REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA PARA LA COMPRENSIÓN DE LA ELIPSE USANDO GEOGEBRA

WILLIAM ARMANDO PINEDA MORENO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

FACULTAD DE LAS CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TUNJA

2021

REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA PARA LA COMPRENSIÓN DE LA ELIPSE USANDO GEOGEBRA

WILLIAM ARMANDO PINEDA MORENO

TRABAJO DE PARA OPTAR AL TÍTULO DE
MAGISTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DIRECTORA
Dr. OMAIDA SEPÚLVEDA DELGADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
FACULTAD DE LAS CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
TUNJA

2021

Dedicatoria

¡Que nadie se quede afuera, se los dedico a todos!

En especial el presente trabajo está dedicado a mi familia, a mi madre, mi hermana y mis sobrinas por haber sido mi apoyo a lo largo de toda mi carrera universitaria y a lo largo de mi vida.

A ti Nora, por tu amor incondicional.

Agradecimientos

A Dios, por permitirme alcanzar esta meta.

Un agradecimiento especial a la Dra. Omaida Sepúlveda, por el apoyo constante, sus recomendaciones, sugerencias, críticas constructivas y que con su dirección, conocimiento y enseñanza permitieron el desarrollo del presente trabajo.

A las Magíster Leidy Johana Suárez Gómez y Nury Yolanda Suárez Ávila por su ayuda y sugerencias para la consecución de esta tesis.

A nuestra alma máter, la gloriosa y siempre combativa UPTC por abrirme sus puertas y disponer de los mejores profesionales para nuestra formación.

Resumen

El presente trabajo de tesis tiene como objetivo identificar los registros de representación semiótica para favorecer la comprensión del objeto matemático elipse en estudiantes de grado 10°. El estudio se sustenta en la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval (1999), quien afirma que es imperativo emplear gran diversidad de registros ya que considera que la coordinación de estos registros es fundamental para la aprehensión de los conceptos matemáticos. El enfoque del trabajo es de tipo cualitativo se emplean aspectos de la ingeniería didáctica de Artigue (1995) como metodología de estudio para llegar al cumplimiento de los logros propuestos: en cuanto a la fase de experimentación se emplean secuencias didácticas mediadas por el software Geogebra, mediante las cuales se pretende que los estudiantes de grado 10° lleguen a la comprensión el objeto elipse coordinando los registros: gráfico, algebraico y de lengua natural. Entre los resultados más importantes de la investigación se evidencia que los estudiantes lograron coordinar los registros de representación semiótica referentes a la lengua natural y figural y, con ello, comprender el registro geométrico para la elipse. También es de resaltar que la mayoría de los estudiantes lograron la representación de la sección cónica en el registro algebraico por medio de la conversión y tratamiento entre dichos registros y el gráfico. Por último, se hace hincapié en la importancia que tiene la metodología que el docente utiliza en el aula de clase puesto que ello puede favorecer o no la comprensión de los conceptos que se trabajen. En la investigación se implementó el ambiente de geometría dinámica Geogebra el cual contribuye a que los estudiantes tengan facilidad en el reconocimiento de las propiedades geométricas de la elipse; hecho que les permitió hacer conjeturas e hipótesis para efectuar la coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica.

Palabras clave: Secciones cónicas, representaciones semióticas, Geogebra, secuencias didácticas.

Abstract

The present thesis work aims to identify the records of semiotic representation to promote the understanding of the ellipse mathematical object in grade 10° students. The study is based on the Theory of Records of Semiotic Representation of Duval (1999), who states that it is imperative to use a great diversity of registers since it considers that the coordination of these registers is fundamental for the apprehension of mathematical concepts. The focus of the work is qualitative, aspects of the didactic engineering of Artigue (1995) are used as a study methodology to reach the fulfillment of the proposed achievements: regarding the experimentation phase, didactic sequences mediated by the Geogebra software are used, Through which it is intended that students in grade 10° reach an understanding of the ellipse object by coordinating the registers: graphic, algebraic and natural language. Among the most important results of the research, it is evidenced that the students managed to coordinate the records of semiotic representation referring to the natural and figural language and, with this, understand the geometric record for the ellipse. It is also worth noting that most of the students achieved the representation of the conic section in the algebraic register by means of the conversion and treatment between said registers and the graph. Last but not least, emphasis is placed on the importance of the methodology that the teacher uses in the classroom, since this may or may not favor the understanding of the concepts being worked on. In the research, the dynamic geometry environment Geogebra was implemented, which contributed to the students having ease in recognizing the geometric properties of the ellipse, which allowed them to make conjectures and hypotheses to carry out the coordination between the different records of semiotic representation.

Keywords: Conic sections, semiotic representations, Geogebra, didactic sequences.

Contenido

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Introducción

La matemática es una ciencia que se encarga del estudio de entes ideales en lo concerniente a las relaciones entre estos y sus propiedades (Fernández, 2011). Se puede evidenciar que el estudio y aplicación de las matemáticas con la contribución de las demás ciencias han intentado a lo largo de su historia explicar los fenómenos que ocurren en el universo, entonces, en este orden de ideas, las matemáticas no se pueden limitar al simple hecho de ser una transmisión de conocimientos fijos y terminados, sino que debe provocar en el estudiante ciertas actitudes de indagación e investigación (Fernández, 2011). Por otro lado, en la geometría analítica, hay dos problemas a los cuales los estudiantes se enfrentan: el problema deductivo y el inductivo (en donde en el primero dada la expresión algebraica hay que representarla gráficamente evidenciando todos sus elementos y el segundo donde dados algunos elementos de la cónica se debe hallar su expresión algebraica). (Velázquez, 2013).

Además de estos problemas, para Pérez (2011) existe otra dificultad en relación con la enseñanza de la geometría analítica, la cual consiste en que la mayor parte de las veces su enseñanza se centra en las expresiones analíticas y procedimientos solamente algebraicos dejando a un lado la parte gráfica y evitando así un conjunto de experiencias pragmáticas que son elementales para la formación y conceptualización de una manera significativa y conceptual.

Bajo estos supuestos, la investigación se fundamenta en el diseño, aplicación y análisis de una situación didáctica mediada por el software de geometría dinámica Geogebra, enfocada en el estudio del aprendizaje de la sección cónica elipse y fundamentada en la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1999). El trabajo de campo se desarrolló con los estudiantes de grado 10° del Colegio San Viator de Tunja. Por otro lado, el marco teórico que posibilita el desarrollo del estudio es el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática

(EOS), el cual integra aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1999) en lo referente a tratamientos y conversiones y la Teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (2007) en cuanto al planteamiento de las situaciones problema adecuadas para buscar la comprensión de este objeto matemático.

La metodología implementada en el estudio corresponde a la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995). Esta investigación se desarrolló por medio de esta metodología ya que se desenvuelve en el ámbito de la educación matemática y posibilita el estudio de situaciones de enseñanza y aprendizaje validando la información a través de dos análisis (un análisis a priori y otro a posteriori).

Para dar cumplimiento al objetivo general propuesto de Implementar una estrategia didáctica enfocada en el uso de los diversos registros de representación semiótica con la pretensión de inducir en los estudiantes de grado décimo la comprensión de la elipse como lugar geométrico, utilizando como medio de interacción el software Geogebra, al utilizar el software de geometría dinámica como medio de interacción en estudiantes de grado 10, se organiza la tesis en cinco capítulos: en el primer capítulo, se analizan algunos de los problemas relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas y según estas problemáticas, se plantea la pregunta de investigación y los objetivos (general y específico). En el segundo capítulo se describen las investigaciones nacionales e internacionales relacionadas con la enseñanza del objeto matemático elipse para establecer un estado del arte respecto a estos estudios. A continuación, se presenta la teoría de los registros de representación semiótica y la teoría de las situaciones didácticas, vistas en este estudio como teorías integradoras del enfoque teórico denominado: Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos – EOS. Estos referentes teóricos constituyen el marco teórico que sustentan el desarrollo de la investigación. Finalizando este segundo capítulo se exponen aspectos relacionados con el alcance que tiene la visualización por medio de los ambientes de geometría dinámica y la importancia que tiene el desarrollo de este proceso en el aprendizaje de las matemáticas.

En el capítulo tercero, se establece la metodología para el desarrollo de la investigación: donde se describe el nivel del estudio, se presenta su diseño, las técnicas e instrumentos para recolectar la información, las técnicas de procesamiento y análisis de la información, categorías de análisis del estudio y finalmente la población objeto de estudio. En el diseño de la investigación se describe la metodología que se asume para el estudio y corresponde a la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995) la cual comprende las fases: 1) Análisis preliminares; 2) Concepción y análisis a priori para el diseño de la situación didáctica; 3) Experimentación y 4) análisis a posteriori con la evaluación.

En el cuarto capítulo, correspondiente a los resultados se realiza el análisis cognitivo, el análisis epistemológico para abordar el objeto elipse, y el didáctico dentro del cual se enmarca el análisis curricular, donde se analizan los lineamientos, estándares y DBA relacionados con el objeto de investigación, todos estos análisis se denominan preliminares en la metodología de la Ingeniería didáctica. Con estos análisis preliminares se pasa al desarrollo de la fase 2 del estudio que corresponde al planteamiento del análisis a priori para el diseño de la situación didáctica que se formula para el objeto elipse. Seguidamente, se presentan los resultados de la fase 3 de experimentación donde se implementa la secuencia didáctica. En la fase 4 se realiza el análisis a posteriori según las actividades desarrolladas por los estudiantes, para pasar finalmente a la evaluación de la secuencia didáctica, en cuanto a la construcción del objeto elipse. Se da respuesta a la pregunta de investigación señalando hasta qué punto se lograron los objetivos planteados.

Finalmente, en el capítulo 5, se presenta la discusión de los resultados y las conclusiones del trabajo, donde se exponen los hallazgos más importantes del trabajo investigativo, entre ellos se tiene en primer lugar, que los alumnos coordinaron tanto los registros de lengua natural y figural, lo que generó la comprensión de la condición geométrica de la elipse, como los registros gráfico y algebraico que permitieron una apropiación significativa de la representación de la cónica en el registro algebraico y la relación existente entre este y su representación gráfica.

Un aporte relevante que surgió en la investigación fue observar la incidencia que tienen los ambientes de geometría dinámica en el estudio de las secciones cónicas, ya que permitió que los estudiantes observaran con mayor detalle las propiedades geométricas y con ello se les facilitó el tránsito de un nivel de percepción visual a uno más teórico entre los registros gráfico y algebraico. Finalmente se observó que por medio de este tipo de actividades el estudiante está en la capacidad de construir su propio conocimiento utilizando herramientas TIC desde una perspectiva distinta a la algebraica.

Capítulo 1. Marco Investigativo

Descripción del problema de investigación

En las instituciones educativas del país la enseñanza de las secciones cónicas (que pertenecen a la unidad que corresponde a la geometría analítica) en el grado décimo de educación media se hace a través del sistema de representación algebraico, es decir, que en la enseñanza de dichos objetos matemáticos se enfatiza en aspectos analíticos prevaleciendo sobre los geométricos impidiendo que se llegue a lograr una conceptualización significativa (Tocto, 2015). Otra situación que impide que se lleguen a comprender estos conceptos matemáticos/geométricos, corresponde a que desafortunadamente en el currículo nacional su enseñanza continúa siendo secundaria como consecuencia del reducido tiempo que se dedica a la enseñanza de la geometría y al excesivo enfoque algebraico de las ecuaciones de segundo grado que representan dichas cónicas (Fernández, 2011). Según el autor, estas coyunturas tienen como consecuencia una pérdida progresiva del conocimiento de las propiedades esenciales de las cónicas.

En cuanto a dificultades en el estudio de las secciones cónicas han sido evidenciadas por investigaciones nacionales e internacionales, como las de Santa y Jaramillo (2014) quienes plantean que algunos estudiantes de los primeros semestres de universidad tienen competencias algorítmicas para el desarrollo de ecuaciones de las cónicas o para hallar sus elementos, pero que no tienen la capacidad de asociar dichos conceptos con los lugares geométricos que representan. Por otro lado, Pérez (2012) ratifica una de las falencias presentadas por Santa y Jaramillo (2014) en la enseñanza de las secciones cónicas en cuanto a que los estudiantes tienen desarrollada una gran capacidad algorítmica en torno al desarrollo de ecuaciones de las cónicas pero que no tienen la competencia de asociar dichos conceptos a la parte geométrica. Pérez (2012) nos afirma que tradicionalmente en las instituciones educativas de Villavicencio la enseñanza de la geometría analítica se realiza únicamente por medio del registro de representación algebraico en donde los estudiantes hacen solamente dos cosas: a partir de los elementos de la cónica hallan la ecuación o a partir de las transformaciones de las ecuaciones canónicas determinan sus elementos característicos. Para la autora esto hace que el aprendizaje sea solamente algorítmico y memorístico dejando de lado la parte geométrica. Por otro lado, Moncayo y Pantoja (2012) afirman que uno de los problemas en la enseñanza de la geometría analítica es el tratamiento excesivo que hay en los libros de texto a nivel nacional en torno al registro de representación algebraico. Aseguran que las posibles causas de dicha problemática se deben a una aparente facilidad en la enseñanza de estos temas manipulando símbolos algebraicos y que dicha enseñanza tradicional se debe a que en los libros de texto que han venido circulando desde mediados del siglo pasado fueron influenciados por el movimiento de la *Matemática Moderna.* Para los autores la principal consecuencia de esta influencia es que la enseñanza de la geometría analítica se enfoca desde el estudio de las ecuaciones de segundo grado y de las funciones.

En el contexto internacional el estudio realizado con estudiantes de tercer grado de una escuela secundaria en Malí, por Almouloud, S. A., Koné, C., & Sangaré, M. S. (2014) se afirma que los alumnos tienen problemas con la comprensión del concepto de lugar geométrico de las secciones cónicas debido a que los docentes se enfocan en la parte analítica dejando de lado la geométrica. De igual forma, en el estudio realizado por Ljajko y Ibro (2013) se muestra que, en la enseñanza de las secciones cónicas en Serbia, no utilizaban en ningún momento la tecnología, es decir, el manejo de estos conceptos se realizaba por medio única y exclusivamente de lápiz, cuaderno y tablero y esto llevó a que se tomara más tiempo de lo necesario abordando el tema y no se lograra una conceptualización satisfactoria.

Otra problemática la evidencia León (2014) quien establece que al enfocar la enseñanza de las secciones cónicas haciendo uso solo del registro algebraico se pierden el desarrollo de algunas habilidades matemáticas. En cuanto a ello el autor nos dice que:

> Existe un marcado interés en enfocar el estudio de las cónicas como un tratamiento excesivamente analítico, donde prevalece el punto de vista algebraico y en la que se han ido marginando las representaciones de los lugares geométricos en el aprendizaje de las cónicas, de esta forma el alumno va perdiendo el desarrollo de habilidades y competencias de las aplicaciones de sus estrategias geométricas de construcción que les fueron enseñadas como conocimientos previos (León, 2014, p. 34)

Para Bonilla y Parraguez (2013) otra problemática que surge de encaminar la enseñanza de las secciones cónicas únicamente a través del registro de representación algebraico es que no se logra una comprensión profunda del concepto matemático, y, cuando se habla de comprensión profunda se hace referencia a que los estudiantes estén en la capacidad de enlazar las variadas definiciones que están asociadas al concepto, es decir, que el estudiante esté en la capacidad de comprender la cónica en los siguientes modos: analítico-aritmético (como pares ordenados que se relacionan con la ecuación de la elipse), analítico-estructural (la elipse como lugar geométrico) y sintético-geométrico (como una sección cónica en el espacio que se representa en el plano). En esta dirección, Pérez (2011) establece que enseñar la geometría analítica focalizándola directamente en las expresiones analíticas y en las cualidades que se desprenden de ellas sin tener en cuenta las propiedades que tienen dichas cónicas como lugares geométricos impide un conjunto de experiencias prácticas las cuales son esenciales y están asociadas a las aplicaciones en contextos de la vida diaria.

Respecto a las problemáticas evidenciadas en investigaciones internacionales y nacionales, surge la necesidad de estudiar el objeto matemático de la elipse, centrados en su enseñanza, y otro factor que lleva a realizar el estudio de la elipse, es el hecho de observar un bajo nivel en el área de matemáticas en los estudiantes de grado 10° del colegio San Viator de Tunja en la parte geométrica, como también del análisis de una prueba diagnóstica que evidencia la falta de comprensión en el tema de las secciones cónicas.

A continuación, se presentan los resultados de la prueba diagnóstica aplicada a los estudiantes de grado 10° del colegio San Viator de Tunja y que tiene como temática central la representación gráfica y algebraica del objeto matemático circunferencia.

Con el propósito de observar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes partícipes de la investigación respecto a temas relacionados con las secciones cónicas, en el caso de la circunferencia, respecto al dominio y uso de las transformaciones y conversiones de dicho objeto matemático en los distintos registros de representación, se elaboró una prueba diagnóstica (Anexo A). En esta prueba se plantearon 3 situaciones con la pretensión de observar si el estudiante dominaba determinados temas, tales como: definir en lenguaje verbal o algebraico un determinado lugar geométrico (circunferencia); la conversión del registro de representación gráfico del objeto matemático circunferencia a un registro algebraico, y finalmente las transformaciones que se hacen dentro del registro algebraico.

En la primera situación se le pidió al estudiante que definiera la circunferencia como lugar geométrico, es decir, como el conjunto de puntos equidistantes de otro punto denominado centro. Es valiosa la idea que tiene el estudiante respecto a este tema ya que esto contribuye en la comprensión de la elipse, en especial en la construcción geométrica de la misma.

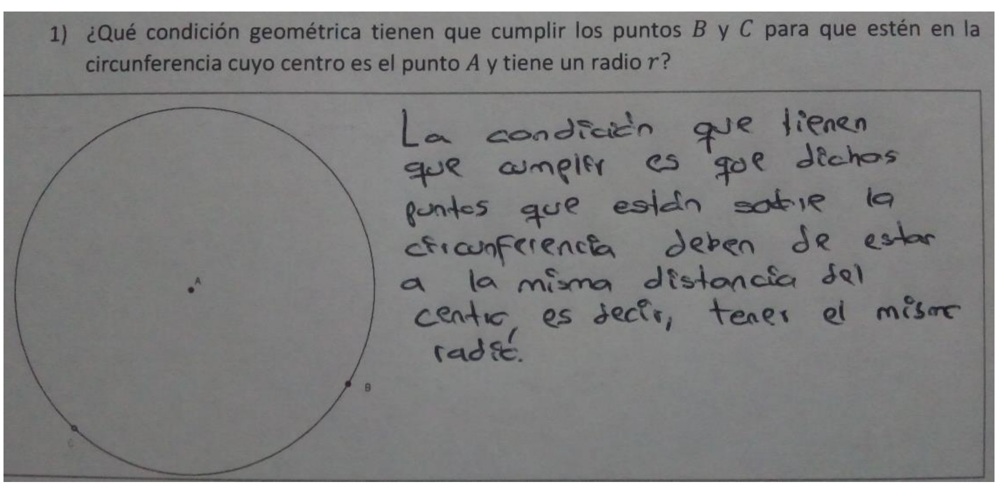
En la segunda pregunta se le muestra al estudiante una circunferencia ubicada en el plano cartesiano con centro ubicado en el punto $P(4,3)$ y radio de 3 unidades. En esta situación se observa si el estudiante relaciona los elementos característicos de la circunferencia (radio y centro) mediante una expresión algebraica.

Finalmente, en la tercera situación se le presenta al estudiante una ecuación de la circunferencia expresada en su forma general y se observa si el alumno está en la capacidad de transformar esa representación en otra (ecuación canónica) con el propósito de encontrar sus elementos característicos (radio y centro).

A continuación, se muestran algunas de las respuestas obtenidas de los estudiantes que participaron en la investigación:

Figura 1.1

Respuesta condición geométrica de la circunferencia


1) ¿Qué condición geométrica tienen que cumplir los puntos B y C para que estén en la circunferencia cuyo centro es el punto A y tiene un radio r?

La condición que tienen que cumplir es que dichos puntos que están sobre la circunferencia deben de estar a la misma distancia del centro, es decir, tener el mismo radio.

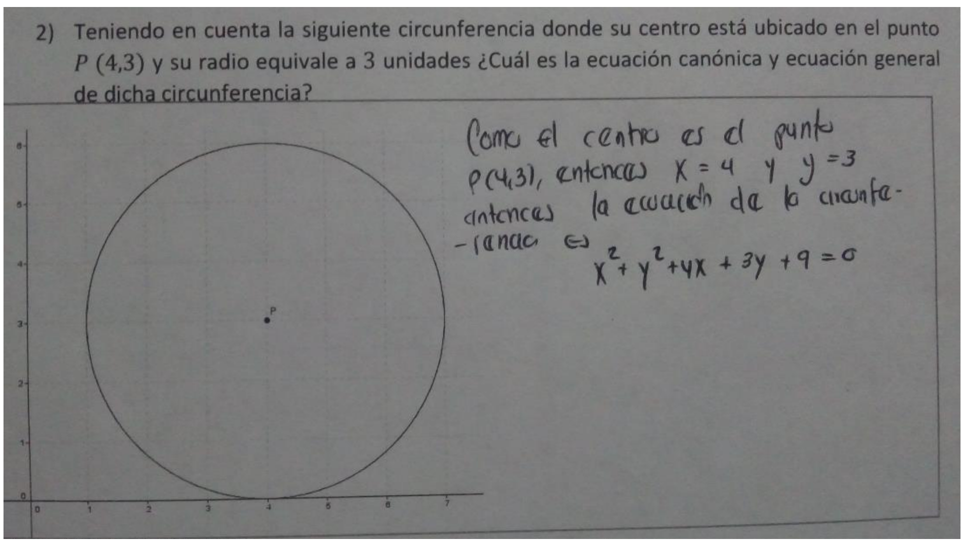
Fuente: Grupo 1

Aunque los estudiantes no delimitaron de manera formal el objeto matemático circunferencia como aquel conjunto de puntos del plano que equidistan de otro denominado centro, tienen una idea bastante clara de cómo definir un lugar geométrico (en este caso para la circunferencia).

Respecto a la segunda situación, la mayoría de los estudiantes que presentaron la prueba coincidieron con la siguiente respuesta:

Figura 1.2

Ecuación canónica y general de la circunferencia



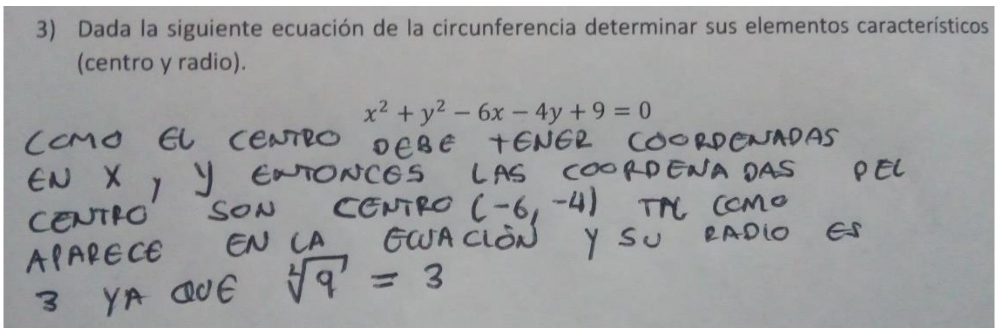
Fuente: Grupo 2

Como se observa en la figura 1.2, el estudiante no tiene claro cómo definir la ecuación canónica de la circunferencia a partir de sus elementos característicos (centro y radio). Tampoco se evidencia que realice alguna transformación en el registro algebraico con el fin de obtener o la ecuación canónica o la ecuación general de la circunferencia dada. Se evidencia un error al asignar el valor del centro en la ecuación, esto puede estar relacionado con el manejo algebraico para el tratamiento del objeto circunferencia.

Finalmente, respecto a la última situación en donde se les solicita a los estudiantes que determinen el centro y radio de una circunferencia expresada en forma de ecuación general, algunas de las respuestas coincidían con la siguiente:

Figura 1.3

Transformación de la ecuación general en canónica


3) Dada la siguiente ecuación de la circunferencia determinar sus elementos característicos (centro y radio).

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$

COMO EL CENTRO DEBE TENER COORDENADAS EN X , Y ENTONCES LAS COORDENADAS DEL CENTRO SON CENTRO (−6, −4) TAL COMO APARECE EN LA ECUACIÓN Y SU RADIO ES 3 YA QUE $\sqrt[2]{9} = 3$

Fuente: Grupo 1

Como se puede observar en la figura 1.3 el estudiante supone que el centro de la circunferencia son los coeficientes que acompañan la parte lineal de la ecuación general de la circunferencia. Se espera que el estudiante realice una transformación en el registro algebraico para llegar a la ecuación canónica de la elipse y ahí pueda determinar los elementos característicos. La anterior situación es debido a un escaso manejo y tratamiento del registro de representación algebraico tal como lo plantea Duval (1999).

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica, así como las problemáticas evidenciadas en contextos nacionales e internacionales, es pertinente realizar un estudio respecto a la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático elipse.

Formulación del problema de investigación

De acuerdo con los argumentos presentados, se evidencia la existencia de una problemática compleja entorno de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas, por tanto, se muestra la importancia de trabajar con el objeto geométrico de la elipse.

A partir de la problemática descrita se formula la pregunta de investigación:

¿Qué estrategia didáctica puede llevar a la comprensión de la elipse, al utilizar como medio de interacción el software Geogebra, en los estudiantes de grado décimo?

Objetivos

Dada la problemática que se evidencia en la enseñanza y en el aprendizaje de las secciones cónicas, específicamente para el objeto elipse, tanto en el contexto nacional como internacional en lo referente al manejo exclusivo de registros algebraicos, donde se deja de lado otros registros como el gráfico, de lengua natural o figural (Moncayo y Pantoja, 2012), y teniendo en cuenta que, Duval (1999), establece que el no coordinar esta variedad de registros hace que no se logre una aprehensión significativa de los conceptos matemáticos, se pretende diseñar situaciones problemas dentro de una secuencia didáctica donde se utilicen los diversos registros de representación semiótica buscando favorecer la comprensión de las secciones cónicas, específicamente de la elipse, con estudiantes de grado décimo: en este aspecto, se proponen los objetivos tanto general como específicos.

Objetivo general

Implementar una estrategia didáctica enfocada en el uso de los diversos registros de representación semiótica con la pretensión de inducir en los estudiantes de grado décimo la comprensión de la elipse, utilizando como medio de interacción el software Geogebra.

Objetivos específicos

Para lograr la consecución del objetivo general se plantearon los siguientes objetivos específicos:

OB1. Realizar los análisis preliminares propuestos en la metodología de la Ingeniería Didáctica para la planeación de la enseñanza de la elipse.

OB1.1. Realizar el estudio histórico para evidenciar la emergencia de las secciones cónicas, específicamente de la elipse en la historia de la Matemática.

OB1.2 Realizar el análisis didáctico y cognitivo para la implementación de la enseñanza de la elipse.

OB2. Diseñar el análisis a priori o diseño de la instrucción, para la enseñanza de la elipse en el marco metodológico de la ingeniería didáctica.

OB3. Realizar el análisis a posteriori según la implementación de la secuencia didáctica, en el marco metodológico de la ingeniería didáctica evidenciando el diseño de situaciones didácticas que favorecen la comprensión de la elipse.

OB4. Evaluar la pertinencia de secuencia didáctica implementada contrastando los análisis a priori y a posteriori para la comprensión de la elipse como lugar geométrico.

Justificación

Debido a que se puede evidenciar el interés a nivel internacional, nacional y local por estudiar las secciones cónicas de una manera excesivamente analítica en donde predomina la parte algebraica y en la que se han ido relegando las representaciones de los lugares geométricos en el estudio de las secciones cónicas, el estudiante no desarrolla algunas habilidades y competencias en la construcción de objetos geométricos que fueron aprendidas con anterioridad (León, 2014). No obstante, el lugar geométrico puede llegar a ser un complemento propicio al tratamiento vigente en la enseñanza de las cónicas (Fernández, 2011), ya que permite el paso de un registro algebraico a uno gráfico y viceversa: en este procedimiento, la coordinación de varios registros de representación, según Duval (1999), favorece la comprensión de los conceptos matemáticos. Igualmente favorece en los estudiantes el uso de construcciones geométricas utilizando conceptos previos tales como: perpendicularidad, paralelismo, mediatriz de un segmento, circunferencia, etc. (León, 2014). También hay que resaltar que los métodos para la enseñanza de las secciones cónicas permiten lograr una mejor comprensión de algunos problemas relacionados con el estudio de la trayectoria de los planetas alrededor del sol, el lanzamiento de proyectiles, entre otros (Pérez, 2012).

Para fortalecer la enseñanza de los objetos geométricos y generar un enlace con la parte algebraica para propiciar una mejora en los aspectos mencionados anteriormente, se considera pertinente utilizar los ambientes de geometría dinámica (AGD) como herramienta para la enseñanza de la geometría (Sandoval, 2009). Por tanto, en esta investigación, se hace uso de las TIC, con el uso del software Geogebra como instrumento para la construcción de las secciones cónicas, específicamente la elipse.

Los ambientes de geometría dinámica, según Costa y Sombra (2019), permiten la construcción de objetos matemáticos por medio de herramientas digitales que posibilitan deformar y arrastrar determinadas figuras geométricas manteniendo invariantes las propiedades geométricas que se obtienen al momento de la construcción. Estos ambientes, han sido materia de investigación en los últimos tiempos en los que se ha evidenciado que generan la capacidad de explorar las relaciones estructurales de objetos geométricos para explicar dichas propiedades en forma escrita o hablada con el fin de lograr una mejor comprensión de los conceptos matemáticos:

> Con lápiz y papel, la representación le da al estudiante muy poca visión sobre el objeto, pues no lo puede manipular. Con este nivel de evidencia casi nulo tiene que establecer el puente entre la representación y la teoría; es decir, convertir esa evidencia en una argumentación geométrica. Ahora bien, cuando se utiliza un programa de geometría dinámica, como en este caso, el estudiante tiene elementos de apoyo en la creación de ese puente. (Sandoval, 2009, p. 25)

De acuerdo con los argumentos señalados por Sandoval (2009) se puede evidenciar la importancia de realizar una investigación en el tema de las secciones cónicas (elipse) desde una óptica diferente a la que tradicionalmente se ha venido trabajando, esto con el propósito que los estudiantes de grado 10° logren, con la mediación del AGD (Geogebra), representar las curvas en diferentes registros de representación semiótica, lo cual contribuye a la comprensión de dichos objetos matemáticos Duval (1999).

En correspondencia con las situaciones problema planteadas anteriormente y con la finalidad de aportar en la elaboración de situaciones de enseñanza, desde la perspectiva de la teoría de los registros de representación semiótica, se busca crear estrategias que favorezcan tanto a docentes como a estudiantes la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático elipse. Esto conlleva a que se estudien de una forma distinta las matemáticas, con el propósito que los estudiantes tengan más interés hacia estas y con ello disminuir los obstáculos que se presentan en el aprendizaje del concepto matemático (Rodríguez, 2019).

Capítulo 2. Marco Teórico

En este capítulo se presenta el soporte teórico que apoya y sustenta la investigación, la cual se fundamenta en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática – EOS el cual integra aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1999) en lo referente a tratamientos y conversiones y la Teoría de las Situaciones Didácticas con su metodología de la ingeniería didáctica la cual propone que el estudiante comprende en interacción con un medio que en este caso corresponde al software Geogebra.

Antecedentes

En este apartado se muestran investigaciones asociadas con estudios en las representaciones de las secciones cónicas (elipse); dificultades y errores en la enseñanza y el aprendizaje de las secciones cónicas (elipse); uso de herramientas tecnológicas para la enseñanza de las secciones cónicas (elipse); la enseñanza de las cónicas (elipse) en la teoría de las situaciones didácticas, la resolución de problemas para la enseñanza de las cónicas (elipse). Como un paso importante en el estudio, se realizó la búsqueda de referentes teóricos a nivel internacional, nacional y finalmente regional, en donde se encuentran investigaciones relacionadas con la teoría de los registros de representación semiótica, las secciones cónicas y la metodología de la ingeniería didáctica para el diseño didáctico de las secuencias a implementar en los procesos de instrucción.

A nivel internacional

Dentro de los autores que han investigado la problemática expuesta, tenemos las contribuciones de León (2014), el cual se enfoca en los procesos de instrumentalización de la elipse a través del uso de Geogebra como agente mediador: este estudio, tiene como población a los estudiantes de arquitectura y administración de proyectos de una universidad de Lima (Perú).

El objetivo que se trazó el investigador era propiciar la instrumentalización de la noción de la elipse cuando los alumnos trabajaban una secuencia de actividades mediadas por el Geogebra. Para la elaboración de la tesis, el autor adoptó como marco teórico el Enfoque Instrumental de Rabardel (1995) y como marco metodológico la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995). Los resultados obtenidos por el investigador muestran que los estudiantes logran identificar: la condición geométrica de la elipse, la relación existente entre sus respectivos parámetros, ubicación de algunos elementos como: vértices, focos, extremos de los ejes, trazado del lado recto y lograron además relacionar la representación algebraica de la elipse con su representación gráfica. El autor señala que al incluir los AGD, que en su caso fue el Geogebra, se les facilitó a los estudiantes la elaboración de las construcciones geométricas, la interacción, exploración y realización satisfactoria de las actividades que tenía propuestas.

Por otro lado, Lara (2016) presenta el estudio de la parábola como lugar geométrico; la investigación la realiza con profesores de Lima (Perú) por medio de una secuencia de actividades mediada por Geogebra y teniendo como base teórica los Registros de Representación Semiótica. En el trabajo la autora plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo los profesores de matemáticas movilizan la noción de parábola como lugar geométrico cuando coordinan diferentes registros de representación semiótica? Para dar respuesta a la pregunta se diseñó una secuencia compuesta por cuatro actividades enfocadas al concepto de parábola como lugar geométrico usando el software Geogebra en donde hacen uso especial de las herramientas: animación, lugar geométrico, rastro y la función arrastre; esto con el propósito de elaborar la representación gráfica de la cónica de forma dinámica y así generar que los estudiantes (profesores) lograran relacionar los elementos y propiedades de la parábola. Las actividades se aplicaron en dos etapas: en la primera se fundamentó en las propiedades geométricas de la parábola y en la segunda las actividades se relacionaron con el manejo de la geometría analítica por medio del software Geogebra.

En cuanto a los resultados de la investigación, estos muestran que las actividades implementadas propiciaron que los docentes coordinaran los registros: gráfico, algebraico y de lengua natural en la construcción de la parábola, por medio de tratamientos y conversiones, generando la comprensión de la cónica a través del uso de elementos geométricos relacionados con las propiedades de la parábola. En la investigación se observó que las herramientas que proporciona el software Geogebra posibilitaron la comprensión de la parábola como lugar geométrico cuando los profesores al desarrollar las actividades conseguían hacer conjeturas de las propiedades y características de la cónica en cuestión.

Bajo la misma perspectiva, Tocto (2015) en su estudio establece como objetivo: analizar como el tránsito por distintos registros de representación semiótica favorece la comprensión de la noción de función cuadrática en estudiantes de quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Tito Cusi Yupanqui en la región de Cajamarca (Perú). La investigación presenta como sustento teórico la teoría de registros de representación semiótica de Duval y como metodología se tomaron algunos aspectos de la ingeniería didáctica de Artigue (1995). En la parte experimental se elaboraron dos secuencias de actividades con la finalidad de movilizar a los alumnos a través de los múltiples registros de representación semiótica movilizando la noción de función cuadrática. En el trabajo el autor constata que los tratamientos en el registro de lengua natural son primordiales para que los alumnos logren hacer la conversión a otros registros como el tabular, algebraico y gráfico, ya que posibilitan que los estudiantes comprendan el problema. También concluye que es importante que los alumnos tengan muy claro el manejo del registro algebraico ya que esto es relevante para el proceso de tratamiento y conversión al registro de representación gráfica.

A nivel nacional

En el contexto colombiano se puede citar primeramente a Santa (2011), quien afirma que tanto en la universidad como en el colegio la enseñanza de las secciones cónicas (elipse) aún se continúa limitando a que los estudiantes bosquejen las elipses teniendo en cuenta sus ecuaciones generales y canónicas dejando de lado la conceptualización de lugar geométrico y la aplicación a esta conceptualización de conceptos geométricos tales como mediatriz y circunferencia. Teniendo en cuenta dicha problemática la investigadora en su tesis plantea el objetivo de analizar la comprensión de la elipse como lugar geométrico en el contexto del modelo teórico de Van Hiele por medio de la geometría del doblado de papel. Para el desarrollo de su investigación la autora se apoya en los axiomas de doblado de papel de Huzita (1989) y Hatori (2003) y realiza construcciones que van desde mediatrices hasta las elipses. Dentro de las actividades realizadas con esta metodología la investigadora distingue determinados niveles de razonamiento; por ejemplo, en el nivel descriptivo estima que el estudiante reconoce algunas ideas básicas de punto, recta, perpendicularidad y tiene inconvenientes para la construcción de una mediatriz. En el nivel de reconocimiento visual es capaz de construir una mediatriz, una circunferencia y una elipse, pero tiene problemas para reconocer las propiedades que caracterizan dichos objetos. En el segundo nivel (de análisis), el estudiante tiene la capacidad de reconocer la mediatriz y la circunferencia como lugares geométricos y con ello logra identificar los elementos de una elipse.

Para el nivel de clasificación, el alumno es capaz de precisar qué condición deben de cumplir un conjunto de puntos para pertenecer a una elipse y logra definir la elipse como lugar geométrico.

De acuerdo con el trabajo que se desarrolló en la tesis, algunas de las conclusiones que destaca la investigadora es que los estudiantes no pueden pasar al siguiente nivel si estos no han entendido y superado sus conocimientos previos en relación al concepto de elipse como lugar geométrico. Otro aporte importante que nos señala la autora es que los estudiantes pueden lograr la comprensión de la elipse como lugar geométrico gracias a un mecanismo visual-geométrico que dan las construcciones hechas con el doblado de papel.

Por otro lado, la tesis presentada por Moncayo y Pantoja (2012) se enfoca en una propuesta didáctica que aproxima a los estudiantes del colegio Gimnasio Bet-El de la ciudad de Pasto (Nariño) a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico por medio del AGD Carbi II Plus. Los investigadores se trazaron como objetivo el proponer una estrategia didáctica para la enseñanza del concepto geométrico de parábola integrando herramientas computacionales, en particular, el ambiente de geometría dinámica Cabri Geometre II Plus. El trabajo se desarrolló teniendo como marco metodológico la ingeniería didáctica de Artigué (1995), donde el desarrollo del trabajo por medio de esta metodología y con la mediación de Cabri II permitió demostrar que el aprendizaje en matemáticas mejora notablemente. Tal avance se evidenció por medio de las siguientes cuatro actividades: construcción geométrica de la parábola a través de los conceptos de mediatriz y de distancia de un punto a la recta, construcción de una parábola como una configuración geométrica analizando posteriormente las partes que la componen, construcción geométrica de la parábola con base en la propiedad de la circunferencia y por último construcción de una parábola como lugar geométrico en Cabri II.

La puesta en marcha de las cuatro situaciones permitió la interacción del estudiante con conceptos de geometría y las relaciones que hay entre ellos haciendo uso de los ambientes de geometría dinámica, permitiéndole el cambio del nivel de percepción visual a un nivel teórico.

Refiriéndose al uso de software matemático para el desarrollo de las actividades, los investigadores afirman que aquello produjo un alto grado de motivación entre los alumnos y generó un clima de participación activa, y con ello, se estimularon procesos cognitivos tales como: la exploración, observación, realización de conjeturas y comprobación de propiedades como perpendicularidad, equidistancia, la propiedad foco-directriz, entre otras, las cuales permitieron que el estudiante llegará a la conceptualización de parábola como lugar geométrico.

Siguiendo la misma perspectiva, la tesis realizada por Beltrán (2016) nace de observar un nivel bajo en el rendimiento académico en los estudiantes de grado décimo del colegio Alejandro Obregón en las pruebas internas y externas en el área de matemáticas, en especial en situaciones problema relacionados con la parábola. La investigación tiene como objetivo describir cómo una intervención pedagógica basada en la teoría de los registros de representación semiótica ayuda a mejorar la comprensión del objeto matemático parábola en los estudiantes de grado décimo. El trabajo se fundamenta en el enfoque metodológico cualitativo el cual, entre otras cosas, permite recolectar datos a partir de la observación de las clases para registrar y describir la formación de los registros de representación semiótica. Algunas de las conclusiones que resalta el investigador son que al observar en su trabajo que los estudiantes realizaron de manera apropiada los tratamientos al interior de cada registro y conversiones entre los diferentes registros, pueden concluir que es necesario para el estudio de cualquier objeto matemático que tanto los estudiantes como los maestros conozcan y usen los registros de representación semiótica, y realicen el proceso de tratamiento al interior de cada registro y la conversión entre registros. También señala que algunas dificultades que se presentan en la enseñanza tanto de la parábola y otros objetos matemáticos están relacionadas con los conocimientos previos de los estudiantes, al igual que en la forma en que se enseñan y aprenden dichos conceptos; es por esta razón que nos advierte que al comenzar la enseñanza de un nuevo concepto se debe desarrollar un diagnóstico acerca de los conocimientos previos de los alumnos con el fin de elaborar la vía más apropiada para ellos.

Así mismo, la tesis elaborada por Giraldo (2017) se propone evidenciar a través de talleres mediados por Geogebra, que los estudiantes llegan a tener una mejor visualización de las propiedades geométricas de las cónicas y en consecuencia desarrollan una mejor perspectiva del objeto matemático. El presente trabajo tiene como propósito fundamental introducir el software interactivo Geogebra como herramienta para el desarrollo del pensamiento espacial de los estudiantes de noveno grado en el proceso de enseñanza-aprendizaje a partir del estudio de la construcción de las secciones cónicas. Las secuencias que se desarrollaron están apoyadas en el diseño y aplicación de talleres utilizando Geogebra y teniendo como sustento teórico el modelo de Van Hiele. Las actividades constan de cinco fases: información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración. En la primera fase se aplicó una prueba diagnóstica sobre secciones cónicas con el fin de reconocer los conocimientos previos con que cuentan los estudiantes. En la segunda fase, se construyen las cónicas utilizando Geogebra en donde se observa que mientras construyen cada una de las cónicas se dan cuenta del porqué de las definiciones teóricas. En la fase de explicitación, los estudiantes comprenden la definición de cada una de las cónicas, además, están en capacidad de expresar en forma oral y escrita los elementos que conforman las figuras geométricas. En la fase cuatro, se buscaba que los estudiantes reconocieran e identificaran los elementos y ecuaciones de las cónicas, además que fueran capaces de construirlas y que relacionaran la ecuación con la curva respectiva. En la fase final el alumno revisa y unifica los elementos y las ecuaciones canónicas lo cual genera un nuevo sistema de conocimiento. En cuanto a los resultados se observó que los estudiantes pasaron del nivel cero de visualización al nivel 1 de análisis ya que se demostró que a través de las actividades propuestas descubrieron y generalizaron las propiedades de los lugares geométricos de las cónicas. En cuanto a la implementación del software Geogebra se observó que este permitió que los estudiantes comprendieran de una forma clara, fácil y breve, en contraste con las clases tradicionales, la conceptualización de las secciones cónicas.

A nivel local

Sánchez (2019) en su tesis presenta el estudio de la comprensión del objeto matemático parábola a través de las representaciones semióticas teniendo en cuenta los obstáculos que presentan los estudiantes de grado décimo del Colegio la Presentación de la ciudad de Tunja. El objetivo que se trazó el investigador era establecer niveles de comprensión de la sección cónica parábola por medio del análisis de representaciones semióticas, tratamientos y conversiones. Para la consecución de los objetivos propuestos el autor planteó estrategias de enseñanza enfocadas en los registros de representación gráfico, algebraico y verbal, sus conversiones, tratamientos y transformaciones fomentando el reconocimiento, interiorización e interpretación del objeto matemático parábola. El enfoque de la investigación fue cualitativo con la finalidad de interpretar y describir la comprensión de los estudiantes acerca de este objeto matemático. La metodología utilizada en la investigación fue la investigación-acción. Los resultados obtenidos por el autor muestran que los estudiantes para poder comprender el concepto de parábola requieren de: 1) que reconozcan los diferentes tipos de representaciones semióticas que tiene la parábola; 2) realicen tratamientos al interior de cada registro del objeto matemático; 3) se realicen actividades de conversión por medio de los registros de representación semiótica de la cónica y 4) que integren los diferentes sistemas de representación semiótica en la conversión con el fin de dar soluciones a situaciones problemáticas del objeto de estudio.

Referentes Teóricos

Teoría de los Registros de Representación Semiótica

La investigación se fundamenta en la teoría de los registros de representación semiótica desarrollada por Duval (1999). Según esta teoría ciertas actividades cognitivas asociadas al aprendizaje tales como el razonamiento, la conceptualización, resolución de problemas y la modelación matemática, entre otros, necesita de los sistemas de representación.

Según Duval (1999) no es factible estudiar los aspectos referentes al conocimiento sin hacer uso de la noción de representación ya que no existe conocimiento que una persona pueda movilizar sin recurrir a la representación. A partir de esta concepción se fundamenta el presente trabajo en la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1999), donde se sustenta que ciertas actividades cognitivas asociadas al aprendizaje tales como el razonamiento, la conceptualización, resolución de problemas y la modelación matemática, entre otros, necesita de los sistemas de representación.

Representaciones semióticas

Según Duval (1999) los objetos matemáticos al ser objetos ideales no son perceptibles por los sentidos, es por esto que se hace necesario representarlos mediante lo que él denomina representaciones semióticas. Estas representaciones pueden ser gráficas, numéricas, figuras, dibujos, tablas, etc. Las representaciones semióticas cumplen una función importante para expresar sus ideas:

> Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica…) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus

representaciones mentales; es decir, para hacerlas visibles o accesibles a otros (Duval, 1999, p. 14).

Así como no es posible estudiar aspectos relativos al conocimiento sin hacer uso de la representación, en matemáticas no puede haber comprensión si no se distingue un objeto de su representación. Duval (1999) enfatiza que es fundamental no confundir los objetos matemáticos (números, funciones, límites, derivadas, etc.) con sus respectivas representaciones, es decir, las escrituras decimales o fraccionarias, las gráficas, los símbolos, etc., ya que un mismo objeto matemático puede ser representado de diversas maneras. El hecho que haya confusión entre un objeto y su representación genera un detrimento en la comprensión, esto es, que los conocimientos que se adquirieron dentro de poco tiempo se hacen inutilizables ya sea o porque no se recuerdan o permanecen como representaciones inertes (Duval, 1999)

Por otro lado, Según Duval (1999) los sistemas semióticos como el lenguaje natural, algebraico, gráfico y figural se denominan *registros de representación semiótica* siempre y cuando estos satisfagan las tres actividades cognitivas relativas a toda representación. La primera de ellas es construir un conjunto de símbolos los cuales se puedan identificar que son la representación de algún objeto en un sistema determinado. Las otras dos actividades, según afirma Duval (1999), están directamente relacionadas con la propiedad elemental de las representaciones semióticas: su transformabilidad en otro tipo de representaciones que conservan todo el contenido de la representación original o solamente una parte de ese contenido. Para la segunda actividad se habla de tratamiento y consiste en transformar las representaciones utilizando las propiedades que tenga el sistema con el fin de obtener nuevas representaciones y que ello conlleve a una mayor adquisición de conocimiento en comparación con las representaciones originales, es decir, es una transformación que se lleva a cabo al interior de un mismo registro (un tratamiento no moviliza solamente un registro de representación) Duval (1999). La tercera llamada conversión, tiene como fin convertir las representaciones que tenga un determinado sistema a representaciones en otro sistema, en otras palabras, es cuando la transformación produce una representación en un registro diferente al de la representación inicial. Es claro que no todos los sistemas semióticos admiten esas tres actividades cognitivas elementales, como, por ejemplo, el lenguaje en código morse; pero existen otro tipo de lenguajes como el natural, las lenguas simbólicas, geométricas o gráficas que sí lo permiten. Duval (1999) afirma refiriéndose a concepto de representación que:

> Una representación puede funcionar verdaderamente como representación, es decir, permitirles el acceso al objeto representado, solo cuando se cumplen dos condiciones: que dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una situación, de un proceso…y que "espontáneamente" puedan convertir de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo (p. 30)

Es decir, cuando no se cumplen estas dos condiciones entonces la representación y el objeto que se representa se confunden y por lo tanto no se pueden reconocer dos representaciones distintas de un mismo objeto.

En relación con el aprendizaje, Duval (1999) nos dice que existen tres fenómenos estrechamente unidos que hacen referencia a la cognición en cuanto al razonamiento, la comprensión de textos y aprendizaje de lógica y matemáticas. El primero es la gran variabilidad de los registros de representación semiótica; el segundo es el de la diferenciación entre representante y representado y el tercer fenómeno es el de la coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica. Para Duval (1999) es fundamental que cuando se realice un estudio acerca de los aprendizajes intelectuales, se deba tener en cuenta estos tres fenómenos referentes a la semiosis, en especial la operación de conversión. Haciendo énfasis en este proceso de conversión y los registros de representación, Duval (1999) afirma que cuando el aprendizaje de los conceptos está enlazado a las representaciones hechas en un solo registro (algebraico, gráfico, figuras geométricas, tablas o lengua natural), este aprendizaje queda restringido a ese único registro, es decir que los aprendizajes quedan mono-registro. Según Duval (1999) hay que tener muy claro que, si han sido movilizados varios registros, simultanea o sucesivamente, esto no origina su coordinación. Este hecho no significa que no se desarrolle alguna forma de comprensión en los estudiantes, aunque esta comprensión mono-registro exhibe un obstáculo: cuando los estudiantes no se encuentran en el contexto en el cual se desarrolló el aprendizaje entonces no logran movilizar los conocimientos aprendidos. Una aprehensión basada en los mono-registros es una aprehensión que no posibilita ninguna comprensión significativa. En palabras de Duval (1999):

> Solo una comprensión integrativa, es decir, una comprensión fundada en la coordinación de los registros, da tales posibilidades de transferencia. Entonces, se revela como necesario un aprendizaje específicamente centrado en la conversión de las representaciones y efectuado por fuera de toda tarea de tratamiento para pasar a una enseñanza que obre sobre un nuevo dominio o sobre una nueva red conceptual (p. 72)

Esto significa, que la coordinación entre registros es fundamental para la comprensión de la conceptualización. Por otro lado, para lograr en el estudiante un correcto proceso de conversión, este debe tener en cuenta tres criterios de congruencia que este proceso demanda. Duval (1999) lo especifica de la siguiente forma:

> El primero es la posibilidad de una correspondencia “semántica” de los elementos significantes: a cada unidad significante simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significante elemental (…) El segundo criterio es la univocidad

"semántica" terminal: a cada unidad significante elemental de la representación de salida, no le corresponde más que una única unidad significante elemental en el registro de la representación de llegada (…) El tercer criterio es relativo a la organización de las unidades significantes. Las organizaciones respectivas de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas, conduce a que las unidades en correspondencia semántica sean aprehendidas en el mismo orden en las dos representaciones (p. 50)

Lo señalado anteriormente es de suma importancia ya que da a conocer los criterios que se deben de tener en cuenta para el análisis de la información facilitada por quienes participan en la investigación. En lo que se refiere al "tratamiento" no hay criterios de congruencia como tal, pero, según Duval (2006), hay que tener en cuenta conceptos importantes que intervienen en el proceso de conversión tales como: el cálculo, la paráfrasis y la anamorfosis. El primero hace alusión al tratamiento interno de la escritura simbólica en donde se crea una nueva representación haciendo uso de operaciones algebraicas o aritméticas; en la paráfrasis, esta ocurre cuando se hace una modificación dentro del registro de lengua natural y el tercero hace referencia cuando existe una transformación interna de la representación dentro del registro gráfico, geométrico o figural.

En el estudio de la geometría analítica se emplean varios registros de representación semiótica, entre los que se destacan registros como: el gráfico, algebraico y de lengua natural. A continuación, se van a describir los registros a tener en cuenta en el desarrollo de la investigación (Olivares, 2018).

Registro en lenguaje gráfico: en este registro se presentan formas, figuras geométricas, gráficos y se utiliza el plano cartesiano con el propósito de visibilizar los conceptos que se expresan en lenguaje natural o formal. Se define como una expansión lexical que "se basa en el principio de una recuperación plurívoca de lo que aparece como una misma unidad lexical, sea bajo un modo fonético-acústico o uno gráfico-visual” (Duval, 1999, p. 111)

Registro en lenguaje natural: es aquel registro donde se emplea la lengua o lenguaje natural haciendo uso de la sintaxis y gramática propias de cada idioma. Esta “expansión natural se caracteriza por el empleo común de la lengua. Moviliza simultáneamente la red semántica de una lengua natural y los conocimientos pragmáticos propios al medio sociocultural de los locutores” (Duval, 1999, p. 113)

Registro en lenguaje algebraico: este tipo de registros utilizan sistemas de escritura formal y simbólica empleando las reglas de las que se vale el álgebra tales como: factorización de expresiones algebraicas, reducción de términos semejantes, productos notables, operaciones básicas con expresiones algebraicas (suma, resta, multiplicación, radicación, potenciación). En este registro “la expansión formal se caracteriza por la aplicación de reglas de sustitución que se basan exclusivamente en símbolos que representan variables o proposiciones, independientemente de su significación” (Duval, 1999, p. 112)

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática

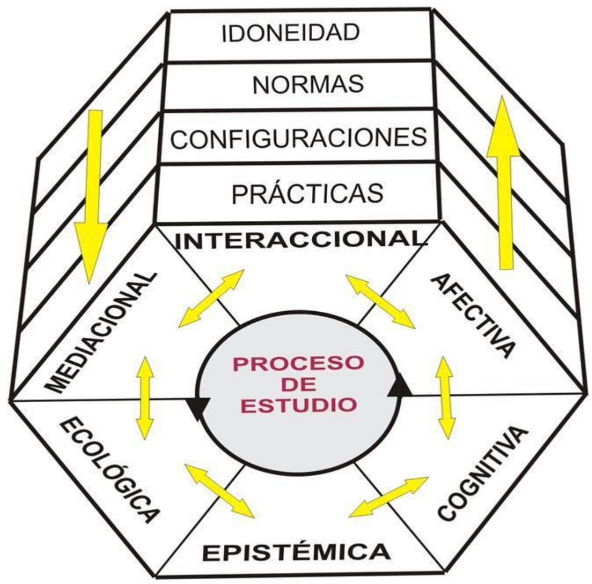
El enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), en la Didáctica de la Matemática tuvo sus inicios en la Universidad de Granada a comienzos de los años noventa como un producto de la interrelación de investigadores de dicha Universidad con la teoría desarrollada en Didáctica de la Matemática. (Godino, 2012).

Este enfoque se precisa como un sistema teórico inclusivo y abierto de teorías en Educación Matemática, el cual se desarrolló desde un punto de vista ontosemiótico y antropológico asignándole un papel importante al lenguaje y a las formas como nacen los objetos matemáticos en determinados contextos socioculturales. El enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), emerge de la articulación de múltiples teorías entre las cuales se encuentran: la Teoría de los campos conceptuales (TCC) (Vergnaud, 1990), Teoría de los registros de representación semiótica (TRRS) (Duval, 1995), Teoría de las situaciones didácticas (TSD) (Brousseau, 1986; 1998), Teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 1992; 1999), entre otras, cuyo objetivo es ser instrumentos que permitan definir los problemas de investigación y definir una estrategia metodológica para determinar los fenómenos didácticos, posibilitando el análisis de variadas dimensiones comprometidas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino, 2017).

Para Godino (2013) el problema de dar significado al conocimiento matemático es complicado y en consecuencia el enfoque ontosemiótico lo aborda desde el análisis de diferentes tipos de dimensiones las cuales son analizadas en las fases de diseño, implementación y evaluación en los procesos de enseñanza y aprendizaje en matemáticas. Las dimensiones propuestas por el EOS son: interaccional, afectiva, cognitiva, epistémica, ecológica y mediacional. En la figura 2.1 se muestran las dimensiones y niveles de análisis planteados por el EOS:

Figura 2.1

Facetas y niveles de análisis didáctico



Fuente: Godino (2013, p.5)

Según Godino (2012), los niveles de análisis didáctico que componen el EOS se organizan en cinco grupos en donde cada uno de ellos proporciona un nivel de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos:

Sistema de prácticas. La resolución de problemas se toma como elemento fundamental para la construcción del conocimiento matemático. Se posiciona en una concepción pragmatista - antropológica de las matemáticas tanto de forma institucional como personal. (Godino, 2012).

Configuración de objetos y procesos. Asume una noción interaccionista de objeto y pragmatista de significado enlazando de forma razonable la concepción antropológica con posiciones realistas de las matemáticas. Variados medios de expresión desempeñan los papeles de instrumentos del trabajo matemático y de representación de los restantes objetos matemáticos. (Godino, 2012).

Configuración didáctica. Es el instrumento fundamental para el análisis de la instrucción matemática ya que toman en consideración las facetas epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica que determinan los procesos de estudio matemático (Godino, 2012).

Dimensión normativa. Esta dimensión es un sistema de normas y de reglas que limitan y sostienen las prácticas matemáticas, además pluralizan la noción de contrato didáctico y normas socio-matemáticas (Godino, 2012).

Idoneidad didáctica. Actúa como criterio general de pertinencia de las acciones de los mediadores educativos, de los conocimientos a trabajar y de los medios o recursos utilizados en el estudio de las matemáticas (Godino, 2012).

Teniendo en cuenta las facetas interaccional, afectiva, cognitiva, epistémica, ecológica y mediacional, en la siguiente tabla se detallan cada una de ellas.

Tabla 2.1

Dimensiones abordadas por el Enfoque Ontosemiótico

FACETA	DESCRIBE
Epistémica	Es la variedad de significados que pueden llegar a obtener los objetos matemáticos dependiendo de las múltiples situaciones o contextos de uso.
Cognitiva	Se refiere al conocimiento del cómo los estudiantes razonan, aprenden, entienden y progresan en las matemáticas.
Afectiva	Son los aspectos afectivos (actitudinales, emocionales) que tienen los estudiantes en relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
Interaccional	Son las interacciones que se pueden presentar en el aula de clases entre estudiantes y profesores: se gestionan las tareas y se resuelven las dificultades que presentan los estudiantes.
Mediacional	Es el conocimiento enfocado al uso de recursos tecnológicos o materiales que sirven para mejorar el aprendizaje de los estudiantes.
Ecológica	Es la correspondencia del conocimiento matemático con el entorno social, político, económico, entre otros, que condicionan el proceso de aprendizaje.

Fuente (Godino, 2017, p.4)

Teoría de las Situaciones Didácticas

La teoría de las situaciones didácticas se estudia con base en lo planteado por Guy Brousseau. En primer lugar, se indica cómo ocurre el aprendizaje (Brousseau, 2007), posteriormente se hace la descripción de conceptos tales como: situación didáctica, situación a-didáctica, contrato didáctico, efectos o fenómenos didácticos y para finalizar tipos de situaciones didácticas.

Después de la segunda mitad del siglo XX Brousseau (2007), plantea la Teoría de las Situaciones didácticas. Dicha teoría, según Figueroa (2013), afirma que la enseñanza es un proceso que se enfoca en la obtención de conocimientos matemáticos y que además posibilita diseñar secuencias de clase (elaboradas por el docente) con el propósito de preparar un medio para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de un determinado conocimiento. Según Brousseau (2007):

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por medio de nuevas respuestas, que son la marca del aprendizaje. (p.30)

En este orden de ideas, el aprendizaje por adaptación según señala Brousseau (2007) nace de la interrelación del estudiante con un determinado medio sin que en ese proceso medie intervención alguna por parte del profesor, conllevando que el estudiante genere su propio conocimiento.

Algunos conceptos básicos relacionados con la Teoría de las Situaciones Didácticas son los siguientes:

Medio

Corresponde a los recursos que el estudiante puede utilizar con el propósito de generar un nuevo aprendizaje, entre los cuales están: materiales (guías, talleres, libros entre otros), el espacio, el docente y los demás compañeros de estudio (Figueroa, 2013).

Situación Didáctica

Según Figueroa (2013), es un proceso en el cual participan únicamente el alumno y el medio en el cual el docente le propone una situación problema contextualizada al estudiante y este está en la capacidad de poner en juego sus conocimientos previos (sin la intervención del profesor) para dar solución al problema planteado y generar el conocimiento (Figueroa, 2013). Complementando lo anterior, Brousseau (2007) señala que:

> Concepciones actuales de la enseñanza van a exigir al maestro que provoque en el alumno, por medio de los problemas, las adaptaciones deseadas. Esos problemas deben lograr que el alumno pueda aceptarlos, y que por su propio movimiento, que actué, hable, reflexione y evolucione. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que él produce su respuesta, el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer (Brousseau, 2007, p. 31)

Situación a-didáctica

Según Silva (2017), en un proceso en el cual al estudiante se le plantea una situación problema diferente al que trabajó en la situación didáctica, en el cual tiene que hacer frente y solucionarlo sin la ayuda del profesor. En esta parte el estudiante debe afrontar el problema ayudándose con sus propios conocimientos y motivándose por el problema en sí y no por complacer al profesor. Al respecto Chavarría (2006) nos dice que:

> La Situación A- didáctica es el proceso en el que el docente le plantea al estudiante un problema que asemeje situaciones de la vida real que podrá abordar a través de sus conocimientos previos, y que le permitirán generar además, hipótesis y conjeturas que asemejan el trabajo que se realiza en una comunidad científica. En otras palabras, el estudiante se verá en una micro-comunidad científica resolviendo situaciones sin la intervención directa del docente, con el propósito posteriormente de institucionalizar el saber adquirido (p.2)

Contrato Didáctico

Según Figueroa (2013) es un sistema de obligaciones mutuas entre estudiante y docente en cuanto al conocimiento matemático que se pretende aprender. Son una serie de pautas que el docente espera del estudiante y viceversa. Silva (2017) complementa el concepto al afirmar que:

> Es lo que espera el alumno del profesor y viceversa (las expectativas que se tienen). Es la relación entre el alumno y el profesor a la hora de enseñar un saber concreto que se da en una situación-problema de dos maneras, una de control en la cual se solicita la aplicación del propio saber y otra de aprendizaje en la que se plantea un problema al alumno y este debe manejar una estrategia de base, ya disponible en el alumno, para poder resolver el problema (p.48)

Tipos de Situaciones Didácticas

La teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (2007), propone una categorización de las situaciones didácticas. Dichas situaciones deberían converger en una situación a-didáctica (Chavarría, 2006). Algunas de las situaciones didácticas son:

Situación de Acción

Según Figueroa (2013), se basa en que el alumno trabaje de forma individual en un problema aplicando los conocimientos previos que este posea y finalmente logre un determinado saber. Algunos de los requisitos que una situación acción debe poseer para converger en una situación a-didáctica son que, primero: el problema tiene que ser de interés para el alumno y que el tipo de pregunta que se plantee no tenga una respuesta rápida de tal manera que sea un verdadero reto para el estudiante. Si bien el proceso que se lleva a cabo debe efectuarse sin intervención alguna por parte del docente, ello no significa que el docente se aparte del proceso ya que es él quien elabora el medio didáctico y propone los problemas (Chavarría, 2006).

Situación de Formulación

Para Silva (2017), esta situación se fundamenta en el trabajo grupal, en el cual es necesario que los estudiantes se comuniquen y compartan experiencias para la elaboración del conocimiento. Además, es muy importante la participación de todos los estudiantes que están inmersos en el proceso para que hablen y propongan sus ideas y además interaccionen con el medio diseñado por el docente. Chavarría (2006) nos aclara más el concepto afirmando que:

> La situación formulación es básicamente enfrentar a un grupo de estudiantes con un problema dado. En ese sentido hay un elemento que menciona Brousseau (2007), esto es, la necesidad de que cada integrante del grupo participe del proceso, es decir, que todos se vean forzados a comunicar las ideas e interactuar con el medio didáctico (p. 5)

Situación de Validación

Chavarría (2006) nos dice que en esta situación es cuando los estudiantes después de haber interactuado individual y grupalmente con el medio, validan el trabajo realizado y se argumenta con el docente acerca del trabajo elaborado para asegurarse que está bien hecho. Además “el alumno no sólo tiene que comunicar una información, sino que también tiene que afirmar que lo que dice es verdadero en un sistema determinado, sostener su opinión o presentar una demostración” (Brousseau, 2007, p. 23).

Institucionalización

Figueroa (2013) nos dice que en esta situación se formaliza el conocimiento elaborado por los estudiantes. En dicha fase es necesario que los integrantes del proceso saquen conclusiones, sistematicen y vinculen lo trabajado. Chavarría (2006) complementa lo anterior afirmando que:

> En esta los estudiantes ya han construido su conocimiento y, simplemente, el docente en este punto retoma lo efectuado hasta el momento y lo formaliza, aporta observaciones y clarifica conceptos ante los cuales en la situación a-didáctica se tuvo problemas. Es presentar los resultados, presentar todo en orden, y todo lo que estuvo detrás de la construcción de ese conocimiento (p. 5)

Efectos o Fenómenos Didácticos

Brousseau (2007), establece determinados efectos que pueden refrenar o detener la producción del conocimiento matemático. Primordialmente son conductas que ocasionan efectos nocivos en el proceso de construcción del conocimiento (Silva, 2017).

Efecto Topaze

Brousseau (2007), lo define como aquella situación cuando sin usar sus propios medios el estudiante soluciona determinado problema. En dicha circunstancia es el docente quien se encarga de darle solución al problema planteado ya que observa las dificultades que tienen los estudiantes para llegar a la solución. Esta situación impide que los estudiantes construyan conocimiento por si mismos (Chavarría, 2006).

Efecto Jourdain

Chavarría (2006) lo define como:

> Consiste en la actitud que toma el profesor cuando un estudiante da una respuesta que es incorrecta, no obstante, para no desilusionarlo le dice que “está bien”, que es la respuesta correcta. Entonces, un comportamiento banal del alumno es asumido como un conocimiento válido (p. 3).

Uso Abusivo de la Analogía

Esta situación ocurre cuando el docente al observar que no se ha logrado un correcto aprendizaje, introduce analogías para darles más oportunidades para solucionar los problemas planteados (Silva, 2017).

Visualización y Ambientes de Geometría Dinámica

El estudio de la geometría en los últimos años ha venido ganando terreno en la enseñanza tanto a nivel escolar como universitario. Este fenómeno ocurre, según Sandoval (2009), en gran medida debido al empuje recibido desde la geometría dinámica, la cual ha mostrado el carácter estructural de los gráficos que se presentan en la pantalla de las computadoras. Debido a este impulso generado por la geometría dinámica, hoy en día se retoman problemas que han sido recurrentes en la enseñanza de la geometría, como, la confusión que hay entre los objetos geométricos y los gráficos que los representan. Respecto a esos problemas que se retoman se destaca el papel importante que juegan las representaciones geométricas en la solución de los mismos:

> En toda actividad geométrica es indiscutible el papel que han tenido y siguen teniendo las representaciones geométricas como apoyo a la intuición, ya que son fundamentales en la comprensión de enunciados, en los procesos de exploración y conjetura, en la resolución

> de problemas y en la búsqueda de demostraciones, pues dejan “ver” lo que oculta el enunciado. (Sandoval, 2009, p. 7)

Un obstáculo conocido por los docentes de geometría, según Sandoval (2009), es el relacionado con el aprendizaje de las propiedades geométricas, es decir, aquella capacidad de descubrir vínculos estructurales entre los objetos geométricos y después manifestar dichas propiedades de forma escrita u oral y finalmente hacerlas corresponder en una determinada teoría matemática. Una causa probable para esta clase de obstáculos es el tipo de representación estática que se trabaja en la enseñanza de la geometría. Por ejemplo, Sandoval (2009) establece que con papel y lápiz la representación que el estudiante elabore genera una escasa visión sobre el objeto matemático ya que no lo puede manipular y en consecuencia tiene dificultades para establecer un puente o conexión entre la representación y la teoría, pero, cuando el estudiante emplea un programa de geometría dinámica logra conseguir elementos de ayuda en la creación de dicho puente. Se ve entonces que, el razonamiento que se genera utilizando los ambientes de geometría dinámica respecto al razonamiento producido por los ambientes de papel y lápiz cambia un poco:

> La argumentación generada en estas condiciones cambia con respecto a la argumentación propia de los ambientes de lápiz y papel. En un inicio, los argumentos pueden estar ligados únicamente a la apariencia, pero, gracias a la exploración que realiza el alumno, parece posible establecer un *puente* entre la evidencia geométrica de Cabri y una argumentación geométrica, donde los argumentos tengan un nivel superior de conceptualización y formalización. (Sandoval, 2009, p. 25)

Por otro lado, Planchart (2009) señala que la diferencia entre el trabajo hecho con regla, lápiz y papel con el que se enseñan las clases de geometría y la velocidad y precisión visual con que trabajan las calculadoras, computadores y otros dispositivos electrónicos ha permitido mostrar que el uso de software y este tipo de dispositivos permiten que el aprendizaje de la geometría no solo sea de tipo procedimental sino también de tipo conceptual. Estas tecnologías son potentes herramientas que le permiten a los estudiantes trasladar segmentos o puntos, generar lugares geométricos y además posibilitan el cálculo de áreas y longitudes. Además, según Santos-Trigo (2001) citado por Moncayo y Pantoja (2012) los estudiantes a través de los ambientes de geometría dinámica aparte de ser animados a reconstruir relaciones particulares, en estos ambientes, también les posibilita argumentos matemáticos para soportar sus resultados. Por otro lado, Acravi y Hadas (2000) afirman que las representaciones hechas mediante los ambientes de geometría dinámica permiten que los estudiantes construyan su propio conocimiento:

> Los entornos dinámicos no solo permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y así visualizarlas, sino que también permiten al usuario transformar esas construcciones en tiempo real. Este dinamismo puede contribuir a formar el hábito de transformar (mentalmente o mediante una herramienta) una instancia particular, para estudiar variaciones, sugerir invariantes visualmente y posiblemente proporcionar la base intuitiva para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones. (Acravi y Hadas, 2000, pp. 25-26)

En cuanto al software de geometría dinámica denominado Geogebra, cumple la función de mediador en la construcción de las secciones cónicas para la presente investigación, se señala que una de las funciones con que cuenta este software es la denominada “arrastre” que permite transitar de una geometría estática a una dinámica conservando las propiedades de la cónica. De acuerdo con lo anterior, Silva et al. (2011) señala que el hecho de pasar de una geometría estática a una dinámica guardando las propiedades del objeto matemático por medio del arrastre contribuye en la estrategia de resolución de problemas y en consecuencia influye en la forma de hacer inferencias respecto de los objetos representados.

Capítulo 3. Marco Metodológico

En este capítulo se presenta la metodología para el desarrollo de la investigación, donde se describe el nivel de la investigación, se muestra su diseño, técnicas e instrumentos para recolectar la información, las técnicas de procesamiento y análisis de la información y finalmente, la población objeto de estudio. En cuanto al diseño de la investigación se especifica a la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995), como la metodología que se adopta para el estudio, la cual establece las siguientes fases: análisis preliminares, concepción y análisis a priori para el diseño de la situación didáctica, experimentación y análisis a posteriori con la evaluación.

Para Hernández, Fernández y Baptista (2010), una investigación es cualitativa cuando se intenta comprender el punto de vista de los individuos respecto al entorno en el que se desenvuelven, averiguar sus hábitos y opiniones. En este tipo de investigaciones, los procedimientos de recolección de información no son predeterminados, tal como si sucede en la investigación de tipo cuantitativo. Así mismo, Hernández, Fernández y Baptista (2010) indican que el objetivo principal del investigador no se enfoca en los resultados propiamente, sino en todo el desarrollo de la investigación. Con estos argumentos se establece la presente investigación con un enfoque cualitativo en nivel descriptivo e interpretativo, puesto que primero se busca describir la apropiación de los estudiantes en el aprendizaje del objeto matemático elipse y también se interpreta el análisis de los procesos de pensamiento que generan los estudiantes cuando abordan situaciones problema (Riveros, 2019).

La ingeniería didáctica como metodología de investigación

Para el diseño de la presente investigación se tuvo en cuenta como marco metodológico la ingeniería didáctica de Artigué (1995) debido a que esta se desarrolla dentro del marco de la educación matemática (Teoría de las situaciones didácticas) y permite elaborar una validación por medio de un análisis a priori (lo planificado) y a posteriori (lo que sucedió) (Artigué, 1995). Otro aspecto que cobra relevancia en esta metodología es que permite analizar los procesos que realizan los estudiantes de grado 10° al comprender el concepto de elipse por medio de una secuencia didáctica mediada por Geogebra y sustentada bajo los principios de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1999), en donde, los principios dados en Artigue (1995) permiten estudiar situaciones de enseñanza y aprendizaje y validar este proceso. Esta ingeniería didáctica se denomina así debido a que se compara esta metodología con la labor que ejerce un ingeniero. Respecto a la ingeniería didáctica (ID) Artigue (1995), establece que:

> Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo (pp. 33-34).

"La ingeniería didáctica, es un instrumento privilegiado para tener en cuenta la complejidad de la clase" (Artigue, 1995, p. 37), con esta frase Artigue afirma que la implementación de esta metodología favorece el análisis de los procesos de aprendizaje y además posibilita, por el hecho de ser una metodología con enfoque cualitativo, observar y analizar las secuencias didácticas.

Diseño de la investigación

Para el diseño de la investigación se siguen las fases propuestas en la ingeniería didáctica.

Fases de la ingeniería didáctica

Artigue (1995) divide la ingeniería didáctica en cuatro fases: análisis preliminar, análisis a priori de las situaciones didácticas, experimentación y finalmente un análisis a posteriori y validación. En el análisis preliminar se estudian aspectos epistemológicos, didácticos y cognitivos del objeto matemático a trabajar en la investigación el cual es la elipse. En la segunda fase (análisis a priori), se presentan tanto la secuencia de actividades a desarrollar como el análisis a las respuestas esperadas por los alumnos, y se definen las variables didácticas a tener en cuenta en el desarrollo de las secuencias didácticas. En la tercera fase (experimentación) es donde se ponen en funcionamiento las actividades diseñadas en la segunda fase (análisis a priori). En la última fase (análisis a priori y validación) se efectúa un contraste o análisis entre los resultados esperados y los obtenidos.

Fase 1: Análisis preliminar

Para Artigue (1995) este análisis se compone de las siguientes dimensiones: dimensión didáctica, cognitiva y epistemológica.

Dimensión Didáctica.

Hace referencia a la forma como se está enseñando el objeto matemático en las escuelas, lo que conllevó a realizar un análisis en el aspecto didáctico de los libros de texto que trabajan los estudiantes, lineamientos, estándares y derechos básicos de aprendizaje para el caso del contexto colombiano. Para esto se analizaron los libros de texto *Los caminos del Saber Matemáticas 10* de la editorial Santillana, Álgebra y trigonometría con geometría analítica de Swokowski y Cole, y, Precálculo: Matemáticas para el cálculo de Stewart, Redlin y Watson. Los análisis de los libros se enfocaron en analizar cómo se ha trabaja el aspecto didáctico del objeto matemático *elipse* teniendo en cuenta la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1999). Dicho análisis didáctico está detallado en el capítulo 4.

Dimensión Cognitiva

Artigue (1995) indica que esta dimensión cognitiva, se relaciona con las características cognitivas de las personas a las cuales se enfoca la enseñanza. En este sentido, hay que identificar con qué conocimientos previos cuenta el estudiante y que dificultades puede presentar en relación con el aprendizaje de la elipse. Teniendo en cuenta lo anterior, la presente investigación en el apartado de *antecedentes* describe las investigaciones en donde identifican y reconocen tanto conocimientos previos como obstáculos, dificultades y errores que presentan estudiantes en el aprendizaje de la elipse, estudiantes que tienen características similares a los sujetos que participan de la presente investigación. Este apartado se encuentra pormenorizado en el capítulo 2.

Dimensión Epistemológica

Artigue (1995) se refiere a la génesis histórica del concepto. En la presente investigación se realiza un análisis desde las civilizaciones antiguas hasta los siglos XVI y XVII teniendo en cuenta los problemas o situaciones problema y su solución que se plantearon los matemáticos durante esas épocas. Dicho análisis se encuentra detallado en el capítulo 4.

Fase 2: Análisis A Priori

En esta fase Artigue (1995) afirma que se deben tener en cuenta los siguientes ítems: las variables (radios, longitud de segmentos, puntos sobre la circunferencia), la secuencia de actividades y la descripción de lo que se espera que hagan los estudiantes cuando se enfrentan a la secuencia didáctica, esto es, predecir o proyectar las acciones, pensamientos y estrategias que los estudiantes pueden plantear para resolver los problemas y obstáculos. En relación a las variables planteadas en la ingeniería didáctica, para la presente investigación se tienen en cuenta las variables microdidácticas o locales ya que el trabajo se fundamenta en realizaciones didácticas a nivel de ingeniería local. La elección del tipo de variables se hizo debido a que son más puntuales y se relacionan directamente con el contenido y las actividades planteadas en este análisis a priori. Dicho análisis está detallado en el capítulo 4.

Fase 3: Experimentación

En esta fase es donde se ponen en marcha las actividades diseñadas en la fase inmediatamente anterior (análisis a priori). Esta etapa se llevó a cabo en 4 encuentros, con una duración de 60 minutos cada una. En los primeros dos encuentros se representó la elipse en el registro de representación pictórico (por medio del software Geogebra) con el fin de llegar a comprender la condición geométrica del objeto matemático. Los últimos dos encuentros estuvieron enfocados en la representación gráfica y algebraica de la elipse realizando conversiones entre dichos registros.

Fase 4: Análisis a posteriori y validación

En esta última fase se confrontaron los datos obtenidos en la fase de experimentación con el análisis a priori. En cuanto a esta fase Artigue (1995) afirma que:

> A esta fase sigue una de análisis a posteriori que se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de la secuencia de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se complementan con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicados en distintos momentos de enseñanza o durante el transcurso. Y, como ya lo habríamos indicado, en la

confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación (p. 48).

Diseño de la Secuencia de Actividades

Las actividades descritas en este apartado (que están especificadas en el capítulo 4), se desarrollaron en cuatro sesiones con una duración aproximada de 60 minutos cada una. Las situaciones didácticas se enfocaron en dos aspectos importantes: el primero es el estudio de la condición geométrica de la elipse a través de la conversión del registro figural o pictórico al registro de lengua natural. El segundo se enfoca en el estudio de la representación gráfica y algebraica de la curva por medio de la conversión entre estos dos registros de representación semiótica. En ambos casos el medio a través del cual se desarrollan estas actividades es el software de geometría dinámica geogebra. A continuación, se relacionan las dos actividades desarrolladas.

Tabla 3.1

Secuencia de Actividades

Actividad	Tiempo	Descripción de la Actividad
Condición geométrica de la elipse	2 sesiones 120 minutos	Los alumnos con el uso del software de geometría dinámica geogebra y con base en los conocimientos previos en geometría deben representar la elipse en el registro pictórico, y, por medio de transformaciones en dicho registro llegar a la condición geométrica de la cónica.
Representación algebraica y gráfica de la elipse	2 sesiones 120 minutos	En esta actividad los alumnos a través de la representación gráfica de la elipse y por medio de la conversión de dicho registro al algebraico llegan a la expresión canónica de la curva relacionando sus principales características.

Fuente: Elaboración propia

Técnicas e instrumentos de recolección de información

Para el desarrollo de la presente investigación se implementaron las siguientes técnicas e instrumentos para la recolección de la información:

Observación directa

Dicho mecanismo de recolección de la información necesita que el investigador ahonde en la situación social, esté interactuando de forma activa y constante en el estudio y además esté en constante reflexión (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). Para el presente trabajo el investigador es la misma persona que ejerce el papel de observador, el cual participa por medio de la elaboración de apuntes de hechos sucedidos y opiniones que posteriormente le servirán de base para generar las respectivas interpretaciones. Teniendo en cuenta lo planteado anteriormente, se registró el proceso que fueron generando los estudiantes en el aprendizaje del objeto matemático elipse, analizando e identificando los obstáculos que fueron presentando los alumnos en la comprensión de la sección cónica. Esta observación está inmersa en la tercera fase (experimentación) cuando los estudiantes están desarrollando las secuencias didácticas.

Secuencia didáctica

La secuencia didáctica se diseñó con el propósito de abordar la enseñanza del objeto matemático elipse por medio de la teoría de los registros de representación semiótica, ya que como afirma Duval (1999) es necesario implementar este tipo de registros para que el estudiante genere una comprensión del objeto matemático. En cuanto al uso de secuencias didácticas, Casas (2019) nos dice que la implementación de dichas secuencias puede llevar a los estudiantes a desarrollar y generar actividades productivas. Dicha secuencia está compuesta por preguntas abiertas cuyo propósito es determinar los tipos de representación semiótica que utilizan los estudiantes al abordar el objeto matemático elipse. Seguidamente, se aplicó la secuencia a los estudiantes involucrados en la investigación y con el análisis de los resultados arrojados se observó el nivel de comprensión de la elipse y también se lograron hallar dificultades y errores.

Instrumentos de recolección de información

Para la recolección de información se utilizaron los siguientes instrumentos:

- Guías de trabajo de los estudiantes para la secuencia planteada.
- Los registros de las construcciones geométricas realizadas en geogebra.
- Fichas de observación.

Técnicas de procesamiento y análisis de datos

Entre las categorías para la investigación se encuentran los tipos de registros de representación semiótica propuestos en Duval (1999). La primera categoría a tener en cuenta es la de “tratamiento”, la cual corresponde a las transformaciones que ocurren dentro de un mismo registro de representación (Duval, 1999). La segunda categoría de análisis corresponde a la “conversión”, la cual se refiere a las transformaciones de las representaciones semióticas de un registro a otro (Duval, 1999).

En la tabla 3.2 se detallan las categorías propuestas para la presente investigación:

Tabla 3.2

Categorías y subcategorías de análisis

Categoría	Subcategoría	Actividad
Tratamiento y conversión del Registro figural al Registro de lenguaje natural	Representación de la elipse en el registro figural, y, por medio de transformaciones llegar a la condición geométrica (registro en lengua natural)	1(ver página 85)
Tratamiento y conversión del registro gráfico al registro algebraico	Representación gráfica de la cónica y conversión de dicho registro al algebraico.	2 (ver página 91)

Fuente: Elaboración propia

Variables Didácticas

Las variables didácticas implementadas en las secuencias didácticas se relacionan en las siguientes tablas:

Tabla 3.3

Variables para la actividad 1

Variable	Valores
Radio circunferencia	De 4 a 8 cm
Punto interior a la circunferencia	Cualquier posición dentro del círculo
Punto sobre la circunferencia	Cualquier posición sobre la circunferencia

Fuente: Elaboración propia

Tabla 3.4

Variables didácticas de la actividad 2

Variable	Valores
Distancia focal	De 0 a 16 cm
Distancia del eje mayor	De 0 a 30 cm
Punto (P) sobre la elipse	Cualquier posición sobre la elipse

Fuente: Elaboración propia

En cuanto al enfoque EOS, este se utiliza en la parte epistemológica estudiando los problemas o situaciones problema que se manifestaron a lo largo de la historia (trisección del ángulo, cuadratura del círculo, duplicación del cubo), por medio de la herramienta del análisis semiótico en donde se plantea que cada solución tiene una configuración epistémica formada por las relaciones entre los objetos primarios: definiciones, procedimientos, conceptos, argumentos, proposiciones, lenguaje matemático y la situación problema que es la que moviliza los otros objetos matemáticos (Hurtado, 2019).

Población de Estudio

La presente investigación se realizó con 4 estudiantes de grado 10° del colegio San Viator de Tunja, cuyas edades oscilan entre los 15 y 16 años. La institución educativa es de carácter privado, cuenta con alrededor de 600 estudiantes y maneja una educación global en los niveles de preescolar, básica secundaria y media con énfasis en multilingüismo e incluye el estudio del bachillerato internacional. Los estudiantes seleccionados para el desarrollo de la investigación cuentan con conceptos previos relacionados con geometría analítica tales como distancia entre dos puntos, ecuación de la circunferencia y ecuación de la recta. Así mismo el docente investigador es el mismo docente titular y orienta las asignaturas de matemáticas, geometría y estadística de grado 7° a grado 9°. Las actividades implementadas con los estudiantes se realizaron en el segundo semestre de 2021 de forma presencial. Dichas actividades se abordaron en cuatro sesiones de clase con una duración de 60 minutos cada una.

Finalmente hay que resaltar que la identidad de los participantes está protegida debido a que son menores de edad. Se conformaron dos grupos de dos estudiantes denominados Grupo 1 y Grupo 2 y cada estudiante se denomina para efectos de la investigación como: E1, E2, E3, E4. La presente investigación corresponde a un estudio de caso.

Capítulo 4. Análisis preliminares y Discusión

En el presente capítulo se realiza el estudio de la sección cónica elipse desde dos puntos de vista: el aspecto epistemológico y el didáctico. En la parte epistemológica se hace una reseña histórica y se estudian los problemas o situaciones problema (con la solución propuesta por cada matemático) que surgieron en la historia. En el enfoque EOS, como parte importante del estudio en la emergencia de los objetos matemáticos, se establece la herramienta del análisis semiótico, donde se propone para cada solución una configuración epistémica, formada por las relaciones entre los objetos primarios: definiciones, procedimientos, conceptos, argumentos, proposiciones, lenguaje matemático y la situación problema que es la que moviliza los otros objetos matemáticos (Hurtado, 2019). Este análisis semiótico corresponde al aporte realizado en los estudios epistemológicos e históricos sobre la emergencia de los objetos matemáticos a través de la historia de la humanidad por el investigador.

En el aspecto didáctico, se analizan algunos de los libros de texto de secundaria de las editoriales con más presencia en los colegios del territorio colombiano: seguidamente, se realiza el análisis curricular, donde se analizan los lineamientos, estándares y DBA relacionados con el objeto de investigación, todos estos análisis se denominan preliminares en la metodología de la Ingeniería didáctica y, finalmente, se realiza el análisis a priori a las situaciones problemas que los estudiantes van a solucionar para llegar al análisis a posteriori y contrastar resultados, analizando la comprensión del objeto elipse como lugar geométrico, hecho que se evidencia según la propuesta del marco teórico de los registros de representación semiótica y la Teoría de las Situaciones didácticas, a la cual se acude para el trabajo con el software Geogebra como medio de interacción de los estudiantes de grado 10, buscando la comprensión del objeto de estudio.

Análisis de la dimensión epistemológica de la elipse

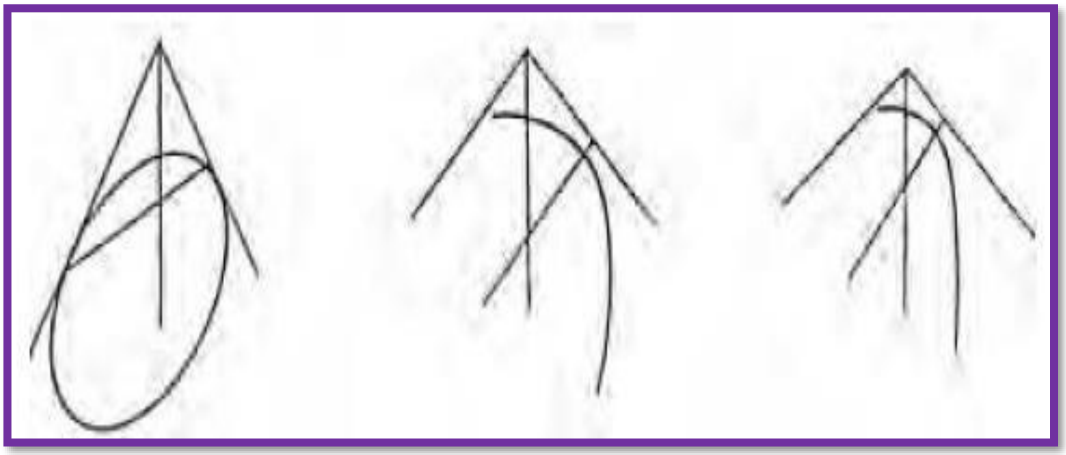
Las secciones cónicas en la historia de la Matemática

Como ha ocurrido en la historia con notables creaciones en matemáticas, al momento de su emergencia no se alcanzaba a dimensionar la importancia y el uso que estas iban a tener posteriormente (Mosquera, 2013). Un caso particular es el de las secciones cónicas porque la razón por la que se crearon no fue precisamente la de interpretar las órbitas de los planetas o la construcción de artefactos de radar, sino que se descubrieron gracias a la búsqueda de soluciones a los tres famosos problemas griegos como la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo (Alegría, 2003).

Ibáñez (2002) establece que Menecmo (375-325 a.c) encuentra las secciones cónicas (elipse, parábola e hipérbola) de manera imprevista cuando intentaba encontrar una solución a uno de los tres problemas famosos de la matemática griega, el de la duplicación del cubo (el cual dice que dado un cubo se debe hallar con el solo uso de regla y compás el lado de otro cubo cuyo volumen sea el doble). Al respecto, Ibáñez (2002) afirma que estos objetos matemáticos fueron definidos como la intersección de un cono circular recto de ángulo cambiante y un plano perpendicular a una de las rectas generadoras del cono, que no pasa por el vértice. Entonces, si el vértice del cono era un ángulo obtuso (amblitoma) se conseguían hipérbolas, si el ángulo era recto (ortotoma) se obtenían parábolas y si el ángulo era agudo (oxitoma) elipses. Podemos observar lo antes descrito en la figura 4.1.

Figura 4.1

Las Cónicas: Elipse (agudo), Parábola (recto), Hipérbola (obtuso)



Fuente: Ibáñez (2002, p.12)

A continuación, se presentan las soluciones a los problemas matemáticos (trisección del ángulo y duplicación del cubo).

Trisección de un ángulo

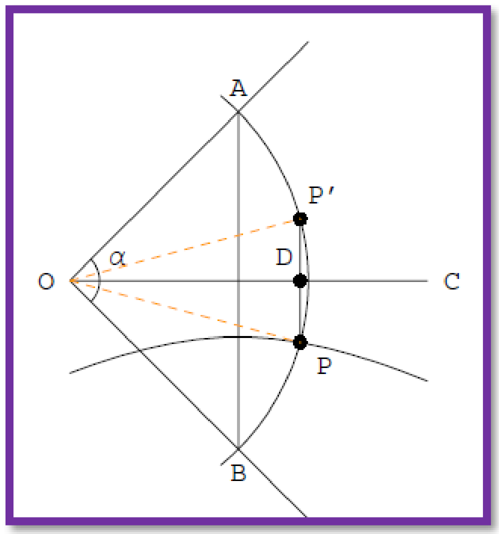
El problema de la trisección del ángulo pertenece a uno de los tres problemas clásicos de la matemática griega. El problema consiste en dividir un ángulo en tres ángulos iguales con el uso único y exclusivo de una regla y compás. Alegría (2003) expone en detalle como cierta hipérbola permite la trisección de un ángulo:

Sea α un ángulo arbitrario (Figura 4.2). Se construye la circunferencia de centro O y radio $OA = OB$ de modo que $\widehat{AOB} = \alpha$. Sea la recta OC bisectriz de α. Con OC como directriz y B como foco, se construye una rama de hipérbola de excentricidad $e = 2$. Sea P el punto de intersección de la hipérbola con el arco de circunferencia AB. Análogamente se obtiene el punto P' utilizando A como $foco$ según la gráfica de la figura 4.2, donde se presenta la construcción.

Entones, por definición de hipérbola, $BP = 2PD\ y\ AP' = 2DP'$. Además, debido a la simetría, $PD = DP'$. En definitiva, resulta que $BP = PP' = P'A$ y queda así trisecado el ángulo α.

Figura 4.2

La trisección del Ángulo



Fuente: Alegría (2003, p. 2)

Análisis semiótico a la solución del problema de la trisección del ángulo

En cuanto a las *definiciones* presentes en la solución del problema, se utiliza en la hipérbola que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es siempre constante. En el *lenguaje matemático***,** se usan los términos de ángulo, circunferencia, radio, recta, bisectriz, directriz, trisección de ángulos. La solución presenta un *procedimiento* basado en una prueba geométrica para realizar la trisección del ángulo dado. En las *proposiciones*, se utiliza la simetría para establecer que el segmento $PD = DP'$ y finalmente en la medida de los arcos se concluye que $BP = PP' = P'A$, por lo cual se tendría la trisección del ángulo α.

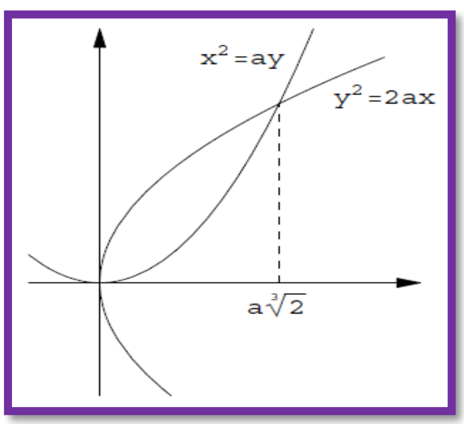
Duplicación del cubo

El problema de la duplicación del cubo nace de la leyenda que afirma que el oráculo aconsejó a los Atenienses que para apaciguar la ira del dios Apolo, al cual se le tenía un altar en Delos en forma cúbica, le erigieran un nuevo altar cúbico que tuviera el doble de volumen. Se sabe, según Alegría (2003), que este problema tuvo soluciones en la antigüedad (por supuesto que ninguna de ellas usando regla y compás). Una de las soluciones sería denominar como a la arista del cubo original y llamar x a la arista del cubo duplicado y por lo tanto el problema se reduce a solucionar la ecuación $2a^3 = x^3$. Alegría (2003) muestra la solución conseguida por Hipócrates de Chíos en el siglo V a.C. a través del cruce de dos parábolas según la figura 4.3.

Dadas las siguientes parábolas $x^2 = ay, y^2 = 2ax,$ es de fácil verificación que la abscisa del punto de encuentro de ambas es $x = a\sqrt[3]{2}$, igual a la arista del cubo doble. En el gráfico que se muestra a continuación se ilustra la situación planteada:

Figura 4.3

Solución Gráfica al problema de la Duplicación del Cubo



Fuente: Alegría (2003, p. 3)

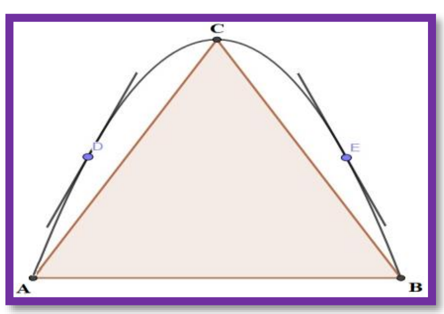
Análisis semiótico a la solución del problema de la duplicación del cubo

Con relación a las *definiciones* dadas en la solución del problema, la parábola se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta denominada directriz y de un punto fijo llamado foco. Respecto al *lenguaje matemático,* se emplean las expresiones de recta, directriz, vértice, foco, lado recto, distancia focal. La resolución expone un *procedimiento* fundamentado en la solución de la ecuación $2a^3 = x^3$ (en donde a es la arista del cubo original y x la arista del cubo con el doble de volumen) a través de una demostración geométrica para realizar la duplicación del cubo. Con relación a los *argumentos*, basta con observar que en las parábolas $x^2 = ay, y^2 = 2ax,$ la coordenada en el eje x del punto en que se interceptan las dos parábolas es $x = a\sqrt[3]{2}$ (el cual corresponde a la arista del cubo de volumen doble).

Moncayo y Pantoja (2012) nos hablan que, en el intento de buscarle una solución al problema de la cuadratura del círculo, Arquímedes hace una valiosa contribución en las matemáticas con su obra: *La cuadratura de la Parábola.* En este libro Arquímedes determinó que el área de un segmento parabólico es $\frac{4}{3}$ del área de un triángulo. Ver figura 4.4.

Figura 4.4

Cuadratura de la Parábola



Fuente: Adaptado de Moncayo y Pantoja (2012)

Según Moncayo y Pantoja (2012) Arquímedes fue el primero en obtener la cuadratura del espacio comprendido entre líneas rectas y una curva. El brillante matemático de la antigüedad demostró esta propiedad aplicando el método de exhaución, el cual consiste en que:

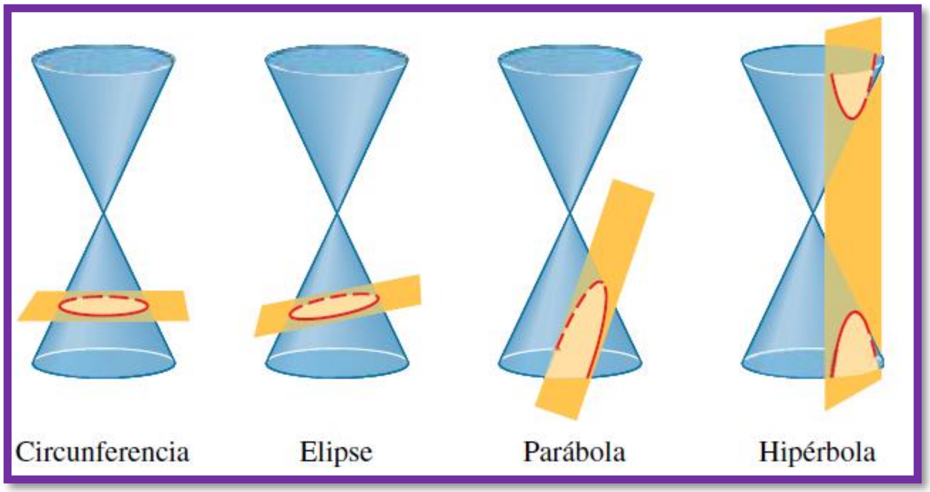
> Para cada número natural n se divide el segmento AB de longitud b, [0, b] en n partes iguales de medida b/n. Sobre cada una de esas partes se construye un rectángulo con la altura de la ordenada a la curva (rectángulo superior, por exceso o circunscrito; rectángulo inferior, por defecto o inscrito). Cuanto más grande sea n, mayor es la partición de la región bajo la curva, menor el error en el cálculo y en consecuencia, cada vez más precisa su área (Moncayo y Pantoja, 2012, p. 36)

Cónicas de Apolonio

Por otra parte, Apolonio de Perga (262 a.c - 190 a.c) llamado el *gran geómetra* gracias a sus investigaciones enfocadas en las secciones cónicas, hizo valiosos descubrimientos sobre focos, asíntotas, ejes, centros, etc. Según Moncayo y Pantoja (2012) las cónicas es el nombre que recibe un antiguo compendio sobre geometría el cual compila todo el conocimiento que había hasta ese entonces. El tratado consiste en ocho libros en los cuales los primeros cuatro están destinados a recopilar los aportes hechos por Menecmo, Euclides y Aristeo a las secciones cónicas. Los últimos cuatro capítulos se componen de los aportes hechos por el mismo Apolonio. De acuerdo con Moncayo y Pantoja (2012) el aporte esencial de Apolonio fue el de generar las cónicas por medio del cruce de un plano con un cono sin tener en cuenta el ángulo formado por la generatriz y el eje (como lo tenía propuesto Menecmo). Ver figura 4.5.

Figura 4.5

Secciones Cónicas



Fuente: Precálculo Stewart 6 Edición (2012, p. 723)

Es de resaltar que la obra de Apolonio fue fundamental no solo en los descubrimientos astronómicos hechos por Kepler sino también en el desarrollo de la geometría analítica de Fermat y Descartes en el siglo XVII.

Siglos XV, XVI y XVII

Según Eves (2004), citado por Olivares (2018) el tiempo comprendido entre mediados del siglo V (después de la caída del imperio romano) hasta el siglo XI fue conocido como *la baja edad media* y durante ese período hubo un decaimiento de las matemáticas. Posteriormente al siglo XII se le denominó el siglo de las traducciones (debido a las numerosas traducciones del árabe al latín, árabe al hebreo y hebreo al latín). Olivares (2018) señala que desde este siglo de las traducciones hasta el siglo XVII no hubo muchos trabajos relacionados con la geometría. Ya en el siglo XVII surge lo que hoy se conoce como Geometría Analítica gracias a las contribuciones hechas por

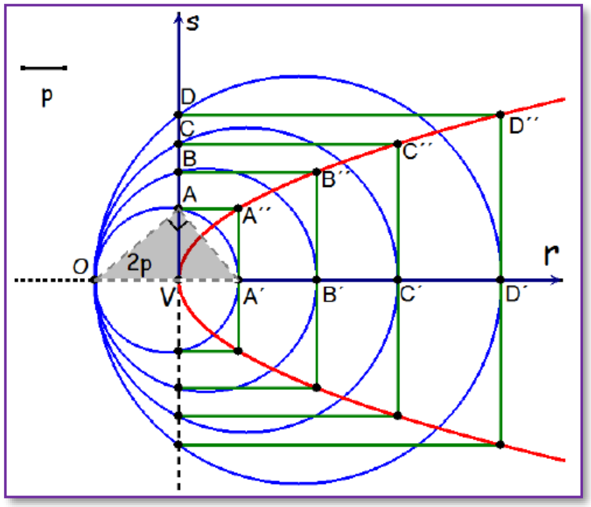
Pierre de Fermat y René Descartes. Por otra parte, Fernández (2011) nos dice que en la época del renacimiento (siglos XV - XVI) se generó un nuevo interés en las secciones cónicas a través de Werner (geómetra y geógrafo alemán) cuando escribió el libro *Elementos de las Cónicas*. Para Fernández (2011), Werner se enfocó en la resolución de uno de los tres problemas clásicos de la matemática (la duplicación del cubo) a través del estudio de la parábola y la hipérbola. Dentro de las novedades del estudio de Werner respecto a la obra de Apolonio se muestra el siguiente método para elaborar una parábola de parámetro p por medio de regla y compás. El método para la elaboración gráfica de la parábola según Río-Sánchez (1996) citado por Fernández (2011) es el siguiente:

> Se dibujan dos rectas perpendiculares r y s que se cortan en un punto V. Sobre r se señala un punto O a una distancia $2p$ de V. Se trazan circunferencias con el centro en la recta r que pasan por O; estas cortan a la recta s en puntos $A, B, C, \ldots$ y a la recta r en $A', B', C', \ldots$ Se trasladan paralelamente los segmentos $VA, VB, VC, \ldots$ a los puntos respectivos A', B', C', $\ldots$ obteniéndose los puntos A'', B'', C'', $\ldots$ los cuales pertenecen a la parábola de vértice V y parámetro p (junto con sus simétricos respecto de r). La justificación es sencilla puesto que la "ordenada" de cada punto, $A'A''$, por ejemplo, es igual a VA, y $VA^2 = 2p * VA'$. (por el teorema de la altura aplicado al triángulo rectángulo OAA'). (Río-Sánchez, 1996, pp. 31-32)

En la figura 4.6 se ilustra gráficamente lo hecho por Werner.

Figura 4.6

Representación de la Parábola de Werner



Fuente: Fernández (2011, p. 56)

Según Martínez (2015), hasta el siglo XVI el tratamiento de las cónicas se fundamentó en las cónicas de Apolonio, el gran geómetra de la Antigüedad. Después del avance de Apolonio de Perga se desarrollaron algunos estudios como el de Hypathia de Alejandría (370-415) quien compiló las propiedades más importantes de las secciones cónicas en su libro: “Sobre las cónicas de Apolonio”. Según Muñoz (2013), Hypathia investigó los movimientos orbitales de los cuerpos celestes revelando que las curvas de los planetas no eran circulares, que el sol no era el centro del universo y que la tierra no se movía con precisión alrededor del sol.

En 1637, René Descartes (1596-1650), Viete (1540-1603) y Fermat (1601-1665), crean los sistemas de coordenadas, dando la oportunidad de expresar un punto o una curva a partir de coordenadas o ecuaciones. Al vincular la geometría con el álgebra se crea la geometría analítica que permite estudiar las secciones cónicas con nuevas herramientas de interpretación y demostración.

Para González (2007) es durante los siglos XVI y XVII que surge la geometría analítica, es decir, “el empleo del álgebra al estudio de problemas geométricos a través de la relación entre curvas y ecuaciones en un sistema de coordenadas". A mediados del siglo XVII y comienzos del XVIII se publicaron los métodos planteados por Descartes y Fermat relacionados con las secciones cónicas. Matemáticos de la época como Witt y Wallis perfeccionaron y terminaron sus obras.

Como se puede observar las secciones cónicas se han ido estudiando a lo largo de la historia. Comenzando desde el siglo IV a.C. en el intento de resolver uno de los problemas clásicos de las matemáticas (la duplicación del cubo), después en el siglo III a.C la consecución de las secciones cónicas por medio del corte de un plano y un cono y, terminando, en el siglo XVII con el descubrimiento de la geometría analítica. Estas formas de uso de la elipse corresponden al significado dado al objeto matemático según el enfoque EOS.

Análisis de la dimensión didáctica para la elipse

Análisis de contenido para la elipse

Para este análisis didáctico se escogieron tres libros de bachillerato y pre cálculo de las editoriales con mayor cobertura a nivel nacional, los cuales utilizan los estudiantes involucrados en la presente investigación. El análisis se enfoca en el estudio de la elipse que presentan los libros en lo referente a los registros de representación: el algebraico, de lengua natural y gráfico. Este estudio se hace con el propósito de tener un referente sobre cómo se desarrolla la temática en las instituciones educativas. En la tabla 4.16. se relacionan las características de los libros a estudiar.

Tabla 4.16

Particularidades de los libros analizados

Autor	Unidad	Páginas	Título
Santillana	Unidad 6 Geometría Analítica	255 - 265	Los caminos del saber Matemáticas 10
Stewart, Redlin y Watson	Capítulo 11 Secciones cónicas	732 – 741	Precálculo: Matemáticas para el cálculo
Swokowski y Cole	Capítulo 11 Temas de Geometría Analítica	826 – 840	Álgebra y trigonometría con geometría analítica

Fuente: Elaboración propia

Stewart (2012) define la elipse como “el conjunto de todos los puntos del plano cuya suma de distancias desde dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante” (p. 732). Dichos puntos fijos se denominan focos de la elipse. Simbólicamente definen la elipse como:

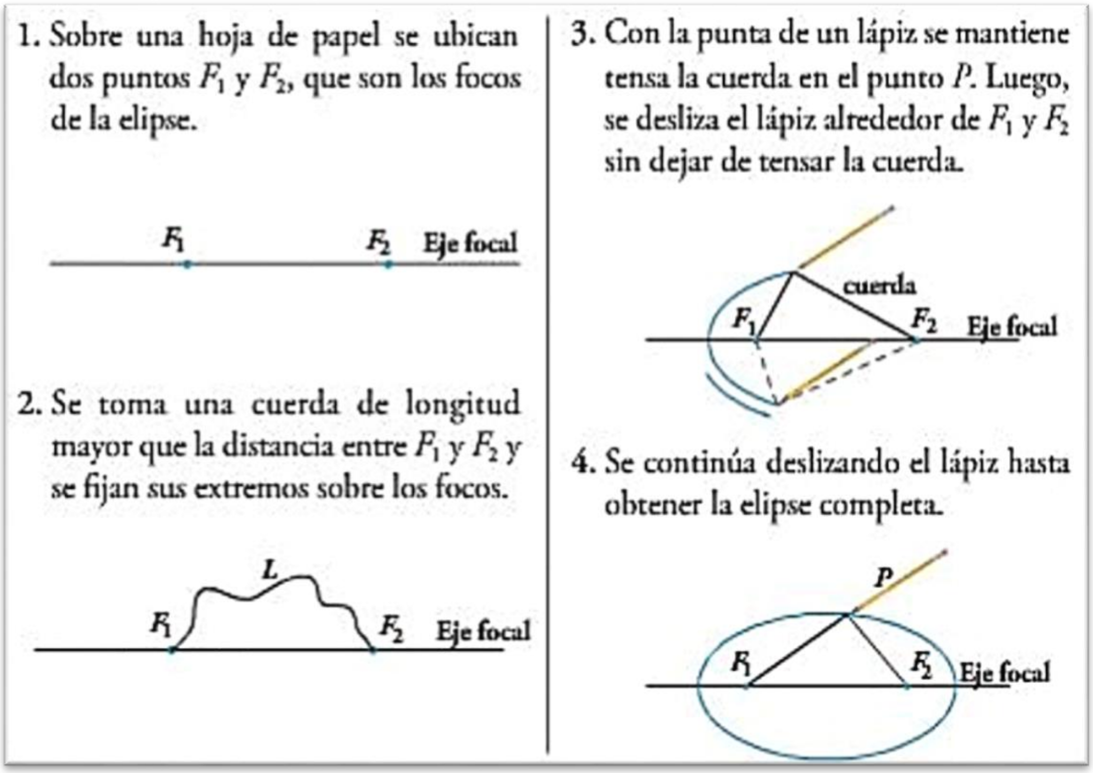
$d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$, donde $\boldsymbol{a}$ es un número real positivo

Stewart (2012) comienza el tema definiendo la elipse como lugar geométrico en lengua natural. Se observa que el concepto se presenta sin desarrollar actividades que posibiliten deducir, verificar y descubrir el concepto de elipse junto con sus propiedades, sino por el contrario lo presentan como algo acabado.

De otro lado, Santillana (2013) describe los pasos para la construcción de la elipse (usando el método del jardinero) como se observa en la figura 4.7.

Figura 4.7

Construcción de la Elipse por el Método del Jardinero



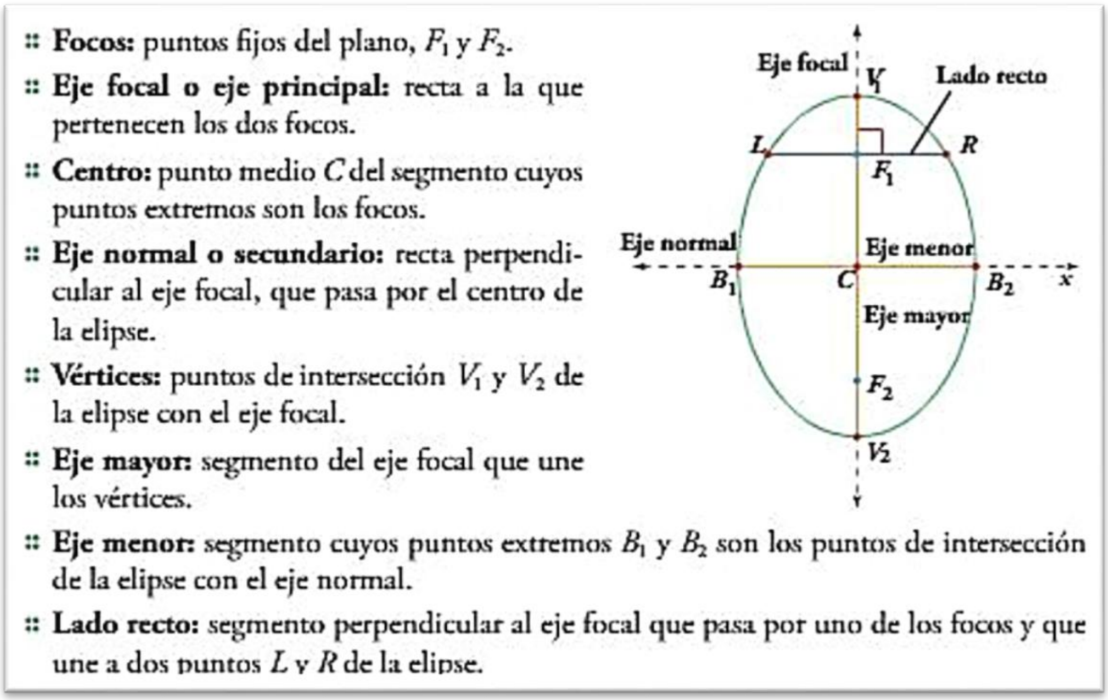
Fuente: Santillana (2013, p. 255)

Se observa que la construcción de la elipse en la actividad anterior no origina ningún cambio de registro ni se realizan tratamientos, pero, se puede tomar en consideración que de alguna u otra forma existe una conversión del registro de lengua natural al registro gráfico cuando se describen los pasos para la construcción y representación gráfica de la elipse.

Después de la construcción de la elipse por el método del jardinero, Santillana (2013) procede a explicar cada uno de los elementos de la elipse tal y como se muestra en la siguiente imagen:

Figura 4.8

Descripción de los Elementos de la Elipse



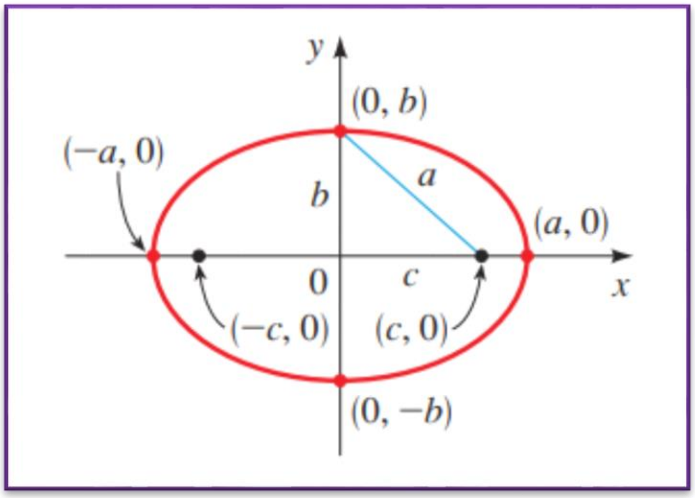
Fuente: Santillana (2013, p. 255)

Como se puede observar en la definición del concepto de elipse y de los elementos que la componen, se ve que estos se presentan de forma acabada impidiendo que sus propiedades sean deducidas por los estudiantes.

A continuación, vamos a analizar como Stewart (2012) presenta la ecuación canónica de la elipse con centro en el origen de coordenadas. Primero se muestra la representación gráfica de la elipse con sus elementos cuyo centro es el origen de coordenadas y el eje focal coincide con el eje x, según se muestra en la figura 4.9.

Figura 4.9

Representación Gráfica de la Elipse con Centro en $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$



Fuente: Stewart (2012, p. 734)

Luego, a partir de la representación gráfica de la figura 4.8, que también aparece en Santillana (2013), y con la ayuda de la definición simbólica de la elipse como lugar geométrico se deduce la ecuación canónica con centro en el origen de coordenadas y eje mayor en el eje x, procediendo de la siguiente manera:

Teniendo en cuenta que las constantes a y c son números reales tales que $a > c \geq 0$ y que la condición geométrica de la elipse está dada por:

$d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$, se tiene que:

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$	Se plantea la distancia entre puntos
$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$	Se resta $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$
$(x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$	Se eleva al cuadrado y resuelven potencias

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$

$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$ Se simplifica y se despeja la raíz

$a^2((x-c)^2 + y^2) = (a^2 - cx)^2$ Se divide entre 4 y se eleva al cuadrado

$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$ Se resuelven las potencias

$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$ Se multiplica

$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$ Se simplifica

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$ Se factoriza

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$ Se divide entre $a^2(a^2 - c^2)$ ya que $a^2 \neq c^2$

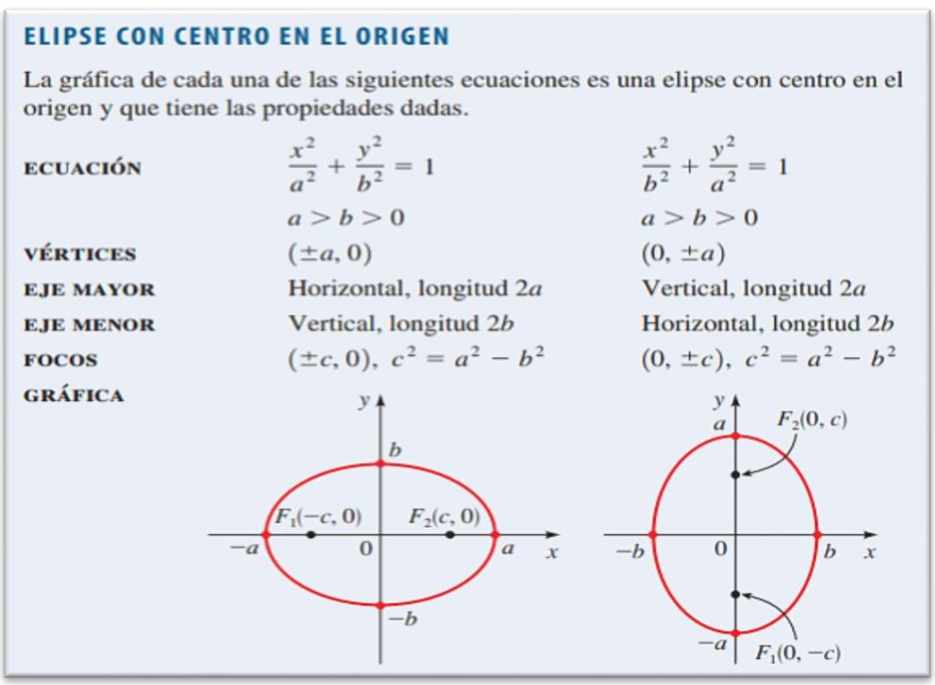
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Se reemplaza $b^2 = a^2 - c^2$

De la anterior deducción de la ecuación canónica presentada en Santillana (2013) podemos observar que parten de la representación simbólica de la condición geométrica de la elipse: $d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$ en donde no son explícitos con la notación usada en la definición, lo cual puede llevar confusiones conceptuales, y tampoco especifican que "a" es la longitud del semieje mayor. En cuanto al proceso de obtención de la ecuación canónica se puede advertir que primero hay una conversión del registro gráfico al registro algebraico. Después se realizan una serie de transformaciones en el registro algebraico hasta llegar a la ecuación canónica. Por otro lado, hay que señalar que en ningún momento en la deducción de la ecuación explican el uso de la expresión $b^2 = a^2 - c^2$ y por qué razón se relacionan con el teorema de Pitágoras. Al no ser explicito con este tipo de expresiones se pueden originar confusiones en el aprendizaje del concepto matemático, no obstante, el texto al realizar conversiones entre registros de representación semiótica de la elipse posibilita un aprendizaje del concepto ya que promueve en el estudiante la coordinación dos registros de representación distintos (Duval, 1999).

En Stewart (2012, p. 734) describen algunas de las propiedades de la elipse centrada en el origen de coordenadas tales como que la longitud del eje mayor equivale a $2a$, la del eje menor es $2b$, además, relacionan la longitud de los semiejes focal, mayor y menor mediante la expresión $c^2 = a^2 - b^2$. En este apartado nuevamente se le presenta al estudiante una serie de conocimientos acabados en los cuales no se le permite verificar ni deducir dichas propiedades, tampoco explican el por qué se relaciona la expresión $b^2 = a^2 - c^2$ con la elipse centrada en el origen de coordenadas.

Figura 4.10

Propiedades de la elipse centrada en el origen de coordenadas



ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN

La gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una elipse con centro en el origen y que tiene las propiedades dadas.

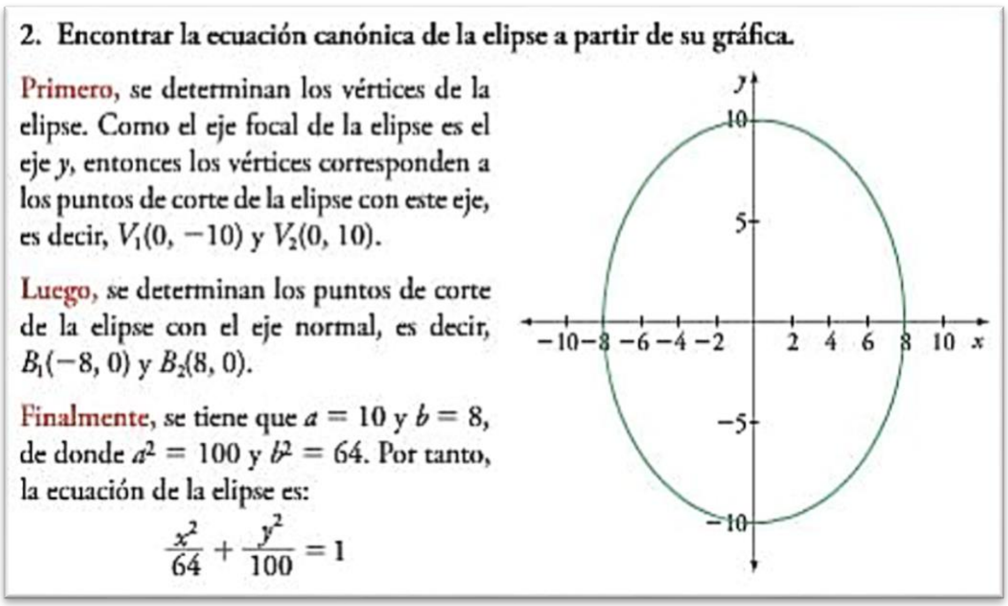
ECUACIÓN	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a > b > 0$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ $a > b > 0$
VÉRTICES	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
EJE MAYOR	Horizontal, longitud $2a$	Vertical, longitud $2a$
EJE MENOR	Vertical, longitud $2b$	Horizontal, longitud $2b$
FOCOS	$(\pm c, 0)$, $c^2 = a^2 - b^2$	$(0, \pm c)$, $c^2 = a^2 - b^2$
GRÁFICA		

Fuente: Stewart (2012, p. 734)

A continuación, se analizan algunas actividades propuestas en los libros de texto de Santillana (2013), Stewart (2012) y Swokowski (2009). En la página 258 de Santillana (2013) se ilustra la siguiente actividad relacionada con una elipse centrada en el origen de coordenadas y eje focal en el eje de las ordenadas.

Figura 4.11

Actividad presentada en el libro Los Caminos del Saber Matemáticas 10



2. Encontrar la ecuación canónica de la elipse a partir de su gráfica.

Primero, se determinan los vértices de la elipse. Como el eje focal de la elipse es el eje y, entonces los vértices corresponden a los puntos de corte de la elipse con este eje, es decir, $V_1(0, -10)$ y $V_2(0, 10)$.

Luego, se determinan los puntos de corte de la elipse con el eje normal, es decir, $B_1(-8, 0)$ y $B_2(8, 0)$.

Finalmente, se tiene que $a = 10$ y $b = 8$, de donde $a^2 = 100$ y $b^2 = 64$. Por tanto, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

Fuente: Santillana (2013, p. 258)

Como se puede observar, en la figura 4.11 se representa la elipse en el registro gráfico para después hacer una conversión al registro de lengua natural en donde se determinan elementos importantes de la curva como son: vértices del eje mayor, menor y los focos. Después se vuelve a realizar otra conversión, pero esta vez va del registro de lengua natural al algebraico en donde se logra determinar la ecuación canónica de la elipse.

Se puede observar que la actividad desarrollada no genera tratamiento alguno en ninguno de los registros, pero sí favorece un cambio de registro con respecto a la representación gráfica, de lengua natural y algebraica.

En la figura 4.12 se estudia una de las actividades que propone Swokowski (2009) para que los estudiantes solucionen.

Figura 4.12

Actividad propuesta para el Estudio de la Elipse

EJEMPLO 3 **Hallar una ecuación de una elipse dados sus vértices y focos**

Encuentre la ecuación de la elipse con vértices $(\pm 4, 0)$ y focos $(\pm 2, 0)$.

Fuente: Swokowski (2009, p. 830)

Como se puede observar en la figura 4.12, la actividad propuesta pide encontrar la ecuación de la elipse a partir del conocimiento de sus elementos como las coordenadas de los focos o la longitud de algún eje. Para esto los estudiantes tendrán que realizar sencillos cálculos algebraicos. En este apartado vemos que predomina el uso del registro algebraico.

En las actividades propuestas por Santillana (2013) en la página 259 se presentan 5 ejercicios de la ecuación de la elipse referidas a procedimientos mecánicos tales como determinar la ecuación canónica a partir de sus elementos y viceversa. Estos ejercicios no se enfocan en reconocer o analizar las propiedades de la curva ni tienen en cuenta el concepto para solucionar problemas contextualizados o de la vida cotidiana.

Se observa que las actividades planteadas solamente buscan reproducción y memorización de los ejemplos que se desarrollaron al inicio ya que se nota la similitud entre ellos.

El siguiente punto de estudio se refiere a la representación de la elipse en el registro algebraico mediante la representación gráfica de la curva cuyo centro no está ubicado en el origen de coordenadas. En Santillana (2013) se muestran los dos casos de las representaciones algebraicas de la elipse (eje focal paralelo al eje x y paralelo al eje y), tal y como se muestra en la figura 4.13.

Figura 4.13

Ecuaciones de la Elipse con Centro $\boldsymbol{C(h,k)}$

La **ecuación canónica cuando tiene centro** $C(h, k)$ **y eje focal paralelo al eje** x es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \text{ donde } a > b > 0 \text{ y } a^2 = b^2 + c^2$$

La **ecuación de la elipse con centro** $C(h, k)$ **y eje focal paralelo al eje** y es:

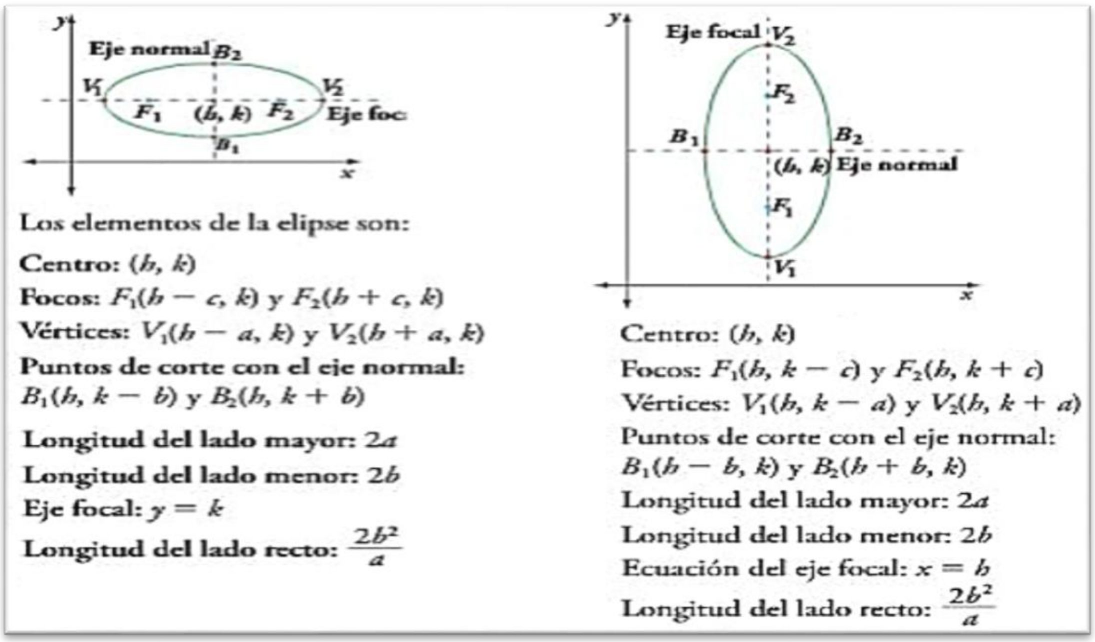
$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1, \text{ donde } a > b > 0 \text{ y } a^2 = b^2 + c^2$$

Fuente: Santillana (2013, p. 260)

Después de enseñar las ecuaciones proceden a describir cada uno de los elementos que la componen (centro, focos, vértices, ejes, etc.) según lo muestra la figura 4.14:

Figura 4.14

Ecuación canónica de la elipse con centro fuera origen de coordenadas



Fuente Santillana (2013, p. 260)

Como podemos observar en este apartado no enseñan de dónde salen dichas ecuaciones y el por qué tienen esa forma, con lo cual se está impidiendo que el estudiante descubra propiedades y logre un aprendizaje más significativo.

El siguiente punto de análisis corresponde al tratamiento que le dan a la ecuación general de la elipse. Santillana (2013) parte de la ecuación de la curva con centro en el origen de coordenadas según lo ilustra la figura 4.14 y realiza una serie de tratamientos algebraicos hasta llegar a la expresión que se muestra en la figura 4.15.

Figura 4.15

Ecuación General de la Elipse

La **ecuación general de una elipse** es:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Con A y B, diferentes de cero y con el mismo signo.

Fuente: Santillana (2013, p. 262)

Para que el estudiante comprenda la representación de la ecuación general de la elipse Swokowski (2009) desarrolla ejercicios en los cuales permite la conversión entre registros de representación semiótica. En la figura 4.16, se analiza el ejemplo 5 de la página 831.

Figura 4.16

Conversión de la elipse del registro algebraico al gráfico

Trace la gráfica de la ecuación

$$16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0.$$

SOLUCIÓN Empezamos por agrupar los términos que contengan x y los que contengan y:

$$(16x^2 + 64x) + (9y^2 - 18y) = 71$$

A continuación, factorizamos los coeficientes de x^2 y y^2 como sigue:

$$16(x^2 + 4x + \_\_) + 9(y^2 - 2y + \_\_) = 71$$

Ahora completamos los cuadrados para las expresiones dentro de los paréntesis:

$$16(x^2 + 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = 71 + \underline{16 \cdot 4} + \underline{9 \cdot 1}$$

Al sumar 4 a la expresión dentro de los primeros paréntesis hemos sumado 64 al lado izquierdo de la ecuación y por tanto debemos compensar al sumar 64 al lado derecho. Del mismo modo, al sumar 1 a la expresión dentro de los segundos paréntesis hemos sumado 9 al lado izquierdo y en consecuencia debemos sumar 9 al lado derecho. La última ecuación se puede escribir como

$$16(x + 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 144.$$

Al dividir entre 144 para obtener 1 en el lado derecho tendremos

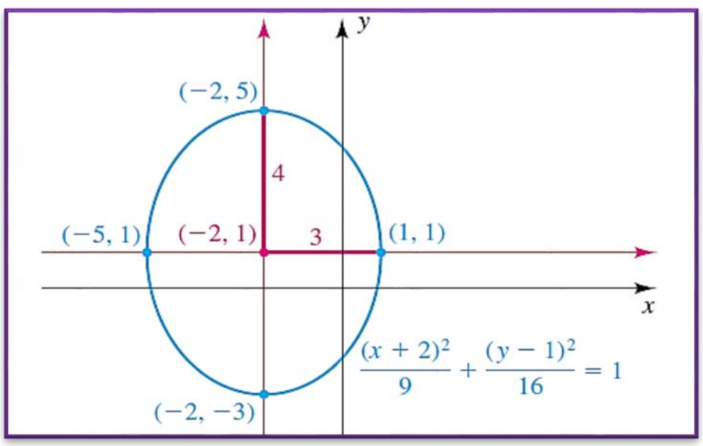
$$\frac{(x + 2)^2}{9} + \frac{(y - 1)^2}{16} = 1.$$

Fuente: Swokowski (209, p. 831)

Como se puede observar en los ejercicios que desarrolla Swokowski (2009) para la ecuación general de la elipse, es notorio que primero desarrolla un tratamiento en el registro algebraico para llegar a la ecuación canónica de la elipse con el propósito de poder pasar a un lenguaje natural cuando al finalizar el proceso de completar cuadrados afirma que: “la gráfica de la última ecuación es una elipse con centro $C(-2,1)$ y eje mayor en la recta vertical $x=-2$”. Después de obtener los elementos de la elipse procede a pasar de un registro en lengua natural a un registro gráfico con los siguientes elementos que obtuvo: centro $C(-2,1)$, $semieje\ menor\ = 3$ y $semieje\ mayor\ =\ 4$, en donde se elabora la gráfica de la elipse según la Figura 4.17.

Figura 4.17

Registro gráfico de la elipse



Fuente: Swokowski (209, p. 831)

Para terminar el análisis, se observa que en la mayoría de los ejercicios desarrollados y los propuestos para que los estudiantes solucionen existe cierta prioridad por el tratamiento en el registro algebraico ya que se puede ver que la mayoría de ellos se hacen repetitivos en este registro. Para Duval (1999) este tipo de actividades no favorecen la comprensión del objeto matemático debido a que no genera ningún tipo de coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica que posee la elipse.

Análisis Curricular

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) ha dispuesto que las instituciones educativas públicas y privadas tengan libertad para elaborar su currículo institucional y para ello ha establecido unos determinados aprendizajes los cuales están consignados en el documento denominado: Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas (2006). Este documento debe servir de orientador a las instituciones educativas en el proceso de elaboración curricular y planificación escolar (MEN, 2006).

De acuerdo con lo expuesto por el MEN (1998) y los estándares básicos de competencias (MEN, 2006), los estudiantes deben deducir ideas, conjeturar y exponer hipótesis, esto con el propósito que se genere una actividad científica en el quehacer escolar. De la misma manera, el Ministerio de Educación Nacional por medio de los lineamientos curriculares recomienda que la enseñanza de la geometría se realice desde una perspectiva activa, en palabras del MEN (1998): "Se trata pues de 'hacer cosas', de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna" (p. 37). En este orden de ideas, según el MEN (1998), en el aprendizaje de la geometría se debe dar prelación a la acción antes que a la contemplación pasiva de gráficos y símbolos, y especialmente se debe dar relevancia a las transformaciones, las cuales ayudan a la comprensión de aquellos objetos matemáticos que a simple vista parecen estar inmóviles. Por tanto, se considera pertinente la presente investigación centrada en las conversiones y transformaciones del objeto matemático elipse en diferentes registros de representación semiótica con la ayuda de ambientes de geometría dinámica (Geogebra), y con el fin de generar una comprensión significativa de dicho concepto.

En cuanto a los estándares básicos de competencias estos, según el MEN (2006), se han dispuesto en cinco pensamientos: pensamiento espacial y sistemas geométricos; pensamiento aleatorio y sistemas de datos; pensamiento numérico y sistemas numéricos; pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos y pensamiento métrico y sistemas de medidas. Por tanto, la presente investigación se relaciona con el pensamiento espacial y sistemas geométricos. Dentro de este pensamiento el MEN (2006) establece para la temática de las secciones cónicas, para grado décimo y undécimo, los siguientes estándares básicos de competencias:

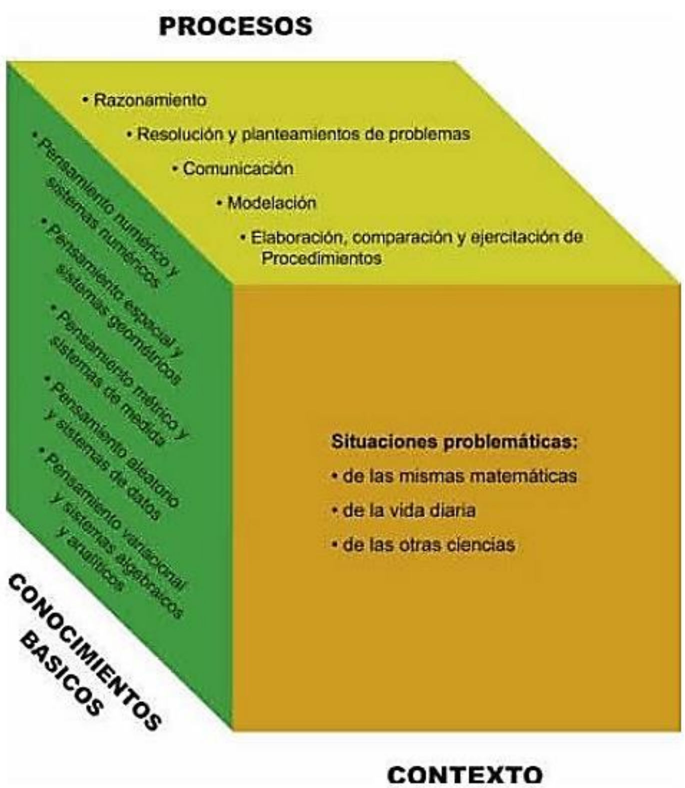
- "Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono" (MEN EBC, 2006, p. 88).
- "Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas" (p. 88).
- "Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras" (p. 88).

Uno de los principales propósitos de la presente investigación corresponde a inducir a los alumnos al análisis de determinadas propiedades geométricas de la elipse a través de las construcciones hechas con el software de geometría dinámica (Geogebra), además, se da relevancia a las diferentes conversiones y transformaciones de la elipse en sus distintos registros de representación semiótica (algebraico, gráfico, de lengua natural) ya que como afirma Duval (1999) la coordinación y el manejo de estos registros de representación favorece la comprensión de los objetos matemáticos.

Por otro lado, "el aprendizaje de las matemáticas debe posibilitar al alumno a la aplicación de sus conocimientos fuera del ámbito escolar, donde debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer sus opiniones y ser receptivo a las de los demás" MEN (1998, p. 18). Con lo mencionado anteriormente el MEN (1998) establece que es indispensable que los estudiantes vinculen la temática a aprender con la experiencia del día a día y la relacionen en contextos de situaciones problema. Acorde a esto el MEN (1998) en los lineamientos curriculares propone tres aspectos para estructurar el currículo en matemáticas de la forma como se presenta en la figura 4.18.

Figura 4.18

Lineamientos curriculares en matemáticas



Fuente: MEN (1998, p.20)

Los procesos generales se relacionan con el aprendizaje en aspectos como: resolución y planteamiento de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Los conocimientos básicos se enfocan hacia los 5 pensamientos que están en los estándares básicos de competencias tales como los sistemas numéricos, sistemas geométricos, entre otros. Finalmente, el contexto se refiere al entorno que envuelve al estudiante y que le dan un sentido a las matemáticas que estudia (MEN, 1998).

Teniendo en cuenta lo anterior y sabiendo que el MEN (1998) establece que el propósito de las situaciones didácticas que se diseñen debe generar afectividad en los estudiantes y desarrollar procesos de aprendizaje en el desarrollo de las actividades de la presente investigación se ven involucrados y potenciados los procesos: a) Resolución y el planteamiento de problemas. Proceso presente en la solución de la actividad donde se ponen en marcha los conocimientos que posee el estudiante tales como: definiciones y conocimientos previos; también se recurre a estrategias para abordar el problema, por ejemplo, hacer diferentes esquemas de la elipse en Geogebra, el ensayo y el error, buscar patrones en los datos obtenidos, acomodación y uso de la información en tablas. Se hizo un trabajo aproximado a lo que nos dice el MEN (1998):

– **El dominio del conocimiento**, que son los recursos matemáticos con los que cuenta el estudiante y que pueden ser utilizados en el problema como intuiciones, definiciones, conocimiento informal del tema, hechos, procedimientos y concepción sobre las reglas para trabajar en el dominio.

– **Estrategias cognoscitivas,** que incluyen métodos heurísticos como descomponer el problema en simples casos, establecer metas relacionadas, invertir el problema, dibujar diagramas, el uso de material manipulable, el ensayo y el error, el uso de tablas y listas ordenadas, la búsqueda de patrones y la reconstrucción del problema.

– **Estrategias metacognitivas,** se relacionan con el monitoreo y el control. Están las decisiones globales con respecto a la selección e implementación de recursos y estrategias, acciones tales como planear, evaluar y decidir (p. 53).

b) El razonamiento: según el MEN (1998), esta capacidad en matemáticas tiene que ver con: "formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos" (p. 54); Hallar patrones y representarlos matemáticamente, entre otros. En el desarrollo de las situaciones planteadas a los estudiantes en cuanto al aprendizaje del objeto matemático elipse se trabajan algunos de estos procesos, por ejemplo, cuando los estudiantes hacen transformaciones en el registro gráfico elaborado en Geogebra para conjeturar sobre cuál puede ser una definición geométrica de elipse de acuerdo a las condiciones que allí se plantean; también tienen la posibilidad de utilizar hechos conocidos como la definición y propiedades de la circunferencia y usarlas como base para definir la sección cónica en el registro gráfico y algebraico.

Para finalizar cabe mencionar que, aunque se tienda a confundir que el hacer cálculos numéricos o mentales de una manera precisa o que se desarrolle y aplique correctamente un algoritmo con el hecho de hacer matemáticas, no quiere decir que no sea importante tener en cuenta este aspecto. Por ejemplo, como se ilustra en el (MEN, 1998, p. 81):

- Si un ingeniero se equivoca en los cálculos para diseñar un puente, ya sea porque no oprimió la tecla correspondiente o porque confundió los ceros en el orden de magnitud, el puente puede quedar mal construido y se puede caer, debido a que falló un procedimiento.

- El antibiótico que se le debe dar a un niño generalmente se calcula por libra o por kilogramo de peso; solamente por confundir las libras con los kilogramos se puede cometer un error muy grave. Otra vez falló un procedimiento.

Estos procesos generales también se trabajaron en el desarrollo de las actividades propuestas en la investigación, ya que se hicieron cálculos numéricos como: hallar las distancias focales y de los ejes mayor y menor; también en el proceso de completar cuadrados para realizar una transformación en el registro de representación algebraico cuando se pasa de la ecuación general a la canónica.

Análisis de las secuencias de Actividades

A continuación, se realiza el análisis a priori y el análisis a posteriori de las secuencias didácticas desarrolladas por dos grupos de estudiantes, los cuales para efectos del estudio se llamarán Grupo 1 y Grupo 2.

Análisis a priori

En este apartado se presenta el diseño de las actividades que conforman la secuencia didáctica a implementar en el estudio, cada una de ellas con su respectivo análisis a priori el cual posteriormente será confrontado con su análisis a posteriori para llegar finalmente a la validación de la información recolectada y principalmente al cumplimiento del objetivo planteado en el estudio.

A continuación, se presenta el análisis a priori de las secuencias de actividades que desarrollaron los estudiantes involucrados en la investigación. Dichas secuencias tienen el propósito de coordinar los distintos registros de representación semiótica para el trabajo con la elipse. La primera actividad tiene la finalidad de coordinar los registros pictóricos y de lengua natural y la segunda de coordinar los registros gráfico y algebraico.

Actividad 1: Condición Geométrica de la Elipse

El propósito de la primera actividad es que los estudiantes logren representar la elipse en el registro pictórico. Después de representarla, se espera que a través de transformaciones en ese registro consigan conceptualizar la condición geométrica de la elipse. La actividad desarrollada por los estudiantes se encuentra en la figura 4.19.

Figura 4.19

Actividad 1: Condición Geométrica de la Elipse

1. Abra el archivo denominado "Actividad 1a"

   Explore la construcción geométrica moviendo el punto P sobre la circunferencia y el punto Q movilícelo al interior de la circunferencia. Se sugiere que transforme la construcción moviendo dichos puntos al menos tres veces.

   Anote las observaciones hechas sobre las modificaciones que hizo en la construcción.

   Teniendo en cuenta las modificaciones hechas a la construcción responda las siguientes preguntas:

   i. ¿Qué relación puede establecer entre los segmentos de recta $\overline{QA}$ y $\overline{AP}$?
   ii. ¿Qué relación existe entre los segmentos de recta $\overline{QA}$, $\overline{AC}$ y la circunferencia?

2. Movilice el punto Q a cualquier parte al interior de la circunferencia. Después active la opción "rastro" sobre el punto A. Finalmente mueva el punto P sobre la circunferencia. Se sugiere como mínimo realizar este procedimiento tres veces. (Nota: antes de cambiar de posición al punto Q desactive la opción "rastro" al punto A)

   i. Teniendo en cuenta las movilizaciones realizadas ¿Qué relación existe entre los puntos que conforman la figura obtenida y los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$?

3. Abra el archivo denominado "Actividad 1b"

   Analice la construcción geométrica haciendo variar el radio de la circunferencia y cambiando de posición el punto Q. Después active la opción "rastro" sobre el punto A. Para terminar, movilice el punto P sobre la circunferencia.

   i. Con base en lo observado ¿Qué relación puede concluir entre los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$, el radio de la circunferencia y la figura formada por el arrastre del punto A?

   Utilice la herramienta Elipse y construya la curva que pasa por los puntos Q, C y A. Después intercepte la recta que pasa por los puntos Q y C con la figura obtenida. Finalmente determine la longitud del segmento de recta $\overline{FG}$.

   Ahora explore la construcción geométrica movilizando el punto P, el punto interior Q y el radio de la circunferencia.

   Teniendo en cuenta lo observado:

   ii. ¿Qué relación existe entre los segmentos $\overline{QA}$, $\overline{AC}$, el radio de la circunferencia y el segmento $\overline{FG}$?
   iii. De acuerdo con lo observado ¿Cómo define la elipse?

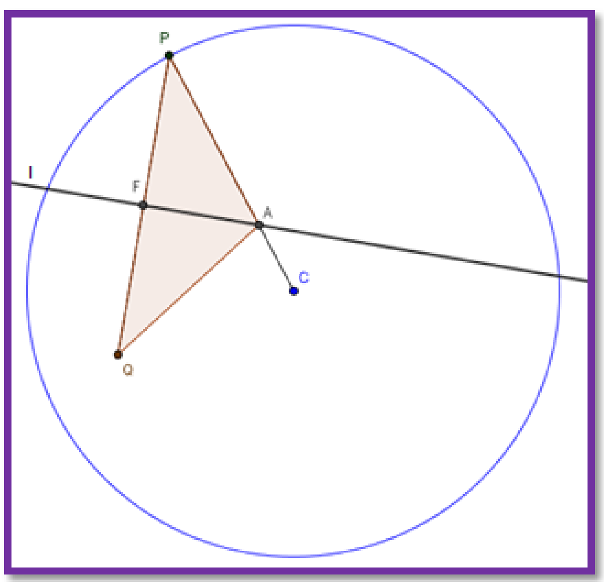
Fuente: Elaboración propia

El propósito de la actividad 1 corresponde a representar la elipse en el registro pictórico por medio del software de geometría dinámica Geogebra y no construirlo con lápiz y papel, bajo la hipótesis que al desarrollarlo de esta manera los objetos geométricos mantienen intactas sus propiedades al aplicarles modificaciones (desplazamientos) y con ello se puede caracterizar la construcción geométrica.

Se desea que en el desarrollo de la actividad 1 los estudiantes efectúen tratamientos con las variables didácticas (radio de la circunferencia, punto interior a la circunferencia, punto sobre la circunferencia) dentro de la representación pictórica con el propósito de generar diferentes construcciones o curvas y que ello permita la coordinación entre los registros pictórico y de lengua natural. Por otro lado, se espera que los estudiantes analicen la construcción geométrica mostrada en el archivo de geogebra denominada "*actividad 1a*", tal como se enseña en la figura 4.20.

Figura 4.20

Construcción en Geogebra de la Actividad 1.1



Fuente: Elaboración propia

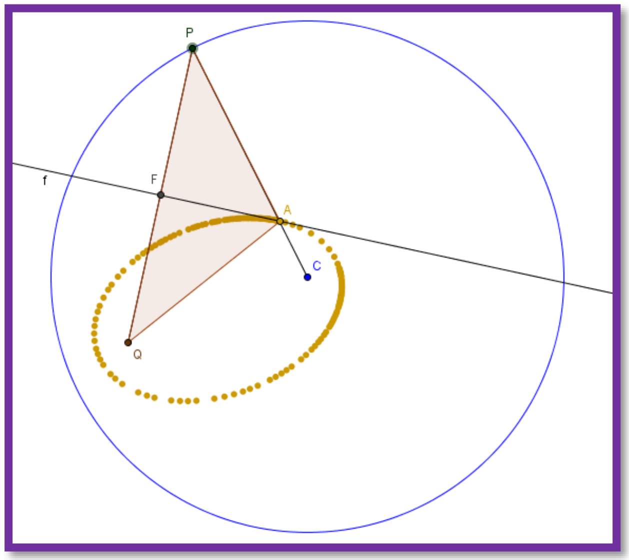
En relación al ítem (i) del punto 1, se espera que los estudiantes respondan la pregunta afirmando que los segmentos de recta $\overline{QA}$ y $\overline{AP}$ son congruentes por medio de principios geométricos. Una posible justificación es que determinen que los triángulos QFA y PFA son congruentes con base en el criterio Ángulo-Lado-Ángulo y por ende los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{AP}$ son iguales. Otro posible argumento puede ser que observen que el punto A que pertenece a la recta l y que dicha recta es mediatriz del segmento $\overline{PQ}$ y que por lo tanto estos segmentos tienen la misma longitud. Por último, se puede esperar que los estudiantes observen que el triángulo APQ es un triángulo isósceles y por tanto los lados QA y AP son congruentes. Se espera que los estudiantes logren hacer una conversión de la representación geométrica de los segmentos al lenguaje natural.

Con respecto al ítem (ii) del punto 1, se espera que los estudiantes observen que la suma de los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ es igual a la longitud del radio la circunferencia basándose en el resultado del punto (i), es decir, que observen que la longitud del segmento $\overline{QA}$ es igual al segmento $\overline{AP}$ y, por consiguiente, la suma de los segmentos $\overline{AQ}$+ $\overline{AC}$ da lo mismo que la suma de $\overline{PA}$+ $\overline{AC}$, que corresponde a la longitud del radio de la circunferencia de la construcción geométrica.

En el punto 2, se espera que al movilizar el punto Q (variable didáctica) generen diferentes construcciones de la elipse en el registro de representación figural por medio de la función “rastro” tal y como se muestra en la figura 4.21.

Figura 4.21

Construcción en Geogebra de la Actividad 2.1



Fuente: Elaboración propia

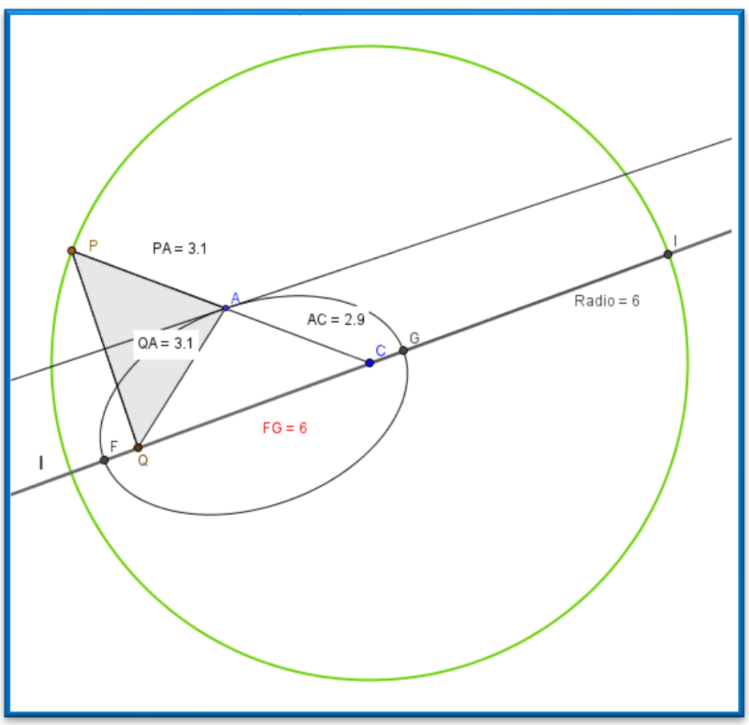
Con lo anterior se espera que los estudiantes logren observar que al sumar las distancias de los puntos obtenidos en la figura 4.21 donde los puntos Q y C son constantes, es decir, que independiente del tamaño de la figura formada siempre la suma de los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ va a ser igual.

En relación con el punto $3(i)$, para generar nuevas construcciones del objeto matemático elipse en el registro de representación pictórico, además de hacer variar el punto Q (variable didáctica), se tiene en cuenta la movilidad de la variable didáctica “radio”. El hecho que los estudiantes elaboren nuevas representaciones de la curva haciendo variar estos puntos les permite que realicen tratamientos de la representación de la cónica y con ello que puedan tener fundamentos para responder la pregunta. En este punto se pretende que los estudiantes noten que independientemente de las modificaciones que le hagan a la construcción geométrica por medio de las variables didácticas, la suma de los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ (que forman la elipse) es igual a la longitud del radio de la circunferencia.

Para terminar la actividad, en el punto $3(ii)$ se espera que los estudiantes no se queden con la única representación de la elipse que está en el archivo de Geogebra para responder las preguntas, sino que elaboren variadas representaciones de la curva en el registro figural, es decir, que realicen tratamientos de la representación de la elipse, esto con el propósito que tengan más argumentos para sustentar sus conjeturas según la figura 4.22.

Figura 4.22

Construcción en Geogebra de la Actividad 1.3



Fuente: Elaboración propia

En este punto se pretende que los estudiantes observen que independiente de la variación que tengan el centro y los puntos Q y P (variables didácticas) la suma de los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$

continúa teniendo el mismo valor que el radio de la circunferencia y que además es congruente con el segmento $\overline{FG}$ que resulta de intersecar la recta l con la elipse.

Al concluir esta primera actividad, se espera que los estudiantes logren conceptualizar la condición geométrica de la curva a través del lenguaje natural, esto es, que la elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma a dos puntos denominados focos es constante e igual a la longitud del segmento determinado por la intersección de la recta l y la representación figural de la cónica. Así, teniendo en cuenta lo señalado por Duval (1999), el realizar los distintos tratamientos de la elipse en el registro de representación figural y una posterior conversión de este registro al de lengua natural le permitirá una coordinación entre dichos registros lo cual generará en el estudiante una comprensión del objeto matemático elipse.

Al finalizar la primera actividad, el docente interviene para terminar de institucionalizar el concepto de elipse señalando sus principales elementos tales como: los focos, el eje mayor, menor y la comprobación de la condición geométrica de la cónica.

Actividad 2: Representación de la elipse en el registro gráfico y algebraico

El propósito de esta actividad es en primer lugar~~,~~ que los estudiantes logren reconocer los elementos que componen la elipse en su representación gráfica con base en lo desarrollado y acordado en la actividad anterior y segundo, que por medio de tratamientos que hagan a la construcción geométrica y teniendo en cuenta los conocimientos previos relacionados con geometría analítica (distancia entre dos puntos), el teorema de Pitágoras (estudiado en grado 8º) y la simplificación de expresiones algebraicas se logre obtener su representación en el registro algebraico y la relación existente entre sus elementos más característicos. En la siguiente figura se detallan las actividades a desarrollar en la secuencia 2 como se presenta en la figura 4.23.

Figura 4.23

Actividad 2: Representación Algebraica y Gráfica de la Elipse

Actividad 2: Representación Algebraica y Gráfica

1. Abra el archivo denominado "Actividad II"

   Explore la construcción geométrica cambiando la longitud del eje focal mediante el deslizador "Eje Focal". Se sugiere que transforme la construcción al menos tres veces.

   Anote las observaciones hechas sobre las modificaciones que hizo en la construcción.

   Teniendo en cuenta las modificaciones hechas a la construcción responda las siguientes preguntas:

   i. ¿Qué relación puede establecer entre la forma que toma la elipse, el eje focal y el eje mayor?
   ii. Matemáticamente ¿Cómo puede expresar dicha relación?

2. Analice la construcción cambiando la longitud de los ejes focal y mayor por medio de los deslizadores "Eje Focal" y "Eje Mayor" respectivamente.

   i. Teniendo en cuenta las movilizaciones realizadas ¿Observa alguna relación con respecto a la longitud del segmento $\overline{F_1B_1}$?
   ii. Ubique el punto P sobre el punto B_1 o B_2. Ahora vuelva a explorar la construcción haciendo variar la longitud de los ejes mayor y focal ¿Qué relación puede establecer entre los semiejes mayor, menor y focal?

3. Movilice el punto F_2 entre los valores 3 o 4 y fije el punto A_2 en el valor de 5. Finalmente ubique el punto P sobre cualquier punto de la elipse.

   i. Determine una expresión que describa la curva teniendo en cuenta la condición geométrica de la elipse
   ii. Exprese el resultado obtenido en el paso ($3i$) en la siguiente forma canónica:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

4. Teniendo en cuenta el resultado obtenido en ($3ii$)

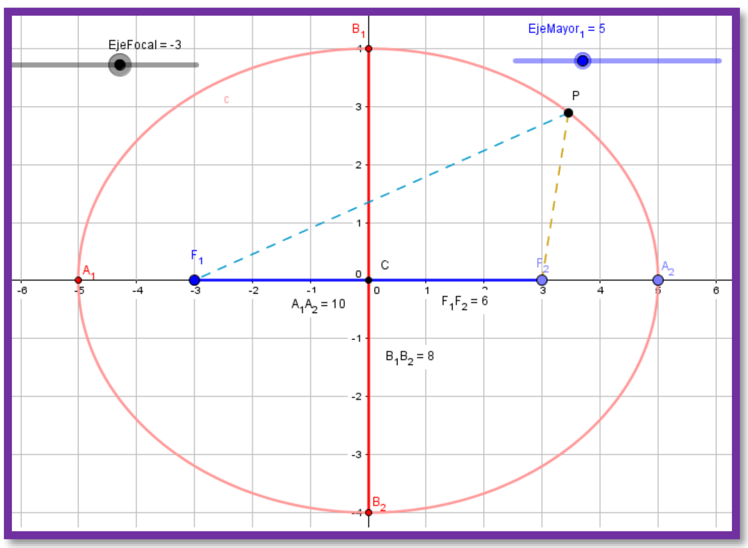
   i. ¿Qué relación puede establecer con respecto a la representación gráfica de la elipse dada en el punto 3?

Fuente: Elaboración propia

Se pretende que en el desarrollo de la segunda actividad los alumnos realicen tratamientos con las "variables didácticas" dentro de la representación gráfica de la elipse con el objetivo de generar diferentes construcciones y que esto posibilite la coordinación entre los registros gráfico y algebraico, ya que, como afirma Duval (1999), para lograr la comprensión de un concepto matemático es indispensable la coordinación entre registros de representación semiótica. Por otro lado, se espera que los estudiantes analicen la construcción geométrica elaborada en el archivo de geogebra denominada "*actividad II*", tal como se muestra en la figura 4.24.

Figura 4.24

Representación Gráfica de la Elipse



Fuente: Elaboración propia

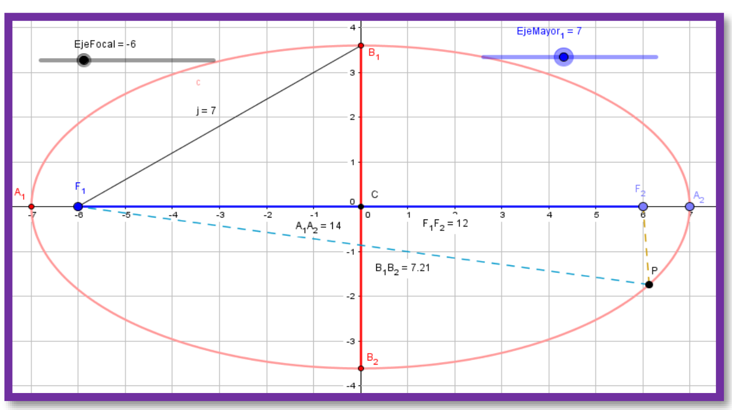
Se espera que los estudiantes en el punto $(1i)$ exploren la construcción geométrica movilizando la variable didáctica "eje focal" haciendo variar la longitud de dicho eje, en otras palabras, que efectúen tratamientos de la representación de la curva en el registro gráfico y analicen los cambios que tiene la curva. En este ítem se pretende que los estudiantes observen que a medida que la longitud del eje focal se acerca a la longitud del eje mayor la representación gráfica de la elipse va sufriendo ciertos cambios, es decir, que si las longitudes son casi iguales entonces la elipse va tomando una forma achatada, y, por otro lado, si la longitud del eje focal tiende a cero entonces la cónica va tomando una forma circular.

En relación al punto $(1ii)$ se espera que los estudiantes utilicen la herramienta *distancia* o *longitud* y midan las longitudes de los semiejes mayor y focal. Posteriormente que determinen que si el cociente entre el eje focal y el eje mayor tiende a 1 entonces la gráfica tiende a ser de forma achatada, y, si por el contrario dicho cociente tiende a cero entonces la gráfica tiende a ser de forma circular. Finalmente, se desea que expresen dicha relación por medio de una ecuación en términos de los semiejes focal y mayor.

Respecto al ítem $(2i)$ se espera que los estudiantes obtengan diferentes representaciones de la elipse en el registro gráfico y observen al utilizar la herramienta *distancia o longitud* que la longitud del segmento $\overline{F_1B_1}$ es congruente con la longitud del semieje mayor, tal como se muestra en la figura 4.25.

Figura 4.25

Congruencia de Segmentos de la Elipse



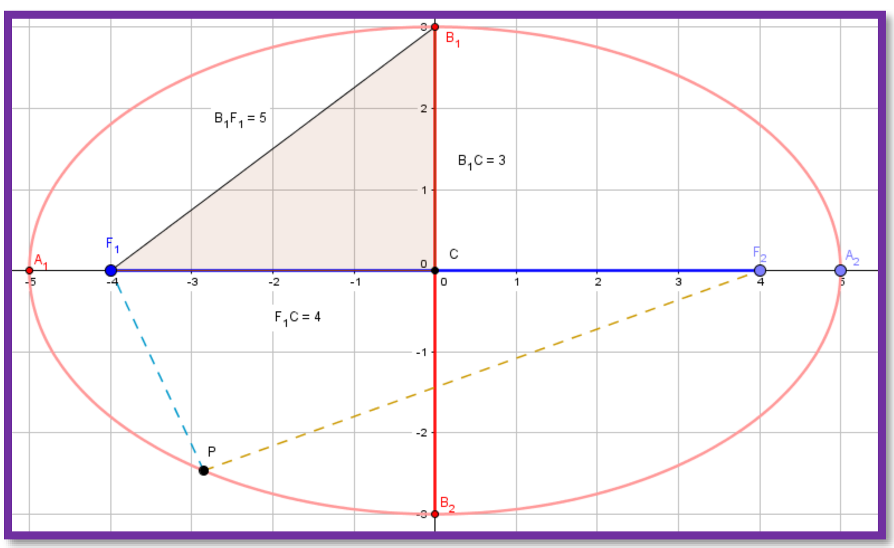
Fuente: Elaboración propia

En el ítem $(2ii)$ se espera que los estudiantes al realizar distintas transformaciones de la curva en el registro gráfico observen que la medida del segmento $\overline{F_1B_1}$ hace parte de los lados del triángulo rectángulo F_1B_1C y que además verifiquen que dicho triángulo es rectángulo utilizando la herramienta *ángulo* de geogebra, esto es, que encuentren que la medida del segmento $\overline{F_1B_1}$ representa la hipotenusa del triángulo y los segmentos $\overline{F_1C}$ y $\overline{B_1C}$ los catetos del mismo. Se desea que observen que no importa cuánto varíe la representación gráfica de la elipse la relación entre los semiejes mayor, menor y focal siempre van a cumplir la relación pitagórica de la siguiente forma (ver figura 4.26):

$$(Semieje\ menor)^2 + (Semieje\ focal)^2 = (Semieje\ mayor)^2$$

Figura 4.26

Relación Pitagórica de los Semiejes de la Elipse



Fuente: Elaboración propia

En relación al punto $(3i)$ se espera que los estudiantes teniendo en cuenta la representación gráfica de la elipse, la condición geométrica de la misma, conocimientos previos de geometría analítica (distancia entre dos puntos) y simplificación de expresiones algebraicas puedan efectuar la conversión de la representación gráfica a una representación algebraica. Se espera que los estudiantes lleguen a la siguiente expresión: $Ax^2 + By^2 + C = 0$, la cual representa la ecuación general de la elipse con centro en el origen de coordenadas. Después de abordado el punto anterior se espera que los estudiantes en el ítem $(3ii)$ realicen tratamientos a la cónica en el registro algebraico y logren llegar a la siguiente expresión de la ecuación canónica de la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Para terminar la actividad 2, se desea que los estudiantes en el punto $(4i)$ reconozcan que el valor de a en la expresión anterior corresponde a la longitud del semieje mayor, el valor de b corresponde a la longitud del semieje menor y que para determinar la longitud del semieje focal los valores a, b y semieje focal se relacionan mediante el teorema de Pitágoras.

Al finalizar la actividad 2 se espera que los estudiantes puedan representar la elipse en el registro algebraico, y con esto, que efectúen la coordinación entre los registros de representación algebraico y gráfico con el propósito de lograr una comprensión del objeto matemático.

Análisis a posteriori

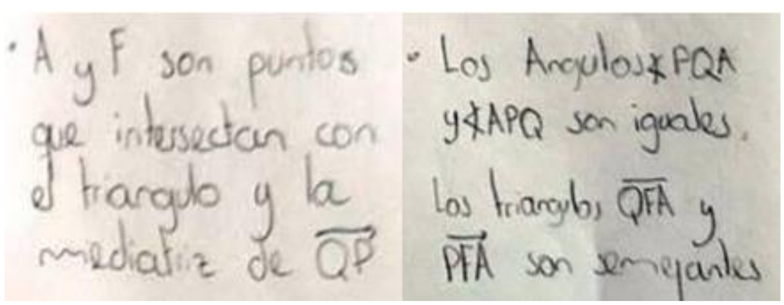
Actividad 1: Condición Geométrica de la Elipse

Análisis Grupo 1

Con relación al ítem $1i$) del primer punto de la actividad $1a$, al realizar las exploraciones correspondientes con el punto P y Q, el Grupo 1 se enfocó en observar qué ocurre con las longitudes de los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{AP}$ analizándolos de diversas formas. Comenzaron por señalar que los puntos A y F se intersecan con el triángulo APQ y con la mediatriz del segmento de recta $\overline{QP}$. En este punto queda claro que los estudiantes tienen claro el concepto de mediatriz de un segmento y que están en capacidad de aplicarlo en la solución de problemas. Posteriormente a este análisis, el Grupo 1 señaló que los ángulos PQA y APQ son congruentes, ya que lo pudieron comprobar utilizando la herramienta ángulo de Geogebra para realizar las respectivas mediciones, y, al comprobar que los ángulos tienen la misma medida procedieron a afirmar que los triángulos QFA y PFA son semejantes, tal como lo muestra la siguiente imagen:

Figura 4.27

Exploración del Grupo 1 en el ítem i

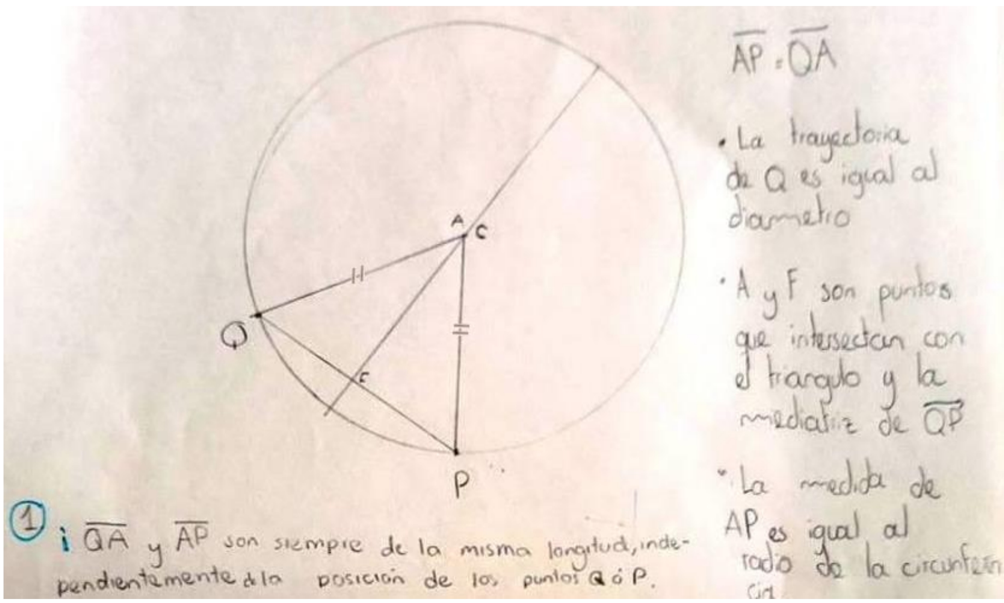


Fuente: Grupo 1, actividad 1a

Como resultado del anterior análisis, el Grupo 1 determinó que los segmentos de recta $\overline{AP}$ y $\overline{QA}$ son congruentes, tal y como lo enseña la figura 4.28.

Figura 4.28

Solución del Grupo 1, ítem i) Actividad 1a



Fuente: Grupo 1, actividad 1a

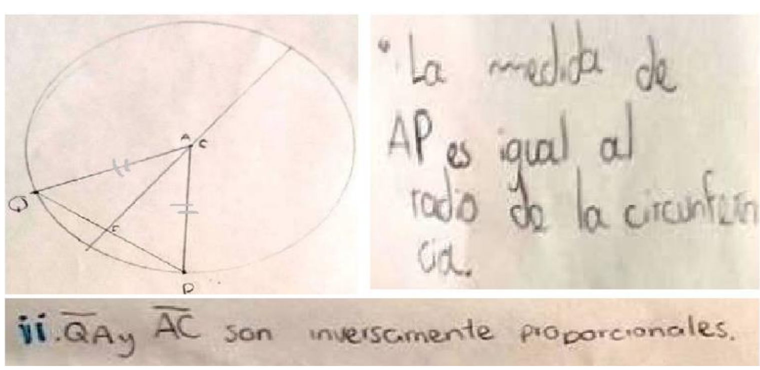
Tal como se describió en el análisis a priori, el Grupo 1 logró lo propuesto, es decir, pudo determinar que los segmentos de recta $\overline{AP}$ y $\overline{QA}$ tienen la misma medida por medio de principios geométricos, tales como: semejanza de triángulos (cabe aclarar en este punto que los estudiantes tenían un obstáculo conceptual entre la definición de semejanza y congruencia, ya que suponían que significaban lo mismo, es decir, que semejanza y congruencia denotaban igualdad), triángulos isósceles y la mediatriz de un segmento.

En las figuras 4.27 y 4.28 se observa que el Grupo 1 llevó a cabo una conversión de la representación pictórica del triángulo a una representación en el lenguaje natural, lo cual demuestra que los estudiantes coordinaron dichos registros de representación semiótica.

Con respecto al ítem $1ii$), el Grupo1 contestó que los segmentos de recta $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ son inversamente proporcionales, es decir, que a medida que la longitud de un segmento aumenta, la del otro disminuye y viceversa. Aunque esta apreciación no es relevante para inferir que, como se propuso en el análisis a priori que la suma de dichos segmentos corresponde al radio de la circunferencia, contribuyó, junto con la *herramienta distancia entre dos puntos* de Geogebra a que se comprobara que la suma de los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ es igual a la longitud del segmento $\overline{PC}$ (que corresponde al radio de la circunferencia) como lo muestra la figura 4.29. Por lo tanto, se logró parcialmente lo esperado en el análisis a priori, es decir, aunque determinaron que la suma de los segmentos de recta $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ es igual a la longitud del segmento $\overline{PC}$, no lo hicieron determinando que la longitud del segmento $\overline{QA}$ es congruente al segmento $\overline{AP}$ y, por lo tanto, la suma de los segmentos $\overline{AQ}$+ $\overline{AC}$ es equivalente a la suma de $\overline{PA}$+ $\overline{AC}$.

Figura 4.29

Solución del Grupo 1, ítem ii) Actividad 1a



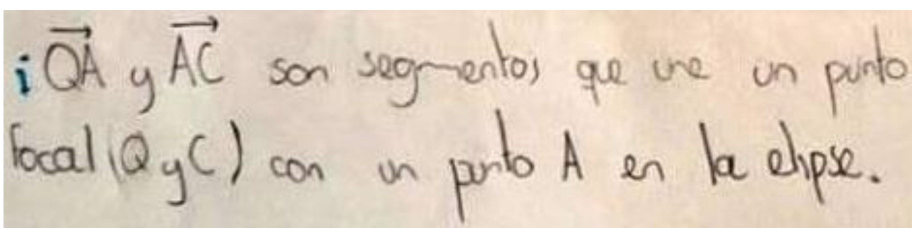
Fuente: Grupo 1, actividad 1a

Se puede observar que el Grupo 1 coordinó los registros de representación de lengua natural y pictórico, ya que, para simbolizar en lenguaje natural la respuesta, fue necesario que llevaran a cabo tratamientos de las medidas de los segmentos que estaban en la construcción geométrica para concluir que la suma de los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ es igual a la longitud del radio, que en la figura 4.29, los estudiantes la simbolizan como el segmento de recta $\overline{AP}$.

Respecto al punto $2i)$, el Grupo 1 logró conceptualizar lo previsto en el análisis a priori, es decir, que independientemente del tamaño y forma de la figura formada, al sumar las longitudes de los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ esta va a dar un resultado constante. Para tal afirmación, los estudiantes comenzaron por determinar que los segmentos de recta $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ siempre van a tener relación con los puntos que conforman la elipse, tal y como lo muestra la figura 4.30.

Figura 4.30

Solución del Grupo 1, punto 2i) Actividad 1a

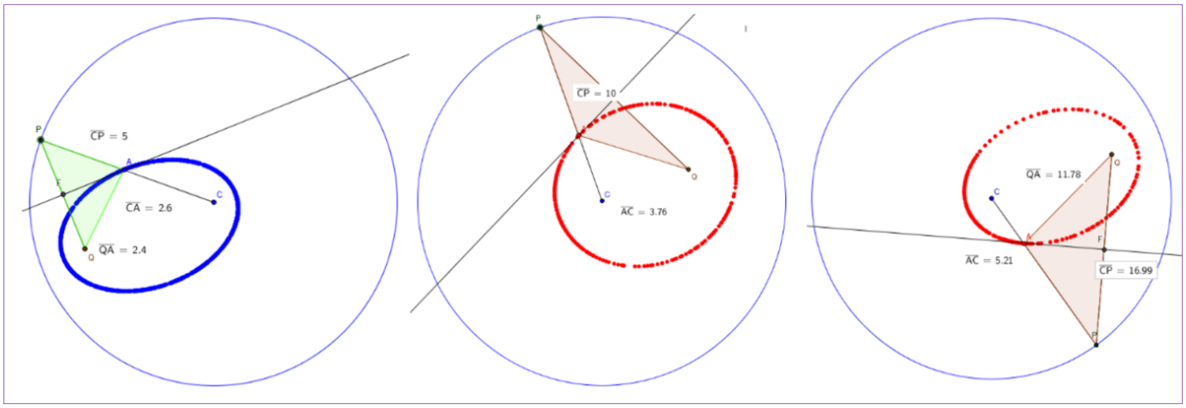


Fuente: Grupo 1, actividad 1a

Posteriormente, para concretar que la suma de los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ va a ser invariable, el Grupo 1 realizó varias transformaciones del objeto matemático elipse en el registro de representación pictórico, tal como lo muestra la siguiente imagen extraída de los archivos de Geogebra utilizados por los estudiantes del grupo 1.

Figura: 4.31

Solución Grupo 1 actividad 1a (utilizando Geogebra)



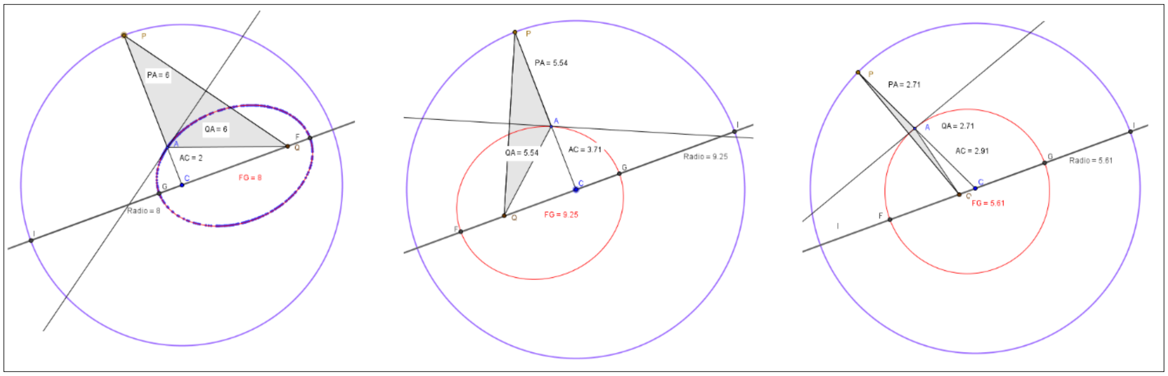
Fuente: Grupo 1, actividad 1a (Geogebra)

Como se puede observar, los estudiantes lograron coordinar los registros de representación pictórico y de lengua natural, ya que al generar diferentes curvas utilizando Geogebra y la herramienta distancia que esta incorpora, lograron determinar de forma verbal que independientemente del tamaño que tenga la figura al sumar los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ siempre dará un mismo número. Lo anterior muestra que el Grupo 1 realizó una conversión del registro de representación pictórico al de lengua natural.

En relación al punto $3i$), los estudiantes del Grupo 1 elaboraron variadas representaciones de la curva en el registro de representación pictórico movilizando las variables didácticas (radio de la circunferencia, punto Q y punto A), lo cual los llevó a determinar lo que se había previsto en el análisis a priori, es decir, que tal como se evidenció en el punto anterior, la suma de los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ es siempre constante, pero, que dicha constante siempre es igual al radio de la circunferencia. Los estudiantes realizaron tratamientos en el registro pictórico para después llegar a una conclusión expresada en el registro de lengua natural (conversión entre registros). En la figura 4.32 se evidencia que Grupo 1 coordinó los registros pictóricos y de lenguaje natural.

Figura 4.32

Respuesta Grupo 1, actividad 1b, ítem 3i.

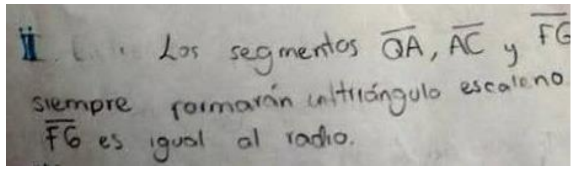


Fuente: Grupo 1, actividad 1a (Geogebra)

En cuanto al punto $3ii$), el Grupo 1 respondió lo esperado en el análisis a priori, esto es, que, al realizar las exploraciones de la construcción, movilizando las variables didácticas, observaron que la suma de los segmentos de recta $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ sigue teniendo el mismo valor numérico, y que dicha suma es igual tanto al radio de la circunferencia como también a la longitud del segmento $\overline{FG}$. Otra conclusión que determinaron los estudiantes fue que los segmentos de recta $\overline{QA}$, $\overline{AC}$ y $\overline{FG}$ siempre forman un triángulo escaleno (dicha afirmación no es relevante para el análisis del punto y evidentemente tampoco es verdadera) y se evidencia en la figura 4.33. Por consiguiente, el Grupo 1 logró determinar que la suma de los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ tiene la misma medida que el radio de la circunferencia y que el segmento de recta $\overline{FG}$.

Figura 4.33

Respuesta Grupo 1, actividad 1b, ítem 3ii.



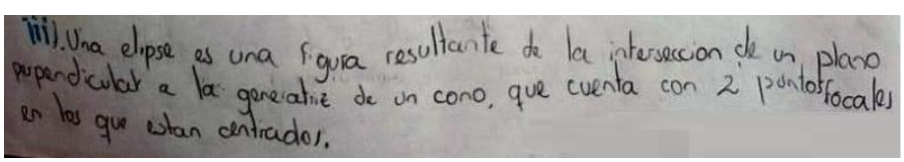
Fuente: Grupo 1, actividad 1b

Por consiguiente, el Grupo 1 demostró realizar tratamientos de le los segmentos de recta $\overline{QA}$, $\overline{AC}$ y $\overline{FG}$ en el registro de representación pictórico para así lograr una conversión al registro de lengua natural al afirmar que la suma de los segmentos de recta $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ están relacionadas con el radio de la circunferencia y el segmento de recta $\overline{FG}$.

Para finalizar, en el punto $3iii$), los estudiantes dieron un concepto de elipse de acuerdo a conocimientos previos que, según ellos, observaron alguna vez en un libro y no el concepto esperado en el análisis a priori. Por consiguiente, los estudiantes no lograron determinar que la elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a la longitud del segmento de recta $\overline{FG}$. La respuesta dada por los estudiantes al ítem $3ii$) se muestra en la figura 4.34.

Figura 4.34

Respuesta Grupo 1, actividad 1b, ítem 3iii.



Fuente: Grupo 1, actividad 1b

Al terminar la actividad 1 denominada *Condición Geométrica de la Elipse*, el docente formalizó el concepto geométrico del objeto matemático elipse, como el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a la longitud del eje mayor de la elipse. Después de precisar el concepto geométrico, se conceptualizaron elementos que conforman la representación geométrica de la cónica, tales como: Eje mayor, eje menor y eje focal. Con los anteriores conceptos formalizados se prosiguió a trabajar la actividad 2 denominada *Representación de la elipse en el registro gráfico y algebraico*.

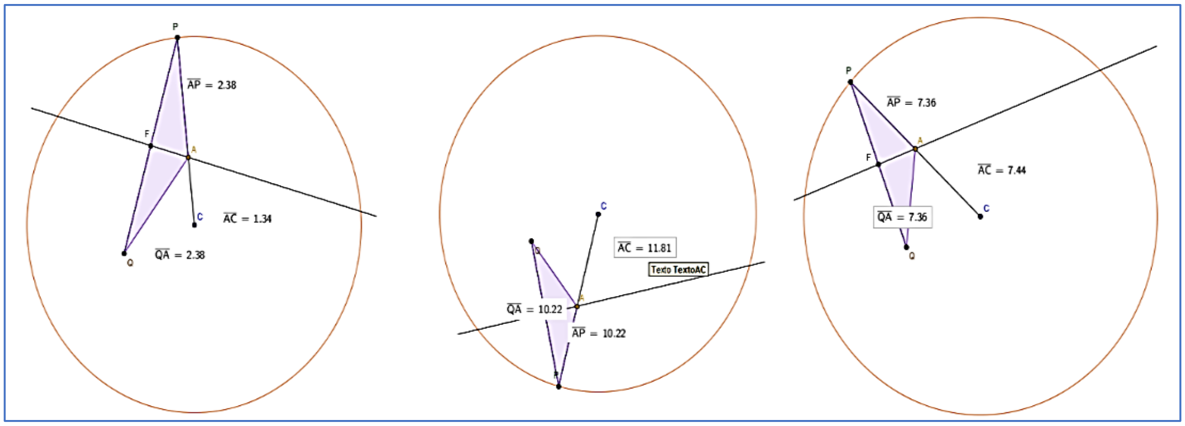
Análisis Grupo 2

Respecto al punto $1i$), al realizar transformaciones en el registro pictórico movilizando las variables didácticas (puntos P y Q), el Grupo 2 afirmó, según lo planeado en el análisis a priori, que la longitud de los segmentos de recta $\overline{QA}$ y $\overline{AP}$ es congruente, es decir, que independientemente del tamaño de la figura (circunferencia y triángulo) siempre medirán lo mismo. Dicha afirmación la sustentaron utilizando la *herramienta distancia* de Geogebra y no como se esperaba según el análisis a priori, esto es, que lo determinaran mediante propiedades geométricas tales como: congruencia de triángulos, mediatriz de un segmento o triángulos isósceles.

Las representaciones pictóricas sobre las cuales realizaron la afirmación los estudiantes se pueden observar en la figura 4.35.

Figura 4.35

Representaciones pictóricas ítem 1i (actividad 1a)



Fuente: Grupo 2, actividad 1a

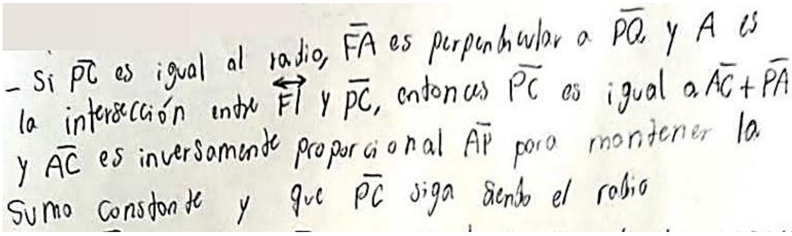
Teniendo en cuenta la figura 4.35, los estudiantes evidenciaron una conversión del registro de representación pictórico al de lengua natural al realizar transformaciones primeramente en el registro pictórico y, posteriormente, expresar dichas transformaciones en un lenguaje natural.

En cuanto al punto $1ii$), la respuesta del Grupo 2 no correspondió con lo esperado según el análisis a priori, en otras palabras, los estudiantes no lograron inferir que la suma de los segmentos de recta $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ es congruente con la medida del segmento $\overline{PC}$, es decir, con el radio de la circunferencia. Los estudiantes se limitaron a describir lo que sucedía con la construcción a medida que al movilizar las variables didácticas estas realizaban transformaciones en el registro pictórico.

Lo descrito por el Grupo 2 se muestra en la figura 4.36.

Figura 4.36

Respuesta Grupo 2 al punto 1ii



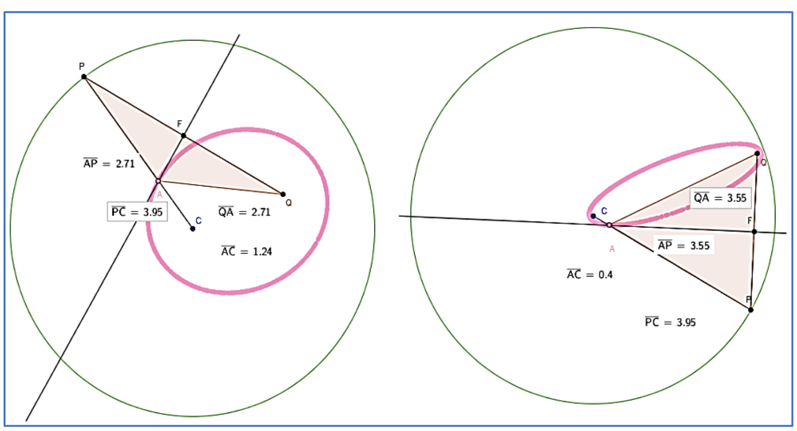
- Si $\overline{PC}$ es igual al radio, $\overline{FA}$ es perpendicular a $\overline{PQ}$ y A es la intersección entre $\overleftrightarrow{FI}$ y $\overline{PC}$, entonces $\overline{PC}$ es igual a $\overline{AC} + \overline{PA}$ y $\overline{AC}$ es inversamente proporcional $\overline{AP}$ para mantener la suma constante y que $\overline{PC}$ siga siendo el radio

Fuente: Grupo 2, ítem 1ii

Ahora, respecto al punto 2i, el Grupo 2 logró lo planteado en el análisis a priori, esto es, que no importa el tamaño y forma que tenga la circunferencia y la curva que se encuentra dentro de la misma, la suma de los segmentos de recta $\overline{AC}$ y $\overline{QA}$ es invariable. Para determinar la conjetura anterior, los estudiantes llevaron a cabo transformaciones en el registro de representación pictórico de la curva, como se ilustra en la figura 4.37 sacada de los archivos de Geogebra sobre los cuales trabajaron.

Figura 4.37

Solución Grupo 2 actividad 1a (utilizando Geogebra)

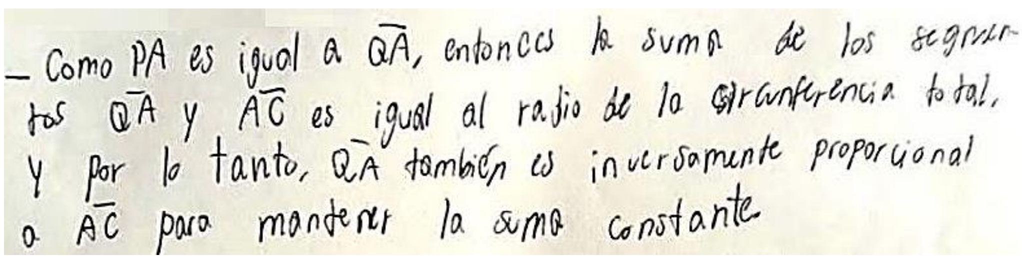


Fuente: Grupo 2, actividad 1a (Geogebra)

No obstante, los estudiantes con base en las transformaciones realizadas en el registro pictórico, dieron también respuesta al ítem 3i. Plasmaron las conjeturas de los dos puntos en una sola afirmación, es decir, determinaron lo esperado en el análisis a priori, que al sumar los segmentos de recta $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ siempre el resultado será un número constante, y, que dicho número siempre corresponde al radio de la circunferencia. La anterior observación la podemos detallar en la figura 4.38.

Figura 4.38

Respuesta Grupo 2 al punto 2i y 3i


– Como PA es igual a $\overline{QA}$, entonces la suma de los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ es igual al radio de la circunferencia total, y por lo tanto, $\overline{QA}$ también es inversamente proporcional a $\overline{AC}$ para mantener la suma constante

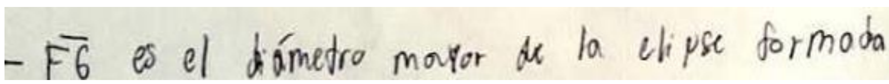
Fuente: Grupo 2, actividad 1b

Con base en lo anterior se evidencia que el Grupo 2 efectuó tratamientos de la representación de la cónica en el registro pictórico, lo cual les permitió realizar una conversión al registro de lengua natural al determinar que la suma de los segmentos de recta $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ tienen relación con el radio de la circunferencia. Por lo tanto, coordinaron dos registros de representación lo cual, según Duval (1999), conlleva a una comprensión significativa del objeto matemático.

Respecto al punto 3ii, los estudiantes no respondieron según lo esperado en el análisis a priori, en otras palabras, que, al realizar transformaciones de la curva en el registro pictórico por medio de las variables didácticas, solamente llegaron a inferir que la suma de los segmentos de recta $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ siempre es congruente con el radio de la circunferencia mas no con la longitud del segmento $\overline{FG}$. La conclusión a la cual llegaron después de explorar la construcción en varias oportunidades es que el segmento de recta $\overline{FG}$ corresponde (según lo define el Grupo 2) al diámetro mayor de la sección cónica, conclusión que no cobra relevancia en el análisis del ítem $3ii$). La anterior conjetura la podemos observar en figura 4.39.

Figura 4.39

Respuesta Grupo 2 al punto 3ii

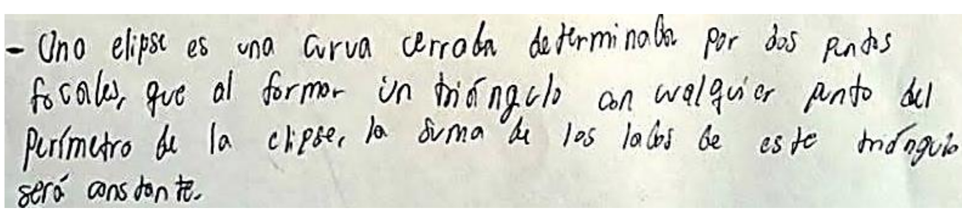

- $\overline{FG}$ es el diámetro mayor de la elipse formada

Fuente: Grupo 2, actividad 1b

Para finalizar la actividad 1, en el ítem 3iii el Grupo 2 expresaron una concepción de elipse de forma parcial a como se esperaba según el análisis a priori, es decir, describieron la curva de forma geométrica, pero con falencias puntuales en la definición (falencias que se pudieron haber evitado si los estudiantes hubiesen inferido que los segmentos de recta $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ están enlazadas con el radio de la circunferencia y el segmento $\overline{FG}$). La contestación dada por el Grupo 2 se ilustra en la-figura 4.40.

Figura 4.40

Respuesta Grupo 2, actividad 1b, ítem 3iii.


- Una elipse es una curva cerrada determinada por dos puntos focales, que al formar un triángulo con cualquier punto del perímetro de la elipse, la suma de los lados de este triángulo será constante.

Fuente: Grupo 2, actividad 1b

Como muestra la figura 4.40, los estudiantes se acercan a la definición geométrica de la elipse, la cual dice que es el lugar geométrico de los puntos cuya suma a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a la longitud del segmento de recta $\overline{FG}$. En la definición dada por el Grupo 2 afirman que la curva está compuesta por los puntos “focales” y que la suma de dichos puntos focales a cualquier punto que conforma la elipse es constante (solamente les faltó determinar que esa constante es igual a la longitud del segmento de recta $\overline{FG}$, el cual habían denominado como “diámetro mayor de la elipse”). Se observa también que los estudiantes para llegar al concepto geométrico de elipse realizaron una conversión del registro de representación pictórico al de lengua natural, esto por medio de transformaciones que los estudiantes llevaron a cabo en el registro pictórico el cual les permitió llegar a un concepto de la condición geométrica de la elipse en el lenguaje natural.

Al finalizar la actividad 1 llamada *Condición Geométrica de la Elipse*, el profesor institucionalizó la concepción geométrica de la elipse, el cual se define como aquel lugar geométrico de los puntos cuya distancia a dos puntos fijos denominados focos es constante y congruente con la longitud del eje mayor de la elipse. Después se formalizaron los conceptos referentes a los ejes (mayor, menor y focal). Teniendo en cuenta los conceptos formalizados se continuó a trabajar la actividad 2 denominada *Representación de la elipse en el registro gráfico y algebraico*.

Actividad 2: Representación de la elipse en el registro gráfico y algebraico

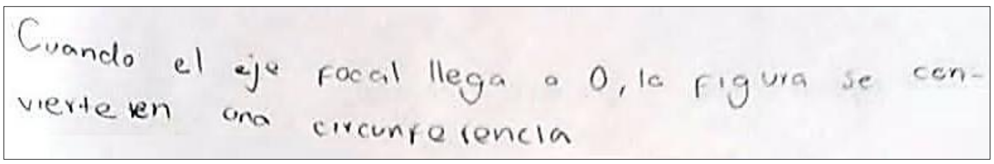
Análisis Grupo 1

Respecto al punto $1i$), los estudiantes al explorar la construcción geométrica haciendo uso de las variables didácticas (eje focal), observaron los cambios que tuvo la curva a medida que realizaban transformaciones en el registro gráfico, tal y como lo señala la imagen de la figura 4.41.

Por consiguiente, lograron lo previsto en el análisis a priori, esto es, que si las longitudes de los ejes focal y mayor tienen la misma medida entonces la elipse se torna achatada, pero, si el eje focal tiende a cero entonces la cónica se va convirtiendo en una circunferencia.

Figura 4.41

Respuesta Grupo 1, actividad II, ítem 1i.


Cuando el eje focal llega a 0, la figura se con-
vierte en una circunferencia

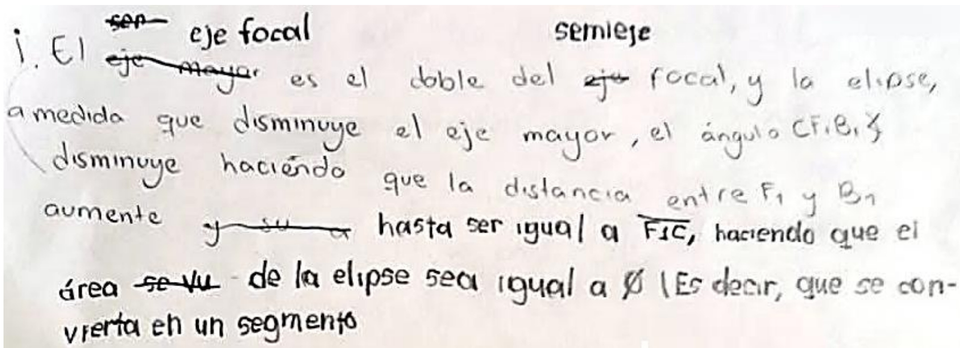
Fuente: Grupo 1, actividad II

Como se observa, los estudiantes llevaron a cabo tratamientos en el registro gráfico para posteriormente expresar los resultados obtenidos en el registro de lengua natural, lo cual significa que coordinaron dichos registros de representación, lo cual, según Duval (1999), permite una comprensión de los objetos matemáticos estudiados.

En cuanto al ítem $1ii$), el Grupo 1 al realizar tratamientos de la representación gráfica movilizando las variables didácticas, expresó en forma de lengua natural los resultados obtenidos para posteriormente llegar a expresar matemáticamente la relación existente entre el eje focal y el mayor, tal como se ilustra en la imagen de la figura 4.42.

Figura 4.42

Respuesta actividad II, ítem 1i.

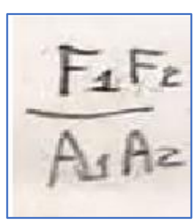

i. El ~~ser~~ eje focal ~~eje mayor~~ es el doble del ~~eje~~ semieje focal, y la elipse, a medida que disminuye el eje mayor, el ángulo CF_1B_1 disminuye haciendo que la distancia entre F_1 y B_1 aumente ~~y su a~~ hasta ser igual a $\overline{F_1C}$, haciendo que el área ~~se vu~~ de la elipse sea igual a Ø (Es decir, que se convierta en un segmento

Fuente: Grupo 1, actividad II

En este apartado, los estudiantes observaron que a medida que disminuye el eje mayor entonces la longitud del segmento de recta $\overline{F_1B_1}$ llega a ser congruente con el segmento de recta $\overline{F_1C}$, lo que hace que la elipse cambie su forma a convertirse en un segmento. Después de realizar dicho análisis, los estudiantes proponen una expresión matemática que relaciona la forma de la curva con los ejes mayor y focal. Dicha expresión se puede observar en la imagen de la figura 4.43.

Figura 4.43

Expresión matemática que relaciona los ejes mayor y focal


$$\frac{F_1F_2}{A_1A_2}$$

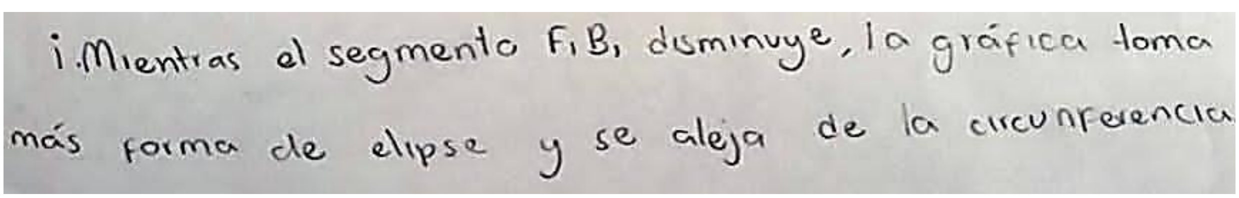
Fuente: Grupo 1, actividad II

En la imagen los estudiantes expresan la relación matemática como el cociente entre el eje focal (F_1F_2) y el eje mayor (A_1A_2), tal y como se esperaba en el análisis a priori. Lo anterior evidencia que el Grupo 1 logró coordinar los registros de representación gráfico, de lengua natural y finalmente algebraico al proponer una expresión matemática que relacionara los segmentos correspondientes al eje focal y eje mayor. Así pues, los estudiantes lograron lo propuesto en el análisis a priori, es decir, determinaron una relación existente entre los ejes focal, mayor y la forma de la elipse.

En cuanto al punto $2i$), los estudiantes encontraron que a medida que el segmento de recta $\overline{F_1B_1}$ disminuye su longitud, entonces la forma que toma la elipse varía, es decir, si el segmento disminuye entonces la representación pictórica de la curva tiende a ser de forma elíptica; si por el contrario dicho segmento aumenta su longitud, entonces la forma de la cónica se va tornando de forma circular. Dicha afirmación la podemos apreciar en la figura 4.44.

Figura 4.44

Expresión en lenguaje natural de la solución del punto 2i



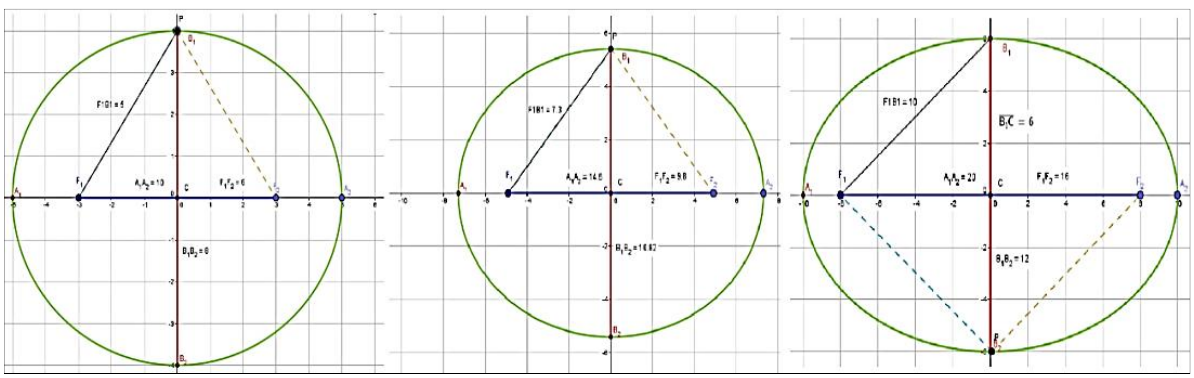
Fuente: Grupo 1, actividad II

La respuesta dada por los estudiantes no es lo que se esperaba respecto al análisis a priori, esto es, no lograron observar que la longitud del segmento de recta $\overline{F_1B_1}$ tiene la misma medida que el semieje mayor (observación que es de gran ayuda para dar respuesta al punto $2ii$) de la actividad II).

En lo que concierne al punto $2ii$), el Grupo 1 señaló que al movilizar las variables didácticas *eje focal*, *eje menor* y el punto P, siempre se forman triángulos rectángulos (tal y como se esperaba según lo descrito en el análisis a priori), en donde el eje focal y eje menor son los catetos y el segmento de recta F_1B_1 la hipotenusa. Para llegar a la conjetura anterior, los estudiantes transformaron la representación gráfica de la elipse, tal y como se evidencia en la siguiente imagen extraída de los archivos de Geogebra trabajados por los estudiantes del Grupo 1 (ver figura 4.45).

Figura 4.45

Transformaciones en el registro algebraico usando Geogebra

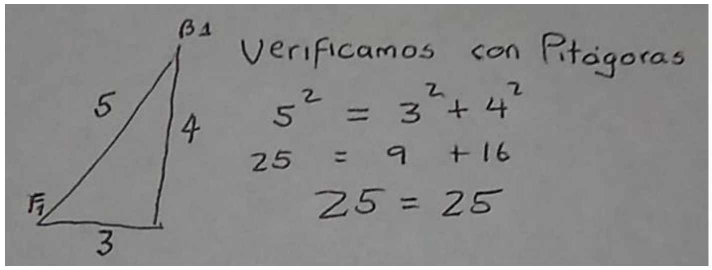


Fuente: Grupo 1, actividad II

Como se observa, el Grupo 1 realizó tratamientos de la representación de la cónica en el registro gráfico y posteriormente llevó a cabo una conversión desde la representación de la elipse en el registro gráfico al registro de lengua natural al afirmar que siempre se forman triángulos rectángulos. Dicha afirmación la comprobaron aplicando el teorema de Pitágoras como se enseña en la Figura 4.46. Por lo tanto, el Grupo 1 logró lo previsto en el análisis a priori, es decir, que sin importar cuánto cambie la representación gráfica de la elipse, la relación entre los semiejes mayor, menor y focal siempre van a cumplir la relación pitagórica.

Figura 4.46

Aplicación del Teorema de Pitágoras en las representaciones gráficas de la elipse

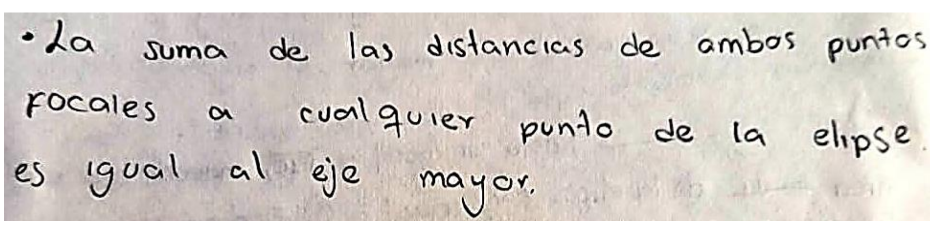


Fuente: Grupo 1, actividad II

En cuanto al punto $3i)$, el Grupo 1 contestó la pregunta describiendo la curva utilizando la condición geométrica de la elipse, pero expresada en el lenguaje natural y no como se esperaba en el análisis a priori, es decir, que llegaran a determinar una expresión matemática teniendo como base la condición geométrica de la cónica. La respuesta dada por los estudiantes del Grupo 1 se puede observar en la Figura 4.47.

Figura 4.47

Respuesta ítem 3i) de la actividad II



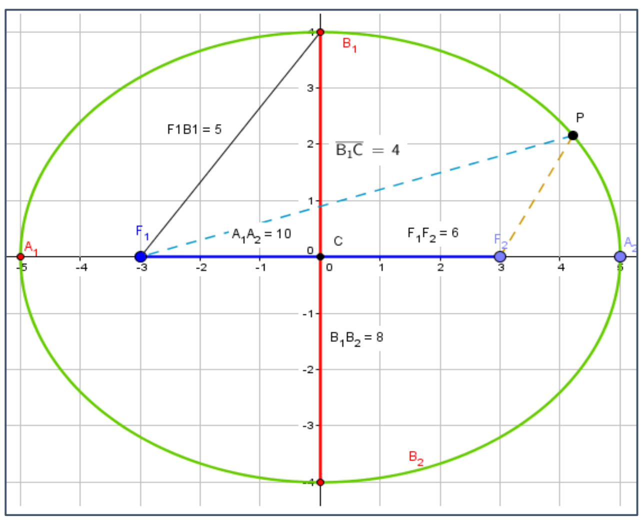
Fuente: Grupo 1, actividad II

Lo anterior no implica que los estudiantes no estuvieran en capacidad de formular una expresión matemática que pueda describir la curva teniendo en cuenta la condición geométrica, es probable que no hayan entendido lo solicitado en el ítem $3i$). Lo anterior se puede observar en la solución que proponen para el ítem $3ii$), ya que cuando se les solicita que expresen de manera algebraica la condición geométrica de la elipse (en forma de ecuación canónica), lo hacen esta vez teniendo en cuenta la condición geométrica de la elipse, la representación gráfica elaborada en Geogebra y conocimientos previos relativos al cálculo de la distancia entre dos puntos. Por consiguiente, los estudiantes lograron lo presupuestado en el análisis a priori, es decir, realizaron la conversión de la elipse desde su representación gráfica a la algebraica.

En la siguiente imagen se puede observar la representación gráfica de la elipse en la cual se basaron los estudiantes para hacer la conversión al registro de representación algebraico.

Figura 4.48

Representación Gráfica de la Elipse de la actividad II



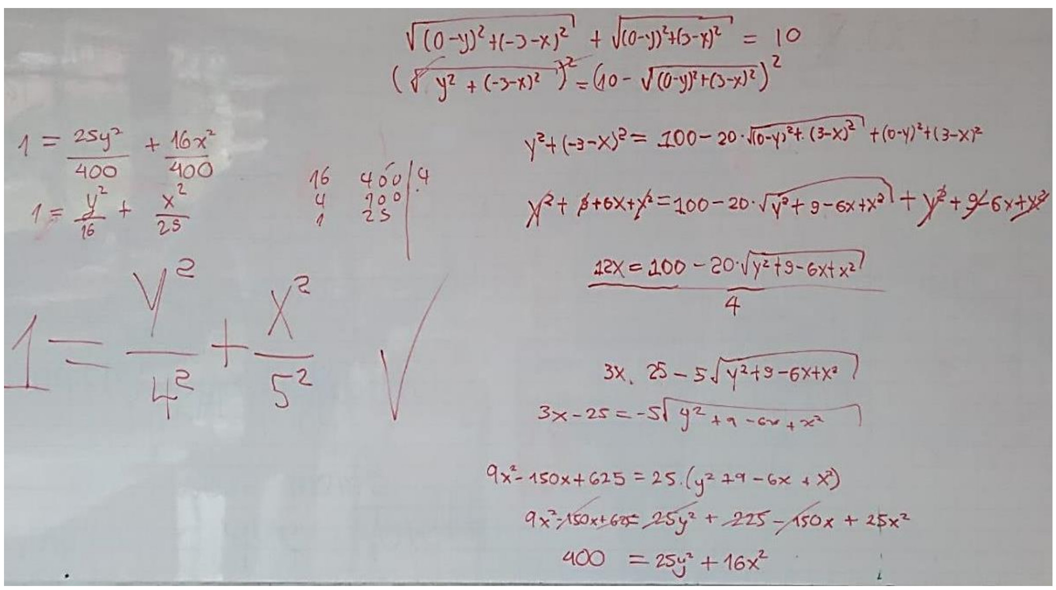
Fuente: Grupo 1, actividad II

Teniendo en cuenta la anterior gráfica de la elipse, el Grupo 1 llevó a cabo una conversión de la representación gráfica de la cónica al registro algebraico teniendo como fundamentos los conocimientos previos en geometría analítica (distancia entre dos puntos), la condición geométrica de la elipse que fue formalizada en la actividad 1 y la simplificación de expresiones algebraicas (para realizar tratamientos dentro del registro algebraico y llegar a la ecuación canónica de la elipse).

En la imagen de la figura 4.49 se detalla como al hacer la conversión del registro gráfico al algebraico, después efectúan tratamientos para obtener la ecuación canónica:

Figura 4.49

Tratamientos de la representación de la elipse en el registro algebraico



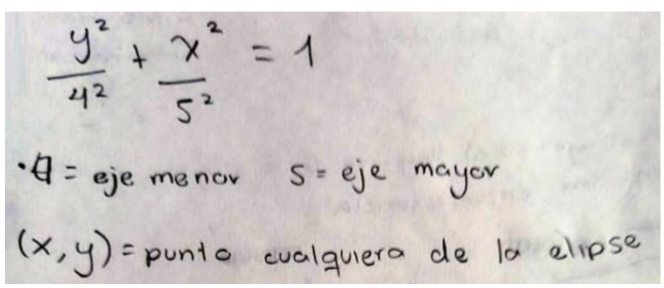
Fuente: Grupo 1, actividad II

Como se puede observar, los estudiantes realizaron una conversión del registro de representación gráfico de la elipse a uno algebraico utilizando como base la condición geométrica de la curva y la distancia entre dos puntos para obtener la expresión $\sqrt{(0-y)^2+(-3-x)^2} + \sqrt{(0-y)^2+(3-x)^2} = 10$. Después de tener la representación de la curva en el registro algebraico, los estudiantes realizaron tratamientos dentro de este registro para obtener la ecuación canónica de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tal y como se propuso en el análisis a priori.

Finalmente, en el punto $4i$), el Grupo 1 respondió que el valor de la longitud del eje menor es de 4 unidades, el cual corresponde al segmento de recta $\overline{CB_1}$ y, la longitud del eje mayor de 5 unidades (el cual corresponde a la hipotenusa del triángulo F_1CB_1). Se puede observar que realizaron parcialmente lo propuesto en el análisis a priori, dicho de otra manera, confundieron los términos eje con semieje (a pesar de haberse formalizado y diferenciado los dos conceptos en la actividad 1); además, no lograron establecer la relación existente entre los ejes mayor, focal y menor el teorema de Pitágoras (tal vez no lo mencionaron ya que en el ítem 2ii de la actividad II ya habían relacionado dichos segmentos de recta). En la ilustración de la figura 4.50 se observa lo realizado por el Grupo 1.

Figura 4.50

Respuesta del Grupo 1 al ítem 4i de la actividad II



Fuente: Grupo 1, actividad II

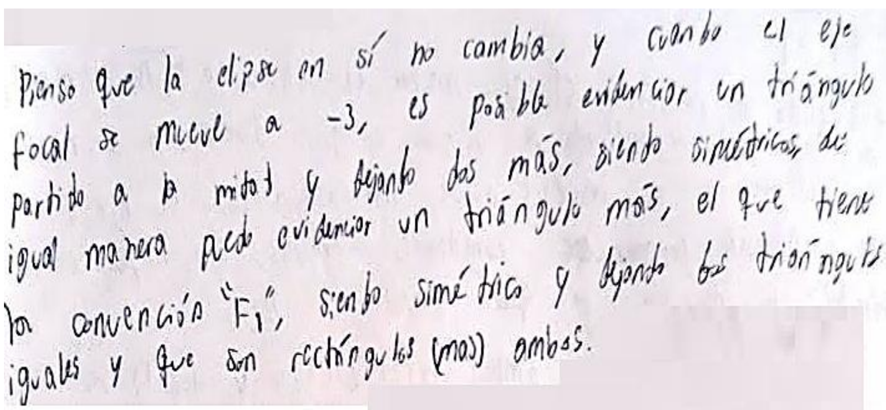
En conclusión, se observó que el Grupo 1 comprendió el concepto del objeto matemático elipse al lograr la coordinación entre los registros de representación algebraico y gráfico (obteniendo la ecuación canónica de la curva), y también coordinando los registros algebraicos y de lengua natural al expresar la relación existente entre los elementos que componen la representación gráfica con la algebraica.

Análisis Grupo 2

En relación al punto $1i)$, el Grupo 2 observó los cambios que sufría la curva a medida que realizaban transformaciones en el registro gráfico y lo plasmaron en la afirmación de la figura 4.51.

Figura 4.51

Respuesta Grupo 2, actividad II, ítem 1i


Pienso que la elipse en sí no cambia, y cuando el eje
focal se mueve a −3, es posible evidenciar un triángulo
partido a la mitad y dejando dos más, siendo simétricos, de
igual manera puedo evidenciar un triángulo más, el que tiene
la convención "F1", siendo simétrico y dejando dos triángulos
iguales y que son rectángulos (mas) ambas.

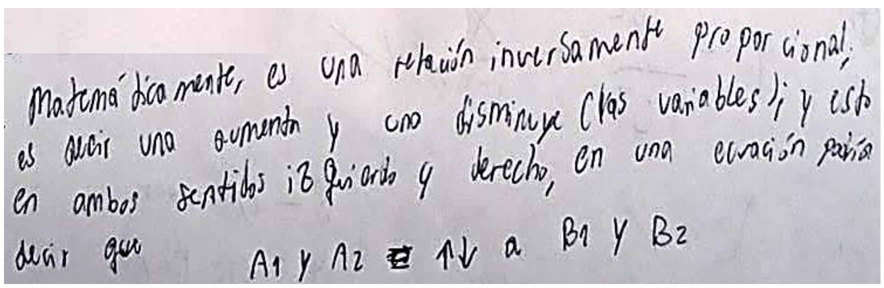
Fuente: Grupo 2, actividad II

Como se detalla en la figura 4.51, los estudiantes no respondieron según lo esperado en el análisis a priori, es decir, que detallaran que a medida que la longitud del eje focal se aproxima a la longitud del eje mayor entonces la representación gráfica de la cónica va sufriendo algunos cambios, dicho de otra manera, que si las longitudes son casi congruentes entonces la elipse se va tornando achatada, y por otro lado, si la longitud del eje focal tiende a cero entonces la cónica va tomando una forma circular. Por lo tanto, a pesar que realizaron transformaciones en el registro pictórico no lograron realizar la conversión al registro de lengua natural.

Respecto al punto $1ii$, el Grupo 2 al efectuar tratamientos de la representación gráfica de la elipse, expresaron lo observado en el registro de lengua natural para finalmente enunciar de forma matemática la relación que existe entre el semieje focal y el semieje mayor, tal y como se muestra en la figura 4.52.

Figura 4.52

Respuesta actividad II, ítem 1ii.


Matemáticamente, es una relación inversamente proporcional, es decir uno aumenta y uno disminuye (las variables); y esto en ambos sentidos izquierdo y derecho, en una ecuación podría decir que A1 y A2 ↑↓ a B1 y B2

Fuente: Grupo 2, actividad II

En este punto, el Grupo 2 notó que las longitudes de los semiejes menor y focal son inversamente proporcionales, es decir, que medida que uno aumenta su longitud el otro la disminuye y viceversa. Posteriormente a este análisis, los estudiantes plantean una expresión matemática que enlaza la forma que va tomando la curva y los semiejes focal y menor a medida que se realizan transformaciones en el registro gráfico. Dicha expresión se ilustra en la figura 4.53.

Figura 4.53

Expresión matemática Grupo 2

$$\frac{F_1F_2}{A_1A_2}$$

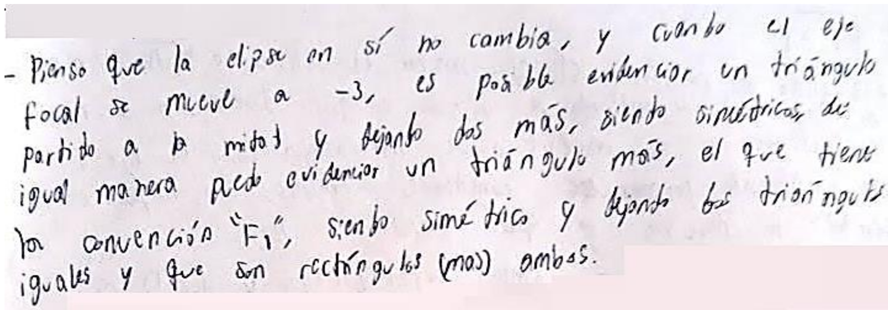
Fuente: Grupo 2, actividad II

En la figura 4.53, los estudiantes expresan la relación matemática entre los semiejes focal y menor como el cociente entre estos dos semiejes. De acuerdo con las figuras 4.52 y 4.53 se observa que el Grupo 2 coordinó los registros de representación gráfico, algebraico y de lenguaje natural, ya que, primeramente, realiza transformaciones en el registro gráfico para expresar lo observado en lenguaje natural (figura 4.52) y posteriormente realizaron una conversión del registro de lengua natural al algebraico al exponer una expresión matemática (en lenguaje algebraico) que relaciona los semiejes focal y menor. Así pues, los estudiantes lograron desarrollar lo previsto en el análisis a priori, esto es, que notaran los cambios que sufría la curva a medida que cambiaban los tamaños de los ejes y que expresaran dichos cambios de forma matemática.

En cuanto al punto $2i$, los estudiantes hicieron una descripción de lo que sucedía con la elipse a medida que se realizaban tratamientos en el registro gráfico. Observaron que la elipse no cambia de forma y que a medida que la longitud del eje focal varía entonces se van formando determinados triángulos congruentes dentro de la cónica. Dicha apreciación la podemos observar en la imagen de la figura 4.54.

Figura 4.54

Expresión en lenguaje natural de la solución del punto 2i – Grupo 2



- Pienso que la elipse en sí no cambia, y cuando el eje focal se mueve a −3, es posible evidenciar un triángulo partido a la mitad y dejando dos más, siendo simétricos, de igual manera puede evidenciar un triángulo más, el que tiene la convención "F1", siendo simétrico y dejando los triángulos iguales y que son rectángulos (mas) ambos.

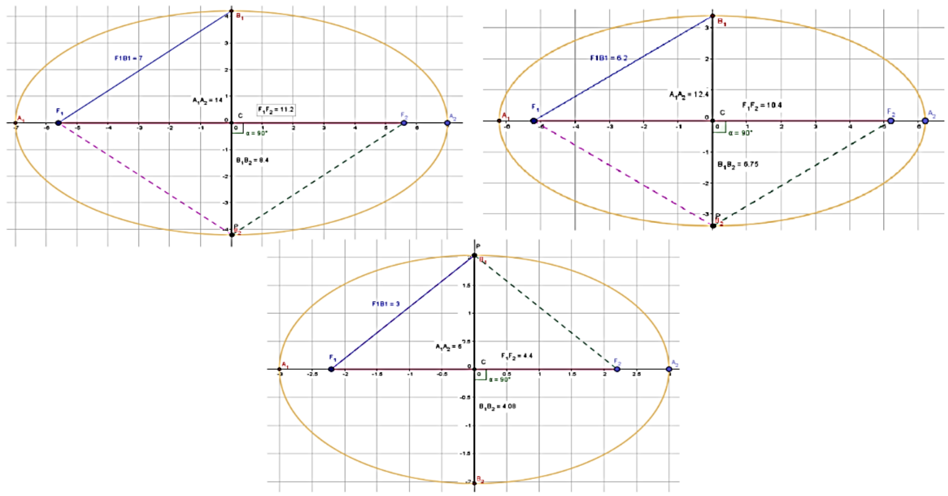
Fuente: Grupo 2, actividad II

Como se puede observar, la respuesta dada no es lo supuesto según el análisis a priori (a pesar de realizar una conversión del registro de representación gráfico al de lengua natural), es decir, no se logró determinar que el segmento de recta $\overline{F_1B_1}$ es congruente con el semieje mayor, por lo tanto, no lograron alcanzar lo supuesto en el análisis a priori.

En relación con al ítem $2ii$, el Grupo 2 determinó (según lo esperado en el análisis a priori) que, al llevar a cabo transformaciones de la curva en el registro gráfico, la longitud del segmento $\overline{F_1B_1}$ hace parte de los lados del triángulo F_1B_1C, y, que con la ayuda de la herramienta *ángulo* de Geogebra o verificando que los lados del triángulo forman una terna pitagórica conjeturaran que la longitud del segmento de recta $\overline{F_1B_1}$ representa la hipotenusa del triángulo y los segmentos de recta $\overline{F_1C}$ y $\overline{B_1C}$ son los catetos. En la siguiente imagen sacada de los archivos de Geogebra trabajados por los estudiantes se puede observar las transformaciones en el registro gráfico sobre las cuales basaron su afirmación.

Figura 4.55

Transformaciones en el registro algebraico punto 2ii



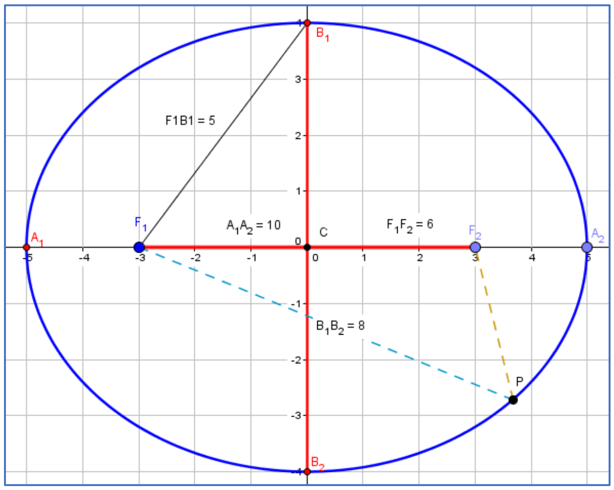
Fuente: Grupo 2, actividad II

Se puede observar que los estudiantes llevaron a cabo transformaciones en el registro de representación gráfico, para después realizar una conversión al registro de lengua natural al determinar que todos los triángulos que se forman siempre serán triángulos rectángulos. Dicha aseveración la hacen con base en que realizaron la medición con la *herramienta ángulo* de Geogebra y observaron que todos los triángulos cuentan con un ángulo recto. Por lo tanto, el Grupo 2 logró determinar lo esperado en el análisis a priori, es decir, lograron ver que la medida del segmento $\overline{F_1B_1}$ representa la hipotenusa del triángulo y los segmentos $\overline{F_1C}$ y $\overline{B_1C}$ son los catetos, además, que la relación entre los semiejes mayor, menor y focal siempre van a cumplir la relación pitagórica.

Concerniente al punto $3i$, el Grupo 2 respondió a la pregunta describiendo la elipse (teniendo como base su condición geométrica) en el registro de representación algebraico, (parcialmente como se esperaba en el análisis a priori). En la siguiente figura se muestra la representación gráfica de la elipse sobre la cual los estudiantes del Grupo 2 se fundamentaron para realizar la conversión del registro gráfico al algebraico.

Figura 4.56

Representación Gráfica de la Elipse

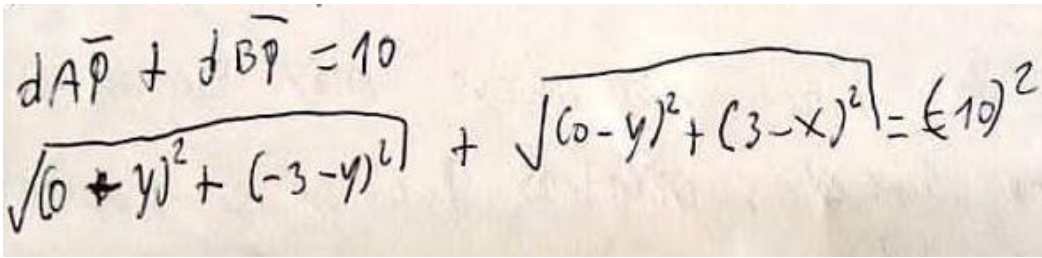


Fuente: Grupo 2, actividad II

Con base en la anterior representación, el Grupo 2 realizó una conversión del registro de representación gráfico de la elipse al registro algebraico, basándose en la condición geométrica de la curva (la cual se institucionalizó en la actividad 1) y conceptos previos de geometría analítica (distancia entre dos puntos). En la representación que se muestra en la figura 4.57, los estudiantes no realizaron ningún tratamiento en el registro algebraico para llegar a ecuación canónica de la elipse y así poder determinar la relación existente entre la representación gráfica (semiejes focal, mayor y menor) y los elementos que conforman la cónica expresada en forma de ecuación canónica. En la imagen de la figura 4.57 se puede observar la representación de la curva en el registro algebraico.

Figura 4.57

Representación de la elipse en el registro algebraico



Fuente: Grupo 2, actividad II

Como se puede observar, los estudiantes determinaron que la longitud del segmento de recta $\overline{AP}$ más la longitud del segmento $\overline{BP}$ (donde A y P son los focos de la elipse), es constante e igual al eje mayor de la cónica (condición geométrica de la curva), pero no realizaron tratamientos para llegar tanto a la ecuación general y la ecuación canónica. En consecuencia, el Grupo 2 no logró lo señalado en el análisis a priori.

Como el Grupo 2 no logró realizar tratamientos en el registro algebraico para la representación de la elipse (figura 4.57), el punto $4i$ quedó sin resolver, no obstante, el docente al finalizar la actividad 2 denominada: *Representación de la elipse en el registro gráfico y algebraico*, formalizó la relación existente entre la representación gráfica de la cónica con la ecuación canónica de la misma.

Conclusiones

El objetivo específico uno está relacionado con los análisis preliminares (de la ingeniería didáctica) para la enseñanza de la elipse. El primero de ellos corresponde al estudio sobre la emergencia de las secciones cónicas (elipse) en la historia de la matemática. El logro de este objetivo específico se alcanza como consecuencia de la realización del análisis a situaciones problema y su respectiva solución (por medio de la herramienta del análisis semiótico del EOS) que fueron surgiendo a lo largo de la historia, desde las civilizaciones antiguas hasta aproximadamente los siglos XVI y XVII.

El segundo análisis preliminar corresponde al análisis didáctico para la enseñanza del objeto matemático elipse. La consecución de este objetivo se obtiene al llevar a cabo un análisis de los libros de texto que usan los estudiantes, de los estándares, lineamientos y derechos básicos de aprendizaje. Dicho análisis se enfatizó en observar cómo se enseñan las secciones cónicas (en especial la elipse) teniendo en cuenta la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1999). Al analizar dichos libros de texto, se pudo observar que en su mayoría la temática se aborda bajo el registro algebraico más que el gráfico o de lengua natural, lo cual conlleva, según Duval (1999), a una baja comprensión del objeto matemático ya que no se están realizando conversiones entre los diferentes registros de representación semiótica.

Finalmente, el último análisis preliminar corresponde al análisis cognitivo, el cual se enfoca en las características cognitivas de los estudiantes a los cuales se les focaliza la enseñanza. Este objetivo se logra por medio de la identificación de los conocimientos previos con los cuales cuenta el estudiante y qué dificultades se pueden presentar en relación al aprendizaje de la curva. Para identificar las dificultades, se revisaron tesis de maestría y artículos científicos, con lo cual se logró reconocer los conocimientos previos, dificultades y errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje del objeto matemático elipse, estudiantes que tienen características semejantes a los sujetos participantes de la investigación. Para determinar los conocimientos previos con los cuales cuentan los estudiantes, se realizó una prueba diagnóstica en la cual se pudo observar que algunos estudiantes dominan temas concernientes a la distancia entre dos puntos, lugares geométricos y manejo básico del álgebra, temas que cobraron relevancia al momento de realizar tratamientos dentro de un mismo registro o conversión de un registro de representación a otro.

El logro del segundo objetivo específico se alcanzó al realizar el análisis a priori para la enseñanza del objeto matemático elipse, teniendo en cuenta lo propuesto por la ingeniería didáctica de Artigué (1995). Dicho análisis estuvo encaminado en coordinar los distintos registros de representación semiótica para la comprensión del objeto matemático elipse, esto a través del desarrollo de la secuencia de actividades la cual está sustentada bajo los principios de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1999) y el software de geometría dinámica Geogebra. En el análisis a priori de la primera actividad se esperaba que los estudiantes lograran representar la sección cónica en el registro de representación pictórico. Posteriormente, a través de tratamientos en dicho registro y una conversión al registro de lengua natural pudieran conceptualizar la condición geométrica de la elipse.

Para la segunda actividad, se esperaba que teniendo como base lo trabajado y formalizado en la primera actividad pudiera reconocer los componentes de la representación gráfica de la elipse, y que, a través de tratamientos en este registro llegaran a la representación de la elipse en el registro algebraico por medio de una conversión entre estos dos registros.

Respecto al tercer objetivo específico, este se logró al analizar los resultados obtenidos de los dos grupos de trabajo bajo la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1999). En esta parte se pudo observar que, los errores y dificultades que mostraron los estudiantes en las trasformaciones de tratamiento y conversión entre registros de representación estaban enlazados con los conocimientos previos que los estudiantes poseían, conocimientos tales como la distancia entre dos puntos, mediatriz de un segmento y manejo de expresiones algebraicas. La escasa fundamentación en dichos conocimientos previos generó impedimentos que no permitieron un correcto manejo de las transformaciones entre los diversos registros semióticos.

También se evidenció que los estudiantes pudieron comprender mejor la condición geométrica de la elipse cuando realizaban la conversión del registro de representación gráfico al algebraico y del pictórico al de lengua natural, no obstante, la correspondencia en la conversión de los anteriores registros no se dio, es decir, estaban en la capacidad de realizar las conversiones anteriores, pero no en el sentido contrario.

Es de resaltar que el empleo del software de geometría dinámica Geogebra tuvo una relevante incidencia en la conceptualización de la condición geométrica de la elipse, ya que, los estudiantes pudieron descubrir enlaces estructurales del objeto matemático elipse, y posteriormente, expresar dichos enlaces o vínculos en otros registros de representación.

En la actividad uno, los dos grupos realizaron tratamientos en el registro de representación pictórico y posteriormente llevaron a cabo la conversión desde dicho registro al de lengua natural, lo cual les permitió comprender la condición geométrica de la elipse. En la actividad dos el Grupo 1 estuvo en capacidad de realizar la conversión de la curva del registro gráfico al algebraico y, posteriormente, identificaron los elementos característicos que enlazaban estos dos registros. Sin embargo, el Grupo 2 realizó tratamientos de la cónica en el registro gráfico y logró representar la condición geométrica de la curva en el registro algebraico, pero no logró realizar los tratamientos pertinentes en dicho registro para obtener la ecuación canónica y así relacionar los elementos característicos de la elipse en el registro algebraico con los elementos del registro gráfico.

La Teoría de las Situaciones Didácticas es un marco teórico adecuado que propicia el aprendizaje, el cual se obtiene cuando se adapta al medio; el medio en este caso es el software de Geometría Dinámica – Geogebra, el cual permitió ver en detalle propiedades geométricas de la elipse.

Referencias

Alegría, P. (2003). Utilidad de las matemáticas. *Capitulo: Las cónicas y sus aplicaciones. Editor: Antonio Vera López, Madrid*.

Arcavi, A., & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International journal of computers for mathematical learning, 5*(1), 25-45. https://doi.org/10.1023/A:1009841817245

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en Educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 38, 97-140). México, DF. Grupo Editorial Iberoamérica. http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf

Almouloud, S. A., Koné, C., & Sangaré, M. S. (2014). *Study of the mathematical and didactic organizations of the conics in the curriculum of secondary schools in the Republic of Mali.* RIPEM, 4(3), 2-28

Beltrán, C. (2017). *Representaciones semióticas de la parábola utilizadas por los estudiantes de grado décimo* [Tesis de Maestría, Universidad de la Sabana]. https://repositoriosed.educacionbogota.edu.co/handle/001/2592

Bonilla, D., & Parraguez, M. (2013). La Elipse desde la perspectiva de la Teoría de los Modos de Pensamiento. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 617-624).* http://funes.uniandes.edu.co/4094/

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. (Vol. 7). Libros del Zorzal.

Casas, L. (2019). *Factorización de expresiones algebraicas bajo la teoría de representaciones semióticas* (Doctoral dissertation, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia).

Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. *Cuadernos*, *2,* 1-10

Costa, V., & Río, L. (2019). Aportes de la Geometría Dinámica al estudio de la noción de función a partir de un problema geométrico: un análisis praxeológico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*, 67-87.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle. Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Fernández, E. (2011). Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global. Integrando Cabri Géometre II Plus. *Santiago de Cali*.

Figueroa, R. (2013). *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables: una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas* [tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. http://hdl.handle.net/20.500.12404/4736

Giraldo, D. (2017). *Construcción de secciones cónicas con GeoGebra, para estudiantes de grado noveno en la IE Jorge Villamil Ortega (zona rural de Gigante, Huila) (Doctoral dissertation*, Universidad Nacional de Colombia-Sede Manizales)

Godino, J. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. *Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 49-68). Granada, España: Universidad de Granada.* http://funes.uniandes.edu.co/11194/

Godino, J. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática.

Godino, J. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 111-132.

González Urbaneja, P. M. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. SIGMA, 205-236.

Hernández, R., Fernández, C. & Batista, P. (2010). *Metodología de la investigación. 5ta Ed. México: McGraw Hill.*

Hurtado (2019). *Significado global de la proporcionalidad en las prácticas matemáticas de los estudiantes de grado séptimo.* [Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]. http://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/2991

Joya, A., Morales Jaime, D., Salazar Suárez, F., Gamboa Sulvara, J., Jiménez Ruíz, J., Romero Roa, J., García Buitrago, L. y Ortiz Wilches, L. (2012). *Los Caminos del Saber Matemáticas 10 - Edición Docente*. Bogotá, Colombia: Editorial Santillana

Lara, I. (2016*). La parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemáticas basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica*. [tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú].

León, J. (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el Geogebra en alumnos de Arquitectura y Administración de proyectos*. [tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. http://hdl.handle.net/20.500.12404/5652

Ljajko, E., & Ibro, V. (2013). *Development of Ideas in a GeoGebra-Aided Mathematics Instruction.* Online Submission, 3(3), 1-7

Martínez, D. (2017). La Elipse a través de la historia: Concepciones epistemológicas de la elipse en tres momentos históricos diferentes. *Memorias del encuentro de geometría y sus aplicaciones, 22 (pp. 133-140). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional*. http://funes.uniandes.edu.co/8743/

MEN, C. (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. *Magisterio, Bogotá*.

MEN, M. D. (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. *Recuperado de: http://www. mineducacion. gov. co/1621/articles-340021_recurso_*.

Moncayo, C., Pantoja, J., & Mosquera, E. (2012). Enfoque didáctico para la conceptualización de la parábola como lugar geométrico integrando Cabri Géomètre II Plus. *Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 1284-1289). Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín*. http://funes.uniandes.edu.co/2560/

Mosquera, L. (2013) *Diseño de una Unidad de Enseñanza Potencialmente Significativa orientada a que los estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Federico Sierra Arango, del municipio de Bello, aprendan significativamente el concepto de elipse en R2*. [tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/21660

Muñoz, A. L. G. (2013). Propuesta didáctica para la enseñanza de las propiedades de reflexión de las cónicas por medio de la metodología de resolución de problemas. Revista científica, 90-94.

Olivares, E. (2018). *Coordinación de diferentes registros de representación semiótica para movilizar la noción de elipse en estudiantes de física* [tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. http://hdl.handle.net/20.500.12404/12989

Pérez, R. (2011). *Una propuesta de enseñanza aprendizaje para la construcción y aplicación de las cónicas* [tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UN. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/8094

Pérez, I. (2012). *Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación desde una visión analítica*. [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/10032

Planchart, O. (2009). Estudio de un problema: El gato en la escalera. El lugar geométrico. *Revista 360º*, *4*, 1-2.

Riveros, C. (2019). *Desarrollo del pensamiento matemático en el aprendizaje de la derivada* [Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]. http://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/2989

Rodríguez, Y. (2019). *Fracciones y realidad* [Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]. http://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/2995

Sánchez, L. (2019). *La comprensión de la parábola a través de las representaciones semióticas* [Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]. http://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/2994

Sandoval, I. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación matemática*, *21*(1), 5-27.

Santa, Z., & Jaramillo, C. M. (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele*. [Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia]. http://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/7100

Santa, Z. M., & Jaramillo, C. M. (2014). Entrevista socrática para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, *41*, 45-60. http://funes.uniandes.edu.co/10568/

Silva, A., & de la Torre, E. (2011). La Herramienta arrastre en funciones usando Geogebra. *Investigación en Educación Matemática XV (pp. 555-564). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. http://funes.uniandes.edu.co/1839/*

Silva, A. (2017). *Propuesta didáctica para el fortalecimiento del aprendizaje de los números racionales en el grado 601 del Colegio Miguel Antonio Caro IED JM a través de la teoría de las situaciones didácticas* [tesis de maestría, Universidad Libre]. https://hdl.handle.net/10901/10270

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. Sexta Edición. ISBN: 978-607-481-826-0

Swokowski, E. y Jeffery A. (2009). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, Décimo Segunda edición

Tocto, E. (2015). *Comprensión de la noción función cuadrática por medio del tránsito de registros de representación semiótica en estudiantes de quinto año de secundaria*. [tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. http://hdl.handle.net/20.500.12404/6755

Torres, R. (2002). Secciones cónicas. *Sigma: revista de matemáticas = matematika aldizkaria*, *ISSN 1131-7787, Nº. 20, 2002, págs. 12-37*.

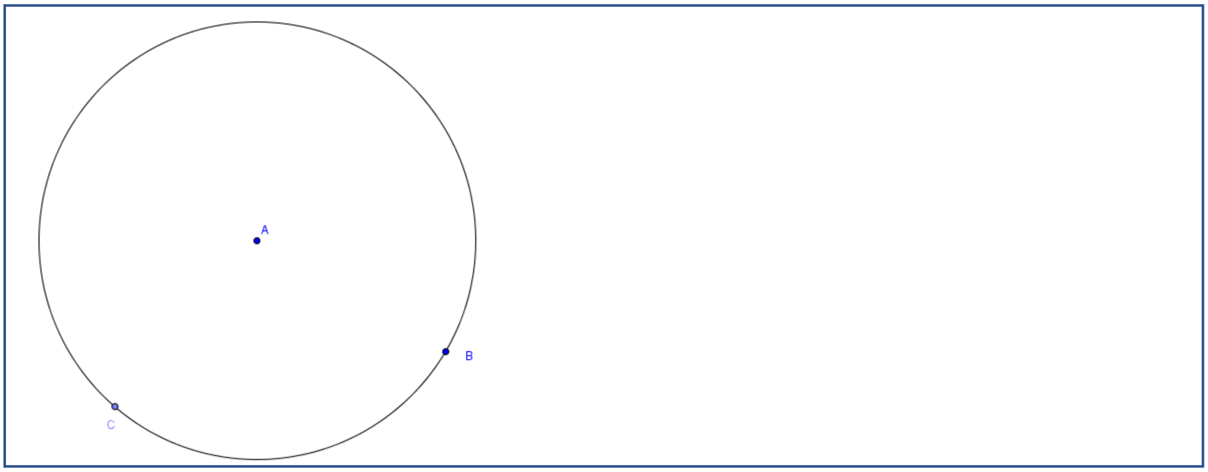
Velázquez, N., Castellanos, J. (2013). *El modelo de van hiele aplicado en el proceso de enseñanza de secciones cónicas apoyado con geogebra.* Monterrey: XI Congreso Nacional de investigación educativa.

Anexos

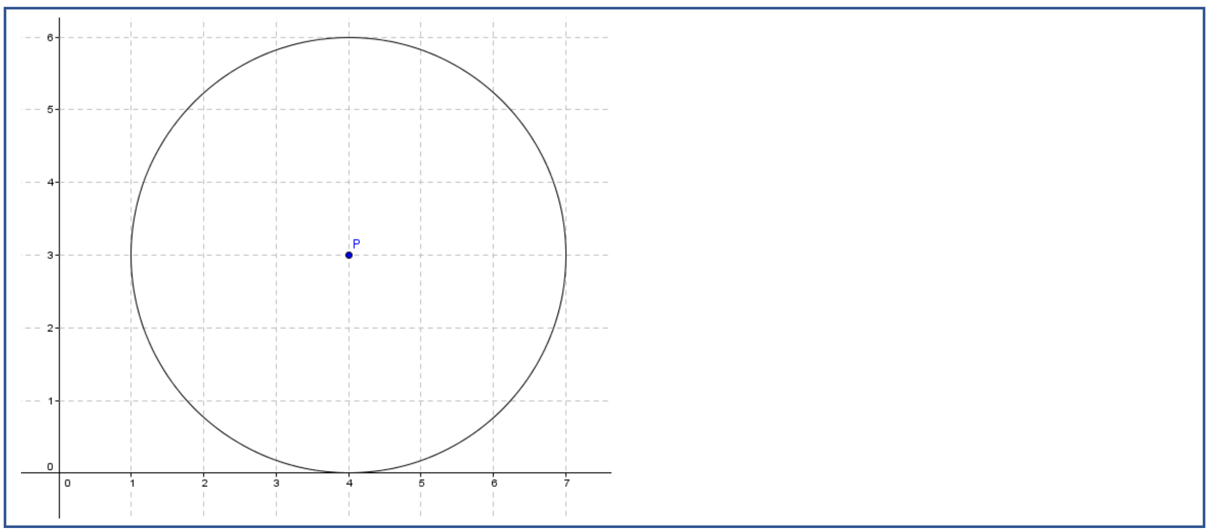
ANEXO A

Prueba Diagnóstica

1) ¿Qué condición geométrica tienen que cumplir los puntos B y C para que estén en la circunferencia cuyo centro es el punto A y tiene un radio r?



2) Teniendo en cuenta la siguiente circunferencia donde su centro está ubicado en el punto P $(4{,}3)$ y su radio equivale a 3 unidades ¿Cuál es la ecuación canónica y ecuación general de dicha circunferencia?



3) Dada la siguiente ecuación de la circunferencia determinar sus elementos característicos (centro y radio).

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$

ANEXO B

Secuencia Didáctica: Condición geométrica de la elipse.

1. Abra el archivo denominado "Actividad 1a"

   Explore la construcción geométrica moviendo el punto P sobre la circunferencia y el punto Q movilícelo al interior de la circunferencia. Se sugiere que transforme la construcción moviendo dichos puntos al menos tres veces.

   Anote las observaciones hechas sobre las modificaciones que hizo en la construcción.

   Teniendo en cuenta las modificaciones hechas a la construcción responda las siguientes preguntas:

   i. ¿Qué relación puede establecer entre los segmentos de recta $\overline{QA}$ y $\overline{AP}$?
   ii. ¿Qué relación existe entre los segmentos de recta $\overline{QA}$, $\overline{AC}$ y la circunferencia?

2. Movilice el punto Q a cualquier parte al interior de la circunferencia. Después active la opción "rastro" sobre el punto A. Finalmente mueva el punto P sobre la circunferencia. Se sugiere como mínimo realizar este procedimiento tres veces. (Nota: antes de cambiar de posición al punto Q desactive la opción "rastro" al punto A)

   i. Teniendo en cuenta las movilizaciones realizadas ¿Qué relación existe entre los puntos que conforman la figura obtenida y los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$?

3. Abra el archivo denominado "Actividad 1b"
   Analice la construcción geométrica haciendo variar el radio de la circunferencia y cambiando de posición el punto Q. Después active la opción "rastro" sobre el punto A. Para terminar, movilice el punto P sobre la circunferencia.

   i. Con base en lo observado ¿Qué relación puede concluir entre los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$, el radio de la circunferencia y la figura formada por el arrastre del punto A?

   Utilice la herramienta Elipse y construya la curva que pasa por los puntos Q, C y A. Después intercepte la recta que pasa por los puntos Q y C con la figura obtenida. Finalmente determine la longitud del segmento de recta $\overline{FG}$.
   Ahora explore la construcción geométrica movilizando el punto P, el punto interior Q y el radio de la circunferencia.
   Teniendo en cuenta lo observado:

   ii. ¿Qué relación existe entre los segmentos $\overline{QA}$, $\overline{AC}$, el radio de la circunferencia y el segmento $\overline{FG}$?
   iii. De acuerdo con lo observado ¿Cómo define la elipse?

ANEXO C

Secuencia Didáctica: Representación gráfica y algebraica de la elipse.

Actividad 2: Representación Algebraica y Gráfica

1. Abra el archivo denominado "Actividad II"

Explore la construcción geométrica cambiando la longitud del eje focal mediante el deslizador "Eje Focal". Se sugiere que transforme la construcción al menos tres veces.

Anote las observaciones hechas sobre las modificaciones que hizo en la construcción.

Teniendo en cuenta las modificaciones hechas a la construcción responda las siguientes preguntas:

i. ¿Qué relación puede establecer entre la forma que toma la elipse, el eje focal y el eje mayor?
ii. Matemáticamente ¿Cómo puede expresar dicha relación?

2. Analice la construcción cambiando la longitud de los ejes focal y mayor por medio de los deslizadores "Eje Focal" y "Eje Mayor" respectivamente.

i. Teniendo en cuenta las movilizaciones realizadas ¿Observa alguna relación con respecto a la longitud del segmento $\overline{F_1B_1}$?
ii. Ubique el punto P sobre el punto B_1 o B_2. Ahora vuelva a explorar la construcción haciendo variar la longitud de los ejes mayor y focal ¿Qué relación puede establecer entre los semiejes mayor, menor y focal?

3. Movilice el punto F_2 entre los valores 3 o 4 y fije el punto A_2 en el valor de 5. Finalmente ubique el punto P sobre cualquier punto de la elipse.

i. Determine una expresión que describa la curva teniendo en cuenta la condición geométrica de la elipse
ii. Exprese el resultado obtenido en el paso $(3i)$ en la siguiente forma canónica:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

4. Teniendo en cuenta el resultado obtenido en $(3ii)$

i. ¿Qué relación puede establecer con respecto a la representación gráfica de la elipse dada en el punto 3?

ANEXO D

Consentimiento informado Institución Educativa

Tunja, 04 octubre de 2021

Señora
Nidia Fajardo
Coordinadora Académica
Colegio San Viator de Tunja

Cordial saludo,

Por medio de la presente me permito solicitar permiso para desarrollar el proyecto de investigación titulado "**Registros de representación semiótica para la comprensión de la elipse usando geogebra**", cuyo objetivo principal es "Implementar una estrategia didáctica enfocada en el uso de los diversos registros de representación semiótica con la pretensión de inducir en los estudiantes de grado décimo la comprensión de la elipse como lugar geométrico, utilizando como medio de interacción el software Geogebra". Este proyecto estará bajo la dirección de la Dra. Omaida Sepúlveda Delgado y se desarrollará en el grado décimo de la Institución Educativa.

Gracias por la atención prestada.

Atentamente,

WILLIAM ARMANDO PINEDA MORENO
Estudiante de Maestría en Educación Matemática.
UPTC, Tunja

VoBo.
Dra. OMAIDA SEPÚLVEDA DELGADO
Docente Titular
Escuela de Matemáticas y Estadística.

ANEXO E

Consentimiento informado

Estimado padre de familia o acudiente

Soy estudiante del Programa de Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia y estoy llevando a cabo mi investigación titulada: "**Registros de representación semiótica para la comprensión de la elipse usando geogebra**", el objetivo de la investigación es implementar una estrategia didáctica enfocada en el uso de los diversos registros de representación semiótica con la pretensión de inducir en los estudiantes de grado décimo la comprensión de la elipse como lugar geométrico, utilizando como medio de interacción el software Geogebra. Por tanto, me dirijo respetuosamente para solicitar su autorización para que su hijo participe en este proceso.

Se desarrollarán una serie de actividades que constan de cuatro (4) sesiones de clase con una duración máxima de 60 minutos cada sesión, donde el estudiante desarrollará actividades de fortalecimiento de pensamiento espacial y algebraico. El proceso será estrictamente confidencial y ni su nombre ni el de su hijo (a) se verá afectado de ninguna manera; es decir su identidad será preservada confidencialmente. Por otro lado, la participación o no participación en el desarrollo de esta investigación no afectara de ninguna manera la nota del estudiante.

La participación es voluntaria. Usted y su hijo (a) tienen derecho de retirar el consentimiento para desistir en cualquier momento. El estudio no conlleva ningún riesgo. No recibirá ninguna compensación por participar. Si tiene alguna pregunta sobre esta investigación, se puede comunicar con el investigador al correo williamarmando.pineda@uptc.edu.co.

Si desea que su hijo participe, favor llenar la autorización y devolverla.

Preguntas o dudas sobre los derechos de su hijo(a) pueden ser resueltas en cualquier momento.

Cordialmente,

William Armando Pineda Moreno

Docente de Matemáticas

AUTORIZACIÓN

He leído el procedimiento descrito arriba. El investigador me ha explicado el estudio y ha contestado mis preguntas. Voluntariamente doy mi consentimiento para que mi hijo(a)

____, participe en este estudio.

____

Firma Padre/Madre /Acudiente

CC. _______________________________________

Fecha