SITUACIONES DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LAS CÓNICAS DESDE EL CONCEPTO DE MÉTRICA

CRISTIAN JULIÁN GARZÓN ZIPA

TESIS DE MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TUNJA

2020

SITUACIONES DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LAS CÓNICAS DESDE EL CONCEPTO DE MÉTRICA

CRISTIAN JULIÁN GARZÓN ZIPA

Trabajo de grado, requisito parcial para optar por el título de Magíster en Educación Matemática

Directora: Dra. OMAIDA SEPÚLVEDA DELGADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TUNJA

2020

Página de aceptación

Jurado

Jurado

Directora

Omaida Sepúlveda Delgado

Dedicatoria

A mi padre Dagoberto,
mi madre Isabel
a mi hermano José Luis
y a mi ahijado Jesús
Por todo el apoyo incondicional

Agradecimientos

A Dios, por orientar mis pasos en este camino de formación profesional.

A la Dra. Omaida Sepúlveda, por aceptar ser mi Directora y por brindarme todo su conocimiento y colaboración en esta actividad investigativa, pues sin su apoyo, su tiempo y su ayuda no se hubiera podido desarrollar esta tesis.

A los jurados el Dr. Zagalo Suárez y el Mg. Cristian Fúneme, por sus sugerencias y consejos en el desarrollo del trabajo.

A mis profesores y compañeros de la Maestría en Educación Matemática, con quienes compartí experiencias agradables y conocimientos que forman para la vida.

Al profesor Jesús Antonio, un gran amigo y compañero de batallas.

A mi alma mater la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia por la gran formación como profesional Licenciado en Matemáticas y Magister en Educación Matemática.

A mis queridos estudiantes, por ser la razón de que cada día ame más mi profesión.

Resumen

La presente investigación reflexiona en torno a la problemática relacionada con el detrimento del pensamiento espacial y los análisis de tipo intuitivo y analítico que realizan los estudiantes por causa del uso excesivo del lenguaje simbólico en el aula de clase y ambientes de aprendizaje poco favorecedores para este fin. Particularizando esta problemática en la comprensión del lugar geométrico de las cónicas, se encontró que variando las formas en que mide un estudiante en el plano, se privilegian actividades donde la génesis del conocimiento se da por interacción con un medio y no por transferencia de conocimientos. Para llevar a cabo esta estrategia, se utilizó el marco teórico de la Teoría de las Situaciones Didácticas; en este aspecto, la investigación analiza el aporte de estas situaciones en el aprendizaje de un grupo de estudiantes de grado décimo de la ciudad de Tunja al interactuar con el concepto métrico en las cónicas desde su definición como lugar geométrico. Por la naturaleza de esta investigación, se adopta el paradigma Interpretativo-Cualitativo, y en el diseño de las diferentes fases de investigación se utilizan los 4 momentos de la Investigación-Acción (planeación, acción, observación y reflexión) en dos ciclos, esto con el fin de poder evaluar la práctica educativa y encaminarla a su mejoramiento. Para lograr este objetivo de investigación, se desarrolló inicialmente un análisis epistémico, didáctico y cognitivo entorno al objeto cónica y sus implicaciones en el aprendizaje, luego, a partir de la reflexión se diseñaron las situaciones didácticas que buscaron favorecer el aprendizaje del lugar geométrico de las cónicas desde cuatro distintas métricas para confrontar el conocimiento del estudiante siguiendo a Brousseau (2007), al establecer que el estudiante aprende en contra de lo que sabe. Finalmente, se aplicaron las situaciones y se reflexiona entorno a la actividad del estudiante. La investigación se desarrolló en su totalidad con medios virtuales y entre los principales resultados se encontró la forma en que los estudiantes investigan los lugares geométricos de las cónicas desde los razonamientos intuitivos, exploratorios y comunicativos; por otro lado, los estudiantes lograron transitar por varios registros de representación semiótica para las cónicas, especialmente realizaron conversiones del registro verbal al registro gráfico y procesos de tratamiento en el registro gráfico cuando trabajaron en diferentes métricas. Finalmente, esta actividad investigativa permitió reflexionar sobre la labor del docente para reorientarla a nuevas formas de enseñanza de las matemáticas a partir de los medios virtuales y los ambientes dinámicos.

Palabras Clave: Situaciones didácticas, Cónicas, Lugares geométricos, Métricas, Registros de representación.

Índice de Contenidos

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Introducción

Brousseau (2007) afirma que el estudiante “aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios un poco como lo hace la sociedad humana […] y este saber […] se manifiesta por medio de nuevas respuestas, que son la marca del aprendizaje” (p. 30), este medio es el objeto de las interacciones entre saber, estudiante y profesor, por el cual el alumno actúa para alcanzar el aprendizaje.

Por tanto, a partir de esta idea, en la investigación se desarrolla un análisis reflexivo de la incidencia del trabajo en el marco teórico de la Teoría de las Situaciones Didácticas para el aprendizaje de las cónicas como lugar geométrico desde el concepto de métrica. La temática de las cónicas, según los Derechos Básicos de Aprendizaje está dada para trabajarse en grado décimo de educación media Colombiana y se enuncia como: “Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones” (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2016, p. 78).

En este aspecto, desde hace más de dos décadas el Ministerio de Educación Nacional en Colombia ha manifestado la necesidad de “rescatar el valor de lo empírico y de lo intuitivo en los procesos de construcción del conocimiento matemático en la escuela.” (MEN, 1998, p. 16), y en estos derechos básicos de aprendizaje se evidencia un interés en rescatar las propiedades de lugar geométrico de las cónicas, ya que este concepto se ha venido minimizando debido al tratamiento que se está dando en las aulas, en donde se prioriza la enseñanza de ecuaciones y algoritmos y se asocian representaciones gráficas como definiciones, dejando de lado el componente geométrico-espacial, característico de las cónicas porque “si se habla de Geometría Analítica el panorama no deja de ser desalentador en cuanto a la metodología de su enseñanza y los propósitos de la misma que no van más allá del acercamiento algebraico de las cónicas en particular" (Calderón y Peñuela, 2013, p. 272)

Una forma para priorizar los lugares geométricos en las cónicas es el uso del concepto de métrica (forma de medir), en este sentido, para el estudio desarrollado en este documento de investigación, se realiza en un primer momento, el diseño de una serie de situaciones didácticas que privilegian esta estrategia con el fin de dar respuesta a la pregunta de investigación ¿En qué aspectos las situaciones didácticas pueden beneficiar el aprendizaje de lugar geométrico de las cónicas con el uso de diferentes métricas?

Para dar respuesta a la pregunta planteada para el estudio, el presente trabajo se estructura en cinco capítulos; en el primer capítulo, se exponen las generalidades del problema investigativo entorno al tratamiento de las cónicas como lugar geométrico a la luz de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas [LCM], los Estándares Básicos de Competencia [EBC] y los Derechos Básicos de Aprendizaje [DBA] en la educación media colombiana, allí se manifiesta la necesidad de un cambio en la enseñanza y en el aprendizaje de la geometría analítica y se expone la estrategia que busca beneficiar el aprendizaje en los estudiantes de las cónicas priorizando los lugares geométricos desde el concepto de métrica.

En el segundo capítulo, se revisan los principales antecedentes para la investigación basados en el tratamiento de las cónicas desde el concepto métrico; se exponen los fundamentos teóricos relacionados con la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) y los procesos de tratamiento y conversión en la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS). En el tercer capítulo, se exponen los aspectos generales de la metodología utilizada en el trabajo, este se ubicó en el paradigma Cualitativo-Interpretativo debido a la naturaleza de la investigación determinada por las interacciones que se dan en el aula de clase. Se utilizó la Investigación-

Acción (IA) como marco metodológico para alcanzar los objetivos de aprendizaje por medio de la implementación de las situaciones didácticas.

En el cuarto capítulo, se detallan los principales resultados de la investigación divididos en dos partes: La primera parte referida al primer ciclo de IA, se desarrollaron los estudios preliminares, para abordar de una forma teórica la problemática expuesta; luego se presenta la reflexión en entorno a los datos recolectados en la práctica de campo. La segunda parte de este capítulo corresponde al ciclo II de la IA donde la secuencia Planeación–Acción-Observación-Reflexión, se repite bajo las nuevas orientaciones obtenidas en la reflexión del ciclo I. Este segundo ciclo se desarrolló con otras situaciones didácticas y los resultados de la implementación fueron estudiados de igual forma a la luz de la TSD, se buscó dar respuesta a los objetivos de aprendizaje y se determinó cómo la práctica llevó a los estudiantes a la construcción del conocimiento del lugar geométrico de las cónicas.

Capítulo I

Marco Investigativo

En este capítulo se describe las generalidades de la problemática entorno al tratamiento de las cónicas como lugar geométrico (entendiendo lugar geométrico como el conjunto de puntos del plano que satisfacen una determinada propiedad (Lehmann, 1992)) teniendo como referencia los LCM (1998), los EBC (2006) y los DBA (2016) en la educación media colombiana, se manifiesta la necesidad de un cambio en la enseñanza y en el aprendizaje de la geometría analítica, de igual forma se presenta la estrategia que busca beneficiar el aprendizaje de las cónicas priorizando los lugares geométricos; se dan a conocer los diferentes objetivos de la investigación en el marco de la TSD y se justifica la pertinencia de realizar el estudio.

Problema de Investigación

Planteamiento del Problema

Desde los LCM (1998) se reconocen las consecuencias negativas que dejó el exagerado manejo estructural en la década de los ochenta y a raíz de esto se promueve una serie de principios fundamentales de carácter epistemológico, filosófico, pedagógico, didáctico y evaluativo que permiten rescatar en los estudiantes los análisis cognitivos de tipo intuitivo y empírico. Esta nueva visión lleva a "involucrar significativamente la manipulación y la experiencia con los objetos que sirven de apoyo a los procesos de construcción sin restar importancia […] a la comprensión y a la reflexión, que posteriormente deben conducir a la formalización rigurosa" (MEN, 1998, p. 16).

En este orden de ideas, la geometría se propone como un énfasis necesario del que hacer matemático de los estudiantes dado que según el MEN (1998) se constituye en una herramienta para interpretar, entender y apreciar el mundo, con esto, se propone que el énfasis de la geometría en la escuela se direccione al fortalecimiento de "la percepción espacial y las intuiciones sobre las figuras bi y tridimensionales, la comprensión y uso de las propiedades de las figuras y las interrelaciones entre ellas así como del efecto que ejercen sobre ellas las diferentes transformaciones" (MEN, 1998, p. 17)

En este punto, los LCM hacen un llamado a la integración de diferentes pensamientos matemáticos (numérico, métrico, espacial, aleatorio y variacional) en el aula de clase que permitan al estudiante tener una visión más completa de las matemáticas, como por ejemplo en el pensamiento métrico y el espacial donde se busca dar significado al patrón, la unidad de medida y los procesos mismos de medición por medio de aspectos geométricos. Con estos lineamientos, desde la década de los noventa en las escuelas "la geometría analítica, todavía se viene enseñando de una forma tradicional y bastante lineal en los respectivos contextos institucionales, sin lograr los propósitos respectivos." (Calderón y Peñuela, 2013, p. 273)

Particularizando en esta problemática, a las cónicas como componente fuerte de la geometría analítica de los últimos grados de bachillerato, se les presenta como una temática reducida al tratamiento algebraico y en los EBC se manifiesta una coherencia vertical (relación del estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en diferentes conjuntos de grados) establecida de la siguiente manera: desde el pensamiento espacial de 1º a 3º el estudiante debe desarrollar habilidades para relacionar dirección, distancia y posición en el espacio; de 4º a 5º debe utilizar sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales; de 6º a 7º el estudiante debe identificar características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica; de 8º a 9º debe usar representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas y de 10º a 11º el estudiante debe identificar características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y resolver problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas a partir de las transformaciones de expresiones algebraicas así como reconocer y describir este tipo de curvas.

Desde estos EBC, el aprendizaje por competencias se entiende como el "saber hacer en contexto, en tareas y situaciones distintas de aquellas a las cuales se aprendió a responder en el aula de clase" (MEN, 2006, p. 49), y desde lo que se plantea en cada pensamiento representa las competencias mínimas que el estudiante debe desarrollar al culminar cada uno de sus ciclos escolares. Para el caso del desarrollo de competencias del pensamiento espacial, se da un énfasis a la geometría analítica en los grados décimo y undécimo pero desafortunadamente "en el currículo colombiano su enseñanza sigue siendo marginal como consecuencia del poco espacio que se brinda a la enseñanza de la geometría y al exagerado tratamiento algebraico de las ecuaciones de segundo grado que representan las cónicas" (Fernández, 2011, p. 27), todo esto se traduce en una pérdida progresiva de las propiedades geométricas intrínsecas de estas figuras.

Complementando lo anterior, los lugares geométricos en los grados décimo y undécimo manifiestan una coherencia horizontal (relación de una competencia con las competencias de otros pensamientos en un mismo conjunto de grados) desde los EBC, no solo se busca ser competente en el pensamiento espacial si no que implícitamente se van trabajando con los lugares geométricos otras competencias en los diferentes pensamientos. Por ejemplo, desde el pensamiento métrico se plantea la competencia de seleccionar y usar técnicas apropiadas para realizar diferentes mediciones de longitudes, desde el pensamiento variacional se busca relacionar propiedades gráficas con propiedades algebraicas y en el pensamiento numérico se propone la competencia de reconocer algunas propiedades numéricas a través de procesos geométricos.

Con base en los EBC desde el MEN se propone en el año 2015 una primera versión de aprendizajes mínimos que debe desarrollar el estudiante en cada grado para alcanzar las competencias propuestas en los EBC, estos son los DBA, y desde el área de matemáticas estos DBA fueron actualizados en el 2016: parte de los cambios aplicados hacen referencia a las cónicas teniendo en cuenta que en la versión del 2015 este aprendizaje estaba enfocado en: “Conoce las propiedades geométricas que definen distintos tipos de cónicas […] y las utiliza para encontrar las ecuaciones generales de este tipo de curvas” (MEN, 2015, p. 92) y se retoma en la nueva versión del 2016 en la forma: “Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones” (MEN, 2016, p. 78).

En la actualización de los DBA se evidencia un interés en rescatar las propiedades de lugar geométrico de las cónicas; el lugar geométrico se venía minimizando debido al tratamiento que se le estaba dando en las aulas, se priorizaba la enseñanza de ecuaciones y algoritmos y se asocian representaciones gráficas como definiciones dejando de lado el componente geométrico-espacial característico de las cónicas. Según Bonilla et al. (2013) “cuando el discurso matemático escolar da prioridad a las ecuaciones cartesianas que las describen (a las cónicas), […] promueve la pérdida de su estructura como lugar geométrico.” (p. 666)

En los DBA hay un interés notorio por desarrollar la competencia espacial a lo largo de todo el ciclo escolar, esto quiere decir que desde el MEN hay una preocupación y esto se puede evidenciar frente al aprendizaje que proponen respecto a las figuras cónicas, entonces bajo estos argumentos surge una pregunta ¿Cómo lograr este aprendizaje?, en este aspecto, se pretende analizar si una vez conocido el lugar geométrico en la métrica usual (euclídea) el trabajo con otras métricas permite afianzar el concepto de cónica, independiente de su representación gráfica y analítica, para priorizar la noción de lugar geométrico.

Por lo anterior, se establece desarrollar una investigación que permita superar las problemáticas descritas. Para lograr estos fines, se propone en primer lugar reconstruir el concepto de cónica como lugar geométrico desde una visión epistemológica-histórica, cognitiva y didáctica; en segundo lugar, analizar la actividad de los estudiantes de un grado décimo de educación media Colombiana frente a situaciones didácticas relacionadas con las cónicas en diferentes métricas, y finalmente con base en la reflexión de la práctica se analizan los aportes de estas estrategias en el aprendizaje construido por los estudiantes. De acuerdo con la descripción de la problemática, se presenta a continuación la pregunta central de investigación.

Formulación del Problema de Investigación

¿En qué aspectos las situaciones didácticas pueden beneficiar el aprendizaje de las cónicas como lugar geométrico mediante el uso de diferentes métricas? Para responder a la pregunta se analizan los interrogantes ¿Qué dificultades presentan los estudiantes al trabajar las cónicas como lugar geométrico?, ¿Cómo construye e investiga el estudiante el concepto de lugar geométrico de las cónicas bajo las situaciones didácticas propuestas? y ¿Cómo el estudiante logra transitar en diferentes registros de representación bajo procesos de conversión y tratamiento de las cónicas como lugar geométrico?

Objetivos de Investigación

Objetivo General

Analizar el aporte de las situaciones didácticas al aprendizaje que desarrollan los estudiantes en la comprensión del concepto de métrica en el estudio de las diferentes cónicas desde su definición como lugar geométrico.

Objetivos Específicos

OB1. Determinar los diferentes obstáculos epistemológicos, cognitivos y didácticos que no permiten avanzar al estudiante en el conocimiento del lugar geométrico de las cónicas.

OB2. Identificar como los estudiantes construyen e investigan el lugar geométrico de las cónicas por medio de las situaciones didácticas diseñadas.

OB3. Describir la transición del estudiante en diferentes registros de representación bajo procesos de conversión y tratamiento de las cónicas como lugar geométrico.

Justificación

En los lineamientos de la educación colombiana para el área de matemáticas (LCM, EBC y DBA) se evidencia la necesidad de rescatar en la enseñanza, los procesos de tipo espacial integrando la matemática abstracta con matemáticas del contexto, por lo que se está provocando gradualmente una pérdida del conocimiento de las propiedades geométricas de los objetos matemáticos y esto se puede explicar porque:

> Las reformas de las matemáticas escolares […] eliminaron la geometría como curso paralelo al álgebra; relegaron los temas geométricos para el final de los programas […] y trataron de remplazar las pruebas de tipo sintético por elegantes pruebas de tipo algebraico […] o de tipo analítico que aprovechan propiedades de las funciones utilizadas para describir los lugares geométricos. (Vasco, 2006, p. 27)

Bajo esta perspectiva, desde el MEN (1998) se impulsó una propuesta de renovación curricular denominada *geometría activa* con el fin de promover el estudio de la geometría con herramientas exploratorias y representaciones en el espacio, con el argumento que el estudiante debe construir y manipular representaciones mentales de objetos, relacionarlos, transformarlos y traducirlos a representaciones materiales; en este tipo de escenarios el estudiante "avanza desde un espacio intuitivo […] a un espacio conceptual o abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas" (MEN, 1998, p. 37). La propuesta de la *geometría activa* busca que el estudiante argumente sobre el espacio valiéndose de modelos o figuras, palabras del lenguaje ordinario y gestos corporales donde "se da prioridad a la actividad sobre la contemplación pasiva de figuras y símbolos" (MEN, 1998, p. 37).

Tal es el caso de las cónicas: figuras con diversas propiedades geométricas que desde la visión de la *geometría activa* perfectamente podrían ser trabajadas desde la manipulación y la interacción en el plano espacial antes de ser abordadas desde las representaciones algebraicas, y según Vasco (2006), en las aulas de clase se ha dejado de lado el tratamiento geométrico espacial pues es común ver que la metodología generalmente usada cuando se quiere trabajar esta temática es "construir las secciones cónicas en papel milimetrado y después desarrollar de manera algorítmica, algunos ejercicios para esbozar sus ecuaciones algebraicas generales y canónicas y, posteriormente, evaluar la búsqueda procedimental de los elementos de cada sección cónica" (Calderón y Peñuela, 2013, p. 273).

En este sentido es necesario llegar a formular una propuesta que promueva la *geometría activa* en las cónicas y una de estas estrategias es abordar las cónicas desde una visión puntual en el plano cartesiano (ubicación de varios puntos que satisfacen determinada condición geométrica). Sumado a esta concepción de las cónicas se pueden modificar las condiciones de medición para la ubicación de los puntos, es decir, se puede cambiar la métrica para analizar como el estudiante a partir de procesos de medición diferentes al habitual (métrica euclidiana o usual) encuentra distintas representaciones de las cónicas priorizando su definición como lugar geométrico (por ejemplo con métricas como la distancia L_1 o del taxi, la distancia de Chebyshov o máxima y la métrica discreta o trivial), dicha actividad puede favorecer de una forma más participativa la interacción del estudiante con el objeto matemático e integrar otro pensamiento importante, como el pensamiento métrico en especial.

La temática de las cónicas según los DBA (2016) se establece para grado décimo de educación media colombiana, es por esta razón que se diseña una serie de actividades matemáticas relacionadas con el abordaje de las cónicas como lugar geométrico desde diferentes métricas, para ser aplicadas con estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Coopteboy de la ciudad de Tunja, y con esta actividad se llega a analizar cómo estas situaciones favorecen a los estudiantes en el aprendizaje de las cónicas como lugar geométrico; a determinar el tipo de análisis que desarrollaron; los obstáculos que presentaron y las diferentes representaciones que realizaron cuando interactuaban con diferentes métricas.

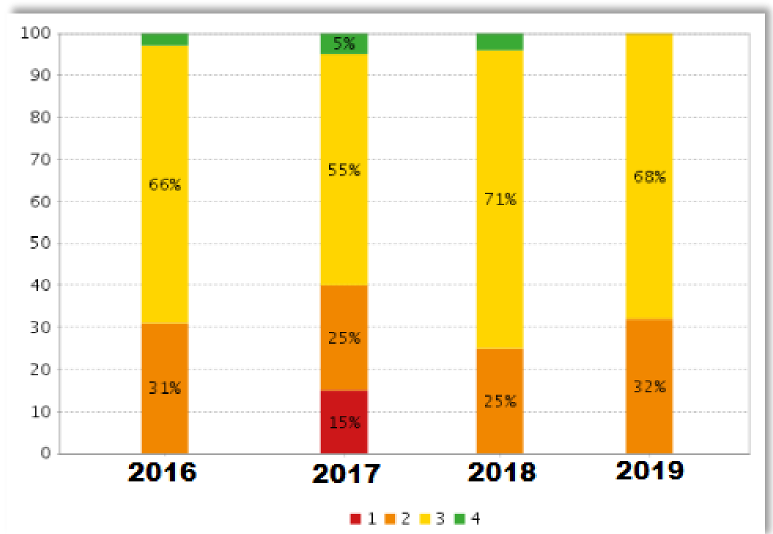
En esta institución los estudiantes de grado décimo presentan un nivel básico en el área de matemáticas, esto se argumenta al estudiar el promedio de calificaciones obtenidas en el transcurso del año (entre 3,4 y 4,0 en una escala de 1,0 a 5,0). Entre los factores que influenciaron para este desempeño considerado regular, según la experiencia del docente titular del área y los mismos estudiantes, se encontró que corresponde en parte al desinterés en la materia debido a la monotonía trabajada en las clases, se recurre bastante al texto guía y no se fomentan espacios distintos de aprendizaje y a esto se suman las nuevas estrategias de clases virtuales por la pandemia de Covid-19, que indagando no han resultado del agrado de estos estudiantes.

En general, la institución en las pruebas de estado Saber 11, en los últimos 4 años desde el área de matemáticas presenta un desempeño en su mayoría de nivel 3 y nivel 2 (el Icfes clasifica el desempeño de los estudiantes en 4 niveles, siendo el nivel 1 el más bajo y el nivel 4 el más alto), esto se puede evidenciar en la Figura 1, aunque el porcentaje del nivel 3 es amplio no se puede negar que el nivel 2 siempre ha estado presente, lo que constituye un factor negativo en los resultados ya que lo ideal es que los estudiantes estén en nivel 3 y 4.

En estas últimas 4 pruebas se evaluaron tres componentes desde el área de matemáticas: la solución de problemas que involucran información cuantitativa, la esquematización de información cuantitativa y la validación de procedimientos y estrategias matemáticas, por tanto, se pueden mejorar los resultados en estas pruebas asumiendo estrategias de enseñanza diferentes desde cursos inferiores donde se brinde al estudiante los medios necesarios para que el construya el conocimiento privilegiando la autonomía, la experimentación y el descubrimiento que posteriormente conlleven a niveles de abstracción más altos.

Figura 1

Desempeño en las pruebas saber 11 en el área de Matemáticas



Nota. De los 4 años evaluados, el Colegio Coopteboy presenta el mejor desempeño en el 2018, en este año el 75% de estudiantes estuvieron entre los niveles 3 y 4. Adaptado de Icfes Interactivo (2020). (http://www2.icfesinteractivo.gov.co/)

Una de las categorías principales que evalúa la prueba saber 11 es la geometría (las otras dos categorías son la estadística y el cálculo según Icfes (2020)) que desde el Plan de Área de grado décimo de la Institución Educativa Coopteboy está para ser trabajada de forma paralela al curso de matemáticas durante los dos últimos periodos escolares (en los dos primeros se trabaja Estadística) y representa una (1) hora de las cinco (5) horas que se establecen como intensidad horaria a la semana, pero por las condiciones, limitaciones de tiempo y el manejo del texto guía la práctica del docente respecto a la geometría se redujo al tratamiento del lenguaje algebraico de las figuras geométricas (geometría analítica) y en asociar representaciones gráficas a dichos tratamientos por el afán de cumplir con el Plan de Área de la institución educativa a pesar de los percances y dificultades que trajo la nueva modalidad de educación virtual.

Según lo expuesto, y luego de un análisis a las teorías en Educación Matemática, se consideró que uno de los marcos teóricos para promover la comprensión de las cónicas por medio de la exploración de problemas, la investigación y la reflexión es la Teoría de la situaciones didácticas (TSD) de Guy Brousseau. Por medio del diseño de situaciones didácticas se pretende que el estudiante aparte de manipular nuevas formas de medir descubra, por medio de la interacción, el trabajo en grupo y la confrontación de sus conocimientos previos, las propiedades geométricas de las cónicas, simulando pequeñas comunidades científicas desde el aula de clase virtual.

Capítulo II

Marco Teórico

En este capítulo se revisan los principales antecedentes de la investigación basados en el tratamiento dado a las cónicas desde el concepto métrico; se expone los fundamentos teóricos relacionados con la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) para la creación y puesta en práctica de situaciones de aprendizaje y se mencionan algunos aspectos importantes para el análisis de resultados desde la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Raymond Duval.

Antecedentes para el Estudio de las Cónicas

Para el desarrollo de la investigación, dentro de la etapa de análisis de antecedentes se estudian principalmente las estrategias didácticas y las investigaciones teóricas basadas en el tratamiento de las cónicas desde diferentes métricas, en este punto se específica que desde la Educación Matemática se han desarrollado varios trabajos referentes a las cónicas como lugar geométrico, por esta razón se hace énfasis en las investigaciones donde se utiliza el concepto de métrica. En el estado del arte desarrollado se destacan investigaciones a nivel local, nacional e internacional las cuales se toman como herramientas de apoyo para lograr los diferentes objetivos propuestos en la investigación.

Antecedentes Internacionales

Hernández (2017) en su tesis de maestría denominada *Una secuencia didáctica para el tratamiento de la circunferencia como lugar geométrico, considerando métricas discretas y la euclidiana.* desarrolla una secuencia didáctica em el marco teórico de los modos de pensamiento de Anna Sierpinska. Esta teoría considera que un concepto matemático puede ser comprendido cuando se articula en los tres modos de pensamiento: sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, esta teoría tiene el fin de favorecer la comprensión de la circunferencia en estudiantes de media, en este sentido la propuesta de innovación permitió que los estudiantes desarrollaran la circunferencia como lugar geométrico desde la métrica continua euclidiana y también en métricas discretas como la distancia de Manhattan y la distancia de Chevyshoy, ampliando la visión de la geometría de los estudiantes en situaciones cotidianas y ambientes ficticios debido a que el concepto de distancia se modifica dependiendo de la métrica que se decida utilizar.

Loiola y Costa (2015), en su artículo denominado *As Cônicas na Geometria do Taxi*, pretendían mostrar las cónicas cuando se definen en una geometría no euclidiana como la geometría del taxi: este trabajo fue en su totalidad teórico documental, se logró llegar a establecer las representaciones gráficas y algebraicas de las cuatro cónicas y entre sus principales conclusiones de investigación se argumenta cómo este tipo de actividades matemáticas pueden repercutir favorablemente en la educación básica considerando que, al tratarse de una métrica elemental, permite varios cuestionamientos de carácter criticó que serían pertinentes para tratar en el salón de clases. Debido a la simplicidad de la definición del espacio métrico del taxista se pueden hacer distintos análisis por parte de los estudiantes acerca de las figuras cónicas y así rescatar algunos de los conceptos inmersos como las distancias y las formas de medir.

Bonilla et al. (2013), en su artículo denominado *Las cónicas en la geometría del taxista: una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento*, sustentan una propuesta didáctica para la comprensión de las cónicas a partir de una investigación con enfoque cognitivo en la teoría de los modos de pensamiento de Anna Sierpinska. En este trabajo se evidencia de igual forma que una métrica idónea para lograr el aprendizaje de las cónicas y favorecer dicha articulación de pensamientos es la métrica del taxi, se defiende la idea que “sí una figura geométrica admite una definición algebraica y una definición métrica, se elige la definición métrica" (Bonilla et al., 2013, p. 668).

En la misma dirección, Valdivia y Parraguez (2012) en su artículo denominado *Evolución cognitiva del concepto parábola como lugar geométrico: una mirada desde la teoría APOE,* estudian la construcción del concepto parábola y sus elementos principales como lugar geométrico, bajo la mirada de la teoría APOE y los tres niveles de evolución de los esquemas: Intra, Inter y Trans. En la investigación se quería analizar la forma en que los estudiantes construían el concepto de parábola como lugar geométrico y entre los principales resultados de la investigación se encuentra la forma de abordar la parábola desde otra métrica; las propiedades de lugar geométrico se hacen más evidentes e involucran la puesta en escena de más conceptos geométricos como el plano en $\mathbb{R}^2$, puntos, distancia y rectas.

De igual forma, Bonilla (2012) en su tesis de maestría *La elipse desde la perspectiva de la Teoría de los Modos de Pensamiento,* da cuenta de un estudio sobre la comprensión del concepto elipse bajo un enfoque cognitivo. La problemática de investigación radica en que si se aborda la elipse solamente a través de las ecuaciones cartesianas no es suficiente para lograr una comprensión profunda del concepto, que corresponde a comprender la elipse como sección cónica en el espacio, curva en la representación del plano, como pares ordenados que satisfacen la ecuación de la elipse y como lugar geométrico. La investigación buscaba dar respuesta a la pregunta ¿Cuáles son las conexiones entre las distintas definiciones de la elipse que promueve alcanzar una comprensión profunda de esta?, respecto al interrogante se pudo concluir que cuando la elipse se trabaja como lugar geométrico desde la visión analítica-estructural presentan mayores posibilidades para abordarla desde una visión analítico-geométrica y analítico-aritmética.

Antecedentes Nacionales

A nivel nacional, Cárdenas y Parra (2013) en su trabajo monográfico denominado *Estudio de la métrica de manhattan. Segmentos, rectas, rayos, circunferencias y algunos lugares geométricos en la geometría del taxista.* estudian una transformación de la geometría de Euclides aplicando sobre ella la métrica del taxista. En este trabajo se determinaron los postulados, teoremas y definiciones que prevalecen una vez aplicada dicha métrica, a partir de esto se analiza la geometría de Euclides desde la métrica del taxista, concluyendo principalmente que las nociones básicas de geometría euclidiana varían cuando se cambia el concepto de distancia, es decir, bajo las mismas condiciones, objetos geométricos toman formas distintas, totalmente diferentes a las que usualmente se conocen.

Por otro lado, Fernández (2011) en su tesis de maestría titulada *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando Cabri Géomètre II Plus,* investigó sobre ¿Qué fenómenos didácticos genera la mediación del Cabri Géomètre II Plus, en la actividad matemática de los estudiantes que se inician en un curso de geometría analítica, en el marco de construcciones geométricas de las cónicas como lugares geométricos desde lo puntual y lo global?, para tal fin diseñó una secuencia didáctica con el propósito que los estudiantes realizaran en primera instancia, construcciones punto por punto de cada una de las cónicas y luego construcciones geométricas donde se utilizara la figura desde un punto de vista global, para caracterizar geométricamente cada una de las cónicas. Esta investigación se trabajó en el marco teórico de la TSD y la micro ingeniería didáctica, estos proporcionaron principios orientadores para comprender e identificar fenómenos didácticos en el proceso de enseñanza de las cónicas y reconocer la importancia de promover caracterizaciones puntuales y globales de las cónicas con el uso de Software educativo en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Antecedentes Locales

A nivel local, Antonio y Garzón (2017), en su trabajo monográfico denominado *Estudio geométrico y analítico de las cónicas en algunas métricas,* realizan una investigación de las cónicas en las métricas usual, taxi, máximo y discreta utilizando como principal herramienta su definición como lugar geométrico en el conjunto $\mathbb{R}^2$. La investigación se trabajó desde la metodología de análisis teórico-documental y buscó dejar un material de fácil acceso que permitiera a un lector en general conocer otras formas de concebir las cónicas desde el lenguaje algebraico y gráfico. Se concluyó que, al variar la forma de medir, cambian las condiciones analíticas en el proceso de construcción de nuevas figuras, por lo tanto, es importante el papel de las métricas en cuanto a deducciones de lugares geométricos se refiere.

Teniendo en cuenta estos antecedentes y con el fin de establecer ambientes de aprendizaje en los que se priorice la actividad desarrollada por el estudiante, se problematice el conocimiento a partir de la interacción directa con el objeto matemático y se promueva el trabajo en grupo en la construcción del conocimiento de lugar geométrico de las cónicas a partir de diferentes métricas, la TSD se consideró como el marco teórico idóneo para lograr este fin. En este sentido, la TSD que se toma como principal soporte para la investigación desarrollada y los procesos de tratamiento y conversión en la TRRS de Duval (2017) se utilizan como apoyo para el análisis del conocimiento que construyen los estudiantes respecto a las cónicas en la propuesta didáctica presentada.

Teoría de las Situaciones Didácticas

La TSD se considera el aporte teórico más significativo de Brousseau a la Educación Matemática, esta teoría establece criterios constructivistas que según Brousseau (2007) buscan comprender las interacciones sociales entre estudiantes, docentes y saberes que determinan la naturaleza del aprendizaje, estas interacciones emergen de medios que han sido reflexionados para que el estudiante actúe según lo que conoce y bajo los parámetros establecidos por un medio.

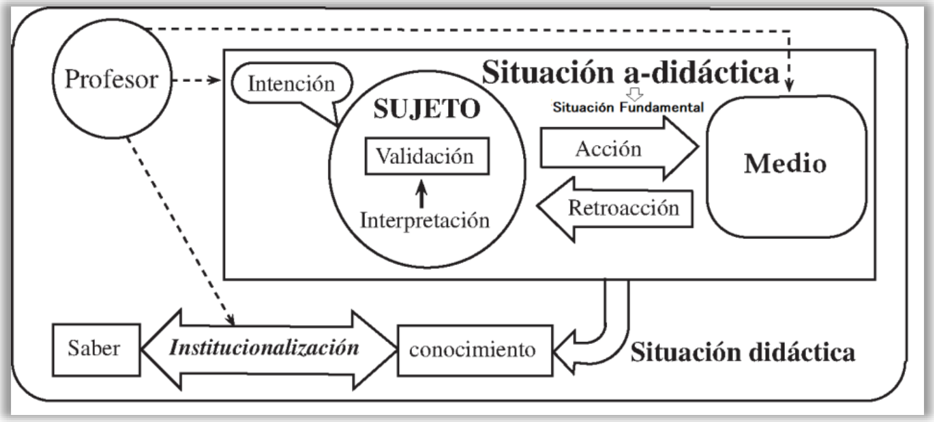
Brousseau (2007) manifiesta que el estudiante "aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios […] este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por medio de nuevas respuestas, que son la marca del aprendizaje" (p. 30). Bajo esta idea, se busca diseñar situaciones utilizando un medio para ello, donde se garantice el aprendizaje de las matemáticas desde una visión constructivista y se tengan en cuenta los pre saberes, el trabajo individual, el trabajo grupal y la socialización de conocimientos por los estudiantes.

La TSD defiende la premisa que el conocimiento no se construye en ambientes irreflexivos si no que se buscan situaciones que ofrezcan al estudiante "la posibilidad de construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso de génesis artificial" (Brousseau, 2007, p. 16).

En este orden, el papel del docente es diseñar las situaciones ideales que favorezcan esta premisa, estas situaciones se conocen como *situaciones didácticas.* (En la figura 2 la situación didáctica representa una situación global donde el estudiante actúa frente a un medio y este medio provoca una retroacción que le permite al estudiante interpretar la información y validarla para generar el conocimiento esperado)

Figura 2

Interacciones en el aula de clase



Nota. Adaptado de Parraguez et al. (2015).

La TSD redefine las interacciones entre estudiante, docente, saber y medio. Por un lado, la relación entre el estudiante y el saber es directamente práctica, experimental y manipulable, la relación del docente con el saber se establece en la transposición didáctica, la tarea del docente es adaptar el conocimiento científico para ser enseñable y entre el docente y el estudiante se establece el contrato didáctico que entra en escena como un indicador de reglas mediadoras de todas las relaciones implícitas y explicitas en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Por la naturaleza constructivista en que se da el conocimiento en esta teoría y la hipótesis que el estudiante aprende en contra de lo que sabe, lo más lógico es que ocurran obstáculos, estos se manifiestan en errores que para Brousseau (2007): "están unidos entre sí por una fuente común: una manera de conocer, una concepción característica, coherente, aunque no correcta, un conocimiento anterior que tuvo éxito en todo un dominio de acciones" (p. 45). En este caso el objetivo de las situaciones didácticas es ofrecer los medios para que el estudiante supere dichos obstáculos haciendo que sea consciente de cambiar sus concepciones.

El docente dentro del diseño de la situación didáctica busca generar una situación a-didáctica, es decir una situación que no dé a conocer directamente el conocimiento esperado si no que da prioridad al proceso de aprendizaje ya que Brousseau (2007) argumenta que el estudiante: "no habrá adquirido verdaderamente este conocimiento hasta no ser capaz de utilizarlo en situaciones que encuentre fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de cualquier indicación intencional" (p. 31). En este momento se busca que el estudiante construya conocimiento por encima de sus concepciones previas, y se da mayor importancia al desequilibrio que genera el problema y a los análisis intuitivos que utiliza el sujeto para poder superar estos desequilibrios en el conocimiento. La intervención del docente es nula en cuanto al saber, pero no significa que no pueda apoyar el proceso orientando o aclarando inquietudes respecto a significados, palabras desconocidas, entre otros (En la figura 2, la situación a-didáctica está en el interior de la situación didáctica).

Como consecuencia de una correcta situación a-didáctica donde el contrato entre docente y estudiantes se establece, Brousseau (2007) comenta que se espera que ocurra el fenómeno de devolución que corresponde al "acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctico) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia" (p. 87), es decir, que el estudiante se apropia del problema y de forma autónoma busca resolver el problema, sin ser guiado por lo que el docente espera.

La devolución en la situación escolar se ve cuando "el docente organiza y constituye un medio, por ejemplo, un problema, que revela más o menos claramente su intención de enseñar al alumno un saber determinado pero que disimula suficientemente dicho saber y la respuesta esperada para que el alumno pueda obtenerlos solo, por medio de una adaptación personal al problema planteado" (Brousseau, 2007, p. 86).

Para que el estudiante se encamine por el conocimiento que verdaderamente se espera y como este "no puede resolver de entrada cualquier situación a-didáctica, el maestro le procura aquellas que están a su alcance" (Brousseau, 2007, p. 32). En este orden, dichas situaciones a-didácticas seleccionadas con el fin didáctico determinan el conocimiento esperado, es aquí donde se espera que el estudiante logre la situación fundamental que según Brousseau (2007) representa "la posibilidad efectiva de realización en un ambiente psico sociocultural determinado" (p. 32), es decir que el conocimiento esperado resulta ser la estrategia más óptima para lograr la solución del problema (En la figura 2, la situación fundamental se encuentra en el interior de la situación didáctica, y resulta como consecuencia de las situaciones a-didácticas logradas por el estudiante en su interacción autónoma con el medio que le permiten lograr el conocimiento esperado).

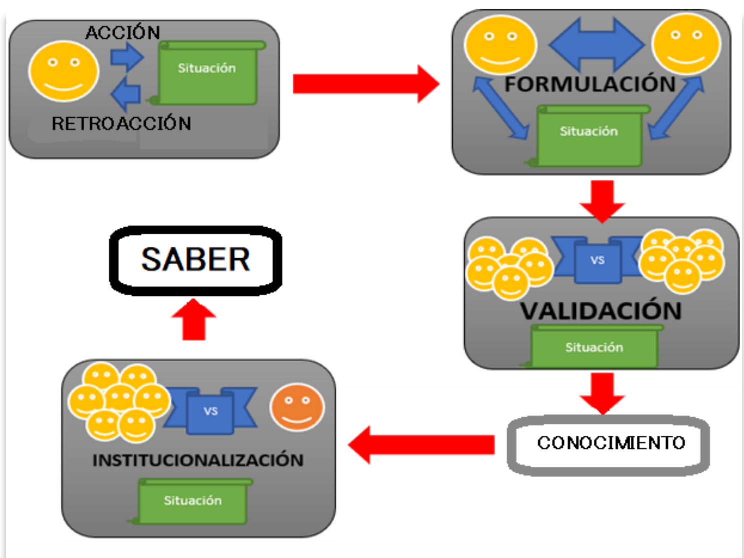
Las situaciones a-didácticas deben garantizar momentos de acción, formulación y validación del conocimiento para que el saber se dé como consecuencia de la interacción del estudiante en cada uno de estos momentos. En este punto, el rol del profesor es de pensar hipotéticamente los posibles resultados que pueden darse en los diferentes momentos (análisis a priori).

En la situación de acción el estudiante accede con sus propios conocimientos, ideas o concepciones a abordar el problema dado por el docente eligiendo "directamente los estados del medio antagonista (situación) en función de sus propias motivaciones" (Brousseau, 2007, p. 24); en la situación de formulación el estudiante comunica a otros compañeros sus resultados, hipótesis o conjeturas porque es capaz de retomar el conocimiento "reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico" (Brousseau, 2007, p. 25).

Cuando el estudiante al notar contradicciones, correcciones o diferir en respuestas respecto a los otros estudiantes manifiesta que “el emisor ya no es un informante, sino un proponente, y el receptor, un oponente” (Brousseau, 2007, p. 26) se da lugar a la situación de validación. Con todo el proceso descrito, se desarrollan conclusiones de los resultados obtenidos de la situación y con ayuda del docente se realizan vinculaciones con el saber matemático esperado, dándose finalmente una situación de institucionalización en el que se acercan las “producciones de los conocimientos a otras creaciones (culturales o del programa)” (Brousseau, 2007, p. 28)

Figura 3

Tipos de situaciones didácticas.



Nota. Adaptado Brousseau (2007).

Brousseau (2007) describe cuatro efectos que acontecen en las situaciones didácticas cuando se establece un contrato didáctico de forma incorrecta y de los cuales hay que tener especial cuidado: el efecto topaze, el efecto jourdain, el deslizamiento meta-cognitivo y el uso abusivo de la analogía.

En el efecto Topaze, los estudiantes obtienen la solución del problema con la ayuda del profesor quien da "los conocimientos necesarios para producir esas respuestas […] planteando preguntas cada vez más fáciles [que] intenta obtener la máxima significación" (Brousseau, 2007, p. 76), sin permitir la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes. El efecto jourdain nace cuando "el profesor, para evitar el debate del conocimiento con el alumno y eventualmente comprobar el fracaso, admite reconocer el indicio de un conocimiento sabio en los comportamientos o en las respuestas del alumno" (Brousseau, 2007, p. 77).

El deslizamiento metacognitivo ocurre cuando tras el fracaso del estudiante en las situaciones didácticas empleadas "el profesor intenta justificarse y, para continuar su acción, toma como objetos de estudio sus propias explicaciones y sus medios heurísticos en lugar del conocimiento matemático" (Brousseau, 2007, p. 78). El uso abusivo de la analogía hace referencia a la actitud del docente de cambiar una noción compleja por un caso parecido y de este modo los estudiantes "obtienen la solución leyendo las indicaciones didácticas y no gracias a un compromiso con el problema" (Brousseau, 2007, p. 81).

Otros aspectos fundamentales al momento de trabajar con la TSD es tener claro lo que se entiende dentro de la teoría por obstáculo y error. Para Brousseau (2007) un obstáculo es un conocimiento que "da resultados correctos o ventajas apreciables en determinado ámbito, pero se revela falso o completamente inadaptado en un ámbito nuevo o más amplio" (p. 45), esto quiere decir que los obstáculos son dificultades que no permiten avanzar al nuevo conocimiento, estos pueden darse de orden epistémico, didáctico o cognitivo. Por otro lado, el error, según Brousseau (2007), es la manifestación del obstáculo que está ligado al sujeto por "una manera de conocer, una concepción característica, coherente, aunque no correcta, un "conocimiento" anterior que tuvo éxito en todo un dominio de acciones." (p. 45).

Los criterios indicados en la TSD, se utilizan para estudiar las diferentes interacciones entre estudiantes, docente y saber a través de un medio que favorezca ambientes a-didácticos en el aprendizaje de las cónicas como lugar geométrico en diferentes métricas.

Procesos de Tratamiento y Conversión en la Teoría de los Registros de Representación Semiótica

Para la fase de análisis de resultados en la implementación de las situaciones didácticas, se quiere comprender como el estudiante desarrolla los procesos de tratamiento y conversión en diferentes registros de representación semiótica. La naturaleza del objeto matemático en cuestión: las cónicas, permite movilizarse en diferentes registros, por esta razón se retoma de la TRRS propuesta por Duval, como dos procesos cruciales en el aprendizaje de las matemáticas.

La TRRS (Duval, 1993) se basa en la hipótesis que el acceso a las matemáticas se hace por diferentes medios de representación no solo por procesos de visualización y que el aprendizaje de un estudiante se construye en la medida que este realiza alguna actividad matemática eligiendo el registro adecuado para dar solución a la situación. Duval (2006) centra su investigación en responder respecto al aprendizaje de los estudiantes a la pregunta ¿cómo aprender a cambiar de registro? y ¿cómo aprender a no confundir los registros?

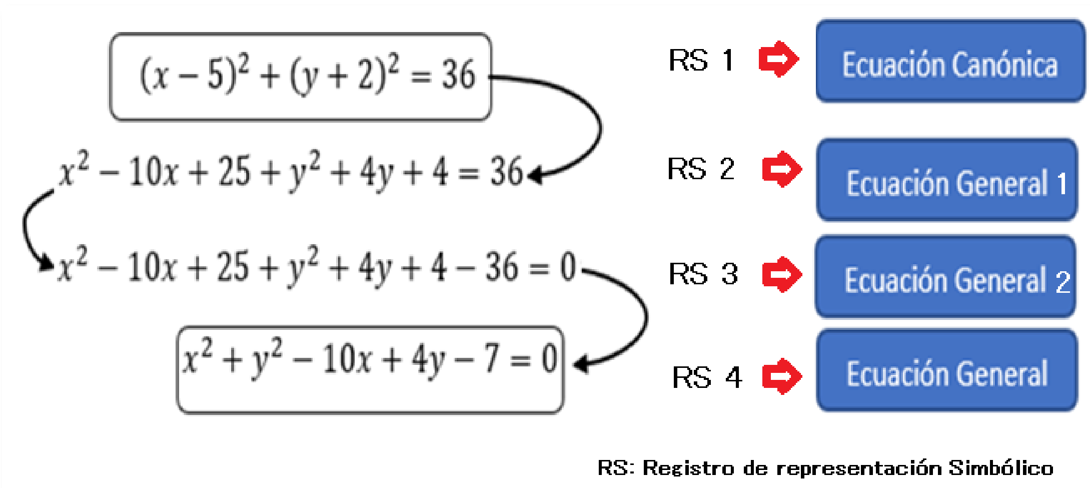
Para Duval (2017) un sistema semiótico (signos que transmiten significados o interpretaciones) se convierte en un registro de representación semiótico cuando el individuo interpretante logra establecer procesos cognitivos como la formación de representaciones identificables (el sujeto es consciente del registro que se le presenta) y logra realizar transformaciones de representaciones en diferentes registros (tratamiento y conversión), bajo esta premisa "los registros son sistemas semióticos que proporcionan los medios para crear nuevos conocimientos" (Duval, 2017, p. 68), este proceso de transformación es el que determina la actividad matemática, debido a que se busca transformar las representaciones semióticas en otras representaciones para lograr conocimiento nuevo o estrategias favorables para poder desarrollar determinada situación.

Proceso de Transformación: Tratamiento

Duval (2017) manifiesta que "los tratamientos son los procesos que generan nuevas representaciones en el mismo registro mediante una operación específica de sustitución" (p. 70): así, desde el registro simbólico se puede realizar el tratamiento de una ecuación canónica de la circunferencia a la ecuación general como se muestra a continuación:

Figura 4

Proceso de tratamiento en el registro simbólico de una circunferencia



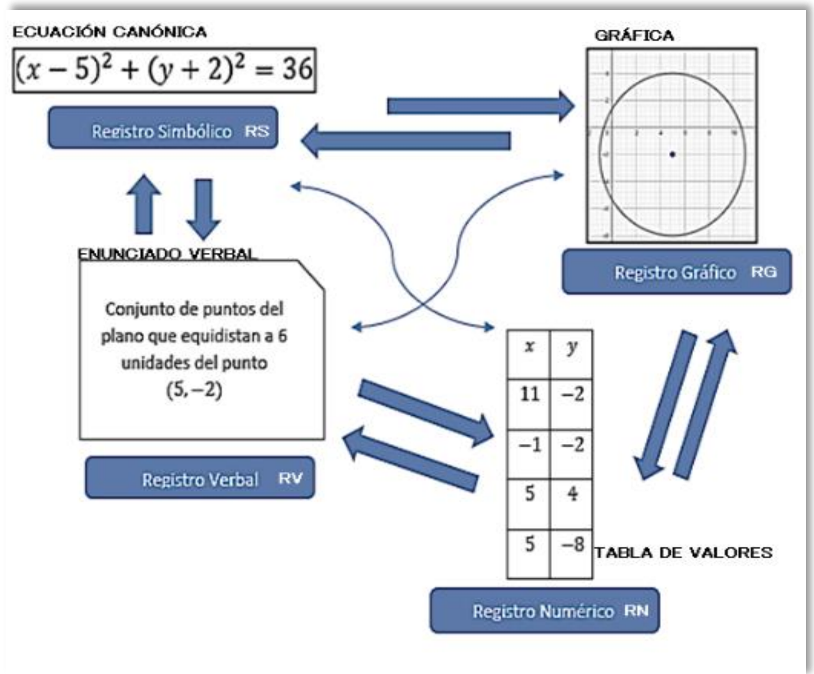
Fuente: Elaboración propia.

Proceso de Transformación: Conversión

Para Duval (2017) el proceso de conversión consiste en generar nuevas representaciones en registros diferentes: en este aspecto siguiendo el ejemplo de la circunferencia se puede pasar del registro simbólico y transformarlo al registro geométrico, numérico y el registro verbal.

Figura 5

Proceso de Conversión de la circunferencia



Fuente: Elaboración propia.

Duval (2017) manifiesta que en el proceso de conversión se da el máximo umbral del conocimiento matemático debido a que “es en este tipo de transformación que los estudiantes pueden tomar conciencia del funcionamiento representativo específico de cada registro” (p. 70). El pensamiento matemático según Duval (2017) siempre se moviliza en al menos dos registros, tal es el caso de la geometría y el análisis por citar algunos casos, esta movilización en al menos un segundo registro es “necesaria para discernir y reconocer qué las unidades de significado son matemáticamente relevantes en el contenido de las representaciones producidas en los otros registros” (p. 71) para ayudar a lograr coherencia entre varios registros lo que determina un acercamiento cognitivo a la construcción que desarrolla el estudiante.

El conocimiento es entendido como el resultado de un proceso de aprendizaje que desde la TSD se construye por la adaptación del estudiante a un medio en un conjunto de interacciones que se conocen como situaciones didácticas (Brousseau, 2007), complementando lo anterior, desde la TRRS, este conocimiento solo es posible de alcanzar al partir de la actividad matemática, cuando se actúa sobre el objeto a través de representaciones semióticas. (Duval, 1993).

En este orden, el ambiente a-didáctico que el docente planea para que el estudiante alcance el conocimiento esperado, debe contemplar la transición entre diferentes registros de representación los cuales generan una aproximación al objeto matemático de estudio. En la acción y la retroacción que ocurren en la interacción del estudiante con el medio, los significados del conocimiento toman sentido en el estudiante cuando los registros que aborda se relacionan con otros registros previos, ya conocidos por el sujeto, y la situación didáctica ofrece las condiciones necesarias para que el estudiante transite de un registro a otro y le permita formular conjeturas respecto al objeto estudiado, validar dichas conjeturas y confrontar este conocimiento construido frente al saber cultural del objeto matemático (que resulta ser un operatorio entre diferentes registros de representaciones posibles).

Capítulo III

Marco Metodológico

En este capítulo se exponen los aspectos generales de la metodología de investigación del trabajo, donde se asume el paradigma Cualitativo – Interpretativo debido a la naturaleza de la investigación determinada por las interacciones que se dan en el aula de clase, puesto que no es suficiente observar la realidad social si no que se debe interpretar (Corbetta, 2007). Se describe en el diseño las fases de la Investigación-Acción (IA) para alcanzar los objetivos de aprendizaje que se quieren lograr por medio de la implementación de las situaciones didácticas. De igual forma, se describe la población implicada en la investigación y se sustenta la selección de muestra poblacional en las condiciones interaccionales del momento desde los ambientes virtuales. Finalmente, se describen los instrumentos y técnicas para la obtención y análisis de la información, así como las categorías de análisis que sirven de apoyo para las reflexiones finales y el análisis de la actividad investigativa.

Paradigma Investigativo

El paradigma que se adoptó en la investigación es el Cualitativo-Interpretativo en el cual se "busca comprender la complejidad de los salones de clase para transformarlos" (Jiménez, 2019, p. 122). En este orden se puede establecer que "la investigación cualitativa se enfoca en comprender los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con su contexto" (Hernández at al., 2014, p. 358), esto hace que la investigación se haga desde la actividad vivenciada por los estudiantes y comprendiendo todos los fenómenos que se dan en el momento de la clase. Aparte de analizar el ambiente educativo para Kilpatrick (Fiorentini y Lorenzato, 2015) es necesario transformarlo en beneficio del aprendizaje y de los procesos de participación en el ambiente escolar. Por tanto, la investigación pretende entender la forma como los estudiantes crean matemáticas a partir de unos ambientes de interacción entre un medio, estudiantes y el docente, por esta razón los planteamientos hipotéticos previos que se tienen en la investigación son de carácter general o abiertos y en la práctica se fueron enfocando o modificando según las particularidades de los estudiantes.

Para Hernández et al. (2014) el enfoque cualitativo es el ideal para analizar este tipo de naturaleza en razón de pretender examinar la forma en que los estudiantes perciben, experimentan e interpretan el fenómeno de la actividad matemática. Este enfoque busca la comprensión de múltiples realidades subjetivas para profundizar en los significados que puedan surgir de los participantes, estas realidades interpretadas y contextualizadas desde el salón de clase corresponden a cada uno de los estudiantes cuando construyen su conocimiento a partir de la interacción con situaciones didácticas.

Diseño de la Investigación

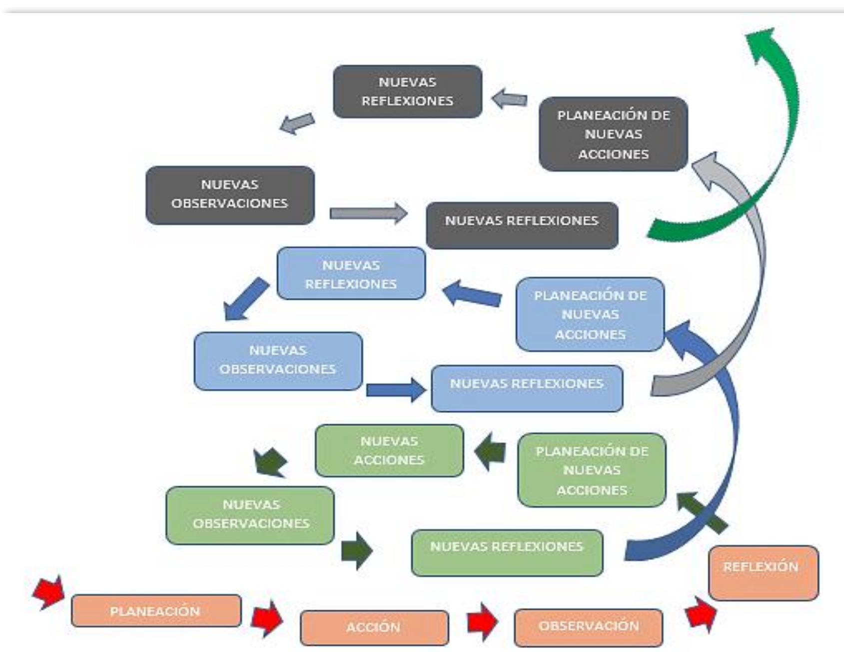
La Investigación Acción en Educación Matemática

La Investigación-acción (IA) se consideró adecuada para el ámbito de educación matemática y se constituye como un marco ideal no solo para observar y comprender las interacciones que se dan en el aula de clase si no que es una metodología que busca transformar las prácticas educativas mejorándolas y otorgando una mayor libertad en cuanto a las formas en que un estudiante aprende (Fiorentini y Lorenzato, 2015). En este orden, el marco metodológico IA apoya perfectamente los objetivos buscados por la TSD debido a que esta teoría constructivista busca que el estudiante aprenda especialmente de una forma autónoma cuando interactúa con un medio.

La IA se constituye en un diseño metodológico práctico para comprender la naturaleza o la complejidad de los procesos de aprendizaje desde el aula de clase, los datos de estudio se obtienen directamente en el campo, pero también es una metodología ideal de “actuación y observación centrada en la reflexión-acción” (Fiorentini y Lorenzato, 2015, p. 83), ya que aparte de la interacción directa del investigador con el investigado, analiza cómo el estudiante aprende, que obstáculos presenta y cómo poder superarlos para generar nuevas situaciones investigativas que favorezcan la construcción del conocimiento; con esto la metodología se puede asociar a una espiral autorreflexiva formada por ciclos sucesivos (Fiorentini y Lorenzato, 2015). Dicha espiral autorreflexiva según Lewin citado por Fiorentini y Lorenzato (2015) se puede estructurar en cuatro momentos que se repiten según sea necesario con el fin de mejorar la práctica educativa: El momento uno (1) corresponde a la planeación, el momento dos (2) de acción, momento tres (3) de observación y momento cuatro (4) de reflexión. Después de completar el ciclo y en base a la reflexión se asumen nuevas posturas investigativas para reiniciar el ciclo.

Figura 6

Momentos o fases de la IA



Nota. Adaptado de Fiorentini y Lorenzato (2015).

Elliott (2000) comenta que “la investigación-acción interpreta lo que ocurre desde el punto de vista de quienes actúan e interactúan en la situación problema” (p. 25), así, los hechos se interpretan en función de la compresión de los sujetos, intenciones y acciones, elecciones y decisiones, así como rutas de acción.

Con base en estas interpretaciones los ciclos de investigacion se repiten indefinidamente hasta lograr una comprensión mas profunda del aprendizaje de los estudiantes, al respecto Elliott (2000) afirma que “la actividad educativa consiste en la elaboración y experimentación de un proyecto dirigido a facilitar el desarrollo de la comprensión en cada uno de los alumnos que componen el grupo de clase” (p. 13). Para efectos de la presente investigacion dicho proyecto se enmarca en la TSD, y con la metodología IA, se busca transformar la práctica de los estudianttes frente al aprendizaje. A continuación, se describen los cuatro momentos de la IA y la adaptación en torno al fenómeno de la investigación desarrollada.

Fases de la Investigación

Momento 1. Planeación

En este momento se desarrolla el diagnóstico de la problemática abordada, donde se resalta que desde la faceta de aprendizaje fue necesario desarrollar algunos estudios preliminares como el análisis del objeto matemático cónicas, un análisis de tipo epistemológico-histórico del objeto matemático: se analizó la forma en que este ha sido enseñado, en como los estudiantes conciben el objeto, las dificultades a las que se enfrentan o los obstáculos que no permiten avanzar en el conocimiento y las restricciones que presenta la población objeto de estudio frente al aprendizaje del objeto matemático, entre otros.

En concordancia con lo expuesto, Artigue et al. (1995) logran establecer tres dimensiones de análisis preliminares que están acordes a las presentadas por Brousseau para el estudio de obstáculos que no favorecen los procesos de aprendizaje en los estudiantes, estas dimensiones son:

Dimensión Epistemológica. Asociado a las características del saber objeto de estudio, se hace un énfasis especial en buscar a través de la historia de las matemáticas la génesis del conocimiento, bajo qué condiciones nació, que problemas enfrentó y el tiempo que demoró en formalizarse. Esto permitió establecer algunos de los obstáculos de tipo epistemológico que posiblemente repercuten negativamente en la clase.

Dimensión Didáctica. Esta dimensión está asociada directamente a la forma de enseñar el contenido matemático, se estudió desde esta dimensión la forma en que fue presentado el conocimiento en los textos que se tomaron como referencia para el nivel escolar específico de la población. Analizar el concepto desde su forma estructural y formal (registros de representación) y poner en manifiesto los obstáculos de tipo didáctico (referidos a la labor de enseñanza del docente).

Dimensión Cognitiva. En esta dimensión se estudiaron las características cognitivas de la población objeto de estudio, dificultades a las que se enfrentan, restricciones que tienen respecto al objeto de estudio, los procesos que utilizan o que posiblemente utilizarían para abordar este saber, así como las concepciones que tienen frente al objeto matemático de las cónicas.

Con los análisis realizados se diseñaron las diferentes situaciones didácticas que contemplan posibilidades para la construcción del conocimiento, en esta parte de planeación el "análisis se basa en un conjunto de hipótesis" (Artigue et al., 1995, p. 45), por lo que es necesario describir lo que se espera de la interacción del estudiante con el medio "documentos de la situación didáctica".

El diseño de las situaciones didácticas fue producto de la reflexión del docente con el fin de incentivar ambientes constructivistas en donde el estudiante pudiera adquirir el conocimiento como resultado de la interacción con las situaciones en ambientes a-didácticos. Para lograr el objetivo, se propone que estas situaciones deben estar muy bien diseñadas pensando en favorecer los momentos de acción, selección, decisiones, trabajo en grupo, socialización, comunicación y validación, todo lo anterior aislado de la intervención directa del docente.

Momento 2. Acción

En este momento de IA se ejecutaron las situaciones didácticas diseñadas bajo todos los parámetros establecidos previamente en el momento de planeación. Se destaca que en esta fase se buscó dar protagonismo a los estudiantes, el profesor aparte de ser un observador del proceso y un incentivador, en caso de notar desmotivación de los estudiantes frente a las situaciones realizó una intervención mínima, por lo menos en las primeras tres partes de la situación (acción, formulación y validación). Se buscó que la situación didáctica favoreciera el trabajo autónomo de los estudiantes, incentivara la libertad a las acciones que ejecutaron los estudiantes para darle solución a las problemáticas planteadas y favorecieran los diferentes momentos de interacción y comunicación: la intervención del docente solo tuvo mayor participación en el momento de institucionalización del conocimiento.

Momento 3. Observación

El docente en este momento observó y documentó detalladamente lo que ocurría en el aula de clase cuando el estudiante interactuaba con las situaciones didácticas siendo totalmente fiel y desde el punto de vista de los participantes. En este aspecto se tiene en cuenta que la IA según Elliott (2000) “describirá y explicará lo que sucede con el mismo lenguaje utilizado” (p. 25).

En esta fase se recolectaron los datos que dieron razón de los diferentes fenómenos analizados en el momento uno (1) y de los momentos no contemplados que ayudaron al mejoramiento de la situación para aplicar en el siguiente ciclo de IA. Como se buscaba estudiar las diferentes interacciones entre estudiantes y saber a partir del medio se necesitaron instrumentos de recolección de datos cualitativos como la observación, notas de campo, grabaciones de audio o video de las producciones de los estudiantes por medio de la plataforma Zoom.

Momento 4. Reflexión

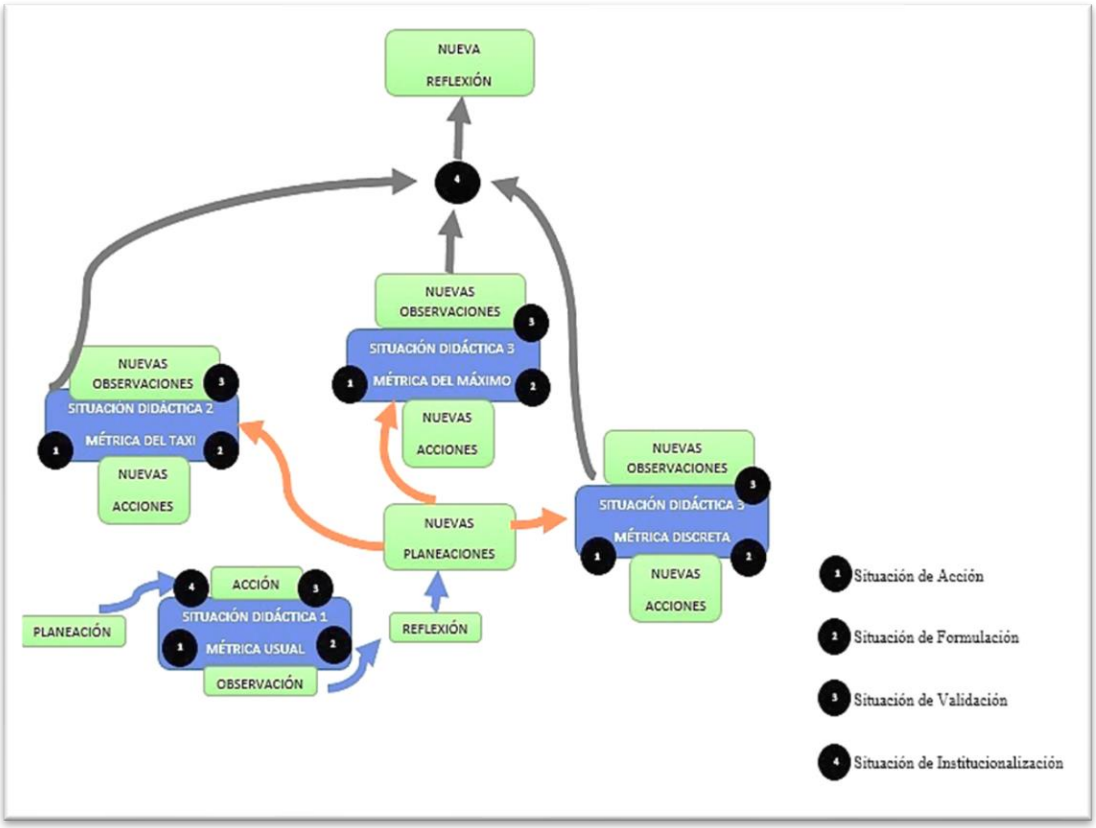
Con base en los datos obtenidos en el momento tres (3), se confrontaron todos los supuestos del momento uno (1) con los resultados realmente obtenidos de la implementación de las situaciones didácticas, teniendo como argumento que en este ejercicio se “producen comprensiones y orientaciones que son inmediatamente utilizadas en su propia transformación” (Fiorentini y Lorenzato, 2015, p. 83) y que generaron nuevos interrogantes o problemáticas a contemplar para reiniciar el ciclo de IA, con el fin de lograr los cambios de significados en los estudiantes respecto al objeto matemático de las cónicas.

En este apartado se ponen a juicio las categorías de análisis acordes a la TSD que ayudaron a mejorar la práctica en la planeación de las nuevas acciones y a implementar (nuevas situaciones didácticas) en el siguiente momento dado que, cómo se mencionó antes, la IA funciona como un espiral donde cada vez se intenta mejorar la práctica en los siguientes momentos.

Bajo los momentos establecidos en la IA se desarrolla el diseño de investigación, especificando los objetivos buscados en cada momento. Debido a la delimitación de la población investigada, el diseño investigativo será de la siguiente forma:

Figura 7

Diseño metodológico de investigación adaptado a la IA



Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 7, se establece un primer ciclo de IA, toda la muestra poblacional trabajó en la situación didáctica usual desde sus cuatro partes (acción, formulación, validación e institucionalización), con base en este ejercicio, en la reflexión se establecen parámetros para la adecuación de las otras tres situaciones didácticas que se diseñaron en la fase de planeación del primer ciclo (situaciones con métrica del taxi, máximo y discreta) las cuales fueron aplicadas simultáneamente a tres grupos de la muestra dando lugar a un segundo ciclo de IA con las nuevas orientaciones guiadas por el primer ciclo.

En cada una de las situaciones con los diferentes grupos se trabajó hasta la parte de validación, por lo que en la institucionalización se concretan los resultados en cada una de las situaciones y finalmente se hace una reflexión y evaluación de todo el proceso investigativo para poder dar respuesta al objetivo principal de la investigación. A continuación, se describe con más detalle lo que se realizó en cada uno de los dos ciclos de IA.

Tabla 1

Ciclo I de IA

Momento	Objetivos pretendidos
Planeación	En este momento se cumple el objetivo específico **1**: Determinar los diferentes obstáculos que no permiten avanzar en el conocimiento del lugar geométrico de las cónicas desde las dimensiones epistémica, cognitiva y didáctica. Para el logro del objetivo, se desarrolló un estudio previo del objeto matemático cónica desde las dimensiones mencionadas anteriormente, resaltando los obstáculos presentes en los procesos de aprendizaje; para complementar esta fase de IA se realizaron las siguientes actividades: • Diseño de cuatro situaciones didácticas que beneficiaran el aprendizaje de los lugares geométricos de las cónicas desde el concepto de métrica (usual, taxi, máximo y discreta) y favorecieran la transición entre los diferentes registros de representación. • Planteamiento de hipótesis de las soluciones, comportamientos e interacciones esperadas en el proceso de implementación de las situaciones didácticas.
Acción	Para el momento de acción se llevaron a cabo las siguientes actividades: • Implementar la primera situación didáctica para abordar el concepto de lugar geométrico de cónica desde la métrica usual. • Incentivar los tres momentos de trabajo autónomo en los estudiantes (acción, formulación y validación) • Promover la situación de institucionalización reconociendo los avances de los estudiantes para llegar a un consenso para la formalización del conocimiento.
Observación	En esta fase se buscó dar respuesta a los objetivos específicos **2 y 3** relacionados con identificar como los estudiantes construyen e investigan el lugar geométrico de las cónicas por medio de las

Momento	Objetivos pretendidos
	situaciones didácticas diseñadas y describir la transición del estudiante en diferentes registros de representación bajo procesos de conversión y tratamiento de las cónicas como lugar geométrico. Para alcanzar estos dos objetivos se realizaron las siguientes actividades: • Observar y desarrollar diferentes registros de la práctica por medio de diarios de campo, grabaciones de audio y video. • Transcribir relatos fieles a la realidad observada, conversaciones o tipos de análisis desarrollados por los estudiantes.
Reflexión	En esta fase se buscó dar respuesta al **objetivo principal** de la investigación que corresponde a analizar el aporte de las situaciones didácticas al aprendizaje que desarrollan los estudiantes al manejar el concepto de métrica en el estudio de las diferentes cónicas desde su definición como lugar geométrico, para poder alcanzar este objetivo se desarrollarán las siguientes actividades: • Comprender los diferentes resultados obtenidos de la primera aplicación de situación didáctica (datos de la fase de observación) • Comparar los tipos de análisis desarrollados por los estudiantes con los análisis de la fase de planeación. • Estudiar lo observado desde las categorías de análisis establecidas según el marco de la TSD y la IA. • Detallar los obstáculos que no permitieron alcanzar el conocimiento esperado. • Evaluar el proceso de aprendizaje.

Fuente: Elaboración propia.

Finalizado el primer ciclo, se reinicia el proceso como se expone en la Tabla 2.

Tabla 2

Ciclo II de IA

Momento	Objetivos pretendidos
Nuevas planeaciones	En base a los resultados obtenidos en el momento de reflexión del ciclo anterior, se vuelve a complementar el objetivo específico **1** y con esto la situación relacionada con el lugar geométrico de las cónicas desde la métrica del taxi, el máximo y la discreta, las cuales fueron modificadas, con el fin de superar los obstáculos evidenciados en la situación anterior que no promovieron el aprendizaje autónomo en los estudiantes.
Nuevas Acciones	Se implementa simultáneamente en tres grupos distintos, las situaciones didácticas (taxi, máximo y discreta) favoreciendo los momentos a-didácticos de acción, formulación y validación. Después del trabajo de cada uno de los grupos con sus respectivas situaciones didácticas, en una sesión conjunta por Zoom se institucionaliza el conocimiento retomando los resultados obtenidos por cada uno de los grupos e incentivando la participación para detallar los diferentes registros de representación obtenidos de la actividad.
Nuevas Observaciones	Los objetivos específicos **2 y 3** entran en juego nuevamente para ser analizados desde cada uno de los grupos con sus respectivas situaciones asignadas, con esto se buscó específicamente: • Observar y desarrollar diferentes registros de la práctica por medio de diarios de campo, grabaciones de audio y video. • Transcribir relatos fieles a la realidad observada, conversaciones o tipos de análisis desarrollados por los estudiantes.
Nuevas Reflexiones	En este momento se buscó comprender los diferentes resultados obtenidos de las implementaciones de las situaciones didácticas; se compararon los tipos de análisis desarrollados por los estudiantes a la luz de los resultados del momento de planeación del **ciclo I**; se estudió lo observado bajo las categorías de análisis establecidas según el marco de la TSD y la IA y se detallan los obstáculos que no permitieron alcanzar el conocimiento esperado. En esta fase final de implementación de situaciones didácticas, la reflexión estuvo encaminada especialmente en evaluar y poder responder de una forma más completa el objetivo principal de investigación reuniendo las reflexiones del **ciclo I y II** para establecer en qué medida las situaciones didácticas transformaron la práctica de los estudiantes frente a las cónicas como lugar geométrico.

Fuente: Elaboración propia.

Es de resaltar que las cuatro (4) situaciones didácticas fueron diseñadas y validadas por expertos, pero dependiendo de la actividad de campo estas se modificaron para favorecer el aprendizaje de los estudiantes y para evitar los problemas percibidos en el ciclo I (anexo: Situaciones Didácticas).

Población

La investigación se desarrolló en el Colegio Coopteboy de la ciudad de Tunja, Colombia, con estudiantes de grado décimo entre las edades de 15 a 17 años, según los EBC y los DBA del MEN, el objeto matemático de las cónicas, se trabaja especialmente en este ciclo educativo en la temática de geometría analítica. El plantel educativo es de carácter privado y cuenta con aproximadamente 200 estudiantes, 50 en la sede primaria y 150 estudiantes en la sede Bachillerato. La mayoría de estudiantes pertenecen a estratos socioeconómicos 2 y 3 (en una escala de 1 a 6 donde 1 es Bajo y 6 es Alto).

Para el año 2020 por motivos de la Pandemia Covid-19, se asumió la modalidad de educación virtual por medio de clases en la Plataforma Zoom, también comunicación con padres de familia y estudiantes por vía llamada telefónica o WhatsApp y la institución adquirió dominio de la herramienta de gestión de aprendizaje Moodle como auxiliar en los procesos de evaluación del conocimiento de los estudiantes. Para el área de matemáticas cada uno de los estudiantes maneja el texto guía establecido a inicio de año, pero por motivo de las clases virtuales y la reducción de la intensidad horaria (consecuencia de esta nueva modalidad de estudio) no se pudo abarcar en gran parte el texto y en el afán de poder cumplir con este requisito, la actividad de clase se limitó a desarrollar los talleres propuestos en el texto.

La población presenta un promedio general acumulado en el área de matemáticas de nivel básico (entre 3,4 y 4,0 según la escala de calificación manejada por la institución), en general solo el 21% de estudiantes se encuentran en un nivel superior, el 37% en nivel alto y el 42% en un nivel básico. Se evidencia que existe desinterés por parte de los estudiantes en las clases virtuales y argumentan que la metodología del texto guía los sobresatura de trabajos para desarrollar en casa y hay vacíos de conocimiento que no les permite trabajar el texto de forma autónoma. Específicamente el grupo en la parte de geometría ha trabajado las temáticas de Vectores en el plano y operaciones con Vectores, Distancia entre dos puntos (desde la métrica euclidiana), Lugares geométricos de la recta, ecuación general y explícita de la recta y análisis de posiciones relativas de la recta en el plano.

Educación Virtual en Tiempos de Pandemia

Según lo expuesto anteriormente en la caracterización de la población objeto de estudio, es evidente que la interacción y la comunicación entre estudiantes y profesor es totalmente virtual, por tanto, se resalta que este proceso de enseñanza y aprendizaje se ve influenciado por otras variables externas como los problemas de conectividad (lentitud en la red de internet), equipos tecnológicos inadecuados para trabajar en las clases y rechazo o desmotivación frente a esta modalidad virtual. Las estrategias de aprendizaje que se impulsaron frente a este nuevo reto educativo implicaron el diseño de actividades que incentivaran la creatividad y el trabajo autónomo desde casa, por lo que se vuelven pertinentes las herramientas interactivas o colaborativas desde los medios virtuales y tecnológicos.

Particularizando esta problemática desde el área de matemáticas, una de las herramientas que apoya el proceso de aprendizaje virtual es el software matemático interactivo libre GeoGebra y para la presente investigación se convirtió en un medio para impulsar el trabajo con las situaciones didácticas. En la población el 63% de estudiantes se conectan a clase por computadores y el 37% lo hace desde teléfonos celulares. Por otro lado, las funcionalidades ofrecidas por la plataforma Zoom (programa de videollamadas y reuniones virtuales) pueden ser aprovechadas para fomentar espacios de trabajo en grupo y socialización y complementario a esto, otros softwares de fácil acceso como lectores PDF, paquete office, editor Paint, entre otros aportaron al proceso de aprendizaje de las matemáticas.

La situación de Pandemia más que un retroceso para los procesos educativos en matemáticas se considera una oportunidad para avanzar en esta área desde los medios dinámicos, que, aunque desde varios años habían apoyado procesos de aprendizaje, en esta ocasión toman protagonismo. Bajo este orden, el MEN (2006) menciona que para alcanzar un aprendizaje significativo y comprensivo de las matemáticas es necesario el manejo de situaciones que superen el aprendizaje pasivo y generen contextos accesibles a intereses y capacidades intelectuales y esto se puede dar con material manipulativo, representativo y tecnológico.

Delimitación de Población y Selección de Muestra

En el desarrollo de dos pruebas diagnósticas (una con estudiantes de grado undécimo de la institución educativa y la segunda con estudiantes de grado décimo) para determinar la viabilidad de las situaciones diseñadas y tener un primer acercamiento a la forma de investigar por medios virtuales, se vivenció una situación de orden complejo a la hora de realizar el ejercicio de observación de la actividad de los estudiantes.

Como se argumenta en Garzón (2020) al momento de desarrollar la situación didáctica de prueba con la métrica del taxi en estudiantes de grado undécimo: “hay varios factores que no permiten tener un acercamiento detallado a la forma en que un estudiante aborda la situación didáctica” (p. 20), esto debido a los problemas de conectividad en varios estudiantes donde no se pudo tener un acercamiento personalizado frente al proceso desarrollado por cada uno de ellos, como en la fase de formulación de la situación que se tuvo que trabajar internamente con cada uno de los estudiantes vía WhatsApp, hecho que también sesgó la observación del investigador y en general, fue necesario replantear la forma de obtención de datos debido a que no era suficiente analizar las hojas de respuesta de los estudiantes para tener un acercamiento a las formas de interacción y comunicación entre ellos.

Para una segunda prueba diagnóstica trabajada con los estudiantes de grado décimo (Población de estudio) con una situación didáctica en la métrica usual manejando el programa GeoGebra, se tomaron medidas frente a las dificultades presentadas en la primera prueba diagnóstica sobre la forma de obtención de la información: se determinó con las herramientas ofrecidas por Zoom que cada uno de los estudiantes (19 en total) debían compartir pantalla y para la parte de trabajo grupal se crearon salas pequeñas personalizadas.

Esta labor se volvió dispendiosa a punto que la situación solo pudo ser abarcada hasta el momento de formulación y los resultados que se obtuvieron tampoco fueron detallados con exactitud porque se debía ingresar a cada una de las salas y en el afán de poder ingresar a todas, el tiempo no alcanzó y la información obtenida no fue de mayor alcance, en este sentido, la actividad investigativa seguía siendo compleja.

Esta situación fue expuesta a un docente del programa de Maestría en Educación de la Uptc quien recomendó reducir el grupo investigativo para tener un acercamiento más certero a la actividad desarrollada por los estudiantes, por lo que se determinó seleccionar una muestra poblacional (no probabilística). En este caso, se pidió la colaboración voluntaria de estudiantes de grado décimo para participar en la actividad investigativa entre el 6 y el 9 de octubre del año en curso (2020) en un horario extra clase: en este punto se aclara que en esas fechas los estudiantes se encontraban en receso escolar, por lo que 7 estudiantes se comprometieron a colaborar debido a que tenían la disponibilidad de tiempo en las fechas estipuladas.

Establecida la muestra, se procedió a enviar los consentimientos informados a los acudientes de cada estudiante y a las directivas del colegio Coopteboy con el fin de exponer las intencionalidades del estudio y solicitar el permiso para poder realizar grabaciones de video y audio de las diferentes sesiones de clase (ver anexos: Consentimientos Informados).

Técnicas e Instrumentos de Recolección de la Información

Debido a la naturaleza del ambiente social estudiado y con el objetivo de "comprender el significado atribuido por el sujeto a la propia acción, las técnicas de investigación solo pueden ser cualitativas y subjetivas" (Corbetta, 2007, p. 26), como lo son la observación participante, guías de observación y los registros de grabaciones de audio y video. A continuación, se detalla cada uno de los ciclos de la IA y las técnicas e instrumentos para recolectar y analizar la información.

Tabla 3

Técnicas e instrumentos para obtener y analizar datos

Situación Didáctica	Momentos	Técnicas e Instrumentos de Recolección de información	¿Cómo se analizará la información?
Situación Didáctica Métrica Usual (ciclo I)	Planeación	Revisión de documentos sobre el objeto cónica desde las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica.	Análisis reflexivo de documentos.
	Acción	Observación directa y participativa. Registros de grabaciones de audio y video.	Análisis de Guía de Observación. (ver anexo: Guía de Observación) Reconstrucción de diálogos.
	Observación	Observación directa y participativa. Registros de grabaciones de audio y video.	Análisis de Guía de Observación Reconstrucción de diálogos. Triangulación de la información.

Situación Didáctica	Momentos	Técnicas e Instrumentos de Recolección de información	¿Cómo se analizará la información?
		Respuestas de estudiantes a las diferentes situaciones didácticas en documentos virtuales (archivos .pdf, .doc, .jpg entre otros) que serán enviados al correo del investigador.	
	Reflexión	Análisis de datos del momento de observación.	Reflexión en torno a las categorías de análisis y conclusión de nuevas orientaciones para evitar errores u obstáculos en la aplicación de las siguientes situaciones didácticas.
Situación Didáctica Métrica del Taxi, Máximo y Discreta (ciclo II)	Planeación	Revisión de reflexión del ciclo anterior para generar una nueva planeación frente a las situaciones didácticas a implementar.	Análisis reflexivo de los resultados del ciclo anterior.
	Acción	Observación directa y participativa. Registros de grabaciones de audio y video.	Análisis de guía de observación. Reconstrucción de diálogos.
	Observación	Observación directa y participativa. Registros de grabaciones de audio y video. Respuestas de estudiantes a las diferentes situaciones didácticas en documentos virtuales (archivos .pdf, .doc, .jpg entre otros) que serán enviados al correo del investigador.	Análisis de Guía de Observación. Reconstrucción de diálogos. Triangulación de la información.
	Reflexión	Análisis de datos del momento de observación.	Reflexión en torno a las categorías de análisis y conclusiones en función de los objetivos investigativos.

Fuente: Elaboración propia.

Para la técnica de observación se pide que los 7 estudiantes de la muestra siempre compartieran pantalla de manera simultánea, con eso el proceso de revisión por parte del investigador no interrumpe los momentos de las situaciones didácticas.

La metodología de trabajo por parte de los estudiantes corresponde a: Para el ciclo I, en un primer momento cada uno de los estudiantes en las situaciones de acción estuvieron en salas individualizadas por plataforma Zoom, luego para la situación de formulación trabajaron en salas más pequeñas y para las últimas situaciones de validación e institucionalización todo el grupo estuvo en la sesión conjunta. Para el caso del ciclo II, cuando cada grupo trabajó las situaciones simultáneamente, las fases de acción, formulación y validación se desarrollaron en las respectivas salas de grupos pequeños, mientras que para la institucionalización se desarrolló en sesión conjunta.

Las sesiones fueron completamente grabadas con previa autorización de padres de familia; otra fuente de obtención de datos importante fueron las diferentes producciones de los estudiantes en cada situación didáctica. Estas tres fuentes (Guías de observación, grabaciones y producciones) se sometieron a una triangulación para desarrollar la reconstrucción de los diálogos y las interacciones y poder tener un acercamiento al conocimiento construido por los estudiantes.

Categorías para el Análisis de la Información

A continuación, se exponen las categorías de análisis que se estudiaron en cada una de las interacciones de los estudiantes según las situaciones didácticas. En este aspecto fue importante reconstruir los diálogos de los estudiantes de la manera más precisa y ajustada a la realidad para que el análisis desarrollado fuera desde la perspectiva de los investigados y no sesgado a la interpretación del investigador (Elliott, 2000).

Por tanto, se establecen las siguientes categorías de análisis con base a los principios constructivistas de las situaciones didácticas y los objetivos buscados en la investigación: estas categorías de análisis se utilizan en cada una de las situaciones didácticas y ayudan complementar las reflexiones finales de cada uno de los dos ciclos de IA.

Tabla 4
Categorías de análisis

Categorías de Análisis	
Tipo de situación	**Pregunta Problematizadora**
Situación de acción	¿Cómo accede el estudiante con sus propias herramientas a la situación didáctica?
	¿Hubo devolución de la situación didáctica?
	¿El estudiante trabajó de forma individual?
	¿En qué forma el estudiante hace matemáticas?
	¿Ocurrió algún desequilibrio en el conocimiento del estudiante?
Situación de formulación	¿Cómo el estudiante interactúa y comunica sus hipótesis de solución de las situaciones didácticas a otros estudiantes?
	¿Los desequilibrios de la situación de acción fueron superados?
Situación de validación	¿En qué forma los grupos socializaron y defendieron sus posturas respecto al conocimiento buscado? ¿qué determinó la validación de la situación?
	En el ejercicio de validación ¿qué registros de representación emergieron?
Situación de institucionalización	¿De qué forma se retomaron las producciones de los estudiantes para la formalización del conocimiento?

Fuente: Elaboración propia.

En cuanto a los resultados esperados en cada una de las situaciones frente a los que realmente se obtuvieron en la práctica, se utilizó el siguiente cuadro para organizar la información respecto a las fases de acción, formulación y validación.

Tabla 5

Análisis resultado esperado vs resultado de la práctica

	¿Logró el conocimiento esperado en la fase de acción?				¿Logró el conocimiento esperado en la fase de formulación?				¿Logró el conocimiento esperado en la fase de validación?			
Estudiante	**C**	**P**	**E**	**H**	**C**	**P**	**E**	**H**	**C**	**P**	**E**	**H**
E1												
E2												
E3												
E4												
E5												
E6												
E7												
Conclusión	En la conclusión se pondrá la escala más repetitiva entre los 7 estudiantes.											

Convenciones	**Para completar el cuadro se utilizan las escalas (1,2,3,4)**
E1, … **E7 Estudiantes** de la muestra **C** Lugar geométrico de la circunferencia **P** Lugar geométrico de la parábola **E** Lugar geométrico de la elipse **H** Lugar geométrico de la hipérbola	**1.** Logra el conocimiento esperado. **2.** Logra de forma intermedia el conocimiento esperado. **3.** Analiza el problema de una forma distinta al problema esperado. **4.** No responde esta parte

Fuente: Elaboración propia.

Capítulo IV

Resultados del Estudio

En este capítulo se detallan los principales resultados de la investigación, los cuales se encuentran divididos en dos partes. La primera parte está referida al primer ciclo de Investigación Acción (IA), donde se desarrollan los estudios preliminares para abordar de una forma teórica la problemática expuesta para la planeación de las acciones a implementar (situaciones didácticas), luego se analizan los datos recolectados de la práctica en campo referente a la interacción entre estudiante, saber y medio, lo anterior bajo las categorías de análisis expuestas en el capítulo III.

La segunda parte de este capítulo corresponderá al ciclo II de la IA, la secuencia: Planeación–Acción-Observación–Reflexión, se repite bajo las nuevas orientaciones obtenidas en la reflexión del ciclo I, este segundo ciclo se desarrolla con otras situaciones didácticas y los resultados de la implementación son estudiados de igual forma a la luz de las categorías de análisis.

Con lo anterior se busca dar respuesta a los objetivos propuesto en la investigación para determinar el beneficio o la influencia de la práctica en la construcción del conocimiento de lugar geométrico de las cónicas en los estudiantes.

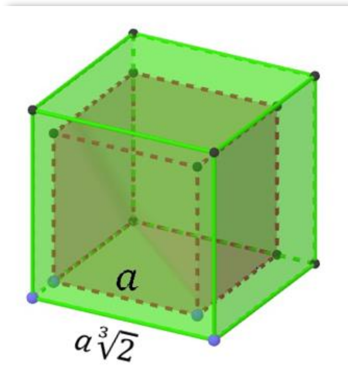
Ciclo I de IA

Momento de Planeación

Dimensión Epistemológica: El objeto cónica en la historia de las matemáticas. Si nos remontamos a la historia, se puede evidenciar que “el uso del lenguaje geométrico prevaleció por mucho tiempo en el estudio de las cónicas”. (Pérez, 2017, p. 269), por un lado, en la antigua Grecia, Menecmo ya había estudiado las cónicas cuando intentaba resolver el problema de duplicación del cubo (construir un cubo de doble volumen que otro dado) con regla y compás, de cierta forma Menecmo planteó problemas de intersección de superficies aplicando técnicas sin el uso de coordenadas cartesianas.

Figura 8

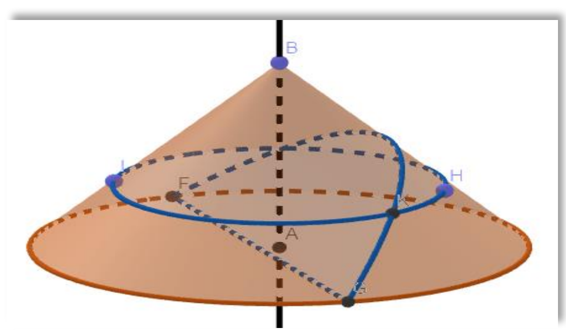
Cubos con volúmenes de a^3 y $2a^3$ respectivamente



Nota. Adaptado de Fernández (2011).

Pero de trasfondo había un tratamiento conceptual del objeto cónica, aunque los griegos ya habían establecido una solución a este problema con el uso de proporciones, estaba latente la incógnita de cómo resolver el problema a través de la geometría y más específicamente con el uso de regla y compás, en este aspecto, las propuestas presentadas para la solución la de Menecmo involucraban un cono seccionado con un plano.

Figura 9
Cono seccionado por dos planos

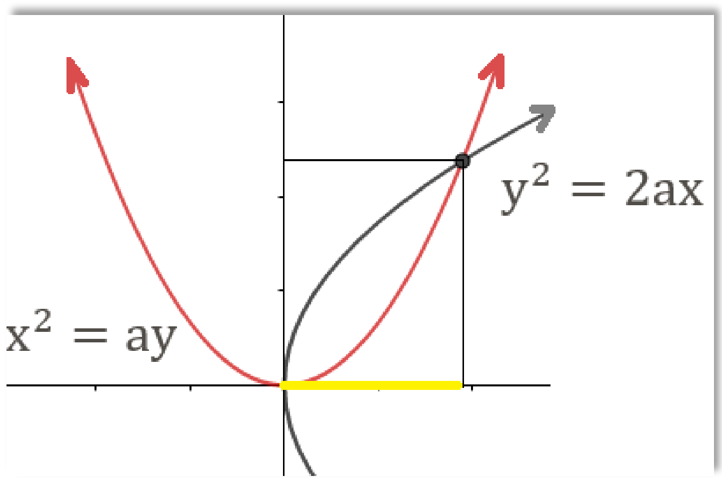


Nota. Adaptado de Fernández (2011).

El resultado de Menecmo desde la construcción del cono establecía que la solución a la medida de lado del cubo que duplicaba el volumen de otro cubo de lado a se obtenía de la intersección de las dos parábolas: $y^2 = 2ax$; $x^2 = ay$, con esto "Menecmo había dado con las cónicas como resultado de su afortunada búsqueda de curvas que tuvieran las propiedades requeridas para resolver el problema de la duplicación del cubo" (Fernández, 2011, p. 47), las dos ecuaciones en un plano bidimensional quedaron representadas de la siguiente forma:

Figura 10

Solución del problema de duplicación de Cubos por Menecmo



Nota. La medida del segmento amarillo representa la longitud del lado de un cubo que duplica el volumen de otro cubo de lado a. Adaptado de Fernández (2011).

Pero fue también en la antigua Grecia donde Apolonio de Perga sintetizó el trabajo de Menecmo, y pudo definir las secciones cónicas a partir de la intersección de un plano y un cono en su obra "*Las cónicas*". Apolonio demostró por primera vez que de un cono se pueden obtener los tres tipos de secciones cónicas al modificar la inclinación del plano que corta al cono; por otro lado, logra definir la hipérbola como una curva de dos ramas al introducir el cono doble.

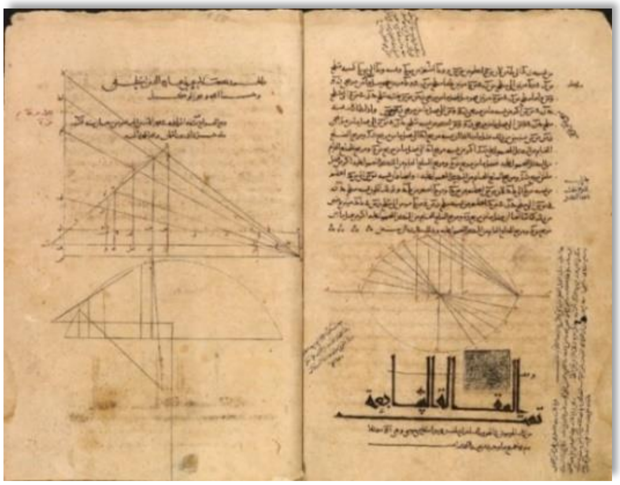
Otro de los principales aportes de Apolonio fue que a pesar de haber trabajado las cónicas por medio de tratamientos tridimensionales logró encontrar en estas curvas una propiedad bidimensional que cumplían las tres cónicas en cuestión (parábola, hipérbola y elipse), dicha propiedad eran sus definiciones como lugar geométrico. Los nombres de las cónicas también fueron introducidos por este griego: elipse (deficiencia), parábola (equiparación) e hipérbola (exceso), los métodos usados por Apolonio fueron muy similares a los que utilizó Descartes en el renacimiento para el desarrollo de la geometría analítica, tal sería el avance de Apolonio que pudo asignar a las parábolas, elipses e hipérbolas un registro algebraico.

El trabajo de Apolonio en geometría fue tan importante, que en numerosas ocasiones lo comparan al mismo nivel que el de los elementos de Euclides, gracias a sus aportes posteriormente se pudieron estudiar con mayor rigurosidad problemas como las trayectorias de proyectiles, espejos reflectores o el movimiento de planetas. En la geometría griega se puede afirmar que “las ecuaciones vienen determinadas por las curvas, pero no que las curvas vienen determinadas por las ecuaciones.” (Boyer, 1996, p. 207), de esta forma los griegos clasificaron los lugares geométricos de tres formas distintas: lugares planos, que eran las rectas y las circunferencias, lugares sólidos las secciones cónicas y lugares lineales el resto de las curvas.

Posteriormente, los árabes (entre los siglos VIII y X) traducen el tratado de las cónicas de Apolonio, y establecen de forma más completa propiedades de los lugares geométricos de las cónicas (Considerándose las cuatro curvas) tal fue el trabajo de al-Quhi e Ibn Sahl, gracias a estos aportes fue posible crear tratados de óptica geométrica como el manuscrito del *Kitāb al-parraqāt* de Ibn Sahl.

Figura 11

Cónicas de Apolonio. Traducción al árabe.

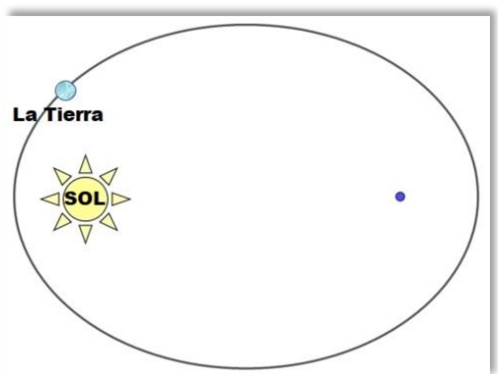


Fuente: *Cónicas de Apolonio. Traducción al árabe* por Wikipedia, la Enciclopedia Libre (https://es.wikipedia.org/wiki/Apolonio_de_Perge). CC BY 4.0

Por otro lado, en el siglo XVII, Kepler estudió las elipses tratando de describir el movimiento de los planetas en su obra *Astronomía Nova* y *Harmonices Mundi Libri*, más tarde, Isaac Newton probaría estas leyes a través de la ley de la gravitación universal donde afirmó que las órbitas de los planetas eran elípticas.

Figura 12

Movimiento elíptico de la tierra según Kepler



Nota. Adaptado de *Primera ley de Kepler* por FisicaLab (https://www.fisicalab.com/).

Por su parte, Galileo, padre de la cinemática, estudió en profundidad el lanzamiento de proyectiles descubriendo que cualquier proyectil lanzado al aire describe una trayectoria parabólica y Newton explicó que los movimientos celestes describen trayectorias cónicas. Como suceso final se menciona la obra de Descartes, quien estructuró formalmente el campo del álgebra con la geometría buscando el paso de los lugares geométricos descrito por las cónicas a expresiones algebraicas y viceversa, de esta forma Descartes hace apertura a la geometría analítica.

Naturaleza del Objeto Cónica como Lugar Geométrico (Análisis Conceptual). Freudenthal propone que para "conseguir una actividad matemática significativa hay que partir de la experiencia real de los estudiantes" (Font y Godino, 2006, p. 92), como el sentido intuitivo y observable que tiene el alumno en su interacción con el espacio. Con lo anterior y teniendo en cuenta que el conocimiento de las cónicas emergió de "la resolución de problemas, construcciones geométricas, modelos y aplicaciones de la matemática al mundo real para evaluar conjeturas, análisis de posibilidades y generalización de conceptos" (Pérez, 2017, p. 271) y no nació directamente de formalizaciones simbólicas como sucede en la práctica educativa, se exponen los principales conceptos y significados que articulan las cónicas como lugar geométrico así como los registros de representación que emergen de esta concepción de las cónicas y que son la base de la presente investigación.

Definiciones de las Cónicas como Lugar Geométrico. Recurriendo a las definiciones presentadas por Lehmann (1992) y los resultados en Antonio y Garzón (2017) y Antonio et al. (2020) las cónicas pueden ser descritas mediante sus lugares de geometría en el plano como:

Definición 1. "La circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre una distancia constante a un punto fijo de ese plano” (Lehmann, 1992, p. 99), dicho punto se denotará como C y será llamado el centro de la circunferencia, P un punto móvil y r el valor constante y positivo al que llamaremos radio de la circunferencia. Por lo anterior se debe cumplir la siguiente expresión:

$$d(C,P) = r \tag{1}$$

donde $d(C,P)$ es la distancia entre el punto C y el punto P.

Definición 2. “La parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.” (Lehmann, 1992, p. 149). El punto fijo se denotará F y será llamado foco de la parábola, la recta fija se denotará l y será llamada directriz, y el punto móvil del plano que equidista de F y l será llamado P. Por lo anterior se puede describir la definición de parábola como:

$$d(F,P) = d(P,l) \tag{2}$$

donde $d(F,P)$ será la distancia entre el foco de la parábola y el punto P y $d(P,l)$ sera la distancia entre la directriz l y el punto P.

Definición 3. “La elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.” (Lehmann, 1992, p. 173). Los dos puntos fijos los denotaremos F_1 y F_2 y serán llamados focos de la elipse, P el punto móvil del plano y k la constante positiva mayor que la distancia entre los dos focos. Según la definición de elipse como lugar geométrico tenemos la siguiente ecuación:

$$d(F_1,P) + d(F_2,P) = k; k > d(F_1,F_2) \tag{3}$$

donde $d(F_1,P)$ es la distancia del punto fijo F_1 y el punto P, $d(F_2,P)$ es la distancia entre el punto fijo F_2 y el punto P y $d(F_1,F_2)$ la distancia entre los dos puntos fijos F_1 y F_2.

Definición 4. "La hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos." (Lehmann, 1992, p. 191). El punto que se mueve en el plano será llamado P, los dos puntos fijos del plano serán denotados F_1 y F_2, y la cantidad constante se denotara k, por lo anterior se debe cumplir la siguiente expresión:

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = k; 0 < k < d(F_1, F_2) \tag{4}$$

donde $d(F_1, P)$ será la distancia del punto fijo F_1 y el punto P, $d(F_2, P)$ es la distancia entre el punto fijo F_2 y el punto P y $d(F_1, F_2)$ será la distancia entre los dos puntos fijos F_1 y F_2.

Con las anteriores definiciones desde el registro verbal y registro simbólico se procede a realizar un tratamiento de las definiciones para expresarlas según la distancia euclidiana que en nuestro caso se denominará métrica usual (d_u): para dos puntos de $\mathbb{R}^2$: $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ la distancia en la métrica usual se define como:

$$d_u(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Circunferencia. De acuerdo a la **definición 1**, los puntos $P = (x, y)$ y $C = (h, k)$ deben satisfacer la expresión (1), por lo que se tiene en la métrica usual:

$$d_u(C, P) = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

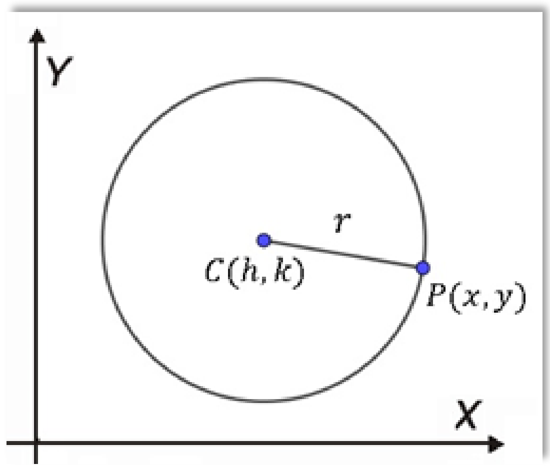
Ahora la anterior distancia debe ser igual a un valor positivo constante r por lo tanto, se tiene:

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

La anterior expresión corresponde al registro de representación algebraico de la circunferencia en la métrica usual, en la Figura 13 se ilustra un ejemplo en el registro gráfico.

Figura 13

Representación de la circunferencia en la métrica usual.



Fuente: Antonio y Garzón (2017).

Parábola. Por la **definición 2**, asumiendo que la directriz l es la recta de la forman $Ax + By + C = 0$ y el foco F es de coordenadas (a, b), por la métrica usual, la distancia entre los puntos $F = (a, b)$ y $P = (x, y)$ es:

$$d_u(F, P) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

Mientras que la distancia mínima de P a la directriz l, está dada por la siguiente expresión:

$$du(P, l) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

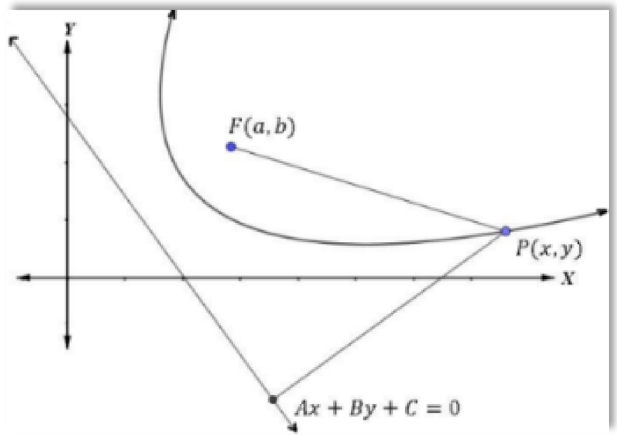
Por lo anterior, si se iguala $d_u(F, P)$ y $d_u(P, l)$ se obtiene la expresión algebraica general de la parábola para le métrica usual:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

En el registro gráfico la parábola para la métrica usual presenta el siguiente comportamiento:

Figura 14

Parábola en la métrica usual



Fuente: Antonio y Garzón (2017).

Elipse. Por la **definición 3**, Sean $F_1 = (a, b)$ y $F_2 = (c, d)$ los focos de la elipse, y $P = (x, y)$ cualquier punto que pertenece a la elipse, se tiene lo siguiente:

Distancia de cualquier punto de la elipse al primer foco F_1:

$$d_u(F_1, P) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

Distancia de cualquier punto de la elipse al segundo foco F_2:

$$d_u(F_2, P) = \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2}$$

Aplicando la expresión algebraica (3) se tiene:

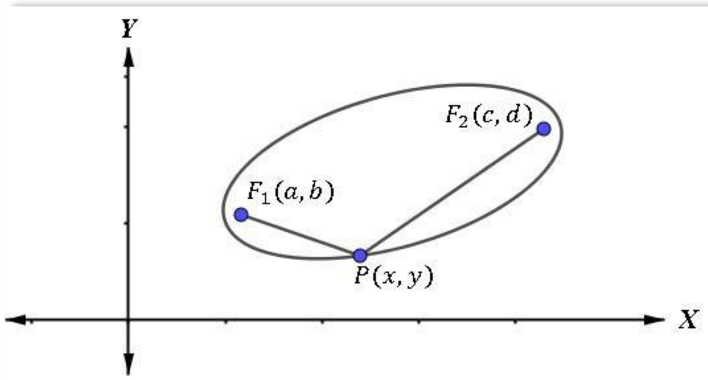
$$d(F_1, P) + d(F_2, P) = k; k > d(F_1, F_2)$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} = k$$

La siguiente figura representa la ecuación de la elipse

Figura 15

Elipse en la métrica usual.



Fuente: Antonio y Garzón (2017).

Hipérbola. Por la **definición 4** se asume que sí, $F_1(a,b)$ y $F_2(c,d)$ son los focos de la hipérbola, la distancia de un punto $P = (x,y)$ a los dos focos en la métrica usual está dada por:

$$d_u(F_1,P) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$d_u(F_2,P) = \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2}$$

Aplicando la expresión algebraica (4) se obtiene la ecuación general de la hipérbola en la métrica usual:

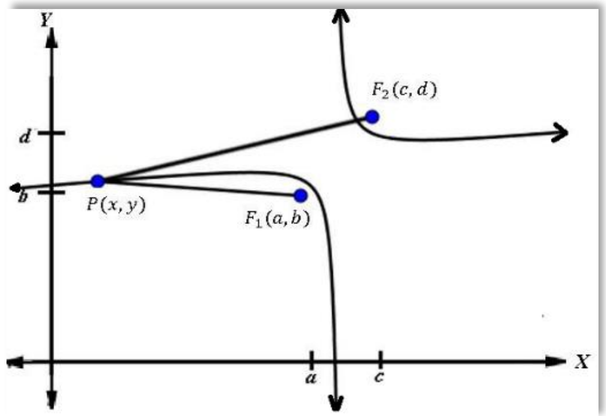
$$|d(F_1,P) - d(F_2,P)| = k; 0 < k < d(F_1,F_2)$$

$$\left|\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2}\right| = k$$

La figura que representa la ecuación es:

Figura 16

Hipérbola en la métrica usual.



Fuente: Antonio y Garzón (2017).

Dimensión Didáctica del objeto cónica. La visión formalizada de las matemáticas, se implementó en la educación con el fin de adentrar a los estudiantes en una formación científica desde el logicismo, la teoría de conjuntos y el álgebra abstracta, pero sus resultados no fueron favorables. Particularmente en Colombia la implementación de la "Matemática Moderna" alejó a los estudiantes de las matemáticas en contexto, provocando repitencia, deserción escolar, "detrimento de la geometría elemental y el pensamiento espacial; ausencia de actividades y problemas interesantes y su sustitución por ejercicios muy cercanos a la mera tautología" (MEN, 1998, p. 5).

El MEN con el fin de solventar esta problemática, propuso a finales de la década de los noventa en los lineamientos curriculares de la educación colombiana "volver a recuperar el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, no sólo en lo que se refiere a la geometría." (MEN, 1998, p. 37). Como alternativa de trabajo, el MEN propuso la geometría activa que "parte de la actividad del alumno y su confrontación con el mundo [...] para tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna" (MEN, 1998, p. 37).

Por lo anterior, existe una tendencia durante los últimos veinte años a investigar acerca de la geometría activa y consecuentemente sobre las cónicas ya que constituyen uno de los principales temas geométricos en la educación media, por la gran variedad de propiedades en la geometría euclídea como por ejemplo en su tratamiento desde el espacio (sección cónica), desde el plano (lugar geométrico) y desde el álgebra (ecuación de segundo grado).

A pesar de los intentos para cambiar la práctica en la enseñanza y el aprendizaje de las cónicas, aún hay repercusiones del modelo de matemática moderna porque según el MEN (1998) este modelo buscaba transformar la enseñanza haciendo énfasis en las estructuras abstractas, el rigor lógico, la teoría conjuntista y el álgebra, y en el caso de las cónicas los problemas interesantes desde la faceta geométrica fueron relegados al tratamiento algebraico (Vasco, 2006).

En la revisión bibliográfica de los principales textos escolares de matemáticas que abordan el objeto matemático de cónica, también se puede observar una tendencia a dar más prioridad a la parte simbólica que a la geométrica, esto se puede notar en el planteamiento de los problemas propuestos para afianzar el conocimiento donde "la relación didáctica se interpreta como una comunicación de informaciones." (Brousseau, 2007, p. 13). Bajo estas circunstancias, el estudiante se encuentra con limitaciones o impedimentos para construir el saber matemático referido a las cónicas, se dan en la clase contratos didácticos mal enfocados, la labor del estudiante es pasiva y receptiva a la información que emite el docente y según Brousseau (2007) esto no favorece la construcción del conocimiento en el estudiante.

El objeto matemático cónica debe emerger de las transformaciones de saberes contextualizado a la historia de la clase y de los alumnos (Brousseau, 2007), por tal razón, es necesario analizar las situaciones en las que nació el concepto de cónica, para que en la práctica se logre movilizar el objeto en diferentes ambientes que den sentido a los estudiantes y proyecten el saber a otros contextos de aplicación adaptable.

Bajo el afán de solventar esta problemática se han realizado numerosas investigaciones relacionadas con estrategias metodológicas desde el uso del software, material manipulable, herramientas interactivas o situaciones de contexto con el fin de desarrollar habilidades espaciales competentes, como la actividad de la medición cuando se estudian las cónicas como lugares geométricos; por ejemplo, variando la manera de medir (métrica) y analizando las transformaciones que experimenta la cónica. Este cambio de prácticas permite afianzar nuevos esquemas cognitivos en los estudiantes y el desarrollo del conocimiento se logra desde diferentes campos sin el uso excesivo del álgebra.

En conclusión, el conocimiento referente a las cónicas nació como respuesta a problemáticas de carácter espacial que con el paso de varios siglos se fue formalizando al punto de convertirse en un gran constructo analítico, por su gran compendio de propiedades se volvió un referente para estudiar en todos los cursos de geometría, pero en esta práctica educativa hubo una inclinación a ser trabajada principalmente desde el lenguaje simbólico de forma conductista, las situaciones de aula no permiten que el estudiante desarrolle su propio conocimiento si no que se limite a desarrollar tratamientos simbólicos que muchas veces no comprenden (MEN, 1998).

La tarea de los educadores matemáticos es grande, cambiar esta realidad es algo necesario en un mundo que exige pensamiento crítico y competente, y en el caso de geometría, que se resalte el sentido intuitivo y observable que tiene el alumno en su interacción con el espacio, es por esta razón que “la intervención del profesor evoca necesariamente, para los conocimientos que enseña, un funcionamiento posible en otras circunstancias, y no solamente en las -situaciones de uso didáctico- “ (Brousseau, 2007, p. 50).

Las Cónicas desde el Texto Guía Utilizado por la Institución Educativa. En la revisión bibliográfica de los textos manejados por la institución educativa, se encontró que por varios años han manejado los textos matemáticos de la editorial Santillana y a partir del año 2019 han trabajado con la versión "Desafíos Matemáticos 10", este texto fue diseñado por docentes en su mayoría Licenciados en Matemáticas y con posgrados en educación.

El libro está, según sus autores, encaminado a favorecer procesos constructivistas del conocimiento y formar en competencias. Hace especial énfasis en la resolución de problemas en contexto con temáticas y problemas actuales de la sociedad y es muy ilustrativo. En términos generales, es muy completo y se ajusta perfectamente a los lineamientos de la educación matemática colombiana desde el MEN.

En la parte de geometría analítica, que corresponde a la Unidad 7 (de 8 en total), se presenta la secuencia de aprendizaje de la siguiente forma: Primero se abordan las generalidades del concepto lugar geométrico y distancia entre dos puntos, para adentrarse a la línea recta y estudiar su ecuación de forma explícita y general y sus posiciones relativas.

Luego inicia con la temática de las cónicas, haciendo una introducción desde su concepción como secciones de corte entre un plano y un cono, luego explicita la circunferencia y hace énfasis en los diferentes tipos de ecuaciones canónicas conociendo determinadas partes de la circunferencia y desarrollando tratamientos desde la ecuación general para obtener características de la circunferencia directamente desde la parte algebraica: este proceso se repite con la parábola, la elipse y la hipérbola, y para finalizar la unidad se estudia la ecuación general de segundo grado.

En el texto cada temática inicia con situaciones problema, pero luego continúa con la introducción de definiciones formales, haciendo un énfasis fuerte en el lenguaje simbólico, específicamente en lo referido a las ecuaciones canónicas buscando reforzar principalmente procesos de factorización: en esta parte, el texto desarrolla varios procesos de tratamiento de registros simbólicos como lo es pasar de la ecuación canónica a la forma general o viceversa y en la mayoría de casos se pretenden hallar los elementos de las cónicas (vértices, focos, radio, entre otros) a partir de sus ecuaciones sin recurrir a un lenguaje gráfico.

Generalmente los problemas planteados siguen dos rutas: Reemplazar datos específicos en las ecuaciones canónicas o interpretar los datos para luego determinar su posición en las expresiones algebraicas, pero en ambos casos el registro gráfico es poco aprovechado y no se trabajan conexiones entre diferentes registros, es decir en los talleres propuestos, los ejercicios buscan tareas específicas en cada registro, pero muy pocas veces favorecen el tratamiento y conversión entre estos.

Cada cónica es introducida inicialmente desde su definición como lugar geométrico, pero luego no se hace énfasis en este registro, sino que se pasa directamente a la definición algebraica, a la que se le asocia una representación gráfica, también muchas veces los términos comprometidos con las cónicas son introducidos de una manera formalista alejada al lenguaje común del estudiante.

Los talleres propuestos pasan por diferentes momentos, el primer momento es para recordar conceptos, el segundo momento es para comprender, el tercer momento del taller es para aplicar, el cuarto está referido al análisis, el quinto momento es de creación y el sexto momento es de evaluación, de estos momentos los tres primeros están enfocados a la actividad repetitiva y a la adquisición del conocimiento por medio de la ejercitación, los dos siguientes corresponden a solucionar situaciones problemas y el último evalúa el conocimiento, pero no siempre los talleres se movilizan por estos 6 momentos, en la mayoría de veces se moviliza en solo 4 momentos.

Un apartado interesante del libro corresponde a las actividades enfocadas a la resolución de problemas por el método de heurísticas, y también en cada unidad muestra las aplicaciones de la temática en contextos reales, y en varios apartados el libro promueve la formación transversal en valores humanos, educación financiera y cátedra para la paz.

Respecto a la forma en que se validan las temáticas por medio de ejemplos, por lo general se desarrollan en el lenguaje algebraico, mientras que el gráfico simplemente se ilustra asumiendo que el estudiante ha comprendido lo desarrollado desde la parte simbólica y no mostrando los procesos de construcción desde el plano, resaltando propiedades emergentes de la gráfica. En general, del texto sobresalen los siguientes pasajes de registros: del registro simbólico al registro gráfico (en mayor medida), del registro gráfico al registro simbólico, (en menor medida), implícitamente se trabaja del registro verbal al geométrico, pero es casi nulo el trabajo del registro verbal al simbólico y viceversa.

El texto se caracteriza por tener un gran compendio de actividades y es evidente el énfasis que se da al tratamiento algebraico, además hay temáticas de nivel muy avanzado que podrían no estar acordes a la población dirigida, o requieren de una intensidad horaria más extensa para poder ser trabajado a cabalidad con los estudiantes.

Dimensión Cognitiva y Obstáculos en el Aprendizaje de las Cónicas. Desde la población directamente implicada en la investigación, el trabajo en matemáticas desde la modalidad virtual no ha sido fructífero, se relegó principalmente la actividad del estudiante a seguir el texto guía y desarrollar las actividades propuestas en este, muchas veces de forma autónoma sin acompañamiento del docente, esto debido a la reducción de intensidad horaria, y conscientes que la metodología no estaba favoreciendo el aprendizaje, las clases se convirtieron en una carrera contrarreloj para poder abarcar la mayor cantidad de temas del texto guía en el menor tiempo posible.

En este orden, existe un obstáculo didáctico debido a la forma en que el docente orienta la clase virtual: se quería replicar el modelo tradicional de la clase presencial y no había innovación ni creatividad, provocando en la mayoría de estudiantes desinterés en la clase.

Aparte de lo expuesto, el grupo presentaba vacíos en conocimiento respecto a las bases teóricas necesarias para abarcar la temática de geometría analítica, es decir que los errores u obstáculos que poseen los estudiantes frente a la temática no solamente eran por la metodología de educación virtual, sino que también se fundamentaban en los conocimientos y experiencias previas.

El objeto cónica puede ser movilizado en varios registros de representación simultáneamente, si los ambientes de aprendizaje no son los adecuados pueden provocar un obstáculo en el estudiante haciendo que no logre dicha movilización y según Duval (2017) para que un estudiante logre generar un significado asertivo del saber (registro de representación semiótica) debe pasar por tres actividades cognitivas: formación de una representación, conversión y tratamiento.

Entender la naturaleza de la cognición podría favorecer en la enseñanza de las matemáticas, lograr comprender el comportamiento e interpretar los esquemas mentales del estudiante, para ello, es necesario analizar el tipo de interacción que se da en el aula de clase, un obstáculo didáctico referido al docente es no comprender la importancia del proceso comunicativo entendido como discurso matemático para poder precisar nociones de significado, el papel del lenguaje en el aprendizaje, la manera de entender el aprendizaje y el papel desempeñado por la negociación de los significados matemáticos (Sfard, 2001), pues más que determinar si un estudiante tiene éxito o fracaso en la actividad, el docente debe interpretar la forma como comprende el estudiante, ¿qué tipo de esquemas mentales está construyendo? para determinar la posible dificultad para alcanzar el objetivo de aprendizaje donde "el tipo de conocimiento matemático que los estudiantes desarrollan depende de las características de las situaciones de comunicación en que se desarrollan." (Godino y Llinares, 2000, p. 74).

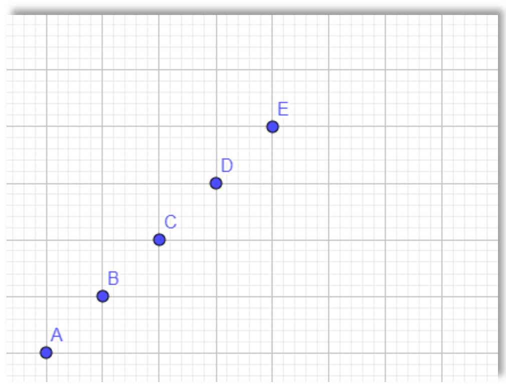
Un error referido al tratamiento de las cónicas desde los procesos de enseñanza es abordarlas directamente desde el lenguaje algebraico cuando la historia misma indica que nació directamente en ambientes geométricos: este error podría generar en los estudiantes obstáculos en cuanto a las concepciones que construyen de las cónicas debido a que el uso excesivo del álgebra aleja al estudiante de análisis de tipo intuitivos y empíricos propios de la naturaleza de estas figuras.

En muchas ocasiones el contrato didáctico que se da en la clase está enfocado en que los estudiantes imiten los procesos algorítmicos que trabaja el docente desde el tablero, y su actividad matemática consistirá en el tratamiento de algoritmos que muchas veces no tienen sentido para el estudiante, ni mucho menos garantizan que el estudiante adquiera el conocimiento ya que "el problema no es si existen o no los objetos matemáticos sino entender cómo [...] las personas llegan a considerar que estos tienen algún tipo de existencia" (Font, 2002, p. 149); este obstáculo a largo plazo puede generar en el estudiante que los antiguos conocimientos no puedan ser activados respecto a nuevos conocimientos en procesos de aprendizaje significativo, además esta visión algorítmica de la matemática crea una imagen en los estudiantes de imposibilidad para estudiarla en diferentes contextos.

Para tener un primer acercamiento a la dimensión cognitiva de los estudiantes de grado décimo se desarrolló una situación diagnóstica (ver anexo: Situación Didáctica Diagnóstica) que consistió en explorar las capacidades espaciales intuitivas del estudiante cuando se enfrentaba a lugares geométricos con el uso del software GeoGebra, se pudo determinar poca iniciativa para trabajar de forma autónoma, siempre estaban a la espera de instrucciones del docente para poder continuar en la actividad, es decir, había inseguridad frente la forma de actuar con la situación propuesta, muchos de ellos desistieron rápidamente de la actividad al no visualizar un camino óptimo para la solución, no fue hasta en la fase de formulación de la situación cuando pudieron constituir mejor una respuesta a las situaciones.

Figura 17

Interpretación incorrecta de estudiante a lugar geométrico de la circunferencia

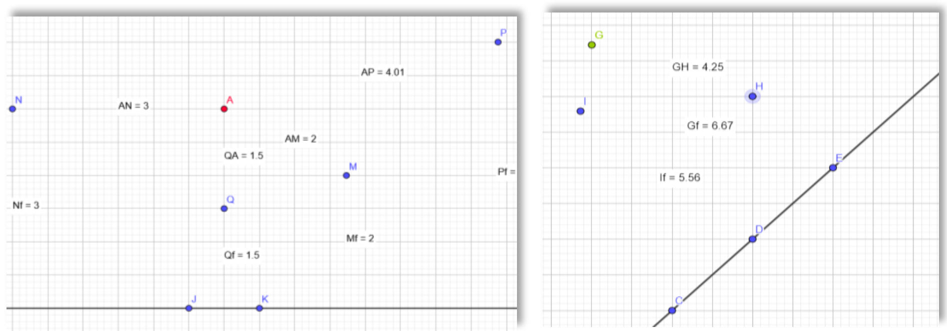


Nota. En la situación diagnostico un estudiante argumenta que estos puntos hacen parte del lugar geométrico de una circunferencia debido a que cada punto conserva una misma distancia respecto a su punto más próximo, claramente no se está haciendo una interpretación completa del lugar geométrico porque no se tiene en cuenta el concepto de punto fijo. Fuente: Elaborado por estudiante de grado décimo.

Por otro lado, respecto a esta prueba diagnóstica, se notó una falencia en competencias lingüísticas elementales, los estudiantes presentaron dificultad en la interpretación de los diferentes enunciados de las cónicas desde el lenguaje verbal aun cuando estos habían pasado por un proceso de transposición didáctica por parte del docente. En el ejercicio solo se pudo lograr por la mayoría de estudiantes la aproximación gráfica de la circunferencia a partir del registro verbal, de la parábola solo algunos estudiantes lograron representaciones puntuales que satisfacen la condición, pero no permitía tener un acercamiento gráfico de la parábola, de la elipse y la hipérbola no se pudo avanzar debido a las limitaciones de tiempo.

Figura 18

Producción puntual de la parábola en la prueba diagnóstica



Fuente: Elaborado por estudiantes de grado décimo.

Kilpatrick et al. (1998) manifiesta que los errores y las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas giran en torno a 5 ejes fundamentales: Por dificultades en el lenguaje, obtención de información espacial, por deficiencia en conocimientos previos, por asociaciones incorrectas y aplicaciones de reglas irrelevantes, en este orden de ideas el aprendizaje de las cónicas se puede movilizar en estos tipos de errores que se convierten en obstáculos para alcanzar el aprendizaje.

Respecto a la dificultad en el lenguaje, se atribuye al excesivo uso de la simbología en el tratamiento de las cónicas, muchas veces la comprensión semántica se convierte en una fuente de errores. Los obstáculos referidos a la obtención de información espacial van directamente referidos al tratamiento geométrico de las cónicas, para algunos estudiantes resulta dificultoso pensar mediante imágenes espaciales, por lo que a causa de ellas se pueden propiciar ambientes que ponen en desequilibrio el conocimiento del estudiante.

Respecto a los obstáculos por deficiencia en conocimientos previos, una incorrecta apropiación de conceptos generales como la noción de distancia, la definición de recta desde su lenguaje gráfico y algebraico, las posiciones relativas de la recta y el concepto de punto medio pueden generar un obstáculo en la construcción del concepto de cónica, sin profundizar demasiado en la temática, estos conceptos son fundamentales para comprender las curvas desde nociones intuitivas.

En cuanto a las asociaciones incorrectas de la cónicas en otros contextos, se puede considerar un obstáculo, en ocasiones estas asociaciones no son posibles debido a una visión marcada de las figuras en ambientes netamente matemáticos y no se permite construir un nuevo conocimiento por la rigidez del pensamiento, lo anterior conlleva a un último obstáculo en al aprendizaje de las cónicas referido al uso de reglas irrelevantes que no permiten avanzar en el conocimiento.

Es de aclarar que lo mencionado anteriormente se hizo desde una visión globalizada del aprendizaje de las matemáticas y se especificaron algunos aspectos en el grupo de estudio, pero en general estos obstáculos y errores no fueron referidos al manejo del software, si no por el contrario, con el software se busca evitar estos obstáculos, pues Brousseau (2007) comenta que estos obstáculos no se pueden ignorar, más sin embargo hay que rechazarlos explícitamente e integrar su negación en el aprendizaje del nuevo conocimiento.

Diseño de Situaciones Didácticas para el Aprendizaje de las Cónicas como Lugar Geométrico

Respecto al análisis previo que se desarrolló desde las dimensiones epistemológicas, didácticas y cognitivas, la reflexión respecto a estos aspectos lleva a replanteamientos sobre la forma de enseñar las cónicas; el exagerado tratamiento algebraico está alejando al estudiante de comprender los conceptos geométricos básicos que determinan las cónicas, es importante rescatar estos conceptos y una manera útil de hacerlo es abordando las cónicas desde tareas visuales, espaciales y métricas, que garanticen la manipulación de material y la interacción con el entorno.

Por otro lado, se pueden diseñar situaciones de enseñanza donde el estudiante identifica las características generales de las cónicas a partir de diferentes registros de representación que no necesariamente corresponden al lenguaje simbólico, es decir que las características de las cónicas sean deducibles a partir de razonamientos intuitivos directamente de la práctica.

Una estrategia para poder priorizar los razonamientos de tipo espacial es usar el concepto de métrica (métrica entendida como la forma en que se mide la distancia), para esto se describe a continuación las generalidades del concepto de métrica y las métricas seleccionadas para esta investigación, así como las diferentes representaciones gráficas y algebraicas que surgen del tratamiento de las cónicas desde otras métricas.

El concepto de Métrica. Una métrica o distancia es una función que determina la distancia entre dos elementos de un determinado conjunto X, dicha función se define de la siguiente forma: $d: X \times X \to [0, \infty)$ tal que $d(u, v) = r$, donde $d(u, v)$ es la distancia entre u, v dos elementos de X y r es un número real positivo o cero.

Esta definición se interpreta de la siguiente forma: la distancia entre dos elementos del conjunto X esta determinada por un valor numérico real positivo, asumiendo el cero, para la presente investigación dicho conjunto X es el conjunto $\mathbb{R}^2$ cuyos elementos son puntos de coordenadas cartesianas en el plano bidimensional. En Munkres (2002) para que una función sea considerada métrica debe satisfacer las siguientes condiciones: positividad, simetría y desigualdad triangular.

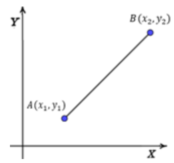
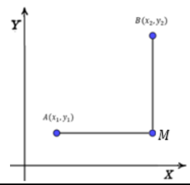
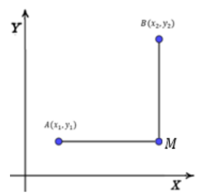
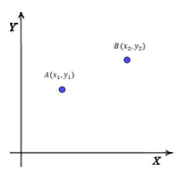
La positividad hace referencia a que la distancia entre dos puntos siempre será un valor positivo si estos se encuentran ubicados en lugares distintos del plano cartesiano y será 0 cuando los dos puntos se encuentren en la misma posición. La simetría hace referencia a que la distancia entre dos puntos cumple que la distancia del primer punto al segundo punto, debe ser igual del segundo punto al primer punto y la desigualdad triangular establece que entre tres puntos, la distancia del primer punto al segundo debe ser menor o igual a la suma de distancias del segundo punto al tercer punto y del tercer punto al primer punto.

A partir de estas condiciones hay varias funciones que son consideradas métricas, la más conocida y utilizada es la métrica usual o euclidiana (d_u), en base a ella se ha construido la geometría analítica, pero existen otras métricas que pueden favorecer tratamientos espaciales de forma intuitiva, estas son las métricas del taxi (d_t), métrica del máximo (d_M) y métrica discreta (d_d), respecto a estas métricas hay numerosas investigaciones desde la didáctica y la educación matemática en las cuales se implementaron estrategias de acción para favorecer el aprendizaje de los lugares geométrico (ver antecedentes).

En la presente investigación se analiza cómo el tratamiento y la conversión de diferentes registros gráficos y verbales de las cónicas en las métricas mencionadas favorecen el aprendizaje de las cónicas como lugar geométrico. En Antonio y Garzón (2017) y Antonio et al. (2020) se presentan los resultados sintetizados de estas métricas y su definición desde tratamientos simbólicos, gráficos y verbales que se resumen a continuación:

Tabla 6

Métricas en $\mathbb{R}^2$

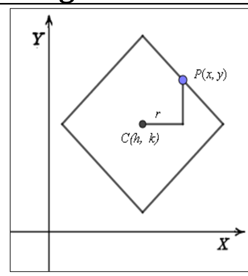
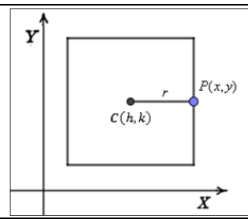
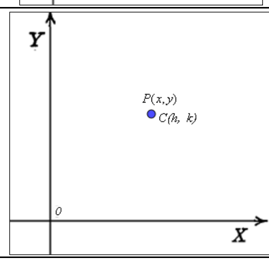
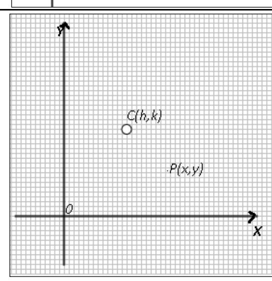
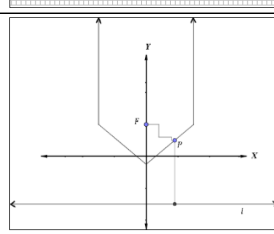
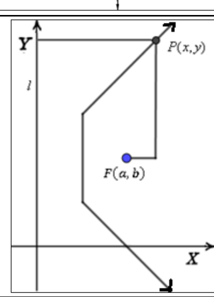
Métrica	Definición	Aproximación gráfica	Interpretación
Métrica usual (d_u)	Sean: $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ dos puntos de $\mathbb{R}^2$, la distancia entre estos dos puntos se define de la siguiente forma: $d_u(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$		La distancia será la longitud del segmento $\overline{AB}$
Métrica del taxi (d_t)	Sean: $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ dos puntos de $\mathbb{R}^2$, la distancia entre estos dos puntos se define de la siguiente forma: $d_t(A,B) = \lvert x_2 - x_1 \rvert + \lvert y_2 - y_1 \rvert$		La distancia será la suma de las longitudes de los dos segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{MB}$
Métrica del Máximo (d_M)	Sean: $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ dos puntos de $\mathbb{R}^2$, la distancia entre estos dos puntos se define de la siguiente forma: $d_M(A,B) = máx\{\lvert x_2 - x_1 \rvert, \lvert y_2 - y_1 \rvert\}$ donde $máx$ significa el máximo entre las dos posibles.		La distancia será la mayor longitud entre los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{MB}$
Métrica Discreta (d_d)	Sean: $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ dos puntos de $\mathbb{R}^2$, la distancia entre estos dos puntos se define de la siguiente forma: $d_d(A,B) = \begin{cases} 1 \text{ si } (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \\ 0 \text{ si } (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \end{cases}$		La distancia entre los puntos A y B será 1 si están en diferentes posiciones y será 0 sí están en la misma posición

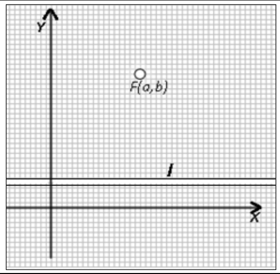
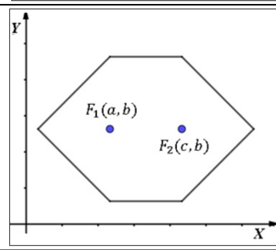
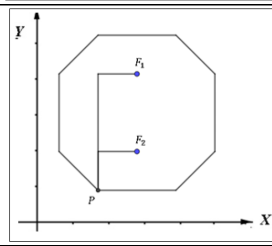
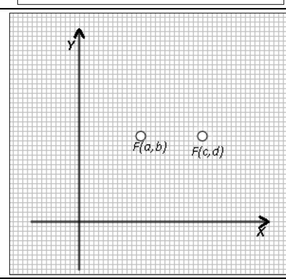
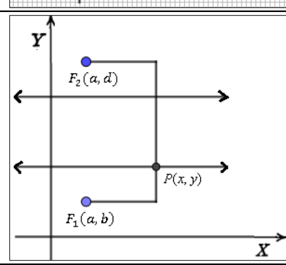
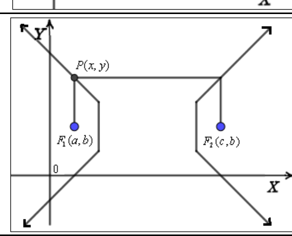
Fuente: Adaptado de Antonio y Garzón (2017) y Antonio et al. (2020).

Con lo anterior, se pueden establecer diferentes representaciones de las cónicas teniendo en cuenta su definición como lugar geométrico. A continuación, se muestra un resumen del estudio realizado en Antonio y Garzón (2017) y Antonio et al. (2020).

Tabla 7

Cónicas en la métrica del taxi, máximo y discreta

Cónica	Métrica	Registro Gráfico	Registro Simbólico
Circunferencia con centro $C = (h, k)$ y radio r	Taxi		$\|x - h\| + \|y - k\| = r$
	Máximo		$máx\{\|x - h\|, \|y - k\|\} = r$
	Discreta		$(h, k) = (x, y)$ $\rightarrow\ h\ =\ x\ \wedge\ k\ =\ y$
			$(h, k) \neq (x, y)$ $\rightarrow\ h\ \neq\ x\ \vee\ k\ \neq\ y$
Parábola con foco $F = (a, b)$ y directriz $l: Ax + By + C = 0$	Taxi		$\|x - a\| + \|y - b\|$ $= \dfrac{\|Ax + By + C\|}{máx\{\|A\|, \|B\|\}}$
	Máximo		$máx\{\|x - a\|, \|y - b\|\}$ $= mín_{A \in l} d_M(P, A)$ $con\ P = (x, y)$

Cónica	Métrica	Registro Gráfico	Registro Simbólico
	Discreta		$d_d(A,F) = d_d(A,l) = 1$ $para\ \forall\ A \in \mathbb{R}^2 - \{F\ \wedge\ l\}$
Elipse con focos $F_1 = (a,b)$, $F_2 = (c,d)$ y constante $k > d(F_1,F_2)$	Taxi		$\|x-a\| + \|y-b\| +$ $\|x-c\| + \|y-d\| = k$
	Máximo		$máx\{\|x\ -\ a\|, \|y\ -\ b\|\} +$ $máx\{\|x\ -\ c\|, \|y\ -\ d\|\} =\ k$
	Discreta		$\forall\ (x,y)\ \in\ \mathbb{R}^2 -\ \{F_1, F_2\}$
Hipérbola con focos $F_1 = (a,b)$, $F_2 = (c,d)$ y constante k, $0 < k < d(F_1,F_2)$	Taxi		$\left\| \begin{matrix} \|x-a\| + \|y-b\| - \\ \|x-c\| - \|y-d\| \end{matrix} \right\| = k$
	Máximo		$\|máx\{\|x\ -\ a\|, \|y\ -\ b\|\} -$ $máx\{\|x\ -\ c\|, \|y\ -\ d\|\}\|\ =\ k$
	Discreta		No está definida

Fuente: Adaptado de Antonio y Garzón (2017) y Antonio et al. (2020).

Según los planteamiento descritos se procede al diseño de cuatro situaciones didácticas para favorecer el aprendizaje de las cónicas como lugar geométrico, estas situaciones fueron diseñadas con el fin de evitar los obstáculos de tipo epistemológico, didáctico y cognitivo mencionados en los apartados anteriores y favorecer el razonamiento intuitivo desde el tratamiento de los registros de representación gráficos y verbales que buscan favorecer el aprendizaje a través de la exploración, la manipulación, el trabajo en grupo y las competencias argumentativas; de igual forma estas situaciones se fundamentan en las métricas, lo cual corresponde a la estrategia seleccionada para lograr la construcción del conocimiento sin profundizar en el lenguaje simbólico.

Las cuatro situaciones diseñadas fueron validadas principalmente por dos docentes investigadores del programa de Maestría en educación matemática de la Uptc: un candidato a doctorado en educación y una doctora en educación; adicionalmente la segunda situación fue validada en un primer momento para efectos de pruebas diagnósticas por otra docente doctora en educación y por un grupo de estudiantes de maestría en educación matemática.

Las situaciones se contemplaron para trabajar los cuatro momentos: Acción, formulación, validación e institucionalización. Los comportamientos e interacciones esperados en cada uno de estos momentos fueron acordes a la TSD, la situación 1 y la situación 3 se trabajaron desde el software GeoGebra mientras que la situación 2 y 4 se trabajaron de forma libre.

En el momento de acción se esperaba que cada uno de los estudiantes en las 4 situaciones llegara a un primer acercamiento de cónica respectiva desde la métrica indicada en cada caso, a partir de la situación 2 se hizo una introducción a cada métrica (taxi, máximo y discreta), mientras que en la situación 1 se realizó introducción a las principales herramientas a utilizar en

GeoGebra, se esperaba que el estudiante abordara las situaciones desde el GeoGebra o desde otro medio utilizando sus conocimientos previos y concepciones.

Para el momento de formulación se esperaba que el estudiante desarrollara procesos interactivos de comunicación, que expresara sus producciones, ideas y concepciones con otro estudiante, para mejorar la construcción de la cónica como resultado del momento de acción.

En esta investigación la fase de formulación se desarrolló en grupos de dos o tres estudiantes, en cada situación se propone una actividad interpretativa de lo que expresa el otro, es decir, se buscaba que el estudiante investigara a su par, para luego llegar a un conceso por grupo de la solución adecuada del problema y posteriormente socializarlo en el momento de validación.

Para el momento de validación, se esperaba que el conocimiento se desarrollara con todos los miembros de la clase, favoreciendo un escenario de comunidad científica donde cada grupo expone sus resultados y valida o refuta los resultados de los otros grupos, también se esperaba que cada grupo defendiera sus producciones o convenciera a los demás de la viabilidad de sus resultados.

Hasta este punto se esperaba que la intervención del docente fuera mínima: la postura que se asume es la de motivador para que el estudiante no abandone o desista de la situación, pero en general su intervención es casi nula, es decir, el contrato didáctico en este aspecto, debe estar enfocado en promover los ambientes a-didácticos que favorezcan la devolución del conocimiento.

Se esperaba que los grupos comunicaran sus producciones por medio de tres aspectos: el primero, que cada grupo asignara un representante para exponer las conclusiones del grupo, y los demás pudieran intervenir haciendo aportes, observaciones o preguntas; la otra forma era que el grupo pudiera exponer sus ideas y el docente por medio de la síntesis que desarrollaba en la pizarra virtual anotara los resultados del grupo, o la otra forma era que se estableciera en la reunión de zoom una especie de mesa redonda y el docente fuera el moderador de la charla promoviendo la participación de todos y fomentando un espacio de debate.

Finalmente, en el momento de la institucionalización, se esperaba promover un ambiente interactivo entre docente y estudiantes en la formulación del concepto de las cónicas como lugar geométrico desde las diferentes métricas, no se buscaba profundizar en la parte simbólica, pero no se descartó el aporte de alguna aproximación algebraica de las cónicas, aunque la principal finalidad de esta investigación correspondía a trabajar las cónicas desde el tratamiento espacial. Se esperaba que la institucionalización estuviera enfocada en la reflexión sobre los diferentes registros de representación de las cónicas cuando se cambia la forma de medir.

Según lo establecido en el marco metodológico, en un primer ciclo de IA todo el grupo trabaja con la situación 1, pero en un segundo ciclo de IA, cada grupo trabaja con una situación didáctica distinta y al final, en la institucionalización se socializaron los resultados para ser formalizados.

Se planeó la implementación de las situaciones para dos sesiones de clase, cada sesión de dos horas distribuidas de la siguiente forma: 30 min en acción, 30 min en formulación, 40 min en validación y 20 min en institucionalización, por su parte, la forma de trabajo por medio de plataforma Zoom ya fue establecida en el capítulo III de la presente investigación, el primer momento de acción se desarrolla en salas individualizadas, la fase de formulación en salas de grupos pequeños y la validación e institucionalización por medio de sesión conjunta.

De manera general se buscó que el estudiante al desarrollar las situaciones didácticas lograra el pasaje de un registro de representación a otro, especialmente los siguientes pasajes:

registro verbal → registro verbal, registro gráfico → registro gráfico, registro gráfico → registro verbal, registro verbal → registro gráfico y registro verbal → registro simbólico. Por otro lado, las situaciones tienen otro alcance y es el de lograr la compresión de las cónicas reconociendo sus partes fundamentales como: centros, focos, radio, directriz, constantes, propiedades mesurables, cálculo de distancias, entre otros, así como reconocer características comunes en la construcción gráfica que le permitan anticipar resultados.

Análisis de situaciones didácticas diseñadas (en anexo: Situaciones Didácticas).

Respecto a la primera situación relacionada con la métrica usual, se esperaba que en la parte I y parte II el estudiante ubicara puntos para satisfacer una condición establecida verbalmente, hasta lograr ubicar varios puntos que le permitieran descifrar algún patrón de ubicaciones o lograr relacionar la figura con una ya conocida, para esto solo se necesitó del uso de la herramienta de distancia que ofrece el GeoGebra, y a partir de un ejercicio exploratorio se halló la curva de circunferencia y parábola.

En la parte III y IV se pretendía que el estudiante a partir de la construcción de una elipse y una hipérbola (con las herramientas de GeoGebra) lograra establecer las condiciones que cumple cada punto para hacer parte de las respectivas cónicas, como en el caso de la elipse que se buscó lograr establecer que la suma de las distancias de un punto de la elipse a sus dos focos es siempre una constante mayor que la distancia entre los dos focos o de forma similar descifrar la constante de diferencia entre distancias de un punto de la hipérbola respecto a los dos focos de la misma.

En la situación didáctica 2 relacionada con la métrica del taxi, se buscó que el estudiante relacionara enunciados referidos al plano de una ciudad con ubicaciones específicas, se esperaba que desarrollara una relación entre las cónicas de la métrica usual y lograra establecer alguna aproximación verbal de la definición de cónica en esta métrica.

La situación 3, relacionada con la métrica del máximo, tenía el propósito que el estudiante por medio de las definiciones de lugares geométricos de las cónicas ubicara puntos en GeoGebra que verificaran las definiciones de cónicas, pero con la medición del máximo. Similarmente para la situación 4 relacionada con la métrica discreta, se proponen unas situaciones específicas en el plano y se esperaba que el estudiante estableciera las representaciones en lenguaje verbal y en lenguaje gráfico de las respectivas cónicas desde esta métrica.

Momento de Acción-Observación

Según lo estipulado para el ciclo I de IA, se implementó la situación 1 al grupo de estudiantes que en adelante se identifican con E1, E2, E3, E4, E5, E6 y E7. La forma de recolección de datos se realizó por medio de la guía del observador y grabaciones de video y audio desde la plataforma Zoom.

Adicional a esto, cada estudiante debía organizar sus respuestas en un archivo .pdf o .doc que debía enviarse al correo del investigador, esta primer situación se desarrolló en una sesión de clase que duró aproximadamente 2 horas y 15 min, el rol del docente en los momentos de acción, formulación y validación fue principalmente el de observador, mientras que en el momento de institucionalización toma el papel de moderador y promotor de debate.

Reflexión ciclo I de IA (ver anexo: Situaciones didácticas – Métrica usual)

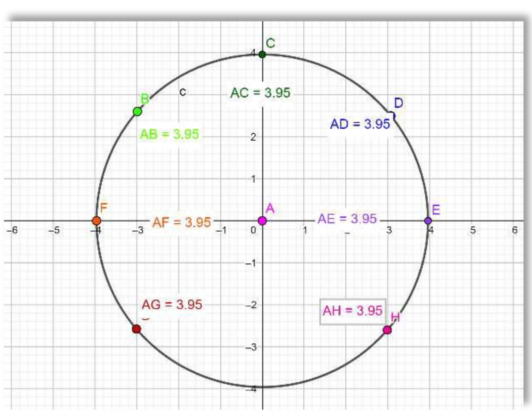
Fase de acción. En el análisis de la fase de acción se estudiaron los conocimientos implícitos o concepciones con las que abordaba el estudiante la situación didáctica 1, la forma en que el estudiante hace matemáticas e investiga matemáticas, para detallar los desequilibrios de conocimiento y las transiciones en diferentes registros de representación, a continuación, se exponen estos resultados.

***Parte I.* (ver Parte I en anexos: Situaciones didácticas – Métrica usual)** Con las indicaciones establecidas por la situación varios de los estudiantes en su actividad exploratoria pudieron detallar la circunferencia de forma gráfica perfectamente, y en su tratamiento verbal manifestaron una aproximación muy acorde a la original.

El estudiante E1, como se presenta en la figura 18, asimiló de manera muy rápida que la figura hacía referencia a una circunferencia manifestando lo siguiente: "*desarrollé directamente una circunferencia porque recordé que la distancia constante al punto fijo hacía referencia a un radio, luego ubiqué varios puntos que describían la forma de una circunferencia y comprobé mi hipótesis*".

Figura 19

Circunferencia de E1

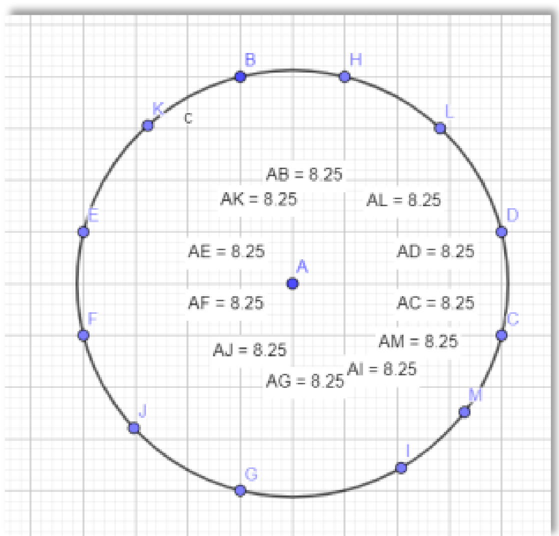


Fuente: Elaborado por estudiante E1.

Caso similar ocurrió con E2, quien directamente desde el GeoGebra antes de ubicar puntos como lo indicaba la situación asimiló el enunciado a una circunferencia, E2 manifiesta lo siguiente: "*para lograr la ubicación de los puntos me ayudé con la herramienta de circunferencia (del GeoGebra) que hacía que todos los puntos externos tuvieran la misma distancia y después solo ubiqué otros puntos en el círculo y le medí la distancia para comprobar que era la misma en todos los casos*".

Figura 20

Circunferencia de E3

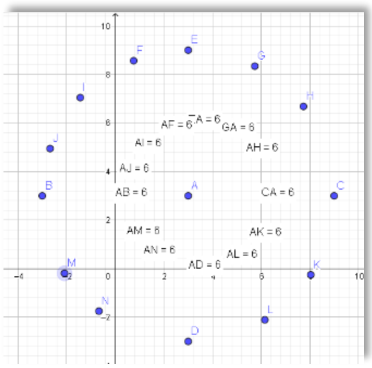


Fuente: Elaborado por estudiante E3.

Por su parte E4 manifestó una generalización del concepto de circunferencia de la siguiente forma "*al ubicar los puntos según el punto fijo encontramos una figura circular alrededor de este punto, si se varía la distancia al punto fijo igualmente seguiría el comportamiento circular*"

Figura 21

Circunferencia de E4

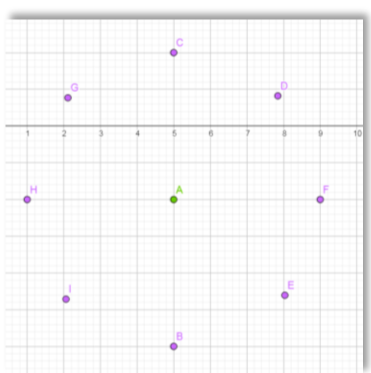


Fuente: Elaborado por estudiante E4.

El estudiante E3, solo se limitó a ubicar los puntos, pero no relacionó esta construcción con la circunferencia manifestando lo siguiente: "*para ubicar los puntos partí de un punto específico y de una distancia específica, luego ubiqué algunos puntos en la parte inferior al punto fijo que cumplían la condición de la misma distancia y simétricamente ubiqué los puntos en la parte superior al punto fijo*".

Figura 22

Aproximación de circunferencia de E3



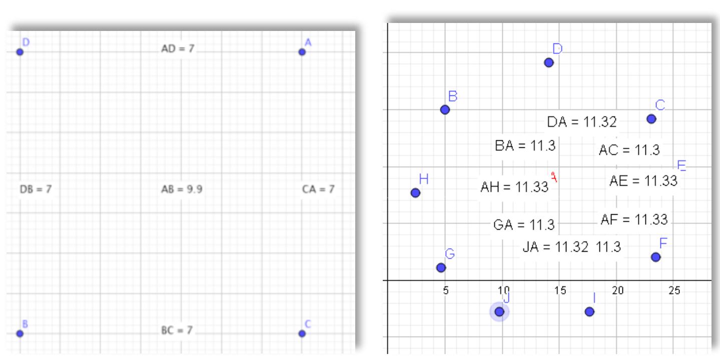
Fuente: Elaborado por estudiante E3.

E5 en su trabajo exploratorio se limitó a ubicar solo algunos puntos que satisfacían las condiciones de distancia establecidas, este estudiante manifestó: "*He ubicado 4 puntos, estos* *cuatro puntos me crearon una figura geométrica la cual la describiría como un cuadrado ya que la medida de todos sus lados es igual. Los cuadrados siempre van a tener una misma distancia, por esto si los puntos tuvieran valores más grandes tendrían que ser igual la distancia entre los puntos puesto que si no la tuvieran no sería un cuadrado*” en este argumento se nota que el estudiante encontró la figura de un cuadrado circunscrita en la circunferencia, pero estuvo lejos de asimilarlo con una circunferencia.

El estudiante E7 también tuvo una interpretación del lugar geométrico hacia un polígono regular, específicamente relacionó su construcción a un nonágono argumentando lo siguiente: “*a medida que se van uniendo los puntos que satisfacen la condición de distancia, se forma una figura geométrica de nueve lados, es decir, un nonágono, en esta figura sus lados son simétricos y sus puntos están bien proporcionados*”, a diferencia de E5, E7 ubicó varios puntos, pero su argumentación también estaba relacionada con una figura circunscrita en la circunferencia, lo que respondieron no puede ser considerado erróneo pero es un resultado parcial donde no se consideraron situaciones límite o generalizaciones a partir del comportamiento gráfico de los puntos.

Figura 23

Construcciones de circunferencia de E5 y E7

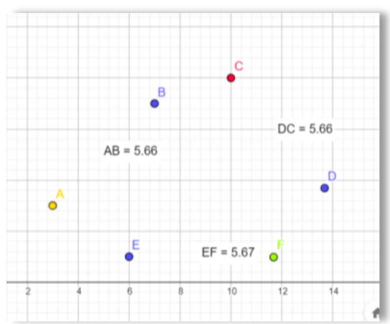


Fuente: Elaborado por estudiantes E5 y E7.

Por otro lado, E6 también interpretó de otra manera el enunciado referente a la circunferencia, el estudiante establece la ubicación de dos puntos, halla la distancia entre estos puntos y desarrolla construcciones de otros pares de puntos manteniendo la distancia del par de puntos iniciales. E6 argumentó que: "*a medida que se ubican los puntos noté una especie de pentágono, o alguna figura geométrica parecida a este, pero pensándolo bien, si sigo ubicando puntos que mantengan estas distancias, lo podría hacer de infinitas maneras y no encontraría una forma establecida"*, aunque en su argumento se denota la capacidad de anticipación de resultados, la interpretación del lugar geométrico fue incorrecta, entendió que la construcción se basaba en ubicar parejas de puntos con una misma distancia, y repetir este proceso hasta asimilarlo con una forma.

Figura 24

Construcción de circunferencia de E6

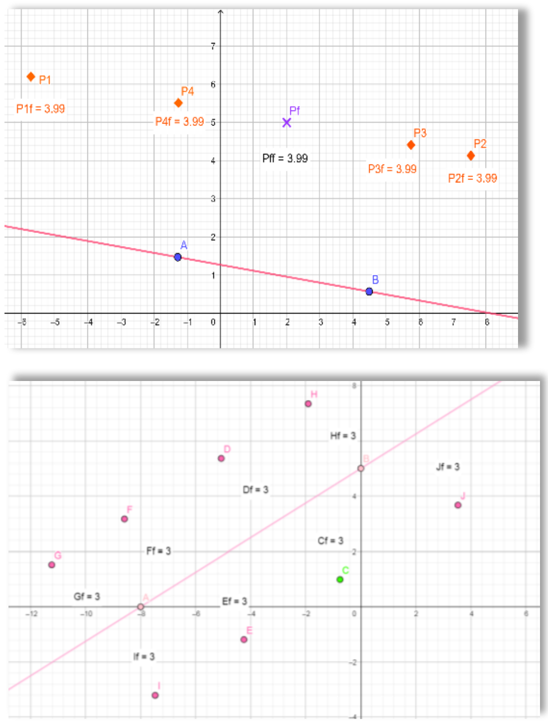


Fuente: Elaborado por estudiante E6.

Parte II. **(ver Parte II en anexos: Situaciones didácticas – Métrica usual)** Para el caso de la parábola, en esta fase de acción, la mayoria de estudiantes no alcanzaron una interpretación cercana de la representación gráfica de esta cónica, interpretaron de una manera diferente el lugar geométrico como sucedió con E3 quien argumentó sus procedimientos basándose en la idea de que los puntos buscados eran puntos colineales que formaban una línea paralela a la recta establecida (directriz) y dichos puntos colineales podrían estar en la parte inferior o superior de la recta directriz, en este argumento se logra establecer que el estudiante solo asumió puntos que equidistan de la recta, pero no se tuvo en cuenta la distancia al punto foco logrando el lugar geométrico de la recta paralela pero no el lugar geométrico de la parábola.

Figura 25

Aproximación a parábola por E3

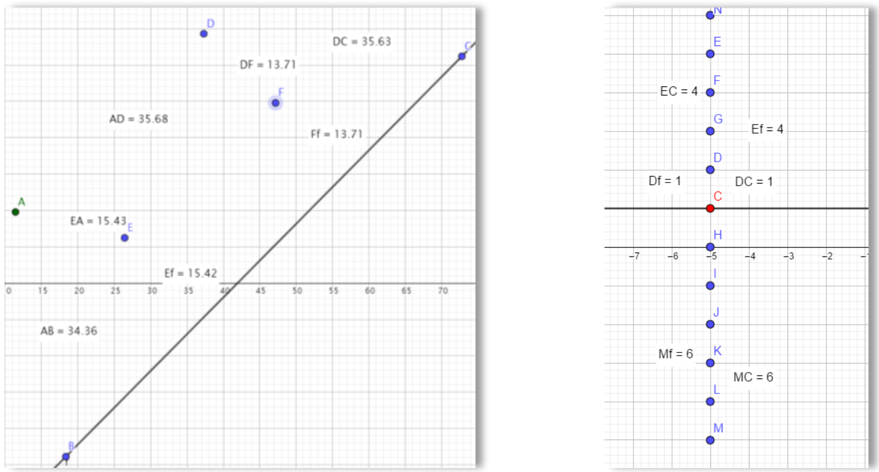


Fuente: Elaborado por estudiante E3.

E4 tampoco logró el lugar geométrico de la parábola, según se observa, ubicó algunos puntos de forma correcta pero en la búsqueda de otros puntos confundió el procedimiento y no obtuvo una forma acorde a la parábola. Por otro lado el estudiante E7 interpretó de forma incorrecta las condiciones del foco y la directriz en la parábola, asumió que el foco era un punto de la recta y encontró que los puntos del lugar geométrico eran una serie de puntos colineales que formaban una recta perpendicular a la directriz.

Figura 26

Parábolas construidas por E5 y E7

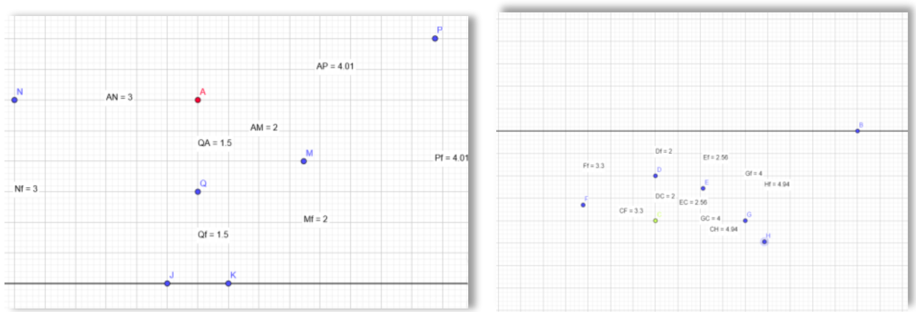


Fuente: Elaborado por estudiantes E5 y E7.

Por su parte E1 y E2 se limitaron a solo ubicar algunos puntos que satisfacían la condición, pero argumentaron que el ejercicio era muy complejo y requería de mucha precisión y paciencia. Estos estudiantes en un primer momento tuvieron dificultad respecto al concepto de distancia de un punto a una recta, no comprendían como hallar esta distancia en el software, aunque en la guía se especificaba esta función: se aclara que este concepto de distancia de un punto a una recta ya se había trabajado en sesiones anteriores, por otro lado a los estudiantes se les dificultó ubicar un punto que cumpliera dos condiciones simultáneamente: cuando se familiarizaron más con el software pudieron superar esta dificultad, pero se evidenció el afán por terminar la actividad lo que no permitió una aproximación a la cónica.

Figura 27

Aproximación a parábola por E1 y E2

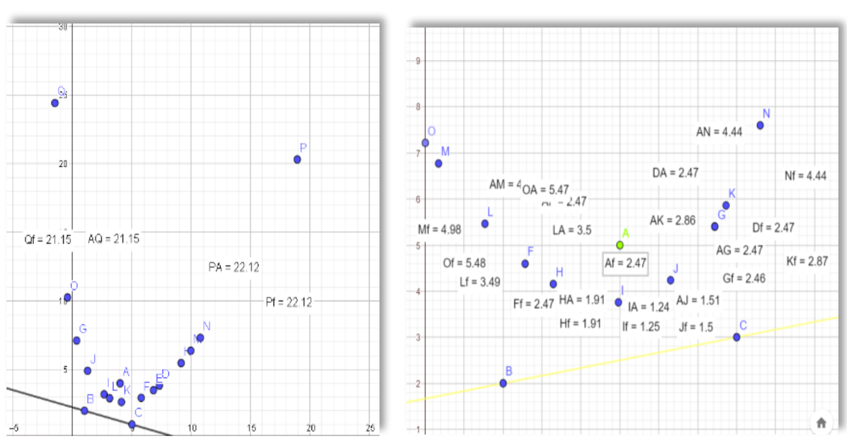


Fuente: Elaborado por estudiantes E1 y E2.

Solo E4 y E6 lograron la aproximación gráfica de la parábola y una aproximación verbal muy cercana a su lugar geométrico de manera formal. Para el caso de E4 relacionó su figura con la letra “U” cuya extensión era infinita y su definición de este lugar geométrico fue la siguiente: “*son los puntos que poseen la misma distancia a un punto y a una recta, formando una letra U que se extiende al infinito*”, mientras que E6 manifiesta lo siguiente: “*luego de una grande sucesión de puntos lógro notar una curva que está en ascenso desde ambos lados, una parábola básicamente*”

Figura 28

Parábolas construidas por E4 y E6

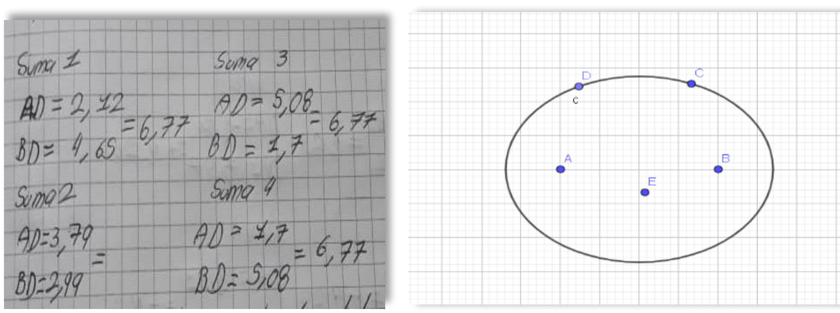


Fuente: Elaborado por estudiantes E4 y E6.

***Parte III.* (ver Parte III en anexos: Situaciones didácticas – Métrica usual)** Para el caso del lugar geométrico de la elipse, la mayoría de estudiantes lograron descifrar la propiedad constante de la suma, como sucedió en E1, E2, E3, E4, E5 y E6, pero solamente E2, E4 y E6 establecieron una aproximación verbal del lugar geométrico de la elipse, por ejemplo E2 manifestó que una elipse era "*un conjunto de puntos en el plano donde se da un resultado constante cuando se suman las distancias de un punto a sus focos*" y E6 comentó: "*una elipse sería como un objeto redondo que sin importar la distancia entre los focos, la suma de los puntos de la elipse a estos focos va a dar lo mismo*".

Figura 29

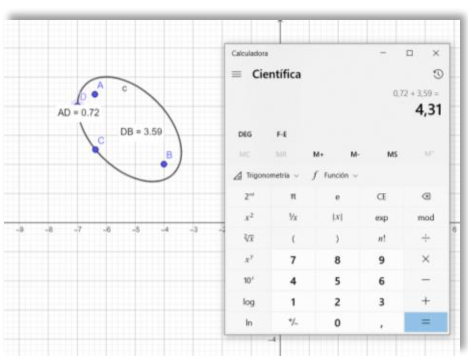
Análisis de cónicas por E4



Fuente: Elaborado por estudiante E4.

Figura 30

Análisis de cónica por E6

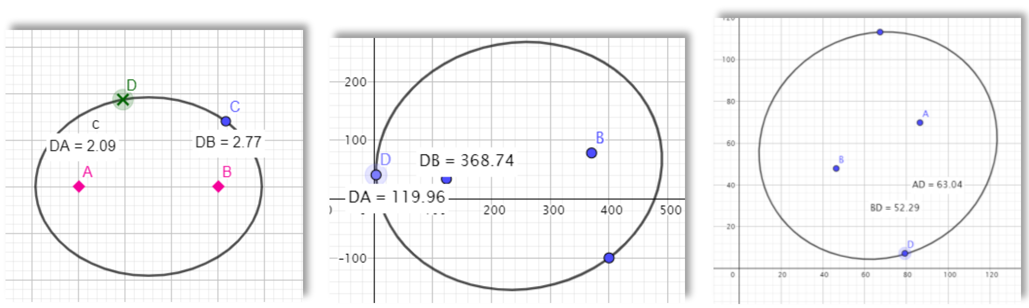


Fuente: Elaborado por estudiante E6.

Los estudiantes E1, E3 y E5, a pesar de establecer la propiedad de constante de sumatoria en la elipse, sus definiciones como lugar geométrico no involucraron esta característica, por ejemplo E1 definió a la elipse como "*el lugar geométrico donde hay dos focos y un punto externo que determina el recorrido de la elipse*", lo que permite analizar un argumento muy superficial basado en la construcción del software, mientras que E5 manifestó que "*una elipse es una semi esfera, donde los valores de las sumas dependen del tamaño de la elipse*.", este definición, aunque incompleta, deja ver que el estudiante basó su definición en el comportamiento de varias elipses, la constante sumatoria cambiaba cuando las condiciones de la elipse también cambiaban, se podría decir que el análisis utilizado por E5 se basa en la observación objetiva, pero esto no le permitió tener en cuenta la propiedad de sumatoria constante.

Figura 31

Análisis de elipses de E1, E3 y E5



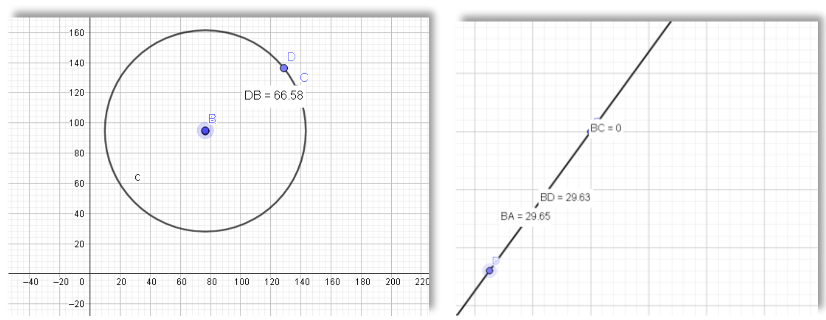
Fuente: Elaborado por estudiantes E1, E3 y E5.

Finalmente E7, no encontró la particularidad de constante sumatoria pero basó sus análisis entorno al hallazgo de que si la medida entre los focos era cero, la elipse se transformaba en circunferencia, y esto lo argumentó con lo siguiente: "*al arrastrar el punto A sobre el punto B (focos de elipse) la distancia de estos puntos (puntos de la elipse) a este punto de focos (donde están ubicados A y B) es casi proporcional*", el estudiante efectivamente había analizado una particularidad de las elipses cuando los dos focos están ubicados en la misma posición, aunque no era el resultado esperado, se considera un gran hallazgo para el análisis del lugar geométrico de esta cónica.

De igual forma en esta labor exploratoria E7 encontró otra particularidad cuando en la construcción de la elipse ubica el punto que determina el trazo de la curva encima de uno de los focos, formando una recta, en este aspecto se concluye que E7 no tuvo en cuenta la condición de que la suma constante debe ser mayor a la distancia entre los dos focos, al hacer esta construcción la suma constante es igual a la distancia entre los focos, lo que invalida la condición de la elipse.

Figura 32

Análisis a-didácticos en elipses de E7

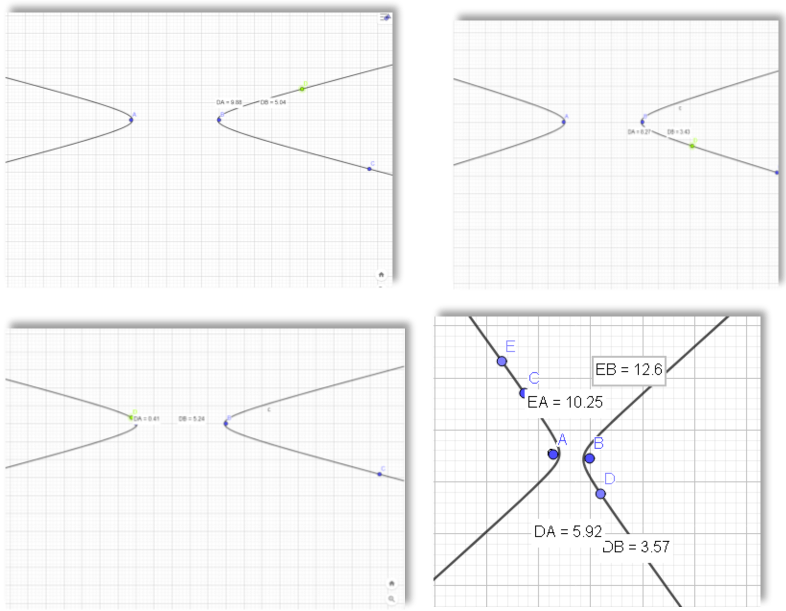


Fuente: Elaborado por estudiante E7.

***Parte IV*. (ver Parte IV en anexos: Situaciones didácticas – Métrica usual)** Para la parte del lugar geométrico de la hipérbola, la mayoría de estudiantes percibieron la particularidad de constante en las restas, como ocurrió con E1, E2, E3 y E7 quienes definieron el lugar geométrico de la hipérbola de una forma muy cercana a la definición formal. E1 describió a la hipérbola como “*el lugar geométrico de puntos cuyas distancias restadas a dos focos es siempre igual*”. E2 describió otra característica fundamental de esta constante de resta afirmando lo siguiente: "*da el mismo resultado, pero puede cambiar el signo*", mientras que E7 comenta que "*la hipérbola conserva siempre una propiedad de restas constantes*".

Figura 33

Análisis de hipérbolas de E2 y E7

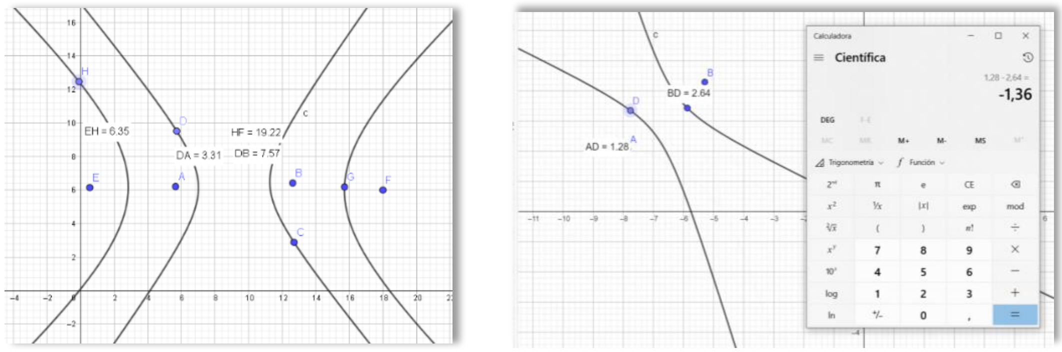


Fuente: Elaborado por estudiantes E2 y E7.

E4 encambio definió la hipérbola como "*dos curvas abiertas infinitas y parecidas que se encuentra una en contra de otra* ". Esta definición esta referida principalmente a la forma de la figura más no a sus propiedades fundamentales como lugar geométrico. E5 por su lado asumió la caracteristica de las restas constantes como una propiedad variable que depende de la forma de la hipérbola, y E6 aunque reconoció la particularidad de restas constantes, solo verificó estas restas en una hoja de la hipérbola, los resultados le daban negativos, por esta razón definió la hipérbola de la siguiente manera: "*una hipérbola desde mi punto de vista es una curva compuesta de dos partes simétricas que no se tocan y en donde al desarrollar la resta de distancia de un punto de esta curva a los focos siempre da el mismo resultado pero negativo*"

Figura 34

Desarrollos de hipérbolas de E4 y E6



Fuente: Elaborado por estudiantes E4 y E6.

Fase de Formulación. En el análisis de la fase de formulación se quiso estudiar las diferentes interacciones que se dieron en los grupos conformados, la forma de comunicación de los estudiantes y como generan el discurso matemático, la forma en que consolidan su conocimiento y la forma como determinan en qué medida los desequilibrios de conocimiento de la fase de acción fueron superados o prevalecieron en esta fase. Los grupos que se conformaron para esta fase de formulación fueron los siguientes: Grupo 1 (E1-E2-E3), Grupo 2 (E4-E5), y Grupo 3 (E6-E7); cada uno de los grupos trabajó en salas de grupos pequeños y el docente entraba esporádicamente a las salas para observar el proceso.

En el grupo 1, se consolidaron los registros de representaciones verbales del lugar geométrico de la circunferencia, la elipse y la parábola de manera rápida debido a que en la fase de acción los resultados de cada uno de los estudiantes fue muy cercano al conocimiento esperado, por su parte se hizo énfasis en la comunicación alrededor de la construcción del lugar geométrico de la parábola, en la fase de acción E1 y E2 tuvieron un acercamiento puntual de la figura, pero no determinaron concretamente la forma establecida, mientras que E3 abordó este lugar geométrico de otra forma obteniendo puntos colineales paralelos a la directriz. A continuación, se describe el discurso matemático del grupo respecto a este lugar geométrico:

> *E1: la verdad me confundió un poco esta definición, lo que hice fue ubicar algunos punticos que cumplieran con la condición de estar a la misma distancia de este punto (el foco) y esta recta (directriz) [explicaba esto mientras compartía pantalla a sus compañeros], pero no pude ver ninguna figura que se forme.*
> *E3: pero yo si encontré una forma, los punticos que cumplen la condición son como una recta, y miren que cumple la condición de que la distancia (de estos puntos) a la recta siempre va dar lo mismo.*
> *E1: Tienes toda la razón, no lo había visto de esa forma.*
> *E3: Si y esto mismo se cumple abajo también (debajo de la directriz)*
> *E2: Pues yo también obtuve una forma curva, pero no la había visto desde tú perspectiva (refiriéndose a la solución de E3), tienes toda la razón, pero ¿cuál fue tu punto fijo? (refiriéndose al foco de la parábola)*
> *E2: Mi punto fue este (indica en la pantalla un punto que esta denotado con otro color y está entre los puntos colineales que obtuvo)*
> *E1: Pero hay algo que no me cuadra, ahora que escucho tu solución (refiriéndose a la solución de E3), como asumiste la distancia de los puntos al punto fijo (foco)*
> *E3: Normal, pues la distancia va cambiando a medida que me alejo más del punto fijo, pero siempre va a conservar a misma distancia a la recta.*
> *E2: Estas haciéndolo mal, porque los puntos que escojas deben estar a la misma distancia del punto fijo y de la recta.*
> *E3: Si, creo que solo tuve en cuenta las distancias con la recta, sí, me quedo mal.*
> *E1: Si, yo lo analicé como E2, pero no encontré muchos puntos, me estresé porque tenía que moverse los punticos con mucha precisión, pero revisando tu solución me doy cuenta que es una curva que va abriendo hacia abajo (refiriéndose a la solución de E2).*
> *E2: Es correcto E1, si yo continúo ubicando en ese sentido punticos se cumple la condición de las distancias, pero no estoy segura que figura se forma, si se ve que es una curva que abre hacia abajo pero no sé si tiene un nombre específico.*
> *E3: Pues dejemos tu respuesta como la correcta E2, creo que es la más completa.*
> *E1: Estoy de acuerdo, redactemos mejor la definición de los puntos ¿Qué definición tienes E2?*
> *E2: yo tengo que son los puntos curvos que abren hacia abajo y conservan una particularidad de mismas distancias.*
> *E3: Me parece muy pertinente esa definición*
> *E1: Estoy de acuerdo.*

Respecto a lo anterior, E3 pudo superar su obstáculo referido a la interpretación del lugar geométrico de la parábola, aunque en el consenso general del grupo faltó más argumentación para el lugar geométrico desde el lenguaje verbal, ya que la definición queda muy ambigua y no permite denotar otros elementos fundamentales como el foco y la directriz. En el diálogo se puede evidenciar implícitamente una pequeña fase de validación, cuando los estudiantes intentan convencer a E3 de su error y exponerles la forma más asertiva de abordar el lugar geométrico.

En el grupo 2, se dio un consenso similar respecto la elipse, aunque los registros verbales fueron diferentes de E4 y E5, de fondo tenían en cuenta la propiedad de suma constante lo que les permitió formular una definición de elipse más estructurada teniendo en cuenta la propiedad de distancias. Respecto a la circunferencia, aunque E4 tuvo una buena aproximación, E5 concluyó que el lugar geométrico correspondía a un cuadrado, en esto los dos estudiantes tuvieron la siguiente interacción:

> *E4: Yo obtuve una representación similar a la de un círculo.*
> *E5: ¿Por qué?, yo me basé en las indicaciones de la guía, y claramente se refiere a un cuadrado, pues la verdad lo que yo hice fue ubicar un punto con una distancia determinada al punto fijo, y me basé con la simetría para ubicar los otros tres puntos, lo primero que se me vino a la mente es que era un cuadrado y lo comprobé midiendo las distancias de punto a punto.*
> *E4: Pero E5, la guía decía que ubicáramos varios puntos en diferentes direcciones, si te das cuente en mi trabajo estos puntos también están a una distancia igual (indicando algunos puntos del trabajo y demostrando con la herramienta de distancia su afirmación)*
> *E5: Ok, no tuve en cuenta esto, como por coincidencia obtuve este cuadrado pensé que era la figura que se buscaba, pero no ubiqué más puntos, la tuya (refiriéndose al trabajo de E4) es la correcta.*

Para el caso de la parábola, también estuvieron en discordancia los dos resultados, mientras E4 logró el conocimiento esperado, E5 en la fase de acción confundió el desarrollo ubicando unos puntos correctamente y otros que no cumplían la condición de distancia, para este caso ocurrió la siguiente intervención:

> *E5: En esta parte, siendo sincero solo ubiqué un punto que cumplía la condición, creo que es el más fácil (refiriéndose implícitamente al vértice de la parábola), pero los otros puntos, no sé, tomé esta misma distancia, pero…, sinceramente no entendí esta parte.*
> *E4: Mira E5, yo comprendí que todos los puntos que cumplían esta condición tenían esta dirección (indicando la forma de "U" que tomaba la curva) y esto se iba a extender hasta el infinito, y fíjate que cada punto cumple con la regla de la misma distancia.*
> *E5: Esto es una parábola.*

E4: No lo había visto por ese lado, pero ahora que me lo indicas si parece ser una parábola, ahorita le preguntamos al profe, si esto es una parábola o una figura muy cercana a la parábola.

Finalmente, para la hipérbola, ninguno de los dos estudiantes en sus definiciones de la fase de acción contemplaba la particularidad de la resta, E4 basó su respuesta en cuanto a la forma de la curva mas no en su característica de resta constante, mientras que E5 basó su argumento explicando que esta resta cambiaba si se cambiaban los parámetros de la hipérbola, es decir si se alejaban los focos o se acercaban, frente a esto los dos estudiantes argumentaron:

E4: Para mí, definiría a la hipérbola como dos curvas en contra que se extienden hacia el infinito.
E5: pero no contemplaste la particularidad de las restas.
E4: Si lo hice, me di cuenta que siempre daba igual, pero esto se debe, creo yo, al comportamiento curvo de la figura.
E5: yo agregaría a lo que dices, que también depende de que tan lejos o cerca estén los focos, porque esto hace que la resta cambie, es decir va ser constante, pero si cambio la forma de la hipérbola la constante cambia.
E4: Lógicamente E5, pues si cambio las condiciones, esto cambiará.
E5: Pero como la guía pide estudiar estas restas, creo que tienen algo que ver
E4: Entonces redactemos una idea como las curvas en contra que son infinitas y sus restas son constantes.
E5: Correcto, agreguémosle también que depende de donde ubiquemos los focos.
E4: quedaría como curvas en contra que son infinitas y sus restas son constantes y que dependerán de la ubicación de los focos.
E5: Correcto

Con lo anterior se puede concluir que E4 y E5 tuvieron un acercamiento a las características fundamentales de la hipérbola, pero en su definición la abarcaron desde la forma de la figura y no desde la característica de restas de distancias.

Para el grupo tres, todas las definiciones fueron distintas, partiendo de que E7 solo acertó en el lugar geométrico de la hipérbola, mientras que E6 acertó en la definición de la parábola y la elipse, pero en la circunferencia ninguno de los dos tuvo una aproximación al lugar geométrico de esta cónica. Finalmente, en la comunicación establecida entre los estudiantes pudieron obtener el lugar geométrico, esto se evidencia con el siguiente diálogo:

E6: Es mejor que empiece usted E7, estoy más que seguro que la figura que obtuve me quedo mal.
E7: Listo, para la primera parte la figura que obtuve es lo que parece ser un nonágono, miré que todos los puntos están a la misma distancia que el punto central.
E6: Claro, yo lo analicé muy mal, pensé que tenía que repetir esta distancia fija varias veces, pero con diferentes pares de puntos
E7: Pues yo entendí que era un punto fijo, y en base a ese punto se construían los otros puntos con la misma distancia, y como también decía que ubicaran varios, pues eso hice, y me dio un nonágono
E6: Pero siguiendo tu argumento podrías ubicar más puntos y se formarían figuras de más lados (refiriéndose a los polígonos regulares inscritos en la circunferencia), inclusive puedes llenar esos espacios de punticos, saldría una figura de muchísimos lados.
E7: Pues yo también pensé lo que tu dijiste, pero, nunca hubiera acabado, además como se llamaría un polígono de muchísimos lados.
E6: Es que toma la forma de circunferencia, yo diría que esto es una circunferencia
E7: Si señor, esa era la figura
E6: Podríamos definir esta figura como el grupo de puntos que forman una circunferencia.
E7: Me gusta esa definición.

En cuanto a la parábola también se presenció un momento de superación de obstáculos. E7 estaba muy seguro de que su respuesta era la correcta por la particularidad que había encontrado en la colinealidad de los puntos del lugar geométrico, pero al escuchar las respuestas de E6, reorganizó sus ideas y entre los dos reconstruyeron la definición de la parábola.

E6: En mi trabajo encontré que era una parábola, ya que es muy parecida a las figuras que trabajamos en segundo periodo, miré que cada punto que puse cumple con la condición de que las distancias sean iguales, bueno prácticamente iguales, porque varían en decimas las distancias (menciona lo anterior mostrando su trabajo desarrollado)
E7: Pero mira que mi figura es una recta, si yo ubico un punto fijo y establezco la recta fija los puntos que cumple la condición de las distancias son todos estos de arriba y todos estos de abajo.
E6: Pero su punto fijo está dentro la recta verdad
E7: Si, se ubica dentro de la recta
E6: Pues no encuentro fallo en tu argumento, podrían ser las dos respuestas válidas, además en la guía no dice nada acerca de la ubicación del punto fijo.
E7: Es correcto, pues redactemos la definición de los puntos de una forma que tenga en cuenta los dos resultados
E6: Podría ser como los puntos que están a mismas distancias de un punto fijo y una recta, sin importar donde se encuentre el punto fijo
E7: Me parece bien.

Para la elipse, prevaleció la argumentación de E6 quien mencionó una definición de lugar geométrico reconociendo las propiedades de la suma constante. E7 también expuso sus dos hallazgos cuando los focos se modificaban de posición, pero se puede ver que E6 verificó una de las respuestas de E7 de la siguiente manera: "*Para el caso de la circunferencia que obtuviste, yo diría que es un caso especial de elipse, porque si te das cuenta la condición de que la sumas de las distancias debe ser constante se cumple asumiendo que un foco está sobre otro, la distancia sería como el doble de la distancia del punto al centro, y siempre se cumplirá*" mientras que para el otro hallazgo, el de la recta E6 no entendió por qué se daba esto.

Por otro lado, para el caso de la hipérbola, fue E7 quien por medio de su argumentación convence a E6 del comportamiento constante de las restas, E6 solo detalló esta particularidad desde una hoja de la hipérbola, solo se obtenían restas constantes pero negativas, y E7 le mostró que moviendo el punto a la otra hoja la operación daba lo mismo pero positivo, en base a esto se estableció por el grupo una definición en registro verbal de la hipérbola que contemplaba la particularidad de la resta constante que cambia de signo.

Fase de Validación. Para esta fase, los tres grupos volvieron a sesión conjunta por plataforma zoom y escogieron a un vocero para que comentara los resultados obtenidos. En la parte de sustentar la elipse los grupos desarrollaron argumentaciones muy similares en torno a este lugar geométrico teniendo en cuenta la particularidad de la suma constante, en este apartado el grupo 3 manifestó el hallazgo de E7 respecto a la elipse deformada que se convertía en recta, los demás estudiantes tampoco lograron explicar esta parte. Para el caso de la circunferencia, de los tres argumentos dados por los grupos el de E6 y E7 no expresa la condición de distancia de los puntos al punto centro, si no que mencionaba la característica de forma general, por lo que los otros grupos recomendaron a esa definición anexar algo relacionado con esa característica, que ellos la contemplaron en sus análisis, pero no la pusieron en sus conclusiones.

En referencia a la parábola, los grupos 2 y 3 desarrollaron definiciones del lugar geométrico muy similares, refiriéndose a la condición de equidistancias respecto al foco y la directriz, sin embargo también el grupo 3 puso en tela de juicio la parábola encontrada por E7 a causa de que la forma era totalmente diferente a la curva (era una recta) y no incumplía las condiciones propuestas en la actividad, frente al argumento de estos dos grupos, el grupo 1 pudo reorganizar sus ideas, aunque tenían clara la forma de la figura, la definición de lugar geométrico no era muy consistente. Frente a la hipérbola los grupos 1 y 3 tenían clara la proyección del lugar geométrico contemplando las condiciones de resta constante, se puso en manifiesto que esta resta cambiaba de signo, pero que siempre iba a ser la misma de cierto modo, en cuanto al grupo 2 el argumento se basó en la definición de la forma de la curva mas no de la condición de la resta constante, aunque la habían tenido en cuenta en sus previos análisis, no la tuvieron en cuenta en sus conclusiones. La evaluación final de esta primera actividad se contempla en la Tabla 8.

Tabla 8

Análisis resultado esperado vs resultado de la práctica Situación Didáctica 1

	¿Logró el conocimiento esperado en fase de acción?				¿Logró el conocimiento esperado en fase de formulación?				¿Logró el conocimiento esperado en fase de validación?			
Estudiante	**C**	**P**	**E**	**H**	**C**	**P**	**E**	**H**	**C**	**P**	**E**	**H**
E1	1	2	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1
E2	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1
E3	2	3	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1
E4	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1
E5	3	3	2	2	1	1	1	2	1	1	1	1
E6	3	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1
E7	2	3	3	1	2	1	1	1	1	1	1	1
Conclusión	2	3	2	2	1	2	1	1	1	1	1	1

Fuente: Elaboración propia.

De esta evaluación se determina que a lo largo de los tres procesos se fue logrando el conocimiento esperado desde un trabajo autónomo e interactivo entre los estudiantes, para la fase de acción en términos generales los estudiantes lograron de forma intermedia los conocimientos esperados, y en el momento de formulación y de validación en términos generales se había logrado el objetivo de la situación didáctica.

Proceso de Institucionalización. Frente a las argumentaciones de los lugares geométricos logrados por los estudiantes el docente en su pizarra virtual comparte las definiciones formales tomadas de Lehmann (1992):

> ***Definición 1.*** *"La circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre una distancia constante a un punto fijo de ese plano"*
>
> ***Definición 2.*** *"La parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta."*
>
> ***Definición 3.*** *"La elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos."*
>
> ***Definición 4.*** *"La hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos."*

En consenso entre el docente y el grupo de estudiantes, se formalizaron los resultados obtenidos y se relacionaron con sus definiciones gráficas; en este apartado el docente para aclarar los dos hallazgos de E7 respecto a la parábola y la elipse, analizó que las definiciones eran claras en afirmar primero que para el caso de la parábola, el foco no debía pertenecer a la recta, y en el caso de la elipse, la constante de suma debía ser mayor a la distancia entre los focos, por estas dos condiciones era que la parábola y la elipse de E7 habían tomado estos comportamientos.

Reflexión final Primer ciclo de Investigación-Acción. Con base al primer ciclo de IA, el proceso de obtención de datos se vio afectado por el hecho de estar cambiando constantemente de salas pequeñas en zoom, esto sesgaba el proceso de observación del investigador respecto a los demás estudiantes cuando se ingresaba a una sala particular. Por otro lado, los tiempos manejados en la situación no fueron acordes a los planeados.

De forma global, en el momento de acción los estudiantes vivenciaron situaciones en las cuales a partir de sus propios conocimientos y concepciones abordaron el lugar geométrico de las cuatro cónicas, hubo una mayor afinidad respecto al análisis del lugar geométrico de la circunferencia y la elipse, los estudiantes actuaron en función del medio bajo sus propias motivaciones (Brousseau, 2007): se evidenció, cómo la mayoría de estudiantes al actuar sobre los problemas planteados y notar la regularidad de la naturaleza de estas figuras, pudieron formular conjeturas acerca del comportamiento gráfico y anticiparon resultados del mismo, dado que la situación reaccionaba conforme ellos iban interactuando, pudiendo comprobar y falsear sus hipótesis.

Respecto a la parábola y la hipérbola el escenario no fue el mismo, pero los estudiantes pudieron establecer parcialmente las particularidades de sus lugares geométricos. Para comprender de una mejor forma el proceso cognitivo desarrollado en la fase de acción, el estudiante interactuó con otros estudiantes para comunicar sus resultados, en esta parte se quiso analizar si el estudiante formuló el conocimiento respecto al lugar geométrico de la cónica, es decir reconstruyó sus planteamientos de la fase anterior en un sistema lingüístico (Brousseau, 2007), lo que se encontró fue un trabajo comunitario donde los estudiantes que alcanzaron medianamente los lugares geométricos o los analizaran desde otra perspectiva pudieran reformular sus ideas y expresar una definición más clara del conocimiento.

En esta fase las formulaciones del conocimiento de los lugares geométricos fueron muy cercanas al conocimiento esperado, solo hubo una aproximación intermedia en dos grupos: el primero respecto a la parábola y el tercero respecto a la circunferencia, posiblemente por el análisis puntual del grupo 1 que no le permitió desarrollar generalizaciones de mayor alcance y en el grupo tres por la asociación de la circunferencia a un polígono regular de infinitos lados. La situación en esta parte sugería comprender la postura o los planteamientos del otro compañero dado que para interpretar correctamente esta comunicación era necesario que los "interlocutores cooperen en el control del medio externo" (Brousseau, 2007, p. 25).

En este trabajo se planeó que la fase de formulación se hiciera en grupos pequeños y la fase de validación se desarrollara con todo el grupo de estudiantes, pero evidentemente en los grupos pequeños también hubo momentos de validación en la mayoría de grupos (en solo algunos grupos la comunicación fue pasiva), esto se notó cuando en la comunicación hubo procesos de corrección, los grupos cooperaron en la búsqueda de la verdad; configuraron sus saberes establecidos en la fase de acción y formulación y se enfrentaron en desacuerdos respecto al conocimiento (Brousseau, 2007) para consolidar una respuesta por grupo, ya en el momento de socialización con todos los estudiantes se presenció más a fondo como cada grupo tomó una postura respecto a cada una de las cónicas y cuando se exponían los resultados, en caso de notar desacuerdos, los otros grupos pedían demostraciones o ejemplos que corroboraran las respuestas.

Hasta este punto gran parte de la actividad se desarrolló de forma autónoma con una intervención mínima del docente, lo que deja ver que hubo una devolución del conocimiento y este se dio por "la producción libre del alumno en sus relaciones con un medio a-didáctico" (Brousseau, 2007, p. 85) y en determinados momentos la a-didácticidad se dio cuando los estudiantes investigaban cuestiones del problema que no estaban contemplados en la situación (como los planteamientos de E3 y E7 respecto a la parábola, E5, E6, y E7 respecto a la circunferencia y E7 respecto al comportamiento de la elipse cuando sus focos se modificaban).

Para el proceso de institucionalización, fue necesario retomar las producciones de los estudiantes, según Brousseau (2007) los estudiantes se deben dar cuenta de lo que han hecho, se debe describir lo que ha sucedido y como está vinculado al conocimiento esperado, como se mencionó anteriormente, en esta fase se redefinieron el lenguaje verbal de los lugares geométricos conforme la teoría, se hizo énfasis en las partes primordiales de las cónicas, que muchas veces por el trabajo algorítmico no se contempla y se aclararon dudas respecto a las situaciones no previstas, aclarando por qué se daban esos comportamientos gráficos.

Respecto a los procesos de tratamiento y conversión desarrollados por los estudiantes durante esta situación didáctica encontramos en la circunferencia y la parábola: del registro verbal→registro gráfico y del registro gráfico→ registro verbal, mientras que en la elipse y la hipérbola encontramos: del registro gráfico → registro numérico y del registro numérico→ registro verbal, según Duval (2017) un estudiante desarrolla actividad matemática cuando transforma representaciones semióticas en otras representaciones para obtener nueva información y resolver problemas.

Ciclo II de IA

Momento de planeación

Con base en los resultados del primer ciclo, para efectos del segundo ciclo de IA en la implementación de las situaciones didácticas en otras métricas, se realizaron sesiones independientes con cada uno de los tres grupos (en diferentes horarios), y se citaron a una siguiente sesión para la institucionalización del conocimiento, esto por motivos de tener un acercamiento más detallado de la interacción que se daba entre los estudiantes alrededor de las situaciones planteadas. Como se estipuló en el diseño metodológico, cada uno de los grupos trabajó con una situación diferente hasta la fase de validación en sesiones de 2 horas aproximadamente.

Reflexión ciclo II de IA

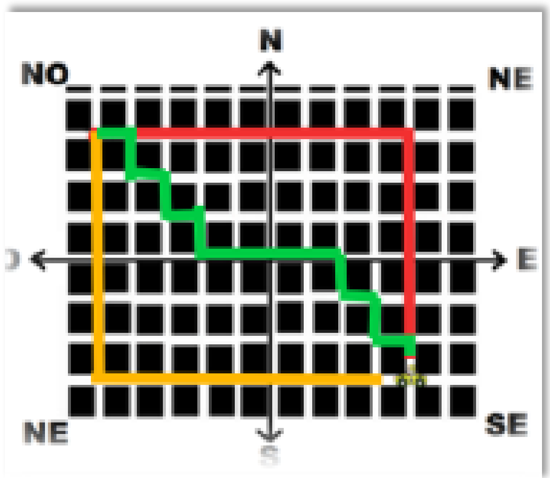
Situación Didáctica en la Métrica del Taxi (E1-E2-E3). (ver anexo: Situaciones didácticas – Métrica del taxi)

Fase de Acción. La metodología de trabajo para esta situación fue la siguiente: para la fase de acción cada estudiante trabajó en una sala individualizada, luego para la fase de formulación y validación los tres estudiantes vuelven a sesión conjunta. Para poder responder a esta situación didáctica los estudiantes se valieron de las herramientas de edición de pdf y también utilizaron las herramientas de edición de Paint.

La primera parte (ver Parte I en anexos: Situaciones didácticas – Métrica del taxi) de la situación didáctica con la métrica del taxista estaba referida a la familiarización con esta métrica, se propusieron una serie de problemas en donde se preguntaba sobre los posibles recorridos entre dos puntos de una ciudad por calles y carreras y el resultado fue satisfactorio, los tres estudiantes comprendieron la manera de como medir y pudieron deducir cual de todos esos posibles recorridos era el más corto, también reconocieron que si no existiesen las cuadras en la ciudad, la distancia más corta sería la magnitud del segmento diagonal que une los dos puntos. E1 (ver Figura 35) por su parte, escogió la distancia verde como la más corta entre los dos puntos de la ciudad, argumentando lo siguiente "*para mí la distancia más corta es esta (indicando la de color verde) por que se parece a la diagonal, que sería por ovias razones la más corta*".

Figura 35

Mediciones con la métrica del taxi de E1

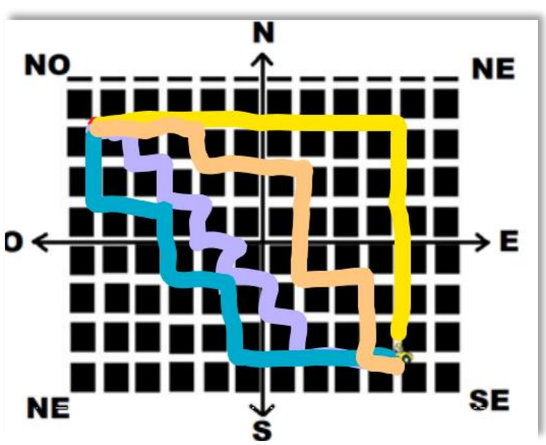


Fuente: Elaborado por estudiante E1.

E2 basó su argumento en demostrar que cada uno de los caminos que había marcado median igual por lo que concluyó que "*no importa el camino que se escoja todos van a medir lo mismo*", E2 se estaba movilizando por los caminos contenidos en el cuadrilátero que tiene como vértices opuestos el punto de partida y el punto de llegada, si los recorridos no tomaban movimientos de retroceso, el resultado de las cuadras siempre seria el mismo.

Figura 36

Mediciones con la métrica del taxi de E2

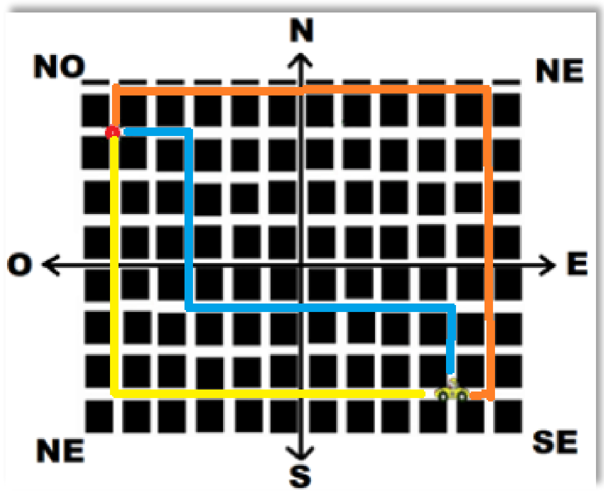


Fuente: Elaborado por estudiante E2.

Finalmente, E3, en su desarrollo mostró trayectorias que, si podían diferir en medidas, su argumento fue el siguiente "*la trayectoria de color amarillo es la más corta porque es la que menos tiene giros o vueltas y por ende durará menos tiempo*".

Figura 37

Mediciones con la métrica del taxi de E3



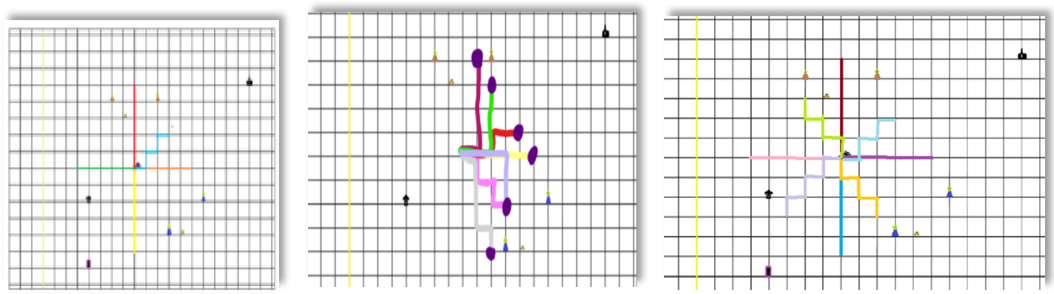
Fuente: Elaborado por estudiante E3.

En estos argumentos se puede evidenciar tres naturalezas diferentes de concepción de las matemáticas, por un lado, E1 enfoca sus producciones y respuestas conforme a la métrica euclidiana, E2 basa sus respuestas en la interacción con el medio y E3 refuerza sus argumentos con nociones de la vida real.

Para la segunda parte de la situación didáctica relacionada con el tratamiento de las cónicas con la métrica del taxi, respecto a la circunferencia en el problema de la gasolinera (ver Ítem A-Parte II en anexos: Situaciones didácticas – Métrica del taxi), se evidencia que los tres estudiantes comprendieron el problema ubicando puntos acordes que satisfacían las condiciones de distancias establecidas, pero en los tres casos fueron parciales las ubicaciones, es decir los estudiantes se limitaron a solo ubicar algunos puntos como se evidencia en las siguientes figuras.

Figura 38

Puntos de gasolineras de E1, E2 y E3

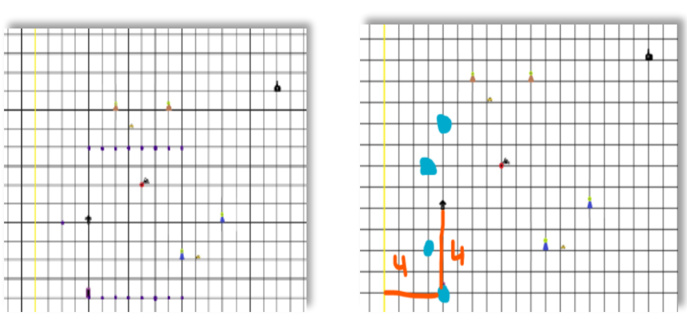


Fuente: Elaborado por estudiantes E1, E2 y E3.

En cuanto a la construcción de la parábola, relacionado con el problemas de lugares de arriendo (ver Ítem B-Parte II en anexos: Situaciones didácticas – Métrica del taxi). E1 desarrollo una aproximación muy cercana a lo que correspondería el lugar geométrico de las parábola en la métrica del taxi manifestando que: "*encontré primero un punto que sirve de arriendo y está a dos cuadras de la universidad y de la avenida, luego encontré una serie de arriendos que se organizan en una línea horizontal, para ser exactos en dos líneas horizontales y si la ciudad fuera más grande, estos puntos se seguirían extendiendo, son como dos rectas paralelas*". Por otro lado, E2 solo ubicó algunos puntos y demostró sus argumentos escribiendo en la guía que la condición de las distancias con el lugar de arriendo satisface la condición.

Figura 39

Lugares para tomar arriendo por E1 y E2

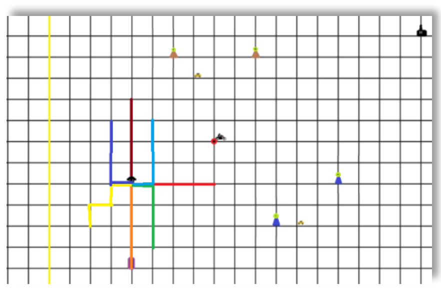


Fuente: Elaborado por estudiantes E1 y E2.

E3 abordó este problema de otra manera, argumentando que los puntos que ubicó "*son los posibles lugares en los cuales podría ser la ubicación del apartamento ya que la universidad está a 4 cuadras de la avenida y por tanto el apartamento debe estar ubicado a 4 cuadras de la universidad*". Es evidente que su desarrollo no tuvo en cuenta la condición de igualdad de distancias entre el apartamento y la universidad y el apartamento con la avenida, se basó en la distancia entre la universidad y la avenida (foco y directriz respectivamente) y asumió esta distancia como una constante que debía mantenerse para ubicar el apartamento, similar a la argumentación que utilizó en el problema de la gasolinera (circunferencia en la métrica del taxi).

Figura 40

Lugares para tomar arriendo según E3

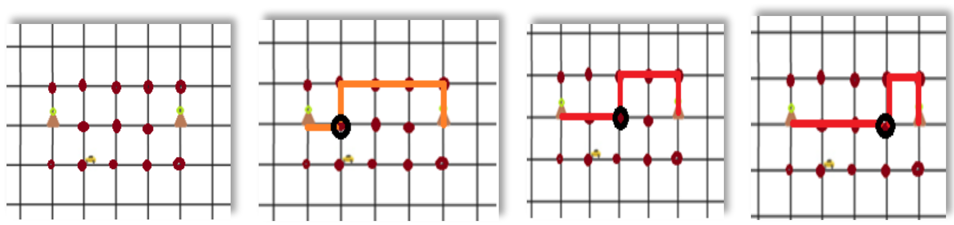


Fuente: Elaborado por estudiante E3.

En el problema de las antenas de señal relacionado con el lugar geométrico de la elipse (ver Ítem C-Parte II en anexos: Situaciones didácticas – Métrica del taxi), donde se esperaba que el estudiante ubicara diferentes taxis en el plano de tal manera que la suma de las distancia del taxi a las dos antenas -focos- fuera de 6 cuadras, solo E3 tuvo una aproximación muy cercana a los puntos que satisfacen el lugar geométrico, el procedimiento que siguió fue primero encontrar algunos puntos en la parte inferior y por propiedad reflexiva ubicó puntos en la parte superior, y puso otros puntos entre las dos antenas, argumentando que estos también cumplían la condición, siguiendo el proceso a detalle de E3: había reconocido fácilmente la propiedad reflexiva pero complementó su respuesta con otros puntos que satisfacían la condición que la suma fuera 6 cuadras pero aplicando un estrategia de medida con más movimientos horizontales y verticales, cuando se le preguntó por esta respuesta E3 manifestó: "*profe para mí, en estos puntos hay interferencia también (indicando los puntos entre las dos antenas) porque si te das cuenta yo puedo tomar este recorrido que me da 5, y este otro recorrido que me da 1 y la suma sería 6 que cumpliría con la condición de las antenas* (ver Figura 41)", con este argumento no hay contradicción respecto al enunciado pero genera un obstáculo en la obtención de la figura esperada.

Figura 41

Análisis de elipse por E3



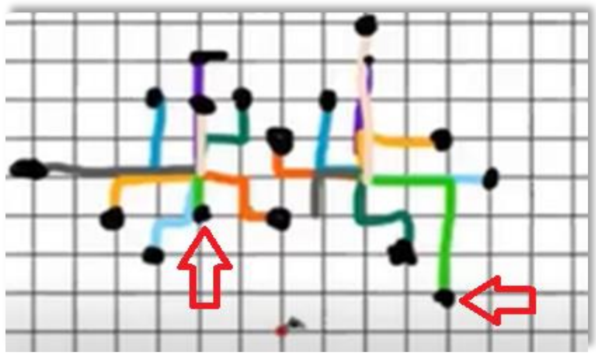
Fuente: Elaborado por estudiante E3.

E2 por su parte interpretó el problema desde otra perspectiva, ubicó puntos siguiendo este razonamiento: primero ubica un punto que esté a una distancia entre una cuadra y cinco cuadras de la primera antena, luego ubica otro punto que esté entre este mismo rango de distancia y finalmente suma las dos distancias de tal forma que la suma sea 6.

E2 en su sustentacion explica lo siguiente: "p*or ejemplo en estos dos puntos el taxi recibiría señal* (ver Figura 42) *por que el primero esta a una distancia de una cuadra de la primera antena y el segundo punto esta a 5 cuadras de la segunda antena, si sumamos los dos resultados nos daría 6 cuadras*", lo que permite concluir que E2 estaba analizando los lugares geométricos como puntos independientes de los dos focos, cuando la actividad pedía que se ubicaran puntos teniendo en cuenta simultanemente las dos distancias. E1 por su parte no comprendió el problema y decidió no responderlo.

Figura 42

Análisis de elipse según E2



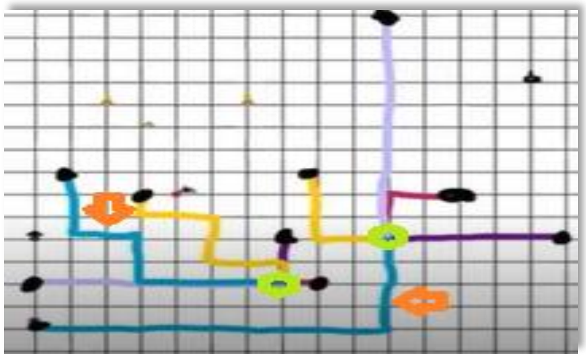
Fuente: Elaborado por estudiante E2.

Para la parte de la hipérbola (ver Ítem D-Parte II en anexos: Situaciones didácticas – Métrica del taxi), ninguno de los tres estudiantes logró detallar la figura esperada, aunque manifestaron entender el enunciado y se limitaron a ubicar solo algunos puntos que posiblemente cumplían la condición. E1 fue el único estudiante que logró ubicar 4 puntos que satisfacían correctamente la condición, por su parte E2 y E3 similarmente como habían abordado el problema de la elipse, lo utilizaron también en este problema de las antenas de interferencia.

E2 asumiendo puntos diferentes que al restar sus distancias daba como resultado el valor de 3 cuadras, y E3 volviendo a realizar la medición de las calles sin considerar la distancia mínima del punto a las antenas. E2 manifiesta: "*por ejemplo estas dos distancias son* (ver Figura 43) *de 11 cuadras y 14 cuadras respectivamente, al restar las dos distancias obtengo 3 cuadras, y así sucesivamente con los recorridos indicados con el mismo color*"

Figura 43

Análisis de hipérbola por E2

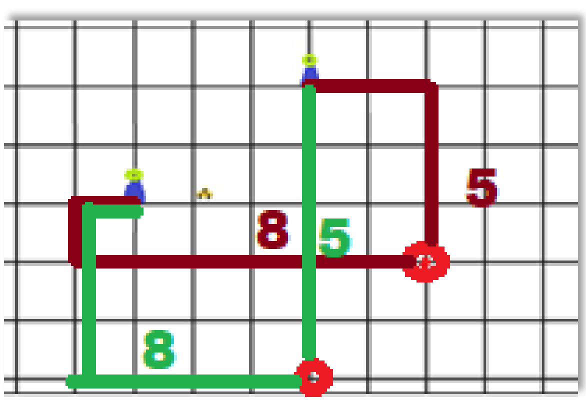


Fuente: Elaborado por estudiante E2.

E3 en cambio menciona "*profe yo solo encontré dos puntos* (ver Figura 44) *que al restarse me dieran tres, por ejemplo, esta distancia me da 8 cuadras respecto a esta antena y 5 cuadras respecto a la otra, así que al restarse da 3 cuadras, o este otro punto también cumple con la condición de 8 cuadras y 5 cuadras, pero no encuentra más puntos con esta condición profe*" bajo esta premisa el obstáculo de la medición seguía prevaleciendo como ocurrió en el problema de las antenas de señal.

Figura 44

Análisis de hipérbola por E3

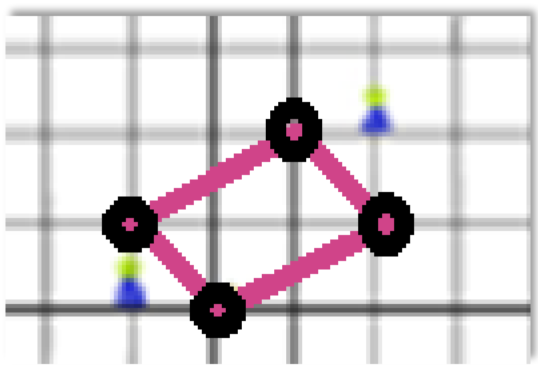


Fuente: Elaborado por estudiante E3.

E1 encontró 4 puntos que realmente si satisfacían la condición, manifestó que lo primero que analizó fue en el plano la posición del taxi cercano a la primera antena, al darse cuenta que cumplía con la condición de resta, ubicó por simetría los otros tres puntos y concluyó de forma inmediata que se trataba de un paralelogramo.

Figura 45

Análisis de hipérbola por E1



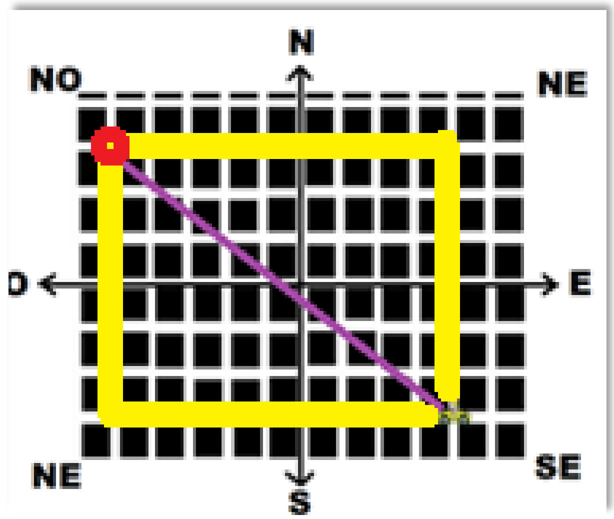
Fuente: Elaborado por estudiante E1.

Fase de Formulación y Validación. Luego del trabajo individual en sesión conjunta se disponen a trabajar los tres estudiantes, quienes en un primer momento comunicarían a sus compañeros los resultados obtenidos en cada uno de los apartados del problema, luego validaron una respuesta para cada uno de los casos, y en el proceso de institucionalización un representante expone los resultados, para esta fase los estudiantes compartieron por WhatsApp las imágenes de los desarrollos para que solo un miembro del grupo fuera quien presentara la pantalla y desde esa pantalla se desarrollaron los análisis.

Respecto a la forma de medición del taxista los tres estudiantes coincidieron en el análisis y pudieron concretar que "*la distancia mínima que hay entre los dos puntos no puede sobresalir del cuadrado donde cada puntico es una esquina en contra, si no existieran las cuadras, la distancia mínima entre los puntos sería una diagonal*"

Figura 46

Análisis de métrica del taxista



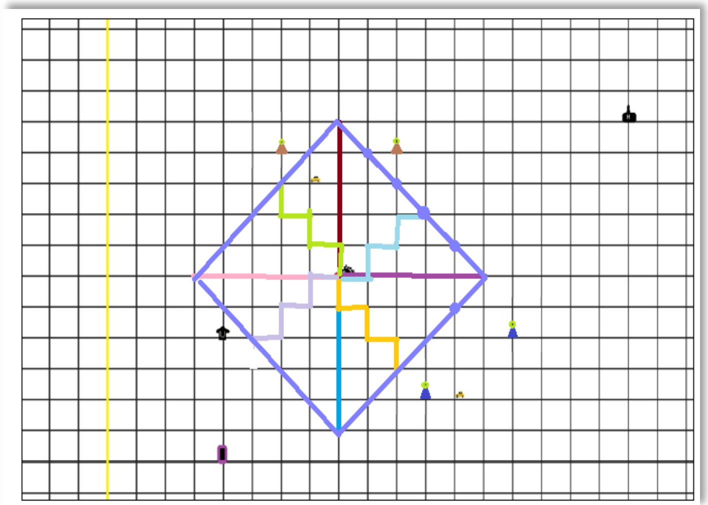
Fuente: Elaborado por estudiantes E1, E2 y E3.

Para el problema de la gasolinera se llegó a un conceso de la siguiente manera:

E3: Los tres dibujos se parecen mucho, solo que E2 y yo lo analizamos para solo un lado, en cambio E1 lo hizo con la otra mitad de gasolineras.
E1: pues yo ubiqué estos puntos, pero no estoy seguro si falten más.
E3: Siguiendo tu idea, si se podría agregar más puntos donde posiblemente quedarían gasolineras por ejemplo estos (indica en la pantalla otros puntos).
E1: Si, tienes razón, si los unimos estaríamos formando como una especie de rombo.
E3: ¿Esta podría ser la generalización?
E2: Complementemos esa generalización comentando que son como los puntos donde la gasolinera queda a 5 cuadras de la ciudad.
E1: Yo creería que la generalización está relacionada con las cónicas, esto tiene mucho que ver con la clase pasada.
E2: Claro, cada situación es como una cónica y esta vendría siendo la circunferencia.
E3: Si, son las mismas condiciones, el problema del apartamento vendría siendo la parábola.
E1: Y los dos últimos vendrían siendo elipse e hipérbola.
E2: pues ahorita comprobamos esto, pero si se me hace.
E3: Entonces en el archivo Word escribamos esto, y también pongamos como quedaría la figura de estas gasolineras.

Figura 47

Consenso final de circunferencia en métrica del taxi



Fuente: Elaborado por estudiantes E1, E2 y E3.

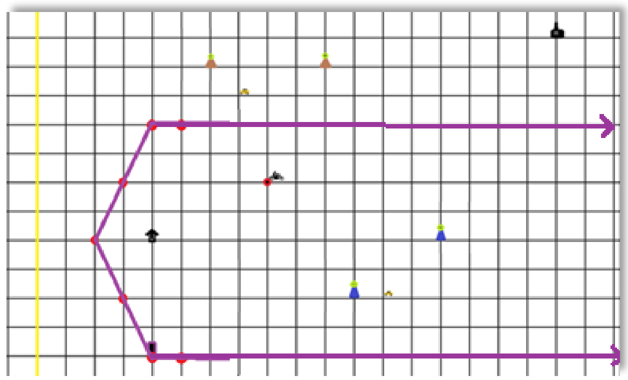
De lo anterior se puede concluir que el proceso de validación fue efectivo, el grupo alcanzó el conocimiento esperado y relacionaron sus producciones a las cónicas, por lo que en adelante sus argumentaciones estaban ligadas al concepto del lugar geométrico de estas figuras.

Para el caso de la parábola, E1 y E2 tenían resultados muy aproximados a la figura, y estos se encargaron de aclarar los análisis de E3 de la siguiente manera:

E3: los puntos donde puede quedar el apartamento considero que son estos (indicando en la pantalla sus resultados), pero la verdad si esto es una parábola, para mi tiene más forma nuevamente de rombo.
E1: No E3, si te das cuenta por ejemplo este punto (indicando un punto de la respuesta de E3 que no cumplía la condición) está a 4 cuadras de la universidad y a 8 cuadras de la avenida, por ende, no sirve.
E2: Yo lo analicé igual que E1, para mí en estos puntos se podría tomar arriendo (mostrando sus resultados)
E1: Podrías agregarle a esos puntos los siguiente, que están de forma lineal que también cumplen con la condición, y si el plano fuera más grande también seguirían los puntos este mismo rumbo.
E3: A ok, tienen razón, y si se parece a una parábola como en punta.
E1: Es correcto, el punto fijo es la universidad y la recta fija es la avenida.
E2: Unamos todos los puntos y los ponemos en el Word.

Figura 48

Parábola en la métrica del taxi



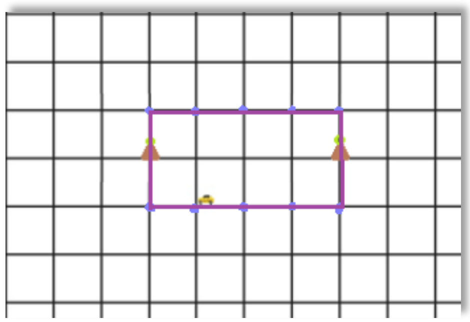
Fuente: Elaborado por estudiantes E1, E2 y E3.

Para el caso de la elipse, solo E3 tenía una idea acorde a los puntos que cumplían la condición del problema, como E1 no tenía respuesta, se limitó a escuchar los argumentos de E2 y E3, al final E3 pregunto a E1 cuál de las dos respuestas le había parecido más convincente y sucedió lo siguiente:

E1: Pues me parce más convincente la respuesta de E3, porque con E2 no se tiene una figura establecida, podría encontrar varios puntos a mi conveniencia que cumpliera la condición y no considero que esto sea lo que se pregunta.
E3: si, la verdad me confundí con este problema y creo que también con el siguiente (el de la hipérbola) porque lo analicé igual.
E1: Lo único que o me termina por convencer en la respuesta de E3, son los puntos interiores (los que estaban entre las antenas), porque haciendo la cuenta de las sumas no dan 6 cuadras.
E3: ven te explico, si tu mides no tomando esa dirección si no dando otro movimiento obtendrías el punto.
E1: pero entonces pasa lo de E2, yo me podría mover a mi conveniencia para obtener los puntos que necesite.
E3: ¿dejo solo los puntos de arriba y abajo no los centrales?
E2: yo creo que sí, toma una forma como de rectángulo.
E1: pero si supuestamente esta es la elipse, no se parece en nada.
E3: pero como cambiamos las condiciones, de pronto si sea la elipse.
E1: entonces dejemos el rectángulo como la respuesta.

Figura 49

Consenso de elipse en la métrica del taxi

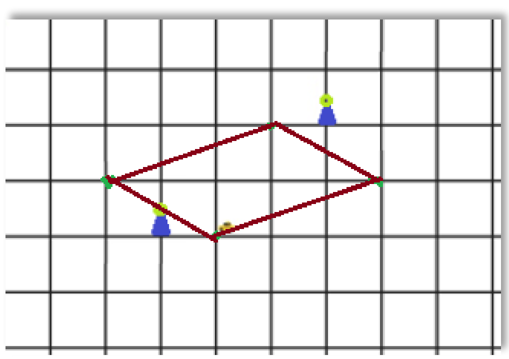


Fuente: Elaborado por estudiantes E1, E2 y E3.

Similarmente a lo anterior E2 y E3 ubicaron algunos puntos según la manera en que entendieron el problema, pero estos mismos se encargaron de falsear sus respuestas porque no eran coherentes con la forma de medir, entonces E1 explicó los cuatro puntos que encontró y demostró que cumplían la condición: en esta parte E2 y E3, tuvieron una participación pasiva, no objetaron respecto a estos argumentos y dejaron como solución de grupo el resultado de E1, aunque fueron conscientes que esta figura no se parecía en lo mínimo a la hipérbola, era claro que habían encontrado el espacio que hay entre las dos hojas de la hipérbola, pero la representación estaba muy lejos de la que era la hipérbola en la métrica del taxi.

Figura 50

Consenso final de hipérbola en métrica del taxi



Fuente: Elaborado por estudiantes E1, E2 y E3.

Situación Didáctica en la Métrica del Máximo (E4-E5). (ver anexo: Situaciones didácticas – Métrica del máximo)

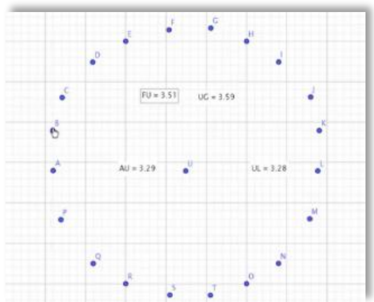
Fase de acción. Para el caso de la situación didáctica con la métrica del máximo trabajada con los estudiantes E4 y E5, en la parte I (ver Parte I en anexos: Situaciones didácticas – Métrica del Máximo) la situación se enfocó en familiarizar a los estudiantes con este tipo de métrica ejemplificando algunos casos particulares y ejercitando con problemas en donde se compara la métrica usual con la métrica del máximo, en esta parte el docente tuvo que intervenir puesto que notó una confusión en el estudiante E4, después de esto los estudiantes respondieron correctamente los ejercicios de distancias entre dos puntos aplicando la fórmula de la métrica usual (por teorema de Pitágoras) y la estrategia del máximo.

En la parte II (ver Parte II en anexos: Situaciones didácticas – Métrica del Máximo), se exponen los lugares geométricos formalmente y los estudiantes deben ubicar diferentes puntos con la métrica del máximo que cumplan esta condición. Para el caso de la circunferencia (ver Ítem 1A-Parte II en anexos: Situaciones didácticas – Métrica del Máximo) E5 construyó una circunferencia en la métrica usual y en vista que no había contemplado la medida del máximo, el profesor intervino en la sala individual de E5, y se dio la siguiente conversación:

> *Profesor: ¿E5 cuál es tu distancia constante?*
> *E5: Es 3,5 maso menos profe,* (ver Figura 51) *pero me está quedando un poco desfasado (E5 comentaba esto indicando el radio de su circunferencia en la métrica usual)*
> *Profesor: ¿en la métrica del máximo este punto a que distancia esta del centro? (el docente preguntando por el punto específico "B" de la construcción de E5)*
> *E5: a profe en el máximo sería más o menos 3, por que los dos recorridos son 3 horizontal y creo que 1 vertical, por tanto, el mayor es 3 y esa sería la medida máxima.*
> *Profesor: Bien, si dices que es 3, los demás puntos deberían estar a 3 por que esa va ser tu distancia constante, por ejemplo, este otro punto en la métrica del máximo ¿a cuánto esta del centro? (el docente pregunta por el punto "E" de la construcción de E5)*
> *E5: Este punto está en la métrica del máximo a 3,3 más o menos profe, porque la otra medida vertical es de 1,5 y pues el mayor es 3,3. Pero creo que ya noté mi error profe, es más estos puntos me sirven (refiriéndose a los puntos "H", "O" y "R"), pero mejor voy a modificar el centro para tener valores más exactos.*

Figura 51

Aproximación incorrecta de E5 a circunferencia en métrica del máximo

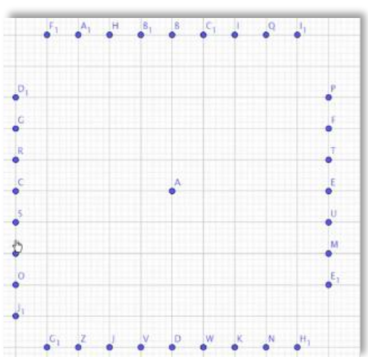


Fuente: Elaborado por estudiante E5.

Después de lo anterior E5 logra tener un primer acercamiento a la circunferencia en la métrica del máximo, pero argumenta que las esquinas del cuadrado no hacen parte de la circunferencia en razón de que las dos distancias (horizontal y vertical) son iguales.

Figura 52

Aproximación a circunferencia en métrica del máximo por E5

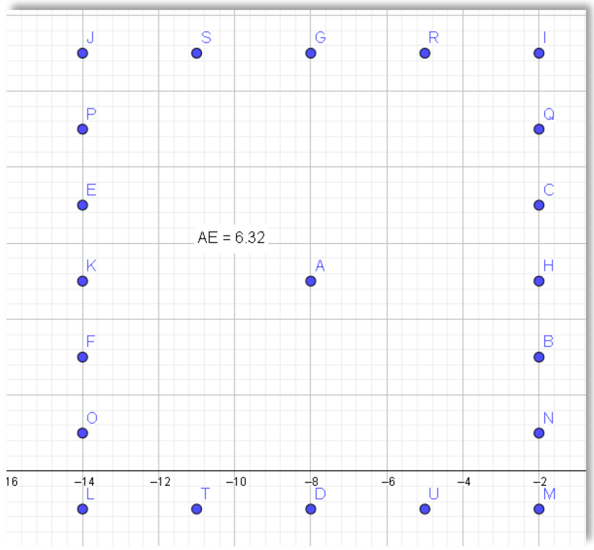


Fuente: Elaborado por estudiante E5.

E4 por su parte, a pesar de haber tenido dificultades en la primera parte con la definición de la métrica del máximo, ubicó algunos puntos que satisfacen la condición de circunferencia, pero argumentó al docente lo siguiente: "*Profe, sea como sea, no voy a obtener una circunferencia (refiriéndose a la circunferencia de la métrica usual), eso da como un cuadrado o una forma rectangular*"

Figura 53

Circunferencia en la métrica del máximo por E4

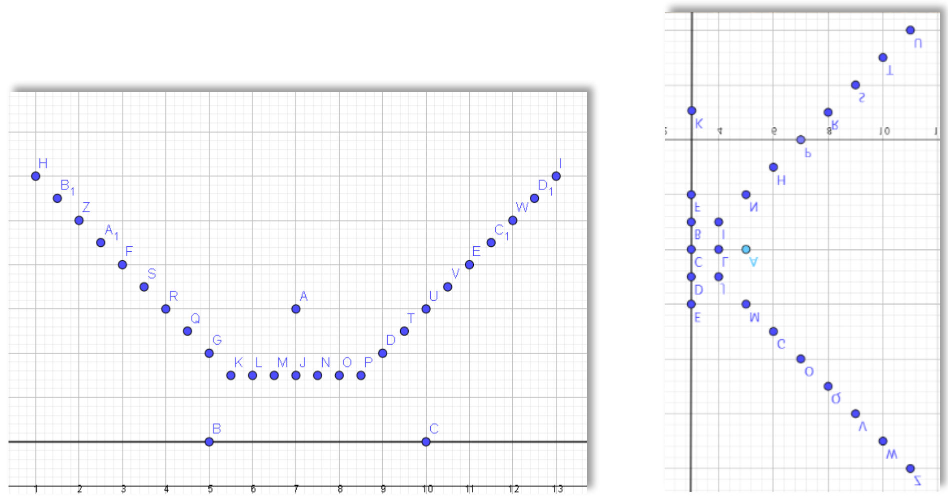


Fuente: Elaborado por estudiante E4.

Para el caso de la parábola (ver Ítem 1B-Parte II en anexos: Situaciones didácticas – Métrica del Máximo) los estudiantes desde su fase exploratoria pudieron obtener las figuras esperadas sin mayor dificultad, E4 manifestó que "*haber trabajado la parábola antes (refiriéndose a la situación didáctica 1) me hizo comprender más rápido sobre las partes importantes como la recta fija y el punto fijo, además se tenía que respetar la condición de igualdad de distancias, y con esta métrica (refiriéndose al máximo) fue más fácil encontrar un patrón de puntos*". E5 por su parte comentó: "*la forma que obtuve fue la de una taza de café, mientras que la vez pasada (refiriéndose a la parábola de la métrica usual) era como una copa de vino, considero que me quedo bien, porque las formas guardan cierto parecido*"

Figura 54

Parábola en la métrica del máximo por E4 y E5

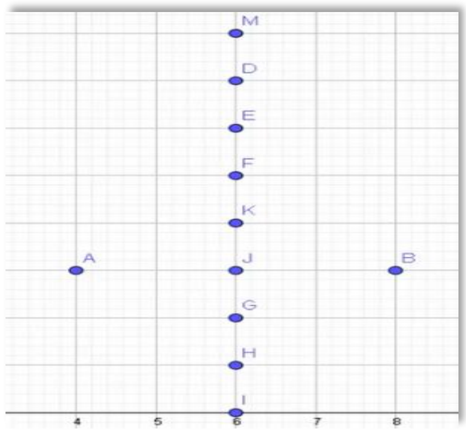


Fuente: Elaborado por estudiantes E4 y E5.

Para el caso de la elipse (ver Ítem 1C-Parte II en anexos: Situaciones didácticas – Métrica del Máximo) también se presentó un comportamiento similar en el análisis, aunque ya se tenía prevista la forma en la métrica usual, cada estudiante encontró un patrón de línea recta vertical que satisfacía la condición de distancias, este análisis iba a ser crucial en la fase de formulación y validación, en esto se preguntó a E4 sobre su construcción y E4 respondió "*profe si te das cuenta yo tome como suma fija 4, por ende los puntos que me sirven son los siguientes* (Figura 55*), todos estos al sumar sus distancias máximas es 4*", aunque el razonamiento era correcto respecto a la sumatoria, no se estaba contemplando una característica fundamental de las elipses y es que la distancia de los dos focos debe ser menor a la constante de suma, y E4 estaba asumiendo igual estas dos constantes, aparte de esto cuando concretó su desarrollo ubicó más puntos en línea recta creyendo que la figura hacía referencia a una línea recta, aun cuando los puntos no verificaran la constante de suma.

Figura 55

Aproximación a elipse en la métrica del máximo por E4

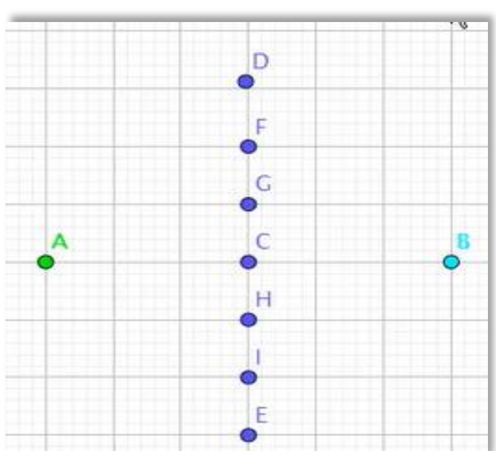


Fuente: Elaborado por estudiante E4.

Similarmente E5 manejó un análisis muy parecido, pero en su resultado final solo contempló los puntos que cumplían la condición de suma constante y comentó: "*profe inclusive en esta elipse los focos también hacen parte de la figura porque si la constante suma es 6 y yo ubico un punto por ejemplo en el foco A, la distancia al primer foco lógicamente es 0 y al segundo foco es 6 y 0 más 6 es 6 satisfaciendo la condición*"

Figura 56

Elipse en la métrica del máximo según E5

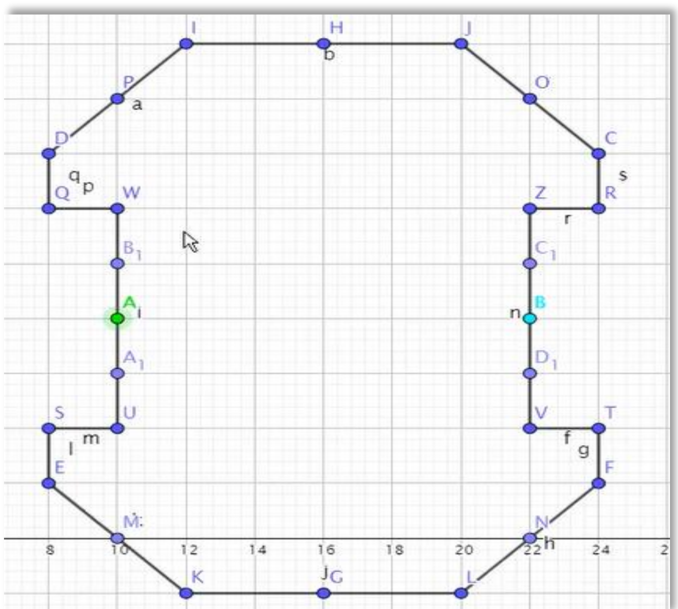


Fuente: Elaborado por estudiante E5.

Para el caso de la hipérbola (ver Ítem 1D-Parte II en anexos: Situaciones didácticas – Métrica del Máximo), E4 no comprendió como ubicar los puntos y decidió esperar la fase de formulación para reorganizar sus ideas. Por otro lado, E5 comprendió la ubicación de algunos puntos, pero dio mayor importancia a la condición de que la diferencia de distancias fuera menor a la distancia de los focos y basándose en esto ubicó varios puntos que al realizar las respectivas restas dieran menor que la distancia entre los focos (menor a 6 en el caso de E5), olvidando por completo la condición de que dicha resta debía ser constante.

Figura 57

Interpretación incorrecta de hipérbola en métrica del máximo



Fuente: Elaborado por estudiante E5.

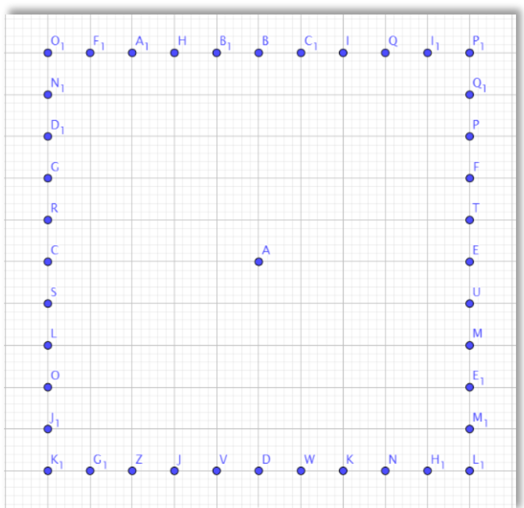
Fase de Formulación y Validación. En esta fase de socialización, respecto a la circunferencia E4 y E5 llegaron al consenso de que se trataba de un cuadrado, en este momento E4 aclaró la duda que tenía E5 respecto a los puntos de las esquinas del cuadrado, la distancia del centro a estas esquinas daba igual tanto en la medida horizontal como en la vertical, en cuanto a esto se dio la siguiente interacción:

E4: E5 yo entiendo tu duda, en tu caso la distancia constante era 5, y para los puntos esquineros te daba 5 en horizontal y 5 en vertical verdad.
E5: Si E4, lo que pasa es que como son iguales no sé cuál es la máxima, y en mi opinión no va nada en esa parte.
E4: te hago la pregunta entre 5 y 5 ¿quién es el máximo?
E5: Pues son iguales, no hay máximo
E4: no, lo máximo entre dos números iguales es el mismo número, porque no hay un valor más grande para decir lo contrario.
E5: te entiendo, pero entonces se podría dar esa aclaración en la distancia mejor, pues considero que aparte de decir que la distancia entre dos puntos es el máximo se debería poner la condición de que si son iguales el máximo sería el mismo valor que se repite.

Por lo anterior, se concreta como grupo la siguiente respuesta gráfica:

Figura 58

Consenso de circunferencia en métrica del máximo

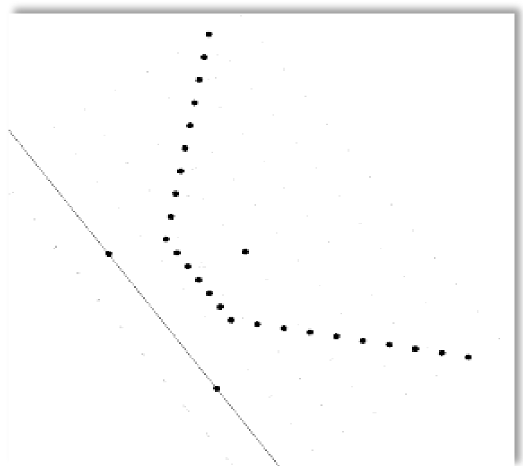


Fuente: Elaborado por estudiantes E4 y E5.

El consenso de la parábola fue más rápido, juntos obtuvieron una representación gráfica similar, en esto el docente les pone el siguiente interrogante, *y si la recta fija fuese en diagonal ¿cómo daría la representación gráfica?*, los estudiantes después de analizar este interrogante y valiéndose de la similitud de sus construcciones respondieron que quedaría la misma figura pero inclinada según la recta, lo que deja ver el razonamiento inductivo que tuvieron los estudiantes, sin necesidad de verificar punto por punto lo que sucedería con la parábola cuando se maneja una directriz diagonal, concluyeron que se mantendría la figura igual, ya que los dos casos particulares de recta horizontal y vertical se mantenía igual: razonamiento que en la institucionalización tuvo que ser negado debido a que por la naturaleza de esta métrica, la forma de la parábola cambia cuando la directriz es diagonal, la forma que toma es similar a la de una parábola en la métrica del taxi.

Figura 59

Parábola en métrica del máximo con directriz diagonal según E4 y E5



Fuente: Elaborado por estudiantes E4 y E5.

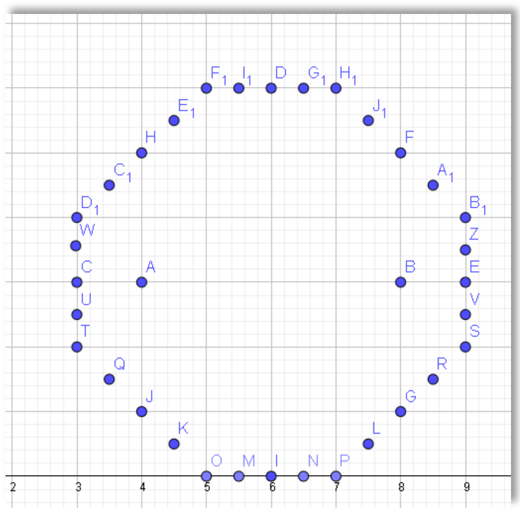
Respecto a la elipse, los dos estudiantes tuvieron una forma muy similar de abordar el problema, pero E5 convenció a E4 de que la solución de él estaba incorrecta, demostrándole que algunos puntos que había ubicado en la recta no satisfacían la condición de la suma constante que había asumido, por tanto, se estableció que la respuesta más acertada era la de E5, en esto el docente intervino para direccionar la construcción correcta de esta figura, realizando el siguiente comentario:

Profesor: Chicos, ¿ustedes tuvieron en cuenta la condición de que la suma debía ser mayor que la distancia entre los focos?, esa condición estaba en el problema de la guía.
E5: No profe, verdad. Yo no tuve en cuenta esa condición.
E4: Con esa condición prácticamente toda la figura cambia.
E5: E4 armemos rápido la figura con la condición que nos dice el profe.

Después de acatar esta aclaración por parte del docente, los estudiantes reorganizaron sus ideas respecto a la figura y logran la construcción correcta de la elipse, a la que denominaron *elipse octagonal* (para este caso construyeron una elipse de constante de suma 6 que efectivamente superaba la distancia entre los dos focos que equivalía a 4 unidades).

Figura 60

Consenso final de elipse en métrica del máximo



Fuente: Elaborado por estudiantes E4 y E5.

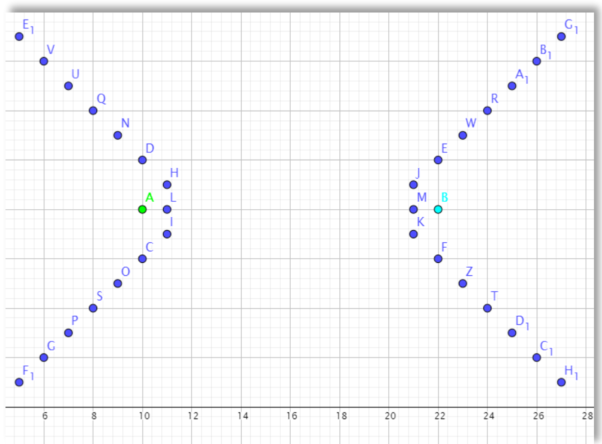
Para la hipérbola, E4 optó por una participación pasiva, escuchando todo lo que sustentaba E5 en vista de que el no desarrolló esta parte de la situación, en esto el docente volvió a intervenir en la socialización de los estudiantes comentando lo siguiente:

Profesor: Chicos igual que en la elipse, ¿tuvieron en cuenta todas las condiciones de la hipérbola?
E5: Si profe, la condición de que la distancia entre los focos tenía que ser mayor que las restas si la tuve en cuenta.
Profesor: ¿Qué otra condición es importante E4?
E4: Pues no estoy seguro profe.
Profesor: lee de nuevo el lugar geométrico de la hipérbola en voz alta (a continuación, E4 lee esta definición)
E5: claro profe la más importante.
E4: las restas constantes ¿verdad?
E5: Si E5, tocó también arreglar esta figura, gracias profe.

A continuación, E4 y E5 construyen una nueva versión de hipérbola teniendo en cuenta todas las condiciones, inclusive la más importante, de las restas constantes, y basándose en los resultados de la hipérbola de la situación didáctica 1, desarrollaron la siguiente figura.

Figura 61

Hipérbola en métrica del máximo



Fuente: Elaborado por estudiantes E4 y E5.

Situación Didáctica en la Métrica Discreta (E6-E7). (ver anexo: Situaciones didácticas – Métrica discreta)

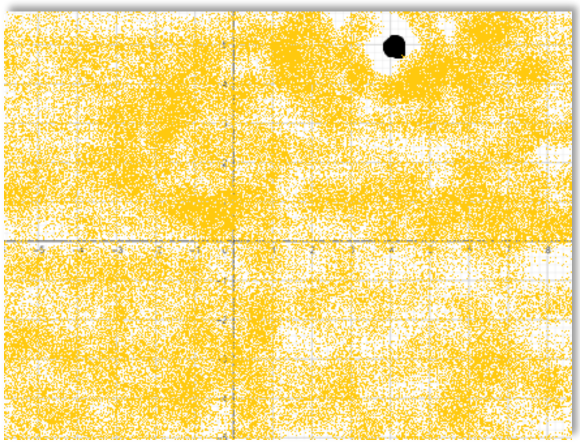
Fase de Acción. Respecto a la situación didáctica 4, relacionada con la métrica discreta o trivial, antes de iniciar el desarrollo de la situación, el docente decide realizar una familiarización de esta forma de medida con los estudiantes y en base a las definiciones de lugar geométrico obtenidos en la situación didáctica 1, los estudiantes debían construir 4 casos específicos de cónicas con esta métrica.

Aparte de que el docente socializara las condiciones de la métrica discreta, fue necesario con los estudiantes reforzar las características más importantes de cada una de las cónicas, como lo era las condiciones de distancias que se debían tener en cuenta, las partes específicas de estas curvas como focos, centro, directriz, entre otros.

Previo a esta introducción, E6 y E7 deciden desarrollar esta guía por medio del editor Paint, para el caso del problema de la circunferencia (ver Ítem A-Parte I en anexos: Situaciones didácticas – Métrica discreta), E6 manifestó lo siguiente *"a pesar de ser una métrica fácil porque solo maneja 0 y 1, no entiendo bien el enunciado, porque ubico mi centro, pero me pide un radio de 3 unidades, cuando la única medida que se puede es 0 y 1, entonces no entiendo que forma da , o que puntos cumplen: por esta razón, solo puse un punto y todo lo que está pintado alrededor representa puntos que están a una misma distancia, pero no es 3 si no 1, pero no entiendo si está bien porque una circunferencia es redonda*", por otro lado E7, no respondió en esta parte, manifestando que el radio de 3 unidades lo confundió y decidió proseguir con los otros problemas.

Figura 62

Circunferencia en métrica discreta según E6

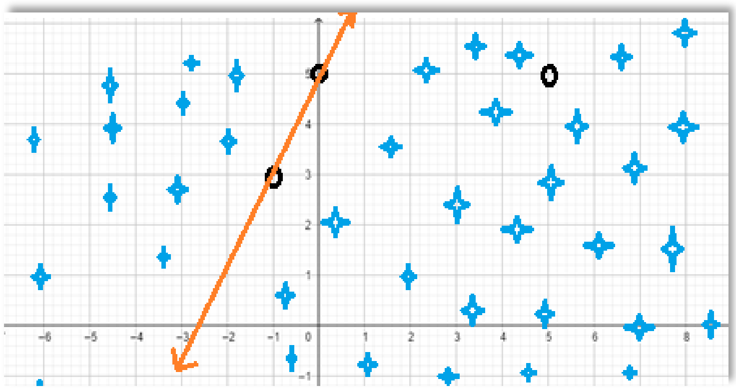


Fuente: Elaborado por estudiante E6.

En la parte de la parábola (ver Ítem B-Parte I en anexos: Situaciones didácticas – Métrica discreta), E6 presenta dificultades para la gráfica de la recta que se establece, mientras que E7 grafica esta recta utilizando tabla de valores. Para este caso, E7 tuvo un acercamiento a la representación gráfica muy certero afirmando que la parábola *"vienen siendo todos los punticos* *del plano, porque están distanciados a 1 tanto de la recta como del punto, y como es la misma medida todos los puntos sirven".*

Figura 63

Parábola en métrica discreta según E7



Fuente: Elaborado por estudiante E7.

Para el caso de la elipse y la hipérbola (ver Ítem C y D-Parte I en anexos: Situaciones didácticas – Métrica discreta), ninguno de los estudiantes desarrolló esta parte, en términos generales mencionaron que la métrica en realidad estaba muy confusa y la formas que habían obtenido no se parecían a las que usualmente se manejan, por esta razón se decide pasar directamente a la fase de formulación y validación.

Fase de Formulación y Validación. Para esta parte, el docente decide tener un rol más activo debido a que notó al grupo de estudiantes muy confundidos respecto a la solución de la situación didáctica, para la parte de la circunferencia E6 expuso sus resultados a E7 y concretaron esta solución como la respuesta definitiva al problema, en ese momento el docente interviene:

Profesor: Chicos ¿lo que ustedes me muestran es la circunferencia de radio 3 unidades?
E6: No profe, es que no sabemos cómo representar las 3 unidades
E7: Pues por eso profe, yo no respondí, porque no entiendo cómo obtener 3 unidades a punta de medidas de 0 y 1.
Profesor: ¿este radio será posible?

E6: para mí no profe.
Profesor: revisen bien sus argumentos.
E7: Entonces ¿si se puede profe?
Profesor: solo revisen bien sus argumentos, y me comentan

Con esta intervención, los estudiantes decidieron plasmar dos conclusiones, la primera referida a la imposibilidad de poder construir la circunferencia con esas medidas, la otra era expresar que una circunferencia en la métrica discreta es todo el plano pintado, en esto el docente vuelve a intervenir:

Profesor: ¿y también serviría el centro de la circunferencia?
E7: Todos los puntos del plano sirven.
Profesor: ¿Cuál es la distancia entre el centro al centro?
E6: Cero profe, porque está en el mismo lugar
Profesor: Pregunto de nuevo ¿el centro haría parte de la circunferencia?
E6: considerando que la distancia constante que utilizamos es 1, yo diría que no.
E7: Sería entonces todo el plano pintado, menos el centro

Por medio de un diálogo socrático los estudiantes pudieron establecer que no había respuesta para el problema, pero también establecieron las condiciones para ser circunferencia en esta métrica.

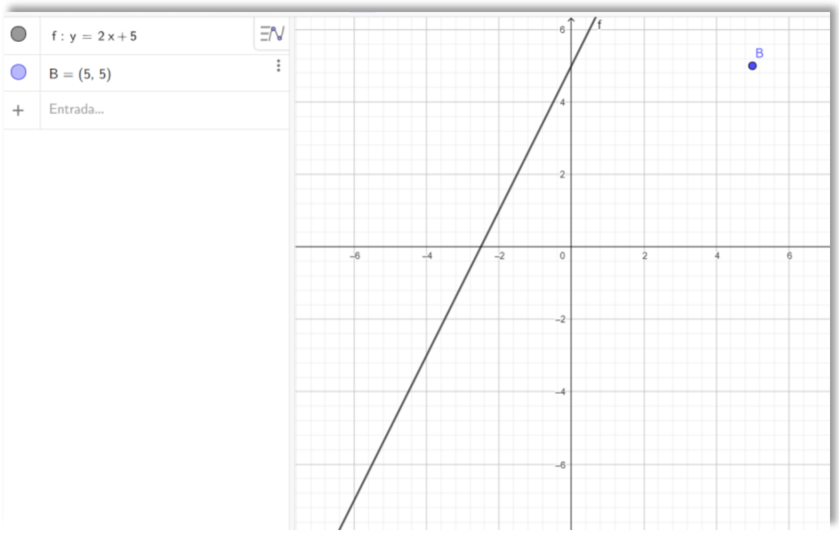
Para el caso de la parábola, E7 expuso sus resultados a E6, pero teniendo en cuenta las intervenciones anteriores del docente, recurre al siguiente diálogo:

E6: E7 tienes toda la razón con tu análisis, a mí la verdad se me olvidó como graficar una recta (risas), pero considero que debemos tener en cuenta las distancias de cero, como en la parte de la circunferencia.
E7: Si, por ejemplo, si nos ubicamos en el punto fijo, la distancia al punto fijo es cero, pero a la recta es 1.
E6: Es correcto, entonces la respuesta sería todos los puntos del plano menos el punto fijo (foco)

Bajo estos argumentos, el docente interviene nuevamente preguntando *¿los puntos de la recta también hacen parte de la parábola?,* a lo que responde E7*: pues la distancia de un punto de la recta al punto fijo es 1, y del punto a la recta es 1.* E6 interviene preguntando *¿Cuál es la distancia de un punto que está en la recta a la recta? Yo diría que es 0, porque está ubicado en* *la misma recta,* Por lo que E7 concluye: *entonces la parábola es todos los puntos del plano que no están en la recta y que no están en el centro.* Con esta conclusión el grupo decide organizar su respuesta representando el resultado en el GeoGebra y manifestando lo siguiente: La parábola es todo lo que está en blanco, excepto la recta y el punto (refiriéndose al punto fijo)

Figura 64

Consenso final de parábola en métrica discreta



Fuente: Elaborado por estudiantes E6 y E7.

En cuanto a la elipse y la hipérbola, debido a que ninguno abordó en la fase de acción estos problemas, el docente opto nuevamente por un diálogo socrático con los estudiantes, pero en base a preguntas problematizadoras.

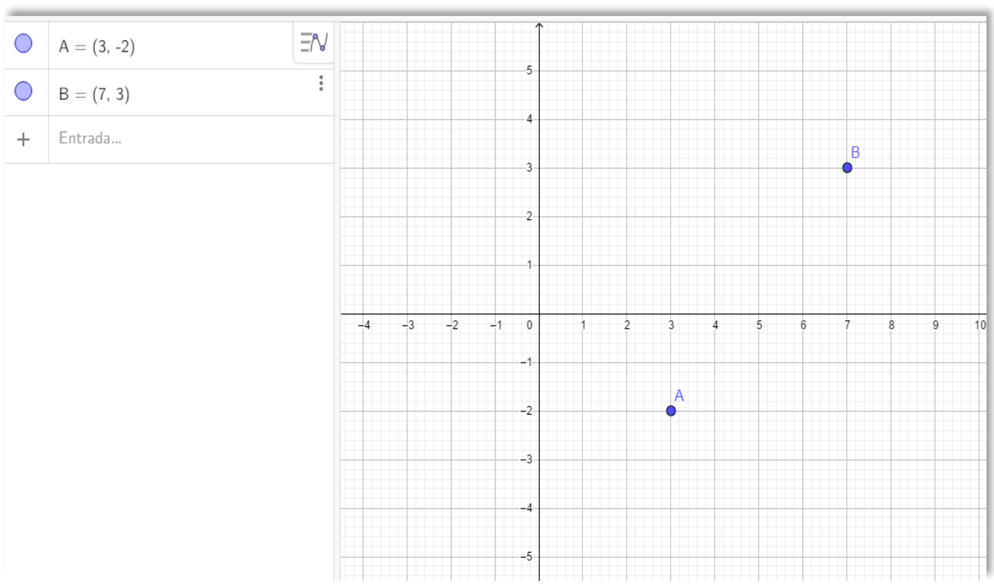
Profesor: ¿Cuál es la condición que deben cumplir los puntos que pertenecen a una elipse?
E6: La suma constante se debe cumplir profe.
E7: Y otra importante, que la distancia entre los focos debe ser menor a la suma constante, por eso me quedo mal mi problema la vez pasada (refiriéndose a su análisis de la elipse en la situación 1)
Profesor: Perfecto, entonces si los focos están en diferentes sitios, su distancia es 1 ¿verdad?
E6: Si profe, es decir que la suma constante debe ser mayor a 1.
Profesor: Piensen en cualquier punto del plano y hallen la suma constante.
E7: cualquier punto que elijas profe va dar 2 unidades al sumarla.

Profesor: ¿en qué lugares no sería posible que esta suma fuese 2?
E6: En los focos profe, porque si por ejemplo me ubico en un foco, la distancia de ese punto a ese foco es 0 y de ese foco al otro foco es 1, y al sumarlo me daría 1.
E7: Profe, creo que descubrí de nuevo algo.
Profesor: ¿Qué descubriste?
E7: pues en realidad es lo mismo que la vez pasada, si ubico un foco encima del otro foco, la distancia entre los focos es 0, y la elipse podrían ser todos los puntos de nuevo por que la suma constante es 2 y también se convierte en una circunferencia como la vez pasada (refiriéndose a la situación didáctica 1)

Con estos argumentos el grupo decide construir la representación de la elipse que se pedía en la guía desde el GeoGebra, argumentando lo siguiente: *La elipse es todo lo que está de blanco, ya que la suma constante es 2 y es mayor a la distancia de los focos*.

Figura 65

Consenso final de elipse en métrica discreta



Fuente: Elaborado por estudiantes E6 y E7.

Respecto a la hipérbola, los estudiantes tuvieron en cuenta lo anterior y las dos premisas: la primera relacionada con la constante de la resta y la segunda relacionada con que la distancia entre los focos debía ser mayor que la constante de resta, con esto se da la siguiente interacción:

E7: pensemos igual como antes (refiriéndose a la parábola en la métrica discreta), en puntos diferentes a los focos.

E6: listo, la resta sería 0, verdad
E7: Si, porque la distancia de cualquier punto al primer foco es de 1 y al segundo foco es de 1, entonces la resta sería 0.
E6: Bien, siempre dará cero y esa es la resta constante.
E7: la otra condición es que la distancia entre los dos focos debe ser mayor a esta constante, entonces si servirían estos puntos.
E6: vendría siendo igual que la elipse, no habría diferencia
E7: deberíamos preguntar al profe para estar seguros

En esta última parte el docente aclara otra característica importante, y es que la constante de resta debe ser un valor positivo, es decir un valor mayor a cero. Con lo anterior los estudiantes establecen que entonces las hipérbolas son imposibles, así como las circunferencias con un radio distinto a 1.

La evaluación final de este segundo ciclo de IA se representa a continuación:

Tabla 9

Análisis resultado esperado vs resultado de la práctica situación didáctica II, III. IV

	¿Logró el conocimiento esperado en fase de acción?				¿Logró el conocimiento esperado en fase de formulación?			
Estudiante	**C**	**P**	**E**	**H**	**C**	**P**	**E**	**H**
E1	2	1	4	2	1	1	1	2
E2	2	2	3	3	1	1	1	2
E3	2	3	2	3	1	1	1	2
E4	1	1	3	4	1	1	1	1
E5	2	1	3	3	1	1	1	1
E6	2	4	4	4	1	1	1	1
E7	4	2	4	4	1	1	1	1

Fuente: Elaboración propia.

En la evaluación general del proceso, se puede determinar que, en la fase de acción, se presentaron bastantes desequilibrios del conocimiento, en especial con la situación de la métrica discreta, también es claro notar que en la situación de la métrica del taxi al tratarse de una situación relacionada con ambientes semi reales, logró una acogida más favorable con los estudiantes y promovió el trabajo autónomo.

La fase de formulación y validación ayudó bastante en la reorganización de los conocimientos. Por otro lado, el rol del docente fue muy pasivo con la situación del taxi, nivel intermedio con la situación del máximo y con mayor participación en la métrica discreta. Las opiniones por parte de los estudiantes respecto a las situaciones didácticas implementadas fueron muy favorables.

Proceso de Institucionalización. Para el proceso de institucionalización, los tres grupos fueron citados a una sesión por zoom que duraría aproximadamente 30 min, la intención era recopilar los resultados de cada uno de los grupos y formalizar la definición de cónica como lugar geométrico, en este espacio también se aclararía dudas respecto a los resultados no alcanzados durante las fases de acción, formulación y validación, entre los principales aportes están:

- Estructuración completa del lugar geométrico de la elipse desde el lenguaje gráfico en la métrica del taxi.
- Consenso respecto al lugar geométrico de la hipérbola en la métrica del taxi.
- Parábola en la métrica del máximo cuando la directriz es diagonal.
- Lugar geométrico de la circunferencia en la métrica discreta cuando el radio es 0.
- Definiciones simbólicas de las cónicas como lugares geométricos.

Por medio de un cuadro comparativo se expusieron las diferentes figuras de las cónicas en las métricas trabajadas durante todo el proceso investigativo; los estudiantes ayudaron a construir dicho cuadro y expusieron a sus compañeros como abordaron los diferentes problemas y que obstáculos presentaron en la comprensión de los mismo.

Reflexión final Segundo ciclo de Investigación-Acción. Con el fin de favorecer los procesos de tratamiento y conversión de los lugares geométricos de las cónicas con el uso de diferentes métricas se aplicaron tres situaciones didácticas para afianzar el conocimiento logrado en el primer ciclo de IA a partir de otros contextos y nuevos problemas basados en el análisis del pensamiento espacial, la interpretación y la intuición.

Para el primer grupo se aplicó una situación basada en la métrica del taxi, los tratamientos y abordajes de esta situación desde la fase de acción fueron favorecedores para la construcción de los lugares geométricos de la circunferencia, la parábola y la elipse, mientras que el tratamiento en la hipérbola fue muy limitado.

Desde esta perspectiva se puede concluir que a diferencia de la fase de acción del ciclo I, en esta fase con la métrica del taxi el estudiante tuvo una aproximación más prometedora de los lugares geométricos en la adaptación a medios semi reales.

Para las fases de acción y validación los estudiantes aparte de informar sus producciones o escuchar los resultados de sus compañeros también se convirtieron en proponentes de conocimiento u oponentes según el caso (Brousseau, 2007), en específico con esta situación se logró vivenciar respecto a la dinámica de la actividad que cuando un estudiante exponía sus resultados, los otros integrantes del grupo realizaban aportes, preguntas o contraejemplos para constituir una respuesta más coherente al problema, efectivamente dos de las cuatro cónicas fueron desarrolladas según el conocimiento esperado (circunferencia y parábola), la elipse fue logrado casi en su totalidad pero la hipérbola solo se logró en un nivel intermedio.

Para la segunda situación didáctica basada en el tratamiento del lugar geométrico de las cónicas con el uso de la métrica del máximo, la intervención del docente se dio en varios momentos de la fase de acción, esto debido a que el grupo de estudiantes tuvo dificultad en comprender en un primer momento la estrategia de medida por medio de esta métrica, pero aclaradas estas dudas los estudiantes lograron desde la fase de acción una aproximación gráfica de la circunferencia y la parábola, por su parte en la fase de formulación y validación se lograron establecer las representaciones gráficas de la elipse y la hipérbola, aunque en estas últimas también tuvo que intervenir el docente para aclarar algunas cuestiones espaciales para que los estudiantes pudieran validar el conocimiento, se hizo más evidente una premisa del aprendizaje constructivista "se conoce en contra de un conocimiento anterior" (Brousseau, 2007, p. 46), esta métrica resulto compleja y los problemas de la situación estaban siendo trabajados desde la métrica euclidiana, además las formas obtenidas hacían creer a los estudiantes que estaban desarrollando de forma incorrecta la tarea (por ejemplo cuando E4 obtuvo la circunferencia cuadrada pero dudó de su resultado porque la circunferencia tiene comportamiento curvo desde la métrica usual).

En la tercera situación didáctica el escenario de complejidad aumentó y aunque la métrica utilizada en el problema era una métrica sencilla (métrica discreta) los razonamiento resultaron ser contraintuitivos para los estudiantes, en la fase de acción la devolución del problema fue mínima y la intervención del profesor fue mucho mayor, entonces el rol que asumió el docente fue el de promover preguntas problematizadoras que favorecieran la intuición del estudiante para lograr el gráfico esperado, cada uno de los estudiantes logró en la fase de acción solo una representación gráfica muy cercana a la esperada, tal fue el caso de la circunferencia y la parábola, mientras que en las fases de formulación y validación se reorganizaron estas ideas y se formularon soluciones para la elipse y la hipérbola planteadas en la situación.

Las situaciones resultaron satisfactorias ya que el docente nunca anticipó los resultados esperados y las conclusiones o conocimientos esperados fueron logrados en mayor medida por el trabajo autónomo de los estudiantes. La institucionalización se desarrolló en otra sesión de clase, donde cada uno de los grupos socializaron sus producciones y sus principales inquietudes y los demás integrantes ayudaron en el análisis para constituir mejor el conocimiento esperado, finalmente el docente sintetiza todos los resultados a la luz de los conocimientos esperados, con la intención de que los estudiantes detallaran las diferentes representaciones gráficas de las cónicas como lugar geométrico, cuando cambiamos la forma de medir.

En general, las tres situaciones didácticas provocaron en los estudiantes la movilización en los registros semióticos verbales y los registros gráficos, Duval (2017) afirma que en el desarrollo del pensamiento espacial es necesario “movilizarse en el lenguaje y en la visualización para poder deconstruir dimensionalmente las formas reconocidas perceptivamente” (p. 70).

Conclusiones

En este capítulo se responde la pregunta de investigación ¿En qué aspectos las situaciones didácticas pueden beneficiar el aprendizaje de las cónicas como lugar geométrico mediante el uso de diferentes métricas?, para responder a la pregunta se analizaron otros interrogantes como ¿Qué dificultades presentan los estudiantes al trabajar las cónicas como lugar geométrico?, ¿Cómo construye e investiga el estudiante el concepto de lugar geométrico de las cónicas bajo las situaciones didácticas propuestas? y ¿Cómo el estudiante logra transitar en diferentes registros de representación bajo procesos de conversión y tratamiento de las cónicas como lugar geométrico? Con estas preguntas problematizadoras se plantearon los objetivos investigativos y en las fases del marco metodológico se determinaron actividades específicas para alcanzar estos objetivos.

El primer objetivo específico relacionado con determinar los diferentes obstáculos que no permiten avanzar en el conocimiento del lugar geométrico de las cónicas desde las dimensiones epistémica, cognitiva y didáctica, se logró desarrollando el estudio previo del objeto matemático cónica desde diversas dimensiones y perspectivas lo que permitió detallar los obstáculos presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En la reconstrucción del objeto matemático desde el estudio histórico y epistemológico, se pudo evidenciar que el conocimiento de las cónicas emerge de "la resolución de problemas, construcciones geométricas, modelos y aplicaciones de la matemática al mundo real para evaluar conjeturas, análisis de posibilidades y generalización de conceptos" (Pérez, 2017, p. 271), no nace directamente de formalizaciones simbólicas como sucede en la práctica educativa, por tanto es conveniente seguir este orden para el diseño de las situaciones didácticas.

El conocimiento referente a las cónicas se da como respuesta a problemáticas de carácter espacial que con el paso de varios siglos se fueron formalizando hasta el punto de convertirse en un gran constructo analítico, y por su gran compendio de propiedades se volvió un referente para estudiar en todos los cursos de geometría, que en la práctica educativa presentan una inclinación al trabajo desde el lenguaje simbólico de forma conductista, las situaciones de aula no permiten que el estudiante desarrolle su propio conocimiento si no que se limite solo a manipular símbolos sin que estos expresen algún sentido (MEN, 1998).

En este aspecto, se concluye que con las situaciones planteadas se promovieron ambientes de aprendizaje donde el conocimiento de las cónicas fue producto de la interacción del estudiante con el medio y a partir de razonamientos intuitivos y prácticos por la actividad manipulativa y social.

En la revisión bibliográfica de textos escolares de matemáticas que abordan el objeto matemático de cónica, también se pudo observar una tendencia a dar más prioridad a la parte simbólica que a la geométrica, esto se puede notar en el planteamiento de los problemas propuestos para afianzar el conocimiento.

Bajo estas circunstancias, el estudiante se encuentra con limitaciones o impedimentos para construir el saber matemático. Kilpatrick et al. (1998) manifiesta que los errores y las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas giran en torno a 5 ejes fundamentales: Por dificultades en el lenguaje, obtención de información espacial, por deficiencia en conocimientos previos, por asociaciones incorrectas y aplicaciones de reglas irrelevantes.

Bajo el afán de solventar esta problemática y evitar los obstáculos referidos al tratamiento de las cónicas, se han desarrollado numerosas investigaciones relacionadas con estrategias metodológicas desde el uso del software, material manipulable, herramientas interactivas o situaciones de contexto con el fin de desarrollar habilidades espaciales competentes.

Al respecto, en el estudio se evidencia que la propuesta de movilizar las cónicas en diferentes registros de representación con el uso de métricas (métrica en este contexto se entiende como la forma de medir) permite afianzar nuevos esquemas cognitivos en los estudiantes y favorece el desarrollo del conocimiento, es por esto que otro resultado respecto al logro del primer objetivo específico corresponde al diseño de las situaciones didácticas, la primera se relaciona con el tratamiento de las cónicas como lugar geométrico desde la métrica usual, la segunda desde la métrica del taxi, la tercera desde la métrica del máximo y la última situación desde la métrica discreta, estas situaciones se diseñaron con el fin de favorecer la construcción gráfica de las cónicas a partir de tratamientos verbales para que el estudiante llegue al conocimiento esperado a partir de la interacción, la adaptación con el medio y el razonamiento intuitivo a partir de la transición en los momentos de acción, formulación, validación e institucionalización del conocimiento.

Para el cumplimiento del segundo objetivo específico relacionado con identificar como los estudiantes construyen e investigan el lugar geométrico de las cónicas por medio de las situaciones didácticas diseñadas, se utilizaron los instrumentos de observación y grabación para la obtención de los datos, según lo establecido en el marco metodológico.

La implementación se efectuó en dos ciclos de la Investigación-Acción; el primero relacionado con la situación en la métrica usual, y el segundo ciclo relacionado con la implementación simultánea de las tres situaciones restantes.

En la triangulación de la información y la reconstrucción de los diálogos se pudo determinar cómo el estudiante investigaba con sus propios medios y los otorgados por la situación los lugares geométricos de las cónicas. Finalmente, los significados que emergieron de la práctica del estudiante con el medio le permitieron la construcción del conocimiento a partir de la acción y la manipulación en ambientes de aprendizajes interaccionales (por medio del Software GeoGebra y medios digitales) que fomentaron momentos de equilibrio y desequilibrio del saber esperado.

Por otra parte, en el segundo ciclo de IA el conocimiento fue construido en contra de los conocimientos anteriores (Brousseau, 2007), en este ciclo se trabajó con métricas diferentes a la usual y fue evidente el desequilibrio entre los estudiantes al enfrentarse a estas situaciones, pero también se evidenció la forma en que el estudiante actuaba y afrontaba las problemáticas con sus propios medios.

En el desarrollo de las situaciones didácticas, las matemáticas que emergieron de la actividad del estudiante estuvieron muy cercanas a las definiciones gráficas y verbales de los lugares geométricos de las cónicas. En el trabajo exploratorio, los estudiantes pudieron determinar propiedades de las curvas e identificar con mayor facilidad los componentes principales de las cónicas como lugar geométrico, planteando conjeturas e hipótesis que en grupo fueron verificadas o falseadas sin necesidad de la intervención del docente.

La construcción del conocimiento referente a la circunferencia y la elipse en la mayoría de situaciones resultó muy favorecedora, muy cercana al saber cultural, mientras que la parábola y la hipérbola resultaron ser más complejas para los estudiantes, logrando que en las situaciones de formulación y validación se estructure mejor el conocimiento de estas curvas.

Por otro lado los estudiantes interactuaron con un medio el cual pretendía el alcance de los objetivos de aprendizaje a partir de razonamientos intuitivos y a lo largo de los tres procesos se fue logrando el conocimiento esperado desde un trabajo autónomo e interactivo entre los estudiantes, para la fase de acción la mayoría de estudiantes lograron de forma intermedia los conocimientos esperados, y en el momento de formulación y de validación en términos generales se había logrado los objetivos de aprendizaje.

En general, las cuatro situaciones didácticas resultaron satisfactorias, el docente nunca anticipó los resultados esperados. Las conclusiones o conocimientos fueron logrados en mayor medida por el trabajo autónomo de los estudiantes y su adaptación al medio. Desde la naturaleza de la Investigación-Acción en la reflexión de resultados del primer ciclo se analizaron variables no previstas para mejorar en el segundo ciclo la práctica educativa, estos cambios estuvieron referidos principalmente a la forma de investigar a los estudiantes desde el trabajo virtual.

Respecto a los obstáculos investigados y evidenciados en los análisis preliminares en la comprensión de las cónicas, las situaciones didácticas presentadas en la investigación contribuyeron en la superación de dichos obstáculos, por un lado, los referidos a dificultades en el lenguaje, los ambientes de aprendizaje promovieron que el estudiante a partir de actividades manipulativas y prácticas lograra el conocimiento esperado sin involucrar el lenguaje formal si no desde registros verbales y gráficos. En los errores referidos a la obtención de información espacial, las situaciones procuraron que el estudiante por medio de la interacción (en algunos casos con el software GeoGebra en otros de forma libre) obtuviera la información necesaria para lograr los conocimientos esperados a partir de las situaciones a-didácticas previstas.

En los errores referentes a deficiencia en conocimientos previos, las situaciones partían desde los razonamientos intuitivos del estudiante por esta razón no requería de conocimientos previos complejos o avanzados en la materia evitándose de igual forma obstáculos por errores en asociaciones incorrectas y aplicaciones de reglas irrelevantes.

En la institucionalización los grupos socializaron sus producciones y sus principales inquietudes y los demás integrantes ayudaron en el análisis para constituir mejor el conocimiento esperado, finalmente el docente sintetizó todos los resultados a la luz de los conocimientos esperados, con la intención de que los estudiantes detallaran las diferentes representaciones gráficas de las cónicas como lugar geométrico, cuando se cambia la forma de medir.

Respecto al tercer objetivo de investigación, donde se buscaba describir la transición del estudiante por diferentes registros de representación bajo procesos de conversión y tratamiento de las cónicas como lugar geométrico, Duval (2017) manifiesta que un estudiante desarrolla actividad matemática cuando transforma representaciones semióticas en otras representaciones para obtener nueva información y resolver problemas.

Se concluye que en este caso, en el primer ciclo, los estudiantes lograron respecto a los procesos de tratamiento y conversión en la circunferencia y la parábola pasar del registro verbal al registro gráfico y del registro gráfico al registro verbal, y en la elipse y la hipérbola se logró pasar del registro gráfico al registro numérico y del registro numérico al registro verbal, mientras que para el segundo ciclo, las tres situaciones didácticas provocaron en los estudiantes la movilización en los registros semióticos verbales y los registros gráficos.

Finalmente, según lo expuesto se pudo evidenciar que se logró responder al objetivo general de investigación relacionado con analizar el aporte de las situaciones didácticas al aprendizaje que desarrollan los estudiantes al trabajar con el concepto de métrica en el estudio de las diferentes cónicas desde su definición como lugar geométrico.

Por tanto, la TSD se constituye en un marco teórico favorecedor en el aprendizaje constructivista, este aprendizaje se logra por adaptación al medio y dicho medio en la presente investigación se diseñó pensando en la manipulación y el uso de plataformas virtuales que permitieron el mejoramiento de la práctica matemática del estudiante frente al pensamiento espacial, logrando una aproximación al lugar geométrico de las cónicas desde procesos de tratamiento y conversión gráficos y verbales.

Con el uso de diferentes métricas los estudiantes cambiaron su percepción de concebir las figuras geométricas y en general de entender las matemáticas, aunque en un inicio estas actividades pareciesen contraintuitivas, al contrario, las producciones fueron muy favorables y con una mínima intervención del docente, los estudiantes se interesaron por encontrar la solución de estos problemas, aparte de representar un reto personal, consideraron curioso estas nuevas formas de medir y la creatividad de ellos por comprender y solucionar estos problemas se convirtió en el más importante resultado de toda la actividad investigativa.

En algunas perspectivas futuras de investigación se pueden involucrar situaciones didácticas que no solo se movilicen en registros gráficos y verbales, sino que también se movilicen desde el concepto métrico en registros algebraicos y numéricos, así como contemplar preguntas referidas a ¿Qué nuevos obstáculos cognitivos aparecen cuando se presentan las cónicas en diferentes métricas? o ¿Qué otro tipo de métricas pueden favorecer los razonamientos intuitivos y prácticos en los estudiantes?

El proceso investigativo que emerge como consecuencia de la situación de confinamiento Covid-19, lleva al investigador a innovar y planificar estrategias para la obtención de datos. En el trabajo se evidencian los cambios que se tuvieron que realizar en cuanto a la población de estudio, las sesiones para la implementación de las situaciones y los escenarios de aprendizaje, ya que con grupos grandes no se puede tener un acercamiento certero a la actividad del estudiante, lo que sesga la investigación y la hace subjetiva frente a los resultados.

La situación actual de Pandemia más que un retroceso para los procesos educativos en matemáticas se considera una oportunidad para avanzar en esta área desde los medios dinámicos, que, aunque desde varios años habían apoyado procesos de aprendizaje, en esta ocasión toman protagonismo.

Referencias Bibliográficas

Antonio, J. y Garzón, C. (2017). *Estudio Geométrico y Analítico de las cónicas en algunas Métricas.* [Tesis de pregrado]. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Antonio, J., Garzón, C. y Sepúlveda, O. (2020). Estudio de las cónicas en algunas métricas: propuesta para el desarrollo del pensamiento espacial. *Revista Boletín Redipe*, 9(11), 110-129. https://doi.org/10.36260/rbr.v9i11.1115

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Una Empresa Docente. http://funes.uniandes.edu.co/676/

Bonilla, D (2012). *La elipse desde la perspectiva de la Teoría de los Modos de Pensamiento.* [Tesis de maestría]. Pontificia Universidad católica de Valparaíso. https://core.ac.uk/download/pdf/20482556.pdf

Bonilla, D., Parraguez, M., y Solanilla, L. (2013). Las cónicas en la geometría del taxista: una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27, 666-673. http://funes.uniandes.edu.co/17832/

Boyer, C. (1996). *Historia de la matemática [History of Mathematics].* Alianza Editorial.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal. books.google.com

Calderón, W., y Peñuela, S. (2013). Propuesta metodológica para la enseñanza de las secciones cónicas. *Educación científica y tecnológica*, esp, 272-280. http://funes.uniandes.edu.co/6640/

Camacho, W. [willyswac]. (2011). Métrica del taxista [Archivo de video]. https://www.youtube.com/channel/UCIhtKu_GJOawICMDVPizWOA

Cárdenas, R. y Parra, W. (2013). *Estudio de la métrica de manhattan. Segmentos, rectas, rayos,* *circunferencias y algunos lugares geométricos en la geometría del taxista.* [Tesis de Pregrado]. Universidad Pedagógica Nacional. http://repositorio.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/2188

Cónicas de Apolonio. Traducción al árabe [Imagen] (1 de agosto de 2020) en *Wikipedia*. https://es.wikipedia.org/wiki/Apolonio_de_Perge. CC BY 4.0

Corbetta, P. (2007). *Metodología y técnicas de investigación social*. McGraw-Hill/Interamericana de España, SAU.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. *IREM de Strasbourg, Francia*, 5, 37-65. https://numerisation.irem.univ-mrs.fr/ST/IST93004/IST93004.pdf

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 9(1), 143-168.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations.* Springer International Publishing.

Elliot, J. (2000). *La investigación-acción en educación*. (4ta edición). Morata.

Fernández, E. (2011). *Situaciones para la Enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando Cabri Géomètre II Plus.* [Tesis de maestría]. Universidad del Valle. http://funes.uniandes.edu.co/9475/

Fiorentini, D., y Lorenzato, S. (2015). *Investigación en Educación Matemática: recorridos históricos y metodológicos.* Autores Associados

Flórez, J., Montenegro, C., Rincón, J., Rozo, L., Tami, J. y Vera, J (2019). *Desafíos Matemáticos 10 Libromedia.* Editorial Santillana.

Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Revista Ema,* 7(2), 127-170. http://funes.uniandes.edu.co/1151/

Font, V. y Godino, J. (2006). *La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores.* Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 8(1). 67-98. https://revistas.pucsp.br/emp/article/download/538/430

Garzon, C. (2020). *Las Situaciones Didácticas en el Aprendizaje de las cónicas desde el concepto de Métrica: consideraciones preliminares de investigación.* II Congreso internacional de Educaciones, Pedagogías y Didácticas. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. https://educacionespedagogiasydidacticas.com/

Godino, J. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. Educación matemática, 12(01), 70-92. http://funes.uniandes.edu.co/10211/

Hernández, C. (2017). *Una secuencia didáctica para el tratamiento de la circunferencia como lugar geométrico, considerando métricas discretas y la euclidiana.* [Tesis de maestría], Pontificia Universidad católica de Valparaíso. http://opac.pucv.cl/

Hernández, R. y Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta edición). McGraw-Hill Interamericana.

Jiménez, A. (2019). La dinámica de la clase de matemáticas mediada por la comunicación. Revista de Investigación, *Desarrollo e Innovación,* 10(1), 121-134. https://revistas.uptc.edu.co/revistas/index.php/investigacion_duitama/article/download/10016/8455/

Kilpatrick, J., Gómez, P. y Rico, L. (1998). *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia.* Una Empresa Docente. http://funes.uniandes.edu.co/679/

Lehmann, C. H. (1992). *Geometría analítica*. ed. Limusa, Noriega Editores.

Loiola, C., y Costa, C. (2015). As Cônicas na Geometria do Taxi. *Ciência e Natura,* 37(3), 179-191. https://www.redalyc.org/pdf/4675/467547643016.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia-MEN. (10 de julio de 2020). *Resultados para Establecimientos Educativos*. Icfes Interactivo. http://www2.icfesinteractivo.gov.co/

Ministerio de Educación Nacional de Colombia-MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares.* Bogotá: MEN

Ministerio de Educación Nacional de Colombia-MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia-MEN. (2015). *Derechos básicos de aprendizaje. Matemáticas* (V1). Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia-MEN. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje. Matemáticas* (V2). Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia-MEN. Guía de orientación Saber 11 2020-2. Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (Icfes). https://www2.icfes.gov.co/

Munkres, J. (2002). *Topología.* Prentice Hall.

Parraguez, M., Rojas, J. y Vásquez, P. (2015). Situaciones a-didácticas para la enseñanza-aprendizaje de estrategias de conteo utilizando la resolución de problema como medio.

Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX (pp. 410-414). Villarrica, Chile. http://funes.uniandes.edu.co/16505/

Pérez, Y. (2017). Análisis histórico-epistemológico-didáctico sobre las secciones cónicas. *ARJÉ. Revista de Postgrado FaCE-UC.* (12),22. *http://arje.bc.uc.edu.ve/*

Primera ley de Kepler: ley de las órbitas. [Imagen] (15 de julio de 2020) en *FisicaLab.* https://www.fisicalab.com/

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational studies in mathematics,* 46(1-3), 13-57.

Valdivia, C., y Parraguez, M. (2012). Evolución cognitiva del concepto parábola como lugar geométrico: una mirada desde la teoría APOE. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 25,* 593-601. http://funes.uniandes.edu.co/4324/

Vasco, C. E. (2006). *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos*. Universidad Pedagógica Nacional. books.google.com

Anexos

Consentimientos Informados

Consentimiento Informado Institución Educativa

Tunja, 02 de octubre de 2020

Profesora:

Institución Educativa Coopteboy
Rectora
Cordial saludo. Por medio de la presente me permito solicitar permiso para desarrollar el proyecto de investigación intitulado **"SITUACIONES DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LAS CÓNICAS DESDE EL CONCEPTO DE MÉTRICA"** cuyo objetivo principal es analizar el aporte de las situaciones didácticas al aprendizaje que desarrollan los estudiantes al manejar el concepto de métrica en el estudio de las diferentes cónicas desde su definición como lugar geométrico. Este proyecto se desarrollará en el grado **Décimo** de esta institución por el profesor **Cristian Julián Garzón Zipa** y estará bajo la dirección de la profesora (PhD) Omaida Sepúlveda Delgado (Docente Titular Uptc).

Gracias por la atención prestada.

Atentamente,

Cristian Julián Garzón Zipa
Estudiante de Maestría en Educación Matemática
Docente de Matemáticas - Institución Educativa Coopteboy

Yo, ______________________________, identificada con cédula N° ______________________ Rectora de la Institución Educativa Coopteboy manifiesto y valido con mi firma estar informada de la investigación que se llevara a cabo en el plantel educativo con estudiantes de grado Décimo por parte del profesor Cristian Julián Garzon Zipa, Estudiante del programa de Maestría en Educación Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
Igualmente, AUTORIZO la utilización de la información que de allí se derive, solo para los fines académicos pertinentes.

____

Firma

Fuente: Elaboración propia.

Consentimiento Informado Estudiante

Estimado padre/ madre de familia o acudiente

Soy estudiante del Programa de Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia y estoy llevando a cabo mi investigación titulada *"SITUACIONES DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LAS CÓNICAS DESDE EL CONCEPTO DE MÉTRICA."*, el objetivo de la investigación es identificar el aporte de las situaciones didácticas en el aprendizaje que desarrollan los estudiantes al manejar el concepto de métrica en el estudio de las diferentes cónicas desde su definición como lugar geométrico. Por tanto, me dirijo respetuosamente para solicitar su autorización para que su hijo participe voluntariamente en este proceso.

Se desarrollarán sesiones por la plataforma Zoom de una duración máxima de 2 horas, el estudiante desarrollará actividades de fortalecimiento de pensamiento espacial y será grabado para luego analizar el tipo de análisis realizado. El horario de cada sesión está aún por definir, pero se estima que sea en dos horas de la tarde entre los días del 6 al 9 de octubre. El proceso será estrictamente confidencial y ni su nombre ni el de su hijo (a) se verá afectado de ninguna manera; es decir su identidad será preservada confidencialmente. Por otro lado, la participación o no participación en el desarrollo de esta investigación no afectara de ninguna manera la nota del estudiante.

La participación es voluntaria. Usted y su hijo (a) tienen derecho de retirar el consentimiento para desistir en cualquier momento. El estudio no conlleva ningún riesgo. No recibirá ninguna compensación por participar. Si tiene alguna pregunta sobre esta investigación, se puede comunicar con el investigador al tel. 321 433 79 38.

Si desea que su hijo participe, favor llenar la autorización y devolverla.

Preguntas o dudas sobre los derechos de su hijo(a) pueden ser resueltas en cualquier momento.

Cordialmente,

....

Cristian Julian Garzon Zipa
Docente de Matemáticas
Colégio Coopteboy

AUTORIZACIÓN

He leído el procedimiento descrito arriba. El investigador me ha explicado el estudio y ha contestado mis preguntas. Voluntariamente doy mi consentimiento para que mi hijo(a)

____, participe en este estudio.

____
Firma Padre/Madre /Acudiente
CC. ___________________________________

Fuente: Elaboración propia.

Guía de Observación

GUIA DE OBSERVACION		
FECHA	HORA	PERIODO DE DURACIÓN
SUCESO OBSERVADO	HORA	COMENTARIO DEL OBSERVADOR

Fuente: Elaboración propia.

Situación Didáctica Diagnóstica

ACTIVIDAD 1

En el software Geogebra ubicar diferentes puntos que satisfagan cada uno de los lugares geométricos que se mencionan a continuación:

- *lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre una distancia constante a un punto fijo de ese plano.*
- *lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta*
- *lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos*
- *lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos*

Escribe los pasos que desarrollaste para poder encontrar los diferentes lugares geométricos (especifica que configuraste en el programa o que funciones utilizaste del Geogebra para poder encontrar los puntos que satisfacen los lugares geométricos)

Toma pantallazos de las diferentes construcciones que desarrollaste

Fuente: Elaboración propia.

Situaciones Didácticas

Métrica usual

COLEGIO COOPTEBOY
RESOLUCIÓN 0900 DE 12 DE NOVIEMBRE DE 2013 - DIRECCIÓN ACADÉMICA
Innovación, visión y compromiso para el desarrollo integral.

Situaciones didácticas para el aprendizaje de las Cónicas desde el concepto de Métrica.

Situación Problema 1 Métrica Usual

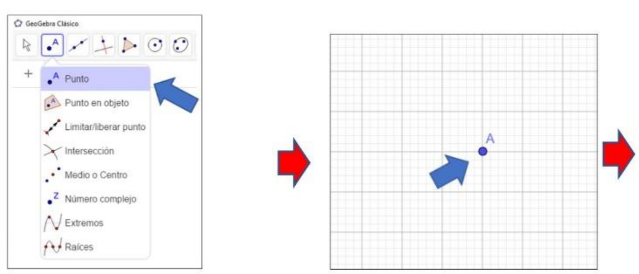
Grado: *Décimo*
Tema: *Cónicas*
Teoría de las situaciones didácticas
Objetivo: Explorar y describir las propiedades geométricas que definen distintos tipos de cónicas desde la métrica usual con ayuda del software Geogebra.
Estándar Básico de Aprendizaje: Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y en particular de las curvas y figuras cónicas.
Pensamiento: Espacial y los sistemas geométricos
DBA: Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones
Tiempo: 2 h

Teniendo en cuenta la sesión sobre el manejo del software Geogebra desarrolla la siguiente actividad.

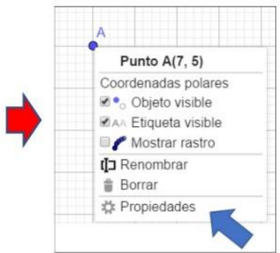
PARTE I

1. Ubica un punto fijo en el plano cartesiano del Geogebra, para esto realiza los siguientes pasos:

selecciona la opción "*punto*" Ubica el punto en cualquier parte del plano



Da clic derecho sobre el punto y selecciona la opción “*propiedades*”

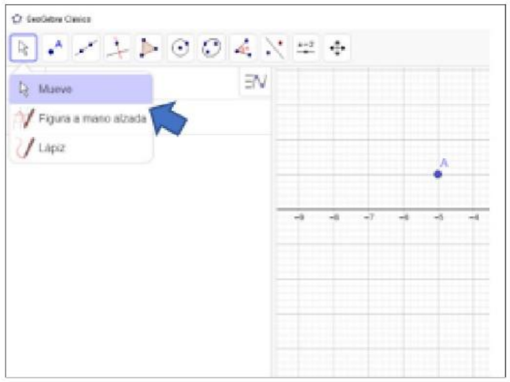


Escoges la pestaña “*Básico*” y selecciones *“Objeto fijo”*

2. Ahora ubica otro punto y mide la distancia que hay entre el punto fijo y este nuevo punto que ubicaste, este segundo punto no es fijo, para medir la distancia recuerda usar la herramienta *“Distancia o longitud”* y dar clic sobre los dos puntos a los que les quieres hallar la distancia.

3. Ahora ubica varios puntos en diferentes direcciones que estén a la misma distancia del punto fijo según el resultado del ítem anterior, arrastre los puntos que ubica para encontrar la distancia esperada.

Para arrastrar el punto selecciona la opción "*mueve*", luego mantén el clic derecho sostenido encima del punto y desplázalo para el lugar que desees, si ya activaste la opción de "*distancia o longitud*" veras como esta se modifica a medida que mueves el punto.

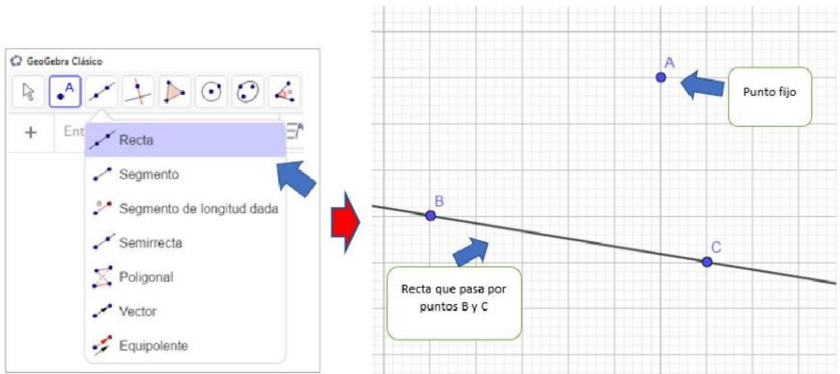


4. A medida que ubicas más puntos ¿Encuentras algún patrón o figura en particular? Justifica tu respuesta.
5. Si tuvieras que definir en palabras la ubicación de los puntos ¿cómo lo harías?

Toma pantallazos de tus resultados.

PARTE II

1. Abre un nuevo archivo en Geogebra, ubica un punto fijo y una recta, para la creación de la recta escoge la opción recta y ubica dos puntos por los que quieres que pase la recta,



también la recta la dejas como un objeto fijo, para esto das clic derecho sobre la recta y seleccionas *"propiedades",* luego en el cuadro de herramientas que se despliega escoges "Básico" y das clic en *"objeto fijo"* (de forma similar como se hizo con el punto fijo)

2. Ubica varios puntos que estén a la misma distancia del punto fijo y de la recta fija, recuerda que con la herramienta de *"distancia o longitud"* también puedes medir la distancia de un punto a una recta, solo debes escoger esta opción y dar clic sobre el punto y la recta. Arrastra el punto para encontrar las distancias adecuadas.
3. A medida que ubicas más puntos ¿Encuentras algún patrón o figura en particular? Justifica tu respuesta
4. Con tus palabras define el lugar geométrico que acabas de construir.

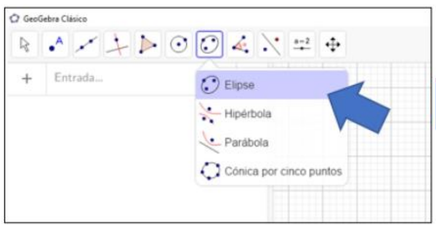
Toma pantallazos de tus resultados.

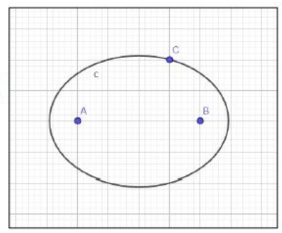
PARTE III

1. En un nuevo archivo Geogebra sigue los pasos que se muestran a continuación para la construcción de una elipse:

Selecciona la opción de elipse

Ubica dos puntos A, B (quienes se denominan focos de la elipse) y un tercer punto C quien determina por donde pasara la elipse.





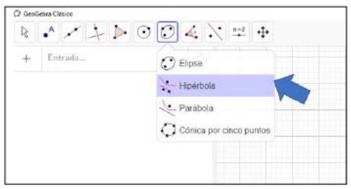
2. A continuación, da clic izquierdo sobre la elipse y en "*propiedades*" selecciona la opción de "*Básico*" y "*objeto fijo*".
3. Ahora ubica un nuevo punto sobre la elipse y calcula la distancia de este punto a cada uno de los focos de la elipse, observa como estas distancias varían a medida que arrastras el punto por la elipse (arrastra el punto con la opción "*mueve*" -ver ítem tres de la parte I-) ¿Encuentras alguna particularidad al sumar las dos distancias relativas a medida que mueves el punto por la elipse? Justifica tu respuesta.
4. Construye otras elipses y verifica tus conjeturas planteadas en el ítem anterior.
5. Teniendo en cuenta lo anterior, con tus propias palabras establece una definición general de lo que significa una elipse.

Toma pantallazos de tus resultados.

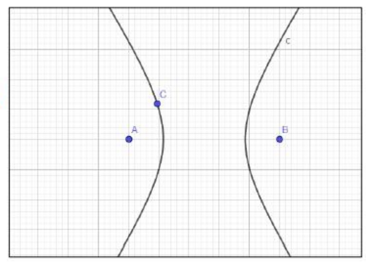
PARTE IV

1. En un nuevo archivo Geogebra sigue los pasos que se muestran a continuación para la construcción de una hipérbola:

Selecciona la opción de hipérbola



Ubica dos puntos A, B (quienes se denominan focos de la hipérbola) y un tercer punto C quien determina por donde pasara la hipérbola



2. A continuación, da clic izquierdo sobre la hipérbola y en "*propiedades*" selecciona la opción de "*Básico*" y "*objeto fijo*".
3. Ahora ubica un nuevo punto sobre la hipérbola y calcula la distancia de este punto a cada uno de los focos de la hipérbola, observa como estas distancias varían a medida que arrastras el punto por la hipérbola (arrastra el punto con la opción "*mueve*" -ver ítem tres de la parte I)

   ¿Encuentras alguna particularidad al restar las dos distancias relativas a medida que mueves el punto por la hipérbola? Justifica tu respuesta.
4. Construye otras hipérbolas y verifica tus conjeturas planteadas en el ítem anterior.
5. Teniendo en cuenta lo anterior, con tus propias palabras establece una definición general de lo que significa una hipérbola.

   Toma pantallazos de tus resultados.

COLEGIO COOPTEBOY
RESOLUCIÓN 0900 DE 12 DE NOVIEMBRE DE 2013 - DIRECCIÓN ACADÉMICA
Innovación, visión y compromiso para el desarrollo integral.

PARTE V

1. Ahora comparte los resultados que obtuviste con otros compañeros y responde lo siguiente:
    a) ¿Encuentras semejanza entre los resultados obtenidos?
    b) ¿De qué forma analizaron tus compañeros las situaciones?

    Justifica tus respuestas y toma pantallazos de los resultados

2. Por grupo lleguen a un conceso de la solución correcta de la situación y en la sesión virtual por Zoom socialicen sus resultados a los demás compañeros de la clase, demuestren y comprueben que sus resultados son la forma adecuada de dar solución a las situaciones planteadas.

Nota: Organiza los pantallazos de cada parte de la actividad en un documento que deberá ser enviado al correo cgarzonzipa@gmail.com.

Fuente: Elaboración propia.

Métrica del taxi

COLEGIO COOPTEBOY
RESOLUCIÓN 0900 DE 12 DE NOVIEMBRE DE 2013 - DIRECCIÓN ACADÉMICA
Innovación, visión y compromiso para el desarrollo integral.

Situaciones didácticas para el aprendizaje de las Cónicas desde el concepto de Métrica

Situación Problema 2

TAXICAB, UNA CIUDAD ORDENADA Y BIEN PLANIFICADA

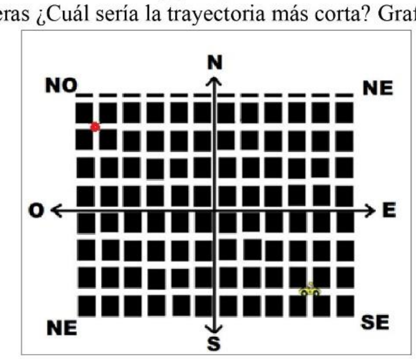
Grado: *Décimo*
Tema: *Cónicas*
Teoría de las situaciones didácticas
Objetivo: Explorar y describir las propiedades geométricas que definen distintos tipos de cónicas desde la métrica del taxista.
Estándar Básico de Aprendizaje: Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y en particular de las curvas y figuras cónicas.
Pensamiento: Espacial y los sistemas geométricos
DBA: Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones
Tiempo: 2h

PARTE I

Analicemos una nueva forma de medir basándonos en la distancia que recorre un taxista o un caminante en una ciudad ordenada y bien planificada, aunque difícil de encontrar, donde los caminos van de Norte a Sur, de Sur a Norte (Calles), de Oeste a Este y de Este a Oste (Carreras). Desde este punto de vista no está permitido el desplazamiento en diagonal, dado el hecho que no se puede atravesar por las cuadras que componen la ciudad, sino exclusivamente por sus calles y carreras, como lo hace un taxista en su labor diaria.

1. Según la información anterior responda las siguientes preguntas:

   a) ¿Qué trayectorias podría realizar el automóvil amarillo para llegar al punto rojo? Grafica algunas opciones.
   b) ¿Cuál de todas las trayectorias es la más corta y por qué?
   c) Si no existieran calles y carreras ¿Cuál sería la trayectoria más corta? Grafica tu respuesta y justifica.

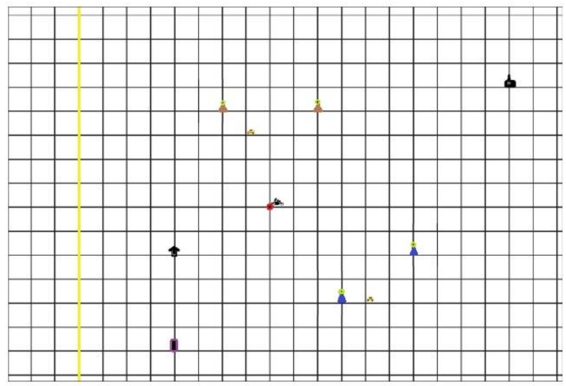


COLEGIO COOPTEBOY
RESOLUCIÓN 0900 DE 12 DE NOVIEMBRE DE 2013 - DIRECCIÓN ACADÉMICA
Innovación, visión y compromiso para el desarrollo integral.

PARTE II

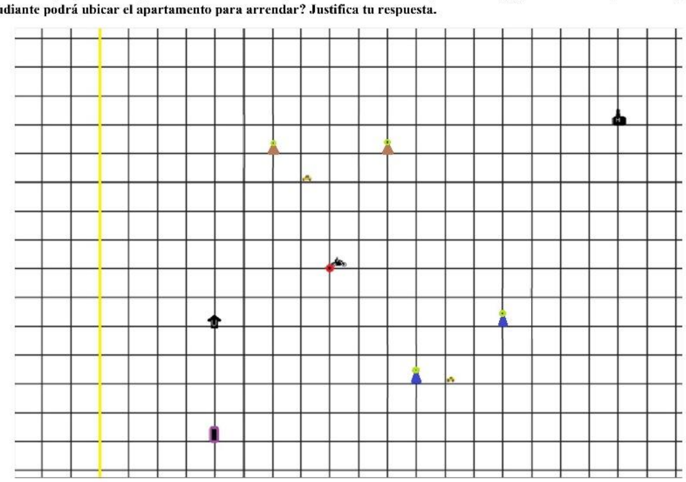
Teniendo en cuenta el trabajo de la parte I, lee las siguientes situaciones y para cada caso ubica los puntos que consideres que satisfacen el enunciado. En los planos las líneas verticales y horizontales representan las calles y carreras mientras que los cuadrados blancos son considerados como las diferentes cuadras.

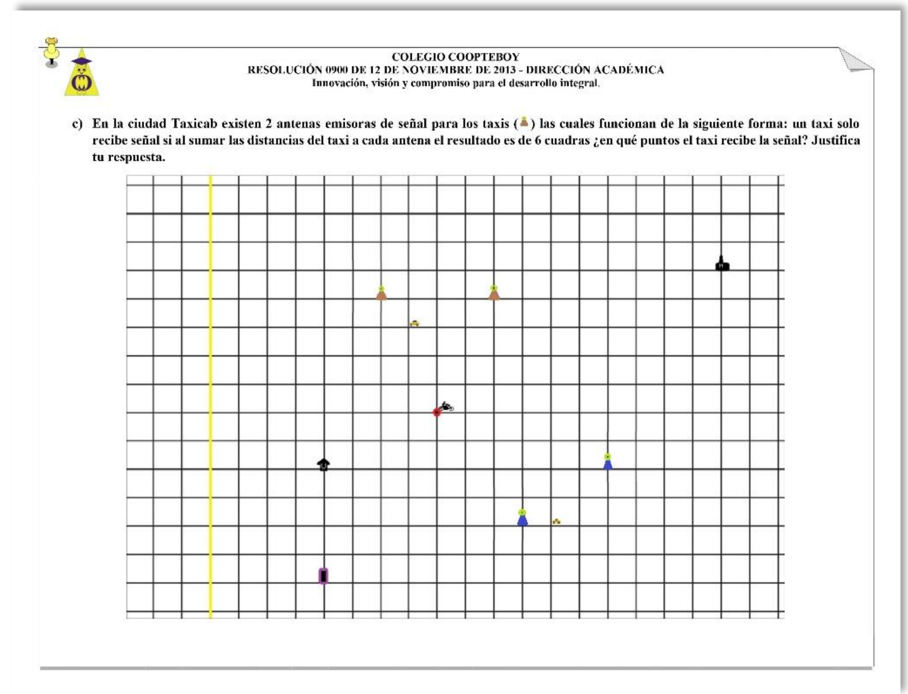
a) **En la ciudad Taxicab se encuentra un hombre con su moto (punto rojo) preguntando por la gasolinera más cercana, a lo cual una persona le responde *"queda a 5 cuadras de aquí"* pero no le especifica la dirección que debe seguir, ¿En qué puntos posiblemente esta la gasolinera? Justifica tu respuesta.**



COLEGIO COOPTEBOY
RESOLUCIÓN 0900 DE 12 DE NOVIEMBRE DE 2013 - DIRECCIÓN ACADÉMICA
Innovación, visión y compromiso para el desarrollo integral.

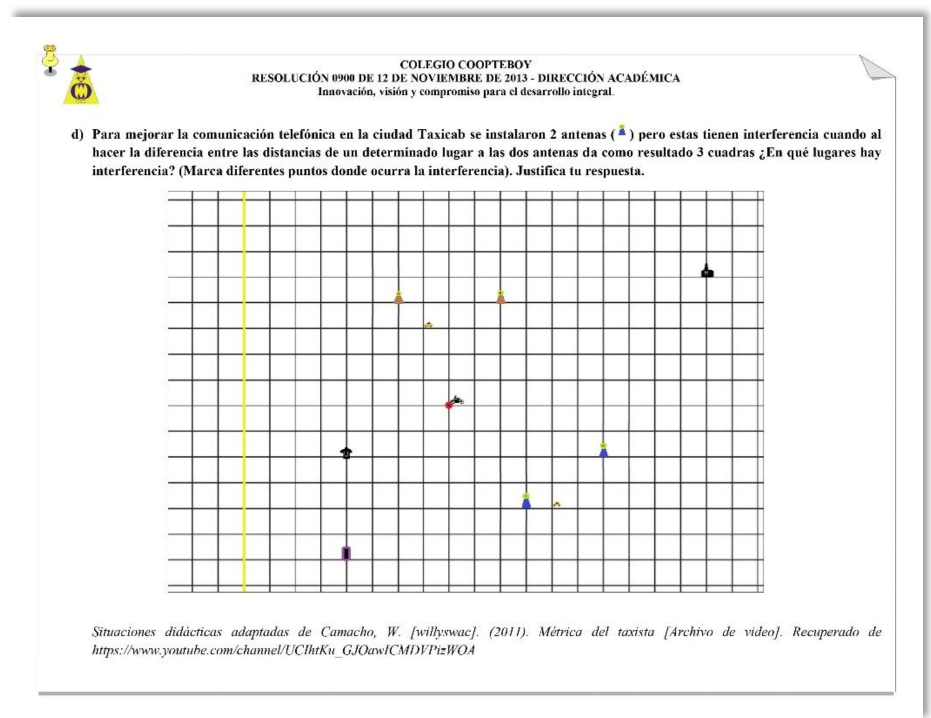
b) **En la misma ciudad un estudiante busca un apartamento que cumpla con las siguientes condiciones: la distancia del apartamento a la universidad ( ) debe ser igual a la distancia del apartamento a la avenida (de amarillo), ¿Cuáles son los posibles lugares donde el estudiante podrá ubicar el apartamento para arrendar? Justifica tu respuesta.**





COLEGIO COOPTEBOY
RESOLUCIÓN 0900 DE 12 DE NOVIEMBRE DE 2013 - DIRECCIÓN ACADÉMICA
Innovación, visión y compromiso para el desarrollo integral.

c) En la ciudad Taxicab existen 2 antenas emisoras de señal para los taxis ( ) las cuales funcionan de la siguiente forma: un taxi solo recibe señal si al sumar las distancias del taxi a cada antena el resultado es de 6 cuadras ¿en qué puntos el taxi recibe la señal? Justifica tu respuesta.



COLEGIO COOPTEBOY
RESOLUCIÓN 0900 DE 12 DE NOVIEMBRE DE 2013 - DIRECCIÓN ACADÉMICA
Innovación, visión y compromiso para el desarrollo integral.

d) Para mejorar la comunicación telefónica en la ciudad Taxicab se instalaron 2 antenas ( ) pero estas tienen interferencia cuando al hacer la diferencia entre las distancias de un determinado lugar a las dos antenas da como resultado 3 cuadras ¿En qué lugares hay interferencia? (Marca diferentes puntos donde ocurra la interferencia). Justifica tu respuesta.

Situaciones didácticas adaptadas de Camacho, W. [willyswac]. (2011). Métrica del taxista [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/channel/UCIhtKu_GJOawICMDVPizWOA

Fuente: Adaptado de Camacho (2011)

Métrica del máximo

COLEGIO COOPTEBOY
RESOLUCIÓN 0900 DE 12 DE NOVIEMBRE DE 2013 - DIRECCIÓN ACADÉMICA
Innovación, visión y compromiso para el desarrollo integral.

Situaciones didácticas para el aprendizaje de las Cónicas desde el concepto de Métrica

Situación Problema 3

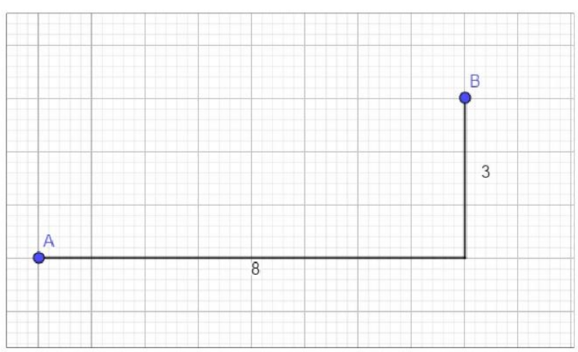
Grado: *Décimo*
Tema: *Cónicas*
Teoría de las situaciones didácticas
Objetivo: Explorar y describir las propiedades geométricas que definen distintos tipos de cónicas desde la métrica del máximo.
Estándar Básico de Aprendizaje: Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y en particular de las curvas y figuras cónicas.
Pensamiento: Espacial y los sistemas geométricos
DBA: Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones.
Tiempo: 2h

PARTE I

Consideremos una nueva forma de establecer una distancia por la métrica del máximo:

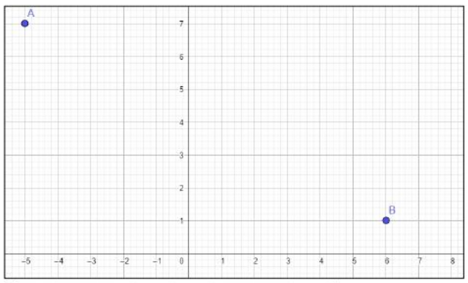
"*La distancia entre dos puntos será la medida máxima entre los posibles movimientos verticales y horizontales que se pueden dar en el recorrido de un punto a otro*."

Por ejemplo, la distancia entre el punto A y el punto B desde la métrica del máximo seria de 8 unidades (observe que con la métrica del taxi la distancia seria de 11 unidades y en la métrica usual seria de 8,54 unidades aproximadamente -por teorema de Pitágoras-)



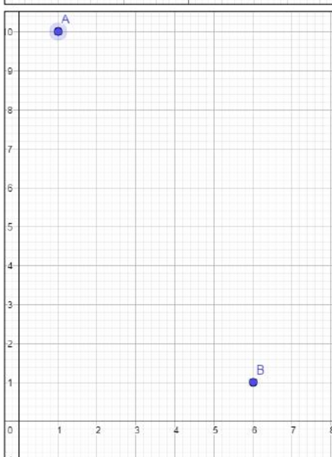
COLEGIO COOPTEBOY
RESOLUCIÓN 0900 DE 12 DE NOVIEMBRE DE 2013 - DIRECCIÓN ACADÉMICA
Innovación, visión y compromiso para el desarrollo integral.

Ahora es tu turno, encuentra la distancia entre los siguientes puntos por la métrica del máximo, métrica del taxi y la métrica usual:



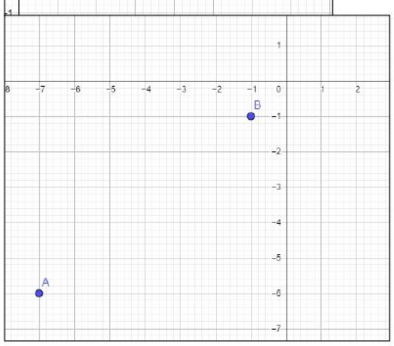
Distancia por la métrica del máximo:

Distancia por la métrica usual:



Distancia por la métrica del máximo:

Distancia por la métrica usual:



Distancia por la métrica del máximo:

Distancia por la métrica usual:

COLEGIO COOPTEBOY
RESOLUCIÓN 0900 DE 12 DE NOVIEMBRE DE 2013 - DIRECCIÓN ACADÉMICA
Innovación, visión y compromiso para el desarrollo integral.

PARTE II

1. Teniendo en cuenta la anterior información con la métrica del máximo, en el software Geogebra plantear y desarrollar cuatro casos en donde se cumpla cada uno de los lugares geométricos que se mencionan a continuación:

a) *Lugar geométrico de los puntos tales que conservan siempre una distancia constante a un punto fijo,* Justifica tu respuesta.

b) *Lugar geométrico de los puntos tales que su distancia a una recta fija es siempre igual a su distancia de un punto fijo que no pertenece a la recta,* Justifica tu respuesta.

c) *Lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos fijos,* Justifica tu respuesta.

d) *Lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano es siempre una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los dos puntos fijos,* Justifica tu respuesta.

2. Ahora comparte los resultados que obtuviste con otro compañero y analiza lo siguiente:
   a) ¿Encuentras semejanza entre los resultados obtenidos?
   b) ¿De qué forma analizo tu compañero las situaciones?
   c) Desarrollen un cuadro comparativo que les permita investigar sobre las similitudes y diferencias entre las figuras obtenidas en la sesión anterior y esta sesión. Redacten algunas conclusiones.

3. Por grupo lleguen a un conceso de la solución correcta de la situación y en la sesión virtual por Zoom socialicen sus resultados a los demás compañeros de la clase, demuestren y comprueben que sus resultados son la forma adecuada de dar solución a las situaciones planteadas.

Nota: Organiza los resultados y las justificaciones de cada parte de la actividad por medio de pantallazos en un documento que deberá ser enviado al correo cgarzonzipa@gmail.com.

Fuente: Elaboración propia.

Métrica discreta

COLEGIO COOPTEBOY
RESOLUCIÓN 0900 DE 12 DE NOVIEMBRE DE 2013 - DIRECCIÓN ACADÉMICA
Innovación, visión y compromiso para el desarrollo integral.

Situaciones didácticas para el aprendizaje de las Cónicas desde el concepto de Métrica

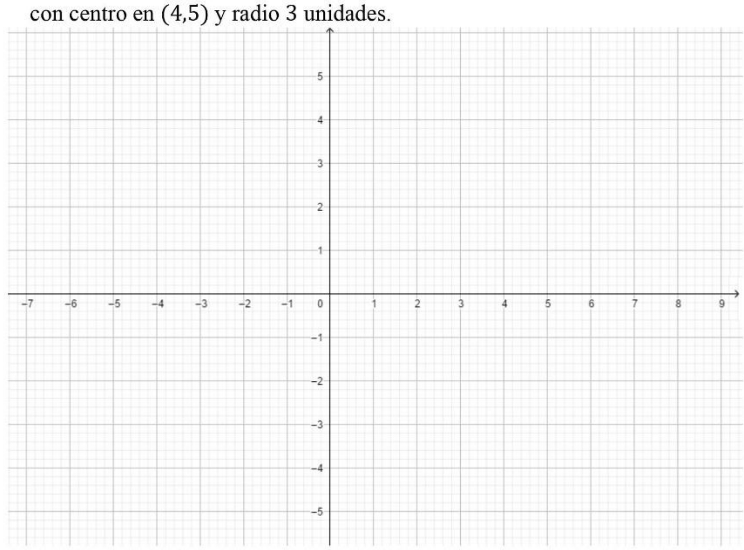
Situación Problema 4

Grado: *Décimo*
Tema: *Cónicas*
Teoría de las situaciones didácticas
Objetivo: Explorar y describir las propiedades geométricas que definen distintos tipos de cónicas desde la métrica discreta.
Estándar Básico de Aprendizaje: Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y en particular de las curvas y figuras cónicas.
Pensamiento: Espacial y los sistemas geométricos.
DBA: Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones.
Tiempo: 2h

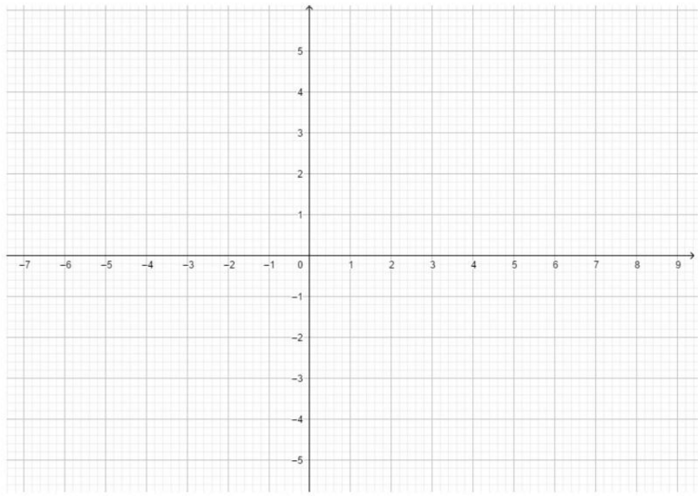
PARTE I

Estudiamos ahora una forma sencilla de determinar distancias donde solo hay dos tipos de medidas 0 (cero) y 1 (uno), la distancia entre dos objetos es 0 cuando se encuentran en la misma ubicación y es 1 cuando se encuentran los dos objetos en diferentes posiciones.

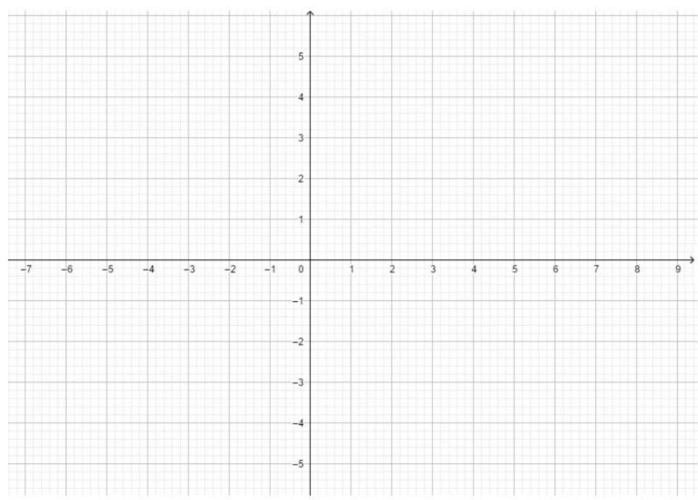
a) Represente según la información dada el lugar geométrico de una Circunferencia con centro en $(4,5)$ y radio 3 unidades.



b) Represente según la información dada una Parábola con directriz $y = 2x + 5$ y foco $(5,5)$

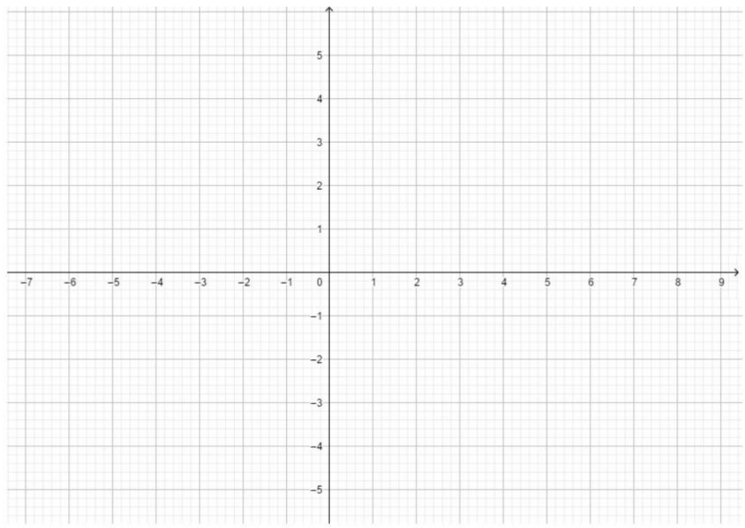


c) Represente según la información dada una Elipse con focos $(3, -2)$ y $(7,3)$



COLEGIO COOPTEBOY
RESOLUCIÓN 0900 DE 12 DE NOVIEMBRE DE 2013 - DIRECCIÓN ACADÉMICA
Innovación, visión y compromiso para el desarrollo integral.

d) Represente según la información dada, una Hipérbola con focos $(-4,0)$ y $(4,0)$



PARTE II

1. Comparte los resultados que obtuviste con otro compañero y analiza lo siguiente:
   a) ¿Encuentras semejanza entre los resultados obtenidos? Justifica tu respuesta.
   b) ¿De qué forma analizo tu compañero las situaciones? Justifica tu respuesta.
   c) Presenten una expresión general (simbólica) o verbal que de razón para cualquier cónica con esta forma de medir. Justifica y desarrolla dos ejemplos más.

2. En grupo lleguen a un conceso de la solución correcta de la situación y en la sesión virtual por Zoom socialicen sus resultados a los demás compañeros de la clase, demuestren y comprueben que sus resultados son la forma adecuada de dar solución a las situaciones planteadas.

Nota: Organiza los resultados y las justificaciones de cada parte de la actividad por medio de pantallazos en un documento que deberá ser enviado al correo cgarzonzipa@gmail.com.

Fuente: Elaboración propia.