiece a contar desde el cero, lo que podría llevar a pensar que el cero no tiene uso como ordinal. Al respecto Castro, Rico & Castro (1996) afirman que el cero se reconoce como número ordinal cuando se trata del orden en algunos conjuntos continuos, por ejemplo, para referirnos al primer año de vida de una persona.

No es fácil desligar el cero de su uso habitual como representación de la nada, que permita interpretarlo y usarlo de manera diferente; a pesar de esto, en el dialogo entre Vilma, Cesar y el Profesor se perciben usos diferentes a los mencionados.

92. Profesor: - *a ver, por ejemplo, en matemáticas, en que área ustedes han trabajo en las asignaturas, clases, cursos...*

93. Sandra: - *Geometría*

94. Profesor: - *Listo!, en geometría, ¿es posible ver el cero en alguna parte?*

95. Eduardo: - *¡Sí, claro!*

96. Profesor: - *¿En qué?*

97. Carlos: - *En los ángulos, los perímetros, las distancias...*

98. Tatiana: - *En la dimensión*

99. Profesor: - *Puede ser la dimensión. ¿Qué sería la dimensión cero?*

100. Sandra: - *Un punto*

101. Tatiana: - *Ah sí, un punto, [queda pensativa] sí, un punto.*

102. Carlos: - *No*

103. Tatiana: - *Sí, sí es un punto*

104. Sandra: - *Sí*

105. Profesor: - *¿Y ahí está representando la nada?*

106. Eduardo: - *No, porque dicen que un punto es un objeto adimensional, o sea que sí hay algo, entonces no es “nada”.*

[El grupo asienta con la cabeza]

107. Profesor: - *Entonces ahí el cero está representando algo distinto a la “nada”. Ese es un ejemplo, ¿Qué otro?*

108. Sandra: - *Una recta que tenga pendiente cero.*

109. Profesor: - ¿Y qué estaría representando?

110. Ana: - Que es constante

111. Profesor: - Ese es otro ejemplo que representa algo distinto a la nada. Así podemos encontrar muchos ejemplos en la matemática, pero ¿en la vida cotidiana?

112. Vilma: - Profe, por ejemplo, es pensar en el cero digamos en el marcador de fútbol, no solo representa el cero sino un empate, o ¿no?

113. Profesor: - Muy bien, esa es una buena interpretación del cero y no está representando la “nada”

114. Vilma: - No significa “nada”, sino empate

115. César: - ¡Uy!, cómo están de inspirados hoy.

[risas]

Transcripción de la grabación de video n.º 1

En la discusión se destaca el aporte de Tatiana y Eduardo (líneas 98 a 106), ya que logran identificar el cero usado para identificar, que se enmarca en los usos del *cero para numerar*. La intervención de Tatiana (línea 98) promovió el reconocimiento del cero para identificar un punto, que según González & Cantor (2016) es una de las primeras ideas intuitivas del hombre en su historia. Sandra en su intervención (línea 100) resalta que la dimensión cero es una característica propia de un punto y Eduardo (línea 106) define formalmente al referirse a la dimensión cero. Al respecto Godino & López (2002) mencionan que el punto se puede definir como un objeto o figura sin dimensión y que es usado generalmente para indicar una posición

Otros ejemplos del uso del cero para numerar se evidencian en las intervenciones de Ana y Sandra cuando lo relacionan con la pendiente de una recta, representación en este caso de una función constante, y en la intervención de Vilma (112) cuando se refiere a la codificación que se realiza en un empate sin goles en un juego de fútbol. El dialogo con sus compañeros contribuyó que Vilma propusiera mas ejemplos relacionados, descritos a continuación:

168. Vilma: -Ummm, otro ejemplo podría ser cuando se refiere a un carro nuevo, se dice que es cero kilómetros, está representado por un número, ¿cierto?

169. Profesor: - Si señora, muy bien

170. Vilma: - O un semáforo también, cuando sale el cero para unos quiere decir que no pasa y para otros continuar, ¿no?

- 171. Profesor:** - *Esas son representaciones del cero, muy bien. Esos ejemplos son los que se ven en la vida cotidiana.*
- 172. César:** - *En la hora, en la hora militar cuando dice cero, cero, cero, cero*
- 173. Profesor:** - *¿Qué quiere decir?*
- 173. César:** - *Representa las doce*
- 174. Vilma:** - *La media noche, es decir que el día terminó*
- 175. Profesor:** - *Muy bien, hay no está representando...*
- 176. Vilma:** - *Para las fechas también, o ¿no?*
- 177. Profesor:** - *¿Cómo sería en las fechas?*
- 178. Vilma:** - *Mmmm, en la fecha...*
- 179. César:** - *Bueno, ya en la fecha varía, por ejemplo, en el calendario, pero, por ejemplo, cuando nos habla de cero nueve, va precedido de un cero, pero de otro número, sí o no. Que nos representa...*
- 180. Vilma:** - *Cero ocho del cero nueve [escribiendo en una hoja]*
- 181. César:** - *¡Eso!, el ocho de septiembre. Ahí el cero representa alguna otra cosa diferente.*

Transcripción de la grabación de video n.º 1

En la afirmación de Vilma (línea 168) se observa un ejemplo más sobre el uso del *cero para numerar*, al referirse a un carro nuevo que es identificado con la expresión “cero kilómetros”. De manera similar ocurre en el ejemplo del semáforo (línea 170) ya que es usado para señalar el cambio entre un color y otro, lo que indica cuándo avanzar o parar. Se percibe por parte de Vilma una apropiación adecuada del cero usado para numerar, lo que le permite generar varias representaciones de las imágenes del cero que pueden contribuir a una construcción del concepto más completa y de algún modo, contribuir en la consolidación de algunos ejemplos de sus compañeros, como se evidencia en la línea 180, cuando Vilma ayuda a César a concretar un ejemplo más del *cero para numerar*, esta vez relacionado con la codificación de las fechas (línea 181).

De otro lado, Ana propone otro ejemplo del cero usado para numerar, esta vez, desde su representación verbal. A continuación se presenta la transcripción.

19. Carlos: - [...] coja el 9 y póngale un cero, va a ser mayor, pero si le agrega otro más, va a ser más grande

20. Juan: -Ah, pues claro

21. Profesor: - Eso en el caso de las matemáticas, y ¿en la vida diaria?

22. Ana: - Si sumercé le dice a alguien que es un cero a la izquierda

[risas]

23. Ana: - Es un decir, ¿no? Uno lo dice con desprecio

Transcripción de la grabación de audio n.º 2

En el contexto cotidiano, particularmente de manera verbal, es común usar *el cero como cifra* para referirse a algo no deseable, como el ejemplo que menciona Ana (línea 22), que posee su connotación en la historia del cero. Ciro (2011), al respecto, menciona que “del cero (vacío) se deriva cifra. En el siglo XIII en Francia tachar a un hombre de ‘cifra’ era un grave insulto, pues era como decirle ‘hombre nulo’” (p. 39). Este ejemplo define un uso particular en el contexto cotidiano del cero referente a frases de uso popular que dejan vislumbrar ciertos matices de las características del cero.

Adicional al uso del cero para numerar, es evidente que los estudiantes logran identificar con facilidad su *uso para medir* relacionado con diferentes magnitudes (ver Figura 20); algunos ejemplos que mencionan son temperatura muy fría (0 °C), altura de una ciudad costera (0 m.s.n.m.), cuerpo en reposo (velocidad cero), velocidad constante (aceleración cero) y como resultado de sumar todas las fuerzas en física.

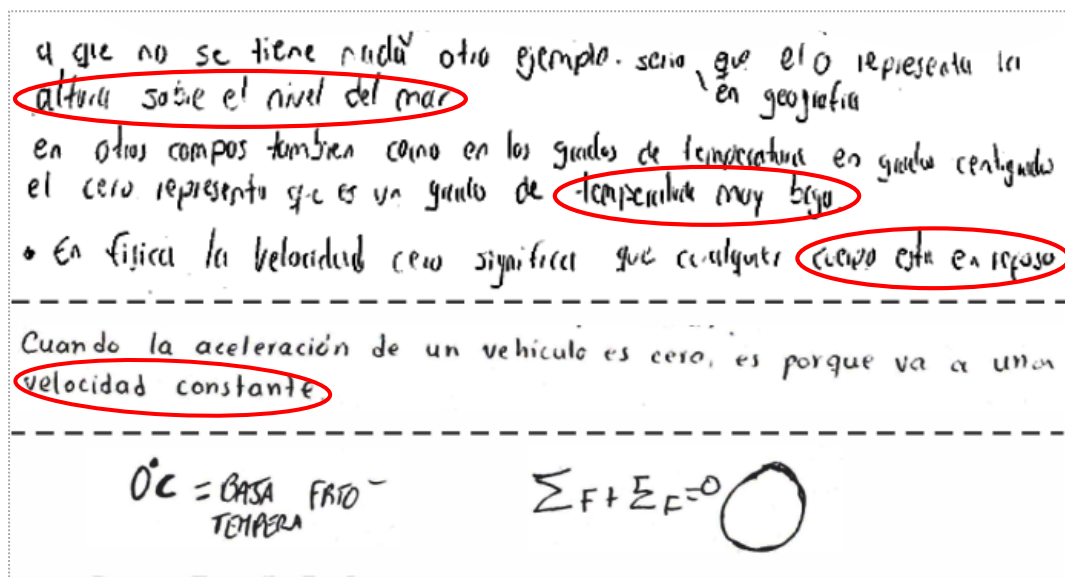


Figura 20. Ejemplos del cero para medir

El cero posee características particulares que lo hacen especial entre los demás números, a tal punto que su uso para operar muchas veces está condicionado a reglas difíciles de comprender. Según Barrow (2012) históricamente las primeras relaciones del cero con las operaciones fueron estudiadas por los matemáticos hindúes, destacándose el trabajo de Brahmagupta (siglo VII), quien fue el primero en definir las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) con el cero; la división rompía por completo la idea de operación numérica, pues no era tan inmediata como las demás y fueron necesarios más de diez siglos para que John Wallis en el siglo XVII lograra definir la división por cero como infinito usando nociones de límite en el cálculo infinitesimal (Romig, 1924). Es de aclarar que esta definición es aceptada en análisis en matemáticas, pero que no trasciende a la definición de las operaciones en los conjuntos numéricos.

Debido a la concepción histórica de las operaciones con el cero y las dificultades que se presentan especialmente con la división, en el cuestionario (ver Anexo 2) se planteó una pregunta con el fin de establecer las opiniones sobre esta operación. Algunas respuestas se muestran a continuación:

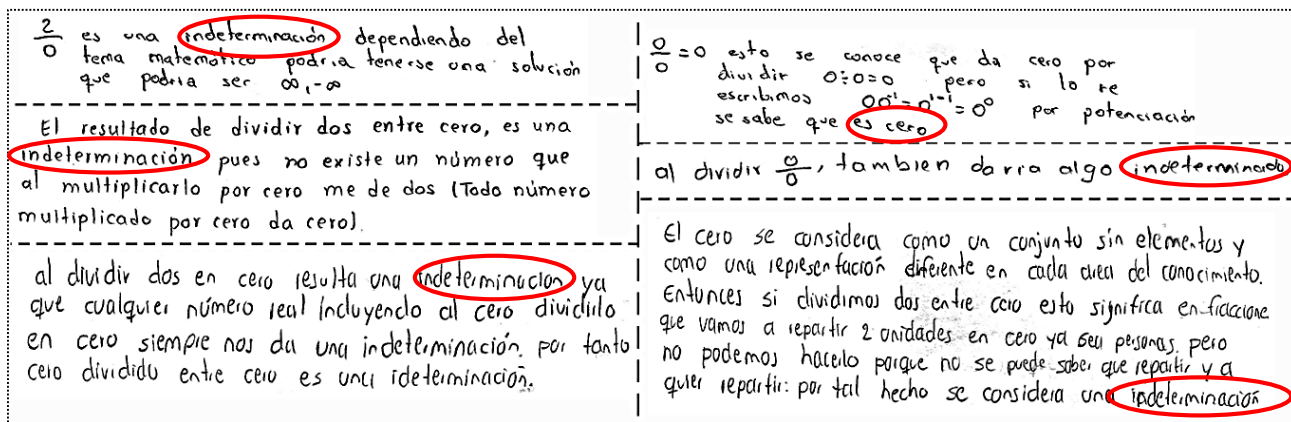


Figura 21. Respuestas relacionadas con la división por cero

Es recurrente el uso del término “indeterminación” para explicar la imposibilidad de dar una respuesta a la división; D’Amore & Fandiño (2012) afirman que dividir entre cero es un error sintáctico (en aritmética), algo sin sentido lleno de contradicciones o paradojas que se debe evitar a toda costa, aunque existen ocasiones en las que es necesario recurrir a ejemplos en matemáticas¹¹ para justificarlo y así evadir el uso de reglas que el estudiante deba memorizar. Otra dificultad al dividir por cero, según Veiga (2014), es la nula importancia que se le presta al contexto en el que se presenta, por lo general no se diferencia entre el contexto aritmético, el algebraico o el cálculo infinitesimal, ya que es posible que su resultado exista.

¹¹ Recomendando revisar los ejemplos que describen D’Amore y Fandiño (2012) en las páginas 32 y 33.

Operar con el número cero requiere de un cuidado especial en virtud de las propiedades particulares que posee y que en ocasiones van en oposición a la intuición numérica que tiene el estudiante, situación que lleva a evitar operarlo dada la complejidad en su comprensión (Joseph, 2008); se evidencia que la mayoría de los estudiantes manifiestan dificultades a la hora de argumentar sus respuestas sobre el *uso del cero para operar*.

Sobre los usos e interpretaciones de los estudiantes en formación inicial sobre el cero, es de destacar que la representación que más utilizan como imagen conceptual del cero es la ausencia de objetos o su equivalencia con la nada; para los estudiantes es más fácil explicar los casos en los que el cero se usa de forma permutable con la nada, que proponer ejemplos en los que se rompa esta relación.

En consecuencia, es natural que se relacione el cero con el cardinal del conjunto vacío, a fin de evidenciar un uso parcial del cero para contar, pues se percibió una gran dificultad para proponer ejemplos del cero como número usado como ordinal, ya que los estudiantes intentaron dar algunos ejemplos en los que se usa el cero como el primer número ordinal, pero sin explicarlo con claridad.

De la misma manera, existe una notoria dificultad para operarlo adecuadamente, particularmente cuando se trata de la división; se percibe una apropiación memorística de algunas reglas que se deben tener en cuenta para dividir por cero, sin una aparente apropiación del algoritmo que les permita explicar los resultados que se obtienen. Existe una sensación de impotencia en torno a la noción de “indeterminación”, al no poder explicar con claridad lo que ocurre cuando se divide por cero, más aún cuando el dividendo también es cero.

Finalmente, la gran mayoría de los ejemplos que propusieron los estudiantes estaban relacionados con el cero usado para numerar y para medir, no solo como valor de referencia, sino visto en un panorama más amplio que les permitió relacionarlo con diferentes sucesos en los que aparece para identificar, codificar o señalar, y en relación con algunas magnitudes para describir o clasificar medidas; esta manera de usar el cero está frecuentemente relacionada con ejemplos de la vida cotidiana en relación con objetos concretos.

El cero es un objeto matemático multifacético que puede ser usado como símbolo, número, magnitud, separador de dirección, marcador posicional, entre otros más, lo que puede generar en el campo de la educación matemática la aparición de errores recurrentes relacionados con la confusión que genera su presencia y a la ausencia de comprensión de sus usos y significados, lo que necesitaría en gran medida de una didáctica particular para el cero (D'Amore & Fandiño, 2012).

El cero en contextos de enseñanza

Las concepciones que tienen los estudiantes en formación inicial frente a las interpretaciones del cero como número son tenidas en cuenta para su enseñanza, partiendo de su relación con la enseñanza según Flores (1998) que menciona:

El contacto de los estudiantes [en formación inicial de profesores] con la enseñanza es discente, no docente. En esta situación, los estudiantes carecen de referentes que le permitan contrastar sus representaciones sobre el conocimiento matemático y sobre la enseñanza de las matemáticas. Esto hace que estas representaciones pertenezcan al terreno de las creencias de los estudiantes para profesor. (§1.3.4)

En este sentido, las creencias frente a la enseñanza del cero y su relación con las interpretaciones que se lograron percibir en las situaciones de enseñanza fueron tenidas en cuenta de manera teórica, omitiendo su posible aplicabilidad.

Para lograr percibir las propuestas que los estudiantes realizan para la enseñanza del cero, la segunda actividad de la situación de enseñanza *construyendo la historia desde “cero”* (Anexo 1), se propuso a los estudiantes que interpretaran el cero representado en un billete de cero euros (ver Figura 22), para ser usado en una situación de enseñanza de los números.



Figura 22. Billeto cero euros Descartes.

Fuente: EuroSouvenir (2018).

El billete que es avalado por el Banco Central Europeo cuenta con todas las características de seguridad de un billete normal e impreso en papel moneda; un billete con un uso particular que los estudiantes intentaron interpretar desde las concepciones personales del cero, Algunas de las respuestas se relacionan a continuación:

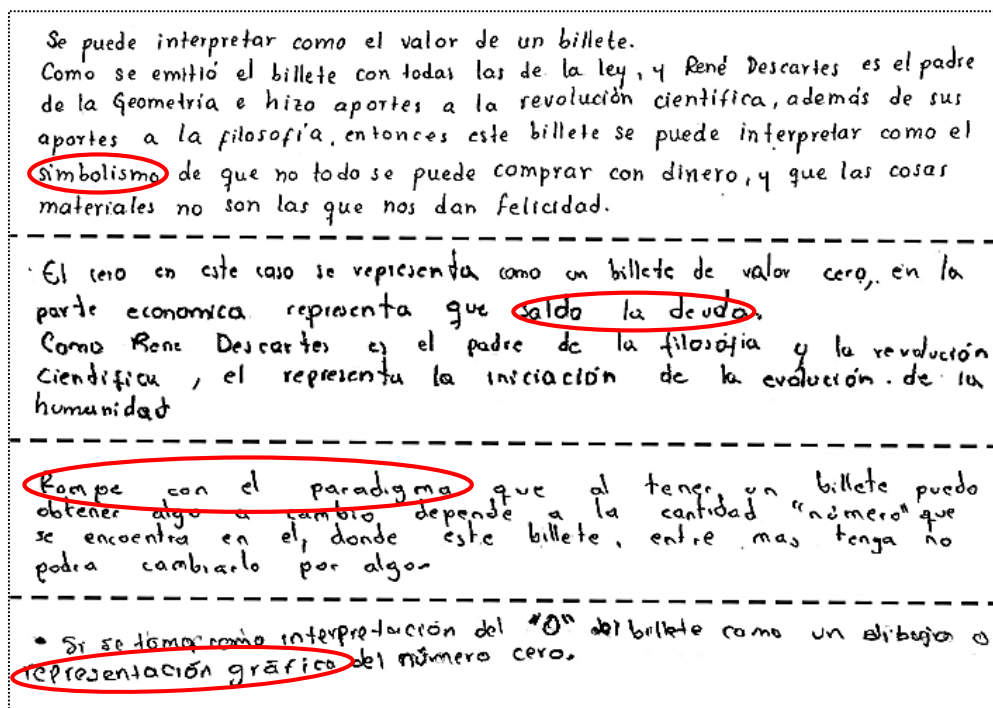


Figura 23. Interpretaciones del billete de cero euros

La noción del dinero se refleja en el valor que se les da a los billetes, que está directamente relacionado con su denominación; para algunos tener un billete con la denominación cero rompe el paradigma del valor comercial que poseen los billetes. Por otro lado, varios estudiantes intentaron darle una interpretación a partir de su relación con la imagen de René Descartes, y otros sencillamente se basaron en la representación gráfica del cero como signo. En todo caso intentaron relacionar el cero con los usos prácticos de los billetes.

Después de interpretar el cero en la actividad propuesta (ver Anexo 1), debían plantear una situación de enseñanza a partir de los billetes como recurso didáctico. La propuesta de Sandra (ver Figura 24) de trabajar el cero en transición (niños de cinco años) está muy bien fundamentada por D'Amore y Fandiño (2012), aunque el recurso didáctico no le brindó un ambiente propicio para su aprendizaje; es así que Sandra manifiesta dificultad para usar los billetes como recurso para

enseñar los números, por lo que prefiere omitir la presencia del cero para enfocar la enseñanza en los diferentes números que aparecen en el billete, una práctica muy común cuando el cero aparece y complica las cosas (Jooste, 2012).

- Ejemplo. Situación de enseñanza de los números.

Grado de aplicación: Transición.

Teniendo en cuenta varios de los elementos del billete, y suponiendo que mentalmente ya saben contar, entonces se pueden usar elementos como la cantidad de estrellitas que hay en el billete, cantidad de lados que tiene el billete y elementos así para que además se relacionen con la búsqueda de la representación del número correspondiente a la cantidad que se encuentre en el número de serie del billete.

Figura 24. Situación de enseñanza propuesta por Sandra.

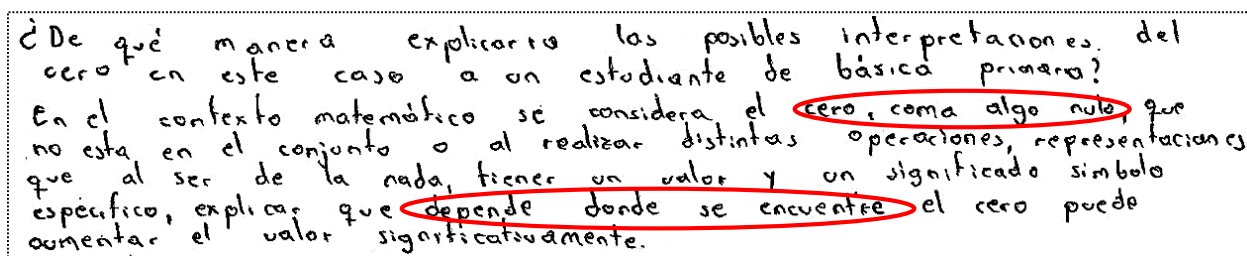
Ana propone enseñar los números desde su representación pictográfica como base principal para su conceptualización (ver Figura 25), lo que repercute en una conceptualización débil de número, lo que podría complicar en los niños la construcción del cero como número.

- Para lograr que el estudiante entienda la representación gráfica del número cero, pues haría un dibujo de él, y de los demás números dando a entender a los estudiantes como es la representación gráfica que se tiene de cada uno de ellos, y que el número uno no es el 1, sino que está es su representación para lograr entender el concepto de un número y así con los demás números.

Figura 25. Situación de enseñanza propuesta por Ana.

Las propuestas de los estudiantes dan cuenta de sus creencias sobre el cero, de las cuales un buen número estaban relacionadas con la representación del cero como cifra (representativamente es el caso de Juan, Figura 26), muchas veces ligadas a la concepción de la nada y lo que da cuenta de

una percepción del cero que es impuesto sin la oportunidad de cuestionarlo, característica de un objeto *dogmático*. Desde esta perspectiva es difícil lograr la conceptualización del número cero en situaciones de enseñanza, pues es necesario basarse en un buen número de representaciones (Sotos, 2004).



¿De qué manera explicar las posibles interpretaciones del cero en este caso a un estudiante de básica primaria?
En el contexto matemático se considera el cero, como algo nulo, que no está en el conjunto o al realizar distintas operaciones, representaciones que al ser de la nada, tienen un valor y un significado simbólico específico, explicar que depende donde se encuentre el cero puede aumentar el valor significativamente.

Figura 26. Propuesta de enseñanza de Juan.

En la primera actividad, las situaciones de enseñanza estuvieron condicionadas a un material concreto (el billete de cero euros), lo que limitó de alguna manera las representaciones que hicieron los estudiantes en sus propuestas; así que, con el fin de promover el uso de otros contextos en la consolidación de nuevas propuestas, se aplicó la segunda situación de enseñanza, *contextos de aplicación* (Anexo 3).

La mayoría de estas nuevas propuestas de enseñanza estuvieron enfocadas a trabajar el cero en los grados quinto y sexto del nivel de educación básica (ver Figura 27), lo que llevaría a asumir que la edad para conceptualizar el cero es entre los diez y once años, pasando por alto que a edades tempranas es posible trabajar el número cero. D'Amore y Fandiño (2012) mencionan que los niños entre tres y seis años poseen un uso espontáneo del cero, que debería tenerse en cuenta en la escuela para abordar el tema, sin la necesidad de presentarlo como un objeto extraño del que se debe tener cuidado.

1. Curso al que va dirigido: Sexto
Curso dirigido: Grado quinto de Primaria.
① Básica, Grado 6º
1. CURSO: QUINTO GRADO
① Grado sexto
1. Grado 6º

Figura 27. Cursos al que van dirigidas la mayoría de las propuestas.

Al ver el cero como un número extraño, es recurrente que el docente lo presente como un objeto matemático complejo, lo que implica que se le solicite al estudiante un dominio especial en temas avanzados para trabajar con cero. Este problema se evidenció en los prerrequisitos o preconceptos (ver Figura 28) que los estudiantes establecieron para trabajar con el cero en sus propuestas de enseñanza, asumiendo como conjunto inicial para trabajar con el cero los números enteros, desconociendo de algún modo que también es posible enseñarlo desde el conjunto de los números naturales que es el conjunto numérico que se estudia con más rigor en básica primaria, subestimando las capacidades de los estudiantes de trabajar adecuadamente en primaria con el cero.

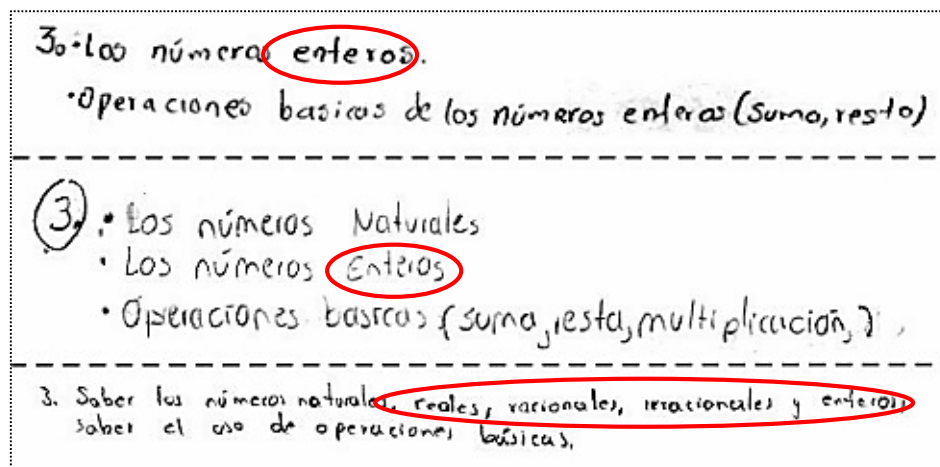


Figura 28. Preconceptos establecidos en algunas situaciones de enseñanza.

Las propuestas de enseñanza enfatizadas en las operaciones se basaban, por lo general, en la aplicación de algoritmos con una baja tendencia a la resolución de problemas, limitando de alguna manera la relación de los números al contexto matemático, lo que lleva a olvidar la aplicación de las matemáticas en el contexto cotidiano de los estudiantes; sobre la interpretación del cero en situaciones de enseñanza se destaca su uso para operar, como se evidencia en las propuestas de Vilma y Tatiana.

En su propuesta, Vilma (ver Figura 29) se concentra en evaluar el uso del cero para operar partiendo de algunos problemas por cada operación; se percibe, inmersa en la propuesta, una interpretación del cero como cifra, lo que condiciona los problemas únicamente a la posición y no a las propiedades operativas del cero, situación que presenta una imagen *dogmática* del cero. Se identifica una dificultad en la comprensión de las imágenes del cero, lo que puede repercutir en una incorrecta concepción del cero para operar.

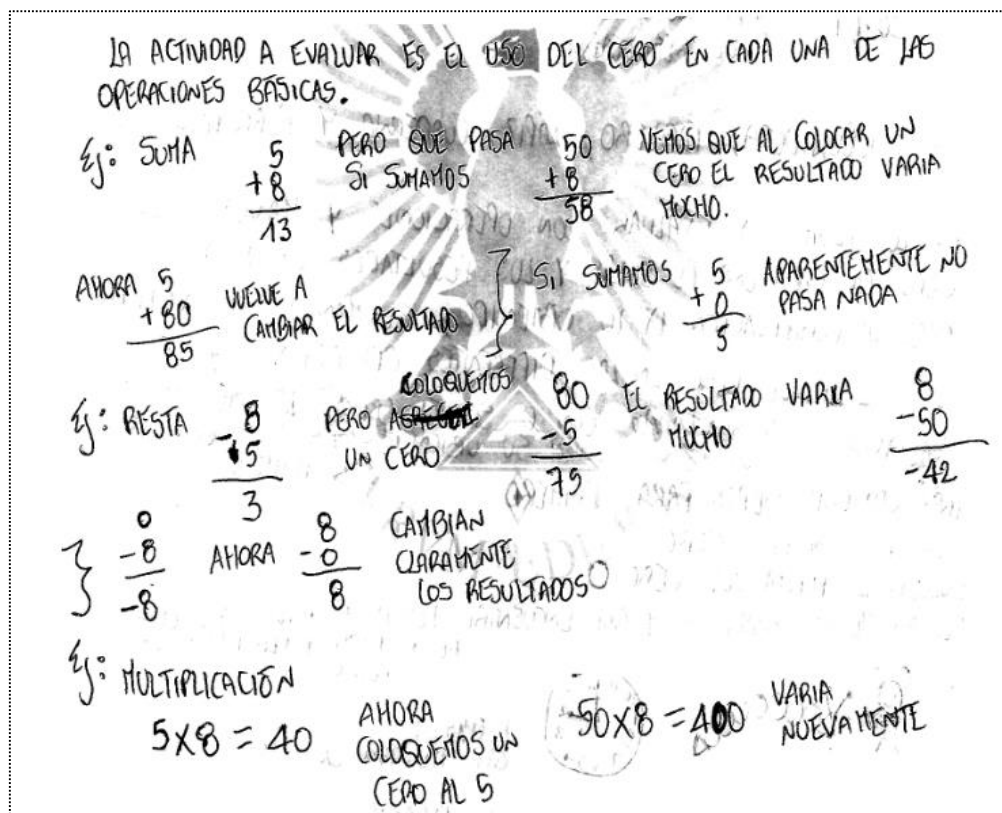


Figura 29. Propuesta de Vilma para la enseñanza de las operaciones con cero.

Por otro lado, la propuesta de Tatiana (ver Figura 30) presenta algunas inconsistencias relacionadas con el cero en la división; primero define la regla que dividir por cero “no se puede”, y más adelante, en algunos ejemplos en la que representa la división en forma de fracción, la omite pasando por alto que en esta representación el divisor se ubica en el denominador y cuando este es cero “no se puede” realizar la división. Estos ejemplos evidencian una gran dificultad en diferenciar entre infinito, cero y error.

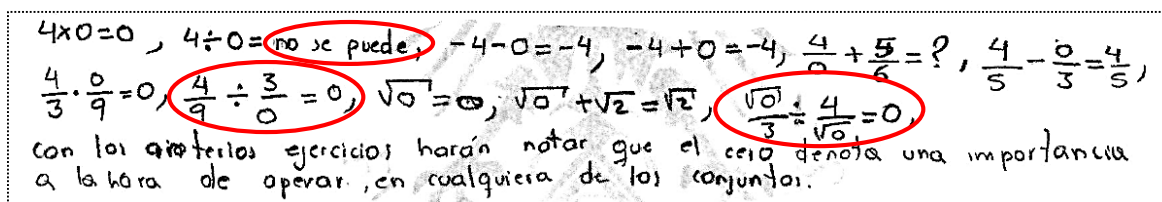


Figura 30. Propuesta de Tatiana para la enseñanza de las operaciones con cero.

D'Amore y Fandiño (2012) sugieren que las inconsistencias relacionadas con la división por cero se pueden evitar, si se procura utilizar algunos ejercicios prácticos para convencer al estudiante de que es un error sintáctico, en lugar de imponer reglas que deben memorizar sin cuestionarlas. Cataño (2007) menciona el caso de una estudiante que expresa en una entrevista el sentimiento de ira y frustración por la imposición de esta regla por parte de su docente, la cual debía memorizar sin posibilidad de cuestionar.

Otro aspecto que influye considerablemente en las respuestas del estudiante es el contrato didáctico, ya que si el profesor propone una operación, ésta siempre es posible hacerla para dar una respuesta numérica, lo que lleva al estudiante intrínsecamente a condicionar sus respuestas sin lugar a cuestionarlas (Veiga, 2014), lo que genera obstáculos de índole didáctico.

En las propuestas además del uso del cero para operar, se evidenció el uso del cero para medir (ver Figura 31), pero de manera independiente sin ninguna relación aparente con las demás representaciones, hecho que evidencia una conceptualización pobre sobre las interpretaciones del cero.

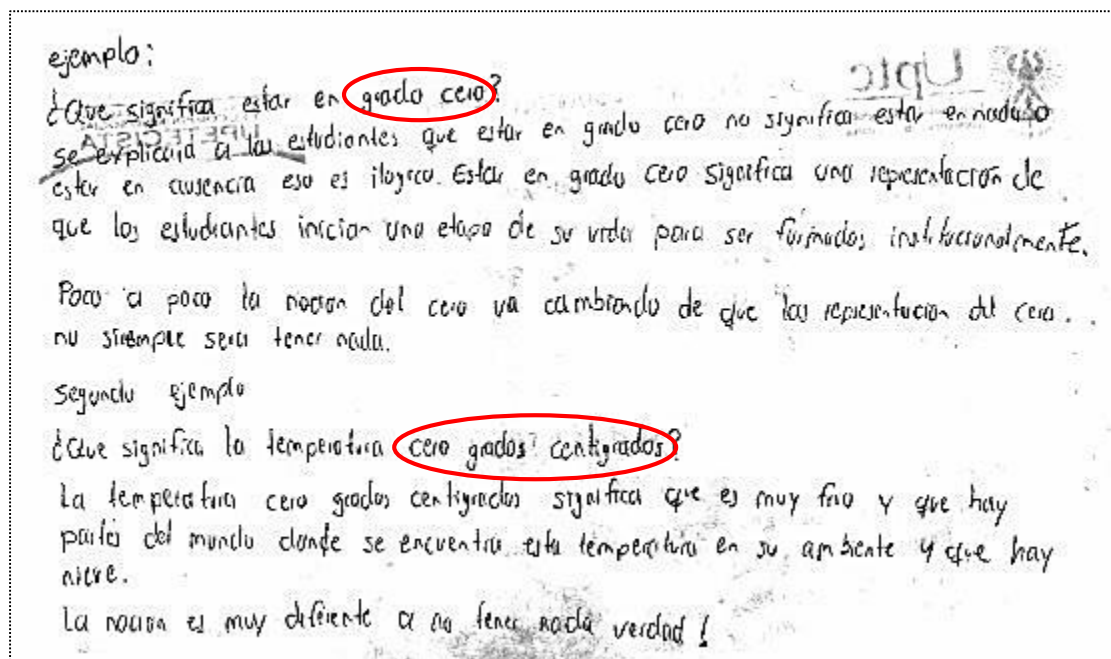


Figura 31. Propuestas sobre el cero para medir

Las propuestas estuvieron orientadas a enseñar los usos del cero para operar, medir y numerar, dirigidas a los cursos de primero, quinto y sexto; la mayoría de las propuestas se encaminaron a enseñar las operaciones con el cero en el grado sexto, aunque no siempre de manera correcta. Las interpretaciones del cero en contextos de enseñanza se basan en gran medida en su representación gráfica; los estudiantes en formación enfatizan sobre todo en el cero como signo (usado para numerar), omitiendo en la mayoría de los casos las demás representaciones.

Se manifiesta una gran tendencia a enfocar la enseñanza del cero particularmente a su uso para operar, lo que demuestra una falta de articulación entre las concepciones y creencias de los estudiantes en formación sobre el cero y su aplicación en situaciones de enseñanza, posiblemente debido a su papel discente frente a la enseñanza del cero.

La construcción histórica del cero constituye un referente importante sobre las dificultades y problemas que el hombre ha tenido para lograr conceptualizar el cero, lo que constituye un verdadero obstáculo epistemológico (D'Amore & Fandiño, 2012). Esto se fundamenta en los problemas iniciales de su concepción, al pasar de ser un signo que representaba una posición vacía (Babilonia siglo XVII a. C.), para convertirse en número (India siglo VII d. C.) con características esenciales para ser usado como tal. Todos estos problemas epistemológicos de alguna manera se perciben en los errores en que incurren los estudiantes, sin discriminar el nivel en el que se encuentren.

Es así como en la escuela muchos de estos conflictos epistemológicos trascienden a tal punto que el cero termina siendo estigmatizado, lo que predispone negativamente al estudiante en su conceptualización. El docente juega un papel fundamental, ya que sus temores o falta de comprensión frente al cero son transmitidos de manera inconsciente a sus estudiantes, generando algunos obstáculos didácticos. Por esta razón, se consideró pertinente analizar las posibles interpretaciones que le confieren los estudiantes en formación inicial al proponer situaciones de enseñanza para el cero.

Conclusiones

La construcción histórica y epistemológica que se realizó sobre el cero permitió identificar los aspectos importantes en su construcción, destacando los aportes culturales realizados por cada una de las civilizaciones; entre los que se destacan la interpretación como valor de referencia (Egipto), su valor posicional (Mesopotamia), su uso como cifra y como número (India), entre otros. Así, se logró identificar un número considerable de interpretaciones que fueron necesarias para el análisis de las secuencias didácticas.

Otro aporte que se destaca del estudio epistemológico es reconocer su papel multifacético, pues es usado como símbolo, número, magnitud, valor de referencia y marcador posicional; usos que identificaron los estudiantes en las interpretaciones realizadas.

Para concebir el cero como número fue necesario comprender sus propiedades aritméticas, las cuales surgieron con dificultad en India a inicios del siglo VI d. C., gracias a los estudios de Brahmagupta, lo que ratifica que operar con cero es un proceso cognitivo complejo, que puede considerarse un obstáculo epistemológico para su aprendizaje.

En la consolidación del cero como número se identificó que su relación intrínseca con la nada (o el vacío) generó grandes malestares en la Grecia medieval, pues la formalización que se intentaba hacer de las matemáticas estaba basada en teorías filosóficas y lógicas, desde las cuales el cero era difícil de comprender (Barrow, 2012; Betti, 2017); esta postura frente al cero condicionó su desarrollo al trabajo en las ciencias de los árabes, lo que retrasó su llegada a Europa y también, su aceptación como número. Este inconveniente trasciende su enseñanza, pues en el desarrollo de las situaciones de enseñanza se percibió que la mayoría de los estudiantes poseen una gran dificultad

para separar el cero de su relación natural con la nada, lo que generó algunas dudas en las interpretaciones que intentaban consolidar en sus propuestas de enseñanza.

Dentro de los significados institucionales, el cero como representación de vacío es la concepción más recurrente del grupo de estudiantes en formación inicial, lo que lleva a condicionar, en gran medida, las interpretaciones en situaciones de enseñanza a unas pocas imágenes del cero como número.

En el contexto de las matemáticas, algunas interpretaciones que dieron los estudiantes sobre el cero se relacionan en geometría con la representación abstracta de un punto o la pendiente de una recta constante. Por otra parte, existe una notoria dificultad para operarlo adecuadamente, debido a la particularidad de sus características aritméticas; en ocasiones, los errores están relacionados con la omisión de la propiedad clausurativa en el conjunto numérico en el que se realizan las operaciones.

Adicionalmente, los estudiantes cuando intentan explicar las operaciones con cero tienden a recitar algunas reglas que han memorizado para dar sus respuestas como un *dogma*; es el caso de dividir por cero, que la mayoría responde, casi al unisonó que es indeterminado (ver Figura 21). Estas reglas son transmitidas por el docente, muchas veces para esconder sus conflictos personales frente al cero (D'Amore y Fandiño, 2012), lo que lleva al estudiante a percibirlo con incertidumbre.

Históricamente la división por cero ha generado varios conflictos en su consolidación, gracias a las características particulares del cero, Seife (2006) al respecto menciona que “[...] dividir por cero destruye por completo el armazón de las matemáticas” (p. 31). Esto se pudo percibir en las discusiones que se llevaron a cabo en el desarrollo de las situaciones de enseñanza, puesto que no

es claro para los estudiantes las implicaciones de dividir por cero, de manera que no diferencian entre infinito, cero o error como respuesta a la operación.

En el contexto cotidiano la mayoría de las interpretaciones que realizaron los estudiantes, estaban relacionadas con el cero para numerar y medir, lo que facilitó que logaran separarlo de su representación usual de la nada. Entre los ejemplos más recurrentes se encuentran en la representación de la media noche (cuando en el reloj digital aparece 00:00), una ciudad costera (que se encuentra al nivel del mar), una temperatura muy fría (0°C), el empate sin goles en un juego de fútbol ($0 - 0$), entre otros. En estos usos se percibe la relación del cero con objetos concretos que facilitaron la interpretación del cero en contextos diferentes al de las matemáticas.

En las situaciones de enseñanza propuestas por los estudiantes se percibe una tendencia casi general en proponer problemas basados en la aplicación de operaciones en las que, por lo general, son usados números distintos de cero, lo que evidencia una predisposición desfavorable hacia este número. De esta manera se corrobora que “[...] en las aulas de todo el mundo, cero constituye un problema cognitivo significativo” (D’Amore y Fandiño, 2012, p. 58).

En consecuencia, la mayoría de las interpretaciones del cero en contextos de enseñanza están basadas en gran medida en su representación gráfica; los estudiantes que participaron en la investigación enfatizan sobre todo en el cero como signo (el caso de Vilma, Figura 29), omitiendo en la mayoría de los casos las demás representaciones; lo que evidencia una conceptualización basada en un número reducido de representaciones del cero en contextos de enseñanza.

Estos problemas en torno al cero en la educación matemática son promovidos sin intención por parte del docente y generan algunos obstáculos didácticos posibles de evitar; estos conflictos están

relacionados con las interpretaciones que se le dan al cero, las cuales, en el caso particular de la investigación, fueron tomadas desde su posición discente sobre la enseñanza del cero.

En consecuencia, se sugiere que el futuro docente en matemáticas desde la historia cuente con las herramientas necesarias en su formación para tomar una postura crítica frente a la enseñanza de las matemáticas, ya que en particular, si el futuro profesor desconoce la historia del cero y las características que lo diferencian de los demás números, tendría algunos problemas a la hora de enseñar este objeto matemático.

Referencias

- Aczel, A. (2016). *En busca del cero: la odisea de un matemático para revelar el origen de los números* (J. Grau, Trad.). Barcelona: Biblioteca Buridán.
- Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Grao.
- Anaconda, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista EMA*, 8(1), 30-46.
- Arboleda, L. C. (1984). Historia y enseñanza de las matemáticas. *Quipu, Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología*, 1(2), 167-194.
- Armengol, V. (2010). *Los incas*. Madrid: Tikal - Susaeta.
- Arsham, H. (1994). *Zero in Four Dimensions: Cultural, Historical, Mathematical, and Psychological Perspectives*. Retrieved from <http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/zero/zero.htm>
- Asimov, I. (2000). *De los números y su historia* (F. Rodríguez, Trad.). Buenos Aires: El Ateneo.
- Barbin, E. (2006). Apports de l'histoire des mathématiques et de l'histoire des sciences dans l'enseignement. *Tréma*, (26), 20-28. doi: 10.4000/trema.64.
- Barrow, J. (2012). *El libro de la nada* (J. García, Trad.). Barcelona: Crítica.
- Berggren, J. (1986). *Episodes in the mathematics of medieval Islam*. New York: Springer-Verlag. doi:10.1007/978-1-4612-4608-4
- Berlinghoff, W. P. & Gouvêa, F. Q. (2010). *A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas*. (E. Gomide & H. Castro, Trad.). São Paulo: Edgard Blucher.
- Betti, R. (2017). Z for Zero. *Lettera Matematica*, 5(2), 217–220. <https://doi.org/10.1007/s40329-017-0180-6>
- Bodleian Libraries, University of Oxford. (2017). *Carbon Dating Finds Bakhshali Manuscript Contains Oldest Recorded Origins of the Symbol 'Zero'*. Retrieved from <https://www.bodleian.ox.ac.uk/bodley/news/2017/sep-14>

- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 33-115. Recuperado de <https://es.scribd.com/document/254759888/Brousseau-G-Fundamentos-y-Metodos-de-La-Didactica-de-Las-Mat-Univ-Zaragoza>
- Burton, D. (2011). *The History of Mathematics*. (7th ed.). New York: McGraw-Hill.
- Cabrera, F. C. (2005). Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa. *Theoria*, 14(1), 61-71.
- Canedo, S. (2009). *Contribución al estudio del aprendizaje de las ciencias experimentales en la educación infantil: cambio conceptual y construcción de modelos científicos precursores*. (Tesis doctoral). Universidad de Barcelona, Barcelona, España.
- Castillo, R. (2011). *Aryabhata, Brahmagupta y Bhaskara. Tres matemáticos de la India*. Madrid: Nivola.
- Castro, E., Rico, L. & Castro, E. (1996) *Números y operaciones: fundamentos para una aritmética escolar*. Madrid: Síntesis.
- Cataño, A. (2007). *Estudio didáctico del cero*. (Tesis de maestría). Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México.
- Ciro, O. (2011). *Historia y epistemología del número*. Bogotá: Fibonacci.
- Clark, K., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., Tzanakis, C., & Wang, X. (2016). History of Mathematics in Mathematics Education: Recent Developments. In L. Radford, F. Furinghetti, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting—HPM 2016*. Retrieved from <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01349230>
- Cock, E. & Rodríguez, D. (2012). Una tesis de cero: concepciones de los estudiantes de prima y seconda elementare del Colegio Italiano Leonardo da Vinci acerca del cero cardinal y el cero posicional. (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Cœdès, G. (1931). À propos de l'origine des chiffres arabes. *Bulletin of the School of Oriental Studies, University of London*, 6(2), 323-328. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/607661>

- Collette, J. (1991). *Historia de las matemáticas* (Vol. I). Madrid: Siglo XXI.
- Contreras, F. (2013) Epistemología del número cero. *Horizonte de la Ciencia*, 3(4), 43-48.
<https://doi.org/10.26490/uncp.horizonteciencia.2013.4.58>
- Crespo, J. (2003). La representación de la ausencia por medio de una presencia: el Cero. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16(1), 33-39.
- D'Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Revista Uno*, 27, 51-76.
- D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. Barcelona: Reverté.
- D'Amore, B. (2006a). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Didácticas Magisterio.
- D'Amore, B. (2006b). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 9(1), 177-196.
- D'Amore, B. (2007a). El papel de la epistemología en la formación de profesores de matemática en la escuela secundaria. *Cuadernos del Seminario en Educación*, (8).
- D'Amore B. (2007b). Lo zero, da ostacolo epistemologico a ostacolo didattico. *La Matematica e la sua Didattica*, 21(4), 425-454.
- D'Amore, B. & Fandiño, M. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior. *Epsilon*, 58, 20 (1), 25-43.
- D'Amore, B. & Fandiño, M. (2012). *El número cero: aspectos históricos, epistemológicos, filosóficos, conceptuales y didácticos del número más misterioso*. Bogotá D.C.: Corporación Editorial Magisterio.
- Dantzig, T. (1971). *El número: lenguaje de la ciencia*. (M. Balanzat, Trad.) Buenos Aires: Hobbs – Sudamericana.
- Diller, A. (1996) New Zeros and Old Khmer. *Mon-Khmer Studies Journal*, 25, 125–132. Retrieved from <http://sealang.net/sala/archives/pdf8/diller1996new.pdf>

- Divakaran, P. P. (2018). *The Mathematics of India. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*. [Versión de Springer]. doi:10.1007/978-981-13-1774-3
- Doval, H. (2005). El nacimiento de los números y el cero. Del ábaco decimal a la computadora digital binaria. *Revista Argentina de Cardiología*, 73(4). Recuperado de http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1850-37482005000400015
- Duque, H. (2013). *El sentido del número en la cultura maya*. (Tesis de maestría). Universidad Tecnológica de Pereira, Risaralda, Colombia.
- EuroSouvenir (2018). *Descartes la ville du philosophe* [figura]. Recuperado de <http://www.euro-souvenir.fr/>
- Fedriani, E. & Tenorio, A. (2004). Los sistemas de numeración maya, azteca e inca. *Lecturas Matemáticas*, 25(2), 159-190.
- Fernández, L. (2006). Fichas para investigadores ¿Cómo analizar datos cualitativos? *Butlletí LaRecerca*. Recuperado de <http://www.ub.edu/ice/recerca/pdf/ficha7-cast.pdf>
- Filloy, E. (1981). Investigación en matemática educativa en México. Un reporte. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2 (2), 233-256.
- Florentini, D. & Lorenzato, S. (2010). *Investigación en educación matemática: recorridos históricos y metodológicos*. (A. Jiménez, Trad.). Campinas, SP: Editora Autores Associados.
- Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.
- Freudenthal, H. (1981). Should a Mathematics Teacher Know Something about the History of Mathematics? *For the Learning of Mathematics*, 2(1), 30-33.
- Gardner, H. (1993). *Educare al comprendere*. Milán: Feltrinelli.
- Godino, J. (2002). Hacia una teoría de la instrucción matemática significativa. *Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática"*. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/05_InstruccionMS.pdf

- Godino, J. & López, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Granada: Universidad de Granada. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf.
- Godino, J. & Rodríguez, A. (1991). *Área de conocimiento: didáctica de la matemática*. Madrid: Síntesis.
- Gómez, B. (1993). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.
- Gómez, C. (2009). *Matemáticas en la antigua China: una isla en el mar*. Sevilla: Servicio de Publicaciones Universidad de Sevilla.
- González, F., Martín, M. & Silván, E. (2010). Prehistoria de la matemática y mente moderna: pensamiento matemático y recursividad en el Paleolítico franco-cantábrico. *Dynamis*, 30, 167-195.
- González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista Suma*, 45, 17-28.
- Gutiérrez, T. (2009). *Las matemáticas a lo largo de la historia de la prehistoria a la Antigua Grecia*. Madrid: Visión Libros.
- Guzmán, de M. (1991, sep.). Tendencias innovadoras en educación matemática. En *III Simposio Iberoamericano sobre Enseñanza de la Matemática*. Buenos Aires, Argentina.
- Ifrah, G. (1987). *Las cifras: historia de una gran invención*. Madrid: Alianza.
- Jaouiche, K. (2011). India's Contribution to Arab Mathematics. *Indian Journal of History of Science*, 46(2), 189–204.
- Jaramago, M. (2008). *El papiro Boulaq: una síntesis actualizada*. [Figura]. Recuperado de <http://egiptologia.com/papiro-boulaq-sintesis-actualizada/>
- Jiménez, A. & Pineda, L. (2013) Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. *Educación y Ciencia*, 16, 101-116. Recuperado de https://revistas.uptc.edu.co/index.php/educacion_y_ciencia/article/download/3243/2920/0

- Jiménez, A., Díaz, M. & Leguizamón, J. (2011). Propuesta de modelo pedagógico para formar licenciados en matemáticas. *Praxis & Saber*, 2(3), 61-86. Recuperado de https://revistas.uptc.edu.co/index.php/praxis_saber/article/view/1110
- Jiménez, A., Suarez, N. & Galindo, S. (2010). La comunicación: eje en la clase de matemáticas. *Praxis & Saber*, 1(2), 173-202. <https://doi.org/10.19053/22160159.1104>
- Jooste, Z. (2012). *Why do Learners and Teachers Experience Problems with the Concept of Zero?* (Tesis de maestría). Rhodes University, Grahamstown, South Africa.
- Joseph, G. (2008). A Brief History of Zero. *Tarikh-e Elm: Iranian Journal for the History of Science*, 6(1), 37-48.
- Kak, S. (1990). The Sign for Zero. *The Mankind Quarterly*, 199-204.
- Kaplan, R. (2004). *Una historia natural del cero: la nada que existe*. México: Océano.
- Katz, V. (2009). *A History of Mathematics: An Introduction*. Boston: Addison-Wesley.
- Krause, M. (1995). La investigación cualitativa: un campo de posibilidades y desafíos. *Revista Temas de Educación*, 7(7), 19-40.
- Lam, L. (1988). A Chinese Genesis: Rewriting the History of our Numeral System. *Archive for History of Exact Sciences*, 38(2), 101-108. <https://doi.org/10.1007/BF00348453>
- Leder, G., Pehkonen, E. & Torner, G. (2002). *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education*. Dordrecht Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Logan, R. (2017). P.S.: The Importance of Nothing. Zero was the Gift from the East that made the Scientific Revolution in the West Possible. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 131, 500–503. <https://doi.org/10.1016/j.pbiomolbio.2017.09.020>
- Lumpkin, B. (2004). *The Mathematical Legacy of Ancient Egypt: A Response to Robert Palter*. Retrieved from www.ethnomath.org/resources/lumpkin1997.pdf.
- Mankiewicz, R. (2000). *Historia de las matemáticas: del cálculo al caos*. Barcelona: Paidós Ibérica.

- Marcelo, C. (2002). La investigación sobre el conocimiento de los profesores y el proceso de aprender a enseñar. En *Pensamiento y conocimiento de los profesores: debates y perspectivas internacionales* (45-60). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Martínez, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje: investigación durante las prácticas de enseñanza*. Granada, España: Comares.
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia -MEN-. (1998). *Lineamientos curriculares*. Bogotá, Colombia: MEN.
- Nieder, A. (2016). Representing Something out of Nothing: The Dawning of Zero. *Trends in Cognitive Sciences*, 20(11), 830–842. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2016.08.008>
- Noreña, A., Alcaraz, N., Rojas, J. & Rebolledo, D. (2012). Aplicabilidad de los criterios de rigor y éticos en la investigación cualitativa. *Aquichan*, 12(3). Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=741/74124948006>
- Novoszel, T. (2016). Viel über das Nichts, die historische und gegenwärtige schulische Bedeutung der Null. (Tesis de maestría). Universität Wien, Viena, Austria.
- O'Connor, JJ. & Robertson EF. (2000). *A History of Zero*. Retrieved from <https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Zero.html>
- Padrão, D. L. (2008). *A origem do zero*. (Tesis de maestría). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.
- Páramo, P. (Comp.). (2017). *La recolección de información en las ciencias sociales. Una aproximación integradora*. Bogotá: Lemoine.
- Paulos, J. (1993). *Más allá de los números: meditaciones de un matemático*. (J. Llosa Trad.). Barcelona: Tusquets.
- Paz, E. (2018). La ética en la investigación educativa. *Revista Ciencias Pedagógicas e Innovación*, 6(1), 45–51. <https://doi.org/10.26423/rcpi.v6i1.219>

- Perafán, G.A. & Adúriz, A. (Comp.). (2002). *Pensamiento y conocimiento de los profesores: debate y perspectivas internacionales*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional Colciencias.
- Pilgaonkar, S. (2014). *The Khipu-Based Numeration System*. [Figura]. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/1405.6093>
- Ponte, J. (1994). Mathematics Teachers' Professional Knowledge (Plenary Conference). In J. P. Ponte & J. F. Matos (Orgs.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, 1, 195-210, Lisbon, Portugal.
- Ponte, J. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132.
- Pogliani, L., Randic, M. & Trinajstić, N. (1998). Much Ado about Nothing. An Introductory Inquiry about Zero. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29(5), 729-744, doi: 10.1080/0020739980290509
- Puttaswamy, T. (2012). *Mathematical Achievements of Pre-modern Indian Mathematicians*. London Waltham, MA: Elsevier.
- Quecedo, R. & Castaño, C. (2002). Introducción a la metodología de investigación cualitativa. *Revista de Psicodidáctica*, (14), Recuperado de: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=175/17501402>
- Riscanevo, L. (2017). *Aprendizaje, experiencia y formación investigativa del profesor de matemáticas: tejiendo historias*. (Tesis doctoral). Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia.
- Riscanevo, L. & Jiménez, A. (2017). El aprendizaje del profesor de matemáticas como campo investigativo. *Revista Historia de la Educación Latinoamericana*, 19(28), 173-196. <https://doi.org/10.19053/01227238.6247>
- Rodríguez, C. (2016). *Acercamiento a la evolución histórica del número cero, en los sistemas de numeración: mediterráneo, oriental y americano*. (Tesis de grado). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.
- Rodríguez, G., Gil, J. & García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Granada: Aljibe.

- Romero, C. (2005). La categorización un aspecto crucial en la investigación cualitativa. *Revista de Investigaciones Cesmag*, 11(11), 113-118.
- Romig, H. (1924) Early History of Division by Zero. *The American Mathematical Monthly*, 3(8), 387-389. Retrieved from <http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9890%28192410%2931%3A8%3C387%3ADEHODB%3E2.0.CO%3B2-9>
- Rotman, B. (1993). *Signifying Nothing: The Semiotics of Zero*. California: Stanford University Press.
- Sañudo, L. (2015). La ética en la investigación educativa. *Hallazgos*, 3(6). doi:<https://doi.org/10.15332/s1794-3841.2006.0006.05>
- Schmidt, P. & Dos Santos, J. (2016). O uso dos quipus como ferramenta de controle tributário e de accountability dos incas. *Revista Brasileira de Gestão de Negócios*, 19(66), 613-626. doi: 10.7819/rbgn.v0i0.3099
- Seife, C. (2006). *Cero. La biografía de una idea peligrosa*. (S. Zimmermann, Trad.). Madrid: Ellago.
- Sen, S. & Agarwal, R. (2015). *Zero: A Landmark Discovery, the Dreadful Void, and the Ultimate Mind*. Amsterdam: Academic Press.
- Sharer, R. (2003). *La civilización maya*. (3.^a ed.). México: Fondo de Cultura Económica.
- Sigler, L. (2012). *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. Nueva York: Springer. doi 10.1007/978-1-4613-0079-3.
- Sotos, M. (2004). ¿En qué piensa el alumno cuando decimos número? *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 37, 93-104.
- Stewart, I. (2012). *Historia de las matemáticas: en los últimos 10.000 años*. Barcelona: Crítica.
- Stewart, I. (2016). *Números increíbles*. Barcelona: Crítica.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

- Torres, L., Guacaneme, E. & Arboleda, C. (2014). La historia de las matemáticas en la formación de profesores de matemáticas. *Quipu, Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología*, 16(2), 203-224.
- Veiga, D. (2014) Análisis socioepistemológico de los obstáculos asociados a la división por cero. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 27, 1655-1663.
- Ventura, M. & Rosa, M. (2015). La historia de las matemáticas en el currículo para la formación de profesores de matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 28, 78-85.
- Vinner, S. (1983). Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.
<http://dx.doi.org/10.1080/0020739830140305>
- Vigotsky, L. (1962). *Thought and Language*. Cambridge: MIT Press.
- Vogel, K. (1966). Principios de la contabilidad hindú. Kushyar Ibn Labban, Martin Levey, Marvin Petruck. *Isis*, 57(1), 129-131. doi: 10.1086 / 350094
- Waerden, B. (1988). *Science Awakening I*. (A. Dresden, Trad.). Dordrecht: Springer Netherlands.
- Waldegg, G. (1989). La evaluación del trabajo académico en Matemática Educativa. *Avance y Perspectiva*. 39 (8). 53-56.
- Waterson, P. (2017). That Strange Number ‘Zero’. *Policy and Practice in Health and Safety*, 15(2), 85-87. doi: 10.1080/14773996.2017.1376404.
- Webb, J. (2015). *Nada, del cero absoluto al olvido cósmico: reflexiones insólitas acerca de la nada*. (D. Otero-Piñero, Trad). Madrid: Alianza.

Anexos

Anexo 1

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Licenciatura en Matemáticas
Asignatura: Didáctica y Educación Matemática II

Construyendo la historia desde “cero”

Objetivo:

Establecer aspectos históricos que den sentido al cero como número.

Actividad 1

Según Mankiewicz (2000), el inicio de las matemáticas es un misterio casi indescifrable, un enigma para la humanidad, es una aventura en la oscuridad que encierra los orígenes de la vida humana y las civilizaciones. Ante el misterio y los enigmas detrás de la historia de las matemáticas, los números aparecen como un faro para guiar el camino del hombre a la evolución, vale la pena, entonces, cuestionarnos específicamente sobre:

¿Cómo cree que surgieron los números?

Berlinghoff y Gouvêa afirman que muchas personas usan la palabra “cero” y “nada” de forma permutable; en algunas situaciones es aceptable, en otras, no.

¿Tiene sentido esta afirmación? Explique su respuesta.

¿En qué circunstancias desde el contexto de la matemática y de la vida cotidiana “cero” significa simplemente la ausencia de cosas y en cuáles circunstancias de hecho representa alguna cosa (posiblemente abstracta)?¹²

Desarrollo de la actividad 1:

- De manera individual realice un escrito argumentando y ejemplificando cada respuesta.
- Comparta y discuta sus respuestas con dos compañeros de clase.

¹² Pregunta tomada de Berlinghoff & Gouvêa (2010, p. 85). *A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas*. São Paulo.

Actividad 2

En Francia, para el 2018, se emitió un billete de 0 euros con la imagen de René Descartes, como reconocimiento a sus aportes a la revolución científica. El billete cuenta con todas las características de seguridad de un billete normal, impreso en papel moneda y avalado por el Banco Central Europeo.



¿Cómo puede ser interpretado el cero en este caso?

¿De qué manera explicaría las posibles interpretaciones del cero en este caso a un estudiante de básica primaria?

¿Qué dificultades o fortalezas presupone pueden ocurrir al dar esta explicación?

Desarrollo de la actividad 2:

- Comparta y discuta sus respuestas con dos compañeros de clase.
- Estructure el anterior ejemplo como situación de enseñanza de los números, acuda a determinar el grado de aplicación y los recursos que usaría.

Anexo 2

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Licenciatura en Matemáticas
Asignatura: Didáctica y Educación Matemática II

CUESTIONARIO

Nombre: _____

Apreciado(a) estudiante en formación, como es de su conocimiento, estoy llevando a cabo una investigación en la línea de formación de profesores de matemáticas, que tiene como objetivo principal **categorizar las interpretaciones de estudiantes en formación inicial de matemáticas sobre el cero como número**, motivo por el cual considero de gran importancia solicitar su apoyo en el diligenciamiento del siguiente cuestionario.

Este instrumento tiene la finalidad de conocer las ideas e interpretaciones de algunos conceptos relacionados con el cero.

Lo invito a responder con sinceridad, justificando sus respuestas, asegurándole que esta información será manejada con la reserva que amerita una investigación responsable, ética y seria.

¿Qué es el número?

¿Para qué se usan y sirven los números?

¿Es cero un número positivo o negativo?

¿Es cero un número par o impar?

¿Qué resulta de dividir dos por cero, y de dividir cero por cero?

¿Cómo se podría usar el cero para medir o describir una medida?

Anexo 3

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Licenciatura en Matemáticas
Asignatura: Didáctica y Educación Matemática II

Contexto de aplicación

Nombre: _____

Para Stewart (2016), “antes del siglo IX d.C., el cero era visto como un símbolo práctico para los cálculos numéricos, pero no se le consideraba un número como tal. Probablemente, porque no contaba nada” (p. 146), fue un camino largo el que tuvo que pasar el cero para ser aceptado como número.

Históricamente, operar con el número cero requiere de un cuidado especial en virtud de las propiedades particulares que lo diferencian de los demás números, que muchas veces lleva a evitar operarlo dada la complejidad en su comprensión.

Como docente en formación diseñé una *situación de enseñanza* del número cero (incluyendo operaciones con cero), en la que destaqué los siguientes elementos:

1. Curso o nivel al que va dirigido.
2. Propósito de aprendizaje
3. Preconceptos (saberes previos)
4. Descripción de las actividades por realizar
5. Recursos
6. Situaciones posibles de evaluación

Anexo 4**Consentimiento informado**

Carta de intención para participar en la investigación que se adelantará durante el primer semestre del año 2019 en el curso Didáctica y Educación Matemática II de la Licenciatura en Matemáticas, UPTC

Queridos(as) docentes en formación,

Esta carta tiene como propósito contextualizar nuestra intención investigativa dentro de las actividades formativas que se desarrollan en el curso Didáctica y Educación Matemática II. Se pretende desarrollar un trabajo investigativo en la Línea de Investigación en Formación de Profesores de Matemáticas y **tiene como objetivo principal categorizar las interpretaciones de estudiantes en formación inicial de matemáticas sobre el cero como número**. Por lo anterior se considera de gran importancia solicitar su colaboración para lograr este objetivo.

En esta investigación se tiene previsto hacer uso de las siguientes fuentes de información: cuestionarios, situaciones didácticas y grabaciones de audio de las sesiones de clase. El proceso de análisis de estas fuentes de información se hará a partir de la transcripción y edición de lo discutido, del desarrollo de las situaciones didácticas y cuestionarios resueltos por cada participante involucrado, y de la aprobación y autorización del participante involucrado para utilizar lo dicho como objeto de investigación y publicación. Lo anterior contempla la posibilidad de identificar o no al participante y, para este último caso, de usar un pseudónimo.

Si ustedes consideran que bajo las especificaciones señaladas se debe hacer alguna modificación o delimitación más concreta, estaremos atentos a recibir las sugerencias. Si está de acuerdo y es su deseo hacer parte de esta investigación, entonces se deberá hacer constar que fue informado mediante esta carta de presentación y, además, deberá autorizar que los análisis de la información

obtenida sean publicados. La participación en esta investigación es absolutamente voluntaria y el manejo de la información recolectada será totalmente confidencial. Se destaca que usted puede, si así lo considera en cualquier momento, desistir de participar en la investigación, o si participa y decide no autorizar el uso de la información, puede hacerlo.

Finalmente, es importante destacar que como docentes en formación encontramos a través del desarrollo de esta intención investigativa la posibilidad de reconocernos junto a ustedes en un aprendizaje mutuo.

Agradecemos de antemano su colaboración,

Jonathan Steven Villamil Pachón

Lida Esperanza Riscanevo Espitia

(Investigadores)

Firma en constancia de ser enterado: _____

Nombre: _____

Lugar y fecha: _____

Anexo 5**AUTORIZACIÓN**

Yo, _____, autorizo a los investigadores, profesores Jonathan Steven Villamil Pachón y Lida Esperanza Riscanevo Espitia para publicar y divulgar por medios electrónicos o impresos, el trabajo que realicé en las actividades propuestas por los investigadores encaminada a categorizar las interpretaciones de estudiantes en formación inicial de matemáticas sobre el cero como número, producto de las actividades promovidas en el curso Didáctica y Educación Matemática II, que dirige uno de los investigadores. Este proceso investigativo se realizó en el primer semestre de 2019.

Tunja, ____ de _____ de 2019

Firma del docente en formación

C.C.