

FRACCIONES Y REALIDAD

YUBER BAYARDO RODRÍGUEZ PÉREZ



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
FACULTAD CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TUNJA

2019

FRACCIONES Y REALIDAD

YUBER BAYARDO RODRÍGUEZ PÉREZ

Trabajo de grado presentado al programa de Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia como requisito parcial para optar al título de Magister en Educación Matemática

Directora: PhD. NELSY ROCÍO GONZÁLEZ GUTIÉRREZ



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
FACULTAD CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TUNJA

2019

Nota de aceptación:

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Tunja, Octubre de 2019

AGRADECIMIENTOS

A Diosito Santo por guiar nuestra vida, por sus bendiciones diarias y su permanente protección.

A mi familia, por el apoyo y acompañamiento incondicional que me brindaron, dándome fortaleza y confianza.

A mi Directora PhD. Nelsy Rocío González Gutiérrez, por sus palabras de ánimo, enseñanza y por sus aportes académicos que enriquecieron el desarrollo de la investigación.

A la Institución Educativa Divino Niño Cormal del municipio de Quipama por abrirme las puertas y a los estudiantes que participaron en esta investigación

A mis amigos, allegados, compañeros y compañeras docentes, especialmente al Especialista Victor Humberto Niño Sua quien, con su apoyo, colaboración y palabras de aliento, logró motivarme para terminar este proyecto.

Contenido

Resumen	1
Abstract	2
Introducción	3
Capítulo I. Descripción de la problemática	5
1. Planteamiento del problema	5
2. Objetivos	9
2.1. Objetivo General	9
2.2. Objetivos Específicos.....	9
3. Justificación.....	10
Capítulo II. Marco Referencial.....	13
4. Antecedentes	13
4.1. A nivel internacional	14
4.2. A nivel nacional	15
4.3. A nivel local	18
5. Marco Teórico	18
5.1. Referente histórico	19
5.2. Definiciones previas.....	22
5.3. Teoría de los Registros de Representación Semiótica	27
5.4. Elementos didácticos	32

Capítulo III. Diseño metodológico	37
6. Marco metodológico	37
6.1. Tipo de estudio	37
6.2. Diseño de la investigación	39
6.3. Fases de la investigación	40
6.3.1 Fase diagnóstica	41
6.3.2 Fase de acción	42
6.3.3 Fase de observación y contrastes	43
6.3.4 Fase de reflexión	43
6.4. Categorías y subcategorías de análisis	43
6.5. Unidades de análisis	45
6.6. Instrumentos y técnicas para la recolección de la información	45
6.6.1 La técnica de la matriz de Vester	45
6.6.2 Observación directa	46
6.6.3 Encuestas	46
6.6.4 Entrevistas	46
6.6.5 Secuencia didáctica	47
6.7. Validación de instrumentos para recolección de información	48
6.8. Procedimiento para el análisis de los datos	49
Capítulo IV Resultados	50

7. Análisis de resultados.....	50
7.1. Análisis de los resultados utilizando la técnica de la matriz de vester	50
7.2. Análisis de resultados obtenidos mediante encuestas y entrevistas.....	52
7.3. Análisis de resultados de la secuencia didáctica.....	57
7.3.1 Análisis de resultados Reto 1.....	60
7.3.2 Análisis de resultados Reto 2	62
7.3.3. Análisis de resultados Reto 3.	64
7.3.4 Análisis de resultados Reto 4.	66
7.3.5 Análisis de resultados Reto 5.	68
7.3.6 Análisis de resultados Reto 6.	71
7.3.7 Análisis de resultados Reto 7.	73
7.3.8 Análisis de resultados Reto 8.	75
7.3.9 Análisis de resultados Reto 9.	77
7.3.10 Análisis de resultados Reto 10.	80
7.4. Análisis de resultados sobre el grado de receptividad y aceptación de la estrategia didáctica	82
Conclusiones	85
Referentes Bibliográficos	90
Anexos.....	97

Anexo 1. Matriz de Vester, de situaciones críticas que afectan el proceso educativo en matemáticas	97
Anexo 2. Gráfica 1. Situaciones críticas que afectan el proceso educativo en matemáticas.....	98
Anexo 3. Matriz de Vester, Dificultades referentes a la enseñanza y aprendizaje de las fracciones.....	99
Anexo 4. Gráfica 2. Situaciones críticas que afectan la enseñanza y aprendizaje de las fracciones.....	100
Anexo 5. Prueba piloto: archipiélago fraccionario de Vasco (1988).	101
Anexo 6. Autorización individual para participar en el desarrollo de la investigación.....	104
Anexo 7. Autorización colectiva para participar en el desarrollo de la investigación.	106
Anexo 8. Asentimiento de los estudiantes.....	107
Anexo 9. Encuesta semi-estructurada para estudiantes sobre creencias y concepciones hacia las matemáticas.	108
Anexo 10. Encuesta semi-estructurada para padres de familia o acudientes sobre creencias y concepciones hacia las matemáticas.....	110
Anexo 11. Guía de entrevista semi-estructurada a docentes.	112
Anexo 12. Secuencia didáctica “fracciones, fotografía y contexto”	114
Anexo 13. Formato para validación de expertos.	121
Anexo 14 Resultados de las creencias y concepciones de los docentes (entrevistas semi-estructurada).	125

Índice de tablas

Tabla 1 Referentes teóricos y conceptuales	19
Tabla 2 Significados del concepto fracción	25
Tabla 3 Representaciones semióticas del objeto fracción	31
Tabla 4 Categorías y subcategorías de análisis	44
Tabla 5 Simbología de las representaciones semióticas del objeto fracción.....	59
Tabla 6 Análisis resultados Reto 1 significados del concepto fracción.	60
Tabla 7 Análisis resultados Reto 2 fracciones equivalentes, irreductibles, simplificación y amplificación.	62
Tabla 8 Análisis resultados Reto 3 clasificación de fracciones.....	64
Tabla 9 Análisis resultados Reto 4. La fracción como medida y como número decimal.	67
Tabla 10 Análisis resultados Reto 5. La fracción como parte- todo y como operador.	69
Tabla 11 Análisis resultados Reto 6. La fracción, número decimal y porcentaje.	71
Tabla 12 Análisis resultados Reto 7. La fracción como una parte de un todo y como cociente...	73
Tabla 13 Análisis resultados Reto 8. La fracción como razón.	76
Tabla 14 Análisis resultados Reto 9. La fracción como operador.....	78
Tabla 15 Análisis resultados Reto 10. La fracción como operador.....	80

Índice de figuras

Figura 1. Fracciones egipcias, el ojo de cobra. Fuente Stewart (2012). P.18	21
Figura 2. Método la COPA. Fuente elaboración propia, basada en Pólya (1945).	35
Figura 3. Fases de la investigación. Fuente elaboración propia, basado en Hernández, Fernández y Baptista (2014), Elliott (2000).	40

Resumen

Esta investigación tiene como propósito analizar una estrategia didáctica empleada en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en el caso específico del concepto de fracción; se realizó con estudiantes de grado sexto en la Institución Educativa Divino Niño Cormal de Quípama (Boyacá) Colombia, en un contexto rural. El estudio se inició a partir de un diagnóstico mediante la matriz de Vester (Betancourt, 2016), el cual logró detectar los factores que presentan mayor incidencia en la eficacia de los procesos formativos y específicamente en lo referente a los conocimientos matemáticos de los estudiantes. Una vez priorizadas las amenazas educativas, se procede a la puesta en marcha de estrategias de solución, así como al diseño y aplicación de una secuencia didáctica que hace uso de la fotografía como medio de interacción en el proceso de construcción individual de conocimiento, permitiendo enfatizar en la importancia del entorno de los estudiantes mientras se abordaban conceptos de la matemática. Para el diseño e implementación de la secuencia se tuvieron en cuenta los aportes teóricos de Raymond Duval, desde la Teoría de las representaciones semióticas.

El estudio presentó un paradigma de corte cualitativo, de tipo descriptivo, bajo el enfoque de Duval (1998), para analizar los procesos cognitivos de tratamiento y conversión que realizan los estudiantes. Con el desarrollo de la investigación, los estudiantes se apropiaron de algunos significados de fracción, potenciaron saberes específicos, se involucraron en procesos de planteamiento y solución de problemas propios de su contexto, para así lograr una visión diferente de las matemáticas. Asimismo, la investigación incluyó tanto a docentes de la institución como a padres de familia durante varias etapas del proceso.

PALABRAS CLAVE: fracción, enseñanza, aprendizaje, representaciones semióticas, planteamiento y solución de problemas, tratamiento y conversión.

Abstract

This research has as purpose to analyze a didactic strategy employed in the teaching and learning process of mathematics in the specific case of the fraction concept, with sixth grader students at the Institución Educativa Divino Niño Cormal located in Quipama (Boyacá) Colombia, in a rural context. The actual research begins with a diagnostic using the Vester matrix (Betancourt, 2016), which was able to detect the factors that present bigger incidence in the effectiveness of the formative processes and specifically on the inherent thing to the mathematical knowledge of the students. Once prioritized the educational threats, the next step has been to set in motion the solution strategies, as well as the design and application of a didactic sequence that employs the use of the photography like means of interaction in the process of individual construction of knowledge. It allowed emphasizing on the importance of the students' environment while the concepts of mathematics were approached. For the design and implementation of the sequence, the theoretical contributions of Raymond Duval, from the Teoría de Registro de Representación Semiótica.

The study presented a paradigm of qualitative court, of descriptive type, under the focus of Duval (1998), to analyze the processes treatment cognitivos and conversion that the students carry out. With the development of the research, the students appropriated some fraction meanings, developed specific knowledge, were involved in position processes and the solution of the problems characteristic of their context, it stops this way to achieve a different vision from the mathematics. Moreover, the investigation involved no just students, also different subject teachers and students' families during several stages of the process.

KEY WORDS: fraction, teaching, learning, semiotic representations, position and solution of problems, treatment and conversion.

Introducción

Esta investigación se fundamenta en el diseño, aplicación y análisis de una estrategia didáctica empleada en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en el caso específico del concepto de fracción. El trabajo de campo se desarrolló en un contexto rural con estudiantes de grado sexto, pertenecientes a la Institución Educativa Divino Niño en el municipio de Quípama (Boyacá). El punto de partida fue la realización de un diagnóstico, que ayudó a identificar las dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje, llevados a cabo al interior de la Institución. Posteriormente se analizó la problemática presente en dichos procesos, teniendo en cuenta las ideas planteadas por la comunidad educativa involucrada e impulsada por el investigador principal, en marzo y abril de 2018 y en la cual se registraron un gran número de problemas inherentes a la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Dentro de las técnicas que se usaron para priorizar las dificultades halladas se encuentra la matriz de Vester. Los participantes conocedores de la problemática identificaron diez (10) situaciones relevantes, las cuales requerían abordaje prioritario en la Institución. A su vez se realizaron los análisis de cobertura de cada una de las cuestiones halladas, para posteriormente definir objetivos y trabajar en la solución de los problemas detectados.

El presente documento contiene el planteamiento de una propuesta que permitió analizar la estrategia didáctica, empleada en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de fracción, la cual se desarrolló en cuatro fases: diagnóstica, acción, observación y reflexión. Una vez completada la fase diagnóstica, se realizó el planteamiento del problema y se formularon los objetivos a desarrollar, haciendo un permanente rastreo bibliográfico que corroboró con el desarrollo de la investigación.

Al igual, se identificaron los referentes teóricos a utilizar, enmarcados dentro de la educación matemática; teniendo en cuenta algunos aportes de investigaciones que se han hecho respecto a la

temática y se tomó como base la teoría de representaciones semióticas. Posteriormente, se hizo un análisis de la historia del concepto de fracción. De acuerdo con las características de la investigación se adoptó un enfoque cualitativo de tipo descriptivo.

Para coadyuvar con el logro de los objetos propuestos se diseñó y aplicó una secuencia didáctica que propendió por involucrar el entorno de los estudiantes dentro de la clase de matemáticas; consistió, en el planteamiento de diez retos que aplicaron el concepto de fracción. Los estudiantes los resolvieron individualmente y los socializaron en grupo teniendo en cuenta los momentos de representación, exploración, conjeturación y formulación.

Por último, se presenta un análisis de resultados con relación al problema y los objetivos planteados, donde se interpreta y relaciona la información recolectada por los instrumentos y técnicas utilizados, de acuerdo a las categorías de análisis y a los referentes teóricos. Igualmente, se plantean conclusiones finales que derivan del desarrollo de la investigación y que dan respuesta a los objetivos propuestos.

Capítulo I. Descripción de la problemática

En este capítulo se presentan aspectos generales de la investigación. En primera instancia, se identifican y definen los elementos de la problemática en un contexto particular, Institución Educativa Divino Niño Cormal del municipio de Quipama. Posteriormente, se particularizan problemas específicos de la comprensión del concepto de fracción, se enuncia la pregunta de investigación, así como los objetivos a cumplir.

1. Planteamiento del problema

La Educación Matemática es un área que permite reflexionar sobre las actividades sociales en determinado contexto, ocupándose del estudio de los procesos involucrados en la enseñanza y aprendizaje desde la teoría y la práctica. Rivera y Santos- Trigo (2010) afirman que un propósito de esta disciplina es comprender los problemas relacionados con la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes y las formas en las que los estudiantes construyen ese conocimiento. Por tanto, esta problemática despierta gran interés entre los investigadores. Además, la situación actual exige la adquisición de nuevos conocimientos, replanteamiento de actitudes y posicionamiento frente a los avances tecnológicos.

Diversas investigaciones abordan el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de fracción, por ejemplo, Llinares y Sánchez (1988) enfocaron su trabajo en analizar las características, utilidades y la valoración de la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de fracción dentro de las instituciones educativas. También Fandiño (2009), en sus investigaciones muestra una lista de las dificultades que se presentan en el aprendizaje de las fracciones y las posibles formas de superarlas. Igualmente Castro (2015), considera importante el conocimiento que debe adquirir el docente en su formación para la enseñanza de las matemáticas.

Tomando como referencia los trabajos mencionados, se pueden evidenciar algunos inconvenientes que afectan de manera negativa, tanto directa como indirectamente, la comprensión de los conceptos por parte de los estudiantes, para el caso particular, se abordó la problemática existente en la Institución Educativa Divino Niño Cormal del municipio de Quípama.

Durante el transcurso de los años en la Institución se han intentado implementar algunas estrategias tendientes a mejorar o superar los diferentes obstáculos que se presentan en cada área del saber. Lo anterior, con el fin de solucionar las dificultades en la formación de los estudiantes, y de esta forma suplir las debilidades en el logro de los objetivos académicos. Por tanto, las estrategias utilizadas en la Institución no han sido constantes, consecutivas y evaluadas permanentemente y los procesos en la mayoría de los casos, no se definen de manera clara y objetiva.

Adicionalmente, los resultados obtenidos en las pruebas saber demuestran, que las dificultades continúan, las cuales impiden cambios positivos en las diferentes áreas del conocimiento, especialmente en matemáticas. Observando la situación que presentan los estudiantes de la Institución, en cuanto al estado de su conocimiento a nivel de matemáticas, se evidencian dificultades en el área, los resultados arrojados en las pruebas internas y externas dan muestra de ello; específicamente, en el año 2017, el reporte de la excelencia, (MEN 2018) muestra los resultados de los estudiantes de grado noveno en matemáticas, en los cuales se evidencia que el 13% de los estudiantes se encuentra en un nivel de desempeño “mínimo”; en grado undécimo, el indicador llega a ser del 14% en el quintil 1, siendo este el nivel más bajo de la escala. La situación tiende a agudizarse al observar los resultados de los estudiantes del grado quinto de

primaria, ya que en la Institución el 41% se ubicó en el rango “insuficiente”, lo cual evidencia los bajos desempeños académicos en el área.

Tradicionalmente en la Institución las acciones de mejora no se piensan con la rigurosidad que requieren; en algunos casos los procesos no han sido fortalecidos, documentados, no hay suficientes soportes o evidencias, ni se han rediseñado. Asimismo, tampoco se ha pensado en la elaboración de un “banco de problemas prioritarios,” que oriente una ruta de solución positiva y que satisfaga las necesidades de la comunidad académica. En algunos casos, en el Plan de Mejoramiento Institucional en Matemáticas (P.M.I.M.), se han detallado variables que permiten identificar posibles fallas, pero no han tenido procesos continuos, no se ha llegado al análisis de las actividades a emprender, ni se ha realizado una ponderación de acuerdo al impacto que generan en el fortalecimiento de la educación en la comunidad involucrada.

La dificultad en el aprendizaje, la escasa afectividad hacia las matemáticas, la falta de acompañamiento de los padres de familia, el incipiente desarrollo de la autodisciplina frente al aprendizaje y los obstáculos que se presentan dentro del contexto socioeconómico, fueron identificados como los factores que más influyen en el proceso educativo en matemáticas dentro de la institución, como se muestra en la aplicación de la prueba diagnóstica (Anexo 1 y 2), lo cual evidencia la necesidad de buscar alternativas encaminadas a la superación de estos problemas.

A las falencias mencionadas, se suman la falta de organización y planeación de las actividades, escasez de planes estratégicos dentro del desarrollo temático del área y la poca disponibilidad de medios tecnológicos con los que cuenta la Institución. De esta forma, se convierten en una debilidad para la consecución de los objetivos académicos y una necesidad el suplir ciertas falencias en todos los niveles de formación de los estudiantes.

Ante la necesidad de cambiar el rumbo dentro de la acción educativa en la Institución es importante tener en cuenta el nivel y la temática donde es más notoria la dificultad. Es aquí donde

los problemas se comienzan a notar, la experiencia propia del autor dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, permite evidenciar que en la transición de la primaria a la secundaria es donde se presenta mayor incertidumbre en la construcción de los conocimientos necesarios para el paso de un nivel inferior a otro superior. En cuanto a la apropiación del concepto fracción, la mayor dificultad se presenta, no sólo en los primeros niveles de formación, sino, en todo el ciclo del bachillerato llegando a nivel universitario.

En la prueba diagnóstica realizada en la Institución se muestran los factores que más influyen en los procesos de enseñanza aprendizaje de las fracciones (Anexo 3 y 4), el bajo nivel en la interpretación y construcción de los diferentes significados de fracción y la relación entre ellos; escaso material bibliográfico actualizado referente al concepto de fracción; falta de materiales y recursos didácticos apropiados en el desarrollo de la temática de las fracciones; conocimientos previos débiles y falta de interés en la adquisición de nuevos conocimientos. Lo anterior, genera resistencia al cambio y dificultades en los procesos educativos.

Para delimitar la presente investigación se aplicó una prueba piloto a 16 estudiantes del grado sexto de la Institución, basada en el archipiélago fraccionario de Vasco (1988), el cual presenta el significado e interpretación de las fracciones como partidores, medidores, razones, operadores y como cocientes (Anexo 5). Los resultados de la prueba evidenciaron que el 30% de los estudiantes que la presentaron, respondieron correctamente la situación planteada para las fracciones como operadores; el 45% logró solucionar perfectamente los ejercicios de fraccionarios como partidores; un 35% encontró las respuestas correctas a los problemas de fraccionarios como medidores y un 21% de los estudiantes indicaron la solución correcta de la situación planteada de las fracciones como razones.

En concordancia con lo anterior, se observa que los estudiantes de la Institución, muestran bajos desempeños en situaciones específicas que involucran el concepto de fracción. Además, se

evidenciaron problemas en el logro de competencias y escasa comprensión de fenómenos de la realidad. Por consiguiente, presentaron dificultades en el planteamiento y resolución de problemas que involucran fracciones, decimales o números mixtos en diversos contextos. También se detectaron falencias en la realización de operaciones básicas como adición, sustracción, multiplicación y división de fracciones.

De acuerdo con este planteamiento surge la pregunta orientadora: ¿Qué estrategias didácticas usar en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de fracción?

2. Objetivos

2.1. Objetivo General

Analizar una estrategia didáctica empleada en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en el caso específico del concepto de fracción, con estudiantes de grado sexto del contexto rural.

2.2. Objetivos Específicos

-Identificar dificultades inherentes a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas haciendo uso de diferentes técnicas.

-Analizar e interpretar las causas activas que presentan mayor relevancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las fracciones.

-Diseñar y aplicar una secuencia didáctica que propicie la comprensión de los diferentes significados de fracción, a partir de diferentes registros de representación semiótica y de la solución de situaciones del contexto.

-Examinar y caracterizar el grado de receptividad que presentaron los estudiantes en el proceso de intervención frente a la estrategia didáctica, para el caso específico del concepto de fracción.

3. Justificación

El presente trabajo de investigación se elaboró con el fin de presentar una alternativa a una situación institucional sobre la priorización de problemas, donde se evidencian dificultades o bajos desempeños en el área de matemáticas que provocan inconvenientes en el logro de las competencias y que impiden la transposición del conocimiento matemático a los procesos y fenómenos de la realidad.

La motivación para realizar este trabajo investigativo surge de la necesidad que tiene el investigador principal, de aplicar diferentes estrategias que se conviertan en una herramienta complementaria muy útil y facilitadora para el diagnóstico, implementación, mejora y seguimiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje, que al ser aplicadas en las instituciones educativas permitan dar cumplimiento a los requisitos legales emanados del Ministerio de Educación.

Durante la realización del trabajo de campo en la fase diagnóstica, para el caso de los problemas inherentes a la matemática, se registraron un gran número de dificultades en la Institución. Se pudo evidenciar que éstos presentan gran índice de coincidencia con otras áreas del saber, no eran exclusivos del área de matemáticas. Las problemáticas identificadas, haciendo uso de la matriz de Vester, permitieron determinar la principal causa y los posibles efectos de las situaciones encontradas. También, reflejan la percepción de los actores y motivan a buscar iniciativas que puedan coadyuvar en sus posibles soluciones.

Los problemas más críticos, identificados en el diagnóstico, mediante esta matriz, requieren gran cuidado en su análisis y manejo, porque de su intervención dependen en gran medida, los resultados finales. En el estudio preliminar se logró establecer que los problemas prioritarios se centran principalmente en dos categorías: falta de atención y predisposición de los estudiantes en el desarrollo de las clases e insuficiencia en la diversidad de recursos y estrategias utilizadas

dentro del aula de clase. En segunda medida, la matriz reveló los problemas activos de alta influencia sobre los prioritarios, pero que no son causados por otros; éstos son relevantes ya que son causa primaria del problema central, por ende requieren atención y manejo crucial. Para este caso se tiene: acompañamiento deficiente por parte de los padres, escaso desarrollo de autodisciplina, baja integración en el desarrollo de trabajo en equipo y la influencia del contexto socioeconómico en el que viven los estudiantes.

En cuanto al concepto de fracción, se utilizó la misma estrategia para el diagnóstico, la cual reveló que los problemas de mayor incidencia que se tienen en la construcción del concepto de fracción, en su orden son: deficiencias en las prácticas de enseñanza y aprendizaje o situaciones didácticas inapropiadas; poca habilidad en el planteamiento y solución de problemas cotidianos y mínima utilización de un lenguaje pertinente donde se evidencien los registros de representación semiótica.

En lo referente a los problemas que van a servir como punto de referencia para mejorar la situación, se presentaron: dificultad en el desarrollo de operaciones básicas, desconocimiento de las propiedades elementales, mecanización de proceso y la poca aplicación de los conceptos de fracción en la cotidianidad, en otras áreas y en diferentes niveles.

Respecto a los problemas de alta influencia sobre la mayoría de los demás se presentaron: el bajo nivel en la interpretación y construcción de los diferentes significados de fracción y la relación entre ellos; escaso material bibliográfico actualizado referente al concepto de fracción; la falta de materiales y recursos didácticos apropiados en el desarrollo de la temática de las fracciones; la existencia de conocimientos previos débiles y la falta de interés en la adquisición de nuevos conocimientos y la poca utilización de los pensamientos, variacional, métrico, espacial y aleatorio.

Frente a esta situación se evidencia una necesidad de cambio, de crear cultura de aprendizaje; y especialmente de aprender matemáticas. Es decir, desde una mirada global, está latente la necesidad de cambiar la forma de percepción del entorno de los estudiantes. Esta situación se verá beneficiada si se piensa una estrategia didáctica que permita aprovechar las situaciones problema del contexto, para convertirlas en ejes sobre los cuales se construya el conocimiento de forma integral. En cuanto al aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes se detectan fácilmente grandes debilidades en la comprensión de los conceptos básicos. Así mismo, no se da la importancia que merece, al rol que cumplen tanto el estudiante, como el padre de familia y el docente en el proceso educativo; son ellos, quienes deben proporcionar herramientas para que los procesos no se trunquen. Encontrar las prioridades educativas que deben ser satisfechas por los estudiantes, permitirá la comprensión de los problemas, así como la elección de una solución adecuada, especialmente en el terreno de la educación matemática.

En concordancia con la problemática anteriormente expuesta y con el propósito de coadyuvar con una propuesta en el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje se busca generar estrategias, desde la perspectiva de la identificación y solución de problemas, que beneficien tanto a estudiantes como a docentes y comunidad en general. Lo anterior conducirá a abordar de una forma diferente las matemáticas, para que los estudiantes tengan más afectividad hacia ellas, y para que de esta forma se minimicen las dificultades en el proceso de aprendizaje, conllevando a que los estudiantes se apropien de los conocimientos.

Esta investigación propende por resaltar la importancia de buscar estrategias en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, particularmente en lo que tiene que ver con la construcción del concepto de fracción, sus propiedades, las operaciones y relaciones correspondientes, y que a la vez genere comprensión de situaciones del contexto para poder resolver diferentes problemáticas cotidianas.

Capítulo II. Marco Referencial

En este apartado se presentan los principales aportes de varias investigaciones relativas a la propuesta planteada, así como algunas aproximaciones teóricas referentes a la educación matemática, especialmente en lo referente a las dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de fracción.

4. Antecedentes

Una revisión detallada sobre investigaciones realizadas en los últimos diez (10) años, tanto en la enseñanza como en el aprendizaje del concepto de fracción y las dificultades que se presentan en ellos, teniendo en cuenta a docentes y estudiantes, permitió tener una visión panorámica sobre los aportes que investigadores han realizado en la temática en cuestión. Se clasificaron los trabajos a nivel internacional, nacional y desde el punto de vista local. Dado que el tema central de esta investigación es el concepto de fracción, se hace una síntesis de aquellos trabajos previos, que resultaron más significativos.

Antes de hacer un análisis reciente y específico fue importante destacar los aportes de Kieren (1976), Freudenthal (1973), Llinares y Sánchez (1988) y Fandiño (2009), quienes coinciden en la dificultad en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones, donde evidenciaron falencias en conceptos y en la realización de las operaciones. También concuerdan con el papel que cumplen los diferentes significados que toma el concepto de fracción, como parte todo, medida, cociente, operador y razón.

La presentación de las investigaciones recientes relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las fracciones se muestran a continuación.

4.1. A nivel internacional

Entre los autores contemporáneos que han trabajado en la línea de la problemática expuesta, se pueden citar los aportes de Castro (2015), quien investigó sobre los significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros en Granada (España). Uno de sus propósitos fue identificar, describir y analizar el conocimiento matemático escolar sobre fracciones que manifiesta un grupo de estudiantes de Educación Primaria basado en la relación parte-todo, teniendo en cuenta la parte conceptual, sus sistemas de representación y el contexto real. El estudio fue de tipo teórico, de carácter empírico y utilizó una técnica de escrutinio para abordar la temática. Se concluyó que las fracciones surgen en una relación multiplicativa parte-todo, asimismo, los sistemas de representación usados para representar el concepto de fracción, fueron los círculos o cuadriláteros divididos en partes iguales. Mientras que la representación lineal tomó un mayor predominio a medida que se profundizó en la investigación.

Otro aporte importante fue el de Carrillo (2012), quien indagó sobre el análisis de la organización matemática relacionada con concepciones de fracción que se presentan en los textos escolares en matemáticas para grado quinto de primaria. Se seleccionó un texto relevante y los criterios para analizarlo, se caracterizaron los resultados y se concluyó con la evaluación de los mismos. En el estudio sobre el texto se resaltó la utilización principal de los conceptos de fracción, como parte-todo y como operador, y en algunas actividades esporádicas el significado de razón y cociente.

Quispe (2011) en su investigación se planteó como meta, determinar el tipo de relación entre la capacidad de resolución de operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales, con estudiantes de educación secundaria. El enfoque utilizado fue de tipo cuantitativo, a través de pruebas estadísticas, donde manejo una

población de 7255 estudiantes y una muestra estratificada de 380 estudiantes de cinco grados de varias instituciones educativas. Los resultados muestran mayor porcentaje de estudiantes que lograron la interpretación de las fracciones en el significado como parte- todo, tanto en contexto continuo como discreto, con porcentajes 76.8% y 62.6% respectivamente. El significado de medida sólo llegó al 25.5%.

La investigación desarrollada por Flores (2010) en México, tuvo como propósito enfatizar los significados relacionados a la noción de Fracción en la secundaria, también relacionar los contenidos de las diversas ramas de la matemática para su estudio. Para su interpretación utilizó distintas herramientas metodológicas y situaciones didácticas, involucrando a docentes y estudiantes dentro de la realidad escolar. Los resultados obtenidos evidencian sólo la utilización de uno o dos de los significados de fracción, difieren en la forma en que son abordados y en las actividades propuestas para desarrollar. También, se evidenciaron dificultades sobre conceptos, operaciones, resolución de problemas donde se presentan los distintos significados de fracción (parte todo, cociente, operador, razón, decimal, porcentaje, medida).

4.2. A nivel nacional

Se realizó una investigación cuyo objetivo era describir y analizar la interpretación de la fracción como relación parte-todo, en contextos continuos y discretos, con estudiantes de básica primaria, por Niño y Raad (2018), a partir de la implementación de una secuencia didáctica que relaciona los atributos de la fracción, los contextos y los registros de representación, privilegiando la competencia comunicativa. De acuerdo a esto, estableció una metodología de tipo mixta, tanto cualitativa como cuantitativa. Sus resultados destacaron el reconocimiento de la unidad, las partes e igualdad de las partes. En el análisis cualitativo de la situación didáctica, se reconoce lo anterior pero se observa la dificultad si se aumenta la asimetría y subdivisiones de la superficie propuesta. También, muestra mayor manejo de los atributos, pero cuando se aumentan

las subdivisiones, presenta dificultad para resolver la situación planteada y requiere de acompañamiento para resolverla.

Por otro lado, Silva (2017) diseñó e implementó una propuesta didáctica desde la perspectiva de la Teoría de las Situaciones Didácticas, con el propósito de incrementar el aprendizaje de los números racionales en grado sexto de una institución Educativa del sector urbano. La investigación presentó una metodología socio-crítica, articulando permanentemente la investigación, la acción y la formación. Entre los resultados más importantes se resalta el valor que los estudiantes le dan al número racional como fracción y la dificultad para identificar con claridad la representación gráfica, principalmente cuando se hacen particiones más pequeñas, relaciones de orden o equivalencias de fracciones.

Igualmente, Hoyos (2015) hace aportaciones a la temática en cuestión, en su investigación cuyo propósito fue diseñar y aplicar un proyecto de aula en la enseñanza de las fracciones en educación básica primaria en una Institución Educativa de Medellín; el hilo conductor de la propuesta estuvo basado en los procesos de adquisición de un aprendizaje significativo en los estudiantes. La metodología empleada en la investigación fue de tipo práctico y experimental, con procedimientos basados en el método de descubrimiento y sustentados con las teorías desarrolladas por David Ausubel y David Perkins. Los resultados mostraron la importancia que tiene la solución de problemas de situaciones cotidianas ya que estos resultan muy interesantes, comprensibles para los estudiantes, estimulan el pensamiento matemático, los motiva a la investigación y los invita a descubrir nuevos conocimientos. Además, estas formas de proceder incentivan a la participación y al trabajo en grupo, donde se hace indispensable el papel del docente como guía, orientador y facilitador del proceso de aprendizaje.

Siguiendo esta temática, Murillo (2014) se planteó como principal objetivo, analizar las prácticas de enseñanza de algunos docentes de Matemáticas, en concordancia con las destrezas

que evidencian los estudiantes y lo relacionado con la solución de situaciones cotidianas que contengan fracciones, en particular las que involucran particiones, razones y porcentajes, con el fin de proponer estrategias didácticas. Utilizó una metodología de tipo cualitativo, realizó un muestreo teórico y se basó en un estudio de caso. Se concluyó que los docentes no enuncian simultáneamente los distintos significados de fracción (parte-todo, razón, porcentaje), sólo se enfocan en la relación parte-todo, y poco utilizan los otros significados de fracción, influyendo en las dificultades de la comprensión del concepto. Además, se detectó que los docentes involucrados, abordan la temática desde las particiones y la representación gráfica.

En la misma línea, Muñoz (2013) se propuso reconocer los componentes de los modelos conceptuales que poseen los profesores de educación básica acerca de las matemáticas y su enseñanza. Su investigación presentó una metodología de tipo cualitativo a nivel descriptivo, con un enfoque interpretativo, con aspectos epistemológicos, experiencias y dificultades propias del autor. Los resultados muestran la importancia de incluir en los procesos de formación, los conocimientos históricos y epistemológicos, que repercuten en los procesos de enseñanza aprendizaje. El estudio confirmó que no hay un solo modelo de enseñanza puro y establecido. Además, se evidenció la transición entre las tendencias constructivistas y tradicionalistas y reportó el bajo nivel de formación de los docentes en cuanto a la parte disciplinar y didáctica.

Bajo la misma perspectiva, Hurtado (2012) en su estudio presentó como objetivos diseñar y aplicar una estrategia para promover el aprendizaje de las fracciones y su aplicación en diferentes contextos. La estrategia utilizada se basó en la resolución de problemas, teniendo en cuenta los cuatro pasos básicos que propone Polya. Los resultados más importantes arrojaron que el 80% de los estudiantes lograron argumentar los procedimientos empleados y un 17% de los estudiantes respondieron correctamente en la solución de problemas. Además, concluyó que con la utilización de estas estrategias los estudiantes tienen mayor participación en clase y se hacen

protagonistas de su propio aprendizaje, dado que ellos tenían que leer, analizar, proponer y argumentar las soluciones.

4.3. A nivel local

Siguiendo la misma perspectiva, Rivera (2014), presentó como objetivo determinar y promover estrategias metodológicas basadas en la comunicación que promovieran el aprendizaje de los números fraccionarios. En su metodología utilizó un enfoque cualitativo interpretativo, en cuyos resultados y de acuerdo con talleres diagnósticos, lograron identificar la existencia de problemáticas que muestran los estudiantes frente al concepto, comprensión, operaciones y los juicios acerca de los problemas donde intervienen las fracciones. Con el uso de estrategias comunicativas y los registros hechos durante la investigación lograron que los estudiantes reestructuraran las concepciones y obtuvieran un mayor control en su aprendizaje, estableciendo criterios que les permitían medir su comprensión y mejorarla.

En la misma perspectiva, se desarrolló el trabajo relacionado con el aprendizaje del objeto fracción, donde se analizó y valoró el aprendizaje en los estudiantes, a partir de secuencias didácticas mediante las transformaciones con sistemas semióticos de representación elaborado por Reyes (2018). Se utilizó una metodología cualitativa, donde se encontraron como resultados el buen manejo de los estudiantes en sistemas de representación, respecto a las relaciones de tratamiento y conversión y el aprovechamiento de las actividades lúdicas (juegos) para lograr conocimientos significativos sobre el concepto de fracción.

5. Marco Teórico

Este estudio se enmarca en los sustentos teóricos de la Educación Matemática basados principalmente en aportes teóricos de Raymond Duval desde la *Teoría de las representaciones semióticas*. Teniendo presente lo mencionado, esta teoría es necesaria para dar alcance a los

objetivos planteados. La siguiente tabla sintetiza los tópicos a tener en cuenta en el sustento teórico y conceptual de la presente investigación.

Tabla 1
Referentes teóricos y conceptuales

Componente	Conceptos y enunciados
Referente histórico	Aproximación histórica del concepto de fracción
Definiciones previas	Acercamiento al concepto de fracción Definiciones de concepciones y creencias
Significados del concepto de fracción	La fracción como: parte todo, medida, cociente, partidor, operador, razón, número decimal y porcentaje.
Teoría de las representaciones semióticas	Semiosis y noesis Representaciones semióticas Formación, tratamiento y conversión. Registro de representación del concepto de fracción
Elementos didácticos	Situación didáctica Planteamiento y solución de problemas La fotografía como estrategia didáctica Contexto

Fuente: Elaboración propia

5.1. Referente histórico

En este apartado, se realiza un análisis histórico sobre el concepto de fracción, señalando aspectos relevantes que permiten comprender los orígenes, sus significados y aplicaciones en el transcurso del tiempo. Se establece que fueron los Egipcios (3000 a. C.) quienes primero utilizaron las fracciones. Este hecho es evidenciado en algunos registros históricos, tablillas y

papiros que se encuentran en varios museos del mundo; como el papiro de Rhind y el de Moscú en ellos se presentan problemas de origen práctico, de situaciones que tienen que ver con el pan, la cerveza, actividades relacionadas con el ganado, las aves domésticas y el almacenamiento de cereales. Principalmente los egipcios utilizaron las fracciones cuando necesitaban encontrar medidas, contabilizar y hacer reparticiones (Eves, 2011). Utilizaron dos sistemas de numeración, un sistema hierático o sagrado utilizado por los sacerdotes basado en signos especiales y un sistema jeroglífico de base diez que permitía escribir cualquier número (Ortiz, 2005).

Los egipcios utilizaron las fracciones de la forma $\frac{1}{n}$ donde n es un entero positivo, con numerador 1 y cuyo denominador podía ser 2, 3, 4, ..., las demás fracciones las expresaban añadiendo varias de estas fracciones unidad, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. De igual forma, las fracciones las usaron para hacer repartos o distribuciones equitativas de objetos en n partes iguales (Pulpón, 2010). Así mismo, plantearon varias formas para denotar las fracciones, fue a través de jeroglíficos como ojo de cobra, Figura 1, que hace referencia a los símbolos de las fracciones más utilizadas. Este tipo de notación era un sistema complicado e inadecuado para hacer los cálculos, dada las formas de las figuras que representaban las fracciones (Stewart, 2012).

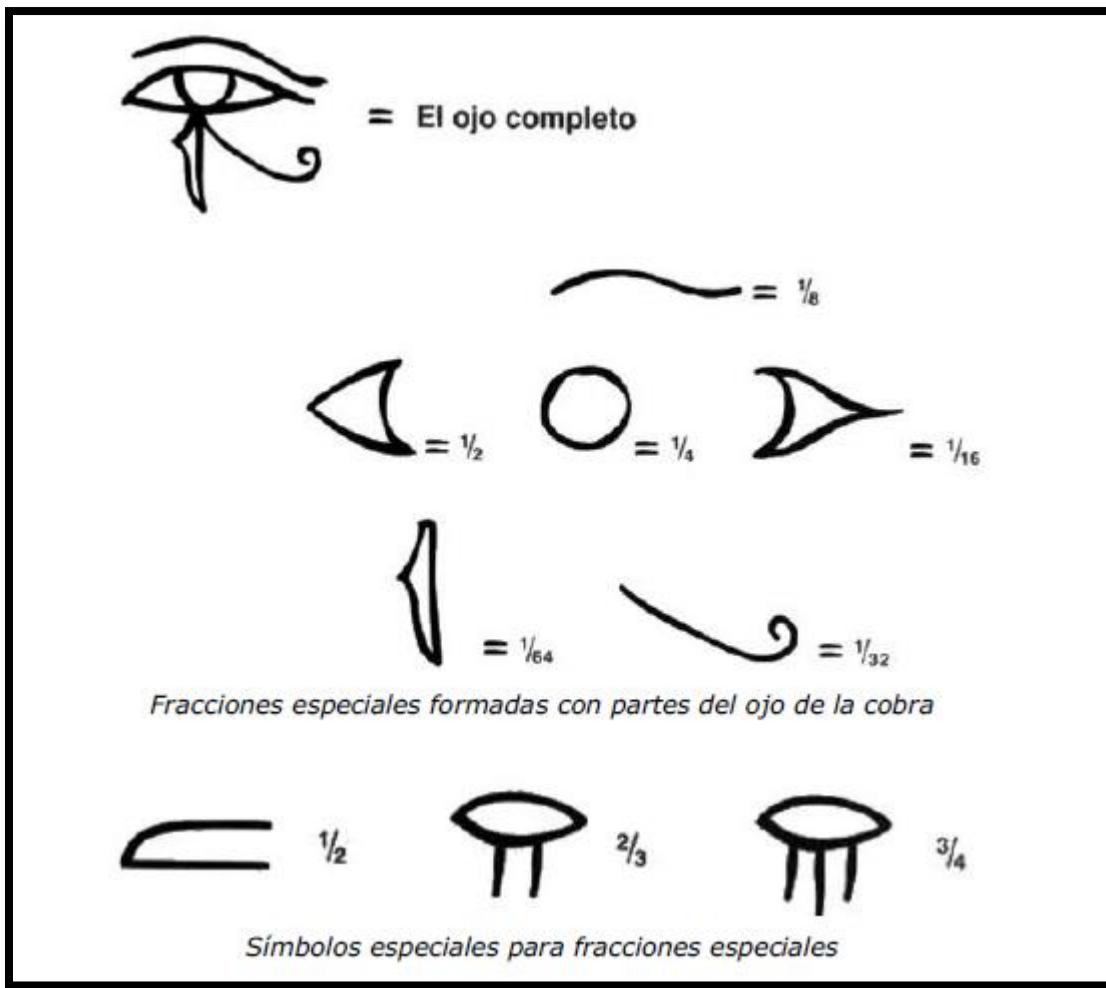


Figura 1. Fracciones egipcias, el ojo de cobra. Fuente Stewart (2012). P.18

Por otro lado, estudios realizados por (Ruiz, 2003), indican que en relación a las civilizaciones griegas y romanas, hacia el año 200 a. C., ya escribían las fracciones como números propiamente, emplearon las fracciones unitarias, posteriormente reconocieron fracciones equivalentes y usaron varias formas para escribirlas; los alejandrinos especialmente utilizaban el sistema de fracciones sexagesimales. Una de las representaciones griegas era ubicar el numerador seguido de una prima y el denominador seguido de dos primas $\kappa\alpha' \mu\zeta''$ que equivalen a la fracción $\frac{21}{47}$ (Stewart, 2012). De la misma forma, introdujeron el vínculo, el cual separaba el numerador del denominador e incluyeron diferentes números en el numerador, dando origen a las fracciones que se utilizan actualmente.

Ahora bien, Boyer (1996) resalta el papel de la cultura china entre los siglos VI y I a. C., en la creación de nuevas reglas en la interpretación de la matemática. Para el caso de los números, le daban similitud a la vida de los seres humanos, así, al numerador lo consideraban “hijo” y al denominador “madre”. Además, ellos impulsaron las fracciones con denominador 10, 100, 1000....y emplearon las fracciones decimales. Utilizaron un sistema de varillas (bastoncillos), en forma vertical u horizontal para expresar diferentes cifras.

A la vez, Eves (2011), se refiere a los hindúes y árabes en el 450 d. C., quienes concentraron su interés en un sistema de numeración posicional, utilizaron las fracciones decimales, manejaron las cifras del 0 al 9 con símbolos diferentes a los que actualmente se utilizan. Para ellos el numerador iba sobre el denominador y omitían el vínculo. Adicional a esto, los musulmanes fueron los encargados de introducir el sistema de numeración indo arábigo a España.

Finalmente, para Ruiz (2003), entre los siglos XII y XV Leonardo de Pisa (1170-1250) conocido como Fibonacci, escribió el libro del ábaco, en el que introdujo los métodos de cálculo hindú con enteros y fracciones demostró muchos resultados importantes en la teoría de números, describió las nueve formas y el cero hindú- arábigo, introdujo el número quebrado y hace uso del vínculo para separar el numerador del denominador dando origen a la notación actual de fracción, él proporciona las reglas para las operaciones entre fracciones, facilitando el desarrollo de muchas actividades del contexto de la época y utilizó los números fraccionarios para representar fraccionamientos de objetos.

5.2. Definiciones previas

En esta sección, se resaltan algunas definiciones del término fracción y sus características relevantes en el desarrollo de la investigación; se enuncian las nociones de los vocablos concepciones y creencias, especialmente referente a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El concepto de fracción ha sido estudiado durante mucho tiempo en el ámbito de la

educación matemática con diferentes perspectivas teóricas, lo cual revela que es un concepto matemático de mucha importancia en el proceso educativo.

Uno de los autores que presenta una aproximación al concepto de fracción es Trejo (1973), quien lo considera como el cociente entre dos números a y b con $b \neq 0$ (a dividido por b) donde a es el dividendo y b es el divisor. Es decir, a todo numero x , si se multiplica por el divisor se obtiene como resultado el dividendo: $a \div b = x$ significa que $x \cdot b = a$ de acuerdo a esto, se puede plantear el siguiente ejemplo $6 \div 2 = 3$ lo cual expresa que $2 \cdot 3 = 6$, tomando al punto como el signo por.

Otra noción se plantea en Llinares y Sánchez (1988), quien asocia la fracción a la operación de dividir un número natural por otro, mediante una división indicada $\frac{a}{b} = a : b$ que se refiere a dividir una cantidad fija a en un número de partes b dada.

Para Fandiño (2009), la palabra fracción proviene del término latino *fractio*, que significa *romper*, utilizado para representar los números fraccionarios que significan rotos o pedazos. Freudenthal (1999) afirma que una fracción es una expresión o representación de un número racional, que “tiene una vida propia,” es decir, que varias fracciones representan un número racional. En este sentido, para que los estudiantes alcancen el conocimiento del concepto de fracción, se hace necesario que este se relacione desde el enfoque de la realidad, utilizando la riqueza de los fenómenos dominados por las fracciones. Es decir, que se describan cuáles son los fenómenos que caracterizan el significado de fracción, que se trabaje desde allí para darles sentido y organización. Los conceptos matemáticos se utilizan como medio de organizar los fenómenos, que están en el mundo real, mediante las propiedades y las acciones que las personas hacen con ellos (Freudenthal, 1999). Desde el punto de vista de la fenomenología se presentan formas de dónde provienen y cómo se usan los conceptos, vinculándolo con el entorno ambiental,

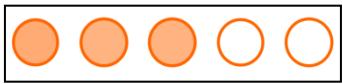
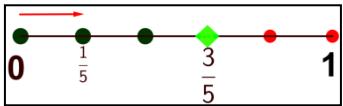
sociocultural y científico, haciendo una inter- relación entre todos los sistemas. Para el caso del concepto de fracción como parte todo, se presentan varios sentidos, como: reparto, división, medida y reconstrucción de la unidad.

Sin embargo, Duval (1998), se refiere a objetos matemáticos en lugar de conceptos, haciendo alusión al objeto que se utiliza desde su naturaleza y sobre el valor del conocimiento. Por tanto, el objeto fracción es aquel que presenta diversas funciones, emite una multiplicidad de signos y a su vez, cada uno pertenece a distintos sistemas de signos (Fandiño, 2009).

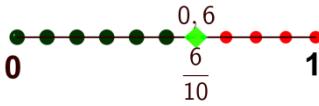
En la literatura se presentan diversas acepciones del término fracción. Para esta investigación se asumen los planteamientos de Freudenthal, Duval y Fandiño, dada la naturaleza del estudio, las características del contexto y la población objeto de estudio.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, en la siguiente tabla se presentan algunas interpretaciones respecto a los significados del concepto de fracción, desde la perspectiva y significados de distintos autores.

Tabla 2
Significados del concepto fracción

La fracción	Significados	Ejemplo
Parte todo	Es la relación indicada entre un número de partes y el número total de partes. Símbolo representado $\frac{a}{b}$ dada una unidad a (todo continuo o discreto) se divide en b partes (iguales, equitativas, congruentes que pueden sobreponerse o intercambiarse). (Llinares y Sánchez, 1988)	 $\frac{3}{5}$ 
Medida	Se indica o selecciona una unidad arbitraria de medida (un segmento), que puede permitir subdivisiones (congruentes). La recta numérica es una representación del concepto de fracción. Es decir, una unidad de medida se divide en b subunidades iguales y se repite a veces para obtener la medida requerida. (Llinares y Sánchez, 1988).	
Cociente	La fracción como cociente según Fandiño (2009), se interpreta como una división indicada $a \div b$, si se tienen a objetos y se dividen en b objetos. En este significado se presenta una acción de reparto y una relación de equivalencia. Es decir se divide una unidad en ciertas partes y se coge otra cantidad o que puede ser el resultado de una operación. También puede interpretarse que al dividir dos números naturales entre si se obtiene por resultado exacto la fracción (Llinares y Sánchez, 1988).	$3 \div 5$ $\frac{1}{5}$ tres veces $\frac{3}{5}$ tres objetos para 5 personas $\frac{3}{5} = 0,6$
Partidor	El significado de fracción como partidor, según Vasco (1984), hace referencia a situaciones donde se parten objetos en tal número de partes "iguales" y se escogen tantas o determinadas partes. Es importante tener en cuenta que la fracción no indica cuántas partes se han tomado, sino cuántas se han tomado de las posibles.	Partir un pastel en cinco partes iguales y tomar tres partes.

cuenta la magnitud dado que en algunos casos son objetos reales, para que la participación sea equitativa.

Operador	La fracción interpretada como operador se concibe como una sucesión de multiplicaciones y divisiones o lo contrario. En la interpretación se utilizan una orden, la acción a realizar (operador) y se describe la situación. (Llinares y Sánchez, 1988).	Los $\frac{3}{5}$ de 20 naranjas Esto significa hacer la operación: $(20 \div 5) \times 3$
Razón	El significado de fracción como razón según Llinares y Sánchez (1988), hace referencia al uso de un índice comparativo entre dos cantidades de una magnitud. Es decir, la relación entre a y b y se escribe de la siguiente forma $a: b$. Es importante tener en cuenta que en esta interpretación el numerador y el denominador pueden ser intercambiables, es decir, $a: b$ tiene el mismo significado que $b: a$. (Fandiño, 2009).	3:5 3 es a 5 es decir $\frac{3}{5}$
Número decimal	Para la interpretación de la fracción decimal Llinares y Sánchez, (1988) utilizan la representación gráfica (la recta numérica o el modelo rectángulo), se divide en diez partes, donde cada una de las partes es en relación al todo (unidad) $\frac{1}{10}$, una de las diez (una décima).	
Porcentaje	La fracción como porcentaje se entiende como la relación entre conjuntos de razones, donde se establecen subconjuntos de cien partes. También, se puede interpretar como la relación de proporcionalidad entre un número y 100. (Llinares y Sánchez, 1988).	El 60 % del total de estudiantes, $\frac{60}{100}$, $\frac{3}{5}$ o 0,6

Fuente: Elaboración propia, basado en Fandiño (2009), Llinares y Sánchez (1988), y Vasco (1984).

Por otra parte, se encuentran diversas interpretaciones de los vocablos concepciones y creencias de docentes y estudiantes. Específicamente se hace referencia al término creencias como *Credére*, proviene del latín que se define como “tener por cierto una cosa que el entendimiento no alcanza o que no está comprobada o demostrada.” “Creer que (alguien o algo)

tiene verdadera existencia” y “estar convencido de la bondad o validez de algo o alguien” (Bohórquez, 2014, p. 3).

Las concepciones y creencias son fundamentos conceptuales que se presentan dentro del pensamiento y la acción del ser humano, los cuales proporcionan diferentes puntos de vista del mundo (Ponte, 1999). Él hace referencia principalmente, a la posición que los docentes tienen sobre su práctica diaria, afirma que no es importante la distinción entre creencias y concepciones, más bien con relación a otras estructuras como actitudes, conocimiento y prácticas.

Según Ponte (1999), varios autores conciben creencias como algo vinculado con la parte afectiva relacionado con preferencias, inclinaciones, y líneas de acción. Así, las creencias pueden mostrar aspectos afectivos de la personalidad. Para el desarrollo de esta investigación, se hace alusión al papel preponderante que cumplen el profesor, el estudiante y el padre de familia.

Bohórquez cita a Thompson (1984) quien hace referencia a la concepción que se tiene sobre la matemática como una construcción social y cultural, mediante procesos creativos y generativos, donde el estudiante se comprometa en la realización de las actividades con responsabilidad a partir de situaciones problemáticas. No sólo los estudiantes están implicados, sino también los diferentes actores que hacen parte de los procesos de enseñanza de aprendizaje.

5.3. Teoría de los Registros de Representación Semiótica

Esta investigación se basa en la Teoría de los Registros de Representación Semiótica propuesta por Duval (1998). Es importante destacar que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas forman un campo importante para la investigación, además es necesario considerar otros ámbitos relacionados a los procesos de adquisición de conocimientos, la motivación de los estudiantes y la formación de los docentes. De acuerdo con lo anterior, es preciso utilizar un enfoque semiótico según Duval (1998), en esta investigación que refleje los

diferentes sistemas de expresión y de representación para la comprensión de los conceptos matemáticos.

En el campo de la didáctica de la matemática se han evidenciado un gran número de investigaciones, que resaltan el papel de la semiótica para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, este trabajo no es la excepción, por tanto basados en autores que trabajan en esta línea, como lo son Raymond Duval (1993), Luis Radford (1997), Bruno D' Amore (1998) y Martha I. Fandiño Pinilla (2009), se desarrolla o se concibe el presente estudio.

Radford (2004) destaca el papel de la semiótica con su diversidad de métodos y conceptos, como una teoría apropiada para entender el mundo y los fenómenos, a través de la interpretación y con la utilización de los signos que permiten comprender la significación de la matemática y sus relaciones con la cultura. Resalta la concepción social de la enseñanza y el aprendizaje, caracterizando la naturaleza semiótica del pensamiento y su carácter reflexivo.

Desde el punto de vista de la teoría de las representaciones semióticas y teniendo en cuenta el propósito de esta investigación, es necesario hacer énfasis en dos conceptos fundamentales, “la semiosis, como la aprehensión o producción de una representación semiótica, y la noesis, relacionada con los actos cognitivos tales como la aprehensión conceptual de un objeto.” (Duval, 2017, p. 45), es importante la utilización de las representaciones semióticas para los fines de comunicación y para el desarrollo de la actividad matemática.

Es relevante destacar, que el alcance del conocimiento se debe relacionar siempre con la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos, conviene analizar la multiplicidad cognitiva de los estudiantes, las condiciones de organización de los cambios de registros para lograr el aprendizaje. El papel de la didáctica de la matemática, es lograr que el

estudiante adquiera el concepto matemático (noética). De hecho, es la semiótica la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noética. Al respecto, no habrá aprendizaje conceptual, algorítmico, estratégico o comunicativo sin la mediación de diferentes sistemas semióticos de representación lo que involucra la coordinación entre los mismos por parte de los estudiantes (D' Amore, Fandiño & Iori, 2013).

La adquisición de los conocimientos matemáticos requiere la utilización de distintos registros de representación y de expresión. Duval (2017) hace una clasificación de las representaciones a través de un análisis opuesto entre consiente y no consiente de las representaciones. Las representaciones conscientes se caracterizan por tener una intencionalidad y cumplir el proceso de objetivación, que corresponde al descubrimiento por sí mismo de aquello que no sospechaba; mientras que las representaciones no conscientes son transformaciones automáticas e instantáneas. Mediante la significación se logra que un objeto sea susceptible de ser visto o aprehendido por alguien y a su vez este logra tomar conciencia de ello.

Duval (2017) además hace otras distinciones, representaciones internas y externas; las internas se relacionan con las representaciones conscientes, derivan de las representaciones mentales, éstas permiten mirar al objeto sin ser perceptible (conceptos, ideas, creencias y fantasías). A su vez, se relacionan con las representaciones no conscientes, provenientes de las representaciones computacionales cuyos significantes de naturaleza homogénea, no requieren de la mirada al objeto y permiten una transformación algorítmica de una serie de significantes en otra serie.

Sin embargo, para lograr un buen aprendizaje el estudiante debe recurrir a varios registros de representación semiótica, sean gráficos, símbolos, íconos, tablas, expresiones en lenguaje natural, etc. Es decir, no se puede aprender un concepto matemático, sin pasar por el necesario

tratamiento y conversión de diferentes registros de representación semiótica (Duval y Sáenz, 2016).

Un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis: la formación, el tratamiento y la conversión. La formación o presencia de una representación identificable, utilizada para expresar una representación mental o evocar un objeto real, implica la selección de caracteres y de las determinaciones de lo que se quiere; el tratamiento de una representación que significa la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada y la conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial (Duval, 2017).

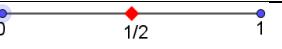
Los conceptos matemáticos no son objetos reales, por lo tanto se debe acudir a distintas representaciones para su comprensión; a su vez es necesario diferenciar el objeto matemático con su representación. El paso de un sistema de representación a otro o la utilización simultánea de varios sistemas de representación en el desarrollo de una clase no es tan evidente para los estudiantes, a ellos se les dificulta reconocer el mismo objeto a través de sus representaciones en distintos registros semióticos. La adquisición conceptual de un objeto matemático se basa en dos características: el uso de más de un registro de representación semiótica, en la creación y el desarrollo de sistemas semióticos distintos, que constituyen un símbolo de avance en el conocimiento (Duval y Sáenz, 2016).

La comprensión de los conceptos matemáticos reposa sobre la coordinación de al menos dos sistemas de representación, entonces un reto importante en el aprendizaje de las matemáticas no puede ser, solamente, la automatización de ciertas técnicas operatorias (cálculo) sino que debe ser también, la coordinación de los diferentes sistemas de representación, condición fundamental

para todos los aprendizajes básicos y el lenguaje natural no puede excluirse de la actividad matemática. (Duval y Sáenz, 2016).

En la Tabla 2 se ilustra un ejemplo de las transformaciones que se pueden realizar del concepto fracción, entre diferentes representaciones semióticas; que pueden ser de dos tipos: tratamiento o conversión. Si la transformación se realiza al interior de un mismo registro semiótico, se presenta la transformación de *tratamiento*, un ejemplo: en lenguaje natural, la proposición un medio es igual que la mitad o en el registro aritmético $\frac{1}{2} = 0,5$. Si la transformación se realiza entre dos registros semióticos diferentes, se conoce como transformación de *conversión*, un ejemplo sería en lenguaje común un medio y su relación con el lenguaje aritmético, como $\frac{1}{2}$ (D' Amore 2004).

Tabla 3
Representaciones semióticas del objeto fracción

Registro semiótico	Representación semiótica	Ejemplo
Registro verbal	Lenguaje natural	Un medio
	Lenguaje coloquial	La mitad
Registro aritmético	Escritura fraccionaria	$\frac{1}{2}$
	Escritura decimal	0,5
Registro gráfico	Lenguaje pictográfico (Imagen)	
	Lenguaje gráfico (recta numérica)	
Registro algebraico	Lenguaje algebraico	$\left\{ \frac{1}{x} \in Q^+ / x \in N \right\}$

Fuente: Elaboración propia, basado en D' Amore (2004)

5.4. Elementos didácticos

En este componente se hace referencia a los elementos necesarios para el desarrollo de la presente investigación en lo referente a didáctica, situación didáctica, planteamiento y resolución de problemas, la fotografía como herramienta pedagógica y el contexto.

En lo referente a la temática de la didáctica esta hace mención al proceso de instrucción, y orientación, a la utilización de métodos, estrategias y al nivel de eficiencia, etc. La didáctica está orientada por un pensamiento pedagógico, ya que la práctica de la enseñanza es un momento específico de la práctica educativa (Lucio 1989). Según lo anterior, se toma como instrumento para enseñar mejor, enfocada al saber autónomo, con objetivos y metodologías propias.

La situación didáctica para Brousseau (2007), es todo el entorno del estudiante, del docente y el sistema educativo, un dispositivo diseñado por una persona que quiere enseñar un conocimiento o controlar su adquisición. Este requiere un medio material, unas reglas de interacción y el desarrollo efectivo para producir un efecto de enseñanza; es necesario incluir la evolución de la situación donde el sujeto se adapte al medio creado por la situación, sin importar si haya o no intervención del docente en el transcurso del proceso. En resumen, una situación didáctica se presenta cuando el docente tiene la intención de enseñar al estudiante un saber matemático dado.

Otro planteamiento teórico corresponde a la solución de problema según Pólya (1990), quien considera que un problema es una situación en la cual, dadas ciertas condiciones, se plantea una exigencia; lo anterior requiere la combinación y transformación de procedimientos y conocimientos para alcanzar una solución pertinente y adecuada. Este autor considera importante

para la solución de un problema todo el proceso de búsqueda, encuentros, avances y retrocesos en el trabajo mental, esto implica un análisis total y detallado de la situación.

Santos Trigo, (2011) identifica cuatro aspectos en la resolución de problemas: saber qué hacer, cómo hacerlo, es correcto lo que hizo o existe otra vía y la influencia de los componentes individuales y afectivos del resolutor. Los estudiantes deben, relacionar, sacar conjeturas, utilizar sistemas de representación, hacer conexiones, argumentar y comunicar los resultados. También resalta la importancia de utilizar herramientas tecnológicas en la resolución de problemas.

Para Pólya (1990), la resolución de problemas representa una forma de descubrimiento, es como un arte que utiliza como medio la heurística para investigar nuevos problemas. Esto permite considerar a la matemática como un instrumento que posibilita resolver problemas del entorno sociocultural, intentando comprender el mundo y ofreciendo respuestas a múltiples interrogantes. Según el autor el estudiante construye su propio conocimiento por medio de la resolución de problemas. Para esto, los estudiantes utilizan diferentes estrategias, que les permiten entender y asimilar las dificultades que trae cada situación. Pólya sugiere el siguiente método:

- a. Comprender el problema, se requiere que analice y entienda bien el problema, es importante que trace un gráfico o dibujo, destaque los valores conocidos y desconocidos.
- b. Idear un plan, recomienda pensar en problemas semejantes o relacionados al que esté trabajando, utilizar todos los datos, simplificar la información, emplear teoremas conocidos y finalmente propone descomponer el problema en diferentes partes lo más pequeñas posibles.

- c. Ejecutar el plan, Sugiere que cada paso sea correcto verificándolo lentamente, donde incluya todos los detalles, circunstancias, hechos concretos, lo cual implica claridad y buenos conocimientos para evitar cometer errores.
- d. Mirar hacia atrás, plantea la necesidad de verificar el resultado, volver atrás, revisar, discutir, buscar otras formas de resolverlo, descubrir si tiene otras respuestas y observar si se puede aplicar en otro problema. Para resolver problemas, se requiere disciplina, constancia, perseverancia y especialmente interés de hacerlo.

La International Commission on Mathematical Instruction I.C.M.I. (como se citó en Carrillo, 2017) considera un desafío o reto, como una pregunta o problema propuesto de forma intencionada para provocar que el receptor intente una solución, al mismo tiempo ejercite y amplíe la comprensión y conocimiento sobre el tema. Para la solución se requiere utilizar los elementos matemáticos necesarios, acentuando el nivel de conocimiento previo y la importancia de usar la creatividad, especialmente, mediante el dibujo y la representación gráfica en la construcción de los conceptos. Una situación retadora se puede generar en las aulas de clase brindando la posibilidad de hacer matemáticas y de pensar matemáticamente, cuyos contenidos se delimitan dentro de determinados contextos y se utilizan diversos medios para una solución efectiva.

Para la solución de los retos utilizando el concepto de fracción se basó en Pólya (1945) y en el método de la COPA cómo plantear y resolver problemas, como se muestra en la Figura 2.

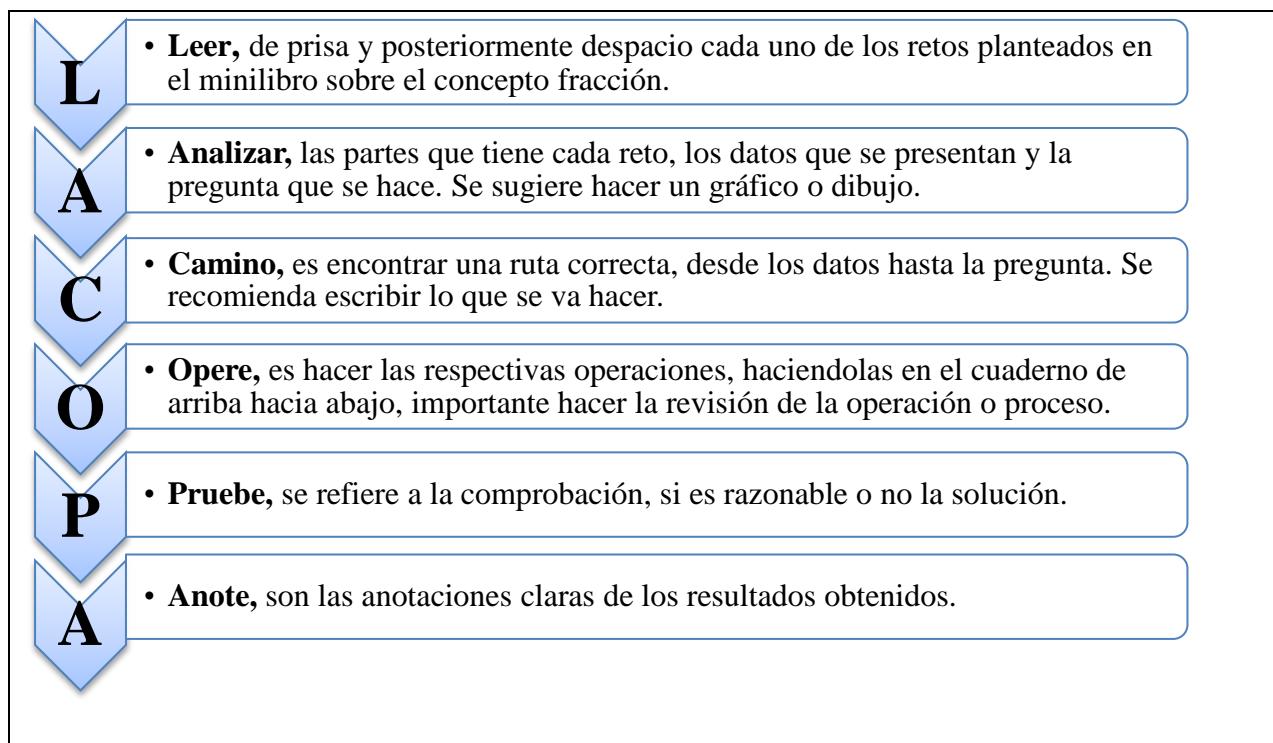


Figura 2. Método la COPA. Fuente elaboración propia, basada en Pólya (1945).

Por otra parte, un elemento didáctico utilizado en el desarrollo de la investigación hace referencia a la fotografía como medio de comunicación, la cual permite, desde la imagen, mayores posibilidades de enseñanza y aprendizaje, es un recurso necesario y fundamental para el desarrollo de actividades en el aula. Una fotografía utilizándola de manera pedagógica, permite reflexionar, mejorar comprobar y percibir diferentes aspectos. La aplicación didáctica, como complemento a los textos se apoya en lectura de imágenes, en la influencia social y la información que puede proporcionar al estudiante como lenguaje gráfico y visual (Sánchez, 2009).

Finalmente, se destaca la influencia del entorno físico en el desarrollo del trabajo investigativo, se pretende que los estudiantes logren conocimientos matemáticos dentro del contexto donde se desenvuelven. De acuerdo a esto, se reflexiona en particular sobre la palabra “contexto” proveniente del latín *contextus*, que significa entorno físico o situación histórica,

política, social o económica en la que se considera un hecho (Gallardo, 2017). Para Ramos y Font (2006), el contexto, hace referencia a observar la situación dentro de un campo de aplicación de un objeto matemático y también se trata de la situación enmarcada en el entorno, utilizándolo de forma ecológica. Es decir, que se presentan el objeto matemático en diferentes lugares. Pero concluyen que los dos conceptos actúan simultáneamente. Para esta investigación el propósito fue presentar una secuencia didáctica basada en situaciones del mundo real, donde el estudiante, con conocimientos previos y su corta experiencia, los pudiesen resolver, consolidando conocimientos matemáticos (en este caso concepto de fracción) y de esta forma observasen que la matemática se puede aplicar al mundo real.

Finalmente, tomando como referente a Llinares y Sanchez (1998), Vasco (1984) y Fandiño (2006), conciben la fracción a partir de los registros semióticos, según su estructura, significados y aplicaciones. De igual forma, utilizan las representaciones como medio para la adquisición de conocimientos matemáticos, se caracteriza el objeto fracción con su representación, por medio de símbolos, haciendo transformaciones sin cambiar el significado bajo reglas propias y se hace la conversión de registros semióticos para formalizar el lenguaje de los estudiantes a través de las representaciones.

Capítulo III. Diseño metodológico

En este capítulo se presentan los criterios metodológicos utilizados en la investigación, aquí se enuncia el tipo de estudio, la metodología utilizada, los procedimientos, las actividades planteadas, las unidades de análisis, categorías y subcategorías de análisis así como las técnicas de recolección de la información.

6. Marco metodológico

6.1. Tipo de estudio

El estudio asume un paradigma de corte cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo, que se adapta al objetivo planteado, el cual hace referencia a analizar una estrategia didáctica empleada en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en el caso específico del concepto de fracción, con estudiantes de grado sexto en el contexto rural. Se pretende hacer una reflexión sobre la actividad desarrollada en el aula de clase, con el propósito de mejorar la práctica docente y a su vez generar en los estudiantes la apropiación de los conocimientos matemáticos.

Teniendo como referencia las características planteadas por, Hernández, Fernández y Baptista (2014), la investigación cualitativa proporciona profundidad a los datos, dispersión, riqueza interpretativa, contextualización del ambiente, detalles y experiencias únicas. Asimismo, aporta un punto de vista personal, natural e integral de los fenómenos, así como flexibilidad en el manejo de la información. La investigación se orientó en comprender los fenómenos referentes a los procesos de enseñanza y aprendizaje, explorándolos desde la perspectiva de los estudiantes, docentes y padres de familia en un ambiente natural y en relación con su contexto.

En la investigación se abordó el elemento cualitativo y de tipo descriptivo según Arias (2012), esta consiste en la caracterización de los hechos, fenómenos, individuo o grupo para

establecer su estructura o comportamiento. Esto, permite organizar, clasificar y comparar la información, los datos y las respuestas de los estudiantes, padres de familia y docentes de la I.E. Divino Niño, frente a la problemática que se presenta en los procesos de enseñanza y aprendizaje, del objeto fracción. Con la ayuda de los datos recolectados y los resultados se examinan los hechos; es decir, explorar, describir y luego generar perspectivas teóricas (Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

Cada aspecto recolectado se utilizó respecto a una función determinada para conocer las situaciones encontradas y conducirnos a la solución de los diversos problemas presentes en la comunidad educativa. Es importante resaltar que en estudio descriptivo según Hernández, Fernández y Baptista (2014), el investigador especifica las propiedades, las características y los perfiles de las personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o fenómeno que se someta a un análisis. Es decir, debe tener presente los diferentes procesos, guiarse por el contexto, utilizar los recursos y medios disponibles, para alcanzar los objetivos planteados, debe asumir una actitud que sea útil, razonable y práctica para encontrar solución a los problemas de la realidad que aquejan la Institución Divino Niño Cormal del municipio de Quípama.

Esta investigación se inició a partir de experiencias y observaciones que permitieron descubrir e interpretar una realidad que favoreciera el proceso educativo mediante el análisis de una estrategia didáctica apropiada para la enseñanza y el aprendizaje del objeto fracción, sus operaciones y situaciones del entorno con estudiantes de grado sexto. De esta forma se obtiene un panorama más preciso de la magnitud del problema y de sus resultados, mediante un análisis de tipo descriptivo (Arias, 2012).

6.2. Diseño de la investigación

La investigación presentó un diseño de campo, dada su estructura de carácter flexible que orientó el proceso investigativo para responder al problema planteado (Arias, 2012). Se pretendió llegar a comprender la particularidad de las personas y las comunidades, dentro de un contexto particular; buscando interpretar la realidad con la experimentación, indagación, socialización, y el recuento de experiencias significativas de los participantes.

De acuerdo al trabajo de campo, al ambiente y a los participantes se abordó un diseño de investigación- acción según Hernández, Fernández y Baptista (2014), este debe conducir a cambiar y por tanto este cambio debe incorporarse en el propio proceso de investigación. Se indaga al mismo tiempo que se interviene, su finalidad comprender y resolver problemas específicos de las comunidades.

En la siguiente figura se detalla las fases esenciales del proceso empleado en la investigación- acción, se parte de la problemática diagnosticada en la institución referente a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, teniendo en cuenta las diferentes acciones pertinentes para interpretar la situación, los respectivos análisis de los resultados y finalmente las reflexiones finales. El plan metodológico para desarrollar el trabajo se basó en la investigación acción en Elliott (2000).

Fases de la investigación:



Figura 3. Fases de la investigación. Fuente elaboración propia, basado en Hernández, Fernández y Baptista (2014), Elliott (2000).

6.3. Fases de la investigación

En relación con la investigación-acción para Hernández, Fernández y Baptista (2014), la primera fase admite la recolección de datos sobre la problemática y las necesidades identificadas; la segunda fase del proceso de investigación-acción equivale al desarrollo del plan: objetivos, estrategias, acciones, recursos, programación de tiempos y recolección de datos; en la tercera fase de investigación-acción se presenta el desarrollo, implementación del plan y evaluación de estrategias de acción utilizadas y en la cuarta fase, la realimentación resultado de nuevos ajustes, decisiones y redefiniciones de los resultados.

Mediante la investigación acción se recolectó, organizó y procesó la información, además se aplicaron cuestionarios, encuestas y entrevistas semiestructuradas discutidas, analizadas y validadas, de tal forma que se pudiera caracterizar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en el caso particular del concepto de fracción. Realizar el análisis en las diferentes fases de la investigación garantizó una aproximación más real de la problemática, para posteriormente llegar a encontrar soluciones más pertinentes.

Por consiguiente, para el desarrollo del trabajo se plantearon cuatro (4) fases para alcanzar los objetivos establecidos. Como los plantea, Hernández, Fernández y Baptista (2014) y Elliott, J. (2000) la investigación acción se desarrolla en: diagnóstico y reconocimiento de la situación; desarrollo de un plan de acción; actuación para poner en práctica el plan y la observación de sus efectos en el contexto y reflexión en torno a los efectos producidos. De esta forma la investigación se realizó mediante la interacción dentro de la realidad a través de estas cuatro fases.

6.3.1 Fase diagnóstica

Se hizo un diagnóstico para identificar y analizar las dificultades referentes a la enseñanza y al aprendizaje del objeto fracción mediante la técnica de la matriz de Vester (Betancourt, 2016). El primer paso consistió en identificar los problemas sociales, analizando sus causas y caracterizando la población objetivo. En la elaboración de las matrices se utilizó la participación de la comunidad educativa, para identificar los problemas y con el objetivo de organizar la información, generando una relación causa - efecto entre ellos. Para lograr el objetivo, se conformaron grupos de trabajo con la comunidad educativa conocedores de la temática quienes poseen nociones significativas, en cuanto a las características de la población objetivo.

Dentro de las actividades realizadas en la fase diagnóstica se destacaron: la formulación del problema; recolección de datos e información; trabajo de campo con padres de familia, docentes y estudiantes; análisis e interpretación de datos y discusión de algunos resultados y primeras conclusiones (para un análisis más detallado de los resultados arrojados en esta etapa, véanse el Anexos 1, 2, 3 y 4). Una vez completada la fase diagnóstica, se realizó el planteamiento del problema y los objetivos a desarrollar, haciendo un permanente rastreo bibliográfico que permitió corroborar el desarrollo de la investigación. También se identificaron los referentes teóricos a utilizar, enmarcados desde la Teoría de los Registros de Representación Semiótica propuesta por Duval (1998).

6.3.2 Fase de acción

Se desarrolló un plan de acción, para reconocer a fondo aquello que estaba ocurriendo dentro de las actividades académicas, se analizaron e interpretaron las causas activas que presentaron mayor relevancia en el resultado de la matriz de Vester y que estuvieron asociadas a los procesos de enseñanza-aprendizaje del objeto fracción, se plantearon actividades que propiciaban la aprehensión de la temática.

En esta fase se desarrollaron las siguientes actividades: invitación a padres de familia o acudientes a hacer parte del desarrollo de la investigación y autorización para que sus hijos o acudidos también participasen (Anexo 6 y 7), asentimiento de los estudiantes para participar en la investigación (Anexo 8), aplicación de encuestas semiestructuradas donde se identificaron y analizaron las opiniones que tenían los estudiantes (grupo focal) y los padres de familia en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, abordando las fracciones, mediante cuestionario (entrevista semiestructurada), (Anexos 9, 10 y 11) . Se describieron las creencias y concepciones de los docentes desde varios puntos de vista (Ponte, 1999). Se diseñó una secuencia

didáctica para la comprensión de los diferentes significados de fracción, (Anexo 12), basada en la Teoría de las representaciones semióticas de Duval (2004) donde se incluyó la fotografía como medio para la aprehensión de conocimiento matemático. Así mismo, se tuvo presente la teoría de Polya (1945) en las estrategias para el planteamiento y resolución de problemas.

6.3.3 Fase de observación y contrastes

La observación permitió plasmar los hechos, procesos, detalles, acontecimientos, eventos e interacciones entre los participantes. Además, permitió la acción para poner en práctica la estrategia didáctica y la indagación de sus efectos en el contexto sociocultural donde tuvo lugar la investigación. En esta fase se contrastó la información de docentes, padres de familia y estudiantes hacia las concepciones que tenían sobre la matemática. Se evidenciaron los procesos de comprensión que presentaron los estudiantes, con los contenidos y construcción del concepto de fracción.

6.3.4 Fase de reflexión

Se analizó y caracterizó la estrategia didáctica empleada en la intervención en los procesos de enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción. También, se indagaron las causas activas abordando las fracciones y se realizó una abstracción en torno a los efectos producidos que sirvieron de base para el desarrollo de la investigación.

En esta fase se presentaron los resultados con base en la problemática, en los resultados encontrados y en los objetivos planteados en la investigación y finalmente se hizo una retrospección de las fases anteriores.

6.4. Categorías y subcategorías de análisis

En este apartado, se presentan las categorías de análisis, que se toman como referencia para el análisis de la información recolectada, se interpretan las causas activas que presentaron mayor

relevancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las fracciones, se muestran los aportes de los participantes, la aplicación de una secuencia didáctica con situaciones del contexto donde se interpretó los diferentes significados del concepto de fracción, a partir del uso diferentes registros de representación semiótica y finalmente se examinó y caracterizó el grado de receptividad que presentaron los estudiantes en el proceso de intervención frente a la estrategia didáctica, como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 4
Categorías y subcategorías de análisis

Categorías	Subcategorías
Creencias y concepciones sobre la matemática especialmente las fracciones	Padres de familia Docentes Estudiantes
Significados del objeto fracción	S1. Parte todo S2. Medida S3. Cociente S4. Partidor S5. Operador S6. Razón S7. Número decimal S7. Porcentaje
Registros semióticos	Formación
Actividades cognitivas	Tratamiento Conversión
Grado de receptividad y aceptación de la estrategia didáctica	Actitud hacia las matemáticas Motivación de los estudiantes Preferencia hacia la matemática

Fuente: Elaboración propia

6.5. Unidades de análisis

Esta investigación fue implementada con estudiantes del grado sexto de la Institución Educativa Divino Niño en el municipio de Quípama, la cual es de carácter público. La sede central, junto con seis (6) sedes anexas, se encuentran ubicadas en la zona rural del municipio. La sede principal se encuentra ubicada en la vereda Cormal a una hora de Quípama por la vía que comunica con el municipio de Otanche. Actualmente, la institución cuenta con ciento treinta (130) estudiantes, desde transición a undécimo grado, de los cuales nueve (9) de ellos corresponden a la población objetivo (sujetos de investigación) con edades promedio de 11 años. Pertenecen a una población que en su mayoría, se dedica a actividades económicas relacionada con agricultura, ganadería, producción de especies menores y minería (esmeraldas -carbón).

6.6. Instrumentos y técnicas para la recolección de la información

Los instrumentos que se emplearon en el desarrollo del estudio fueron: la técnica de las matriz de Vester, encuestas semiestructuradas, entrevistas semiestructuradas, observaciones directas, secuencia didáctica, diarios de campo, grabaciones y fotografías.

6.6.1 *La técnica de la matriz de Vester*

Técnica desarrollada por Frederic Vester (1925-2003). Se identifica como un arreglo cuadrangular de números en filas horizontales y columnas verticales, que muestran las posibles causas y efectos de una situación problema o un fenómeno. El primer paso consiste en identificar los problemas sociales, a partir de la lluvia de ideas analizando sus causas y caracterizando la población objetivo, también es conocida como *Brainstorming*, creada y divulgada por Alex Oxborn, basada en la estructura física y mental del cerebro, la cual tiene dos partes: la razonadora y la creativa. Su técnica consiste en reunir de 5 a 10 personas para ponerlos a pensar, inicialmente de manera individual, durante 20 o 30 minutos, con el propósito de hallar la salida a una situación o necesidad específica. En este estudio se utilizó para identificar los problemas con los

participantes, contó con aportes realizados por estudiantes, padres de familia y docentes. En la elaboración de la matriz de Vester se utilizó la participación de la comunidad educativa, para identificar los problemas; con el objetivo de organizar la información, generando relaciones de causa y efecto entre ellos. Al mismo tiempo, se conformaron grupos de trabajo con conocedores del tema, que a su vez tenían una visión significativa sobre las características de la población objetivo.

6.6.2 Observación directa

La observación requiere que el investigador profundice en la situación social, haga parte activa del estudio y mantenga un grado de reflexión permanente (Hernández, Fernández y Batista 2014). Para este caso, el observador fue el mismo investigador quien participó activamente mediante anotaciones descriptivas de hechos, sucesos, opiniones y acciones para posteriormente hacer sus respectivas interpretaciones.

6.6.3 Encuestas

La encuesta es una técnica que intenta obtener información suministrada por un grupo de sujetos sobre las características propias o sobre un tema específico (Arias, 2006). Mediante encuestas semiestructuradas se identificaron y analizaron las opiniones que tenían los estudiantes y los padres de familia de la I. E. Divino Niño Cormal en Quípama en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, abordando las fracciones.

6.6.4 Entrevistas

La entrevista es una técnica basada en el diálogo y la conversación, donde se obtuvo información sobre un tema determinado con anterioridad, la entrevista semi- estructurada se caracteriza por su flexibilidad (Arias, 2012). Para la presente investigación se realizaron

entrevistas a cuatro docentes de educación básica, mediante cuestionario describieron las creencias y concepciones que ellos tienen sobre la matemática desde varios puntos de vista.

6.6.5 Secuencia didáctica

Urquiza y Campana citan a Pozo (1990) quien destaca la importancia de elaborar e implementar estrategias didácticas, estas son secuencias integradas de procedimientos o actividades que se eligen con el propósito de facilitar la adquisición de conocimiento, el almacenamiento y la utilización de información.

Para programar actividades en el aula de clase es necesario proceder con la realización de varios procesos para que el estudiante logre el aprendizaje, Godino, Batanero y Font (2004) describen lo siguiente.

El diseño de unidades didácticas implica la toma de decisiones en distintos ámbitos de concreción hasta culminar en un documento en el que el profesor concreta los objetivos, contenidos, actividades, recursos y materiales, instrumentos de evaluación y selección de estrategias metodológicas. Este documento será un instrumento de planificación y gestión del trabajo en clase con los alumnos, en un período corto de tiempo (unas 3 o 4 semanas) y se centra en un contenido matemático que tiene una cierta unidad temática, y que organiza el tratamiento de un cierto tipo de problemas en el nivel educativo correspondiente (p. 112).

Lo anterior es importante, dado que describe los criterios que se tendrán en cuenta para los respectivos análisis de los aspectos relevantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje, los cuales dan fiabilidad y validez de la secuencia didáctica que facilite la construcción del objeto fracción.

6.7. Validación de instrumentos para recolección de información.

Es importante resaltar la capacidad que poseen los instrumentos con los cuales se recogió la información que sustenta esta investigación. Con el propósito de obtener una información más efectiva se recurrió a la validación de expertos, que permitieran la consolidación de conocimientos.

Para la validación de la encuesta semiestructurada y entrevista semiestructurada se contó con los aportes de Nelsy Rocío González Gutiérrez, quien es doctora en Ciencias de la Educación, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), Magister en ciencias matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia Bogotá y licenciada en Matemáticas y Física (UPTC); José Francisco Leguizamón Romero, doctor en Educación, UPTC- RUDECOLOMBIA, CADE TUNJA, Magister en Educación, énfasis docencia universitaria. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), Especialista en Matemática Avanzada de la Universidad Nacional de Colombia y licenciado en Matemáticas y Física (UPTC) y Publio Suárez Sotomonte, doctor en educación, UPTC- RUDECOLOMBIA, CADE TUNJA y Magister en Educación, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), especialista en matemática avanzada de la Universidad Nacional de Colombia y licenciado en Matemáticas y Física (UPTC).

Para la valoración de la secuencia didáctica se invitaron como expertos a la doctora Nelsy Rocío González Gutiérrez, el doctor José Francisco Leguizamón Romero, antes mencionados y el doctor Héctor Julio Suárez Suárez (Doctor en Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Magister en Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Especialista en computación para la docencia Universidad Antonio Nariño y Licenciado en Matemáticas y Física UPTC); quienes dieron su opinión y aportes sobre la secuencia didáctica titulada “Fracciones, fotografía y contexto.”(Anexo 13). Teniendo presente las sugerencias y

observaciones de los evaluadores, con sus respectivos ajustes se aplicaron cada uno de los instrumentos.

6.8. Procedimiento para el análisis de los datos

En primera medida, con el uso de la técnica de la matriz Vester se priorizaron y analizaron los principales obstáculos que más afectan el alcance de los conocimientos matemáticos y en el caso particular sobre el concepto de fracción, en estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Divino Niño Cormal en el municipio de Quípama (Boyacá Colombia) (Anexo 1, 2, 3 y 4). Posteriormente, se indagó sobre las expectativas que tenían los padres de familia, docentes y estudiantes sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Se analizó la información suministrada por ellos, de sus expresiones y experiencias suministradas en las encuestas y entrevistas, para compararla con la teoría utilizada y finalmente darle validez.

Por otra parte, se diseñó e implementó una secuencia didáctica con el propósito de facilitar la construcción del concepto de fracción, la cual indagó sobre los significados, interpretación y percepción que tuvieron los estudiantes sobre el tema. Se propusieron 10 retos que permitieron indagar regularidades y formas que presentan ciertas imágenes (fotografías) las cuales aplican conceptos y diferentes significados del concepto de fracción (Anexo 12). Mediante la utilización permanentemente de registros de representación, en lenguaje común, lenguaje gráfico y lenguaje aritmético, lograron darle solución a los retos, con el paso de una representación a otra y teniendo en cuenta los procesos de tratamiento y conversión.

Por último, se examinó y caracterizó el grado de receptividad, que presentaron los estudiantes en el proceso de intervención frente a la estrategia didáctica. Para este propósito se tuvo en cuenta la actitud, motivación, preferencia y los puntos de vista que los estudiantes aportaron sobre el desarrollo de la secuencia didáctica.

Capítulo IV Resultados

En este capítulo se presentan los resultados en relación con el problema planteado y los objetivos propuestos en la investigación. Se centra en el análisis de la información recolectada mediante los instrumentos y técnicas utilizados, mencionados en el marco metodológico. Se presentan los resultados mediante un análisis cualitativo, previsto en la metodología. Igualmente, se construyen las relaciones entre los análisis de cada categoría.

7. Análisis de resultados

7.1. Análisis de los resultados utilizando la técnica de la matriz de vester

El uso de la técnica de la matriz Vester, permitió detectar los problemas que más afectaban el alcance de los conocimientos matemáticos y en el caso particular sobre el concepto de fracción, en estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Divino Niño Cormal en municipio de Quípama (Boyacá Colombia). Se partió de una lluvia de ideas entre los participantes como lo propone el uso de la matriz de Vester: se identificaron diez (10) situaciones más críticas que afectan de manera negativa a la Institución y especialmente el objeto fracción. Esta población estuvo conformada por tres (3) estudiantes, dos (2) padres de familia y cuatro (4) docentes. El mecanismo de la lluvia de ideas, permitió recoger información sobre situaciones, que condujeron a la formulación o planteamiento del problema de esta investigación, la caracterización y priorización, mediante la utilización de la matriz de Vester (Anexos 1 y 2).

Una vez formalizada la matriz en su estructura y en la gráfica, basados en los aportes de Betancourt, D. (2016); se procedió al proceso de análisis e interpretación permitiendo jerarquizar los problemas e identificar las causas y efectos entre ellos. De acuerdo con lo anterior, se identificaron las dificultades más relevantes del estudio, resaltando “la falta de atención y predisposición en el desarrollo de las clases,” “recursos y estrategias siempre iguales e insuficientes.” Lo anterior, debido a que sus valores presentaron un total activo y un total pasivo

alto, es decir gran causalidad; su análisis y manejo requieren suficiente atención para lograr superarlos. A su vez se identificaron los problemas activos, “poco seguimiento por parte de los padres;” “escaso desarrollo de autodisciplina;” “baja integración en el desarrollo de trabajo en equipo,” “en el contexto socioeconómico en que viven los estudiantes.”

En cuanto al concepto de fracción, se utilizó la misma estrategia para el diagnóstico (Anexos 3 y 4), permitiendo definir objetivos y trabajar en la solución de la problemática detectada, realizando el análisis de la matriz y la gráfica, se logró jerarquizar dificultades e identificar el grado de influencia y dependencia entre ellas, mostrando los problemas prioritarios y que requieren mediación. El estudio reveló que los problemas de mayor incidencia en su orden corresponden a: “deficiencias en las prácticas de enseñanza y aprendizaje o situaciones didácticas inapropiadas,” “sin tener en cuenta el contexto;” “poca habilidad en el planteamiento y solución de problemas cotidianos” y “mínima utilización de un lenguaje pertinente donde se evidencien los registros de representación semiótica.”

Los problemas con total de activos alto y total pasivo bajo, son aquellos de alta influencia sobre la mayoría de los demás. Éstos son de vital importancia por su influencia en los problemas centrales y por tal razón requieren cuidado y mediación, para el caso se presentan: “bajo nivel en la interpretación y construcción de los diferentes significados de fracción y la relación entre ellos;” “escaso material bibliográfico actualizado referente al concepto de fracción dentro de la institución;” “falta de materiales y recursos didácticos apropiados en el desarrollo de la temática de las fracciones;” “conocimientos previos débiles y falta de interés en la adquisición de nuevos conocimientos y poca utilización del pensamiento variacional, métrico, espacial y aleatorio.” Este último respecto al estándar de grado sexto, que hace referencia a sacar conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números a través de la historia.

7.2. Análisis de resultados obtenidos mediante encuestas y entrevistas

En la prueba piloto (Anexos 9, 10 y 11), cuestionario que se realizó mediante una encuesta semiestructurada de trece (13) preguntas para los estudiantes, catorce (14) preguntas para los padres de familia y una entrevista semiestructurada de once (11) preguntas para los docentes, que indagó sobre la concepción acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas especialmente sobre el objeto fracción; una prueba inicial sobre los conocimientos y procedimientos que los estudiantes utilizan para solucionar situaciones matemáticas, que tienen que ver con fracciones, basada en el archipiélago fraccionario de Vasco (1984), (Anexo 5). Se contó con la participación de diecisiete (17) estudiantes y quince (15) padres de familia. En la prueba final, se tuvo en cuenta a nueve (9) estudiantes, nueve (9) padres de familia y cuatro (4) docentes, para la prueba final el número de participantes disminuyó debido a que el grupo focal contó con un número inferior de estudiantes matriculados en el grado sexto, diferente al que se manejó el año anterior en el mismo grado, al inicio de la prueba piloto.

Así mismo, tanto las preguntas de la prueba inicial o piloto, como las de la prueba final, fueron de tipo escrito, permitieron una descripción cualitativa, admitiendo hacer comparaciones entre las respuestas de los estudiantes, padres de familia y docentes. Frente a las categorías de análisis antes definidas, a su vez, confrontaron el resultado de la prueba inicial con el resultado de la prueba final.

Este apartado contiene elementos relacionados con las expectativas que tienen padres de familia, docentes y estudiantes sobre la matemática, sus procesos de enseñanza y aprendizaje, dentro experiencias y dificultades en su práctica diaria. Se tiene en cuenta como ellos visualizan la realidad dentro del aula de clase y en su entorno familiar; por lo cual es necesario deducir la información suministrada por ellos, de sus expresiones verbales o escritas en las encuestas y entrevistas.

Respecto a la colaboración y participación activa de los padres, tanto en la prueba inicial como en la prueba final, se coincidió en la valoración respecto a los niveles de frecuencia: siempre, casi siempre, a veces, nunca; el porcentaje fue similar en el nivel a veces, cuyas razones argumentan, hace referencia al deber que ellos tienen con sus hijos, al tiempo disponible y a la solicitud de colaboración que el hijo hace al padre, especialmente en lo que tiene que ver con las tareas.

En relación al papel que juega la familia, como parte importante en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, como lo señala Mosquera (2018), el acompañamiento que hacen los padres de familia o acudientes presenta dificultades como: desatención, descuido, imposibilidad en conocimientos y en algunos casos delegan sus responsabilidades a las instituciones educativas. Además, las características del entorno familiar y el contexto sociocultural, hacen que no se presente un seguimiento óptimo. Igualmente, no hay conexión entre familia, estudiantes e instituciones educativas, para apoyar a los estudiantes en los procesos educativos; por ello las entidades deben promover la participación activa de los padres para un mejor acompañamiento.

Con relación al cuestionamiento a los padres de familia, ¿Asiste frecuentemente a la institución para indagar sobre el desempeño de su representado?, sus respuestas fueron muy parecidas en las dos pruebas; argumentan que en ocasiones asisten a la institución, aunque coinciden que es un deber que deben cumplir, que necesitan estar enterados del rendimiento académico de sus hijos, lo consideran como algo importante, se excusan por vivir lejos, por no perder materias y si no hay inconvenientes no ven la necesidad de asistir.

En el caso del proceso de aprendizaje de las matemáticas, según Ardila (2018), los factores de influencia familiar, se presentan con criterios como los siguientes: el escaso apoyo en los trabajos extracurriculares, la poca motivación en el hogar, la falta de interés, la poca supervisión y la falta de materiales; por lo cual plantea un estudio sociodemográfico, pretendiendo identificar la

situación de las familias de los estudiantes y un plan de re-educación familiar, para mejorar el rendimiento académico de los mismos, especialmente en matemáticas. Con relación a esta investigación, concuerda con lo antes mencionado respecto a la orientación cuando el hijo tiene tareas de matemáticas; en lo que tiene que ver con el suministro de materiales: los padres consideran que siempre proveen de los elementos necesarios para que sus hijos puedan realizar las actividades, lleguen a cumplir adecuadamente con sus obligaciones porque quieren lo mejor para ellos. Buena parte de los adultos carecen de formación académica o no culminaron sus estudios, por lo tanto, se les dificulta o no pueden apoyar a sus hijos en el desarrollo de sus actividades, esto produce desinterés en el aprendizaje por parte de los estudiantes.

El nivel socioeconómico, la cultura, la organización familiar, la ocupación y la educación de los padres, influyen en el logro académico de los estudiantes. También, las situaciones psicosociales como el interés hacia los hijos, el castigo, el apoyo escolar, la visita a bibliotecas, museos y parques recreativos, promueven mejoras en el rendimiento en matemáticas (González y Hernández, 2014). Estos aspectos fueron bastante importantes para el desarrollo de la presente investigación, dado que la población objetivo proviene de un contexto rural, en donde algunos estudiantes viven en condiciones económicas difíciles y sumado a esto deben desplazarse por tiempos hasta de dos horas para llegar a la institución, sus familias son disfuncionales, es decir, no viven con sus padres, sino con sus abuelos, tíos, padrastrlos, madrastas o recomendados. Respecto al contexto socioeconómico, los docentes opinan, que las familias de los estudiantes, tienen múltiples dificultades económicas, debido al desempleo en la región; esto es evidente debido a las condiciones en que algunas familias viven, lo cual influye en que los hijos no tengan los materiales necesarios para su formación. Además, dicen que en la región se presentan algunos vicios, delincuencia y en algunos casos, violencia intrafamiliar.

En cuanto a las expectativas que tienen los docentes Vaccotti (2019) plantea que se debe dar bastante importancia a la participación de la familia, como factor decisivo para generar buenos resultados en los procesos de enseñanza y aprendizaje, para resolver actitudes negativas en la parte disciplinaria; con esto se evidencia que se presentan dificultades en la colaboración de los padres de familia en la formación de los estudiantes. Igualmente, en la entrevista a docentes (Anexo 14), se confirma el papel preponderante de los padres en el desarrollo del pensamiento del estudiante.

El papel del docente de matemáticas se considera fundamental; el maestro debe tener un conocimiento especializado en el contenido matemático, es decir, abordar la enseñanza desde sus propios conocimientos de los significados de los objetos y procesos matemáticos, que de esta forma pueda planear sus clases, interactuar dentro del aula, entender las dificultades y evaluar los niveles de aprendizaje de los estudiantes (Godino, Giacomone, Battanero y Font 2017). En la entrevista hecha a docentes durante el desarrollo de esta investigación, se confirma que la experiencia del docente, debe usarse en la implementación de estrategias, propiciando que los aprendizajes sirvan para la vida, logren que los estudiantes apliquen su creatividad, se interesen por el aprendizaje y desarrollos el pensamiento lógico y analítico.

Para Benítez (2013), el contexto social influye en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y deriva de las concepciones de padres de familia, docentes y estudiantes; igualmente esto ratifica y coincide con los resultados obtenidos en esta investigación. Para el caso de los docentes en formación, según el autor mencionado, ellos deben llevar presente los antecedentes escolares de los estudiantes, enseñan cómo les enseñaron sus profesores, sugiere que practicando a enseñar matemáticas es como se aprende a enseñar y de acuerdo a su concepción ésta se la transmite a sus estudiantes. Para esta investigación los docentes entrevistados aseguran que debe haber respeto, confianza, cooperación y buena comunicación

entre docente y estudiante, igualmente entre estudiantes para obtener buenos resultados en los procesos educativos.

Con relación al análisis de los docentes, se tuvieron en cuenta aspectos como: actitudes, formas de enseñar, visión y concepción hacia las matemáticas. En las aulas de clase, se pueden caracterizar profesores con diferentes modelos didácticos, de acuerdo a sus prioridades y criterios; sin embargo, no se pueden clasificar dentro de un solo modelo, pues generalmente presentan tendencias de diversos modelos, pero se clasifica dentro del que más particularidades lo identifique. Leguizamón (2017), hace una clasificación de los docentes de acuerdo a su metodología: entrenador, tecnólogo, humanista, progresista y crítico, a su vez presenta otra sistematización de tendencias pedagógicas de los docentes, determinadas por el desarrollo de sus clases: tradicional, tecnológica, activista y constructivista. En el presente estudio los docentes entrevistados presentan particularidades diversas según las anteriores características.

Es importante destacar la posición que tuvieron los docentes respecto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas por medio de la encuesta realizada, los cuales aportaron significativamente para el desarrollo de esta investigación, sustentada bajo la perspectiva de Ponte (1999), como se mencionó en el marco teórico. También se consideró la perspectiva de Godino (2004), sobre la concepción constructivista de los docentes al presentar la relación estrecha entre las matemáticas, el entorno físico, biológico y social, que para el desarrollo de este trabajo es evidente y confirma los hallazgos.

En cuanto a las creencias y concepciones de los estudiantes Ledezma y Acosta (2016) presentan tres actitudes importantes que muestran los estudiantes hacia las clases de matemáticas y hacia la pura matemática: lo afectivo, sus creencias y la conducta. Estas actitudes, especialmente aquellas que son negativas, influyen en las estrategias de enseñanza y

aprendizaje, a su vez son determinantes en el rendimiento académico en el área. En las encuestas a estudiantes (Anexo 9), se confirma la posición que ellos tienen, respecto a las matemáticas, más del 65% de los estudiantes afirman que esta es el área de mayor complejidad, le dedican un corto tiempo para estudiarla, consideran una actitud regular hacia el estudio de esta, afirman que el factor que influye en el bajo rendimiento, se debe a que no estudian lo suficiente y a la falta de disciplina.

Cueli, Rodríguez, Núñez y González (2018) utilizan cuatro variables, en lo afectivo y en lo emocional, que influyen en el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes: la utilidad, competencia percibida, motivación y ansiedad. Concluyen que las actividades planteadas basadas en situaciones reales, utilizando herramientas tecnológicas y el trabajo individualizado del estudiante, son importantes para mejorar estas variables. De acuerdo a lo anterior, tanto en la prueba piloto como en la prueba final, los estudiantes afirman que sí les gusta participar activamente en el desarrollo de las clases de matemáticas, aportando en las actividades en grupo, opinando, ayudando con algo en las actividades propias del área, por considerarla como fundamental para la vida y porque les va ayudar a ser mejores; otros afirman que les da pena participar, no tienen mucho que aportar o porque no les gusta hablar.

7.3. Análisis de resultados de la secuencia didáctica

Para el análisis de la secuencia didáctica (Anexo 12), se tienen en cuenta las categorías que tienen que ver con los diferentes significados del concepto de fracción, como parte todo, medida, cociente, partidor, operador, razón, número decimal y porcentaje. Igualmente, la selección de una representación semiótica, la transformación o tratamiento de una representación dentro del mismo registro y la conversión de una representación que es la transformación en otro registro.

Los estudiantes afrontaron diferentes posturas ante cada uno de los retos planteados, dentro del proceso de comprensión y construcción del conocimiento matemático.

Para el análisis e interpretación de la información, se utilizó la siguiente codificación: R1 como reto uno, R2 como reto dos y así sucesivamente hasta R10 reto diez; en el caso E1 como estudiante uno, E2 como estudiante dos, sucesivo hasta E9 estudiante nueve. Además, se tienen en cuenta que los objetos matemáticos tienen diversas formas de representación por medio de registros semióticos, como el lenguaje verbal, aritmético, gráfico, y algebraico, a partir de estos registros los objetos pueden adquirir varias formas de representación dentro del mismo registro y de esta manera se definen los procesos cognitivos de tratamiento y conversión. D'Amore, Fandiño & Iori (2013) emplean un simbolismo para ilustrar la base de la semiótica.

r^m : registro semiótico ($m = 1, 2, 3, \dots$);

$R_i^m(A)$: como representación semiótica i -ésima ($i = 1, 2, 3, \dots$) de un objeto (matemático) A en el registro semiótico **r^m** .

Del objeto A que deseamos representar se elige los rasgos distintivos sobre los cuales se quiere hacer énfasis; se representa A en un registro semiótico **r^m** ; esta representación se puede indicar con **$R_i^m(A)$** ; se puede operar una transformación de tratamiento pasando, en el mismo registro semiótico **r^m** , a otra representación diferente de A, sea **$R_i^n(A)$** ($i \neq j$) ($j = 1, 2, 3, \dots$); se puede operar una operación de conversión pasando una nueva representación de A en otro registro semiótico **r^n** ($n \neq m$), sea **$R_h^n(A)$** ($h = 1, 2, 3, \dots$).

Tabla 5*Simbología de las representaciones semióticas del objeto fracción*

Registro semiótico	Simbología	Representación semiótica	Simbología
Registro verbal	r ¹	Lenguaje natural	R ₁ ¹
		Lenguaje coloquial	R ₂ ¹
Registro aritmético	r ²	Escritura fraccionaria	R ₁ ²
		Escritura decimal	R ₂ ²
		Escritura porcentual	R ₃ ²
Registro gráfico	r ³	Lenguaje pictográfico (imagen, dibujo)	R ₁ ³
		Lenguaje gráfico (recta numérica)	R ₂ ³
		Lenguaje gráfico (rectángulo, o cuadrado)	R ₃ ³
		Lenguaje gráfico (círculo)	R ₄ ³
Registro algebraico	r ⁴	Lenguaje algebraico	R ₁ ⁴

Fuente: Elaboración propia, basado en D'Amore, Fandiño & Iori (2013).

En cuanto a la solución de los diez retos, que implicaron el uso del concepto de fracción: los estudiantes primero los resolvieron individualmente, seguidamente discutieron de a dos, posterior de a cuatro estudiantes y finalmente todo el grupo; para llegar a su solución utilizaron los pasos planteados por Polya (1945); de acuerdo a lo anterior, socializaron sus procedimientos y resultados obtenidos. Al realizar estas actividades fue importante tener en cuenta los siguientes momentos: representación, exploración, conjeturación, conceptualización y formulación.

Para la presentación de los análisis e interpretación de cada uno de los retos, se muestran los objetivos propuestos de cada uno de ellos, seguidos de una tabla donde se identificaron los resultados de las observaciones más importantes y específicas, obtenidas mediante los instrumentos y técnicas para la recolección de la información. A la vez, se revelan los registros y las representaciones semióticas utilizadas, las evidencias del trabajo del estudiante y la respectiva

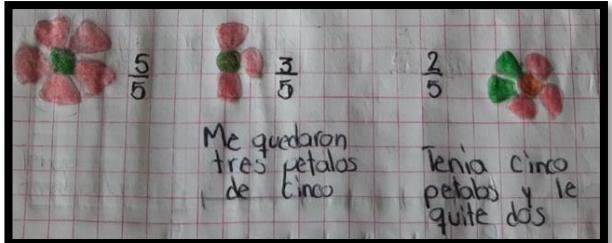
reflexión de la actividad realizada. Por último, se contrastan los resultados con la teoría, con los objetivos y con la relación entre las categorías de análisis.

7.3.1 Análisis de resultados Reto 1.

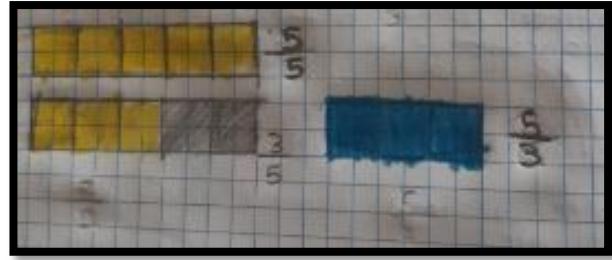
(Anexo 12). Se buscó que los estudiantes construyeran el significado de fracción a partir de la fotografía y que a la vez utilizaran figuras geométricas, dibujos, gráficas o rectas numéricas para representar fracciones.

Tabla 6

Análisis resultados Reto 1 significados del concepto fracción.

Reto	Registros de representación semiótica utilizados
En la flor representada en la fotografía, suponga que todos los pétalos son iguales, si se le quitan 2 pétalos ¿Qué fracción representa el número de pétalos que quitó con respecto al total?	Registro verbal r^1 → Representación semiótica R_1^1
¿Qué fracción representa el número de pétalos que queda en la flor?	Registro aritmético r^2 → Representación semiótica R_1^2
Con la ayuda de un dibujo, gráfico o sobre la recta numérica represente la situación.	Registro gráfico r^3 → Representación semiótica R_1^3
Reflexión	Evidencias
Los estudiantes E9 y E3 en su orden resolvieron este reto, con mayor facilidad; ellos realizan la conversión del registro lenguaje común al registro lenguaje gráfico y dentro de este hacen	

el tratamiento de la representación pictográfica a lenguaje geométrico señalado en los diagramas de la derecha. Los demás estudiantes necesitaron orientación del docente, al final todos resolvieron el reto utilizando la representación gráfica.



Fuente: Elaboración propia.

Lo anterior, evidencia que los estudiantes logran realizar la conversión y el tratamiento: se identifica que hay una relación entre el registro de partida y el registro de llegada. Pues, “dos representaciones que pertenecen a dos registros diferentes se dicen funcionalmente equivalentes, si toda la información de una puede ser inferida a partir de otra” (Duval, 2017, p. 90). También, los estudiantes dentro del mismo registro de representación gráfico, relacionan el dibujo con el uso del rectángulo para representar la misma situación.

Al considerar el análisis de esto, es absolutamente necesario destacar la utilización del registro gráfico, para la construcción del concepto de fracción, sin embargo, se notó que varios estudiantes al iniciar la actividad tuvieron dificultad en la representación gráfica. Adicional a esto, en el registro aritmético r^2 especialmente en la escritura fraccionaria R_1^2 los estudiantes mostraron confusión, tuvieron dudas al representar la situación planteada mediante $\frac{3}{5}$ o $\frac{5}{3}$. Por lo tanto, el papel del docente fue fundamental en la orientación de la actividad.

En este primer reto, el propósito fundamental fue construir el concepto de fracción mediante diferentes representaciones, según D'Amore (2006), el uso de distintas representaciones y su progresiva articulación enriquecen el significado, el conocimiento, la comprensión del objeto pero también lo hacen más complejo y múltiple. Por consiguiente, lo que se pretendía era inducir

al estudiante a tener distintas perspectivas, mediante diferentes interpretaciones para llegar a la comprensión del concepto de fracción.

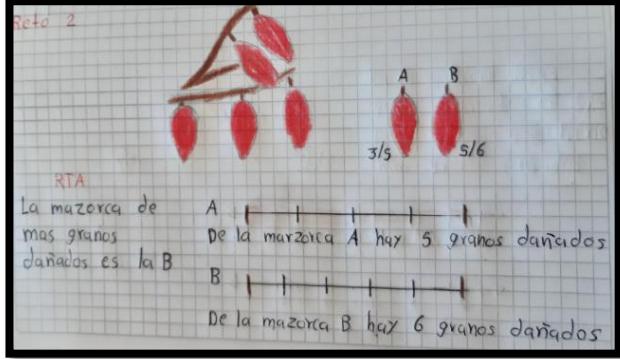
7.3.2 Análisis de resultados Reto 2.

(Anexo 12). El propósito de este reto consistió, en identificar los procesos usados para comparar fracciones, reconociendo: fracciones equivalentes, irreductibles, simplificación y amplificación, al igual, su relación de orden. $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ y $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

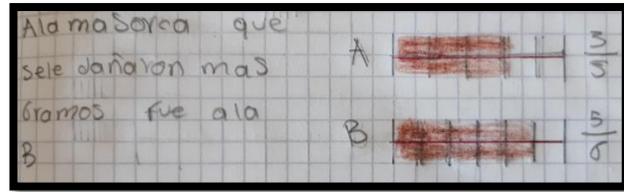
Tabla 7

Análisis resultados Reto 2 fracciones equivalentes, irreductibles, simplificación y amplificación.

Reto	Registros de representación semiótica utilizados
a. En dos mazorcas (vainas) de cacao, se dañaron $\frac{3}{5}$ de los granos en la mazorca A, mientras que en la mazorca B se dañaron $\frac{5}{6}$ de los granos, ¿cuál de las dos mazorcas tiene más granos dañados?	Registro verbal $r^1 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^1 Registro aritmético $r^2 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^2 Registro gráfico $r^3 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^3 Representación semiótica R_2^3
b. Justifique la respuesta representando las fracciones en la recta numérica.	

Reflexión	Evidencias
Los estudiantes E4 y E7 logran diferenciar las dos fracciones utilizando dos rectas numéricas con la misma longitud, varios estudiantes presentaron dificultad al dividir las rectas en partes iguales o dibujaban las rectas de diferentes medidas.	 <p>RTA</p> <p>La mazorca de mas granos dañados es la B</p> <p>A De la mazorca A hay 5 granos dañados</p> <p>B De la mazorca B hay 6 granos dañados</p>

Los estudiantes hicieron conversión entre el registro verbal r^1 , registro aritmético r^2 y el registro gráfico r^3 .



Fuente: Elaboración propia.

Se pretendía con este reto, inducir al estudiante a que asociara la fracción como un punto situado sobre una recta numérica, en la que cada segmento unidad, se dividiera en cierta cantidad de partes, que fuesen congruentes y que consideraran la interpretación de la fracción como parte todo. Sin embargo, es notorio encontrar que los estudiantes tienen dificultades en justificar la relación de igualdad o desigualdad entre dos fracciones, aún es más notoria si se hace alusión al registro aritmético, dado que tienden a comparar los números como si se presentaran en el conjunto de los números naturales, la mayoría hacen afirmaciones a primera vista asegurando que el número (natural) más grande que hace parte de la fracción les permite concluir cual es la fracción mayor; además, encuentran obstáculos cuando tienen que amplificar o simplificar las fracciones para realizar el respectivo proceso (Llinares y Sánchez, 1988 p. 129). En este sentido, es importante la comparación en rectas numéricas de igual longitud, las cuales le van a permitir al estudiante explorar y conceptualizar.

En cuanto, al paso de una representación semiótica, dentro del registro semiótico del lenguaje común o lenguaje aritmético a otra representación semiótica dentro del registro gráfico, en este caso recta numérica; la mayoría de estudiantes presentaron dificultad. Concuerda con los planteamientos de D'Amore (2006), quien afirma que los estudiantes tienen dificultad para gestionar la conversión y que también el tratamiento presenta diversos problemas cognitivos y de aprendizaje. En este sentido, el docente debe guiar al estudiante en el proceso, para que le permita cuestionarse sobre la comprensión de los contenidos. De acuerdo a esto, se confirman las

opiniones que dieron los docentes en las entrevistas hechas en esta investigación, cuando hacen referencia a que haya cooperación y buena comunicación entre docente y estudiante e igualmente entre estudiantes, para obtener buenos resultados en los procesos educativos (Ver análisis de resultados encuestas y entrevistas antes mencionados).

7.3.3. Análisis de resultados Reto 3.

(Anexo 12). Este reto tuvo como objetivo representar fracciones equivalentes e irreducibles obtenidas a partir de otra, multiplicando (amplificación) o dividiendo (simplificación) por un mismo factor. Clasificar fracciones: fracciones propias e impropias, fracciones unidad y fracciones enteras.

Tabla 8
Análisis resultados Reto 3 clasificación de fracciones.

Reto	Registros de representación semiótica utilizados
<p>a. Al finalizar el partido de microfútbol, se reparte jugo de caña panelera en totumas de igual volumen. Si Sergio bebió $\frac{4}{6}$ de una totuma y Sebastián bebió $\frac{2}{3}$ de la totuma de él. <i>¿Quién de los dos tomó mayor cantidad de jugo?</i> Explique con base en un gráfico o dibujo.</p>	<p>Registro verbal $r^1 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^1 Registro aritmético $r^2 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^2 Registro gráfico $r^3 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^3 Representación semiótica R_2^3 Representación semiótica R_3^3</p>
<p>b. Yorely preparó jugo en una jarra que contiene $2 \frac{1}{2}$ litros. <i>¿Para cuántas totumas de $\frac{1}{4}$ litro le alcanza la jarra de jugo?</i></p>	

Reflexión	Evidencias
<p>El estudiante E6, realizó transformaciones de conversión entre registros r^1, r^2 y r^3 utilizó las siguientes representaciones semióticas R_1^1, R_1^2, R_1^3 y R_2^3.</p>	
<p>Notando la transformación de tratamiento R_1^3 y R_2^3 para la solución del primer interrogante planteado en el reto.</p>	
<p>Por su parte el estudiante E4 para solucionar el segundo cuestionamiento efectuó transformaciones de conversión entre r^2 y r^3 y transformaciones de tratamiento R_1^3, R_2^3 y R_3^3.</p>	

Fuente: Elaboración propia.

En el análisis realizado al anterior reto, se pretendía representar fracciones equivalentes e irreducibles obtenidas a partir de otra en un mismo registro. Es importante tener en cuenta la naturaleza de las representaciones matemáticas ostensivas que influyen en el tipo de comprensión que genera el estudiante, recíprocamente, el tipo de comprensión que tiene el estudiante, determina el tipo de representación ostensiva que puede generar o utilizar (Font s/f). Es decir, las representaciones que los estudiantes hacen sobre el objeto fracción deben ser notorias, para que las pueda interpretar y comprender, de lo contrario va encontrar dificultades.

Ahora bien, el estudio concuerda en sus resultados con los planteamientos de Llinares y Sánchez (1988), cuando se refiere a utilizar la notación de los números mixtos, desde un primer momento y no darles un tratamiento especial. Esto hace referencia, a integrar fracciones mayores que la unidad, fracciones unidad y fracciones enteras, para evitar que el estudiante tenga

dificultades futuras. Igualmente, Fandiño (2009) afirma que las fracciones impropias o iguales a la unidad, necesitan una justificación específica posible, es decir, que cuando se haya transformado en un número el estudiante la pueda asimilar y no la tome sólo como una actividad de participación.

En cuanto a las actividades cognitivas de representación, los estudiantes utilizaron para la solución de los retos la formación, recurriendo a imágenes del objeto, desde las condiciones planteadas. En lo referente al tratamiento, lograron la transformación interna dentro del mismo registro, para posteriormente llegar a la conversión en otro registro, para este caso en el gráfico (recta numérica). En este sentido, los estudiantes resolvieron los retos mediante los procesos de formación, tratamiento y conversión.

En lo relativo a las dificultades que tuvieron los estudiantes en el desarrollo de los retos, es de señalar el caso particular de la división en partes iguales de segmentos de recta, en comparación con otra recta, que representa una fracción diferente. Otros casos concretos, que se presentaron en la solución del reto hacen referencia a la situación del estudiante E1 quien realizó una gráfica innecesaria, la cual lo demoró en la solución del reto; al cuestionamiento respecto a la simplificación ¿por qué dividiendo? del E3 y finalmente, por desconcentración, falta de atención y no leer bien, situación del E5. Esto coincide con los planteamientos de Ledezma y Acosta (2016), mencionado en los análisis de resultados de las concepciones y creencias que tienen los estudiantes hacia las clases de matemáticas, en lo afectivo y la conducta.

7.3.4 Análisis de resultados Reto 4.

(Anexo 12). Los objetivos de este reto, consistieron en utilizar el significado de fracción como medidor, representaciones en segmentos, líneas o sobre la recta numérica en contextos continuos

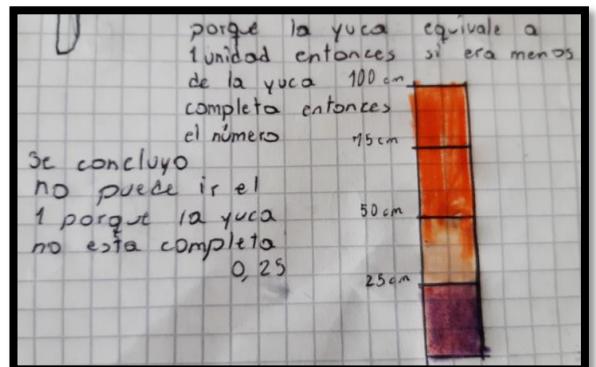
y discretos. Medir cantidades de magnitudes que no se corresponden con un múltiplo entero de la unidad de medida. Finalmente, representar mediante fracción decimal y su conversión

Tabla 9

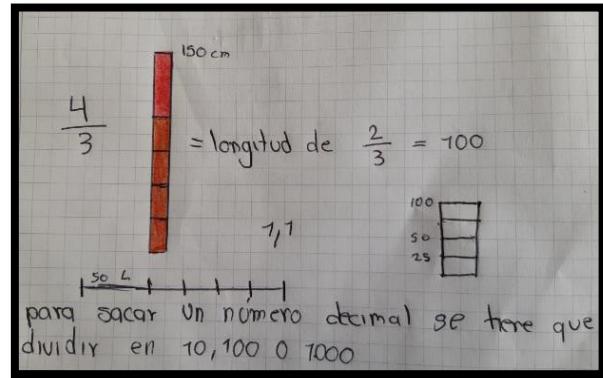
Análisis resultados Reto 4. La fracción como medida y como número decimal.

Reto	Registros de representación semiótica utilizados
a. La altura de la parte de la yuca que se encuentra debajo de la mano de la persona que la sostiene, corresponde aproximadamente a las dos terceras partes ($2/3$). Si la altura de la yuca es de 150 cm. ¿Qué longitud tiene las dos terceras partes ($2/3$)?	Registro verbal $r^1 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^1
	Registro aritmético $r^2 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^2 Representación semiótica R_2^2
	Registro gráfico $r^3 \rightarrow$ Representación semiótica R_2^3 Representación semiótica R_3^3
b. La longitud de las $2/3$ partes, se divide en la mitad de la mitad.	
c. Represente mediante una fracción y un decimal las cantidades. Además, calcule la longitud de la cantidad resultante.	

Represente los procedimientos en rectas numéricas e intente generalizar.

Reflexión	Evidencias
El estudiante E2, realizó transformaciones de conversión entre los registros semióticos r^1 , r^2 y r^3 utilizó las representaciones semióticas R_1^1 , R_1^2 , R_3^3 y R_2^2 . Se aprecia la transformación de tratamiento R_1^2 y R_2^2 para la solución del reto.	 <p>U</p> <p>porque la yuca 1 unidad entonces equivale a si era menos de la yuca 100 cm completa entonces el número 75 cm</p> <p>Se concluyó no puede ir el 1 porque la yuca no está completa 50 cm 0,25 25 cm</p>

Por su parte el estudiante E6 para solucionar el reto formalizó mediante la transformación de conversión entre registros semióticos r^1 y r^3 y transformaciones de tratamiento entre representaciones R_2^3 y R_3^3 .



Fuente: Elaboración propia.

En el análisis de este reto, se corroboró con los resultados de las concepciones de los docentes de matemáticas, pues deben emplear su experiencia en la implementación de estrategias, buscar que los aprendizajes sirvan para la vida, logren que los estudiantes apliquen su creatividad, que se interesen por el aprendizaje y desarrollos el pensamiento lógico y analítico. En este sentido, los estudiantes E3, E5, E7 y E8 en un comienzo no entendieron el reto, a la hora de interpretarlo presentaron confusión para hacer el tratamiento de fracción a número decimal, dentro del registro aritmético. También se demuestra que los estudiantes presentaron conocimientos previos débiles, esto obliga a la intervención del docente en la consecución de los objetivos propuestos.

Dentro del concepto de fracción como medida, las deducciones de esta investigación, se ajustan a los resultados de Flores (2010), donde se manifestaron dificultades sobre conceptos, operaciones, resolución de problemas, que implicaban los distintos significados de fracción como número decimal y como medida, tanto en contextos continuos como discretos.

7.3.5 Análisis de resultados Reto 5.

(Anexo 12). Con este reto, se comprendió el significado de fracción en diferentes contextos: como una parte de un todo, permitió determinar el número de elementos que conforman la parte y utilizar el concepto de fracción como operador.

Tabla 10*Análisis resultados Reto 5. La fracción como parte- todo y como operador.*

Reto	Registros de representación semiótica utilizados
<p>a. En la gavera señalada en la fotografía (ver anexo 12), se dejan de llenar 14 cuadros. ¿Qué fracción representa el número de panelas que se fabricaron?</p> <p>b. Si una arroba equivale a 24 panelas. ¿Cuántas arrobas completas se fabricaron? ¿Sobran panelas? ¿Cuántas? Represente esta cantidad mediante una fracción teniendo en cuenta la arroba como unidad.</p>	<p>Registro verbal $r^1 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^1</p> <p>Registro aritmético $r^2 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^2</p> <p>Representación semiótica R_2^2</p> <p>Representación semiótica R_3^2</p> <p>Registro gráfico $r^3 \rightarrow$ Representación semiótica R_3^3</p>
Reflexión	Evidencias
<p>El estudiante E4, hizo transformaciones de conversión entre registros semióticos r^1, r^2 y r^3 utilizó las representaciones semióticas R_1^1, R_1^2 y R_3^3.</p> <p>Realizó transformaciones de tratamiento dentro del registro R_1^2</p> <p>Para solucionar el reto el estudiante E2 formalizó mediante la transformación de conversión entre r^1, r^2 y r^3.</p>	

Fuente: Elaboración propia.

Este reto reveló, en primer lugar, la dificultad que tienen los estudiantes, para realizar el tratamiento y conversión; esto coincide con algunas investigaciones tratadas en la prueba diagnóstica de este estudio. También, podemos notar que los estudiantes presentaron conocimientos previos débiles, problemas de comprensión y desinterés en el aprendizaje del área.

Con el objeto de superar las dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las fracciones (ver resultados entrevistas a docentes), los docentes recomiendan efectuar actividades como prácticas vivenciales, la utilización de teorías y materiales para la aplicación en la vida cotidiana; para el caso particular proponen realizar partición de objetos, unidades o conjuntos en partes iguales, representación en la recta numérica, juegos, cortes de hojas o divisiones, lecturas, dibujos y comparaciones.

Respecto a la comprensión de los significados del concepto de fracción, como parte- todo y como operador, las investigaciones indagadas en el presente estudio, especialmente las internacionales, se interesaron por el estudio de las dificultades presentadas por estudiantes y docentes, en los procesos de formación académica. Los resultados de este estudio coinciden, con esas investigaciones en lo pertinente a las concepciones de fracción: como parte-todo y como operador, centrados en los sistemas de representación. Tales investigaciones, mostraron que los participantes usaron círculos o cuadriláteros divididos en partes iguales para representar el concepto, y en algunos casos evidenciaron dificultades sobre conceptos y operaciones. Los docentes recomiendan introducir palabras como equitativo, congruente, sobre puesto, para mejorar el aprendizaje y evitar obstáculos en la construcción conceptual de fracción.

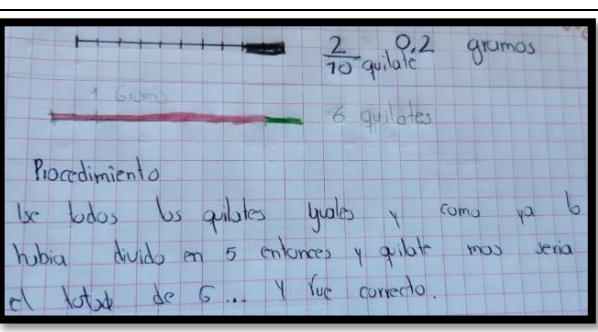
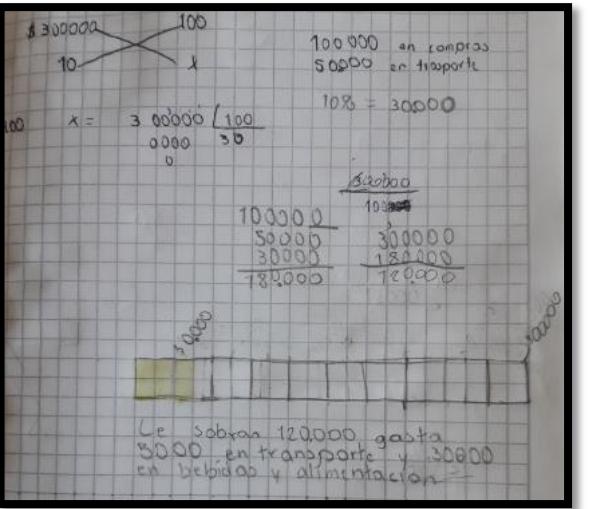
7.3.6 Análisis de resultados Reto 6.

(Anexo 12). El objetivo de este reto radicó en realizar conversiones entre fracciones, números decimales, porcentajes y números enteros.

Tabla 11

Análisis resultados Reto 6. La fracción, número decimal y porcentaje.

Reto	Registros de representación semiótica utilizados
En gemología, el quilate se utiliza para medir la masa de una piedra preciosa (para nuestro caso una esmeralda). Un quilate equivale a la quinta parte de un gramo;	Registro verbal $r^1 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^1 Representación semiótica R_2^1
a. Escriba una fracción decimal que represente la parte del gramo que corresponde a un quilate.	Registro aritmético $r^2 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^2 Representación semiótica R_2^2
b. ¿Cuántos quilates tiene una esmeralda que pesa 1,2 gramos? ¿Qué procedimiento haría para averiguarlo?	Registro gráfico $r^3 \rightarrow$ Representación semiótica R_2^3 Representación semiótica R_3^3
c. Yamid vendió una esmeralda en \$300.000, gasta $1/3$ del total del dinero en compras, \$50.000 en transporte y el 10% en comida y bebida. ¿Cuánto dinero le quedó?	

Reflexión	Evidencias																
<p>Para solucionar el reto el estudiante E9, hizo transformaciones de conversión entre los registros r^1, r^2 y r^3 utilizó las representaciones semióticas R_1^1, R_2^1, R_1^2 y R_2^2.</p>	 <p>Diagram of a balance scale with 6 gramos on one side and 6 quilates on the other. A ratio $\frac{2}{70}$ quilates is written above, with a note "0,2 gramos". Below, it says "6 quilates". A handwritten note says: "Procedimiento: le todos los quilates iguales y como ya lo hubia dividido en 5 entonces 1 quilate mas seria el total de 6... Y fue correcto."</p>																
<p>Realizó transformaciones de tratamiento dentro del registro R_1^2 y R_2^2.</p>	 <p>Handwritten calculations: $x = \frac{300000}{100} = 3000$. To the right, it shows: $100.000 \text{ en compras}$, $50.000 \text{ en transporte}$, $10\% = 30.000$. Below, there is a subtraction table:</p> <table border="1"> <tr> <td>100000</td> <td>50000</td> <td>30000</td> <td>180000</td> </tr> <tr> <td>50000</td> <td>30000</td> <td>180000</td> <td>120000</td> </tr> <tr> <td>30000</td> <td>180000</td> <td>120000</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>180000</td> <td>120000</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </table> <p>Below the table, it says: "Le sobran 120.000 gasta 50.000 en transporte y 30.000 en bebidas y alimentación".</p>	100000	50000	30000	180000	50000	30000	180000	120000	30000	180000	120000	0	180000	120000	0	0
100000	50000	30000	180000														
50000	30000	180000	120000														
30000	180000	120000	0														
180000	120000	0	0														

Fuente: Elaboración propia.

Todos los retos, especialmente este, se realizaron con base en situaciones del entorno del estudiante, Godino, Batanero y Font (2004), afirman que la actividad matemática debe estar orientada a la capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información matemática encontrada en diversos contextos, igualmente, estar preparado para la discusión o comunicación de los resultados arrojados, cuando sea importante, y ser competente para la solución de problemas matemáticos que encuentre en la vida real.

De acuerdo a lo anterior, la dificultad en la solución del reto radicó en el uso de los procedimientos coherentes o la elección del registro semiótico adecuado y la representación, del concepto matemático en el registro elegido. “Hace parte la capacidad para interpretar los

diferentes registros de representaciones semióticas de un mismo objeto matemático y de transformarlas la una en la otra, con tratamientos y con conversiones" (Fandiño, 2009, p. 132). Cuando los estudiantes hacen esta relación, se puede afirmar que están entrelazando la realidad con la simbología lo cual les va permitir encontrar la solución del reto y por lo tanto la adquisición del conocimiento.

En lo que concierne, a la conversión entre fracciones, números decimales, porcentajes y números enteros; resulta un poco complejo a pesar de las similitudes, ya que en la vida cotidiana pueden tener significados distintos, partiendo desde la misma escritura, lo cual causó dificultad en la interpretación en los estudiantes. Esto concuerda, con los planteamientos de varios autores señalados anteriormente y especialmente con aportes de Fandiño (2009).

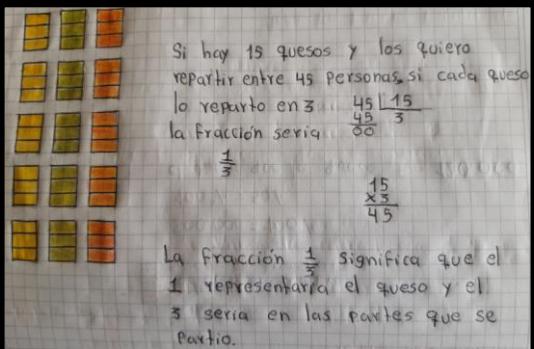
7.3.7 Análisis de resultados Reto 7.

(Anexo 12). En este reto se tuvo como finalidad interpretar el significado de fracción como una parte de un todo, como partidor y como cociente.

Tabla 12

Análisis resultados Reto 7. La fracción como una parte de un todo y como cociente.

Reto	Registros de representación semiótica utilizados
a. En la bandeja de la fotografía, hay 15 quesos, para ser repartidos entre 45 niños, <i>¿Cuál sería la fracción para representar la situación?</i> Explique el significado de la fracción dada.	Registro verbal $r^1 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^1 Representación semiótica R_2^1 Registro aritmético $r^2 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^2 Registro gráfico $r^3 \rightarrow$ Representación semiótica R_3^3
b. Una quinta parte de los quesos fue dado a Stiven, una tercera parte a Laura, un quinceavo a Vanesa; <i>¿es posible hacer este reparto? ¿Qué fracción de queso sobró o hizo falta queso?</i>	

Reflexión	Evidencias
<p>En la solución del reto el estudiante E4, hizo transformaciones de conversión entre registros semióticos r^1, r^2 y r^3, utilizó las representaciones semióticas R_1^1, R_2^1, R_1^2 y R_3^3.</p> <p>Realizó transformaciones de tratamiento dentro del registro R_1^2 y dentro del registro R_2^2.</p> <p>Para la solución de la segunda parte de este reto los estudiantes solicitaron trabajar en grupo, como vislumbra en la imagen de la derecha, esto corrobora contrariamente con los resultados que arrojó la matriz de Vester en la prueba diagnóstica sobre la baja integración en el desarrollo de trabajo en equipo.</p>	 

Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo al reto anterior, la matriz de Vester mostró problemas activos de alta influencia sobre los prioritarios, siendo estos los principales causantes de la problemática central de la presente investigación, por tanto requerían bastante atención y manejo crucial. En este caso, se solicitó el acompañamiento permanente por parte de los padres de familia o acudientes, en dos ocasiones durante el desarrollo de la investigación. Respecto al escaso desarrollo de autodisciplina, al inicio de cada sección se concientizó y se motivó a los estudiantes, además, el hecho de querer ser el primero en desarrollar cada desafío motivo la participación de los estudiantes en cada actividad y al final de cada reto se compartía algún alimento (queso, torta, bocadillo, naranja entre otros) aplicando conocimientos adquiridos para la partición. En este sentido, respecto a la baja integración en el desarrollo del trabajo en equipo, se notó el interés de

los estudiantes en cambiar esta perspectiva, en un comienzo trabajaban en forma individual y posteriormente el trabajo en grupo fue fundamental. Se tuvo en cuenta la influencia del contexto socioeconómico en el que viven los estudiantes dado que es crucial, en el caso presentado varios educandos deben recorrer una distancia bastante considerable para desplazarse hasta la institución.

Por otra parte, respecto al desarrollo de la secuencia didáctica (ver anexo 12) y en especial al objetivo de este reto de la noción del concepto de fracción como parte de un todo, como partidor y como cociente, se está de acuerdo con Llinares y Sánchez (1988), cuando hacen referencia al papel fundamental de las representaciones que el estudiante puede hacer del concepto vinculado con la noción de parte todo.

En este sentido, los resultados hallados en esta investigación concuerdan con los trabajos de Hoyos (2015), Hurtado (2012), Muñoz (2013), Murillo (2014), Niño y Raad (2018), Silva (2017) y Vasco C (1988), en sus hallazgos afirman que cuando se aumentan las subdivisiones los estudiantes presentan varias dudas para resolver la situación. También, mostraron las dificultades que presentaron los estudiantes a la hora de realizar la interpretación gráfica, en establecer relaciones de orden y equivalencia entre las partes. Sus conclusiones corroboran los resultados de esta investigación al relacionar los conceptos matemáticos con situaciones cotidianas o del contexto, estos resultan más interesantes y comprensibles para los estudiantes.

7.3.8 Análisis de resultados Reto 8.

(Anexo 12). Uno de los fines de este reto consistió en usar la fracción como razón para representar la comparación de dos cantidades que tienen características en común que las relaciona.

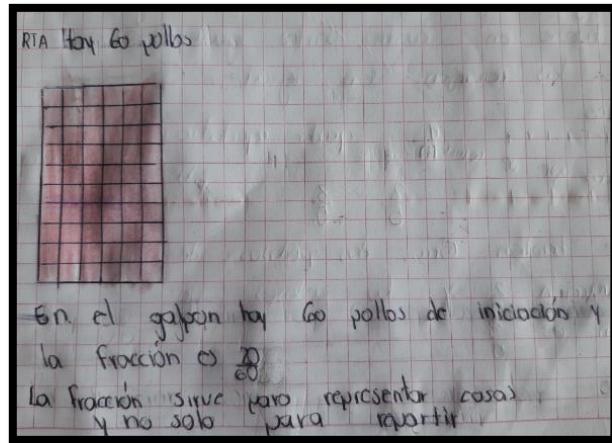
Tabla 13*Análisis resultados Reto 8. La fracción como razón.*

Reto	Registros de representación semiótica utilizados
En un galpón se tienen pollos criollos, por cada pollo adulto hay tres pollos de iniciación, como se tipifica en la imagen(ver anexo 12). Si 20 son pollos adultos, indica una comparación entre las dos cantidades usando una fracción como razón. ¿Qué cantidad de pollos de iniciación hay en el galpón?	Registro verbal $r^1 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^1 Representación semiótica R_2^1
¿Cuántos pollos hay en total en el galpón?	Registro aritmético $r^2 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^2
	Registro gráfico $r^3 \rightarrow$ Representación semiótica R_3^3

Reflexión	Evidencias
En la solución de este reto, los estudiantes trabajaron en grupo, llegaron a notar que al comparar dos magnitudes, no importa el sentido $\frac{20}{60}$ y $\frac{60}{20}$, se introdujo la representación a:b. Igualmente, $\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$ es decir 1: 20= 3: 60.	

Para la solución del reto el estudiante E9, hizo transformaciones de conversión entre r^1 , r^2 y r^3 utilizó las representaciones semióticas R_1^1 , R_2^1 , R_1^2 y R_3^3 .

Realizó transformaciones de tratamiento dentro del registro R_1^2 y R_4^2 (simplificación y amplificación).



Primero que todo, se parte de las dificultades que presentaron los estudiantes para el desarrollo del reto, se pueden enunciar las siguientes: dificultad en la comprensión lectora; falencias al realizar los cálculos; dudas al ubicar los números; no encontraban como representar la situación mediante una fracción; presentaron distracción; en palabras de los estudiantes E5 y E6 “tengo pereza” dificultad para la representación gráfica y dedicaron el tiempo para hacer bromas. En resumen, las mayores dificultades encontradas en los retos fue la interpretación de la fracción como razón, a partir de la dificultad encontrada por los estudiantes en las actividades cognitivas de representación inherentes a la semiótica para la formación de representaciones, en el tratamiento y la conversión. Esto fue notorio, por la cantidad de cuestionamientos que los estudiantes formularon en el desarrollo de la actividad.

En ese caso, para alcanzar los objetivos propuestos es importante tener presente las opiniones que hacen los docentes (Anexo 14) especialmente sobre las representaciones; sugieren que para lograr un aprendizaje significativo se deben utilizar todas las representaciones posibles, con estas se desarrollan competencias, facilitan el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje y finalmente afirman que los estudiantes aprenden más, mediante dibujos y figuras.

7.3.9 Análisis de resultados Reto 9.

(Anexo 12). La intención de este reto fue utilizar el concepto de fracción como operador donde se multiplique el numerador de la fracción por el número y el resultado se divida entre el denominador de la fracción. Además, realizar operaciones entre fracciones y analizar el papel de la resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones.

Tabla 14*Análisis resultados Reto 9. La fracción como operador*

Reto	Registros de representación semiótica utilizados
a. En un árbol de naranjo que tiene aproximadamente 200 frutos, se cosecharon sus $\frac{3}{5}$ partes de estos, ¿cuál fue el total de naranjas que se recogió? ¿Cuántas naranjas no alcanzaron el proceso de maduración? Laura reparte una naranja, en partes iguales entre sus dos compañeros, otra naranja para tres compañeros, otra naranja para cuatro compañeros y así sucesivamente ¿Qué fracción de naranja le corresponde a cada amigo según cada situación?	Registro verbal $r^1 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^1
	Representación semiótica R_2^1
	Registro aritmético $r^2 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^2
	Representación semiótica R_2^2
	Representación semiótica R_4^2
	Registro gráfico $r^3 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^3
	Representación semiótica R_2^3
	Representación semiótica R_3^3
	Representación semiótica R_4^3
b. Si Sebastián come dos porciones de un total de cinco porciones, ¿Qué fracción representa la cantidad consumida por él?, ¿Qué fracción representa la cantidad de naranja no consumida por Sebastián?	Registro algebraico $r^4 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^4
Para preparar un vaso de jugo se necesitan $\frac{1}{4}$ de naranjas. ¿Cuántas naranjas enteras son necesarias?	

Reflexión

En este reto se proyectó realizar transformaciones de conversión entre r^1 , r^2 , r^3 y r^4 y se utilizaron las representaciones semióticas señaladas.

Evidencias

Realizaron transformaciones de tratamiento dentro de cada registro semiótico

Para solucionar el reto se formalizó mediante la transformación de conversión entre r^1 , r^2 , r^3 y r^4 .



Fuente: Elaboración propia.

En primer lugar, mostraron en la interpretación del significado de fracción como operador, los resultados arrojados muestran un contraste a los planteamientos de Murillo (2014), quien afirma que los estudiantes no demuestran una comprensión apropiada de las situaciones que se plantean, aunque relacionan el contexto de las mismas, siempre recurren a la partición como único medio de solución y cociente como operador. En cierto modo, en esta investigación, los estudiantes lograron hacer ciertas transformaciones, modificaron desde un registro a otro mediante la conversión y dentro de la misma representación hicieron tratamientos, para el caso de este reto, concibieron las divisiones y multiplicaciones en forma esquemática para dar solución a la actividad. La utilización permanente del registro gráfico y el registro verbal fue fundamental en la solución de cada uno de los retos trabajados.

A efectos de garantizar un mejor aprendizaje se tuvo en cuenta las opiniones de los docentes, refiriéndose a la solución de problemas; los cuales afirmaron que el planteamiento y solución de problemas cumplen un papel fundamental para la comprensión. A su vez, plantearon que para resolverlos, los estudiantes deben recurrir a la utilización de diferentes estrategias; ellos certifican que estos permiten evidenciar un aprendizaje significativo de acuerdo a logros alcanzados por parte de los alumnos; como estrategia didáctica ayuda en la enseñanza de la matemática, haciendo énfasis en el proceso de pensar y analizar, junto con la disciplina como base en el

desarrollo del proceso. Finalmente, un docente en la entrevista hace la siguiente reflexión: “todo aprendizaje depende de la motivación y el interés que tenga el estudiante. Es imposible enseñarle al que no tiene ningún interés por aprender. Muy fácil enseñarle al que busca el conocimiento.” (ver anexo 14)

7.3.10 Análisis de resultados Reto 10.

(Anexo 12). En este último reto se proyectó manejar el concepto de fracción como operador y realizar operaciones entre fracciones. Además, reflexionar sobre la estrategia didáctica empleada en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Tabla 15

Análisis resultados Reto 10. La fracción como operador.

Reto	Registros de representación semiótica utilizados
En un vivero se trasplantaron seiscientas (600) plantas de café, organizadas en forma rectangular como se señala en la figura (ver anexo 12). Si se trasplantaron $\frac{2}{6}$ partes de café variedad Caturra, una tercera parte de café variedad Castilla y lo restante se sembró variedad Borbón. ¿Qué fracción representa el total de plantas de café variedad Borbón? ¿Cuántas plantas de cada variedad se trasplantaron?	Registro verbal $r^1 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^1 Representación semiótica R_2^1 Registro aritmético $r^2 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^2 Representación semiótica R_2^2 Representación semiótica R_4^2 Registro gráfico $r^3 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^3 Representación semiótica R_2^3 Representación semiótica R_3^3 Representación semiótica R_4^3
	Registro algebraico $r^4 \rightarrow$ Representación semiótica R_1^4

Reflexión	Evidencias
<p>Para el último reto se planeó realizar transformaciones de conversión entre diferentes r^1, r^2, r^3 y r^4 y se utilizaron varias representaciones semióticas de las señaladas.</p>	
<p>Se realizaron transformaciones de tratamiento dentro de cada registro semiótico.</p>	
<p>En la solución del reto se formalizó mediante la transformación de conversión entre r^1, r^2, r^3 y r^4.</p>	
<p>El reto fue resuelto fácilmente por todo el grupo de estudiantes mediante aportes individuales, obteniendo la solución final.</p>	

Fuente: Elaboración propia.

Como se mencionó anteriormente, los estudiantes resolvieron todos los retos, primero de forma individual, en parejas, en grupos tres, de cuatro integrantes, luego discutieron en grupo y socializaron los procedimientos y resultados, se tuvo presente la teoría de Polya en las estrategias para el planteamiento y resolución de problemas, además, los momentos de representación, exploración, conjeturación, conceptualización y formulación.

En el desarrollo de la actividad, los estudiantes hicieron varios cuestionamientos y conjeturas presentándose mucha indecisión en los procesos; por tal razón, siempre se mantuvo una actitud positiva, en la necesidad de seguir indagando; buscando los caminos a seguir y especialmente mantener la motivación frente a la solución de los retos. Como dice Ponte (2006) es fundamental

que el estudiante sea estimulado y presente una construcción oral más detallada sobre la actividad a realizar, para evitar que desista de realizarla.

De acuerdo a la actividad anterior, el papel del docente es fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en relación con las experiencias que vive dentro y fuera del aula de clase, transmisión de conocimiento y especialmente familiarizándose en su quehacer cotidiano o de su contexto. Dentro de este enfoque Fonzi (1999), plantea que las prácticas se deben desarrollar desde una perspectiva de la resolución de problemas o desde una perspectiva de la indagación ya que los resultados pueden ser distintos. Para el caso de esta reflexión respondieron a las necesidades que se presentaron y a la utilización de las diferentes representaciones que se pudieron combinar para el logro de los objetivos.

Fue evidente que para la conceptualización del objeto fracción, los estudiantes tuvieron que usar varios registros de representación semiótica, como se pueden identificar en las evidencias. También, saber elegir los rasgos definitivos de la fracción que va representar y representarla; hacer el tratamiento dentro del mismo registro y convertir dichas representaciones de un determinado registro en otro.

7.4. Análisis de resultados sobre el grado de receptividad y aceptación de la estrategia didáctica

Se evidenció que más del 45% de los estudiantes tienen una buena actitud hacia las matemáticas (según encuesta), la consideraron como un área fundamental; los que tienen una actitud regular, argumentan que se debe a la dificultad para resolver situaciones problema o debido a la complejidad de ciertos procesos y estiman el bajo rendimiento en el área se debe a que no estudian lo suficiente.

Respecto a la aceptación de la secuencia didáctica, se identificaron diferentes reflexiones hechas por los estudiantes: respecto a la presentación de la actividad mediante un mini libro, a todos los estudiantes les gustó la forma de mostrar la actividad didáctica, argumentando no tener que utilizar libros de textos tradicionales, perfecto para cualquier lugar y momento, fácil de llevar, de bolsillo y resaltaron la importancia de haber sido basado en el trabajo hecho por ellos mismos. Según, Godino, Batanero y Font (2004) consideran el libro como aquello que conserva y transmite de alguna forma el conocimiento matemático, dado que el estudiante lo utiliza como referencia cuando tiene que resolver un problema o recordar una definición o propiedad. También lo consideran como una autoridad del conocimiento y como guía de aprendizaje.

Otro aspecto, que llamó la atención de los estudiantes fue las fotografías, llamativas, interesantes, algunas de su propia autoría y de escenario el entorno natural. Castellanos (2016) se refiere a la fotografía como la estrategia didáctica que contribuye al desarrollo de la creatividad de los estudiantes al inducirlos a proponer sus propios problemas, de tal manera que cada uno de ellos resulta ser una creación original y una interpretación de lo que consideran que puede evidenciar los aprendizajes objeto de estudio. A su vez, las imágenes les permitían visualizar, interpretar, reflexionar, comprobar y percibir los aspectos relacionados con las fracciones.

En este punto de la reflexión se destacan tres aspectos relevantes de los planteamientos de Fonzi (1999) concebidos para el desarrollo de la pedagogía de la enseñanza de las matemáticas basadas en investigación. La primera hace referencia a la apreciación de los aspectos humanísticos, en la que la mayoría de los docentes desarrollan sus propias visiones de la matemática y se la transmiten a los estudiantes. A partir de esto, se puede determinar que el docente debe ir más allá, dado que cada estudiante es un mundo particular, lleno de dificultades e inquietudes que debe llevar a la par con su formación en las instituciones educativas.

Una segunda característica se refiere a la capacidad que debe tener el docente para identificar las actividades que sean retadoras y al mismo tiempo accesible para los estudiantes y especialmente estar en la disposición de poder orientar en la búsqueda de respuestas. Es aquí, donde el docente se enfrenta a múltiples actitudes de sus estudiantes, unos desanimados, otros intentando dar respuestas, otros enfocados en otras temáticas de su interés y otros de forma graciosa o divertida y hasta algunos lo toman en forma molesta o la ven como una carga o tortura.

Finalmente un tercer aspecto que es complementario al anterior, hace referencia a los aspectos emocionales. Los docentes afirman que experimentan como una montaña rusa, suben y bajan emociones positivas y negativas. De esta forma, el docente tiene que lidiar con esta situación, que de la misma forma le sucede al estudiante. Todo lo anterior, se torna importante, dado que, en la experiencia personal esto fue el motor del nuevo conocimiento matemático que lograron los estudiantes. Además, esto influyó en otras situaciones de su propio quehacer, como en la predisposición al recibir el saber dentro del aula de clase, la autodisciplina y el trabajo en equipo.

En cuanto a la motivación Vidal (2005) sugiere que esta abarca dos niveles, conquistar la atención del estudiante y lograr que ellos participen en el desarrollo de la clase. Para el caso de la presente investigación, respecto al primer nivel, el docente hizo ver la utilidad de desarrollar los retos, permanentemente les hacía preguntas para que lograran los objetivos, le permitía notar la curiosidad, presentaba estímulos el cambio de posición de trabajo individual a trabajo en grupo, había que rotar las indicaciones y estrategias para que no se perdiera la atención y se cambiaban las formas de comunicación. Respecto al segundo nivel, se elogiaba a los estudiantes justificando el motivo, la retroalimentación, el docente siempre fue mostrando los avances, los estudiantes siempre tuvieron que tomar decisiones y finalmente, la competición por desarrollar primero el reto fue una motivación óptima.

Conclusiones

En la fase diagnóstica de esta investigación, se identificaron, analizaron y priorizaron un gran número de problemas mediante diferentes técnicas e instrumentos, inherentes a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, caso concreto fracciones; los cuales fueron tratados con todos los miembros de la comunidad educativa; su visualización ayudó a tener un mayor panorama sobre el nivel educativo en la institución.

Las dificultades encontradas se convirtieron en metas y objetivos a alcanzar, de forma prioritaria; tuvieron un alto grado de coincidencia tanto en matemáticas como en otras áreas del saber, llevaron a hacer un seguimiento permanente a cada una de las situaciones débiles halladas, lo cual admitió que se abordaran mediante la acción- participación y se hiciera una constante búsqueda de métodos y técnicas dentro y fuera del aula de clase.

El docente, junto con la comunidad educativa vio la necesidad de indagar y aplicar estrategias que permitieron lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes y que a la vez le posibilitó al maestro convertir su práctica en una experiencia divertida e innovadora.

De acuerdo a la problemática hallada, se diseñó una secuencia didáctica, cuyo propósito permitió desarrollar diferentes posibilidades de interacción y valoración del conocimiento en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes de la Institución. Al utilizar diferentes estrategias, se dinamizaron procesos y acciones, se crearon nuevos ambientes dentro del aula de clase, se notó un cambio en las actitudes de los estudiantes frente a las clases, cambiaron ciertos hábitos de conducta y formas de relación dentro de la comunidad educativa.

En el desarrollo de la investigación y bajo la responsabilidad de educar, se transformó la práctica docente, la forma de enseñar y de administrar el conocimiento, se cambió la relación entre docente, estudiante y padres de familia. A partir de un clima de confianza y de orientación, de búsqueda del bien común, mediante la comunicación permanente y la cooperación mutua.

Con el diseño y aplicación de la secuencia didáctica, se apropiaron algunos conceptos de fracción, al potenciar saberes específicos, permitiendo a los estudiantes involucrarse en procesos de planteamiento y solución de problemas propios de su contexto. Lo anterior, logró una visión diferente de las matemáticas y mayor grado de afectividad hacia ellas.

La secuencia didáctica, incluyó diez retos, con base en la Teoría de las representaciones semióticas de Duval, R. (2004); que involucraron la fotografía como medio de interacción en el proceso de construcción individual del conocimiento. Así mismo, se tuvieron presente las teorías de Polya en las estrategias para el planteamiento y resolución de problemas.

Fue notoria la habilidad de los estudiantes para utilizar imágenes en el planteamiento y solución de problemas matemáticos, se pudo evidenciar que el promover actividades que suponen un acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, de forma amena y divertida, admite una mejora significativa en las concepciones que estos tienen hacia el área.

Para la construcción del concepto de fracción, los estudiantes tuvieron la capacidad de elegir y representar, hicieron transformaciones de representaciones dentro del mismo registro semiótico y transformaciones de conversión de una representación en diferentes registros (Duval, R. 2017). Quiere decir, que ellos coordinaron dos o más registros distintos en la representación e identificaron que hay aspectos que se conservan dentro de la representación.

Los estudiantes, estuvieron permanentemente utilizando los registros: lenguaje verbal, lenguaje gráfico, aritmético, para encontrar la solución a cada reto planteado. En el inicio de cada actividad se trabajó en forma individual y posteriormente se hizo la retroalimentación en grupo.

Al comparar la presente investigación con el estudio realizado por Reyes (2018) en la ciudad de Tunja con una población objeto de estudio caracterizada con nivel socioeconómico alto, enfocados en la misma línea de investigación y con el mismo objeto de estudio (fracción), se lograron evidenciar resultados significativos en las dos investigaciones, a pesar de las diferencias

socioeconómicas y culturales de las poblaciones seleccionadas, esto confirma los planteamientos hechos por Ramos y Font (2006), cuando hacen referencia al contexto mediante la observación de una situación dentro del campo de investigación y aplicación de un objeto matemático enmarcado en el entorno. Es decir, que se presenta el objeto matemático en diferentes lugares pero es necesario tener en cuenta la parte cognitiva, emocional y social de los estudiantes.

En relación con uno de sus objetivos específicos planteados por Reyes (2018), quien se propuso identificar las concepciones que tienen los estudiantes del grado sexto sobre el objeto fracción, mientras que para la presente investigación no solo se identificaron las concepciones de los estudiantes, sino que además se incluyeron las expectativas que tienen los docentes y padres de familia sobre la matemática, sus procesos de enseñanza y aprendizaje mediante sus experiencias y dificultades dentro de su práctica; esto es importante porque ellos visualizan mejor la realidad en el aula de clase y el entorno familiar.

Con respecto a la aplicación de una secuencia didáctica mediante juegos de mesa, Reyes (2018) deduce que este tipo de actividades planteadas contribuyeron a favorecer el aprendizaje del objeto fracción a partir de la comprensión de representaciones. Adicional a esto, para la presente investigación, se plantearon diez retos basado en la fotografía desde el entorno de los estudiantes y desde la heurística de Polya, los estudiantes lograron solucionarlos, reconocer la importancia de las fracciones en un entorno cotidiano, llegaron a generalizar, expresaron sus emociones, obtuvieron un mejor rendimiento académico, alcanzaron aprendizajes colaborativos, mejoraron la capacidad de razonamiento y cambiaron la actitud frente al aprendizaje de las matemáticas.

Se establecieron acuerdos entre docente y estudiantes en el desarrollo de la secuencia didáctica, en los cuales cada una de las partes asumió y cumplió con ciertas responsabilidades: el estudiante realizó el trabajo de manera autónoma, tomó sus propias decisiones, adquirió sus

conocimientos de manera espontánea y utilizó saberes específicos para solucionar cada reto, mientras que el docente orientó, reflexionó, revisó y examinó los comportamientos respecto a lo acordado en el aula de clase.

Para la evaluación de la actividad desarrollada, se llegó a un acuerdo con los estudiantes para complementar su forma tradicional de evaluación, basada en el Sistema Institucional de Evaluación Educativa (SIEE) por una evaluación que refleje lo que los estudiantes son capaces de hacer, que estimule el aprendizaje de las matemáticas, que promueva la equidad, que sea un proceso abierto y coherente y que a su vez estimule su aprendizaje (Godino, Batanero y Font 2014).

Un aspecto importante destacado en el desarrollo de esta investigación, hace referencia al compromiso y disciplina de los estudiantes, donde se pudo observar como era su comportamiento bajo ciertas condiciones, ellos demostraron su capacidad de asumir con responsabilidad sus propias decisiones, pusieron al máximo sus capacidades para sacar adelante los retos encomendados, aceptaron sus obligaciones y colocaron su mayor esfuerzo para lograr los objetivos planteados, reconocieron su papel como protagonistas en el proceso investigativo y compartieron experiencias con sus compañeros y docente.

Promover actividades que logren un acercamiento de los estudiantes a las matemáticas de forma placentera y divertida, supone una mejora en el concepto que tienen de esta ciencia. Así se demostró con el concurso de fotografía matemática realizado en la Institución Educativa Divino Niño en el municipio de Quípama Boyacá en el año 2018, se presentaron un gran número de fotografías, las cuales mostraron y destacaron el ambiente sociocultural y natural del occidente de Boyacá, y a su vez, propiciaron que los alumnos se acercaran a ciertos conceptos matemáticos a través de su búsqueda en el entorno que los rodea, desarrollando su creatividad para encontrar los

numerosos aspectos del entorno que se relaciona con las matemáticas especialmente con el concepto de fracción.

La experiencia investigativa dentro del aula de clase, logró que los participantes experimentaran nuevas experiencias, en las cuales reforzaron el saber matemático y además cambiaron su forma de pensar y concebir esta área del conocimiento. Para reafirmar, estas argumentaciones es importante que el docente introduzca nuevas estrategias, basadas en teorías didácticas del conocimiento y la educación matemática, teniendo en cuenta que se adapte a cada momento y al contexto donde se desarrolle y finalmente que sustente, refuerce y que sea apropiada, para el logro de los objetivos de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Referentes Bibliográficos

- American Psychological Association. (2010). *Manual de publicaciones de la American Psychological Association* (6 ed). Mexico, D. F.: Editorial El Manual Moderno.
- Ardila, O. (2018) *Factores familiares que inciden en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de la sede educativa Jerusalén (Huila) bajo el modelo de Escuela Nueva* (tesis de especialización). Universidad Nacional Abierta y a Distancia – UNAD Pitalito, Colombia.
- Arias, F. (2012) *El proyecto de investigación: introducción a la metodología científica*. (Sexta ed.). Caracas, Venezuela: Editorial Epistime, C. A.
- Betancourt, D. (2016). *Matriz de Vester para la priorización de problemas*. Recuperado el 08 de noviembre de 2019, de Ingenio Empresa: www.ingenioempresa.com/matriz-de-vester.
- Bohorquez, L. (Noviembre de 2014) Las creencias vs las concepciones de los profesores de matemáticas y sus cambios. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. Buenos Aires, Argentina.
- Boyer, C. (1996). *Historia de la Matemática*. Madrid. Edit. Alianza.
- Brousseau, G. (2007) *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal. Buenos Aires, Argentina.
- Carrillo, M. (2012). *Ánálisis de la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar matemática quinto grado de educación primaria* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica, Lima, Perú.
- Carrillo, J. (Abril de 2017). La construcción de problemas matemáticos como una competencia necesaria en la capacitación y formación de los docentes de matemáticas en la educación básica y media, *Fortalecer la formación de la matemática en docentes*. Universidad Antonio Nariño, Tunja, Colombia.

- Castellanos, N. (2016). *Propuesta didáctica basada en la fotografía para fortalecer la formulación, tratamiento y resolución de problemas en el área de matemáticas* (tesis de maestría). Universidad Cooperativa de Colombia, Bucaramanga, Colombia.
- Castro, E. (2015) *Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros* (tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Cueli, M., González, P., Rodríguez, C., Nunez, J. y González, J. (2018) Efecto de una herramienta hipermedia sobre las variables afectivo-motivacionales relacionadas con las matemáticas. *Educación XXI*, 21 (1), 375- 394, doi: 10.5944/educXX1.12233
- D'Amore, B., Fandiño, M., & Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio.
- D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, IX (1), 177-197.
- D'Amore, B. (1998). *La didáctica de la matemática como epistemología del aprendizaje matemático*. (Victor Larios Osorio, Traducción) Mexico.
- Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (Segunda ed.). (Myriam Vega Restrepo, Traducción.) Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Duval, R., & Saénz, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Elliot, J. (1991) *El Cambio Educativo desde la Investigación- Acción*. Madrid, España: Morata.
- Elliot, J. (2000) *La Investigación- Acción en educación*. Madrid, España: Morata. S. L.
- Estrada, J. (2018) El papiro de Rhind. *Revista de Artes y Humanidades A&H* (7), 24- 33.
- Eves, H. (2011) *Introdução à história da matemática* (Tradução Hygino H. Domingues) Campinas, Brazil. Editora Unicamp.

- Fandiño, M. (2009). Las fracciones. *Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá. Editorial Magisterio.
- Font, V. (s/f) Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática de la Universidad de Barcelona.
- Fonzi, J. (1999). Compreender o que é necesario para apoiar os professores no desenvolvimento de uma pedagogia de inquirição: identificando as suas necessidades de aprendizagem e práticas adequadas de desenvolvimento profissional Abrantes, P., Ponte, J., Fonseca, H. y Brunheira L. (ed). *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 51-68). Lisboa, Portugal. Grupo “Matemática para todos”.
- Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2004) *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Granada, España: Proyecto Edumat-Maestros.
- Hernández, Fernández y Batista (2014). *Metodología de la investigación*. México D.F. McGraw-Hill/ Interamericana.
- Flores, R. (2010). *Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria* (tesis de maestría). Instituto Politécnico Nacional, México, D. F.
- Freudenthal (1999). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York, Boston, Dordrecht, London y Moscow. kluwer academic publishers.
- Gallardo, E. (2017) *Metodología de la Investigación: manual auto formativo interactivo* Huancayo, Perú (Primera edición) Universidad Continental.
- Godino, J., Giacomone, B., Battanero, C y Font, V. (2017) Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema Rio Claro(SP)*.31(57), 90- 113. Doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05.

Gómez, L. (2014). *Estrategias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de funciones lineales y cuadráticas* (tesis de maestría). Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia.

Hoyos, J. (2015). *Diseño y aplicación de una propuesta didáctica para favorecer el aprendizaje significativo de las fracciones en los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa José Asunción Silva* (tesis de maestría). Universidad Nacional, Medellín, Colombia.

Hurtado, M. (2012). *Una propuesta para la enseñanza de fracciones en el grado sexto* (tesis de maestría). Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.

Ledezma, E. y Acosta, F. (2016) Actitudes hacia las matemáticas. Un primer acercamiento en estudiantes de nivel medio superior. *Latin American Journal of Physics Education*, 10(4).

Leguizamón, F. (2017) *Evolución de los patrones de interacción comunicativa de los docentes de matemáticas. Caso UPTC.* (Tesis doctoral). Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia.

Llinares, S., & Sánchez, M. (1988). *Fracciones. La relación parte-todo*, Madrid, España: Editorial Síntesis.

Lucio, R. (1989). Educación y pedagogía, enseñanza y didáctica: diferencias y relaciones. *Revista de la universidad del Valle XI (17)*.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares*. Obtenido de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2018). *Reporte de la excelencia 2018* Institución Educativa Divino Niño Cormal municipio de Quípama Boyacá.

Mosquera, L. (2018) *El papel de la familia en el proceso de aprendizaje de los estudiantes* (tesis de maestría). Universidad Católica de Manizales, Colombia.

- Muñoz, H. (2013). *Modelos conceptuales de profesores de educación básica sobre las matemáticas y su enseñanza* (tesis de maestría). Universidad Autónoma, Manizales, Colombia.
- Murillo, A. (2014). *Las prácticas de enseñanza empleadas por docentes de matemáticas y su relación en la solución de situaciones cotidianas con fracciones* (tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Niño, A. & Raad, Y. (2018). *Contextos continuos y discretos, a partir de la implementación de una secuencia didáctica que privilegia la competencia comunicativa* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia.
- Ortiz, A. (2005). *Historia de la Matemática*. PUCP, Lima, Perú.
- Polya, G. (1945) (traducción 1999). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Ed. Trillas
- Ponte, J. (1999) Las creencias y concepciones de maestros como un tema fundamental en formación de maestros Traducción (resumida) de Casimira López. On research in teacher education: From a study of teaching practices to issues in teacher education. *K. Krainer & F. Goffree*. 43-50.
- Pulpón, A. (2010). Historia de papiro de Rhind y similares. Recuperado de http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/165/el_papiro_de_Rhind.pdf
- Quispe, W. (2011) *La comprensión de los significados del número racional positivo y su relación con sus operaciones básicas y propiedades elementales* (tesis doctoral). Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, Lima, Perú.
- Radford, L. (2004) Introducción Semiótica y Educación Matemática. *Relime*, Número Especial, 7-21 École des sciences de l'éducation. Université Laurentienne, Ontario, Canada.

- Ramos, A. y Font, V. (2006) Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. Carabobo, Venezuela y Barcelona, España. *La Matematica e la sua didattica*. 20 (4), 535-556.
- Reyes, A. (2018) *Aprendizaje del objeto fracción en diferentes registros semióticos a partir de una secuencia didáctica* (tesis de maestría). Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia.
- Rivera, M. (2014). *Estrategias comunicativas en el aprendizaje de los números fraccionarios* (tesis de maestría). Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia.
- Rivera, A. y Santos- Trigo, L. (2010) Caracterización, Desarrollos y Prospectivas de la Educación Matemática. En Reséndis, L. y Tovar, L. (Eds.), *Las matemáticas a través de los 50 años de la ESFM del IPN*. Publicación especial de la serie Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana. ISBN: 978-968-36-3591-4, comunicaciones 42. 185- 207.
- Ruiz, A. (2003) *Historia y filosofía de las matemática*. San José, Costa Rica, EUNED.
- Sánchez, H. (2009) Una imagen enseña más que mil palabras ¿ver mirar? *Revista del Instituto de Estudios Superiores en Educación. Zona Próxima*. Universidad del Norte (10) 202-215, issn 1657-2416.
- Sandoval, C. (2002) *Investigación cualitativa*. Bogotá, Colombia. ARFO Editores e impresores Ltda.
- Santos Trigo, (2011) La Educación Matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Costa Rica, (8) 35-54.

- Silva, A. (2017). *Propuesta didáctica para el fortalecimiento del aprendizaje de los números racionales En el grado 601 del colegio miguel Antonio Caro I.E.D J.M. a través de la teoría de las situaciones didácticas* (tesis de maestría). Universidad Libre, Bogotá, Colombia.
- Stewart, I. (2012) *Historia de las matemáticas: en los últimos 10.000 años*. (Traducción Javier García Sanz). Barcelona, España: Editorial crítica.
- Trejo, C. (1973). *El concepto de número*. Buenos Aires, Argentina: Unión Panamericana.
- Urquiza, A. y Campana, A. (20 de Abril de 2017) Programa de estrategias didácticas cognitivas para el desarrollo del razonamiento matemático. Una experiencia con estudiantes de bachillerato. *Boletín virtual* (6- 4), p. 2.
- Vaccotti, R. (2019) La relación familia-institución educativa en enseñanza Media: perspectivas de docentes de secundaria. *Revista páginas de educación*, 12(1), 164-178. [Doi.org/10.22235/pe.v12i1.1787](https://doi.org/10.22235/pe.v12i1.1787)
- Vasco, C. E. (1988). *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional, Dirección General de Capacitación y Perfeccionamiento Docente.
- Vera, J., González, C., y Hernández, S. (2014) Familia y logro escolar en matemáticas del primer ciclo escolar de educación primaria en Sonora, México *Estudios Pedagógicos*, 40 (1), 281-292.
- Vidal, S. (2005) *Estrategias para la enseñanza de las matemáticas en secundaria*. Barcelona España: Laertes.

Anexos

Anexo 1.

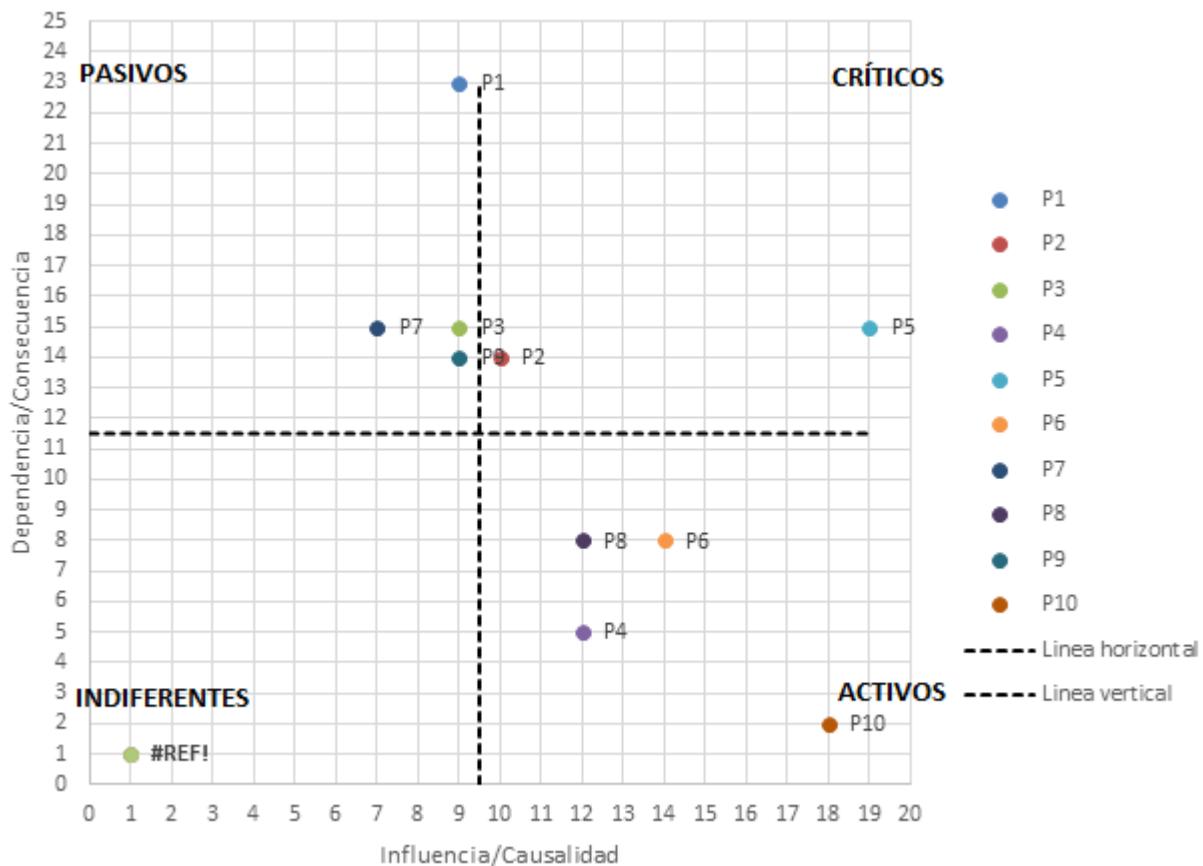
Matriz de Vester, de situaciones críticas que afectan el proceso educativo en matemáticas.

Código	Problemas Educativos	P.1	P.2	P.3	P.4	P.5	P.6	P.7	P.8	P.9	P.10	Causa
P.1	Dificultad en el aprendizaje.	0	3	2	1	2	0	0	0	1	0	9
P.2	Falta de atención y predisposición en el desarrollo de las clases.	3	0	2	0	2	0	2	0	1	0	10
P.3	Conocimientos previos débiles.	3	1	0	0	1	0	1	1	2	0	9
P.4	Poco seguimiento por parte de los padres de familia o acudientes.	2	0	1	0	2	2	2	1	1	1	12
P.5	Recursos y estrategias siempre iguales e insuficientes.	3	3	3	1	0	1	3	2	3	0	19
P.6	Escaso desarrollo de autodisciplina.	2	2	1	0	2	0	3	2	2	0	14
P.7	Falencias en interpretación y análisis.	2	1	1	0	1	1	0	0	1	0	7
P.8	Baja integración en el desarrollo de trabajo en equipo.	3	0	1	0	2	1	2	0	2	1	12
P.9	Poca afectividad hacia las matemáticas.	2	2	2	0	1	1	0	1	0	0	9
P.10	Contexto socioeconómico.	3	2	2	3	2	2	2	1	1	0	18
Efecto		23	14	15	5	15	8	15	8	14	2	95

Fuente. Autor (adaptado de ingenioempresa.com, 2016).

Anexo 2.

Gráfica 1. Situaciones críticas que afectan el proceso educativo en matemáticas.



Fuente. Autor (adaptado de ingenioempresa.com, 2016).

Anexo 3.

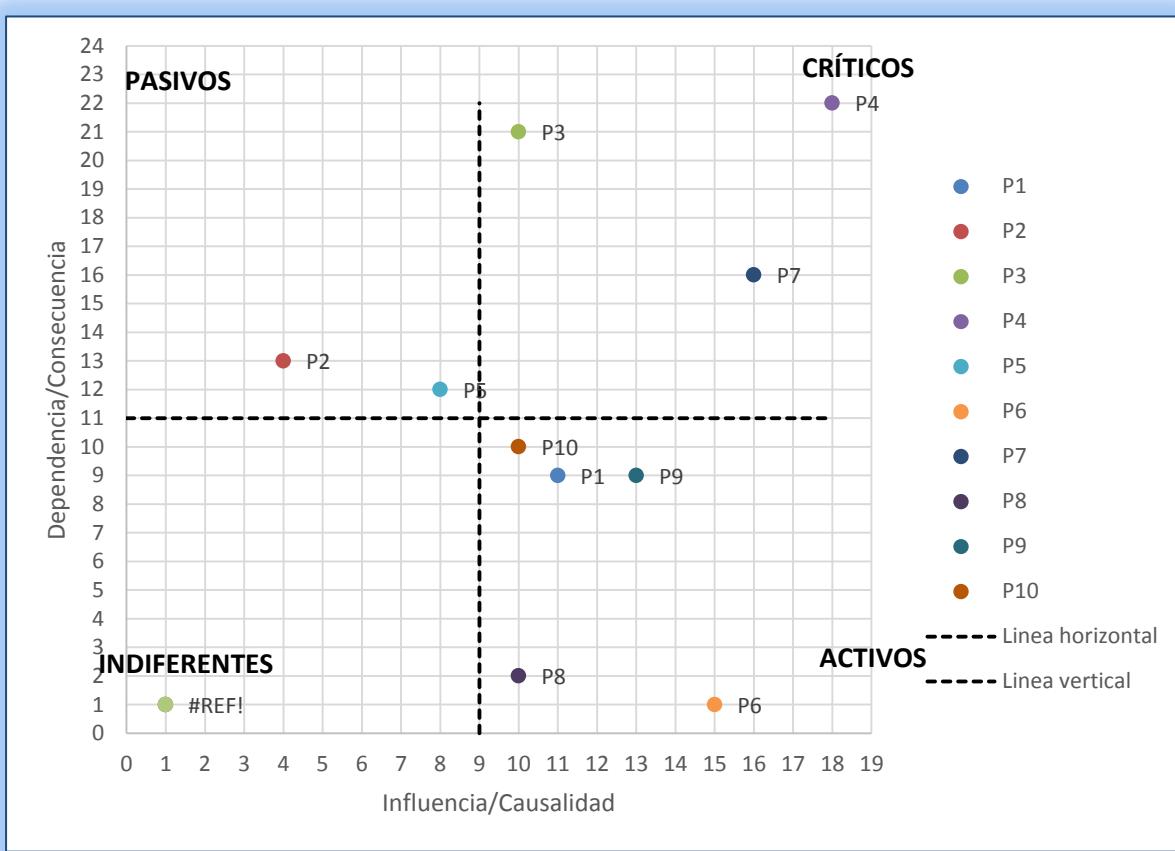
Matriz de Vester, Dificultades referentes a la enseñanza y aprendizaje de las fracciones.

Código	Dificultades	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	Influencia
P1	Bajo nivel en la interpretación y construcción de los significados de fracción.	0	2	3	3	1	0	2	0	0	0	11
P2	Dificultad en el desarrollo de operaciones básicas.	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	4
P3	Poca habilidad en el planteamiento y solución de problemas.	0	0	0	3	0	0	3	0	1	3	10
P4	Deficiencias en las prácticas de enseñanza y aprendizaje o situaciones didácticas inapropiadas.	2	2	3	0	2	0	3	0	3	3	18
P5	Desconocimiento de la aplicación de conceptos de fracción.	0	0	1	2	0	0	2	0	1	2	8
P6	Escaso material bibliográfico actualizado.	1	2	2	2	3	0	1	2	1	1	15
P7	Mínima utilización de un lenguaje pertinente.	2	3	3	3	3	0	0	0	1	1	16
P8	Falta de materiales y recursos didácticos apropiados.	1	1	2	3	0	1	1	0	1	0	10
P9	Conocimientos previos débiles.	1	3	3	2	2	0	2	0	0	0	13
P10	Insuficiente utilización de los pensamientos matemáticos	2	0	2	2	1	0	2	0	1	0	10
Dependencia		9	13	21	22	12	1	16	2	9	10	95

Fuente: los autores (basado en ingenioempresa.com, 2016).

Anexo 4.

Gráfica 2. Situaciones críticas que afectan la enseñanza y aprendizaje de las fracciones.



Fuente: los autores (basado en ingenioempresa.com. 2016).

Anexo 5.

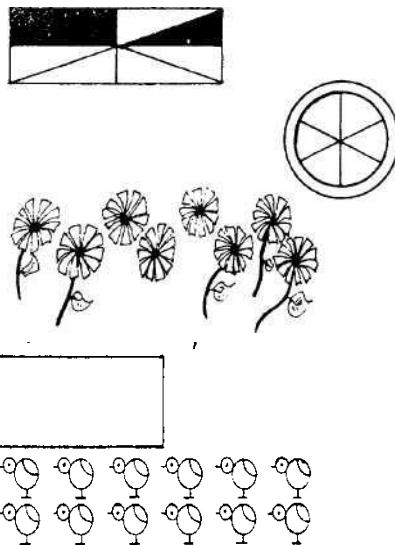
Prueba piloto: archipiélago fraccionario de Vasco (1988).

Fraccionarios como operadores.

1. Los $\frac{3}{4}$ de una docena de naranjas ¿cuántas naranjas son?
2. Con los $\frac{2}{3}$ de \$1500 Pepe compró una caja de chocolates
¿cuál fue el precio de esta caja?
3. En una olla había 12 litros de leche, si se derraman los $\frac{5}{6}$ de esa cantidad
¿cuántos litros quedan aún?
4. La mitad de los tres cuartos de \$120 ¿cuántos pesos son?
5. Los tres cuartos de una docena de naranjas ¿cuántas naranjas son?
6. Con los dos tercios de \$1500 Pepe compró una caja de chocolates
¿cuál fue el precio de esta caja?
7. $\frac{1}{2}$ de los $\frac{3}{4}$ de \$120 ¿cuántos pesos son?

Fraccionarios como Partidores

1. ¿Qué parte de este rectángulo se ha sombreado?
2. En el círculo, colorea los $\frac{5}{6}$ del perímetro.
3. Expresa mediante una fracción, que no sea $\frac{3}{8}$, la parte
del número de flores que no tiene tallo.
4. Colorea los $\frac{3}{4}$ del área del rectángulo.
5. Colorea los $\frac{3}{4}$ del número de pollitos.

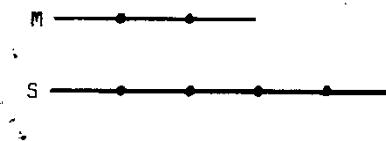


Fraccionarios como Medidores

1. Don Rómulo tiene que aflojar una tuerca pequeñita: para esto le pide a su hijo que le escoja, entre las tres llaves que tiene, aquella que es de menor calibre. Si una de estas llaves es de un cuarto, otra de un dieciseisavo y la otra de tres octavos ¿cuál será la llave que debe escoger el hijo?

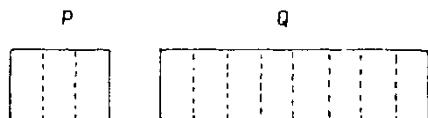
2. Para medir la longitud de la cuerda M se utilizó la cuerda S. Si en ambas cuerdas los nudos están igualmente separados, la longitud de M es igual a:

- A. $5/3$ de la longitud de S.
- B. $12/5$ de la longitud de S.
- C. $3/5$ de la longitud de S.
- D. $12/3$ de la longitud de S.



3. Las franjas en que están divididos los rectángulos P y Q tienen el mismo tamaño. Si el área del rectángulo P se mide utilizando el rectángulo G, el área de P es igual a:

- A. $8/3$ del área de Q.
- B. $22/8$ del área de Q
- C. $3/8$ del área de Q
- D. $22/3$ del área de Q.



4. Si en los dos rectángulos anteriores se utiliza el rectángulo P para medir el área del rectángulo Q, completa la siguiente frase de tal manera que exprese correctamente el resultado de la medición:

"El área de Q es igual a _____ del área de P".

5. En una caja caben exactamente 8 cubitos. El volumen de un cubito comparado con el volumen interno de la caja puede expresarse así: _____

6. Una compañía expresa en años el tiempo que emplea en la realización de sus obras. En la construcción de un puente la compañía demoró 7 meses. Señala en la siguiente tabla el dato en años correspondiente al tiempo empleado en hacer dicha obra.

Duración (años)
$5/12$
7
$12/7$
$7/12$

Fracciones como Razones

1. De los 10 problemas que dejó el profesor como tarea, Orlando solucionó 7. El rendimiento de Orlando en esta tarea se puede expresar así:
A. $10/7$ B. $3/10$ C. $3/7$ D. $7/10$

2. En el partido de baloncesto Juan encestó 5 tiros de los 12 que lanzó. Expresa, mediante una fracción, el rendimiento de Juan en este partido.

3. Por cada 25 libros que compras te regalan 3. La razón del número de libros obsequiados al número de libros comprados es:
A. $25/3$ B. $22/3$ C. $3/22$ D. $28/25$ E. $3/25$

4. En un supermercado ofrecen un descuento de \$20 por cada \$100 del precio de la compra. Expresa de dos formas distintas este descuento.

5. Mientras estuve en el parque pasaron 7 busetas y 17 automóviles, ¿cuál es la razón del número de busetas al número total de vehículos que pasaron mientras estuve en el parque?

6. Si en una reunión de 50 personas, 48 son hombres ¿qué parte del número de personas son estos 48 hombres?

Anexo 6.**Autorización individual para participar en el desarrollo de la investigación.**

Fecha: _____ Yo _____ en calidad de padre, (madre de familia, acudiente o representante legal) del estudiante _____ de la Institución Educativa Divino Niño Cormal del municipio de Quípama Departamento de Boyacá, hago expresa mi intención de hacer parte del desarrollo del trabajo de investigación denominado “fracciones y Realidades,” durante el Período lectivo 2019, cuyo objetivo principal radica en analizar una estrategia didáctica empleada en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en el caso específico del concepto de fracción, con estudiantes de grado sexto, en el contexto rural. Manifiesto estar de acuerdo con la participación de mi hijo(a) o acudido(a) en las actividades enfocadas al desarrollo de la investigación, reconozco que se me informó previamente sobre el objetivo de dicho trabajo, donde la participación del estudiante en el aula de clases será objeto de estudio, mediante observaciones directas, encuestas, cuestionarios, talleres, juegos, entrevistas, fotos, videos, entre otras actividades didácticas, utilizadas por el docente investigador.

Entiendo que la participación de mi representado(a) es voluntaria, y que en el momento que él o ella lo deseé, puede abandonar el desarrollo del mismo o dejar de participar sin que ello traiga alguna consecuencia frente al desempeño en el área. De igual manera, conozco mis derechos sobre la información que se obtenga y sé que de manera expresa puedo decidir sobre su inclusión en el desarrollo de la investigación.

Entiendo que este proyecto vincula no solo a estudiantes sino además a padres de familia, docentes, directivos y comunidad en general, y que el proceso va a incidir en el desarrollo de destrezas y habilidades de pensamiento matemático por parte de los educandos, fortaleciendo

métodos y acciones que permitan optimizar sus conocimientos, hábitos de conducta y relaciones interpersonales.

Como padre, madre de familia o acudiente expreso mi responsabilidad por el compromiso que asume mi hijo al ser partícipe de este proceso, su buen comportamiento y actitud en el cumplimiento de las actividades propias de la investigación. Igualmente, expreso que SI__ o NO__ deseo hacer parte de este estudio.

Cualquier duda que pueda surgir será resuelta por los responsables de esta investigación.

Dirigida por:

YUBER BAYARDO RODRÍGUEZ PÉREZ
DOCENTE INVESTIGADOR
CEL. 3125590420 E-mail yubarte2@gmail.com

VICTOR HUMBERTO NIÑO SUA
RECTOR

NELSY ROCÍO GONZÁLEZ GUTIERREZ
ASESORA

PADRE, MADRE DE FAMILIA O ACUDIENTE
RESPONSABLE DEL ESTUDIANTE

Anexo 7.**Autorización colectiva para participar en el desarrollo de la investigación.**

Autorización padre, madre de familia o acudiente para que sus hijos o acudidos participen en el desarrollo de una propuesta de investigación pedagógica en el área de matemáticas del grado 6° haciendo parte del desarrollo del trabajo de investigación, durante el período lectivo 2018.

Donde la participación del estudiante en el aula de clases será objeto de estudio, mediante observaciones directas, encuestas, cuestionarios, talleres, juegos, entrevistas, fotos, videos, entre otras actividades didácticas, utilizadas por el docente investigador.

No	Nombre del estudiante	No. Identificación	Edad	Padre, madre de familia o acudiente	No celular
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					

El asentamiento original se encuentra bajo custodia del investigador.

Anexo 8.

Asentimiento de los estudiantes

Mediante mi firma en este documento, dejo expresa mi intención de participar en la investigación Titulada **“Fracciones y realidad”** durante el Período lectivo 2019, cuyo objetivo principal radica en analizar una estrategia didáctica empleada en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en el caso específico del concepto de fracción, con estudiantes de grado sexto, en el contexto rural. Manifiesto estar de acuerdo con la participación en las actividades enfocadas al desarrollo de la investigación, donde mi participación en el aula de clases será objeto de estudio, mediante observaciones directas, encuestas, cuestionarios, talleres, juegos, entrevistas, fotos, videos, entre otras actividades didácticas, utilizadas por el docente investigador.

No	Nombre del estudiante	No identificación	Edad	Firma	Participo	
					Si	No
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						

El asentimiento original se encuentra bajo custodia del investigador.

Anexo 9.**Encuesta semi-estructurada para estudiantes sobre creencias y concepciones hacia las matemáticas.**

Reconociendo su importancia dentro de los proceso de enseñanza y aprendizaje al interior de su familia y la Institución. Por tal razón, se invita a participar activamente en el diligenciamiento de la presente encuesta.

- 1) Fecha: _____ 2) Edad: _____
 3) Grado: _____ 4) Género: Mujer ____ Hombre ____
 4) ¿Con quién vives?

 5) ¿Cuántos hermanos tienes?

 6) ¿Cuánto tiempo en minutos aproximadamente gastas desde tu casa hasta la institución?
 Menos de 15 minutos _____
 De 15 a 30 minutos _____
 30 minutos a 1 hora _____
 Más de una hora _____
 7) ¿Cuál de las asignaturas que está cursando presenta mayor grado de complejidad en su aprendizaje?:

 ¿Porqué?

 8) Dedicas tiempo a estudiar matemáticas en casa:
 Sí ____ No ____ ¿Cuánto tiempo? _____ ¿En dónde?

 9) Tu actitud hacia las matemáticas:
 Excelente _____ Muy buena _____ Buena _____ Regular _____
 Mala _____

¿Porqué?

- 10) La relación con tu profesor de matemáticas es:

Excelente _____ Muy buena _____ Buena _____ regular _____
 Mala _____

¿Porqué?

11) ¿Cuál crees que es el factor principal por el cual se presenta bajo rendimiento en matemáticas? (Señale sólo uno)

- a) Falta de motivación por parte de docente
- b) Falta de actividades lúdicas
- c) Los estudiantes no estudian lo suficiente
- d) Bajos conocimientos en matemáticas
- e) Indisciplina en el aula de clase
- f) Otro

¿Cuál? _____

12) Dispone de materiales y recursos suficientes para desarrollar las actividades académicas:

Sí ____ No ____ ¿Por qué? _____

13) Cuando desarrollan actividades en grupo todos aportan:

Sí ____ No ____ A veces ____

¿Porqué? _____

Anexo 10.**Encuesta semi-estructurada para padres de familia o acudientes sobre creencias y concepciones hacia las matemáticas.**

Señor padre de familia y/o acudiente reconocemos su importancia dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje al interior de su familia y la Institución. Por tal razón, se invita a participar activamente en el diligenciamiento de la presente encuesta.

1. Fecha: _____ 2. Padre o madre _____ Acudiente _____ vínculo familiar con el estudiante _____
3. Grado de escolaridad _____ 4. Edad: _____
5. ¿Cuándo su hijo tiene tareas de matemáticas asignadas por los docentes, colabora y participa activamente en su realización?

Siempre _____ Casi siempre _____ A veces _____ Nunca _____

¿Por qué razón? _____

6. ¿Cómo califica la relación que tiene el docente con su representado?

Muy buena _____ Buen _____ Regular _____ Mala _____

Justifique _____

7. ¿En la Institución resuelven los conflictos a través del dialogo y la conciliación?

Siempre _____ Casi siempre _____ A veces _____ Nunca _____

Explique _____

8. ¿La Institución brinda apoyo a los estudiantes que tienen necesidades de aprendizaje?

Siempre _____ Casi siempre _____ A veces _____ Nunca _____

Explique _____

9. ¿Asiste frecuentemente a la Institución para indagar sobre el desempeño de su representado?

Siempre _____ Casi siempre _____ A veces _____ Nunca _____

¿Por qué? _____

10. Su actitud hacia las matemáticas es:

Excelente _____ Muy buena _____ Buena _____ Regular _____ Mala _____

¿Por qué? _____

11. Su relación con el profesor de matemáticas es:

Excelente _____ Muy buena _____ Buena _____ regular _____ Mala _____

¿Por qué? _____

12. ¿Cuál crees que es el factor principal por el cual se presenta bajo rendimiento en matemáticas?

- a. Falta de motivación por parte del docente
- b. Falta de actividades lúdicas
- c. Los estudiantes no estudian lo suficiente
- d. Bajos conocimientos en matemáticas
- e. Otro

¿Cuál? _____

13. Suministra materiales y recursos(libros, útiles escolares, Tablet, computador, calculadora, etc.) suficientes para que el estudiante desarrolle las actividades académicas:

Siempre _____ Casi siempre _____ A veces _____ Nunca _____

¿Por qué? _____

14. ¿Comparte con su hijo(a) momentos de descanso y ocio?

Siempre _____ Casi siempre _____ A veces _____ Nunca _____

Explique _____

Anexo 11.

Guía de entrevista semi-estructurada a docentes.

Reconociendo su importancia dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje al interior de la Institución. Por tal razón, se invita a participar activamente en el diligenciamiento de la presente entrevista.

El objetivo: *describir el pensamiento, creencias y concepciones del docente en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; en particular, sobre el concepto de fracción.*

1. ¿Cuál es su visión general acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?

2. ¿Cómo te concibes como profesor cuando enseñas matemáticas?

3. ¿Qué aspecto dentro de su práctica en la enseñanza de la matemática le ha dado mayor satisfacción?

4. ¿Cuáles considera son los pasos fundamentales o indispensables para planear una clase de matemáticas?

5. ¿Cómo consideras que influye el contexto socioeconómico en el que viven los estudiantes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?

6. ¿Cómo deben ser las interacciones docente-estudiante y estudiante-estudiante para que se den unos buenos procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática?

7. ¿Según tu criterio cuáles son los mayores problemas de la enseñanza del concepto de fracción?

8. ¿A qué atribuyes las dificultades en la enseñanza de las fracciones?

9. ¿Cuáles actividades puede recomendar para enseñar el concepto de fracción?

10. ¿Cuál es su opinión sobre el papel de las representaciones gráficas, imágenes, dibujos, esquemas, figuras geométricas en la actividad matemática?

11. ¿Qué papel tiene la resolución de problemas en su esquema de enseñanza?

Basada en Presmeg (1985) y Leguizamón (2017)

Anexo 12.

Secuencia didáctica “fracciones, fotografía y contexto”.

Introducción

En este trabajo la fotografía se convierte en la herramienta usada por el docente para la enseñanza de las matemáticas. Se realizó una prueba piloto con estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Divino Niño, del municipio de Quípama – Boyacá, en 2018. Su empleo incitó en los estudiantes deseos de aventurarse por el mundo de la imaginación y la indagación, así como el interés por adquirir conocimiento matemático, apoyándose en llamativas fotografías, de su propia autoría, teniendo como escenario su entorno natural.

Para la puesta en marcha del proyecto, se diseñó una secuencia didáctica, basadas en la Teoría de las representaciones semióticas de Duval, R (2004); que involucraron la fotografía como medio de interacción en el proceso de construcción individual del conocimiento. Así mismo, se tuvo presente la teoría de Polya en las estrategias para el planteamiento y resolución de problemas. El proceso partió de la realización de un concurso de fotografía, donde se destacó el ambiente sociocultural y natural de la región del occidente de Boyacá, el cual insinuó la búsqueda de las matemáticas en el contexto. En él se contó con la participación de toda la comunidad educativa, presentando un álbum de máximo diez (10) fotografías por participante, en el que se pudiera vislumbrar el nexo entre naturaleza y matemáticas.

Posteriormente, con el grupo focalizado se realizó la puesta en práctica de la situación didáctica, siendo notoria la habilidad de los estudiantes para utilizar imágenes en el planteamiento y solución de problemas matemáticos.

Basados en los resultados obtenido en la prueba piloto se diseñó un instrumento que consiste en el planteamiento de diez retos, que implican el uso del concepto de fracción. Los estudiantes deberán resolverlos; individualmente; luego discutirán en grupo y socializarán sus procedimientos y resultados. Para llevar a cabo estas actividades es importante tener en cuenta los momentos de: representación, exploración, conjeturación, conceptualización y formulación.

Secuencia didáctica

Reto 1.

En la flor representada en la fotografía, suponga que todos los pétalos son iguales, si se le quitan 2 pétalos *¿Qué fracción representa el número de pétalos que quitó con respecto al total?*

¿Qué fracción representa el número de pétalos que queda en la flor?

Con la ayuda de un dibujo, gráfico o sobre la recta numérica represente la situación.



Alexander Riveros
Grado 10°



Luis
Enrique Medina
Grado 6°

Reto 2

En dos mazorcas (vainas) de cacao, se dañaron $\frac{3}{5}$ de los granos en la mazorca A, mientras que en la mazorca B se dañaron $\frac{5}{6}$ de los granos, *¿cuál de las dos mazorcas tiene más granos dañados?*

Justifique la respuesta representando las fracciones en la recta numérica.

Reto 3

Al finalizar el partido de microfútbol, se reparte jugo de caña panelera en totumas de igual volumen. Si Sergio bebió $\frac{4}{6}$ de una totuma y Sebastián bebió $\frac{2}{3}$ de la totuma de él. *¿Quién de los dos tomó mayor cantidad de jugo?* Explique con base en un gráfico o dibujo.

Yorely preparó jugo en una jarra que contiene $2 \frac{1}{2}$ litros. *¿Para cuántas totumas de $\frac{1}{4}$ litro le alcanza la jarra de jugo?*



Helman Guerrero
Grado 6°



Helman
Guerrero
Grado 6°

Reto 4

En la fotografía, la altura de la parte de la yuca que se encuentra debajo de la mano de la persona que la sostiene, corresponde aproximadamente a las dos terceras partes ($2/3$). Si la altura de la yuca es de 150 cm. *¿Qué longitud tiene las dos terceras partes ($2/3$)?*

La longitud de las $2/3$ partes, se divide en la mitad de la mitad. *Represente mediante una fracción y un decimal las cantidades. Además, calcule la longitud de la cantidad resultante.*

Represente los procedimientos en rectas numéricas e intente generalizar.



Helman Guerrero
Grado 6°

Reto 5

En la gavera señalada en la fotografía, se dejan de llenar 14 cuadros. *¿Qué fracción representa el número de panelas que se fabricaron?*

Si una arroba equivale a 24 panelas. *¿Cuántas arrobas completas se fabricaron? ¿Sobran panelas?*

¿Cuántas? Represente esta cantidad mediante una fracción teniendo en cuenta la arroba como unidad.



Reto 6.

En la bandeja de la fotografía de la izquierda, hay 15 quesos, para ser repartidos entre 45 niños, *¿Cuál sería la fracción para representar la situación?*

Explique el significado de la fracción dada.

Una quinta parte de los quesos fue dado a Stiven, una tercera parte a Laura, un quinceavo a Vanesa; *¿es posible hacer este reparto? ¿Qué fracción de queso sobró o hizo falta queso?*

Helman Guerrero
Grado 6°

Reto 7.

En un galpón se tienen pollos criollos, por cada pollo adulto hay tres pollos de iniciación, como se tipifica en la imagen. Si 20 son pollos adultos, *indica una comparación entre las dos cantidades usando una fracción como razón. ¿Qué cantidad de pollos de iniciación hay en el galpón?*

¿Cuántos pollos hay en total en el galpón?



Freiman Nicolas Navarrete
Grado 6°



Alejandro Pérez
Grado 10°

Reto 8.

En gemología, el quilate se utiliza para medir la masa de una piedra preciosa (para nuestro caso una esmeralda). Un quilate equivale a la quinta parte de un gramo;

Escriba una fracción decimal que represente la parte del gramo que corresponde a un quilate.

¿Cuántos quilates tiene una esmeralda que pesa 1,2 gramos? ¿Qué procedimiento haría para averiguarlo?

Yamid vendió una esmeralda en \$300.000, gasta $\frac{1}{3}$ del total del dinero en compras, \$50.000 en transporte y el 10% en comida y bebida. *¿Cuánto dinero le quedó?*

Reto 9.

En un árbol de naranjo que tiene aproximadamente 200 frutos, se cosecharon sus $\frac{3}{5}$ partes de estos, *¿cuál fue el total de naranjas que se recogió? ¿Cuántas naranjas no alcanzaron el proceso de maduración?*

Laura reparte una naranja, en partes iguales entre sus dos compañeros, otra naranja para tres compañeros, otra naranja para cuatro compañeros y así sucesivamente *¿Qué fracción de naranja le corresponde a cada amigo según cada situación?*

Si Sebastián come dos porciones de un total de cinco porciones, *¿Qué fracción representa la cantidad consumida por él?, ¿Qué fracción representa la cantidad de naranja no consumida*



Fuente: Yuliana Barajas
Grado 10°

por Sebastián?

Para preparar un vaso de jugo se necesitan 14/4 de naranjas. ¿Cuántas naranjas enteras son necesarias? Explique.



Helman Guerrero
Grado 6

Reto 10.

En un vivero se trasplantaron seiscientas (600) plantas de café, organizadas en forma rectangular como se señala en la figura. Si se trasplantaron $\frac{2}{6}$ partes de café variedad Caturra, una tercera parte de café variedad Castilla y lo restante se sembró variedad Borbón.

¿Qué fracción representa el total de plantas de café variedad Borbón?

¿Cuántas plantas de cada variedad se trasplantaron?

Anexo 13.

Formato para validación de expertos.

Fecha: _____ Nombre del evaluador: _____

Profesión: _____ Institución donde labora: _____ Título
Académico _____

Respetado(a) docente, reconociendo su trayectoria académica y aportes dentro de la Educación Matemática, se invita como experto a dar su opinión sobre el instrumento adjunto, el cual se estará utilizando en el desarrollo de la tesis de maestría: **“Fracciones y realidad”**.

Esta valoración sustenta la fiabilidad y validez del instrumento que se está construyendo para facilitar la construcción del concepto de fracción, sus propiedades, las operaciones y relaciones correspondientes, y que a la vez genere comprensión de situaciones del contexto.

Como criterios de evaluación en la selección de las actividades de la secuencia didáctica, se han tenido en cuenta, los siguientes aspectos:

- Actividades que indagan sobre la concepción, significado, interpretación y percepción que poseen los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Divino Niño, del municipio de Quípama – Boyacá, sobre el concepto de fracción.
- Proponer retos que permitan reconocer las fracciones, buscando imágenes (fotografías) donde se presenten regularidades o formas que se repitan y que admitan indagar por la fracción que representa cada forma.
- Retos donde se apliquen los conocimientos de fracción; usando diferentes registros de representación semiótica, sean gráficos, fotografías, figuras geométricas, dibujos, rectas, símbolos, íconos, tablas, expresiones en lenguaje natural, etc.
- Los retos planteados incluyen el concepto de fracción como: parte todo, medida, cociente, operador, razón, número decimal y porcentaje.

En este sentido, solicitamos su colaboración, para evaluar cada una de las actividades que componen el instrumento denominado **“Fracciones, fotografía y contexto”**, respecto a los criterios anteriormente mencionados. Nos interesa saber su punto de vista sobre los siguientes aspectos:

- El grado de relevancia con el que cada reto evalúa alguno de los diferentes significados del objeto fracción.
- El grado de relevancia con el que evalúa los diferentes tipos de conocimientos del estudiante de grado sexto, para la comprensión de los conceptos fundamentales de fracción.
- El tipo y grado de relevancia con el que evalúa el conocimiento didáctico matemático.
- La ausencia de algún contenido importante; la redacción y comprensión de los retos planteados.

De esta forma, se estará presto a atender las observaciones y/ o sugerencias que usted considere pertinentes.

Para el análisis se incluye una tabla donde se califica el grado de relevancia de los criterios mencionados, basados en dar valores de 0 a 3 así: **0** No es relevante; **1** poca relevancia; **2** medianamente relevante y **3** totalmente relevante.

Por favor, para cada uno de los retos, marque el nivel que corresponda según su criterio.

Intención de los retos	Nivel de Relevancia (NR)				Observaciones
	0	1	2	3	
Reto 1. Construir el significado de fracción a partir de la fotografía y utilizar figuras geométricas, dibujos, gráficas o rectas numéricas para representar fracciones.					
Reto 2. Identificar los procesos usados para comparar fracciones, reconociendo: fracciones equivalentes, irreductibles, simplificación y amplificación, al igual, su relación de orden. $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}, \quad \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad y \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$					

Reto 3.

Representar fracciones equivalentes e irreducibles obtenidas a partir de otra, multiplicando (amplificación) o dividiendo (simplificación) por un mismo factor. Clasificar fracciones: fracciones propias e impropias, fracciones unidad y fracciones enteras.

Reto 4.

Utilizar el concepto de fracción como medidor, representaciones en segmentos, líneas o sobre la recta numérica. Contextos continuos y discretos. Mide cantidades de magnitudes que no se corresponden con un múltiplo entero de la unidad de medida. Finalmente, la representación mediante fracción decimal y su conversión.

Reto 5.

Comprender el significado de fracción en diferentes contextos: como una parte de un todo y que permite determinar el número de elementos que conforman la parte y utilizar el concepto de fracción como operador.

Reto 6.

Realizar conversiones entre fracciones, números decimales, porcentajes y números enteros.

Reto 7.

Interpretar el significado de fracción como una parte de un todo, como partidor y como cociente.

Reto 8.

Usar la fracción como razón para representar la comparación de dos cantidades que tienen características en común que las relaciona.

Reto 9.

Utilizar el concepto de fracción como operador donde se multiplique el numerador de la fracción por el número y el resultado se divida entre el denominador de la fracción. Además, realizar operaciones entre fracciones.

Reto 10.

Manejar el concepto de fracción como operador y realizar operaciones entre fracciones.

Observaciones y/o sugerencias de la secuencia completa:

Cordialmente,

RODRÍGUEZ PÉREZ YUBER BAYARDO

Estudiante Maestría Educación Matemática.

NELSY ROCÍO GONZÁLEZ G.

Directora.

Anexo 14

Resultados de las creencias y concepciones de los docentes (entrevistas semi-estructurada).

Ítem	Pensamiento, creencias y concepciones del docente			
	Docente 1	Docente 2	Docente 3	Docente 4
1. Visión general acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas	Las estrategias empleadas son aprendizajes que sirven para la vida.	Lograr estudiantes creativos, dinámicos y responsables con competencias.	Poco interés por el aprendizaje del área, se logra poco, pese al esfuerzo del docente.	El estudiante desarrolla un pensamiento lógico y analítico.
2. Concepción como profesor enseñando matemáticas.	Orientador dispuesto a la solución de problemas relacionados con el área.	Aplica estrategias, para que los estudiantes aprendan con agrado.	Le gusta enseñar y logra llevar a los estudiantes al aprendizaje.	Enseña mediante ejercicios repetitivos y juegos didácticos.
3. Mayor satisfacción	Cuando el estudiante entiende y relaciona lo mejoren sus aprendido con el diario vivir.	Participación en clase, desarrollos las actividades y las competencias.	El alcance de logros y rendimiento académico, el interés por el aprendizaje y cuando se divierten estudiando matemáticas	Enseñanza por el método de resolución de problemas.
4. Pasos fundamentales o indispensables para planear una clase de matemáticas	Conocimientos previos, inducción al tema, objetivos, estrategias, retroalimentación y evolución.	Los objetivos, las actividades, estrategias y la evaluación.	La motivación, preparación de actividades didácticas, metodológicas y la evaluación.	Planeación, enseñanza, ejercicios, evaluación y las tareas.
5. El contexto socioeconómico en el que viven los estudiantes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas	La falta de materiales para trabajar.	Desempleo, recursos materiales, salud, violencia, delincuencia y vicios.	Gran parte de estudiantes llegan en condiciones mínimas, adecuadas para lograr los aprendizajes	Los estudiantes creen que por la falta de dinero no se puede estudiar.

6. Interacciones docente-estudiante y estudiante-estudiante	Respeto, confianza para la comunicación y el aprendizaje.	Comunicación amena, creatividad y participación	Amistad, confianza, respeto y responsabilidad.	Construcción del saber y cooperación.
7. Mayores problemas de la enseñanza del concepto de fracción	La solución y aplicación de problemas a la vida cotidiana.	No tienen buenas bases en operaciones, falta de dedicación y atención en clase.	La falta de interés por el aprendizaje, desatención y los sistemas de evaluación.	La falta de didáctica en los ejemplos.
8. A que atribuyes las dificultades de la enseñanza de las fracciones	Falta de hábito de lectura para la comprensión.	Falta de responsabilidad y gusto por el tema, falta de aplicar estrategias pedagógicas para facilitar el aprendizaje del tema.	Falta de atención, concentración y disciplina en el desarrollo de las clases. Falta de lectura comprensiva.	Definición de los términos. No conocen bien cuál es el numerador y el denominador.
9. Actividades puede recomendar para enseñar el concepto de fracción	La práctica vivencial, la teoría y material para la aplicación	Graficar, repartición de objetos, juegos, dibujos, etc. Ejemplos concretos de la vida cotidiana.	Partición de unidades conjuntos en partes iguales, representación en la recta numérica, juegos, lecturas, dibujos y comparaciones.	Mediante cortes de hojas o divisiones.
10. Papel de las representaciones	Para el aprendizaje todas las representaciones posibles.	Con las representaciones desarrollan competencias.	Son recursos importantes y facilitan el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje.	El estudiante aprende más, mediante dibujos y figuras.
11. papel tiene la resolución de problemas	Fundamental para la comprensión.	Los estudiantes toman en cuenta la disciplina junto con el proceso de pensar y analizar utilizando	Tiene un papel fundamental, es una estrategia que ayuda bastante en la enseñanza del	Es fundamental para evidenciar los logros de los objetivos y el estudiante tenga un aprendizaje

diferentes estrategias.	área. Todo aprendizaje depende de la motivación y el interés que tenga el estudiante, es imposible enseñarle al que no tiene ningún interés por aprender. Muy fácil enseñarle al que busca el conocimiento.	significativo.
-------------------------	---	----------------
