EL SOFTWARE GEOGEBRA COMO MEDIO PARA LA COMPRENSIÓN DE LOS POLÍGONOS REGULARES

DEISY TATIANA CUERVO LANCHEROS

TESIS DE MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TUNJA, BOYACÁ

2021

EL SOFTWARE GEOGEBRA COMO MEDIO PARA LA COMPRENSIÓN DE LOS POLÍGONOS REGULARES

CUERVO LANCHEROS DEISY TATIANA

Trabajo de grado para optar el título de Magister en Educación Matemática

Directora: Dra. OMAIDA SEPÚLVEDA DELGADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TUNJA, BOYACÁ

2021

Página de aceptación

Jurado

Jurado

Directora

Omaida Sepúlveda Delgado

Dedicatoria

A mi padre Julio Vicente

a mi madre Diana Marcela

a mi hermana Laura Daniela

y a mi hermano Edwin Ferley

por su apoyo, motivación, paciencia y acompañamiento incondicional

en todo el proceso de la Maestría.

Agradecimientos

Primero que todo agradezco a Dios por darme la fortaleza, la dedicación y el compromiso en este proceso académico, a mis Padres por motivarme a continuar con mis estudios profesionales. De manera especial agradezco a la Dra. Omaida Sepúlveda Delgado por ser mi directora y asesorarme de forma dedicada y entusiasta en todo el proceso de la investigación, así como por sus enseñanzas y su enorme compromiso con la Maestría en Educación Matemática. A mis Profesores y compañeros de la Maestría con quienes compartí experiencias significativas y, por último, agradezco a mis queridos estudiantes de séptimo de la Institución Educativa José María Silva Salazar por su colaboración y entusiasmo, por ellos esta profesión es la mejor.

Resumen

La presente investigación, se fundamenta en la Teoría de las Situaciones Didácticas y el Modelo Van Hiele a partir del diseño de secuencias didácticas para favorecer la construcción del conocimiento geométrico, en particular, se analiza como un grupo de estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa José María Silva Salazar comprenden las propiedades geométricas de los polígonos regulares a partir de su construcción a través de la interacción con el medio GeoGebra. En este aspecto, se asume el enfoque de la investigación cualitativo, de tipo exploratoria – descriptiva y el diseño de la investigación corresponde a la metodología de la Ingeniería Didáctica con sus cuatro fases (Análisis preliminares, la concepción y el análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori).

Para dar respuesta a los objetivos propuestos en la investigación, primero se realiza un análisis epistemológico, didáctico y cognitivo del objeto polígonos regulares, después se diseña la secuencia didáctica y se realiza el análisis a priori para fortalecer la comprensión de las propiedades de este objeto geométrico. Luego, se continua con la implementación de la secuencia didáctica y finalmente, se realiza el análisis a posteriori y la evaluación del proceso de instrucción de los polígonos regulares de acuerdo a las prácticas matemáticas/geométricas realizadas por los estudiantes.

La aplicación de la secuencia didáctica se realizó de manera presencial siguiendo los protocolos de bioseguridad para el manejo y control del riesgo del Covid 19 establecidos por la Institución Educativa. Entre los resultados se evidencia la interacción de los estudiantes con las herramientas de GeoGebra para realizar la construcción geométrica del triángulo equilátero, cuadrado y del pentágono regular, además se observa la aplicación de los conocimientos previos, aceptando o rechazando estrategias de solución frente a la situación propuesta, así los estudiantes intercambiaron información y comunicaron los resultados encontrados a partir del razonamiento intuitivo y del trabajo exploratorio, permitiendo el reconocimiento de las propiedades geométricas de los polígonos regulares; también transitaron por los niveles y fases propuestos en el Modelo Van Hiele de manera continua y conjunta con la Teoría de la Situaciones Didácticas permitiendo fortalecer el conocimiento geométrico. Se establece que el desarrollo de esta investigación permitió el análisis y reflexión de la forma en cómo se diseñan o planean las actividades de clase por medio de la interacción con programas de geometría dinámica para la construcción de los objetos geométricos que en este estudio corresponden a los polígonos regulares.

Palabras Clave: Polígonos regulares, Situaciones Didácticas, Construcciones Geométricas, Propiedades Geométricas.

ÍNDICE DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

Introducción

El presente trabajo de investigación surge de la necesidad de utilizar un nuevo medio tecnológico e integrarlo a la enseñanza de las matemáticas, en especial en la enseñanza de la geometría para el objeto polígonos regulares y de la misma manera potenciar de forma significativa las competencias interpretativa, argumentativa y propositiva de los estudiantes, para contribuir en la formación de actores dinámicos de su propio aprendizaje por medio de la interacción, creatividad e innovación al utilizar el software dinámico GeoGebra.

Por lo tanto, se pretende incorporar en las clases los recursos tecnológicos, en especial, aquellos programas matemáticos que permiten dinamizar el trabajo con objetos geométricos, como el GeoGebra que es de libre adquisición, de fácil acceso y manipulación. Bajo estos argumentos, se propuso realizar la investigación para comprobar como el uso de GeoGebra para la construcción de polígonos regulares, como medio de interacción siguiendo la propuesta la propuesta del marco teórico de la Teoría de las Situaciones Didácticas y el modelo de Van Hiele lleva a la comprensión de las propiedades del objeto polígonos regulares.

Para tal fin la investigación se estructuró en cuatro capítulos. El primer capítulo, se centra en el planteamiento del problema, formulación del problema, objetivo general y los objetivos específicos para terminar este apartado con la justificación del problema. En el segundo capítulo, se plantean los antecedentes de la investigación y las bases de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau y el Modelo Van Hiele cuyo propósito es permitir el desarrollo de habilidades y destrezas de los estudiantes en geometria, a partir de la exploración, el trabajo autónomo, la comunicación y el trabajo en grupo. En el tercer capítulo, se presenta la metodología por medio de la cual se desarrolló el trabajo; se precisa el nivel y diseño de la investigación, la población y la muestra objeto de estudio, y las técnicas e instrumentos de recolección de datos.

En el cuarto capítulo de resultados y discusión, se realiza el análisis epistemológico, conceptual, de contenido, cognitivo y curricular para el objeto polígonos regulares: estos análisis se toman como elementos necesarios para el diseño de las secuencias didácticas y conforman el análisis didáctico (Lupiáñez y Rico, 2008) que en este estudio se traduce en los análisis preliminares para la investigación, siguiendo la ingeniería didáctica (Artigue, 1995) como propuesta metodológica para el trabajo con la teoría de las Situaciones Didácticas. Se continúa con el diseño de las secuencias didácticas y su implementación, para finalmente llegar a establecer y proponer recomendaciones, conclusiones y las referencias para el estudio.

Capítulo I

El problema de investigación

En este capítulo se describe la problemática relacionada con la construcción del objeto matemático polígonos regulares y se utiliza como medio de interacción el GeoGebra. De igual forma, se exponen los objetivos de la investigación fundamentada en la Teoría de las Situaciones Didácticas, y los niveles de pensamiento geométrico en el modelo Van Hiele. Por último, se presenta la justificación dada al desarrollo de la presente investigación.

Planteamiento del problema

La tecnología ha sido hasta el momento utilizada en diferentes sectores con finalidades productivas, su incorporación se ha dado de manera rápida evidenciando resultados favorables, de igual forma, los avances que se han dado en términos de accesibilidad y desarrollo han permeado nuevos mecanismos. En este aspecto, se tienen argumentos fuertes en relación a los aportes de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC), como mejores condiciones laborales y el fortalecimiento constructivo de la competitividad entre las industrias y diferentes sectores públicos como lo expresa el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006).

Es de interés considerar el sector educativo, pues este no ha sido ajeno al impacto de la tecnología: en Colombia desde el Ministerio de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (MinTIC), como se menciona en la ley 1341 del 30 de julio de 2009 se ha definido a las TIC, como un conjunto de herramientas que permiten la selección, tratamiento y trasmisión de información en diferentes registros como textos, imágenes, videos y audios y se puede decir que existe una conjunción o apoyo entre el MEN y el MinTIC para promover la innovación para los estudiantes en los procesos educativos por medio de las TIC (Said, 2015).

El MEN (2006) hace énfasis en especificar la estrecha relación entre el sistema educativo y las TIC en función de obtener excelentes resultados en la educación de los estudiantes, al afirmar que: “Las TIC no sólo ponen al alcance de docentes y estudiantes volúmenes de información, sino que promueven el desarrollo de destrezas y habilidades como son la búsqueda, selección y procesamiento de información, así como la capacidad para el aprendizaje autónomo” (p.49).

Según los argumentos anteriores, como lo destaca Córdoba (2014) en su trabajo sobre las TIC en el aprendizaje de las matemáticas, es importante considerar que la incorporación de estas en el ámbito educativo ha concebido nuevas formas de diseñar, dirigir y ejecutar excelentes procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula de clases en cada una de las áreas en especial en ciencias naturales, ciencias sociales, castellano, y matemáticas. Así mismo, plantea que “con la llegada de estas tecnologías se han sentado diversas posturas en cuanto a su incorporación e integración curricular y a las ventajas o desventajas que podrían tener en el desempeño académico de los estudiantes” (p.2).

En el área de matemáticas se menciona que existen algunas creencias de los estudiantes en cuanto al proceso de enseñanza y aprendizaje, como el hecho de que sea la asignatura más difícil y la materia que todos pierden, llevando incluso en algunos casos a que los estudiantes escojan su formación profesional ajena a la matemática (Leung, 2006). Es por esto, que es necesario incorporar mecanismos y herramientas que incentiven y generen mejores resultados en los estudiantes, como lo ha hecho el uso y evolución de las TIC en los últimos años en matemáticas. Lo anterior es sustentado por Leung (2006) al señalar que la introducción de las TIC en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas establece uno de los temas importantes de la educación matemática de hoy, y precisa en la importancia de que se siga trabajando sobre este tema en futuras investigaciones.

Lo anterior ha presentado propuestas para el desarrollo de habilidades de reflexión en torno a los temas que se explican en las clases de matemáticas, puesto que el uso de las TIC establece entre otras cosas, la utilización de calculadoras, gráficas e imágenes que facilitan el análisis y comprensión de la información obtenida.

Por tanto, se evidencia en las investigaciones, que el aprendizaje de la matemática y específicamente de los objetos geométricos, requieren de una gran diversidad de metodologías a utilizar por parte del docente, el cual debe estar en constante actualización de recursos tecnológicos para la enseñanza de la misma, esto abre la posibilidad de crear nuevos espacios de razonamiento, reflexión, análisis y uso de la creatividad en las clases de matemáticas donde estudiantes y docentes sean los agentes dinamizadores de los procesos de enseñanza y de aprendizaje (Vargas y Gamboa, 2013).

Una de las ramas de la matemática en la que ha irrumpido con gran fuerza el uso de las TIC ha sido la geometría, esta se caracteriza fundamentalmente porque permite percibir las formas del espacio en el que se vive y describir cada una de sus características; al respecto, Vargas y Gamboa (2013) ofrecen una percepción acerca de la geometría definiéndola de la siguiente manera: “La geometría es para el ser humano el idioma universal que le permite describir y construir su mundo, así como transmitir la percepción que tiene de este al resto de la humanidad” (p.75). Sin embargo, existe una serie de problemáticas vigentes que afectan de manera significativa su enseñanza, como las mencionadas por Vargas y Gamboa (2013) donde evidencian que en la mayoría de Instituciones Educativas orientan la enseñanza de la geometría de una manera tradicional, basada en el uso de lápiz y papel, lo cual no permite que el estudiante tome un rol activo en el desarrollo de su conocimiento matemático, su pensamiento geométrico y que no se fomente un aprendizaje significativo en el estudiante.

Se propone por tanto, que una estrategia a considerar para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría es la incorporación de un Software de Geometría dinámica en las clases como Geoemter's Skechpad, Geup, Cabri II y GeoGebra, ya que estos programas cuentan con diferentes herramientas que permiten dinamizar cualquier objeto matemático, permitiendo hacer geometría de una manera muy particular y además, admiten animar una figura desplazándola o realizando variaciones en sus representaciones y relaciones.

En especial GeoGebra, brinda diferentes herramientas para la representación de cualquier objeto matemático y permite que el estudiante consolide los conceptos y se promueva la participación en la construcción de figuras planas de su entorno. Además, permite crear ambientes virtuales de aprendizaje donde el estudiante se vuelve protagonista de su aprendizaje, y aprende a ver los conceptos matemáticos de manera tangible, con la posibilidad de explorarlos y manipularlos. Así mismo al docente le permite identificar la manera como razona el estudiante ¿cómo utiliza lo que sabe para la resolución de problemas? y ¿cómo utiliza las herramientas para plantear soluciones? (Ezguerro, 2014).

Para el presente estudio, se trabaja con el objeto matemático de los polígonos regulares y en particular en la construcción de estos utilizando como medio de interacción el software dinámico GeoGebra con estudiantes de grado Séptimo de la Institución Educativa José María Silva Salazar del municipio de Buenavista (Boyacá). Se toma el software como resultado de un análisis al observar que en la naturaleza y en el contexto se tiene como recurso didáctico importante la presencia de las formas geométricas y la composición de las mismas: esta idea, es sustentada por Kline (1972) al manifestar que: "las ideas matemáticas, afirma, son innatas en nosotros e idénticas a cosas tales como las que se encuentran en la naturaleza, porque la naturaleza está escrita en el lenguaje de la geometría"(p.281), lo cual permite a los estudiantes el análisis de las relaciones y las propiedades de las figuras geométricas, fortaleciendo de esta manera el pensamiento geométrico y el razonamiento espacial en la resolución de problemas, así surge la necesidad que los estudiantes reconozcan las formas planas de las estructuras que los rodean y aprendan a clasificar los polígonos regulares (Vargas y Gamboa, 2013). Pero no es solo la construcción de estos objetos, es la construcción mental y la generalización de propiedades de los objetos geométricos.

En la Institución Educativa José María Silva Salazar los estudiantes de grado séptimo presentan en matemáticas un desempeño básico en las calificaciones durante el año académico (entre 30 y 39 puntos en una escala de 10 a 50 puntos). Una de las razones de este desempeño se debe a la falta de motivación y desinterés en la asignatura de matemáticas debido a que con la llegada de la Pandemia de Covid-19 se ha venido trabajando por medio del desarrollo de guías lo cual impide que se fomenten diferentes espacios de aprendizaje.

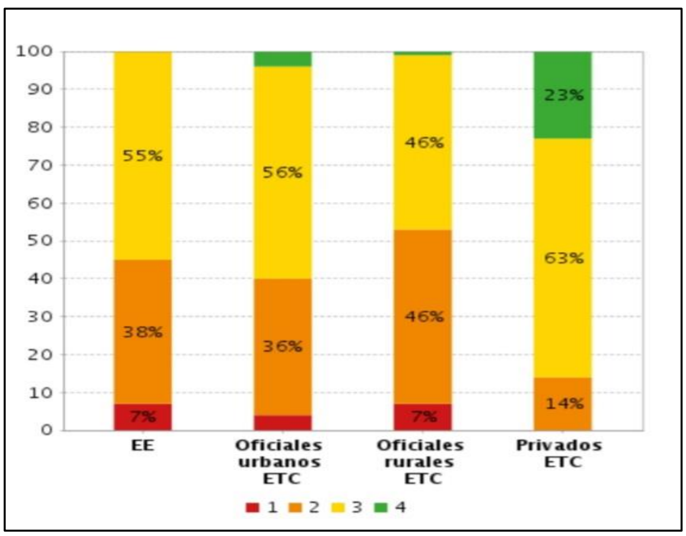
De acuerdo a los resultados que publicó la OCDE de las pruebas PISA (Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes) aplicadas en el año 2018, se presentó un avance mínimo en la prueba de matemáticas: los estudiantes que participaron de la aplicación de la prueba obtuvieron un promedio de 391 puntos en comparación a los 390 puntos obtenidos en la prueba PISA del año 2015. Así mismo, los resultados obtenidos en la última aplicación están demasiado alejados de los 489 puntos del promedio de los países participantes en la OCDE (ICFES, 2020). Respecto a la prueba TIMSS (Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias) del año 2019, Colombia no participó en la aplicación.

Las pruebas SERCE (Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo) organizadas por el Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE) describe las dificultades de los estudiantes de Latinoamérica en matemáticas aplicadas. En la aplicación del año 2006 para estudiantes de grado tercero y sexto los resultados no fueron favorables en matemáticas, ya que el promedio de los estudiantes de tercero fue por debajo de la media de los países participantes y los resultados de grado sexto apenas superaron la media (UNESCO, 2008).

En relación a las pruebas de estado Saber 11, la Institución Educativa en el área de matemáticas en los últimos cinco años en promedio ha obtenido una puntuación de 52,22 puntos. En particular, en la Figura 1 se ilustran los resultados obtenidos en las pruebas Saber 11 del año 2020 donde se muestra el porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño, evidenciando que la mayoría se encuentran en el nivel 3 con un porcentaje del 55%, después se ubican en el nivel 2 el 38% de los estudiantes y en el nivel 1 se encuentra el 7% de los estudiantes restantes. El escenario ideal es aquel en el cual los segmentos de color amarillo y verde ocupan la mayor parte de la barra.

Figura 1

Porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño en matemáticas



Nota. Tomado del Reporte de Resultados del Examen Saber 11° por aplicación 2020-4. Establecimientos Educativos.

Frente a otras Instituciones Educativas oficiales urbanas y rurales hay dificultades para alcanzar el nivel 4 constituyendo un aspecto desfavorable en los resultados institucionales, porque lo ideal es que todos o la mayoría de estudiantes se encuentren en los niveles 3 y 4. De acuerdo a los aprendizajes evaluados en matemáticas existen dificultades en comprender y transformar la información cuantitativa y esquemática presentada en distintos formatos con un 30% en promedio respecto a las respuestas incorrectas.

En la competencia de implementar estrategias que lleven a soluciones adecuadas frente a problemas que involucren información cuantitativa, existe un porcentaje promedio de respuestas incorrectas del 53% y, por último, en la competencia de validar procedimientos y estrategias matemáticas utilizadas para dar solución a problemas el porcentaje promedio de respuestas incorrectas corresponde al 54%.

Por lo anterior, se hace necesario establecer un plan de mejoramiento desde el área de matemáticas que favorezca de manera continua la obtención de resultados favorables en las pruebas Saber 11, de esta manera, se debe centrar el énfasis en el desarrollo del pensamiento numérico, el pensamiento aleatorio, y el pensamiento geométrico espacial, para este último, se pretende que el trabajo desde la Teoría de las Situaciones Didácticas y el modelo Van Hile permita a los estudiantes la construcción autónoma del conocimiento geométrico, por medio de situaciones problema que promuevan el desarrollo de las competencias de razonamiento, resolución de problemas y comunicación.

Con el fin de evidenciar la problemática descrita se diseñó una prueba diagnóstica a treinta estudiantes de grado séptimo, y en el desarrollo de la prueba se encontró como lo mencionan Cuervo et al. (2021) que algunos estudiantes solicitaban explicación al docente sobre ¿qué hacer?, ¿cómo realizarlo? y ¿qué herramientas de GeoGebra utilizar?, es decir, no desean trabajar por su propia iniciativa o no se tiene una comprensión de la situación propuesta: al respecto, algunos estudiantes realizaron construcciones ajenas a lo establecido; dos estudiantes evidenciaron que no se había comprendido la situación propuesta debido a que no se realizaron las construcciones indicadas. Otros factores notorios manifestados por los estudiantes fue la falta de trabajo en equipo y deficiencias en la comunicación entre los mismos estudiantes debido a la imposibilidad de tener un encuentro presencial lo cual dificultó la observación del desarrollo de la actividad.

Así mismo, algunos estudiantes presentaron dificultades en el registro de la longitud de cada lado de los polígonos construidos de acuerdo a la información proporcionada por el programa. En la mayoría de grupos de trabajo los estudiantes argumentaron que las medidas de cada lado de un polígono construido con segmentos eran diferentes mientras que en un polígono regular cada lado tiene la misma longitud. Todos estos antecedentes indican que es necesario direccionar al estudiante hacia la adquisición de un aprendizaje autónomo que le permita la construcción de aprendizajes significativos por medio del diseño y aplicación de situaciones adidácticas y didácticas, las cuales permiten consolidar la construcción del saber objeto de estudio y el fortalecimiento del trabajo en grupo.

Formulación del problema de investigación

Según la problemática expuesta, se establece que, para la construcción mental de los objetos geométricos, los estudiantes deben interactuar y manipular las herramientas de programas para geometría dinámica, buscando potenciar el desarrollo de las competencias de interpretación y argumentación, de formulación y ejecución, y de razonamiento y argumentación. Por tanto, se plantea el siguiente interrogante como eje dinamizador de la presente investigación:

¿Qué situaciones didácticas y adidácticas, mediadas por el software GeoGebra pueden contribuir con la comprensión de los elementos geométricos de los polígonos regulares en estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa José María Silva Salazar?

Según la pregunta de investigación se formula la hipótesis:

Las situaciones didácticas y adidácticas, mediadas por el software GeoGebra contribuyen a la comprensión de los elementos geométricos de los polígonos regulares en estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa José María Silva Salazar.

Objetivos de investigación

Objetivo general

Implementar situaciones didácticas y adidácticas, mediadas por el software GeoGebra que lleven a la comprensión de los elementos geométricos de los polígonos regulares en estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa José María Silva Salazar.

Objetivos específicos

OB1. Realizar un estudio de las dimensiones epistemológica, didáctica y cognitiva para la enseñanza del objeto polígonos regulares.

OB2. Diseñar una secuencia didáctica en el análisis a priori de las situaciones didácticas para la enseñanza de polígonos regulares siguiendo la metodología de la ingeniería didáctica.

OB2.1. Implementar la secuencia didáctica en el marco de la Teoría de las situaciones didácticas y el modelo Van Hiele para la enseñanza de polígonos regulares usando como medio de interacción el software GeoGebra.

OB3. Realizar el análisis a posteriori y la evaluación del proceso de instrucción de los polígonos regulares según las prácticas geométricas, realizadas por los estudiantes.

Justificación de la Investigación

Es notable evidenciar dentro del contexto actual de las Instituciones Educativas que el desarrollo de la mayoría de clases de matemáticas se centra en un conocimiento procedimental dejando de lado el conocimiento conceptual, reflejando el uso de currículos estructurados fundamentados en el aprendizaje algorítmico, que de todas formas es una parte necesaria para el aprendizaje de los conceptos matemáticos (Vargas y Gamboa, 2013). Sin embargo, no puede ser el fin principal del proceso formativo, pues se debe difundir una nueva manera de concebir el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en especial de la geometría, donde se llegue a potenciar y desarrollar las competencias; porque como lo establece el MEN (2006), las competencias matemáticas requieren de diversos ambientes de aprendizaje fundamentados en situaciones problema, que sean para los estudiantes comprensivas y significativas y les permitan movilizarse por niveles de competencia cada vez más complejos. Estas competencias se desarrollan bajo cinco procesos generales que menciona el MEN (2006): "formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos" (p.51).

Respecto al pensamiento espacial y los sistemas geométricos el MEN (2006) lo define como: "el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales" (p.61), de esta manera se busca que los estudiantes interactúen con los objetos, desarrollen diferentes representaciones y logren acercamientos conceptuales para la creación de nuevas representaciones.

Lo expuesto, evidencia la necesidad de incluir en la enseñanza de la geometría el uso de GeoGebra como un medio de interacción para su aprendizaje, hecho importante porque permite que los estudiantes conozcan una nueva manera de aprender matemáticas, interactúen y se apropien de las herramientas de este software dinámico; así mismo permite establecer interacciones, semejanzas y diferencias de las representaciones creadas en la construcción de los polígonos regulares implicando un análisis de sus características y propiedades, además de crear ambientes virtuales de aprendizaje, los cuales permiten que los estudiantes sientan curiosidad, se motiven por aprender geometría, se apropien de los conocimientos previos así como de los nuevos y los materialicen con el fin de establecer conjeturas de lo aprendido respecto al objeto matemático de estudio (Ezguerro, 2014). De esta manera el docente debería estar también, en constante actualización y búsqueda de nuevas metodologías que permitan dirigir correctamente el proceso de enseñanza para la comprensión y de esta forma, guiar de manera correcta las actividades propuestas.

Por tanto, la presente investigación se enmarca dentro del campo de la Educación matemática para indagar en aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en este caso, el estudio se enfoca en el desarrollo del pensamiento geométrico espacial, para evidenciar la importancia del trabajo en la construcción de polígonos regulares con GeoGebra fundamentado en la Teoría de las Situaciones Didácticas y el Modelo de Van Hiele, con la pretensión de alcanzar buenos niveles de comprensión o razonamiento de algunas de las propiedades geométricas de este objeto matemático e identificar algunas ventajas al implementar situaciones didácticas para la enseñanza de los polígonos regulares, así mismo se pretende potencializar habilidades cognitivas de los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa José María Silva Salazar y generar en ellos una excelente experiencia de aprendizaje, de modo que sean autónomos a partir de su rol en clase y extra clase para establecer soluciones a las problemáticas planteadas utilizando medios de interacción que pueden ser tecnológicos como el software seleccionado y de esta forma desarrollar un trabajo siguiendo la tipología de las situaciones didácticas para llegar a la comprensión de este objeto geométrico que conforma una categoría de objetos geométricos denominados en este estudio polígonos regulares.

Capítulo II

Marco Teórico

En este capítulo se mencionan los antecedentes de la investigación relacionados con el uso de la geometría dinámica en el aprendizaje de los polígonos regulares. Se presenta la descripción de los referentes teóricos del estudio que corresponden a la Teoría de las Situaciones Didácticas y el modelo de Van Hiele, utilizados para el diseño de la secuencia didáctica y más específicamente en el diseño de las situaciones a trabajar con los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa.

Antecedentes de la Investigación

Con el propósito de sustentar el presente trabajo de investigación, se acude a diferentes investigaciones que abordan el objeto matemático polígonos regulares y su construcción, estos estudios sirven como apoyo para identificar los aspectos teóricos y metodológicos para el desarrollo de la presente investigación. Estos antecedentes se clasifican en cuatro grupos, los cuales sirven de apoyo a la investigación en el cumplimento de los objetivos propuestos: estudios sobre el uso de programas de geometría dinámica para la enseñanza de los polígonos, estudios para la enseñanza de los polígonos regulares según el modelo de Van Hiele, estudios en diseño de estrategias didácticas para la enseñanza de los polígonos y estudios en el objeto polígonos regulares.

Estudios sobre el uso de programas de geometría dinámica para la enseñanza de los polígonos

Callupe (2019) en su trabajo de maestría titulado: “El software GeoGebra como recurso tecnológico para el aprendizaje de polígonos regulares en estudiantes del cuarto grado de San Juan de Ondores” plantea como objetivo general analizar la influencia del software GeoGebra como recurso tecnológico en el aprendizaje de los polígonos regulares en estudiantes del cuarto grado de San Juan de Ondores.

El estudio plantea una metodología basada en un enfoque mixto de tipo descriptiva explicativa; en cuanto al diseño de la investigación es de tipo pre experimental con muestra única con un pre y post test. Las técnicas utilizadas hacen referencia a una prueba de rendimiento pre y post test al grupo objeto de estudio, un análisis documental y observación del trabajo grupal. Para el análisis de los datos se eligieron 16 alumnos de cuarto grado, con la aplicación del pre test antes del empleo del software GeoGebra, luego se contextualiza acerca de los polígonos regulares empleando GeoGebra y por último se realiza el post test. De los resultados obtenidos en la encuesta después de haber trabajado con GeoGebra en el aprendizaje de polígonos, se evidencia que la mayoría de los estudiantes se ubican en un nivel satisfactorio al consolidar la adquisición de conocimientos de polígonos regulares con el uso de GeoGebra. Los resultados del pre test obtenidos por los estudiantes reflejaron que en promedio los estudiantes quedaron desaprobados y los resultados obtenidos en el post test evidencian que la mayoría de estudiantes aprobaron con una puntuación de 42 a 49 puntos que muestra la consolidación de los conocimientos de los polígonos regulares por medio de la aplicación de GeoGebra y de competencias en la resolución de problemas (Callupe, 2019).

De manera similar, se presenta la investigación titulada: "Construcción de polígonos regulares y cálculo de áreas de superficies planas utilizando el programa GeoGebra: Una estrategia metodológica para la construcción de aprendizajes significativos en estudiantes de grado séptimo", de Rodríguez (2011) con el objetivo de describir el impacto de la implementación del software GeoGebra en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la construcción de figuras geométricas y el concepto de área en estudiantes de grado séptimo de la I.E. Normal Superior Fabio Lozano Torrijos.

La autora de la investigación plantea una metodología sustentada en una investigación mixta bajo el paradigma de la investigación acción. El diseño de la investigación consistió en realizar primero una prueba diagnóstico, después se diseñó una propuesta de cambio basada en la utilización de GeoGebra: se aplica la propuesta, se organizan grupos de dos o tres estudiantes, y se establecen dos horas de clase para realizar las actividades que implicaban el uso del software y tres horas para el trabajo en medios físicos y, por último, se realiza la evaluación de la propuesta.

Los resultados presentados por Rodríguez (2011) del diagnóstico realizado a partir de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, evidencian que la mayoría de estudiantes consideraron que su rendimiento en el área era bueno o regular, algunos manifestaron no sentir agrado por las clases, y que las matemáticas intervienen en su cotidianidad y la minoría de estudiantes estuvieron de acuerdo con la implementación de recursos tecnológicos en las clases de matemáticas. Así mismo, los resultados de la aplicación de la propuesta se basaron en el desarrollo de dos guías: en la primera se mostró el uso de las herramientas de GeoGebra y la construcción de algunos objetos, en donde los estudiantes estuvieron motivados y participativos. En la guía dos, se trabajó la construcción del triángulo y sus líneas notables. Cuando se realizó la evaluación de la propuesta se identificaron habilidades relacionadas con el uso de herramientas informáticas, habilidades en comprensión lectora, habilidades en la expresión de argumentos en el ámbito de las matemáticas y manejo de los conceptos de perímetro, área y clasificación de cuadriláteros y triángulos. Los estudiantes al tener la necesidad de seguir unas instrucciones escritas paso a paso para lograr una construcción correcta en GeoGebra mejoraron su comprensión lectora, para realizar las construcciones caracterizándolas y estableciendo semejanzas y diferencias entre ellas.

Así mismo, Ciro y Villegas (2016) en su tesis de maestría: “Visualización de los conceptos geométricos en los polígonos con el software GeoGebra” proponen como objetivo general potenciar los conceptos de polígono profundizándolos a través de la visualización de semirrectas, segmentos, triángulos equiláteros, escalenos e isósceles y ángulos, por medio de la aplicación del programa GeoGebra. El trabajo de investigación manejó una metodología cualitativa y el marco teórico se sustenta en la aproximación instrumental. Para el desarrollo de la investigación participaron dos grupos a intervenir que trabajaron con GeoGebra y dos grupos de control, los cuales interactuaron con lápiz y papel en grado quinto. La investigación se dividió en tres etapas: fase de planeación, fase de ampliación y fase de análisis de la información.

En los resultados encontrados por Ciro y Villegas (2016) se destaca que las actividades desarrolladas por los estudiantes favorecieron la construcción del concepto de polígono por medio del cálculo de perímetros, áreas y la clasificación de los triángulos. Además, los estudiantes desarrollan competencias para el manejo del programa GeoGebra en la construcción de los polígonos, las transformaciones de simetría y en el reconocimiento de características de los mismos. También se identifica que a medida que los estudiantes avanzaban en el desarrollo de las actividades se mejoró el desarrollo de competencias matemáticas como el razonamiento, hubo mayor afianzamiento de los conceptos trabajados a partir del trabajo realizado en GeoGebra, se fortaleció el trabajo en grupo de los estudiantes y se reconoció que el trabajo mediado por el software GeoGebra es innovador a diferencia de trabajar de manera tradicional con lápiz y papel.

Estudios para la enseñanza de los polígonos regulares según el modelo de Van Hiele

En esta línea de trabajos se presenta la tesis de Jara (2015) titulada: “Aplicación del modelo de razonamiento de Van Hiele mediante el uso del software GeoGebra en el aprendizaje de la Geometría en tercer grado de educación secundaria del Colegio San Carlos de Chosica” El objetivo general de la investigación era determinar el efecto de la aplicación del modelo de razonamiento Van Hiele mediante el uso del software GeoGebra en el aprendizaje de la geometría en el tercer grado de educación secundaria del Colegio San Carlos de Chosica. El autor propone una metodología de tipo aplicativo o tecnológico; de carácter explicativo, con un diseño experimental, y con una muestra compuesta por 54 estudiantes. Primero se aplicó una prueba de entrada al grupo control y experimental para determinar los conocimientos previos que los estudiantes tenían sobre regiones poligonales. Después, se aplicó el módulo de aprendizaje bajo el enfoque de las fases de aprendizaje del modelo Van Hiele, haciendo uso del Software educativo de GeoGebra y, por último, se aplicó una prueba de salida para obtener información sobre los conocimientos adquiridos sobre regiones planas, esta prueba tuvo características similares a la prueba inicial, pero con preguntas diferentes (Jara, 2015).

Los resultados encontrados por Jara (2015) indican que en la prueba de entrada el grupo experimental obtuvo un promedio de 10,93 y el grupo de control obtuvo un promedio de 11,26 con esto se observó una pequeña diferencia favorable para el grupo de control. Siendo la capacidad de razonamiento del grupo experimental la que registró mayor promedio (13) y la capacidad de comunicación matemática del grupo control la que registra mayor promedio (12,7). En la prueba de salida el grupo experimental obtuvo un promedio de (18,12) y el grupo de control de (14,31): se observó de igual forma, una diferencia favorable para el grupo experimental. Así la capacidad de resolución de problemas del grupo experimental registró mayor promedio (18,32) y la capacidad razonamiento del grupo de control fue la que registró mayor promedio (15,69) por tanto, se concluye que la aplicación del modelo de razonamiento de Van Hiele mediante el uso de Software GeoGebra mejoró significativamente el aprendizaje de la geometría en el tercer grado de educación secundaria del Colegio San Carlos de Chosica (Jara, 2015).

Igualmente, en la tesis titulada: “Modelo de Van Hiele y geometría plana” de Ixcaquic (2015) tiene como objetivo general verificar como la aplicación del modelo de Van Hiele se relaciona con el aprendizaje de la geometría plana. El diseño de investigación utilizado fue de tipo Cuasi – experimental, con la aplicación del pretest y del postest. La muestra estuvo conformada por 29 estudiantes de primer grado básico del Instituto Nacional de Educación Básica de Telesecundaria del paraje Tzanjuyub, aldea Paxixil, municipio de San Francisco.

En los resultados presentados por Ixcaquic (2015) se destaca que existe un cambio significativo al aplicar el modelo de Van Hile en el aprendizaje de la geometría plana, porque los estudiantes comprenden más cuando se les presenta la información organizada, permitiendo la adquisición de conocimientos y el desarrollo de habilidades, destrezas y el fortalecimiento del razonamiento. El diseño de la investigación permitió verificar que existe una diferencia considerable entre los resultados del pretest y postest al utilizar el modelo de Van Hiele verificando la incidencia del modelo en el aprendizaje y comprobando la hipótesis propuesta en la investigación.

Estudios en el diseño de estrategias didácticas para la enseñanza de los polígonos

En esta categoría de trabajos se menciona la investigación de Gómez (2018) titulada: “Diseño de una estrategia Didáctica Matemática, para potenciar el pensamiento geométrico, en estudiantes de cuarto grado, a partir de la resolución de situaciones problema de área y perímetro en polígonos regulares”; en el estudio, la autora plantea como objetivo general diseñar una estrategia didáctica matemática, para ser implementada con estudiantes de cuarto grado de la Educación Básica Primaria, con el fin de potenciar el pensamiento geométrico, a partir de la resolución de situaciones problema en área y perímetro de polígonos regulares.

La autora propone una metodología sustentada en el enfoque cualitativo con el diseño de la investigación acción en relación con una situación problema de aula con estudiantes de cuarto grado de la Educación Básica Primaria. La muestra seleccionada para el trabajo fue de 26 estudiantes. En el diseño de la investigación se elaboró y aplicó una prueba denominada Pedagógico Inicial, y después del diagnóstico se implementó una unidad didáctica y por último una prueba pedagógico final. Las fases que se contemplaron en la investigación fueron: fase de exploración en donde se identificaron problemas del contexto educativo del estudiante, luego en la fase de diseño e intervención se diseñó he implemento la unidad didáctica, finalmente, en la fase de recolección y análisis de información se utilizó el diario de campo, rubricas y fichas de lectura.

Los resultados de la investigación respecto a la prueba inicial evidenciaron que el concepto de área estaba en el nivel mínimo para un 65,38% de los estudiantes, el concepto de perímetro en nivel mínimo en un 65,38%, la construcción de figuras en un nivel mínimo en un 34,61% de los estudiantes y el recubrimiento de figuras en un nivel mínimo en un 34,61% de los estudiantes. En cuanto a los resultados de la implementación de la unidad didáctica, se encuentra que las sesiones de clase evidenciaron la conceptualización de nuevos conocimientos, el atreverse a dar una solución a una situación problema, analizar, leer y volver a leer la situación, modelarla, representarla y darle una solución desde diversas perspectivas. Por último, en los resultados de la prueba final los estudiantes interactuaron de manera amena con cada una de las guías, demostrando seguridad y participación al momento de dar una respuesta y argumentar a sus compañeros la estrategia que mejor les dio el resultado solicitado (Gómez, 2018).

Así mismo, se presenta el trabajo de maestría titulado: “Secuencia Didáctica para el aprendizaje del concepto Hexágono en el marco del modelo de Van Hiele” de Otero (2018), el cual tiene como objetivo general analizar las relaciones de aprendizaje de los elementos geométricos del hexágono regular que tienen los estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Limbania Velasco, teniendo en cuenta los planteamientos del modelo de Van Hiele.

Otero (2018) propone una metodología de tipo descriptiva – interpretativa sustentada en el estudio de caso porque permite describir las relaciones particulares. La población estuvo conformada por los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Limbania Velasco, y el desarrollo de la secuencia didáctica fue en la asignatura de geometría, para esto, se realizó una prueba diagnóstica al iniciar el año sobre figuras planas. A partir de la información encontrada el docente dio inicio a una actividad didáctica pertinente llegando a mejores niveles de razonamiento geométrico desde el modelo de Van Hiele y por medio de justificaciones escritas se obtuvo información acerca de cómo los estudiantes se apropiaron del lenguaje geométrico. Por último, se realizó una prueba escrita y se confrontaron las demás fuentes para verificar los niveles logrados por los estudiantes según el modelo Van Hiele.

Los resultados encontrados en la investigación como lo expone Otero (2018), evidencian que se logró la planeación y ejecución de una serie de actividades en forma de secuencia didáctica. En la prueba diagnóstica, los resultados evidenciaron algunas falencias de los estudiantes como no reconocer el nombre de los polígonos de acuerdo a la cantidad de lados, también se les dificultó identificar ángulos, lado inicial y lado final. En la aplicación de la secuencia didáctica el autor menciona que hay un reconocimiento conceptual de polígono regular: se identifica que el triángulo no tiene diagonales y se justifica como al trazar las diagonales de un hexágono se forman diferentes tipos de triángulos y cómo determinar la suma interna de los ángulos de un polígono, además de ir formalizando el conocimiento acerca del objeto de estudio a lo largo de aplicación de la secuencia didáctica.

Por último, en el trabajo denominado: “Una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el modelo de Van Hiele” se plantea como objetivo general diseñar una propuesta didáctica, en el modelo de Van Hiele, para promover que los estudiantes del cuarto grado de secundaria alcancen el nivel 3, de deducción informal, haciendo uso del software de geometría dinámica GeoGebra (Maguiña, 2013). En la metodología propuesta participaron diez estudiantes a quienes se les aplicó una prueba de entrada para reconocer la adquisición de los tres primeros niveles, luego se implementaron actividades para favorecer la comprensión de los cuadriláteros y mejorar la adquisición de los niveles de reconocimiento, análisis y deducción informal, y finalmente, se aplicó una prueba de salida para reconocer la adquisición final en los niveles que tienen los estudiantes.

Los resultados presentados por Maguiña (2013) respecto al diseño y aplicación de la propuesta didáctica, evidencian que los estudiantes alcanzaron en el primer nivel una adquisición alta, en el nivel dos un grado de adquisición intermedia y en el nivel tres estan en el desarrollo de habilidades ubicándose en desempeño bajo. Además, la prueba de entrada identificó los saberes previos de los estudiantes sobre los cuadriláteros y en la implementación se evidenció una mejora continua en los niveles de razonamientos de los estudiantes. Finalmente, el uso del GeoGebra permitió la manipulación de las representaciones realizadas del objeto matemático.

Estudios en el objeto polígonos regulares

En estudios relacionados con el objeto polígonos regulares se presenta la investigación titulada: “Secuencia Didáctica para contribuir en la construcción del concepto de área como magnitud en estudiantes de educación primaria” de Cástillo (2015), donde se propone como objetivo general analizar los efectos del desarrollo de una secuencia didáctica basada en la Teoría de Situaciones Didácticas que favorezca la construcción del concepto de área como magnitud, para que los niños del sexto grado de primaria puedan diferenciar entre área y medida de área.

La metodología propuesta por la autora fue cualitativa en el marco metodológico de la Ingeniería Didáctica donde se establecen las cuatro fases: en la primera fase del análisis preliminar se trataron las concepciones que tienen los estudiantes sobre área de regiones planas y el cálculo de las mismas con el uso de fórmulas. En la fase dos del análisis a priori se utilizaron herramientas para los procedimientos de medida de área de figuras poligonales simples. En la tercera fase de experimentación, se desarrolló la secuencia didáctica fundamentada en la composición de polígonos y finalmente, en la fase de análisis a posteriori o de validación se organizaron los datos obtenidos de la secuencia didáctica en relación con el marco teórico. La población objeto de estudio corresponde a 30 estudiantes de la Institución Educativa Estatal “Virgo Potens” y la muestra estuvo conformada por 4 estudiantes de grado sexto (Cástillo, 2015).

Entre los resultados encontrados por la autora, al comparar los análisis a priori y posteriori de cada una de las actividades, se evidencia que estos permitieron validar el conteo de unidades y el uso de herramientas como la cuadrícula que permitió a los estudiantes medir el área de polígonos diversos, así mismo la cuadrícula fue útil en el conteo de las unidades que cubrían la superficie de los polígonos, finalmente, el uso de la secuencia didáctica permitió que los estudiantes pasarán por las fases de acción, formulación y validación dando respuesta al objetivo planteado lo cual evidencia que se pudo contribuir con la propuesta al aprendizaje de los estudiantes (Cástillo, 2015).

Así mismo, Ramírez (2011) en su trabajo de maestría denominado: “Construcción de polígonos regulares” presenta como objetivo general profundizar en los conceptos básicos de geometría plana como fundamento para diseñar actividades que potencien en los estudiantes niños y niñas de sexto grado la construcción de polígonos regulares usando sus propiedades y relaciones.

En esta investigación se propone una metodología activa centrada en el estudiante, de manera que la secuencia didáctica diseñada para estudiantes de grado sexto se fundamenta en los elementos y conceptos necesarios para poder realizar la construcción de los polígonos con regla y compás, lo cual permitirá que el estudiante construya su conocimiento. En los resultados encontrados por el autor se específica que las construcciones con regla y compás promueven el desarrollo de capacidades y competencias en los estudiantes y permiten observar diferentes propiedades y características de los polígonos regulares como el número de triángulos en que puede descomponerse un polígono regular, además se menciona que es importante que el estudiante y el docente tengan conocimiento sobre conceptos básicos.

Fundamentos teóricos

El presente estudio se enmarca en una visión constructivista de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, fundamentada en la concepción que el conocimiento matemático se produce de la interacción de los estudiantes y el docente. Para esto se toman los fundamentos de la Teoría de las Situaciones didácticas y el modelo Van Hiele.

Teoría de las Situaciones Didácticas

La Escuela Francesa de la Educación Matemática

En este apartado, se resalta, en primer lugar, la importancia que ha tenido la Escuela Francesa de la didáctica de la matemática desde sus inicios en los años setenta ante la necesidad de descubrir fenómenos relacionados con la adquisición y trasmisión de conocimientos matemáticos, además la forma como ha contribuido al aporte del desarrollo de teorías sobre la enseñanza de las matemáticas con la estructuración de diseños constructivistas. Entre sus representantes se encuentra Guy Brousseau el cual es el creador de la Teoría de las Situaciones

Didácticas, al percibir la necesidad de crear para la didáctica un modelo propio para la enseñanza de la matemática, en la formación de profesores de matemáticas.

Se han establecido diferentes acepciones acerca de la enseñanza de las matemáticas, en donde investigaciones realizadas a lo largo del tiempo han indicado diversos métodos de enseñanza. Es así como Brousseau (2007), indica que “la enseñanza es concebida como las relaciones entre el sistema educativo y el alumno vinculadas a la transmisión de un saber dado y, de este modo, la relación didáctica se interpreta como una comunicación de informaciones” (p.13): esta concepción está relacionada con la idea que el maestro organiza el saber a enseñar al alumno y él toma lo necesario.

Brousseau (2007), hace algunas aclaraciones de conceptos fundamentales dentro de la estructuración de la Teoría de las Situaciones Didácticas que propone, con el fin de ser comprendidos y aplicados por los docentes dentro de su quehacer en el sector educativo.

Las situaciones

Brousseau (2007) define una situación como: “un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado, como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar en este medio un estado favorable” (p.16). Los recursos que posee el sujeto corresponden a una gran variedad de disposiciones que obedecen al uso de uno o varios conocimientos. Al respecto, el docente diseña y manipula las situaciones en el entorno de los estudiantes como herramienta para que estos adquieran un aprendizaje nuevo.

Situación adidáctica

Una situación adidáctica es considerada como el aspecto donde la intención de enseñanza no aparece explicita para el alumno. Sólo interviene el estudiante y el medio. El docente propone problemas, de manera que el alumno pueda aceptarlos por medio de una reflexión y análisis de los mismos. El docente no interviene hasta que el estudiante produzca la respuesta. Así, se denomina situación adidáctica como lo argumenta Brousseau el momento en el que "El estudiante no habrá adquirido verdaderamente el conocimiento hasta no ser capaz de utilizarlo en situaciones que encuentre fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de cualquier indicación intencional" (Brousseau, 2007, p. 31).

Situación fundamental

"El conjunto de situaciones que caracterizan una misma noción está estructurado y puede ser engendrado a partir de un pequeño número de situaciones llamadas fundamentales, a través de un juego de variantes y variables" (Brousseau, 2007, p. 32).

En la esquematización del proceso de la situación de enseñanza a lo largo del tiempo, el aprendizaje antiguamente estaba en función de lo que el profesor instruyera, y de la capacidad por parte de los estudiantes por dejarse moldear, bajo los principios de las relaciones didácticas establecidas, es así, como se establece el triángulo didáctico en donde interviene el profesor, el alumno y el saber, constituyendo relaciones reciprocas entre los tres elementos.

Situación Didáctica

Una situación didáctica describe la actividad del profesor, la del alumno y la del mismo sistema educativo. El aprendizaje que se adquiere se logra por medio de una adaptación del sujeto que aprende al medio creado en la situación planteada, con intervención o no del docente en el transcurso del proceso (Brousseau, 2007, p.18). El profesor proporciona el medio didáctico con el fin que el estudiante construya su conocimiento, manifestando la relación de los tres elementos del triángulo didáctico.

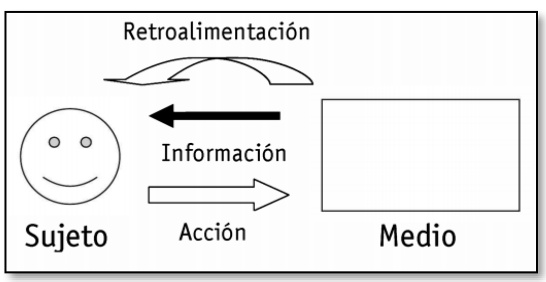
Tipología de las situaciones

A continuación, se menciona la clasificación de las situaciones y una caracterización de las mismas, en la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007).

Situación de Acción. En esta primera fase el alumno debe actuar frente al problema utilizando sus conocimientos previos, descubriendo, experimentando, aceptando y rechazando diferentes estrategias de solución de la problemática diseñada y planteada por el docente. Chevallard et al. (2005) afirman que una buena situación de acción debe permitir al alumno juzgar los resultados sin la intervención del profesor. Brousseau (2007) de manera similar indica: "la sucesión de situaciones de acción constituye el proceso por el cual el alumno va a "aprenderse" un método de resolución de su problema" (p.22). Además, en el esquema de una situación de acción intervienen y se relacionan el sujeto y el medio, a través de una relación de acción.

Figura 2.

Esquema de una Situación de Acción

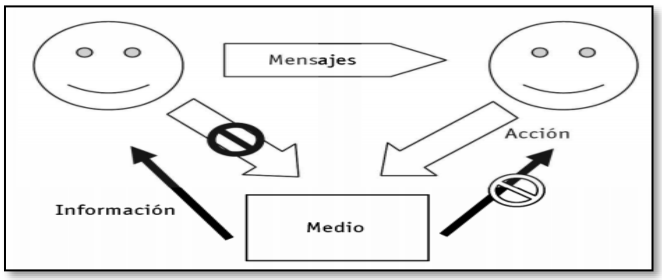


Nota. Tomada de (Brousseau, 2007).

Situación de formulación. Brousseau (2007) menciona que la formulación de un conocimiento implícito cambia a la vez sus posibilidades de tratamiento, aprendizaje y adquisición. Esta situación, corresponde a la capacidad del sujeto para identificar, descomponer y reconstruir en un sistema lingüístico el problema, además el mismo medio exige en la formulación involucrar a otro sujeto, con el fin de intercambiar la información a un lenguaje matemático de acuerdo al objeto en cuestión.

Figura 3

Esquema de una Situación de formulación.

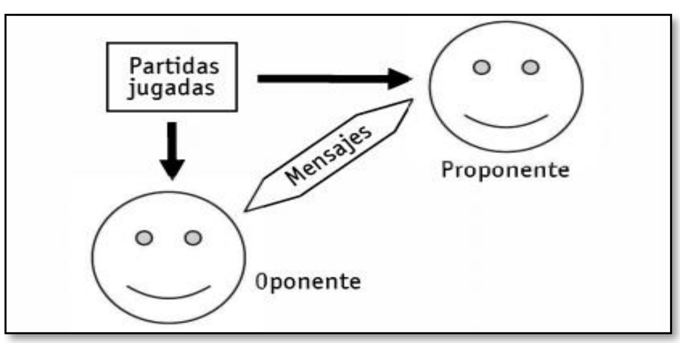


Nota. Tomada de (Brousseau, 2007).

Situación de validación. Situación de discusión, donde el estudiante debe probar que el modelo elegido es válido. Brousseau (2007) indica que: “El alumno no sólo tiene que comunicar una información, sino que también tiene que afirmar que lo que dice es verdadero en un sistema determinado, sostener su opinión o presentar una demostración” (p. 23).

Figura 4

Esquema de una Situación de Validación



Nota. Tomada de (Brousseau, 2007).

Situación de institucionalización. Como lo sustenta Brousseau (2007) los alumnos formalizan el conocimiento matemático, se obtienen conclusiones y se sistematiza lo aprendido en el desarrollo de las secuencias didácticas en la construcción de saberes y con la intervención del docente se conceptualiza en su totalidad el saber matemático.

Efectos que acontecen una situación didáctica

En las diferentes interacciones que se establecen en la situación didáctica, se identifican algunos efectos que pueden obstaculizar la construcción de conocimientos por parte del estudiante dentro de la situación diseñada por el profesor, generando aspectos negativos en el contrato didáctico.

Efecto Topaze. Como lo establece Chavarría (2006) en su obra, Brousseau caracteriza este efecto en la medida en el que el docente interviene para hacer la resolución del problema sin permitir la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes, debido a que estos no han podido llegar a esta, en donde se evidencia las dificultades que tienen los estudiantes para la construcción del conocimiento.

Efecto Jourdain. Este efecto ilustra el papel que juega el docente cuando el estudiante comete errores en sus respuestas, el docente asume como verdadero las respuestas dadas (Chavarría, 2006). Desde el punto de vista de Brousseau (2007): “El efecto Jourdain nace cuando el profesor, para evitar el debate del conocimiento con el alumno y eventualmente comprobar el fracaso, admite reconocer el indicio de un conocimiento sabio en los comportamientos o en las respuestas del alumno” (p.77).

Deslizamiento Metacognitivo. Como lo manifiesta Brousseau (2007): “cuando una actividad de enseñanza fracasa, puede que el profesor intente justificarse y, para continuar su acción, tome como objetos de estudio sus propias explicaciones y sus medios heurísticos en lugar del conocimiento matemático” (p.78). Así, en la resolución de un problema se adopta una heurística y se asume como un objeto válido de estudio.

Uso abusivo de la analogía. Una definición de analogía que se produce en las relaciones didácticas corresponde a: “Una analogía es una excelente herramienta heurística […]. Pero su utilización en la relación didáctica es, en realidad, una temible manera de producir efectos Topaze” (Brousseau, 2007, p. 81). Además, en el uso abusivo de la analogía se menciona que:

> […] si los alumnos fracasan en su aprendizaje, hay que darles una nueva oportunidad en el mismo tema. Ellos lo saben. Aunque el profesor disimule el hecho de que el nuevo problema se parece al anterior, los alumnos van a buscar […] la solución que ya les dieron. […] De este modo, obtienen la solución leyendo las indicaciones didácticas y no gracias a un compromiso con el problema. (p. 81)

El medio de interacción

Se considera como medio un sistema autónomo donde los comportamientos de los estudiantes son los que indican cómo funciona y se modeliza. Brousseau (2007) menciona que un ejercicio o un problema es un dispositivo que siguiendo algunas reglas ayuda al sujeto en la situación planteada, haciendo énfasis en interrogantes como: ¿Qué juego debe jugar el sujeto para necesitar un conocimento determinado? En este aspecto, las relaciones de un alumno con el medio pueden clasificarse de la siguiente manera: “los intercambios de informaciones no codificadas o sin lenguaje (acciones y decisiones), los intercambios de informaciones codificadas (mensajes), y por último los intercambios de juicios, se refieren a las sentencias de enunciados que tiene un rol en la teoría formulada" (Brousseau, 2007, p.23 - 24).

El Contrato Didáctico

Es la relación existente entre el alumno y el profesor en la situación didáctica. Chavarría (2006) establece que el contrato didáctico: "refiere a la consigna establecida entre profesor y alumno, de esta forma, comprende el conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del docente" (p.3). De igual manera, Brousseau (2007) resalta lo siguiente:

> Cada uno, el maestro y el alumno, se hacen una idea de lo que el otro espera de él y de lo que cada uno piensa de lo que el otro piensa (…) y esta idea crea las posibilidades de intervención, de *devolución* de la parte adidáctica de las situaciones y de la *institucionalización.* (p. 70)

Variables Didácticas

Como lo afirma Brousseau (2007) las variables didácticas son determinadas por el profesor, además son elementos del problema planteado al estudiante por el profesor, es decir, modificados por el docente de tal forma que se requiera un cambio en cada una de las estrategias de resolución de la situación planteada, lo cual permitirá a los estudiantes resolver diferentes problemas en donde utilicen un mismo conocimiento.

Modelo de Van Hiele

Fouz (2013) menciona que el modelo de Van Hiele aparece al final de los años cincuenta, diseñado por el matrimonio Diana y Pierre Van Hiele en el año 1957, el libro donde se publica la teoría se tituló: Structure and Insight. Los niveles propuestos en este modelo ayudan a secuenciar los temas de geometría por medio del diseño de situaciones didácticas para mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje de la misma. Fouz (2013) afirma que: “el aprendizaje de la Geometría se hace pasando por unos determinados niveles de pensamiento y conocimiento, que no van asociados a la edad y que sólo alcanzado un nivel si se puede pasar al siguiente”.

De acuerdo a lo establecido en el modelo Van Hiele, existen dos elementos primordiales en el aprendizaje de la geometría, el primero “el lenguaje utilizado” que consiste en que tanto los niveles como el adquirir el conocimiento, van ligados a un lenguaje acorde con los contenidos trabajados, y el segundo “la significatividad de los contenidos” lo cual señala que solo van a hacer asimilados los conocimientos que están en el nivel apropiado.

Niveles del modelo de Van Hiele

El modelo Van Hiele establece cinco estructuras con un orden estricto donde sólo superando un nivel se pasa al siguiente.

Nivel 0. Visualización y reconocimiento (familiarización)

Nivel 1. Análisis (comparación)

Nivel 2. Ordenación o clasificación

Nivel 3. Deducción formal (argumentación)

Nivel 4. Rigor

A continuación, se explica las características de cada uno de los niveles según la visión de Fouz (2013) para el análisis del razonamiento geométrico de los estudiantes en las situaciones propuestas.

Nivel 0. Visualización y reconocimiento (familiarización): los objetos se perciben en su totalidad como un todo, no hay diferencias de características y componentes, los objetos se describen y no se reconocen las propiedades del objeto de estudio. Las figuras geométricas se perciben como una unidad. Las representaciones se identifican a partir de su apariencia física a través de descripciones visuales. Los términos utilizados hacen referencia más a la parte visual que conceptual.

Nivel 1. Análisis (comparación): en este nivel se reconocen las propiedades del objeto de estudio a partir de la observación y experimentación, de manera informal se describen las figuras por sus propiedades, pero no se relacionan ni figuras ni propiedades y no se pueden elaborar definiciones. Además, experimentando con las figuras se pueden establecer nuevas propiedades, sin realizarse una clasificación de los objetos o figuras a partir de las propiedades. En este nivel los estudiantes empiezan a generalizar, indicando qué figuras cumplen una determinada propiedad o condición.

Nivel 2. Ordenación o clasificación: en este nivel se describen las figuras de manera formal, lo cual implica entender el significado de las definiciones, se realizan clasificaciones lógicas de manera formal, ya que el nivel de razonamiento matemático ya está iniciado, se reconocen cómo unas propiedades se derivan de otras y se relacionan entre sí. Se siguen las demostraciones, pero no se entienden en cuanto a su estructura, lo cual impide reconocer la naturaleza axiomática de la Geometría. En este nivel los estudiantes son capaces de presentar definiciones abstractas e indicar las condiciones que cumplen una clase de figuras geométricas.

Nivel 3. Deducción formal (argumentación): en este punto ya se realizan demostraciones lógicas formales, permitiendo justificar adecuadamente las proposiciones. De igual forma, en este nivel se comprende la naturaleza axiomática de las matemáticas y se manejan las relaciones entre las propiedades, así se realizan demostraciones para obtener un mismo resultado partiendo de proposiciones o premisas distintas. El estudiante puede demostrar un resultado de diferentes formas.

Nivel 4. Rigor: se reconoce que existen diversos sistemas axiomáticos, los cuales se pueden comparar, permitiendo realizar una geometría de manera abstracta, es decir, sin necesidad de ejemplos concretos, y así alcanzar un alto rigor matemático.

Los anteriores niveles tienen un orden que no se puede modificar, son recursivos porque lo que no es implícito en un nivel, es explicito en nivel siguiente, la transición entre los niveles se efectuá de una manera discreta o continua. Para realizar el tránsito entre estos niveles es fundamental la relación e interacciones del estudiante, saber y profesor; Según Van Hiele el paso de un nivel a otro depende más de la enseñanza recibida, que, de la edad o madurez, centrándose en el proceso de enseñanza-aprendizaje, a las actividades diseñadas y a los medios o materiales utilizados (Fouz, 2013).

Los niveles cuentan con cinco propiedades, las cuales se mencionan a continuación:

Propiedad 1. (Secuencia fija) Un estudiante no puede estar en el nivel de van Hiele n, si no ha pasado por el nivel $n - 1$.

Propiedad 2. (Adyacencia) En cada nivel de pensamiento lo que era intrínseco en el nivel anterior se vuelve extrínseco en el nivel actual.

Propiedad 3. (Distinción) Cada nivel tiene sus propios símbolos lingüísticos y su propia red de relaciones que conectan esos símbolos.

Propiedad 4. (Separación) Dos personas que razonan en diferentes niveles no pueden entenderse entre sí.

Propiedad 5. (Logro) El proceso de aprendizaje que lleva a un entendimiento completo, es decir al siguiente nivel más alto se compone de cinco fases (Usiskin, 1982).

Fases del Modelo de Van Hiele

Fase 1. Preguntas / información: esta fase trata de acercarse lo más que se puede a la situación real y contexto de los estudiantes. Se realizan preguntas para determinar el punto de partida y el camino a seguir en cada actividad diseñada. Se proponen preguntas para un nivel en especial, pero las respuestas dadas pueden indicar un nivel diferente.

Fase 2. Orientación dirigida: fase en la cual es primordial la creatividad y metodología del docente, en el diseño de las actividades didácticas secuenciales y lógicas que permitan la exploración, interacción, dinamización y aplicación de relaciones y propiedades del objeto de estudio.

Fase 3. Explicación (explicitación): como su nombre lo indica es una fase de intercambio, de análisis, de interacción de ideas entre los alumnos, en donde el rol del profesor consiste en la expresión de contenidos nuevos y en la corrección del lenguaje utilizado por los discentes.

Fase 4. Orientación libre: se aplica el conocimiento adquirido en la solución de diversas actividades complejas, las cuales deben constituirse por tareas abiertas para su respectivo análisis y posterior justificación con argumentos válidos y sustentables.

Fase 5. Integración: en esta fase se sintetizan los trabajos ya realizados, por medio de una red de significados aprendidos que sustituyan a los que ya se tenían.

La evaluación en el modelo de Van Hiele

La evaluación en el modelo de Van Hiele es un factor importante en la secuenciación de cada uno de los niveles y fases del modelo, se debe tener en cuenta el nivel de razonamiento de los alumnos, lo cual depende del área de las matemáticas que se esté trabajando, otro factor a valorar es la forma como los alumnos responden y el porqué de cada una de las respuestas más que lo que no contestan o responden bien o mal, el nivel de los estudiantes se encuentra en las respuestas dadas y no en la pregunta formulada y por último cuando se encuentra en la transición entre cada nivel en ocasiones es difícil identificar la situación en que se encuentran los estudiantes (Fouz, 2013).

Encuadre de los marcos teóricos

Los aspectos definidos en la Teoría de las Situaciones Didácticas se utilizan para reconocer las diversas interacciones entre el docente, el saber y los estudiantes por medio del software GeoGebra que permite la comprensión de las propiedades geométricas de los polígonos regulares a partir de las construcciones de los mismos. Para el análisis de los resultados en la aplicación de las situaciones didácticas se busca identificar como es la transición de los estudiantes por la situación de acción, la situación de formulación y la situación de validación y la forma como los estudiantes comprenden cuando se presenta la información de una manera ordenada y progresiva siguiendo el Modelo Van Hiele con los correspondientes niveles (nivel 0 de visualización y reconocimiento, nivel 1 de análisis, nivel 2 de ordenación o clasificación y el nivel 3 de deducción formal) los cuales permiten a los estudiantes la construcción de conocimientos conceptuales y procedimentales. Además, la relación establecida entre las situaciones didácticas y los niveles del modelo de Van Hiele son constantes en cada una de las actividades diseñadas en la secuencia didáctica como se evidencia en las categorías de análisis propuestas.

Respecto, a las fases del modelo de Van Hiele se asumen como implícitas en cada nivel de razonamiento. Además, de acuerdo a lo expresado por Jara (2015) las fases de aprendizaje permiten la organización de las actividades a desarrollar. En particular, no es posible la integración total de las fases con la situación de acción ya que esto permite que el docente interactúe y se involucre en el diseño de la situación y no permita el buen desarrollo de la situación adidáctica, únicamente se trabaja la fase de información, la fase de orientación dirigida, la fase de orientación libre y fase de integración. En las demás situaciones se trabaja de acuerdo a las cinco fases de aprendizaje: en la fase de información se busca la utilización de los saberes previos. En la fase de orientación dirigida se presenta la actividad a desarrollar de manera secuencial, además los estudiantes comprenden y buscan el conocimiento. En la fase de explicitación, se busca la interacción de los estudiantes y el intercambio de información en un lenguaje matemático. En la fase de orientación libre, los estudiantes utilizarán el saber construido. Finalmente, en la fase de integración, se consolidan los conocimientos trabajados.

Además, la complementariedad de la Teoría de las Situaciones Didácticas y el modelo de Van Hiele permite el desarrollo de las habilidades y destrezas que tienen los estudiantes en geometría. El objetivo principal es que cada estudiante desarrolle su razonamiento geométrico, en especial, con el objeto polígonos regulares, de modo que el rol de los estudiantes en las clases se centra en la exploración, el aprendizaje autónomo, la comunicación y el trabajo en grupo, en lugar de clases centradas en el docente y en el aprendizaje memorístico.

Capítulo III

Metodología

En este capítulo se presenta la metodología de investigación, se establece como nivel de investigación el exploratorio descriptivo (Arias, 2012). Se describe el diseño de investigación basado en la ingeniería didáctica para dar cumplimiento a los objetivos planteados en la investigación por medio del diseño e implementación de diferentes situaciones didácticas de aprendizaje enmarcadas en secuencias didácticas. Se establecen las categorías de análisis para la información recolectada en el estudio y se describen las técnicas e instrumentos de recolección de datos. Finalmente, se describe la población y muestra seleccionada para la ejecución de esta investigación.

Nivel de Investigación

La investigación posee un enfoque cualitativo, este enfoque permite recolectar datos con el fin de fundamentar el proceso, según la interpretación y reflexión de los mismos. Desde este punto de vista y de acuerdo con Hernández et al. (2014) la investigación cualitativa parte de lo especifico a lo general, es decir, en un proceso inductivo, el cual permite explorar y describir. Principalmente, se fundamenta en el proceso de interpretación y el análisis de los datos.

En este aspecto se toma la metodología de la ingeniería didáctica como una propuesta con un enfoque cualitativo. De acuerdo al nivel de investigación, de tipo exploratoria - descriptiva como lo sustenta Arias (2012):

> La investigación exploratoria es aquella que se efectuá sobre un tema u objeto poco conocido o estudiado, por lo que sus resultados constituyen una visión aproximada de dicho objeto (p. 19).

> La investigación descriptiva consiste en la caracterización de un hecho, fenómeno, individuo o grupo, con el fin de establecer su estructura o comportamiento. Los resultados de este tipo de investigación se ubican en un nivel intermedio en cuanto a la profundidad de los conocimientos se refiere. (p. 24)

Diseño de investigación

Para llevar a cabo la investigación se adapta la metodología propuesta por la *ingeniería didáctica* (Artigue, 1995), caracterizada como una metodología de investigación por el esquema experimental; fundamentado en las realizaciones didácticas para las clases y también por las diferentes formas de validación que utiliza entre el análisis a priori y el análisis a posteriori. La ingeniería didáctica establece cuatro fases, para el desarrollo del estudio. Según Artigue (1995), la fase 1 corresponde a la realización de los análisis preliminares; la fase 2 de concepción y análisis a priori, la fase 3 de experimentación y por último la fase 4 de análisis a posteriori y evaluación.

Fase 1. Análisis preliminares

Esta es la fase de concepción que se fundamenta en los conocimientos didácticos y se centra en la realización de algunos análisis como: el análisis conceptual (epistemológico del objeto de estudio), el análisis de los contenidos contemplados en la enseñanza, el análisis cognitivo (análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución), el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica y finalmente el análisis de instrucción y evaluación (Artigue, 1995).

De acuerdo a lo expuesto anteriormente respecto al diseño de investigación, Artigue (1995) menciona tres dimensiones para el estudio de los obstáculos, similares a las propuestas por Brousseau (2007), las dimensiones son:

Dimensión epistemológica. Esta dimensión corresponde a la descripción del objeto matemático a estudiar a lo largo de la historia: se hace una revisión en cada una de las edades de la civilización, y se hace énfasis en el origen, evolución, surgimiento de problemas y la solución de los mismos.

Dimensión didáctica. Esta dimensión corresponde al proceso de enseñanza de la parte matemática. Se revisan los textos escolares utilizados en el área de matemáticas para analizar la parte estructural del objeto polígonos regulares, así como la construcción de los mismos utilizando el programa GeoGebra.

Dimensión cognitiva. Corresponde a aquellas características cognitivas de la muestra a la cual se dirige la enseñanza del objeto matemático.

En esta fase se realizará los siguientes análisis preliminares para dar respuesta al primer objetivo específico: a) El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza (dimensión epistemológica); b) El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos (dimensión didáctica); c) El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución (dimensión cognitiva).

Con estas herramientas teóricas y metodológicas, se procede al diseño de las diferentes situaciones didácticas, de manera que permitan a los estudiantes interactuar con las herramientas del programa GeoGebra y potenciar el desarrollo de las competencias matemáticas. Las diferentes situaciones propuestas surgen a partir de una reflexión constructiva por parte de la docente, pensando en fomentar espacios de desarrollo del conocimiento geométrico en las aulas de clase, en especial, en la comprensión de las propiedades geométricas de los polígonos regulares a partir de la construcción de los mismos por medio de situaciones adidácticas en las que la docente no tenga participación directa, y los estudiantes utilicen los saberes previos, estrategias de comunicación de la información matemática encontrada, se fortalezca el trabajo en grupo y se sistematice el conocimiento matemático obtenido a lo largo del desarrollo de las actividades de aprendizaje propuestas.

Fase 2. La concepción y el análisis a priori

En esta fase Artigue (1995) indica que el investigador decide actuar sobre un determinado número de variables del sistema. Estas son las variables que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado. Se pueden distinguir dos tipos de variables de comando: las variables macro didácticas o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería y las variables micro didácticas o locales, concernientes a la organización de una secuencia o de una fase. Su objetivo comprende una parte descriptiva y una predictiva se centra en las características de una situación adidáctica que se ha querido diseñar y que se va a tratar de llevar a los alumnos.

En esta fase se da cumplimiento al segundo objetivo específico y se utilizan las variables micro didácticas que permiten la comprensión de las propiedades geométricas de los polígonos regulares a partir de su construcción. En la Tabla 1, se especifica los tipos de variables micro didácticas que se consideran en el desarrollo de esta investigación. En este análisis se tienen en cuenta las cinco fases del modelo de Van Hiele que constituyen los ítems de las situaciones problema de acuerdo a lo expuesto por Fouz (2013). En esta fase se realiza el análisis a cada una de las situaciones propuestas, lo que se espera que los estudiantes planteen y desarrollen en cada situación adidáctica.

Tabla 1

Variables de comando

Variables micro didácticas o locales	Longitud de cada lado del triángulo
	Medida de cada ángulo del triángulo y suma de los ángulos internos del triángulo.
	Longitud de cada lado del cuadrado.
	Medida de cada ángulo del cuadrado y suma de los ángulos internos del cuadrado.
	Construcción de polígonos de cinco lados por medio de segmentos y utilizando la herramienta polígono regular.
	Reconocer diferencias y semejanzas de polígonos de cinco lados.
	Longitud de cada lado del pentágono regular.
	Medida de cada ángulo del pentágono regular y Suma de los ángulos internos del pentágono.

Fase 3. Experimentación

En esta fase de la ingeniería didáctica se implementan las situaciones problemas diseñadas de acuerdo a la Teoría de las Situaciones Didácticas y el modelo de Van Hiele. En la investigación cada nivel del modelo de Van Hiele se trabaja dentro de las fases para el desarrollo del estudio como se establece a continuación:

En el primer nivel, el estudiante debe reconocer y manipular las herramientas del software GeoGebra para seguir cada una de las indicaciones dadas realizando una construcción geométrica. En el segundo nivel de comparación, el estudiante busca determinar diferencias, características y propiedades entre los elementos del objeto de estudio realizando comparaciones con dos o tres estudiantes. En el tercer nivel, se busca que el estudiante relacione objetos del entorno en relación con el objeto matemático de estudio, además el estudiante determina las condiciones básicas para describir un elemento geométrico. Para el cuarto nivel, se espera que el estudiante realice únicamente argumentaciones básicas basadas en la observación y el quinto nivel no se aplicará en esta investigación dado su nivel de complejidad y rigor matemático.

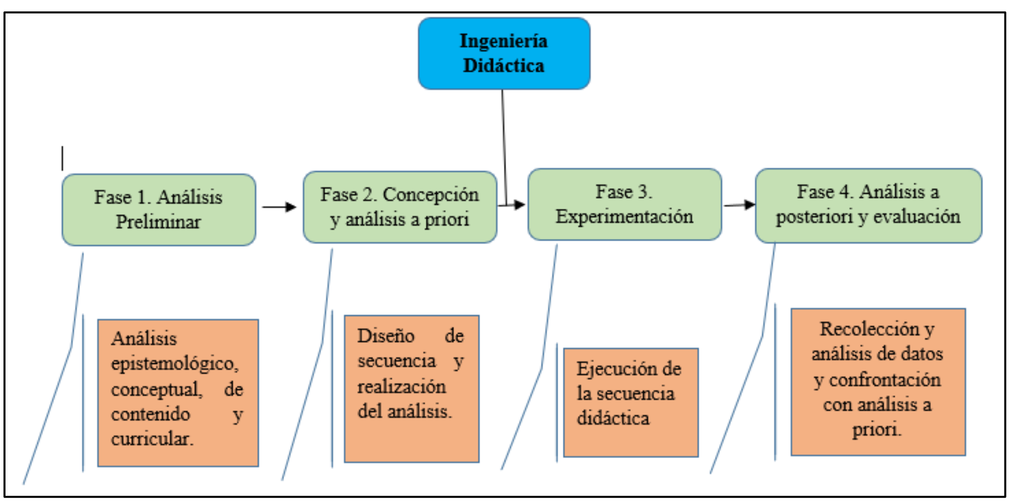
Fase 4. Análisis a posteriori y evaluación

En esta fase se analizan los datos recogidos a lo largo de la experimentación como las observaciones realizadas de las secuencias, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se completan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso. En la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se realiza la validación de las hipótesis formuladas en la investigación (Artigue, 1995).

En esta fase se reúne la solución de las actividades propuestas por parte de los estudiantes objeto de estudio y luego se validan las hipótesis establecidas en el análisis a priori y en la fase de experimentación para dar desarrollo al tercer objetivo específico.

Figura 5

Fases de la Ingeniería Didáctica



Nota. Elaboración propia.

Técnicas e Instrumentos de recolección de datos

Técnicas de recolección de datos

Para el desarrollo de esta investigación se emplean las técnicas de recolección de datos como análisis documental y una secuencia didáctica al grupo objeto de investigación.

Instrumentos de recolección de datos

Los instrumentos de recolección de datos que se utilizaron en la primera fase del estudio, corresponden a los análisis preliminares que contemplan la dimensión epistemológica, didáctica y cognitiva. En la segunda fase de la investigación, denominada concepción y análisis a priori se realizó el diseño de la secuencia didáctica para modelar el trabajo con el software GeoGebra en la construcción de polígonos regulares con el objetivo de llegar a la comprensión de las propiedades geométricas. En la tercera fase de experimentación, se implementa la secuencia didáctica con la muestra objeto de estudio para recolectar la información en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas y el modelo de Van Hiele, y en la fase de análisis a posteriori y validación se compara el análisis a posteriori con el a priori y se analizan los resultados para realizar la validación de las hipótesis propuestas según las categorías de análisis establecidas.

Tabla 2

Técnicas e instrumentos de recolección de datos. Análisis Preliminares

Fase	Secuencia Didáctica	Técnicas e instrumentos de recolección de datos	Técnicas e instrumentos para el análisis de la información
Análisis preliminares	Dimensión epistemológica, dimensión didáctica y dimensión cognitiva.	Revisión documental de libros de historia de las matemáticas sobre el objeto polígonos regulares.	Recolección, análisis y síntesis de la información.

		Análisis conceptual del objeto polígonos regulares. Análisis a un libro de texto para la enseñanza de las matemáticas de grado séptimo. Revisión de textos escolares.	

Tabla 3

Técnicas e instrumentos de recolección de datos. Análisis a priori

Fase	Secuencia Didáctica	Técnicas e instrumentos de recolección de datos	Técnicas e instrumentos para el análisis de la información
Análisis a priori	Se presenta el análisis de cada una de las situaciones problemas propuestas, lo que se espera que los estudiantes planteen en cada actividad de manera que se pueda observar cómo es el tránsito de los conocimientos.	Cuestionario de cada una de las situaciones problemas propuestas.	Análisis de la información esperada por los estudiantes en cada situación y nivel según las categorías de análisis relacionadas con los marcos teóricos del estudio.

Tabla 4

Técnicas e instrumentos de recolección de datos. Experimentación

Fase	Secuencia didáctica	Técnicas e instrumentos de recolección de datos	Análisis de la información
Experimentación	Actividad 1. Construcción del triángulo. Se utiliza el programa GeoGebra, que es un software educativo. Se propone la construcción del triángulo equilátero utilizando las herramientas de GeoGebra.	Cuestionario sobre el diseño de la situación. didáctica (guía 1). Observación directa.	Rejilla de indicadores *Ract1*. Análisis y reflexión de la información suministrada por los estudiantes en cada situación y nivel.

		Registro de información (escrita).	
	Actividad 2. Problema – área del triángulo Los estudiantes utilizan el programa GeoGebra para realizar la construcción del triángulo rectángulo y determinar el área del mismo por medio de instrucciones y utilizando las herramientas del Software.	Cuestionario sobre el diseño de la situación. didáctica (guía 2). Observación directa. Registro de información (escrita).	Rejilla de indicadores *Ract2.* Análisis y reflexión de la información suministrada por los estudiantes en cada situación y nivel
	Actividad 3. Construcción del cuadrado. Los estudiantes utilizan el programa GeoGebra para realizar la construcción del cuadrado por medio de instrucciones y utilizando las herramientas del Software.	Cuestionario sobre el diseño de la situación didáctica (guía 3). Observación directa. Registro de información (escrita).	Rejilla de indicadores *Ract3.* Análisis y reflexión de la información suministrada por los estudiantes en cada situación y nivel.
	Actividad 4. Propiedades del pentágono. Para el desarrollo de la sesión los estudiantes utilizan el programa GeoGebra, realizan la representación geométrica del polígono de cinco lados utilizando las herramientas del programa como segmentos, la herramienta polígono y la herramienta polígono regular con el fin de comparar similitudes y diferencias entre estas tres figuras e identificar el	Cuestionario sobre el diseño de la situación didáctica (guía 4). Observación directa. Registro de información (escrita).	Rejilla de indicadores *Ract4.* Análisis y reflexión de la información suministrada por los estudiantes en cada situación y nivel.

	pentágono como un polígono de cinco lados regular e irregular.		
	Actividad 5. Construcción del pentágono Los estudiantes realizarán la construcción geométrica del pentágono regular utilizando puntos, segmentos, rectas y circunferencias en el programa GeoGebra.	Cuestionario sobre el diseño de la situación didáctica (guía 5). Observación directa. Registro de información (escrita).	Rejilla de indicadores *Ract5.* Análisis y reflexión de la información suministrada por los estudiantes en cada situación y nivel.

Tabla 5

Técnicas e instrumentos de recolección de datos. Análisis a posteriori

Fase	Secuencia Didáctica	Técnicas e instrumentos de recolección de datos	Técnicas e instrumentos para el análisis de la información
Análisis a posteriori.	Se recolecta la información del desarrollo de las situaciones por parte de los estudiantes y luego se validan las hipótesis establecidas en el análisis a priori y en la fase de experimentación.	Confrontación del análisis a priori y el a posteriori.	Análisis y triangulación de la información.

Categorías para el análisis de la información

Las categorías para el análisis de la información se definen a partir de los fundamentos de la Teoría de las Situaciones Didácticas y el modelo de Van Hiele, y los objetivos propuestos en la investigación. Para cada una de las situaciones didácticas se aplicarán las categorías de análisis definidas para el respectivo análisis de la información suministrada por los estudiantes. En la Teoría de las Situaciones Didácticas cada categoría se define de acuerdo a la situación y al número de la actividad diseñada, por ejemplo, para la primera actividad la situación de acción se simboliza como SA1, la situación de formulación como SF1, la situación de validación como SV1 y la situación de institucionalización como SI, así respectivamente con las demás actividades propuestas en la secuencia didáctica.

Tabla 6

Rejilla de indicadores actividad 1. Ract1

Categoría: Situación	Indicador	Categoría: Nivel de comprensión	Indicador
SA1. Triángulo	**SAind1.** El estudiante actúa de manera activa y tiene buena disposición para realizar la situación problema propuesta. **SAind2.** El estudiante lee y analiza la situación problema propuesta. **SAind3.** El estudiante interactúa con las herramientas del software GeoGebra sin la intervención del docente. **SAind4.** El estudiante aplica los conocimientos previos sobre el triángulo. **SAind5.** El estudiante establece conjeturas para la solución de la situación presentada.	**Nivel 0 de visualización o Reconocimiento**	**Niv0.indn1**. Los estudiantes reconocen el triángulo por su apariencia, sin que las propiedades de estos jueguen un papel explícito en la identificación. **Niv0.indn2.** El proceso de razonamiento sobre objetos matemáticos básicos (Triángulo) se lleva a cabo mediante consideraciones visuales de los objetos como un todo. **Niv0.indn3.** Las figuras geométricas de los triángulos, se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus propiedades y componentes. **Niv0.indn4.** El lenguaje y la significatividad es acorde con el contenido trabajado.
SF1. Triángulo	**SFind1.** El alumno intercambia información con uno o varios compañeros. **SFind2.** El estudiante logra convencer a su compañero(s)	**Nivel 1 Análisis (comparación)**	**Niv1.ind1.** Los estudiantes reconocen las propiedades del triángulo a partir de la observación y experimentación. **Niv1.ind2.** De manera informal se describe el

	que el procedimiento realizado por él es correcto. **SFind3.** El estudiante argumenta, compara y comunica con otros estudiantes los resultados encontrados de las longitudes de los lados del triángulo y las medidas de los ángulos.		triángulo por sus propiedades, pero no se relacionan ni figuras ni propiedades y no se pueden elaborar definiciones. **Niv1.ind3.** Los estudiantes indican si el triángulo cumple una determinada propiedad o condición. **Niv1.indn4.** El lenguaje y la significatividad es acorde con el contenido trabajado.
SV1. **Triángulo**	**SVind1.** El estudiante argumenta y defiende correctamente el conocimiento adquirido frente a sus demás compañeros en relación con las propiedades y construcción del triángulo. **SVind2.** Forma de socialización de cada grupo: posturas respecto al conocimiento buscado.	**Nivel 2 Ordenación o clasificación**	**Niv2.ind1.** Se identifica el triángulo por medio de sus propiedades las cuales se consideran independientes unas de otras. **Niv2.ind2.** Se reconoce cómo unas propiedades del triángulo se derivan de otras y se relacionan entre sí. **Niv2.ind3.** Se establecen las condiciones o características del triángulo. **Niv2.indn4.** El lenguaje y la significatividad es acorde con el contenido trabajado.
SI1. **Triángulo**	**SIind1.** Se retoma lo producido por los estudiantes para la formalización del conocimiento.	**Nivel 3 Deducción formal**	**Niv3.ind1.** El estudiante realiza argumentaciones básicas basadas en las propiedades observadas en el triángulo. **Niv3.ind2.** Se realizan demostraciones lógicas formales, permitiendo justificar adecuadamente las proposiciones.

Tabla 7

Rejilla de indicadores actividad 2. Ract2

Categoría: Situación	Indicador	Categoría: Nivel de comprensión	Indicador
SA2. Problema Área del triángulo	**SAind1.** El estudiante actúa de manera activa y tiene buena disposición para realizar la situación problema propuesta. **SAind2.** El estudiante lee y analiza la situación problema propuesta. **SAind3.** El estudiante interactúa con las herramientas del software GeoGebra sin la intervención del docente. **SAind4.** El estudiante aplica los conocimientos previos sobre la clasificación de triángulos según la medida de sus ángulos. .	**Nivel 0 de visualización o Reconocimiento**	**Niv0.indn1**. Los estudiantes reconocen el triángulo rectángulo, sin que las propiedades de estos jueguen un papel explícito en la identificación. **Niv0.indn2.** El proceso de razonamiento sobre objetos matemáticos básicos (Triángulo rectángulo) se lleva a cabo mediante consideraciones visuales de los objetos como un todo. **Niv0.indn3.** Las figuras geométricas de los triángulos, se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus propiedades y componentes. **Niv0.indn4.** El lenguaje y la significatividad es acorde con el contenido trabajado.
SF2. Problema Área del triángulo	**SFind1.** El alumno intercambia información con uno o varios compañeros. **SFind2.** El estudiante logra convencer a su compañero(s) que el procedimiento realizado por él es correcto. **SFind3.** El estudiante argumenta, compara y comunica con otros estudiantes los resultados encontrados del área del triángulo rectángulo.	**Nivel 1 Análisis (comparación)**	**Niv1.ind1.** Los estudiantes reconocen las propiedades del triángulo rectángulo a partir de la observación y experimentación. **Niv1.ind2.** De manera informal se describe como calcular el área del triángulo rectángulo por sus propiedades, pero no se relacionan ni figuras ni propiedades y no se pueden elaborar definiciones.

	SAind4. El estudiante establece el procedimiento para calcular el área del triángulo utilizando equivalencia de unidades para la solución de la situación presentada		**Niv1.indn3.** El lenguaje y la significatividad es acorde con el contenido trabajado.
SV2. Problema Área del triángulo	**SVind1.** El estudiante argumenta y defiende correctamente el conocimiento adquirido frente a sus demás compañeros en relación con el área del triángulo rectángulo. **SVind2.** Forma de socialización de cada grupo: posturas respecto al conocimiento buscado.	**Nivel 2 Ordenación o Clasificación**	**Niv2.ind1.** Se reconoce cómo unas propiedades del triángulo se derivan de otras y se relacionan entre sí. **Niv2.ind2.** Se establecen las condiciones para determinar el área del triángulo. **Niv2.indn3.** El lenguaje y la significatividad es acorde con el contenido trabajado.
SI2. Problema Área del triángulo	**SIind1.** Se retoma lo producido por los estudiantes para la formalización del conocimiento.	**Nivel 3 Deducción formal**	**Niv3.ind1.** El estudiante realiza argumentaciones básicas basadas en el cálculo del área del triángulo rectángulo. **Niv3.ind2.** El estudiante puede demostrar una propiedad de diferentes formas.

Tabla 8

Rejilla de indicadores actividad 3. Ract3

Categoría: Situación	Indicador	Categoría: Nivel de comprensión	Indicador
SA3.Cuadrado	**SAind1.** El estudiante actúa de manera activa y tiene buena disposición para realizar la situación problema propuesta. **SAind2.** El estudiante lee y analiza la situación problema propuesta. **SAind3.** El estudiante interactúa con las herramientas del software GeoGebra sin la intervención del docente. **SAind4.** El estudiante aplica los conocimientos previos sobre el cuadrado. **SAind5.** El estudiante establece conjeturas para la solución de la situación presentada.	**Nivel 0 de visualización o Reconocimiento**	**Niv0.indn1**. Los estudiantes reconocen el cuadrado por su apariencia, sin que las propiedades de estos jueguen un papel explícito en la identificación. **Niv0.indn2.** El proceso de razonamiento sobre objetos matemáticos básicos (cuadrado) se lleva a cabo mediante consideraciones visuales de los objetos como un todo. **Niv0.indn3.** Las figuras geométricas del cuadrado, se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus propiedades y componentes. **Niv0.indn4.** El lenguaje y la significatividad es acorde con el contenido trabajado.
SF3.Cuadrado	**SFind1.** El alumno intercambia información con uno o varios compañeros. **SFind2.** El estudiante logra convencer a su compañero(s) que el procedimiento realizado por él es correcto. **SFind3.** El estudiante argumenta, compara y comunica con otros estudiantes los resultados	**Nivel 1 Ordenación o clasificación**	**Niv1.ind1.** Los estudiantes reconocen las propiedades del cuadrado a partir de la observación y experimentación. **Niv1.ind2.** De manera informal se describe el cuadrado por sus propiedades, pero no se relacionan ni figuras ni propiedades y no se pueden elaborar definiciones.

	encontrados de las longitudes de los lados del cuadrado y las medidas de los ángulos.		**Niv1.ind3.** Los estudiantes indican si el cuadrado cumple una determinada propiedad o condición. **Niv1.indn4.** El lenguaje y la significatividad es acorde con el contenido trabajado.
SV3.Cuadrado	**SVind1.** El estudiante argumenta y defiende correctamente el conocimiento adquirido frente a sus demás compañeros en relación con las propiedades y construcción del cuadrado. **SVind2.** Forma como cada grupo socializa sus posturas respecto al conocimiento buscado.	**Nivel 2 Deducción formal**	**Niv2.ind1.** Se identifica el cuadrado por medio de sus propiedades las cuales se consideran independientes unas de otras. **Niv2.ind2.** Se reconoce cómo unas propiedades del cuadrado se derivan de otras y se relacionan entre sí. **Niv2.ind3.** Se establecen las condiciones o características que cumple el cuadrado. **Niv2.indn4.** El lenguaje y la significatividad es acorde con el contenido trabajado.
SI3.Cuadrado	**SIind1.** Se retoman los argumentos de los estudiantes para la formalización del conocimiento.	**Nivel 3 Deducción formal**	**Niv3.ind1.** El estudiante realiza argumentaciones básicas basadas en las propiedades observadas en el cuadrado. **Niv3.ind2.** Se realizan demostraciones lógicas formales, permitiendo justificar adecuadamente las proposiciones.

Tabla 9

Rejilla de indicadores actividad 4. Ract4

Categoría: Situación	Indicador	Categoría: Nivel de comprensión	Indicador
SA4. Propiedades del pentágono.	**SAind1.** El estudiante actúa de manera activa y tiene buena disposición para realizar la situación problema propuesta. **SAind2.** El estudiante lee y analiza la situación problema propuesta. **SAind3.** El estudiante interactúa con las herramientas del software GeoGebra sin la intervención del docente. **SAind4.** El estudiante aplica los conocimientos previos sobre el uso de la herramienta segmento, polígono y polígono regular para construir el pentágono. **SAind5.** El estudiante establece conjeturas para la solución de la situación presentada.	**Nivel 0 de visualización o Reconocimiento**	**Niv0.indn1**. Los estudiantes clasifican el pentágono por su apariencia en regular e irregular, sin que las propiedades de estos jueguen un papel explícito en la identificación. **Niv0.indn2.** El proceso de razonamiento sobre objetos matemáticos básicos (polígono de cinco lados construido con el uso de la herramienta segmento, polígono y polígono regular) se lleva a cabo mediante consideraciones visuales de los objetos como un todo. **Niv0.indn3.** El polígono de cinco lados construido con la herramienta segmento, polígono y la herramienta polígono regular se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus propiedades y componentes. **Niv0.indn4.** El lenguaje y la significatividad es acorde con el contenido trabajado.
SF4. Propiedades del pentágono.	**SFind1.** El alumno intercambia información con uno o varios compañeros. **SFind2.** El estudiante logra convencer a su compañero(s) que el procedimiento realizado por él es correcto.	**Nivel 1 Análisis o comparación**	**Niv1.ind1.** Los estudiantes reconocen las similitudes y diferencias del polígono de cinco lados construido con la herramienta segmento, del polígono construido con la herramienta polígono y del polígono de cinco lados

	SFind3. El estudiante argumenta, compara y comunica con otros estudiantes los resultados encontrados de las similitudes y diferencias del polígono de cinco lados construido con la herramienta segmento, del polígono construido con la herramienta polígono y del polígono de cinco lados construidos con la herramienta polígono regular.		construidos con la herramienta polígono regular a partir de la observación y experimentación. **Niv1.ind2.** De manera informal se describe el polígono de cinco lados por sus propiedades, pero no se relacionan ni figuras ni propiedades y no se pueden elaborar definiciones. **Niv1.ind3.** Los estudiantes indican si el polígono cumple una determinada propiedad o condición. **Niv1.indn4.** El lenguaje y la significatividad es acorde con el contenido trabajado.
SV4. Propiedades del pentágono.	**SVind1.** El estudiante argumenta y defiende correctamente el conocimiento adquirido frente a sus demás compañeros en relación con las similitudes y diferencias del polígono de cinco lados construido con la herramienta segmento, del polígono construido con la herramienta polígono y del polígono de cinco lados construidos con la herramienta polígono regular. **SVind2.** Forma cómo cada grupo socializa sus posturas respecto al conocimiento buscado.	**Nivel 2 Ordenación**	**Niv2.ind1.** Se identifica el polígono de cinco lados por medio de sus propiedades las cuales se consideran independientes unas de otras. **Niv2.ind2.** Se reconoce como unas propiedades del polígono de cinco lados se derivan de otras y se relacionan entre sí. **Niv2.ind3.** Se establecen las condiciones o características que cumplen el polígono de cinco lados. **Niv2.indn4.** El lenguaje y la significatividad es acorde con el contenido trabajado.
SI4.	**SIind1.** Se retoma los argumentos de los estudiantes para la	**Nivel 3 Deducción formal**	**Niv3.ind1.** El estudiante realiza argumentaciones básicas basadas en las

Propiedades del pentágono.	formalización del conocimiento.		propiedades observadas en el polígono de cinco lados. **Niv3.ind2.** Se realizan demostraciones lógicas formales, permitiendo justificar adecuadamente las proposiciones.

Tabla 10

Rejilla de indicadores actividad 5. Ract5

Categoría: Situación	Indicador	Categoría: Nivel de comprensión	Indicador
SA5. Pentágono regular	**SAind1.** El estudiante actúa de manera activa y tiene buena disposición para realizar la situación problema propuesta. **SAind2.** El estudiante lee y analiza la situación problema propuesta. **SAind3.** El estudiante interactúa con las herramientas del software GeoGebra sin la intervención del docente. **SAind4.** El estudiante aplica los conocimientos previos sobre el pentágono regular. **SAind5.** El estudiante establece conjeturas para la solución de la situación presentada.	**Nivel 0 de visualización o Reconocimiento**	**Niv0.indn1**. Los estudiantes reconocen el pentágono regular por su apariencia, sin que las propiedades de estos jueguen un papel explícito en la identificación. **Niv0.indn2.** El proceso de razonamiento sobre objetos matemáticos básicos (pentágono regular) se lleva a cabo mediante consideraciones visuales de los objetos como un todo. **Niv0.indn3.** Las figuras geométricas del pentágono regular, se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus propiedades y componentes. **Niv0.indn4.** El lenguaje y la significatividad es acorde con el contenido trabajado.
SF5. Pentágono regular	**SFind1.** El alumno intercambia información con uno o varios compañeros.	**Nivel 1 Análisis (comparación)**	**Niv1.ind1.** Los estudiantes reconocen las propiedades del pentágono regular a partir de

	SFind2. El estudiante logra convencer a su compañero(s) que el procedimiento realizado por él es correcto. **SFind3.** El estudiante argumenta, compara y comunica con otros estudiantes los resultados encontrados de las longitudes de los lados del pentágono regular y las medidas de los ángulos internos.		la observación y experimentación. **Niv1.ind2.** De manera informal se describen el pentágono regular por sus propiedades, pero no se relaciona ni figuras ni propiedades y no se pueden elaborar definiciones. **Niv1.ind3.** Los estudiantes indican si el pentágono regular cumple una determinada propiedad o condición. **Niv1.indn4.** El lenguaje y la significatividad es acorde con el contenido trabajado.
SV5. Pentágono regular	**SVind1.** El estudiante argumenta y defiende correctamente el conocimiento adquirido frente a otros compañeros en relación con las propiedades y construcción del pentágono regular. **SVind2.** Forma como cada grupo socializa sus posturas respecto al conocimiento buscado.	**Nivel 2 Ordenación o clasificación.**	**Niv2.ind1.** Se identifica el pentágono regular por medio de sus propiedades las cuales se consideran independientes unas de otras. **Niv2.ind2.** Se reconoce cómo unas propiedades del pentágono regular se derivan de otras y se relacionan entre sí. **Niv2.ind3.** Se establece las condiciones o características que cumplen el pentágono regular. **Niv2.indn4.** El lenguaje y la significatividad es acorde con el contenido trabajado.
SI5. Pentágono regular	**SIind1.** Se retoma los argumentos de los estudiantes para la formalización del conocimiento.	**Nivel 3 Deducción formal**	**Niv3.ind1.** El estudiante realiza argumentaciones básicas basadas en las propiedades observadas en el pentágono regular.

Unidad de trabajo y unidad de análisis

Unidad de trabajo

La población está conformada por todos los estudiantes de grado séptimo A con 15 mujeres y 16 hombres y grado séptimo B con 12 mujeres y 19 hombres, que cursan su año escolar en el año 2021 en la Institución Educativa José María Silva Salazar, el colegio se encuentra ubicado en el municipio de Buenavista al occidente del departamento de Boyacá, maneja un modelo pedagógico constructivista para la enseñanza y aprendizaje de los saberes y fomenta la formación de estudiantes dinámicos, creativos, innovadores, críticos e investigadores de los diversos procesos de aprendizaje. La Institución educativa cuenta con 653 estudiantes, 279 en las sedes de primaria y 374 en la sede de bachillerato, ofrece educación en preescolar, básica primaria, básica secundaria y media a estudiantes del municipio y la mayoría de estudiantes pertenecen a la zona rural del municipio y se ubican en estrato socioeconómico 1 y 2.

La población presenta un promedio general acumulado en el área de matemáticas de nivel básico de acuerdo a la escala numérica establecida en la Institución (30 a 39 puntos), específicamente, el 16,13 % de los estudiantes está en nivel superior, el 17,74 % de los estudiantes se ubica en nivel alto y el 59,06 % está en desempeño básico. Se identifica que existe desmotivación en algunos estudiantes lo cual ha afectado considerablemente el rendimiento académico.

La educación durante la pandemia

Debido a la crisis sanitaria originada por la pandemia del Covid 19, los sistemas educativos han tenido que transformar e innovar las estrategias utilizadas para dar continuidad al proceso educativo y adaptarse a la utilización de las TIC como medio de interacción con los estudiantes.

En la Institución Educativa José María Silva Salazar se diseñan guías de aprendizaje bajo la estrategia “A estudiar en casa”. Particularizando en el área de matemáticas se trabaja cada guía de acuerdo a lo establecido en el plan de área y en el texto guía para garantizar que cada estudiante tenga continuidad en el proceso de aprendizaje de las matemáticas correspondientes a grado séptimo.

Dado el retorno a la presencialidad en el mes de julio de las Instituciones Educativas por directrices del Ministerio de Educación Nacional la mayoría de estudiantes de grado Séptimo continúan con el estudio en casa y debido a que la mayoría de los estudiantes son de zona rural y hay dificultades de conexión a internet en el colegio el acompañamiento al desarrollo de cada guía se realiza por medio de la aplicación WhatsApp y llamadas telefónicas: al iniciar la semana se dan las indicaciones sobre el trabajo a realizar en la guía establecida, se comparten videos tutoriales realizados por la docente sobre el tema que se aborda en la guía, y para tutorías o para resolver dudas se utilizan los horarios de clase establecidos para matemáticas. Los estudiantes que asisten a la presencialidad evidencian aspectos que afectan el proceso de enseñanza y aprendizaje como la conceptualización de algunos temas de matemáticas, en especial temas de geometría, así como la falta de motivación de algunos estudiantes y el acompañamiento en casa por parte de los Padres de Familia.

En particular, se hace visible la importancia de la utilización del software dinámico GeoGebra como apoyo al proceso de aprendizaje de la geometría en las clases presenciales y para esta investigación se convierte en el medio para desarrollar las situaciones didácticas propuestas. Los estudiantes han descargado la aplicación GeoGebra Geometría, en el celular, y esto les ha permitido interactuar y manipular las herramientas del programa, favoreciendo el trabajo autónomo y la creatividad.

Delimitación de la unidad de trabajo y selección de la unidad de análisis

Para tener un mayor acercamiento del desarrollo de las situaciones didácticas por parte de los estudiantes y obtener resultados precisos y favorables se decidió delimitar la población y trabajar con estudiantes de grado séptimo A, este grupo poblacional se ha seleccionado teniendo en consideración que es el grupo con mayor dificultad en el proceso de aprendizaje de conceptos geométricos y la representación de los mismos.

Para la selección de la muestra, se tiene en cuenta que es no probabilística de tipo intencionado porque como lo argumenta Arias (2012) se desconoce la probabilidad que tienen los elementos de la población para integrar la muestra y se realiza la selección de los elementos de la muestra de acuerdo a criterios previamente establecidos. Por lo anterior, se decide trabajar con ocho estudiantes en el proceso investigativo con el objetivo de aplicar la secuencia didáctica diseñada con los estudiantes que estan en presencialidad en la Institución Educativa, quienes cuentan con un celular para descargar la aplicación y trabajar en el salón de clases cumpliendo con los protocolos de bioseguridad establecidos por el colegio y tener una observación directa en cada proceso respecto a la forma de comunicación entre los estudiantes. De acuerdo a lo expuesto anteriormente, participaron voluntariamente ocho estudiantes de grado Séptimo A en el desarrollo de la secuencia didáctica propuesta entre los días 13 al 23 del mes de septiembre del año en curso (2021) en horario académico establecido para la asignatura de matemáticas.

Fijada la muestra para el desarrollo de la secuencia didáctica se compartieron los consentimientos informados a los Padres de Familia de cada estudiante y a las Directivas de la Institución Educativa José María Silva Salazar con el objetivo de dar a conocer el propósito de la investigación y gestionar el permiso para el registro de información audiovisual de las clases en donde se desarrolle la secuencia didáctica.

Capítulo IV

Resultados y discusión

En este capítulo se evidencian los resultados de la investigación de acuerdo a la metodología de la ingeniería didáctica: esta, como metodología de investigación, se caracteriza en primer lugar, por un esquema experimental basado en "las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (Artigue, 1995, p. 44). Allí se distinguen por lo general dos niveles: el de la micro-didácticas y el de las macro-didácticas, dependiendo de la importancia de la realización didáctica involucrada en la investigación. Las investigaciones micro-didácticas son más fáciles de llevar a la práctica y corresponden a la organización de una actividad o secuencia. Las investigaciones de macro-ingeniería, corresponde a la organización global de la ingeniería (Artigue, 1995). En concordancia con los objetivos específicos propuestos, la investigación se centra en las variables micro-didácticas que permitan la construcción del aprendizaje de las propiedades de los polígonos regulares a partir de su construcción.

La metodología de la ingeniería didáctica se caracteriza también, en comparación con otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada. La ingeniería didáctica se ubica, en el registro de los estudios de caso por lo general y su validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

En la fase I de análisis preliminares se realizan los análisis correspondientes al problema de investigación que incluyen el análisis de las dimensiones epistemológica, didáctica y cognitiva para el objeto polígonos regulares los cuales se presentan a continuación.

Fase I. Análisis preliminares

Dimensión epistemológica. El objeto polígono regular en la historia de las matemáticas

A lo largo de la historia de las matemáticas se han estudiado y utilizado los polígonos regulares, pero en la mayoría de los textos consultados, no se mencionan sus orígenes y aparecen como algo dado para su utilización, por tanto, se hace un recorrido por las épocas de la historia de la matemática con la pretensión de evidenciar su emergencia en estos periodos.

La edad antigua (4000 a.C. – 476 d.C.)

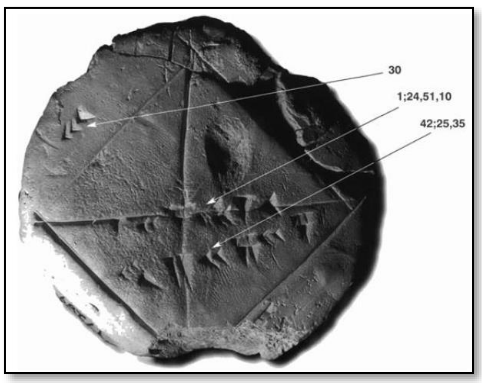
La geometría en la civilización babilónica como lo expone Kline (1972) fue poco significativa, los problemas que surgieron se convirtieron en problemas algebraicos, como la división de diferentes campos y tamaños de ladrillos para realizar construcciones. Así Kline (1972) afirma respecto a las figuras que representan los problemas geométricos, que estos se ilustran de manera poco clara y las fórmulas empleadas son incorrectas. "En los cálculos babilónicos de áreas, por ejemplo, no puede decirse con seguridad si los triángulos son rectángulos o si los cuadriláteros son cuadrados y, por lo tanto, si las fórmulas aplicadas son correctas o no para las figuras en cuestión" (Kline, 1972, p. 29).

El área del círculo la expresaban por medio de la formula $A = \frac{C^2}{12}$, c corresponde a la longitud de la circunferencia, lo cual indica utilizar el valor de π igual a 3. También, encontraron la relación entre el perímetro de un hexágono regular y su circunferencia circunscrita, para un valor de π igual a $3\ \frac{1}{8}$ (Kline, 1972). Así, la geometría se limitó al estudio de la relación con problemas prácticos de la vida diaria y a encontrar reglas para el cálculo de áreas de figuras planas sencillas incorporando los polígonos regulares (Kline, 1972). Los babilonios en el uso de los polígonos regulares presentan sus avances en las tablillas de arcilla que contienen diferentes diagramas, la tablilla YBC 7289, contiene la forma de un cuadrado con sus respectivas diagonales, Stewart (2007) menciona que:

> Los lados del cuadrado están marcados con numerales cuneiformes para 30. Sobre una diagonal está marcado 1; 24, 51, 10 y debajo de ella 42; 25, 35 que es su producto por 30 y, por lo tanto, la longitud de dicha diagonal. De modo que, 1; 24, 51, 10 es la longitud de la diagonal de un cuadrado más pequeño, con lados unidad. El teorema de Pitágoras nos dice que está diagonal es la raíz cuadrada de 2, que escribimos $\sqrt{2}$. La aproximación 1; 24, 51, 10 para $\sqrt{2}$ es muy buena. (p.26)

Figura 6

Tablilla YBC7269 y sus numerales cuneiformes



Nota. Tomada de (Stewart, 2007).

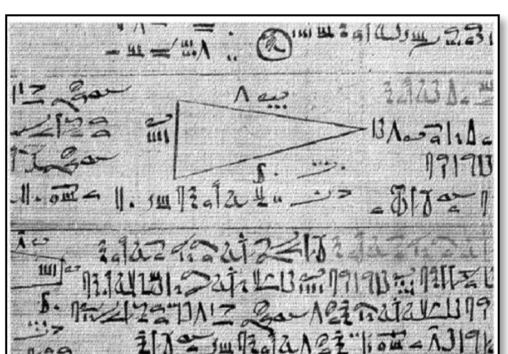
La civilización egipcia, cuyos orígenes se establecen en el año 4000 a.C. aproximadamente, en su geometría se puede evidenciar que fue de tipo práctica para su uso, como en la medida de las tierras tras las inundaciones originadas por el río Nilo, por tanto, los egipcios consideraron la geometría de manera práctica (Kline, 1972). En los papiros de Moscú y Rhind hay 26 problemas de geometría que contienen diferentes expresiones de medición que favorecen el cálculo de áreas de volúmenes y de figuras planas, como señala Ortiz (2005): “Los egipcios conocían y usaban la regla: la razón entre el área de un círculo y su circunferencia es la misma que entre el área del cuadrado circunscrito al círculo y su perímetro" (p.39).

En su gran mayoría los problemas que están en estos dos papiros, hacen referencia al cálculo de áreas de terrenos en la agricultura. En el papiro Rhind los problemas del 48 al 55 tratan sobre áreas de triángulos, rectángulos, trapecios y círculos. A continuación, se describe textualmente el problema 50 y 51 de acuerdo a como lo expone Maza (2016):

> El problema 50 del papiro Rhind se enfoca en calcular el área de un campo circular, considerando un cuadrado de 8 khet de lado. El producto de 8 khet por 8 khet resulta en 64 setat, lo que indica que:
>
> Un setat es la superficie de un cuadrado de un khet de lado. Dado que 1 khet = 100 codos reales, ello quiere decir que el setat será igual a una superficie de 10.000 codos cuadrados, es decir, unos $2.375\ m^2$, aproximadamente $2{,}75$ hectáreas. Ello permite tener una idea precisa de la extensión de los campos según los datos encontrados en los papiros. (p.166)
>
> Rhind – Problema 51: Ejemplo de calcular (el área de) un triángulo de tierra. Si te dicen: ¿Cuál es el área de un triángulo de 10 $khet$ de mryt (altura) y 4 $khet$ de base?

Figura 7

Problema 51 del Papiro Rhind



Nota. Tomada de (Maza, 2016).

La resolución consiste en tomar la mitad de la base ($4\ khet = 400\ codos$) “para hallar su rectángulo” dice explícitamente el papiro:

1	400	$[4\ khet]$
$\frac{1}{2}$	200	$[2\ khet]$

De manera que ahora se multiplica el resultado ($2\ khet$) por la altura ($10\ khet = 1000\ codos$):

1	1000	$[10\ khet]$
2	2000	

Obteniéndose el resultado de 2000 “codos de tierra” o 20 $setat$, que es la respuesta final dada por el escriba. La figura que acompaña al texto del problema presenta un triángulo aproximadamente rectángulo con la medida de la base y la altura junto a dos de sus lados (4 y 10). El termino para denominar su altura *(mryt)* significa ‘orilla’ o ‘borde’ de una extensión de agua lo que podría referirse a un lado antes que a una altura. (p.243)

Análisis semiótico a la solución dada:

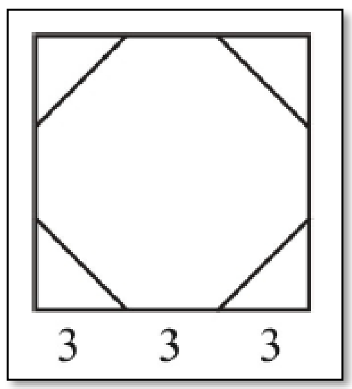
Se observa que en la solución del problema se utilizan ***términos*** como: mitad, multiplica, base y altura que corresponden a los ***elementos lingüísticos***, se utilizan los ***conceptos*** de unidades de medida como *khet* y *codos* y sus conversiones; se hace uso de ***algoritmos o procedimientos*** para realizar el producto de la medida de la base y de la altura en $khet$ y determinar el valor del área en codos de tierra. En la solución dada por el escriba se evidencia el uso de la ***proposición*** “el área del triángulo es igual al producto de la mitad de la base por la altura” y se hace uso de la ***propiedad*** $A = \frac{b}{2} \times h$.

Respecto al número π como lo sustenta Ortiz (2005) los egipcios expresaron su valor en términos de la razón del círculo inscrito en un cuadrado, como se describe a continuación:

Sea un cuadrado cuyo lado mide 9 unidades. Se construye un octágono de modo que el área de cada uno de los triángulos isósceles de las esquinas es $4\ \frac{1}{2}$. Así el área del cuadrado es 81 y área del octágono $\acute{a}rea\ del\ oct\acute{a}gono =$ área del cuadrado $-$ suma de las áreas de los citados triángulos $= 81 - 18 = 63$

Figura 8

Cuadrado de 9 unidades



Nota. Tomada de (Ortiz, 2005).

Ahora, se considera el área del círculo inscrito en el cuadrado dado. Se observa que el área del octágono difiere poco del área del círculo. Luego, (Considerando $r = \frac{9}{2}$) $\pi r^2 \approx 63$, esto es, $\frac{81}{4}\pi \approx 63$, de donde $\pi = 3\frac{1}{9}\,(3{,}111\,\ldots)$.(p.41)

Análisis semiótico a la solución presentada:

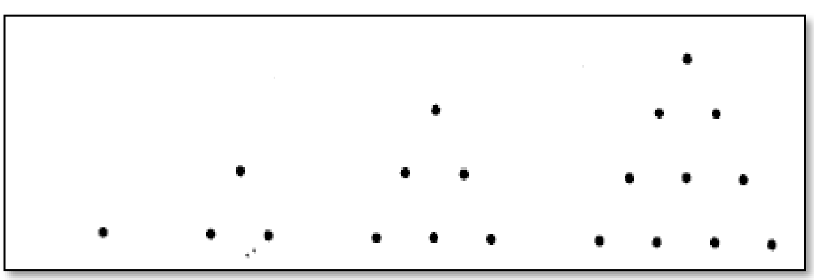
En la solución de la situación problema se identifican ***elementos lingüísticos*** como cuadrado, triángulos, octágono, diferencia, simplificación, aproximación y área que consolidan algunos ***conceptos*** como el de área de figuras geométricas, tales como el área del cuadrado, el área del triángulo, área del octágono y área del círculo. En relación con los ***procedimientos*** se tiene el cálculo del área de los cuatro triángulos, el área del cuadrado y el cálculo del área del octágono a partir de la diferencia entre el área del cuadrado y el área de los cuatro triángulos y la determinación del área del círculo inscrito. Finalmente, en cuanto a los ***argumentos*** se indica que el área del octágono difiere poco del área del círculo.

La civilización griega (2800 a.C.) se desarrolló en diferentes momentos con ilustres representantes, primero se encuentra la escuela Jónica bajo el liderazgo de su fundador Tales de Mileto (624 a.C. – 546 a.C.), después aparece la escuela pitagórica fundada en Crotona hacia finales del siglo VI por su representante Pitágoras de Samos (580 a.C. – 500 a.C.): al respecto, Kline (1972) menciona que los pitagóricos representaban los números por medio de puntos en la arena, estableciendo una relación especial entre los números y la geometría, así los números $1, 3, 6, 10, \ldots,$ reciben el nombre de números triangulares, porque lo puntos podían distribuirse en forma de triángulo equilátero, algebraicamente se representa por la expresión:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Figura 9

Números triangulares

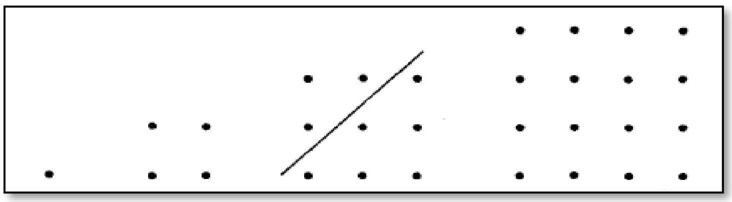


Nota. Tomada de (Kline, 1972).

También designaron los números $1, 4, 9, 16, \ldots$, como números cuadrados debido a que los puntos pueden ubicarse formando cuadrados; se observó que la suma de dos números triangulares consecutivos era igual a un número cuadrado, así se verifica la expresión $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = (n+1)^2$ (Kline, 1972).

Figura 10

Números cuadrados

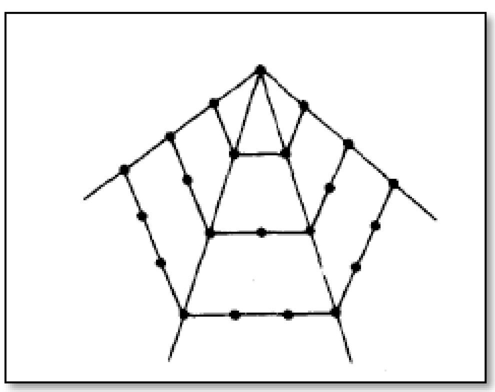


Nota. Tomada de (Kline, 1972).

Los pitagóricos hicieron otro aporte importante al estudiar los números poligonales como los números pentagonales "el primer número pentagonal es el 1; el segundo, cuyos puntos forman los vértices de un pentágono, es el 5; el tercero es $1 + 4 + 7 = 12$, y así sucesivamente. El n-simo número pentagonal es (…) $\frac{(3n^2-n)}{2}$," (Kline, 1972, p. 56)

Figura 11

Números pentagonales

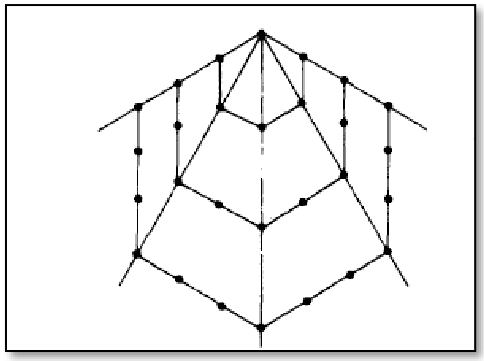


Nota. Tomada de (Kline, 1972).

Los pitagóricos también estudiaron los números hexagonales, Kline (1972) los define como "los números hexagonales son $1, 6, 15, 28$ ..., y en general de la forma $2n^2 - n$"(p.56).

Figura 12

Números hexagonales



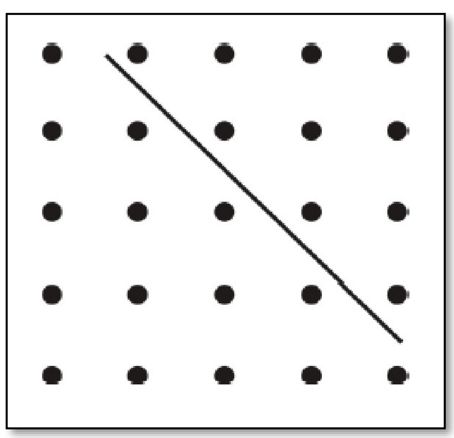
Nota. Tomada de (Kline, 1972).

Algunos teoremas que propusieron los pitagóricos como lo plantea Ortiz (2005) en relación con los números poligonales son:

Teorema 1. *Cualquier número cuadrado es la suma de dos números triangulares sucesivos.*

Figura 13

Números cuadrados y triangulares

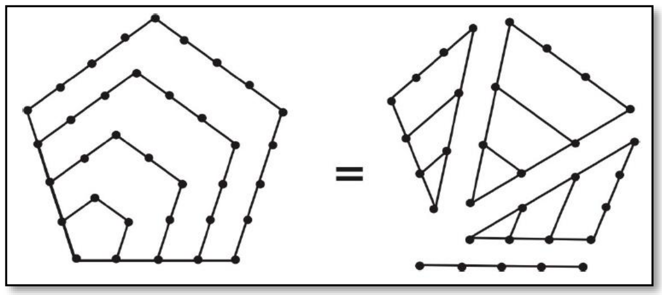


Nota. Tomada de (Ortiz, 2005).

Teorema 2. *El número n - pentagonal es igual a n más el triple de $n-1$ números triangulares.*

Figura 14

Números pentagonales y triangulares



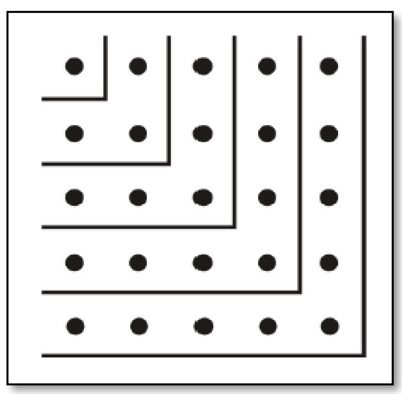
Nota. Tomada de (Ortiz, 2005).

Teorema 3. La suma de cualquier número de enteros impares consecutivos, comenzando con 1, es un cuadrado perfecto. Así:

$$1+2+5+\cdots+(2n-1)=\frac{n(2n)}{2}=n^2$$

Figura 15

Números cuadrados perfectos



Nota. Tomada de (Ortiz, 2005).

De igual manera, Kline (1972) establece que los pitagóricos conocían que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° y sabían que un plano podría recubrirse por algunos polígonos regulares como triángulos, cuadrados y hexágonos. Los pitagóricos estudiaron problemas de aplicación de áreas como “construir un polígono de área igual a uno dado y semejante a otro dado. Otro consistía en construir una figura concreta con un área que excedía o resultaba defectuosa de otra en un área dada” (Kline, 1972, p. 60).

Los Sofistas, como primera escuela Ateniense se concentraron en la solución de diversos problemas con construcciones, uno no tan famoso como lo expresa Kline (1972) es: “la construcción de los polígonos regulares de 7 o más lados; aquí de nuevo, la construcción del cuadrado, del pentágono y del hexágono regulares sugirieron la etapa siguiente” (p.66). Además, otros Sofistas como Antifón y Brison según Kline (1972) sugirieron:

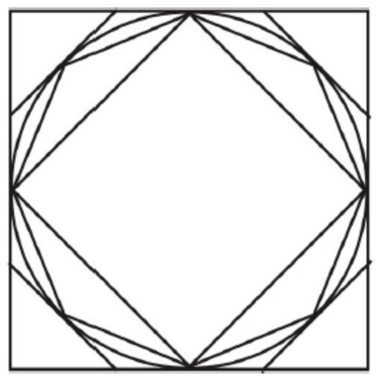
> Al intentar cuadrar el círculo se le ocurrió a Antifón la idea de aproximarse a dicha figura por medio de polígonos inscritos de número de lados cada vez mayor. Y Brisson incorporó la idea de utilizar polígonos circunscritos. Antifón, por su parte, vino a sugerir que el círculo podría ser considerado como un polígono de un número infinito de lados. (p.70)

La escuela platónica que hace mención a su fundador, Platón (428 - 348 a.C.) nació en Atenas, Platón daba gran importancia y reconocía las construcciones realizadas con regla y compás y establecía que la línea y la circunferencia son los elementos base para realizar cualquier construcción geométrica (Ortiz, 2005).

Eudoxo de Cnido (408 – 355) fue un idealista discípulo que representó la influencia de Platón en las matemáticas, una de sus contribuciones más importantes es el método exhaustivo, él da un ejemplo que aparece en el libro XII de Elementos de Euclides, que consta de aproximar al área del círculo por medio de polígonos regulares circunscritos e inscritos (Ortiz, 2005), como se ilustra en la Figura 16.

Figura 16

Polígonos inscritos y circunscritos



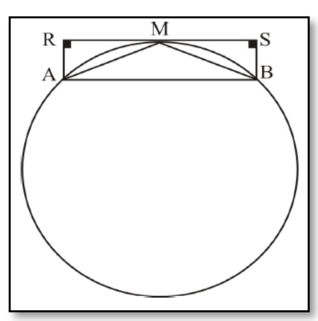
Nota. Tomada de (Ortiz, 2005).

A continuación, se describe de manera textual la prueba realizada a la anterior situación, desde el punto de vista de Ortiz (2005):

> Lema: *La diferencia en área entre un círculo y un polígono regular inscrito puede hacerse tan pequeño como se desee.*
>
> Prueba. Usaremos la proposición. Sea AB el lado del polígono inscrito y M el punto medio del arco AB.

Figura 17

Circunferencia circunscrita en un cuadrado



Nota. Tomada de (Ortiz, 2005).

Se tiene, que el área del triángulo $AMB = \frac{1}{2}\ (área\ rectángulo\ ABSR)$. Duplicando el número de lados del polígono, el área del polígono crece en más de la mitad de la diferencia en área entre el círculo y el polígono. Repitiendo este argumento, es decir, duplicando el número de lados tanto como convenga, podemos hacer la diferencia en área entre el círculo y el polígono menor que cualquier área asignada, por pequeña que sea. (p.114)

Ahora, se mencionan los trabajos de Euclides de Alejandría (325 a.C.– 265 a.C.) perteneciente al segundo período de la historia griega helenístico o alejandrino, la obra magna de Euclides los *Elementos* representa la obra más famosa de este gran matemático. Esta obra se compone de trece libros, el libro I comienza con definiciones de conceptos básicos de la geometría, luego presenta cinco postulados y cinco nociones y teoremas.

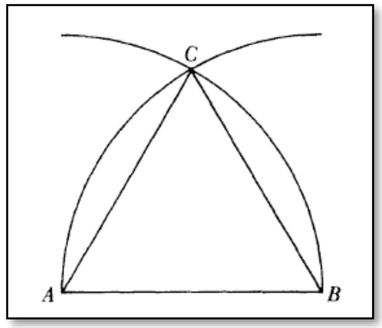
Euclides aceptaba solo construcciones geométricas realizadas por una vara, asumiendo el papel de regla y por un compás y estableció esto como un requisito en sus construcciones (Stewart, 2007). A continuación, Kline (1972) menciona la construcción del triángulo equilátero dado un segmento, como se describe en el libro I de los *Elementos*, proposición 1 de la obra de Euclides, que contiene definiciones, postulados, nociones y 48 proposiciones, de estas proposiciones las establecidas del 1 a la 26 tratan sobre triángulos:

Proposición 1. Construcción de un triángulo equilátero sobre un segmento dado.

La demostración es simple. Se construye un círculo tomando A como centro y AB como radio, y otro con B como centro y BA como radio. Sea C el punto de intersección. Entonces ABC es el triángulo buscado. (p.94)

Figura 18

Construcción de un triángulo equilátero

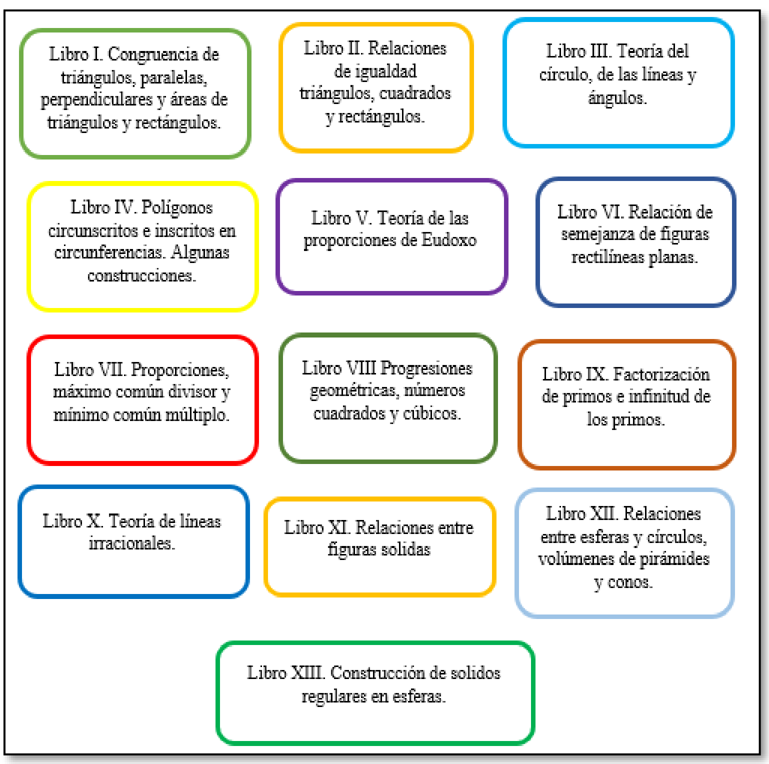


Nota. Tomada de (Kline, 1972).

Los primeros seis libros de los elementos de Euclides se centran en geometría plana, en los libros VII, VIII y IX se trata la teoría de números, el libro X trata sobre los inconmensurables y finalmente los libros XI, XII y XIII enfatizan en la geometría del espacio (Ortiz, 2005).

Figura 19

Los libros de los Elementos de Euclides



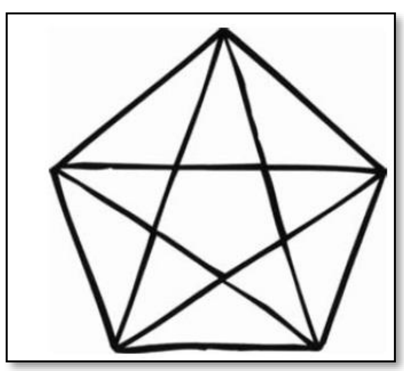
Nota. Elaboración propia.

Además, Euclides el geómetra griego más importante, estableció que los pentágonos regulares estaban relacionados con la razón extrema y media, determinando que la relación entre los lados y las diagonales es áurea, Stewart (2007) señala en cuanto a esta relación y a los pentágonos regulares:

> Sobre una línea recta AB , se construye un punto C de modo que la razón $AB:AC$ es igual a $AC:BC$. Es decir, la línea entera guarda la misma proporción con el segmento más grande que el segmento más grande guarda con el más pequeño. Si dibujamos un pentágono e inscribimos una estrella de cinco puntas, los lados de la estrella están relacionados con los lados del pentágono por esta razón particular. Hoy día llamamos a esta razón el número áureo. Es igual a $1 + (\frac{\sqrt{5}}{2})$ y este número es irracional (…). Los griegos pudieron demostrar que era irracional explorando la geometría del pentágono. Por ello, Euclides y sus predecesores eran conscientes de que, para tener una comprensión adecuada del dodecaedro y el icosaedro, debían entender los irracionales. (p.33)

Figura 20

Razón extrema y media



Nota. Tomada de (Stewart, 2007).

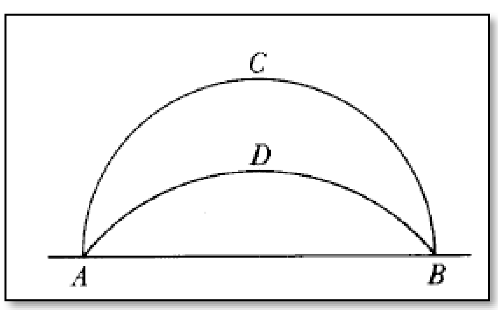
También, en cuanto a la construcción del polígono regular de cinco lados se tiene:

La construcción del pentágono regular era un problema de gran interés, porque surgía en el diseño de fortificaciones. En los Elementos (libro IV, proposición 11), Euclides había dado una construcción no limitada por un compás de abertura fija. El problema de dar una construcción exacta con esta limitación fue tratado por Tartaglia, Ferrari, Cardano, del Monte, Benedetti y muchos otros matemáticos del siglo VI. Benedetti, entonces, amplió el problema y se propuso resolver todas las construcciones euclídeas con una regla y un compás de apertura fija. El problema general fue resuelto por el danés George Mohr (1640 – 1697) en su *Compendium Euclidis Curiosi* (1673). (Kline, 1972, p.315)

Posteriormente, en el período Greco – Alejandrino, los trabajos de Arquímedes son la fundamentación de este período, Arquímedes (287 – 212 a. C.) nació en Siracusa, es considerado como el más grade de los matemáticos antiguos, en su obra titulada *La esfera y el cilindro* menciona algunos axiomas como: "Otros axiomas se refieren a longitudes de curvas cóncavas y superficies. Por ejemplo, ADB se supone que es menor que ACD. Estos axiomas conducen a Arquímedes a comparar perímetros de polígonos inscritos y circunscritos con el perímetro del círculo" (Kline, 1972, p. 151).

Figura 21

Longitudes de curvas



Nota. Tomada de (Kline, 1972).

Los griegos trabajaron mejor la geometría con polígonos, Arquímedes se acercó al círculo que es curvo por medio de aproximaciones de polígonos, comparó la circunferencia de un círculo con los perímetros de dos polígonos, una seria ubicada en el alrededor del círculo y la otra al interior, esto con el fin, de hacer una aproximación a π. A continuación, se describe el proceso, desde el punto de vista de Stewart (2007):

> Los perímetros de los polígonos dentro del círculo deben ser más cortos que el círculo, mientras que los de fuera del círculo deben ser más largos que el círculo. Para hacer los perímetros de los polígonos dentro del círculo deben ser más cortos que el círculo, mientras que los de fuera del círculo deben ser más largos que el círculo. Para hacer el cálculo más fácil, Arquímedes construía sus polígonos bisecando repetidamente los lados de un hexágono regular (un polígono de seis lados) para obtener polígonos regulares con 12 lados, 24, 48 y así sucesivamente. Se detuvo en 96. Sus cálculos demostraban que $3\,\frac{10}{71} < \pi < 3\,\frac{1}{7}$, es decir, π está en algún lugar entre 3,1408 y 3,1429 en notación decimal actual. (p. 39)

Arquímedes estableció algunas consideraciones en relación a los polígonos regulares, una de ellas es el área de un polígono regular con perímetro P, centro O y apotema a (ver Figura 22) de acuerdo a los expresado por Ortiz (2005) en el siguiente teorema:

Teorema 1. El área de un polígono regular es $\frac{1}{2}aP$

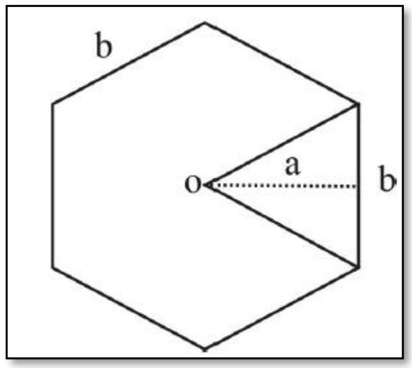
Prueba. Supongamos que el polígono tuviera n lados, cada uno de longitud b. Uniendo el centro O con los vértices se obtiene n triángulos congruentes, con base b y altura a. Luego, si A es el área del polígono regular, se tiene ($n\ veces$).

$$A = \frac{1}{2}ba + \cdots + \frac{1}{2}ba = \frac{1}{2}a(b + \cdots + b) = \frac{1}{2}aP$$

> Ahora, la idea esencial es que este proceso puede ser continuado indefinidamente, acá está la esencia del conocido método del “agotamiento” de Eudoxo. (p.237)

Figura 22

*Polígono de longitud de lado **b***



Nota. Tomada de (Ortiz, 2005).

En los comienzos de la era cristiana, hubo una pérdida progresiva de la actividad geométrica, en relación a los polígonos regulares se encontró como lo expresa Kline (1972) que Zenodoro (200 a.C y el 100 d.C) en su libro de figuras isoperimétricas probó los teoremas siguientes que eran peculiares en la matemática griega:

> 1. Entre los polígonos de n lados con el mismo perímetro, el polígono regular es el que tiene mayor área.
> 2. Entre los polígonos regulares con igual perímetro, el que tiene más lados tiene mayor área.
> 3. El círculo tiene mayor área que un polígono regular del mismo perímetro.
> 4. De todos los sólidos con la misma superficie, la esfera tiene el mayor volumen. (p. 175)

La edad media (476 d.C. – 1492 d. C: siglo V - XV)

Los hindúes (2000 a. C.), aproximadamente, fueron los sucesores de los conocimientos de la matemática griega en la historia: la geometría de esta época es más conocida, por las formas y tamaños de los altares, las formas que utilizaban para la construcción de los altares era el cuadrado, el semicírculo y el círculo (Kline, 1972). Jordanius Nemorarius en la obra que escribió titulada "*Liber phylotegni De triangulis*" menciona algunas fórmulas para el lado de los polígonos regulares $de\ 3, 4\ y\ 6$ lados, así como una aproximación al polígono de 7 lados, además de exponer las razones entre los perímetros y áreas de polígonos regulares inscritos y circunscritos (Jiménez, 2014).

Así mismo, Thomas Bradwardine (1292 – 1349) menciona en su obra "*Geometría Speculativa*" cómo realizar la construcción de los polígonos estrellados de orden inferior por medio de los lados de los polígonos regulares y determinó la expresión matemática para la suma de los ángulos internos (Jiménez, 2014). En el periodo medieval en Europa no hubo énfasis significativo en el estudio de los polígonos regulares.

La edad moderna (1492 d. C – 1789: siglo XV - XVIII)

En la edad moderna surgió el renacimiento, movimiento cultural y artístico, en este periodo las transformaciones que sufrió la geometría no fueron trascendentales, uno de los temas que se estudio fue la inscripción de polígonos regulares en circunferencias por Durero, Leonardo y Luca Pacioli (1445 – 1514), los cuales intentaron realizar las construcciones utilizando regla y compás, pero solo se trató de métodos no exactos (Kline, 1972). Además, George Mohr (1640 – 1697) en su obra "*Euclides Curioso*" presenta la solución a la construcción de un pentágono regular usando regla y compás (Jiménez, 2014).

Edad contemporánea (1789 d. C en adelante)

Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855) conocido como "*el príncipe de las matemáticas*" es uno de los matemáticos más brillantes, descubrió en 1796 que utilizando regla y compás es posible construir un polígono regular de 17 lados. Así mismo, probó que: "un polígono n regular es construible **si y sólo si** $n = 2^m P_1 P_2 P_i$, donde cada P_i es un número primo de la forma $2^{2^n} + 1$" (Ortiz, 2005, p.97). Los polígonos regulares que cumplen esta condición tienen 3, 5, 17, 257, … lados.

Finalmente, Pierre Laurent Wantzeel (1814-1848) demostró algebraicamente la inviabilidad de duplicar un cubo o trisecar un ángulo a través del uso de regla y compás, además como lo menciona Jiménez (2014) demostró lo indicado por Gauss sobre los polígonos y señalo: "Los únicos polígonos regulares construibles son aquellos que tienen un número n de lados que es potencia de 2 o producto de una potencia de 2, por uno o más números primos de Fermat" (Jiménez, 2014, p.10).

De esta manera, se termina parte del recorrido histórico para el objeto polígonos regulares y se concluye sobre la gran importancia de conocer en profundidad la evolución de los polígonos regulares, ya que permite identificar problemas que surgieron en las épocas de la historia de la matemática e incluir algunos de estos problemas en el diseño de las secuencias didácticas a aplicar en esta investigación.

Significados del objeto polígonos regulares

Es importante analizar los significados emergentes que se le puede atribuir al objeto polígonos regulares de acuerdo al recorrido histórico, por tanto, se presenta diferentes significados de los polígonos regulares en relación al uso que se le atribuyo en cada contexto.

Tabla 11

Significados del objeto polígonos regulares

Significados del objeto Polígonos regulares	
Formas geométricas	División y medida de terrenos y forma de ladrillos para realizar construcciones. Calcular áreas de figuras planas sencillas
Formas arquitectónicas (construcciones)	Platón asignaba gran importancia a las construcciones con regla y compás. Algunas construcciones que de altares variaron de acuerdo a la forma y tamaño, las formas más utilizadas era el cuadrado, el círculo y semicírculo.
Clase de número natural (triangulares, pentagonales, …)	Representar los números por medio de puntos en la arena, los puntos podían distribuirse en forma de triángulo equilátero, cuadrados
Área del círculo	Expresaron el valor de π en términos de la razón del círculo inscrito en un cuadrado. Método exhaustivo para aproximar el área del círculo por medio de polígonos regulares inscritos y circunscritos.

Naturaleza del objeto polígono regular (Análisis Conceptual)

Importancia de la Geometría

En el marco de sustentar teóricamente esta investigación se hace la siguiente conceptualización en torno a las relaciones geométricas del objeto matemático polígonos regulares, así como la descripción del software dinámico GeoGebra. A continuación, se presenta una concepción acerca de la geometría desde el punto de vista de Godino y Ruiz (2002):

> La geometría se ocupa de una clase especial de objetos que designamos con palabras como, *punto, recta, plano, triángulo, polígono, poliedro*, etc. Tales términos y expresiones designan "figuras geométricas", las cuales son consideradas como abstracciones, conceptos, entidades ideales o representaciones generales de una categoría de objetos. Por

tanto, hay que tener en cuenta que la naturaleza de los entes geométricos es esencialmente distinta de los objetos perceptibles, como este ordenador, una mesa o un árbol. Un punto, una línea, un plano, un círculo, etc., no tienen ninguna consistencia material, ningún peso, color, densidad, etc. (p.456)

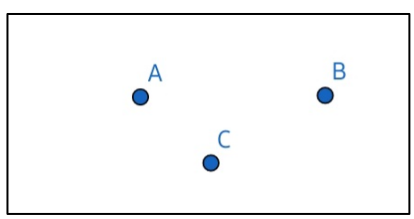
Características generales de las figuras geométricas

A continuación, se exponen las principales características de las figuras geométricas en la Geometría Euclidiana según lo expuesto en los libros de geometría de Godino y Ruiz (2002), Clemens et al. (1998) y lo expuesto por Kresa (1689) en la traducción que realizó de los Elementos de Euclides como fundamentación para la comprensión y apropiación de los mismos conceptos:

Punto. Según Godino y Ruiz (2002) establece que el punto "como objeto o figura geométrica, se considera que no tiene dimensiones y se usa para indicar una posición en el espacio" (p.458). Los puntos se representan con letras mayúsculas y es una idea o abstracción y no puede definirse con términos más simples Clemens et al. (1998). Otra definición es la propuesta por Kresa (1689) según el cual un punto no tiene partes.

Figura 23

Registro gráfico mediante software GeoGebra de puntos

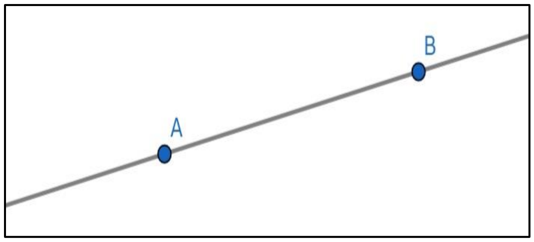


Nota. Elaboración propia.

Recta. Clemens et al. (1998) definen una recta como: "un conjunto de puntos. Al dar nombre a un par de ellos, se puede llamar a la recta en función de esos dos puntos. Por ejemplo, los puntos A y B están en la recta, por lo que se llama recta AB y por estos puntos solo pasa una recta” (p.12).

Figura 24

Registro grafico mediante software GeoGebra de la recta

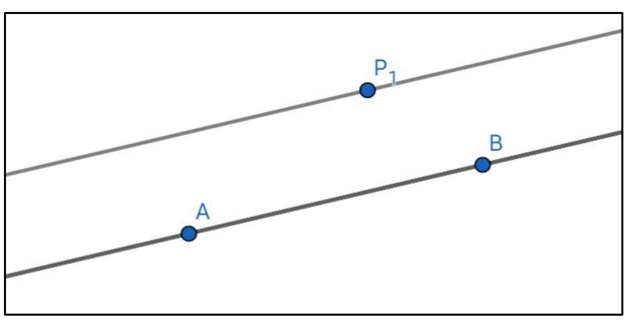


Nota. Elaboración propia.

Rectas paralelas. El postulado de las rectas paralelas que menciona Clemens et al. (1998) establece que “Dado una recta l y un punto P que no esta en la recta l, existe sólo una recta a través de P que sea paralela a l” (p.180).

Figura 25

Registro gráfico mediante software GeoGebra de dos rectas paralelas

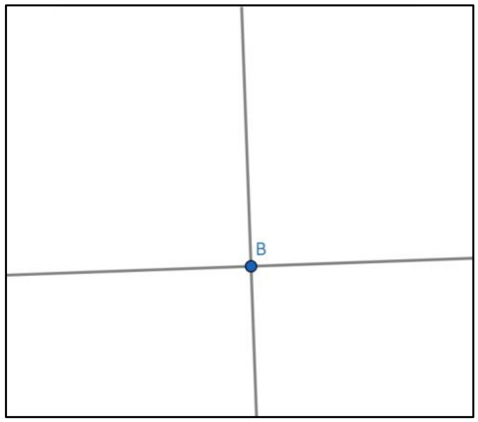


Nota. Elaboración propia.

Rectas Perpendiculares. Dos rectas son perpendiculares si al intersecarse forman ángulos rectos Clemens et al. (1998). En la Figura 26 las rectas son perpendiculares en el punto B.

Figura 26

Registro gráfico mediante software GeoGebra de dos rectas perpendiculares

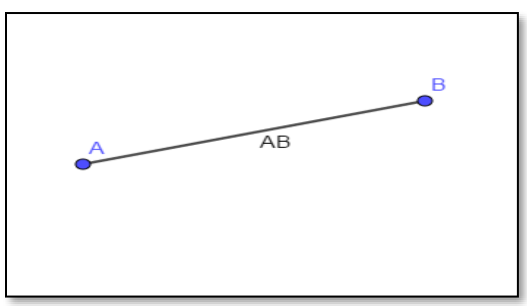


Nota. Elaboración propia.

Segmento. Godino y Ruiz (2002) establece que un segmento es un: “conjunto de puntos comprendidos entre los puntos A y B, que se dice son los extremos del segmento” (p.460). Dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud.

Figura 27

Registro gráfico mediante software GeoGebra de un segmento

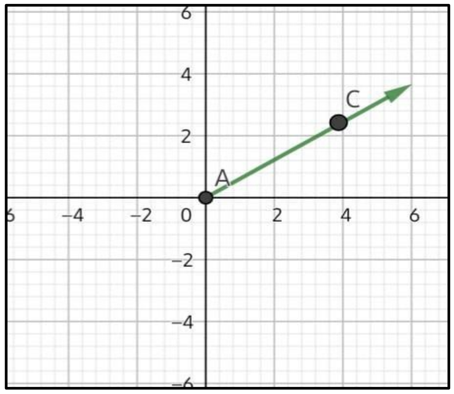


Nota. Elaboración propia.

Rayo. “Un rayo, $\overrightarrow{AB}$, es un subconjunto de una recta que contiene un punto A dado y todos los puntos que están en el mismo lado de A, como B” (Clemens et al.,1998, p.16).

Figura 28

Registro gráfico mediante software GeoGebra de un rayo

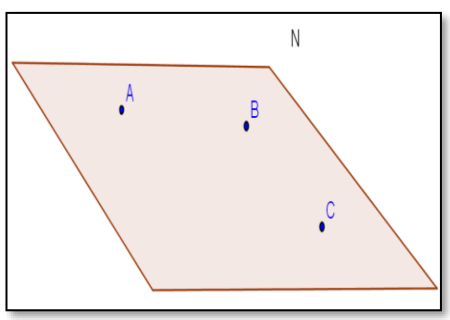


Nota. Elaboración propia.

Plano. Según Clemens et al. (1998) un plano es "un conjunto de puntos. Se designa con una sola letra o dando nombre a tres de sus puntos que no estén en una recta. Los puntos A, B y C estan en el plano N, se dice que tres puntos que no están en una misma recta determinan al plano" (p.12).

Figura 29

Registro gráfico mediante software GeoGebra de un plano

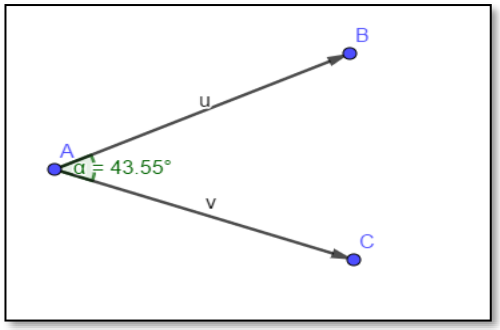


Nota. Elaboración propia.

Ángulo. "Un ángulo es la unión de dos rayos no colineales que tienen el mismo extremo, A es el vértice. $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son los lados (Clemens et al., p.17).

Figura 30

Registro gráfico mediante software GeoGebra de un ángulo



Nota. Elaboración propia.

Realizada la definición de los componentes generales de las figuras geométricas se puede ahondar en la definición de algunas figuras geométricas básicas.

Figuras Planas

Una figura plana tiene todos los puntos en un plano, pero no todos en una recta, un ejemplo de ello, es un triángulo (Clemens et al., 1998).

Figura Espacial

Como lo establece Clemens et al. (1998) "una figura espacial no tiene todos sus puntos en un solo plano" (p.16). Un ejemplo de figura espacial es una caja.

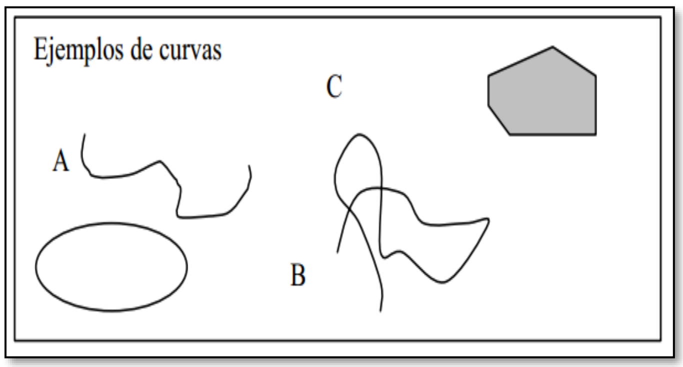
Curvas y polígonos en el plano

Curvas

Una *curva* plana se puede describir de manera intuitiva e informal como el conjunto de puntos que un lápiz traza al ser desplazado por el plano sin ser levantado. Si el lápiz nunca pasa dos veces por un mismo punto se dice que la curva es *simple*. Si el lápiz se levanta en el mismo punto en que comenzó a trazar se dice que la curva es *cerrada*. Si el único punto por el que el lápiz pasa dos veces es el del comienzo y final del trazado se dirá que la curva es *cerrada y simple*. Se requiere que las curvas tengan un punto inicial y otro final, por lo que las rectas, semirrecta y ángulos no son curvas. (Godino y Ruiz, 2002, p.462)

Figura 31

Registro gráfico de curvas



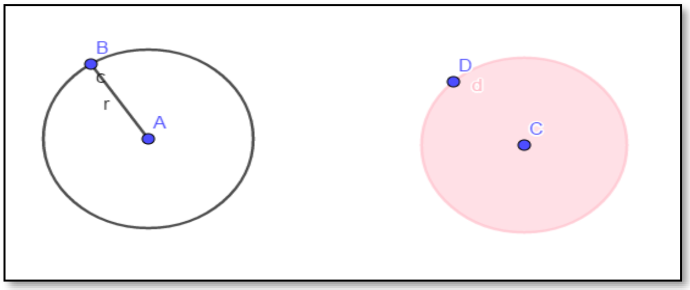
Nota. Tomada de (Godino y Ruiz, 2002)

El interior y exterior de las curvas cerradas son regiones, un ejemplo es al trazar una recta, la cual separa al plano en dos regiones conocidas como semiplanos.

Circunferencia y Círculo. La circunferencia es una curva cerrada, definida como la unión de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado centro de la circunferencia, el radio es el segmento que une el centro con cualquier punto de la circunferencia y el diámetro, es cualquier segmento que pasa por el centro de la circunferencia y une dos puntos de esta. El círculo es una región plana comprendida en el interior de una circunferencia. Para Kresa (1689) “un círculo es una figura plana comprendida por una línea (que se llama circunferencia) tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí” (p.3).

Figura 32

Registro gráfico mediante software GeoGebra de una circunferencia y de un círculo



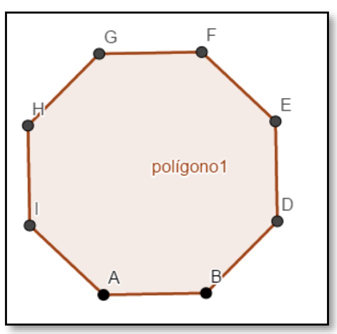
Nota. Elaboración propia.

Curvas poligonales. Según Godino y Ruiz (2002) una curva poligonal es una curva simple formada por la unión de segmentos en sus extremos.

Polígonos. Un polígono es una curva poligonal cerrada compuesta por la unión de varios segmentos en sus extremos, de modo que solo dos extremos se intersecan en un solo punto y cada segmento se intersectan con solo otros dos. Los segmentos que conforman el polígono se definen como lados y los puntos donde se intersectan se conocen como vértices. En la Figura 33, se representa un polígono de ocho lados, los puntos A, B, C, D, E, F, G, H e I son sus vértices, y cada segmento del polígono son sus lados, se escribe polígono $ABCDEFGHI$.

Figura 33

Registró gráfico mediante software GeoGebra de un polígono de ocho lados

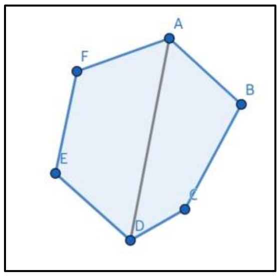


Nota. Elaboración propia.

Diagonal de un polígono. En un polígono la diagonal es un segmento entre dos vértices no consecutivos del polígono. En la Figura 34 los extremos $\overline{AD}$ son vértices no consecutivos del polígono $ABCDEF$ y $\overline{AD}$ es una de las diagonales del polígono. Para determinar la cantidad de diagonales de un polígono regular de n lados se utiliza la expresión matemática $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

Figura 34

Registro gráfico mediante software GeoGebra de la diagonal de un polígono



Nota. Elaboración propia.

Clasificación de los Polígonos

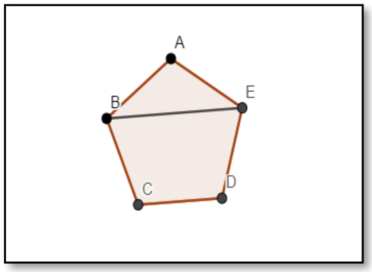
Los polígonos se pueden clasificar según sus ángulos, según el número de lados y según la medida de sus lados.

Según sus ángulos interiores. Según sus ángulos los polígonos se pueden clasificar en polígonos convexos y polígonos cóncavos.

Polígonos Convexos. Como lo establece Clemens et al. (1998) un polígono convexo tiene todas sus diagonales en su interior. La suma de los ángulos de un polígono convexo de n lados es $(n-2)180°$. Además, los ángulos interiores de un polígono convexo son menores que 180°. Cada diagonal del siguiente polígono, está en el interior del polígono $ABCDE$, por lo tanto, el polígono es convexo.

Figura 35

Registro gráfico mediante software GeoGebra de un polígono convexo

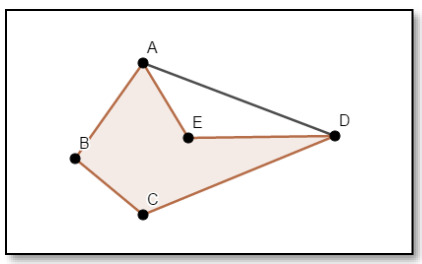


Nota. Elaboración propia.

Polígonos cóncavos. Un polígono es cóncavo si por lo menos una de las diagonales del polígono no está en su interior (Clemens et al., 1998). Además, un polígono es cóncavo si alguno de sus ángulos interiores es mayor que 180°. En el siguiente polígono, por lo menos una de las diagonales no está en su interior. El polígono $ABCDE$ no es convexo.

Figura 36

Registro gráfico mediante software GeoGebra de un polígono convexo



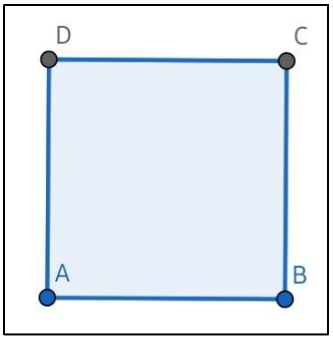
Nota. Elaboración propia.

Según la medida de sus lados. Según la medida de sus lados los polígonos se clasifican en polígonos regulares y en polígonos irregulares

Polígonos regulares. Algunos polígonos tienen la característica de que todos sus lados y ángulos son de igual longitud, estos polígonos reciben el nombre de polígonos regulares. Además, la medida de los ángulos de un polígono regular de n lados es $\frac{(n-2)}{n}$ 180° y la suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono, uno en cada vértice es 360° (Clemens et al.,1998).

Figura 37

Registro gráfico mediante software GeoGebra de un polígono regular

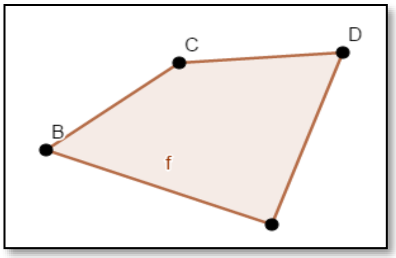


Nota. Elaboración propia.

Polígonos Irregulares. Los polígonos irregulares son polígonos en los cuales al menos dos de sus lados o ángulos tienen distinta medida.

Figura 38

Registro gráfico mediante software GeoGebra de un polígono irregular



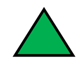
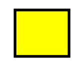
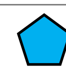
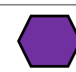
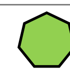
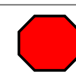
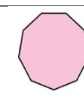
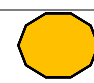
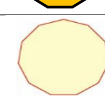
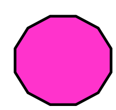
Nota. Elaboración propia.

Según el número de lados. De acuerdo al número de lados que tengan los polígonos reciben un nombre particular. Un polígono con n lados se puede denominar como n-ágono.

En la Tabla 12 se muestra la clasificación de los polígonos según el número de lados, con el nombre y figura respectiva.

Tabla 12

Clasificación de polígonos según el número de lados

Número de lados del Polígono	**Nombre del Polígono**	**Ejemplo de figura del polígono**
3	Triángulo	
4	Cuadrado	
5	Pentágono	
6	Hexágono	
7	Heptágono	
8	Octágono	
9	Eneágono	
10	Decágono	
11	Undecágono	
12	Dodecágono	

GeoGebra

GeoGebra es un software matemático creado por Markus Hohenwarter en el año 2001, este programa ha evolucionado significativamente hasta el día de hoy conocido como GeoGebra 5.0.

Además, GeoGebra es un programa dinámico y de uso libre para la enseñanza y aprendizaje de la matemática, es decir, que en cualquier colegio se puede instalar en las salas de cómputo o que los mismos estudiantes descarguen la app de GeoGebra en su celular para mayor facilidad. Dentro de la estructura del programa se puede trabajar distintas áreas de la matemática como: geometría, aritmética, algebra y cálculo lo que enriquece aún más el funcionamiento de este programa en las aulas de clase, en pro de fortalecer la educación matemática.

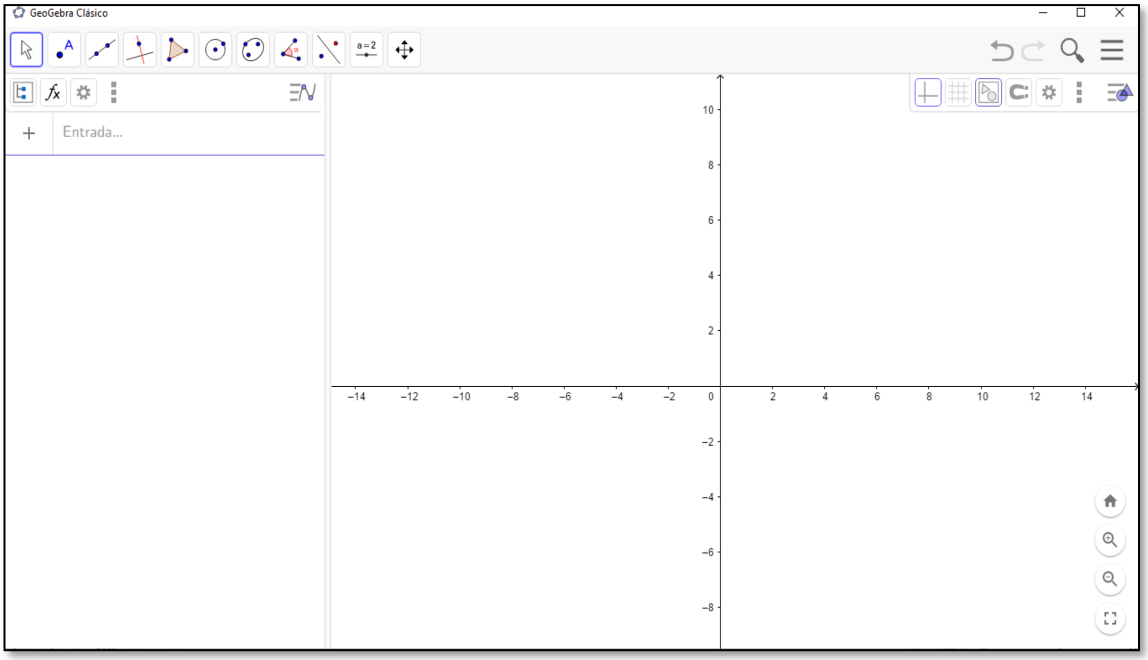
Algunas características del Software dinámico GeoGebra como lo menciona Ezguerro (2014) son: Permite elaborar cualquier tipo de demostración, análisis y deducciones, también permite construir figuras geométricas que se pueden animar bajo diferentes condiciones, es decir, un cambio sobre el objeto en construcción, afectará su expresión matemática y a su vez cualquier cambio a la expresión matemática, modificará su representación.

Es importante mencionar que los resultados obtenidos mediante el uso de GeoGebra dependen en gran medida de la capacidad de manejo y dominio, así como la metodología, que el docente tenga para utilizarlo como material de estudio y medio para contextualizar y enseñar a los estudiantes la aplicación de este software a cualquier objeto matemático. Los estudiantes al manipular GeoGebra podrán interactuar y dinamizar por medio de ambientes virtuales de aprendizaje cualquier objeto geométrico, esquematizar mejor su pensamiento geométrico espacial, realizar cualquier construcción y relacionarla con sus propiedades algebraicas.

En esta investigación se utilizará el programa GeoGebra como medio de interacción para realizar la construcción de polígonos regulares trabajando con estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa José María Silva Salazar mediado por la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau y el modelo de Van Hiele.

Figura 39

Registró de las herramientas de GeoGebra



Nota. Captura del ambiente de GeoGebra.

Dimensión didáctica del objeto geométrico polígonos regulares

Análisis curricular: los polígonos regulares desde el texto escolar de la Institución Educativa

Se presenta un análisis curricular iniciando con los lineamientos curriculares establecidos por el MEN para el área de matemáticas y para el objeto polígonos regulares, luego los Estándares Básicos de Competencias y los Derechos Básicos de Aprendizaje y finalmente se describe el trabajo en la Institución Educativa desde el uso de los textos escolares.

Lineamientos Curriculares

Desde el Ministerio de Educación Nacional (MEN) se han expedido Lineamientos Curriculares que orientan el proceso educativo en el área de matemáticas. El MEN (2006) destaca la importancia de considerar algunos procesos dentro de la formación del estudiante en matemáticas como el razonamiento, la interpretación y la comunicación de información numérica, así como la construcción, la modelación y la representación de los diferentes objetos matemáticos, como resultado de diferentes situaciones problemas propias de las matemáticas o de otras disciplinas que permitan despertar el interés del estudiante al aplicar y manipular cada uno de los conocimientos adquiridos en su proceso y llegar a ser protagonistas de su propio aprendizaje, estos procesos deben ser secuenciales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que permitan la interactividad entre los estudiantes y el docente.

Dentro de la propuesta curricular del MEN (2006) para el área de matemáticas se propone trabajar la educación en matemáticas desde algunos conocimientos básicos como son: el pensamiento numérico, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento métrico y sistemas de medida, el pensamiento aleatorio y sistema de datos y el pensamiento variacional y sistemas algebraicos. Según lo establecido por el MEN (2006) para desarrollar estos pensamientos se debe proponer un contexto sustentado en las situaciones problema de la cotidianidad o propias de la misma matemática.

En esta propuesta de investigación se tendrá especial interés en el pensamiento espacial y sistemas geométricos, este pensamiento es definido por el MEN como:

> "[…] El conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales" contempla las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el espacio, desarrollar variadas representaciones y, a través de la coordinación entre ellas, hacer acercamientos

conceptuales que favorezcan la creación y manipulación de nuevas representaciones mentales. Esto requiere del estudio de conceptos y propiedades de los objetos en el espacio físico y de los conceptos y propiedades del espacio geométrico en relación con los movimientos del propio cuerpo y las coordinaciones entre ellos y con los distintos órganos de los sentidos. (MEN, 2006, p.61)

Los sistemas geométricos tienen tres aspectos: los elementos de que constan, las operaciones y transformaciones con las que se combinan y las relaciones entre ellos, esto se expresa por medio de diferentes registros de representación para su correspondiente tratamiento.

Estándares Básicos de Competencias

Los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas se enfocan en el desarrollo de las competencias matemáticas asociadas a los tipos de pensamiento matemático. Cada estándar se centra en varios procesos generales de la actividad matemática. Los estándares se ubican en conjuntos de grados para garantizar la gestión de situaciones de aprendizaje. Los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas que sustenta esta investigación se encuentran en el conjunto de grados de sexto a séptimo bajo el pensamiento espacial y sistemas geométricos como se expone en la Tabla 13.

Tabla 13

Estándar Básico de Competencia

	Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos
Cuarto a Quinto Sexto a Séptimo	✓ Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características. ✓ Clasifico polígonos en relación con sus propiedades.

De acuerdo a lo anterior, se decide trabajar con el Estándar Básico de Competencias ubicado en los grados cuarto y quinto para dar énfasis en esta investigación a la clasificación de los polígonos regulares de acuerdo a sus principales componentes y características geométricas, complementando el desarrollo de la investigación con el Estándar Básico de Competencias ubicado en los grados sexto y séptimo para llevar a los estudiantes a la clasificación y construcción de los polígonos regulares.

Derechos Básicos de Aprendizaje

Los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) como lo define el MEN son "un conjunto de saberes y habilidades fundamentales que han de aprender los estudiantes en cada uno de los grados de educación escolar de primero a once" (MEN, 2015, p.3). Los DBA se articulan con los Lineamientos Curriculares y con los Estándares Básicos de Competencias estableciendo propuestas curriculares fundamentadas en metodologías y estrategias para identificar de manera correcta rutas de aprendizaje que aumentan de complejidad al pasar cada año escolar, de manera que al finalizar el proceso educativo se alcancen los estándares propuestos, además las actividades planeadas deben considerar varios DBA de un mismo grado y contribuir de manera organizada y sistemática a los procesos de planeación en el aula de clase.

Realizada la correspondiente revisión de los Derechos Básicos de Aprendizaje relacionados con el objeto matemático polígonos regulares, se encuentra que no hay ningún DBA que haga referencia al tema en el grado séptimo, por ello, guardando relación y coherencia con los Estándares Básicos de Competencias se decide seleccionar los siguientes DBA correspondientes al grado sexto y grado octavo como guía de la investigación para alcanzar su desarrollo en la finalización de la misma:

Tabla 14

Derechos Básicos de Aprendizaje

	Derechos Básicos de Aprendizaje
Grado sexto	✓ Usando regla y transportador construye triángulos con dimensiones dadas.
Grado octavo	✓ Realiza construcciones geométricas usando regla y compás

Por lo anterior, se evidencia la necesidad de incorporar dentro de los DBA de matemáticas para grado séptimo en el pensamiento geométrico un DBA que haga relación a los polígonos regulares, esto para dar continuidad a lo planteado en grado sexto y fundamentar lo establecido para grado octavo.

Ahora, se menciona lo relacionado con los polígonos regulares desde el texto escolar. La jornada académica de la Institución Educativa José María Silva Salazar es única y por tanto dentro de los lineamientos establecidos para esta jornada se incluye el trabajo con textos escolares proporcionados por la secretaria de Educación de Boyacá. En los últimos cuatro años se ha utilizado el libro texto de la Institución, el cual está diseñado bajo el proyecto Vamos a aprender para la Educación Básica y Media, propuesta pedagógica dirigida a que los estudiantes adquieran un aprendizaje significativo. Los autores indican que el libro cumple con una función pedagógica y didáctica, permitiendo al docente dar sentido activo a los materiales promoviendo la participación de manera activa de los estudiantes.

Este proyecto concibe la escuela como un espacio fundamental para promover la convivencia de los estudiantes y contribuir a la formación integral de los mismos. Las competencias que promueve el libro corresponden a: primero, favorecer una formación integral y desarrollar temáticas para la vida y la convivencia, segundo, ofrecer una ruta didáctica organizada para facilitar el desarrollo de procesos cognitivos, tercero, el desarrollo de aprendizajes se puede valorar a través de diferentes actividades y, por último, el libro está basado en los componentes curriculares del área de matemáticas para grado séptimo.

El libro está estructurado en seis unidades, compuestas de temas y subtemas. Cada unidad se estructura de la siguiente manera: la primera parte, *apertura de la unidad*, enfocada a qué el estudiante recuerde los conocimientos adquiridos, el estudiante conocerá el tema a aprender y la aplicación del mismo; la segunda parte, *la ruta didáctica* para el desarrollo de los contenidos de cada tema, comprende las siguientes fases: primero, los saberes previos, que permiten al estudiante reflexionar acerca de lo aprendido; segundo, la fase de analiza, en donde por medio de una situación problema busca la integración de los saberes previos y los nuevos; tercero, la fase de conocer, fase en la cual se desarrollan los contenidos del tema haciendo énfasis de los conceptos básicos; cuarto, la fase de ejemplos, los cuales explican la aplicación de los conceptos; quinto, la fase de actividades de aprendizaje, enfocadas en el desarrollo de lo que el estudiante ha aprendido se trabajan procesos cognitivos como memoria, comprensión, análisis, aplicación, síntesis y evaluación, enfocados en procesos algorítmicos y en la resolución de problemas sobre el tema; sexto, la fase de la evaluación de aprendizaje, que evalúa los conocimientos de los estudiantes.

La tercera parte de la unidad es *práctica más,* planeada para que el estudiante resuelva más actividades complementarias a los temas y fortalezca las competencias matemáticas; la cuarta parte de la unidad es *resolución de problemas,* busca que el estudiante aplique diferentes estrategias de resolución de problemas; la quinta parte de la unidad es *evaluación del aprendizaje de cada unidad* que permite a los estudiantes reforzar y aplicar nuevamente los conocimientos aprendidos y, por último, cada unidad incorpora *temas trasversales* que incorpora aspectos de reflexión para el manejo de temas como educación ambiental, estilos de vida saludable y educación para la sexualidad y la ciudadanía fomentando así la trasversalidad entre los saberes de diferentes áreas en el aprendizaje integral de los estudiantes.

El contenido del libro se distribuye de acuerdo al pensamiento numérico, pensamiento variacional, pensamiento espacial, pensamiento métrico y pensamiento aleatorio. El pensamiento espacial correspondiente a la parte geométrica presenta temas como: polígonos, triángulos, propiedades de los triángulos, teorema de Pitágoras, figuras congruentes y figuras, cuadriláteros, movimientos en el plano, homotecias y poliedros.

En lo concerniente al tema polígonos se introduce por medio de una situación problema relacionada con los tres tipos de señales de tránsito, luego se plantea la solución, y se presenta la definición de polígono, después se expone un ejemplo 1 donde se representan algunos polígonos. Seguidamente, se definen los elementos de un polígono (lados, ángulos internos, ángulos externos, vértices y diagonales), se presenta el ejemplo 2 donde se identifican los elementos de un polígono dado. Posteriormente, el libro trata sobre la clasificación de polígonos, empieza con la clasificación según su forma en cóncavos y convexos, ejemplifica de manera gráfica un polígono cóncavo y otro convexo, después presenta la clasificación de los polígonos en regulares e irregulares y en el ejemplo 4 se exponen algunas representaciones de polígonos regulares e irregulares; así mismo, se presenta la clasificación según su número de lados de forma irregular por medio de una tabla (triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, heptágono, octágono, nonágono y decágono). Por último, se presenta la expresión matemática para calcular la cantidad de diagonales de un polígono de n lados, la suma de los ángulos interiores del polígono de n lados y la expresión para determinar la medida de los ángulos interiores de polígono regular de n lados. El ejemplo 5, expone la situación de recubrir un plano con un polígono regular cuando la medida de cada uno de sus ángulos interiores es divisor de $360°$, se organiza la información de los primeros cuatro polígonos regulares para determinar la medida de un ángulo interno y definir con cuales es posible recubrir el plano y se presenta una representación gráfica de los mismos.

Las actividades de aprendizaje propuestas se enfocan principalmente en identificar y clasificar polígonos, argumentar respuestas dadas a preguntas sobre la conceptualización del tema, la resolución de problemas propuestos y la trasversalidad del tema polígonos con educación ambiental.

Respecto al tema de triángulos, en los *saberes previos* indica a los estudiantes que construyan triángulos bajo algunas características definidas como medida de los lados y de ángulos. En la situación de *analiza* se presenta la representación gráfica de un triángulo y se formulan algunas preguntas de manera que el estudiante pueda justificar si el triángulo es isósceles o acutángulo. Después, se presenta la clasificación de los triángulos con sus respectivas representaciones. Se expone la construcción de triángulos utilizando regla, compás y graduador conociendo la longitud de los tres lados, conociendo dos lados y el ángulo comprendido entre ellos y conociendo dos ángulos y el lado común, también se da el paso a paso para la construcción de un triángulo por medio de tres rectas, la construcción de ángulos internos y externos de un triángulo en el programa GeoGebra; los ejemplos 2 y 3 explican paso a paso como se construye un triángulo dados las longitudes de los lados. En lo que corresponde a las *actividades de aprendizaje* sobre el tema se enfocan en recordar lo aprendido sobre la clasificación de los triángulos, después se presentan enunciados sobre el tema que exigen la argumentación de los estudiantes para indicar la respuesta, después se presentan situaciones problema y en la *evaluación de aprendizaje* se contextualiza a partir de diferentes situaciones problemas presentes en el campo sobre regiones triangulares.

El libro de texto de la Institución Educativa se caracteriza por la gran diversidad de actividades propuestas enfocadas principalmente al desarrollo de las competencias matemáticas, además las temáticas propuestas están acordes con el nivel de comprensión geométrico y espacial de los estudiantes de grado séptimo y permiten la contextualización de los temas para su comprensión. En particular, en el libro se presenta la relación de los elementos geométricos del tema polígonos con los siguientes registros: del registro grafico al registro verbal y del registro gráfico al registro simbólico.

Dimensión Cognitiva y obstáculos en el aprendizaje de los polígonos regulares.

Respecto a las características cognitivas de los estudiantes participantes en esta investigación se menciona que el trabajo realizado en matemáticas desde el inicio de la pandemia con la modalidad del trabajo en casa no trajo buenos resultados, principalmente por el desarrollo de las guías de trabajo, lo cual desmotivo a los estudiantes debido a la existencia de dificultades en la comprensión de la teoría y ejemplos dados en el libro guía, algunas veces sin el acompañamiento del docente. De este modo, se evidencia la presencia de un obstáculo didáctico, porque el docente siguió trabajando las temáticas de manera estructurada y tradicional, resaltando la falta de creatividad y el manejo de herramientas tecnológicas o aplicaciones móviles, provocando de esta manera monotonía en el desarrollo de cada tema.

Adicionalmente, el grupo de estudiantes evidenció falencias en bases teóricas de geometría cuando se trabajó el tema de figuras en el plano con sus respectivas características. Por lo tanto, los obstáculos que poseen algunos estudiantes, no era únicamente por la modalidad del trabajo con guías, sino también se debía a la falta de conceptualización de los conocimientos previos.

Errores y dificultades en el aprendizaje del objeto polígonos regulares

Se presentan algunas de las dificultades de los estudiantes en la comprensión de las propiedades geométricas de los polígonos regulares en diferentes trabajos. Al respecto, Valdivia y Baquedano (2014) en su investigación describen las dificultades que presentan los estudiantes en la construcción de polígonos regulares durante el proceso de aprendizaje como la falta de motivación, dominio del tema e interés por el desarrollo de las actividades propuestas, así como el no uso de los instrumentos de medida adecuados para la construcción de un polígono regular, la verbalización de conceptos y la interpretación de situaciones problemas. Además, establecen que el docente no implementa estrategias que faciliten el aprendizaje de los estudiantes.

Así mismo, Peñuela (2015) en su investigación menciona que en las construcciones de los polígonos con regla y compás se presenta dificultades en "la representación simbólica de los elementos geométricos, en la identificación de los elementos de un polígono y en la conceptualización, porque son formas distintas de presentar un conocimiento" (p. 92). Además los estudiantes no saben cómo relacionar los conocimientos previos con los nuevos conocimientos ya que no hay una articulación sistematica de los saberes.

También, Ramírez (2011) en su tesis describe que "los estudiantes no reconocen propiedades de los polígonos regulares ni sus elementos involucrados en su construcción, estas dificultades tienen su origen en la falta de fundamentación en geometría asocicadas con obstáculos de tipo epistemológico, cognitivo y metodológicos" (p.1). Igualmente Ramírez (2011) señala que la construcción de los polígonos regulares usando reglá y compás como propuesta didáctica permite superar las dificultades de reconocer características y permite una mejor solución de situaciones problemas donde se involucre los polígonos regulares.

Por tanto, se concluye que los errores y dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de los polígonos regulares se debe principalmente a la falta de motivación e interés de los estudiantes por el tema, a la no articulación de software de geometría dinámica para el desarrollo de las temáticas, la falta de dominio de los saberes previos, deficiencias en el manejo de representación simbólica de los elementos o características de los polígonos y en la compresión lectora de situaciones problemas propuestas.

Prueba diagnóstica

Para tener un acercamiento sobre las características cognitivas de los estudiantes de grado séptimo, se desarrolló y aplicó una prueba diagnóstica que como lo menciona Cuervo et al. (2021), tiene como propósito el reconocimiento de conceptos básicos, y la identificación de las concepciones de los estudiantes de grado séptimo sobre el objeto polígonos por medio del uso del software GeoGebra. Con la aplicación y análisis de la información proporcionada por los estudiantes que participaron de la prueba, se pudo determinar que la mayoría utilizaron los conocimientos previos sobre el tema, menos de la mitad de los estudiantes no siguieron las indicaciones dadas en la guía y realizaron construcciones ajenas a lo establecido, algunos estudiantes solicitaban explicación al docente sobre lo que debían hacer y las herramientas del programa que debían utilizar, evidenciando falencias en el desarrollo del trabajo autónomo, dificultades en el desarrollo de la situaciones propuestas y dificultades en el manejo de las competencias interpretativa, argumentativa y propositiva; así mismo se identificó dependencia por parte de los estudiantes a lo establecido y señalado por el docente, evidenciando lo establecido en el contrato didáctico.

También en el desarrollo de la prueba un factor relevante fue la falta de trabajo en grupo debido a fallas en la comunicación para dar solución a la situación propuesta, esto debido en su mayoría a la falta de interacción entre los estudiantes de manera presencial en el aula de clase. La mayoría de los estudiantes explicaron mejor los resultados encontrados en base a las construcciones realizadas en el programa GeoGebra en la fase de validación. Se concluye que es fundamental implementar el diseño de secuencias didácticas y de situaciones adidácticas porque permiten a los estudiantes la construcción de los conocimientos geométricos y se fortalece el trabajo en grupo por medio del uso del software GeoGebra como medio dinámico en el aprendizaje de la geometría.

Fase II. Análisis a priori para la enseñanza del objeto polígonos regulares

Diseño de la Secuencia Didáctica para la comprensión de las propiedades geométricas de los polígonos regulares.

Se diseñaron cinco situaciones didácticas para favorecer la comprensión de las propiedades geométricas de los polígonos regulares fundamentadas en la Teoría de las Situaciones Didácticas y el Modelo de Van Hiele que buscan fortalecer el aprendizaje del pensamiento geométrico espacial a través de la autonomía, la exploración, la creatividad, el trabajo en grupo y las competencias matemáticas de los estudiantes de séptimo A para dar logró al segundo objetivo específico. Las cinco situaciones que se diseñaron fueron validadas por dos docentes de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), las situaciones didácticas también fueron validadas por un docente de matemáticas egresado de la Maestría en Educación Matemática.

Las actividades diseñadas permitieron el tránsito de los estudiantes por las cuatro situaciones de la Teoría de las Situaciones Didácticas: situación de acción, situación de formulación, situación de validación y situación de institucionalización. El medio de interacción para el desarrollo de las situaciones propuestas es el software GeoGebra, así los estudiantes manipularon las herramientas del programa para realizar las construcciones respectivas. De manera similar, los estudiantes en el desarrollo de cada situación pasan por los niveles del Modelo de Van Hiele de manera secuencial: nivel de reconocimiento o familiarización, nivel de análisis o comparación, nivel de ordenación o clasificación y el nivel de deducción formal o argumentación que les permitirá mejorar los procesos de aprendizaje del objeto polígonos regulares.

Análisis a priori

A continuación, se presenta el análisis a la secuencia didáctica diseñada, el cual consiste en describir las actividades propuestas, su propósito y lo que se espera que cada estudiante realice. Las actividades fueron diseñadas con el objetivo de fortalecer la comprensión de las propiedades de los polígonos regulares a partir de la construcción de los mismos, llevando al estudiante a un tránsito por las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización.

También, en un aumento progresivo de niveles según el modelo Van Hiele teniendo presente las fases de aprendizaje en el diseño de las situaciones presentadas: nivel 0 de visualización (familiarización), nivel 1 análisis comparación, nivel 2 ordenación o clasificación y el nivel 3 deducción formal (argumentación), en cada uno de los niveles se va a tener presente el desarrollo de las fases de aprendizaje, el lenguaje utilizado que hace referencia a que tanto la adquisición de conocimientos van relacionados a un lenguaje de acuerdo a la situación propuesta y a la asimilación de los contenidos que se refiere a que el conocimiento solo va a ser adquirido si están en el nivel correspondiente. El tiempo previsto para el desarrollo de cada actividad es de dos horas: se establece este tiempo para revisar asistencia, organizar a los estudiantes en el aula de clase y para recordar el cumplimiento a los protocolos de bioseguridad.

Descripción de la actividad N° 1. Construcción del triángulo

El objetivo de esta actividad es que cada uno de los estudiantes realice la construcción del triángulo equilátero por medio del GeoGebra utilizando las herramientas punto, segmento, circunferencia e intersección de objetos en la situación de acción, en el nivel de visualización o familiarización se pretende que los estudiantes reconozcan o se familiaricen con los elementos geométricos. Luego, en la situación de formulación y en el nivel de comparación, en grupos se pretende que los estudiantes analicen, comparen e intercambien características o propiedades del triángulo, para ello, cada uno utilizará la herramienta distancia y medirán las longitudes del triángulo construido ABC y determinarán el perímetro del mismo triángulo a partir del desarrollo de las fases de aprendizaje.

Seguidamente, se espera que los estudiantes indiquen que la longitud de los tres lados del triángulo es la misma porque el triángulo se clasifica según la longitud de los lados en triángulo equilátero.

Posteriormente, se espera que los estudiantes de cada grupo utilicen la herramienta ángulo y midan los ángulos del triángulo. Después, los estudiantes compararan los resultados y diligenciaran la información de la tabla, en donde se pide nombre del estudiante, la medida de cada ángulo del triángulo y la suma de los ángulos internos del triángulo. Así mismo, se espera que el grupo de estudiantes clasifique el triángulo como un triángulo acutángulo porque los tres ángulos internos son menores de 90°.

Después, en la situación de validación en cada grupo se escoge un representante para socializar los resultados encontrados, en el nivel de ordenación o clasificación el estudiante determinará las condiciones necesarias y suficientes para clasificar el triángulo según sus propiedades, de acuerdo a la pregunta ¿qué pasa con la longitud de los lados del triángulo, siempre es la misma medida en los tres lados? Por lo que se espera que los estudiantes argumenten que cada lado tiene la misma longitud por tratarse de un triángulo equilátero, de manera similar con la pregunta ¿la medida de los ángulos varía? A lo que se espera que los estudiantes argumenten que por tratarse de un triángulo equilátero la medida de sus ángulos siempre es de 60° y por tanto se clasifica como un triángulo acutángulo a partir del tránsito por las fases de aprendizaje.

En cuanto a las propiedades del triángulo se espera que cada estudiante participante mencione que es un triángulo equilátero, de tres vértices, tres lados, no tiene diagonales porque no se puede trazar un segmento entre dos vértices no consecutivos del triángulo, tiene tres ángulos de manera que cada ángulo interno mide 60°, por lo tanto, la suma interna de los ángulos corresponde a 180°.

Además, se indica a los estudiantes que busquen algunos objetos en su entorno con forma triangular en la superficie para clasificarlos y mencionar del porqué de cada caso, entonces algunos objetos con los que se puede relacionar un triángulo pueden ser: una señal de tránsito que tiene forma de un triángulo equilátero, una escuadra, un cono, un gorro, unos aretes y una carpa como un triángulo isósceles.

Finalmente, el profesor en el proceso de institucionalización y nivel de argumentación, ayudará a identificar, luego de escuchar las argumentaciones de los estudiantes basados en las propiedades observadas del triángulo, que la construcción realizada corresponde a un triángulo equilátero según la medida de sus lados, el cual es un polígono regular que tiene tres lados iguales, no tiene diagonales porque no se pueden unir dos vértices no consecutivos por medio de segmentos y también se reconocerá como un triángulo acutángulo porque la medida de cada uno de sus ángulos corresponde a 60° y, por tanto, la medida de la suma interna de los ángulos del triángulo corresponde a 180°.

Descripción de la actividad N° 2. Problema - área de triángulos

El objetivo de esta actividad es que cada uno de los estudiantes realice la construcción de un triángulo rectángulo utilizando segmentos y la herramienta polígono en la situación de acción. Después, en el nivel de visualización o familiarización se pretende que los estudiantes reconozcan o se familiaricen con los elementos geométricos utilizando la herramienta distancia medirán en cada triángulo la longitud de la base del triángulo, luego con la herramienta mover, disminuirán o aumentarán el lado de la base hasta que esta sea igual a 4 y el lado de la altura igual a 10.

Posteriormente, en la situación de formulación y en el nivel de comparación, en grupos se pretende que los estudiantes analicen, comparen e intercambien características y áreas del triángulo rectángulo a partir del desarrollo de las fases de aprendizaje, para ello determinarán el área del triángulo construido con segmentos, si la altura corresponde a $10\,khet$ y la base a $4\,khet$ ($1\,khet = 100\,codos$): se les pide comparar el procedimiento y el resultado del área en $setat$ con el compañero y diligenciar la información en la tabla dada, por tanto, se espera que los estudiantes hallen la equivalencia las unidades como: $10\,khet = 1000\,codos$ y $4\,khet = 400\,codos$. Después, utilizar la expresión $A = \frac{b}{2} \times h$ cómo está establecido en la solución dada por el escriba para calcular el área del triángulo en *codos cuadrados*, luego realizaran equivalencia de unidades para determinar el área en *setat*, obteniendo como solución $2000\,khet\ o\ 20\,setat$. Similarmente, se les pide calcular el área del polígono construido con la herramienta polígono, utilizando la opción de calcular área en el GeoGebra.

Después, en la situación de validación y en el nivel de ordenación o clasificación el estudiante determinará a través de las fases las condiciones necesarias y suficientes para determinar el área de los triángulos rectángulos construidos, se espera que en cada grupo se escoja un representante para explicar que las dos áreas obtenidas de los triángulos construidos son iguales y que las unidades del área es el $setat$. En cuanto a las propiedades del triángulo se espera que los estudiantes a partir de los saberes previos y la familiarización realizada con la construcción de los triángulos mencionen que es un triángulo rectángulo, de tres vértices, tres lados, no tiene diagonales, tiene tres ángulos, uno de ellos igual a un ángulo recto, es decir, $90°$ y la suma interna de los ángulos corresponde a $180°$. Por último, el profesor en la situación de institucionalización y nivel de argumentación, ayudará a identificar, luego de escuchar las argumentaciones de los estudiantes que el área del triángulo es igual a la mitad producto de la base por la altura.

Descripción de la actividad N° 3. Construcción del cuadrado

El propósito de esta actividad es que cada uno de los estudiantes en la situación de acción realice la construcción del cuadrado por medio de GeoGebra utilizando las herramientas punto, segmento, circunferencia, rectas perpendiculares, rectas paralelas e intersección de objetos, en el nivel de visualización o familiarización se pretende que los estudiantes reconozcan o se familiaricen con los elementos geométricos.

Luego, en la situación de formulación y en el nivel de comparación, en grupos se pretende que los estudiantes analicen, comparen e intercambien características o propiedades del cuadrado, cada estudiante utilizará la herramienta distancia y medirá la longitud de un lado del cuadrado $ABCD$ y responderá la pregunta ¿Cuánto mide la longitud de los demás lados? A lo que se espera que los estudiantes indiquen que los otros tres lados miden exactamente igual al lado que se midió, por tratarse del polígono regular de cuatro lados. Después se pedirá a los estudiantes que intercambien la información encontrada y que en una tabla dada coloquen los nombres, la longitud de cada lado y el perímetro del cuadrado.

También, se establece que los estudiantes reconozcan que la longitud de los cuatro lados del cuadrado es la misma. Seguidamente, se pedirá a cada integrante del grupo observar los ángulos del cuadrado, y responderá la pregunta: ¿Cuál es la medida de cada ángulo? A lo que se espera que cada estudiante indique que se trata de ángulos rectos, es decir, ángulos de $90°$. Después se pedirá comparar con el compañero los resultados de las medidas de los ángulos del cuadrado y completaran una tabla registrando la medida de cada ángulo del cuadrado y la suma interna de los ángulos del cuadrado.

Después, se indica a los estudiantes que utilizando la herramienta seleccionar objeto, tomen el cuadrado de un vértice y lo muevan para responder a la pregunta: ¿Qué se puede observar respecto a las longitudes de los lados del cuadrado? En este momento los estudiantes deben argumentar que si se aumenta el tamaño del cuadrado la longitud de cada lado aumenta, y si se disminuye el tamaño del cuadrado, la longitud de cada lado va a ser menor, también se pregunta: ¿La medida de los ángulos internos del cuadrado cambian? Por lo que se pretende que los estudiantes argumenten que no cambia la medida de cada ángulo interno.

Después, en la situación de validación se espera que en cada grupo se escoja un representante para explicar los resultados que se obtuvieron de la construcción del cuadrado, en el nivel de ordenación o clasificación el estudiante determinará las condiciones necesarias y suficientes para reconocer el cuadrado según sus propiedades por medio del desarrollo de las fases de aprendizaje, de acuerdo a las siguientes preguntas: ¿qué pasa con la longitud de los lados del cuadrado y la medida de los ángulos internos del cuadrado? Con la pretensión que el estudiante participante argumente que cada lado tiene la misma longitud por tratarse de un cuadrado, a pesar de realizar variaciones y que indique que la medida de cada ángulo es igual a $90°$ por tratarse de un cuadrilátero y del polígono regular de cuatro lados y que por tanto la suma interna de los ángulos es igual a $360°$.

En relación a las propiedades del cuadrado se espera que los estudiantes participantes mencionen que es un polígono regular de cuatro vértices, cuatro lados, dos diagonales que se pueden trazar uniendo vértices no consecutivos del cuadrado: que tiene cuatro ángulos de modo que cada ángulo interno mide 90° y que, por lo tanto, la suma interna de los ángulos corresponde a 360°.

Además, se pide a los estudiantes que busquen algunos objetos en su entorno con forma cuadrada en la superficie para clasificarlos y mencionar el porqué de cada caso, entonces algunos objetos con los que los estudiantes pueden relacionar un cuadrado son: las caras de las baldosas del piso de la sala, un cuadro, la cara de cubo, una caja, un dado, un pañuelo, una cartera, una servilleta y un reloj. Finalmente, el profesor en la fase de institucionalización y nivel de argumentación, ayudará a identificar, luego de escuchar las argumentaciones de los estudiantes, que la construcción realizada corresponde a un cuadrado, el cual es un polígono regular que tiene cuatro lados iguales y la medida de cada uno de sus ángulos corresponde a 90° y, por tanto, la medida de la suma interna de los ángulos del triángulo corresponde a 360°.

Descripción de la actividad N° 4. Propiedades del Pentágono

El propósito de esta actividad es que cada uno de los estudiantes realice en la situación de acción la construcción de un polígono de cinco lados utilizando la herramienta segmento, utilizando la herramienta polígono y herramienta polígono regular. En el nivel de visualización o familiarización se pretende que los estudiantes reconozcan o se familiaricen con los elementos geométricos.

Luego, en la situación de formulación y en el nivel de comparación, en grupos se pretende que los estudiantes analicen, comparen e intercambien semejanzas y similitudes de los polígonos de cinco lados construidos a partir del desarrollo de la fases de aprendizaje, para ello, se socializarán las semejanzas y diferencias que encuentran entre las tres figuras construidas, se espera que los estudiantes indiquen que las tres figuras construidas hacen referencia a un polígono de cinco lados, de cinco vértices en donde se pueden trazar cinco diagonales y que por tanto tienen cinco ángulos. En relación a las diferencias se espera que los estudiantes señalen que el polígono construido con segmentos y el polígono construido con la herramienta polígono se diferencia por las medidas de sus lados, mientras que en el polígono regular sus lados son de igual longitud.

Seguidamente, en la situación de validación se espera que en cada grupo se escoja un representante para explicar a los demás compañeros las semejanzas y diferencias que encontraron en la anterior situación, en el nivel de ordenación o clasificación el estudiante determinará y explicará los resultados que se obtuvieron en relación con los lados del pentágono construido con segmentos y el pentágono construido con la herramienta polígono regular. Así mismo, se establece que mencionen como propiedades de los polígonos construidos que se trata de las construcciones de un pentágono por tener cinco lados, cinco vértices y cinco ángulos.

Los pentágonos construidos con segmentos y con la herramienta polígono se clasifican como pentágonos irregulares porque sus lados tienen distinta medida. También, se pide a los estudiantes que busquen en su entorno algunos objetos con forma de pentágono en alguna de sus superficies. Los objetos con los que pueden relacionar un pentágono son: un reloj, una señal de tránsito, una tapa de una caja, una tuerca, y las baldosas del piso.

Finalmente, el profesor en la situación de institucionalización y nivel de argumentación con las fases de aprendizaje correspondientes, guiará las respuestas dadas de los estudiantes, luego de escuchar las argumentaciones de los mismos para identificar el pentágono como un polígono de cinco lados regular e irregular a partir de las construcciones realizadas con la herramienta segmento, polígono y polígono regular.

Descripción de la actividad N° 5. Construcción del pentágono regular

El objetivo de esta actividad es que cada uno de los estudiantes en la situación de acción realice la construcción del pentágono regular por medio del GeoGebra, utilizando las herramientas punto, segmento, circunferencia, rectas perpendiculares, rectas paralelas e intersección de objetos. En el nivel de visualización o familiarización se pretende que los estudiantes reconozcan o se familiaricen con los elementos geométricos.

Luego, en la situación de formulación y en el nivel de comparación, se pretende que los estudiantes analicen, comparen e intercambien características o propiedades del pentágono regular a partir de las fases de aprendizaje, para ello en grupos de dos estudiantes, cada uno utilizará la herramienta distancia y medirá la longitud de cada lado del pentágono construido. Después se pedirá a los estudiantes que intercambien la información encontrada y que en la tabla dada coloquen los nombres, la longitud de cada lado y el perímetro del pentágono, se busca que los estudiantes describan que las longitudes del pentágono construido son iguales por tratarse de un pentágono regular

Seguidamente, se pedirá a cada integrante del grupo que utilice la herramienta ángulo para medir cada ángulo interno del pentágono y que compare con otro compañero los resultados de las medidas de los ángulos del pentágono diligenciando la información en la tabla dada, luego se establece que cada estudiante del grupo indique que la medida de cada uno de sus ángulos corresponde a 108° y, por tanto, la medida de la suma interna de los ángulos del pentágono corresponde a 540°.

Después, en la situación de validación se espera que en cada grupo se escoja un representante para explicar los resultados encontrados, en el nivel de ordenación o clasificación el estudiante determinará las condiciones necesarias y suficientes para clasificar el pentágono regular según sus propiedades, de acuerdo a las fases y las siguientes preguntas: ¿qué relación existe entre la longitud de los lados del pentágono y la medida de los ángulos internos del pentágono? Por lo que se espera que los estudiantes participantes argumenten que cada lado tiene la misma longitud por tratarse de un pentágono regular y que la medida de cada ángulo es igual a $108°$ por tratarse de un polígono regular de cinco lados y que por lo tanto la suma interna de los ángulos es igual a $540°$.

En relación a las propiedades del pentágono regular se espera que los estudiantes mencionen que es un polígono regular de cinco vértices, cinco lados, cinco diagonales que se pueden trazar uniendo dos vértices no consecutivos del pentágono o también utilizando la expresión matemática $d_n = \frac{n\,(n-3)}{2}$ para el número de diagonales; cinco ángulos y que cada ángulo interno mide $108°$ y, por lo tanto, que la suma interna de los ángulos corresponde a $540°$ lo que se puede verificar utilizando la expresión matemática $S_n = 180(n-2)$ donde n corresponde al número de lados del polígono regular.

Por último, el profesor ayudará a identificar, en la situación de institucionalización y nivel de argumentación, luego de escuchar las argumentaciones de los estudiantes que la construcción realizada corresponde a un pentágono regular, de cinco lados iguales, cinco diagonales, donde la medida de cada uno de sus ángulos internos corresponde a 108° y, por tanto, al determinar la suma interna de los ángulos del pentágono corresponde a 540°.

Fase III. Experimentación

En esta fase de la Ingeniería Didáctica se ejecutó la secuencia didáctica diseñada fundamentada en la Teoría de las Situaciones Didácticas y el modelo de Van Hiele. Las actividades propuestas tienen como objetivo lograr que los estudiantes comprendan las propiedades geométricas de los polígonos regulares a partir de su construcción en GeoGebra. Con la aplicación de la secuencia didáctica se da respuesta al tercer objetivo específico de acuerdo a lo establecido en el capítulo III de la presente investigación.

Fase IV. Análisis a posteriori y evaluación

Análisis de las Situaciones Didácticas (en anexo: Situaciones Didácticas)

Actividad 1. Construcción del triángulo

De acuerdo con la metodología propuesta, se aplicó la actividad 1 a los estudiantes nombrados como: E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7 y E8. La técnica para la recolección de información corresponde a el cuestionario de cada actividad de la secuencia didáctica, un pantallazo de las construcciones realizadas que los estudiantes enviaron al docente por WhatsApp, la guía del observador y grabaciones de audio. Durante el desarrollo de cada situación cada estudiante de manera ordenada organizó sus respuestas en las hojas de la situación didáctica y al finalizar entregaron al investigador sus trabajos. Esta primera situación, se desarrolló en dos horas de clase donde el rol del docente para las situaciones de acción, formulación y validación fue principalmente de observador y en la situación de institucionalización sistematizó todo lo producido por los estudiantes en las anteriores situaciones.

Situación de acción

Para el análisis de los resultados obtenidos en la situación de acción se tienen en cuenta los conocimientos previos del estudiante para el desarrollo de la situación presentada. De acuerdo a las indicaciones dadas en la situación todos los estudiantes realizaron la construcción del triángulo sin presentar dificultades: tuvieron buena disposición para realizar la situación problema propuesta; siguieron paso a paso cada una de las indicaciones dadas en la situación didáctica donde cada estudiante interactuaba con las herramientas básicas de GeoGebra: la herramienta segmento, la herramienta circunferencia (centro, punto), punto y polígono. Específicamente los estudiantes E1, E3, E6, E7 y E8 realizaron la construcción del triángulo como se observa en la Figura 40, asimilando de manera muy rápida las indicaciones dadas.

De manera similar el estudiante E2, comprendió en totalidad cada una de las indicaciones dadas y manejo correctamente las herramientas del programa, realizando la construcción geométrica de la Figura 41. En la construcción realizada por E4 y E5 se pudo observar mayor interacción con las herramientas del programa como se observa en la Figura 42, donde se cambia el color del polígono construido y se asigna un color a los puntos de los vértices, evidenciándose una excelente comprensión de las indicaciones dadas y un trabajo de manera autónoma en la construcción del triángulo.

Al preguntar ¿cuál es la figura geométrica construida? los estudiantes E1, E2, E3, E5, E7, E8 en las respuestas dadas escribieron "*Triángulo*", los estudiantes E4 y E6 respondieron "*es un polígono, es el triángulo*". En la redacción que utilizaron para describir el procedimiento de la construcción del triángulo E1 expresa: "*si construyó un segmento, una circunferencia, un punto y un polígono, entonces, obtengo la construcción de un triángulo"*. El estudiante E2 manifestó: "*Si construyo un punto le doy segmento después construyo una circunferencia, entonces, obtengo un triángulo"*. De manera similar, E3 argumentó: "*si trace dos segmentos, luego hice clic en (centro, punto) en a y b, y punto en la intersección, entonces, realice un triángulo"* la información permite identificar una dificultad en la redacción del procedimiento utilizado porque no se trazaron dos segmentos y no se organizó de manera correcta la implicación solicitada.

El estudiante E4 manifestó: "*Si construyo un segmento y luego unas circunferencias, entonces, obtengo la construcción de un triángulo".* De manera similar, E6 expresó: "*si construyo un segmento A, B y construyo dos circunferencias y coloco el punto C, entonces, obtengo la* *construcción de un triángulo”*. En cambio, E5 argumento: “*si construyo un segmento a y b, entonces, selecciono la herramienta circunferencia y hago centro en A y luego en B, y luego hago centro en B y punto en a, y marco la intersección de las circunferencias, se construye el triángulo”*. En cambio, E7 evidenció no tener conceptualizado el procedimiento de la construcción del triángulo porque expresó: “*si primero tracé una recta $\overline{AB}$ y luego hice un círculo de $\overline{AB}$ y luego, entonces, hice otro de $\overline{BA}$ y puse un punto C en las intersecciones y uní todos los puntos”*. Por tanto, se concluye que todos los estudiantes trabajaron de manera activa y autónoma sin la intervención del docente, aplicaron los conocimientos previos y siguieron cada una de las indicaciones dadas como se establece en el análisis a priori, en la Tabla 15 se visualizan las construcciones del triángulo.

Tabla 15

Construcciones del triángulo

Figura 40

Construcción del triángulo de E1, E3, E6, E7 y E8

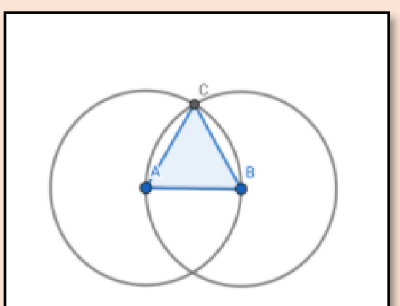


Figura 41

Construcción del triángulo de E2

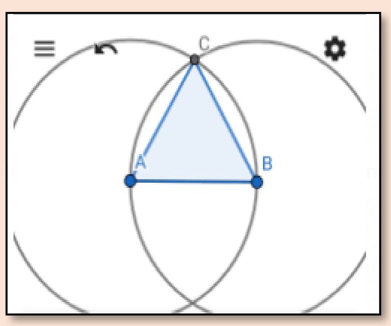
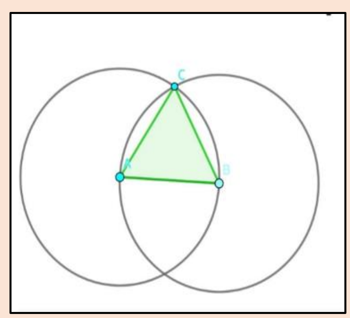


Figura 42

Construcción del triángulo de E4 y E5



Nivel 0 de visualización o reconocimiento (familiarización)

De acuerdo con la información obtenida en este nivel los estudiantes identificaron el triángulo por su apariencia, porque todos respondieron que la figura construida corresponde a un triángulo, además el razonamiento de cada uno de los estudiantes se llevó a cabo mediante consideraciones visuales a partir de la construcción del triángulo como un todo donde no identificaban propiedades ni componentes del triángulo, y para este nivel transitaron por las fases de indagación e información, orientación dirigida, orientación libre e integración. Así mismo, el lenguaje utilizado fue acorde con el contenido de la situación propuesta, a pesar de que se identificaron errores en la escritura de los vértices del triángulo y en la redacción de las ideas propuestas. También, se evidenció que cada estudiante asimiló los conocimientos que estaban propuestos para este nivel, en relación a la familiarización con el triángulo construido.

Situación de formulación

En el análisis de la situación de formulación se estudian cada una de las interacciones de los estudiantes al realizar un trabajo en grupo; la forma de comunicación de los estudiantes con la información matemática encontrada; la consolidación de conocimientos; la forma como intercambiaban mensajes con simbología matemática y la forma como se superaron las dificultades presentadas en la situación de acción fueron superadas o si prevalecieron en esta situación. Los grupos que se formaron en esta fase fueron: Grupo 1 (E1-E2), grupo 2 (E3-E4), grupo 3 (E5-E6) y grupo 4 (E7-E8), cada uno de los grupos se organizó en el aula de clases siguiendo los protocolos de bioseguridad y el docente hacia acompañamientos cortos para observar el proceso.

En el grupo 1, cada estudiante midió la longitud de los lados del triángulo utilizando la herramienta distancia, los datos obtenidos por E1 se muestran en la Figura 43 y la longitud de los lados del triángulo de E2 en la Figura 44. Así mismo, en la Figura 45 se evidencia el registro de la información obtenida por E1 y E2 en cuanto a la longitud de cada lado y perímetro del triángulo. En las evidencias de la guía los estudiantes realizaron la suma para determinar el perímetro de cada uno de los triángulos construidos, así mismo, argumentaron que "*todos los lados del triángulo son iguales"* pero no identificaron el triángulo como equilátero, porque al responder la pregunta de ¿cómo se clasifica el triángulo según la longitud de los lados? En el grupo 1 (E1 y E2) respondieron: "*midiendo sus lados"* por lo cual se identifica que no comprendieron la pregunta realizada.

Respecto a la medida de los ángulos del triángulo, en el grupo 1 (E1 y E2) utilizaron la herramienta ángulo y midieron cada ángulo del triángulo construido, como se puede observar en la Figura 46, que corresponde a las mediciones de E1, de acuerdo a la información obtenida en este grupo se concluye que cada ángulo del triángulo mide 60 °.

Respecto a la suma interna de los ángulos del triángulo en el grupo 1 (E1 y E2) sumaron cada una de las medidas de los ángulos del triángulo sin dificultad y obtuvieron que era igual a 180°. Al preguntar ¿cómo se clasifica el triángulo según las medidas de los ángulos? E1 y E2 indicaron que: "*midiendo sus ángulos"* demostrando la no comprensión de la pregunta realizada y la no conceptualización de la clasificación de los triángulos, según la medida de sus ángulos. En común acuerdo, E1 y E2 concluyeron que al tomar un vértice del triángulo y moverle, la longitud de los lados del triángulo era la misma, no variaba.

Por su parte, en el grupo 2, (E3 y E4) compararon las construcciones del triángulo realizadas y luego midieron la longitud de los lados del triángulo, E4 manifestó no comprender la totalidad de lo que se debía realizar para lo cual E3 procedió a explicarle como medir la longitud de cada lado del triángulo como se ilustra en la Figura 47. También, en la Figura 48 se evidencia la longitud de los lados del triángulo de E4.

Así mismo, se evidencia el registro de la información obtenida por el grupo 2 (E3 y E4) en cuanto a la longitud de cada lado y perímetro de cada triángulo (ver Figura 49), para obtener la medida del perímetro los dos estudiantes coincidieron en indicar que debían sumar la longitud de los tres lados del triángulo, quedando registro del procedimiento realizado de manera correcta: por tanto, se observa un buen manejo de la simbología matemática utilizada para la escritura de los lados del triángulo. Para el perímetro falto utilizar la notación correcta pero el cálculo del perímetro está bien realizado. En relación, a la longitud de los lados del triángulo en el grupo 2 (E3 y E4) se argumentó que siempre los tres lados del triángulo iban a medir lo mismo a lo cual E3, expresa que: "*tiene todos sus lados congruentes, es equilátero, acutángulo"*. Por su parte E4 argumento: "*es acutángulo"*. Después de recordar la clasificación de los triángulos decidieron mencionar que el triángulo era equilátero según la medida de sus lados. Después utilizaron la herramienta ángulo para medir cada ángulo del triángulo, en el grupo 2, E4 tomó la medida del ángulo en el vértice A (ver Figura 50) y obtuvo $60°$ y luego mencionó: "*los otros dos ángulos miden* $60°$" y procedió a medir los ángulos restantes para confirmar su afirmación. E3 se limitó a medir cada ángulo obteniendo $60°$ en cada vértice y manifestó a E4: "*cada ángulo mide 60°"*.

Los estudiantes del grupo 2 coincidieron en argumentar que la suma de los ángulos internos del triángulo era igual a $180°$, E4 expresó a E3: "*se debe sumar las medidas de los ángulos del triángulo, y esa es la suma*", E3 estuvo de acuerdo con su compañero de trabajo y registraron la información como se ilustra en la figura en la Figura 51.

Se observa que en el grupo 2, E3 y E4 escribieron correctamente la medida de cada uno de los ángulos del triángulo. Además, mencionaron que el triángulo según la medida de sus ángulos se clasifica en acutángulo, no justificaron el porqué de la respuesta. También, mencionaron que al seleccionar el vértice de un triángulo y moverlo, "*las longitudes de los lados disminuyen o aumentan, pero siguen siendo la misma en los tres lados*".

En el grupo 3 (E5 y E6), midieron las longitudes de los lados del triángulo, E6 dijo a E5 que se debía utilizar la herramienta distancia y le indicó donde encontrarla, cada uno procedió a medir cada lado (ver Figura 52); la información la registraron y concluyeron que las tres medidas de la longitud de cada lado eran iguales y de común acuerdo establecieron que el triángulo se clasificaba como equilátero según la longitud de sus lados. Se evidencia que en una ocasión E5 omite escribir el signo igual cuando está escribiendo la longitud del lado $\overline{BC}$, mientras que el estudiante E6 hace un registro correcto de la información obtenida. Para determinar el perímetro del triángulo E5 dice a E6: "*para el perímetro sumamos las medidas de los tres lados"* E6 responde diciendo que: "*sí, es sumar"*. En el registro de la información de la Figura 53 falto que los estudiantes escribieran $P = 29{,}7$ y $P = 19{,}7$.

Posteriormente, E5 y E6 midieron los ángulos del triángulo construido (ver Figura 54), E6 menciono a E5: *"cada ángulo mide* $60°$*"*, luego procedió a medir cada ángulo, y E5 utilizó la herramienta ángulo para medir cada ángulo del triángulo. Para determinar la suma interna de los ángulos del triángulo E5 le dice a E6: "*se suma* 60 *más* 60 *más* 60 *o multiplicamos el* 60 *por tres, y eso es igual a 180°"* ante lo cual E6 procedió a verificar el resultado de la suma y concluyeron que la suma de los ángulos internos del triángulo era igual a $180°$ como se establece en la Figura 55. En comunicación E5 y E6 establecieron que el triángulo según la medida de los ángulos era: *"acutángulo porque sus tres ángulos son agudos, es decir, menores que* $90°$*"*, además indicaron que al tomar el triángulo de un vértice: "*sus medidas cambian dependiendo si se agranda o achiquita el triángulo, pero los tres lados tienen la misma medida"*.

En el grupo 4 (E7 y E8), se dio un consenso sobre cómo medir las longitudes de los lados de los triángulos y como determinar el perímetro del triángulo, allí E7 indicó: *"medimos cada lado y determinamos luego el perímetro sumando las tres medidas"*. En la Figura 56 se visualiza la medida de cada lado del triángulo construido por E8. En el grupo 4 (E7 y E8) compararon y registraron correctamente la información obtenida de acuerdo a la medida de los lados del triángulo y establecieron: "*todos los lados del triángulo son iguales, y que el triángulo se clasifica según la longitud de sus lados en equilátero".* La información quedó registrada como se observa en la Figura 57, los dos estudiantes determinaron bien el valor del perímetro, en la notación debieron escribir $P = 19{,}2$ y $P = 12$.

Respecto a la medida de los ángulos del triángulo, E7 compartió con su compañero de trabajo: *"midamos los ángulos y luego sumamos cada ángulo y determinamos el resultado de la suma interna de los ángulos"*. Por su parte, E8 procedió a utilizar la herramienta ángulo y a medir los tres ángulos del triángulo como se ilustra en la Figura 58, luego comparo con E7 las medidas de cada ángulo e identificaron que eran $60°$.

Para determinar la suma interna de los ángulos del triángulo E7 dijo: *sumemos tres veces* $60°$ *y obtenenos que es* $180°$*",* E8 estuvo de acuerdo con los argumentos de E7. En la Figura 59 se muestra el registro que realizaron de la información, donde se llega a concluir que el triángulo según la medida de los ángulos se clasifica en "a*cutángulo"* y que al tomar el triángulo de un vértice y mover la construcción los lados y ángulos se mantienen iguales.

En la Tabla 16 se observa las medidas de los lados del triángulo, en Tabla 17 se evidencia el registro de la información de las medidas de los lados y perímetro del triángulo, en la Tabla 18 la medida de los ángulos del triángulo y en la Tabla 19 está la medida de los ángulos y la suma interna de los ángulos del triángulo.

Tabla 16

Medida de los lados del triángulo

Figura 43

Longitud de los lados del triángulo de E1

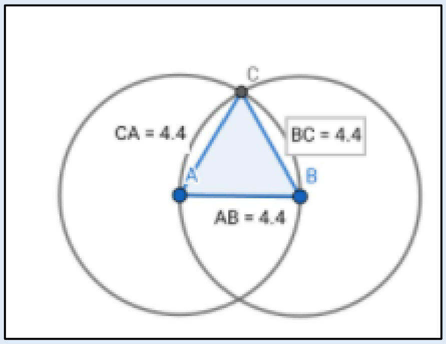


Figura 44

Longitud de los lados del triángulo de E2

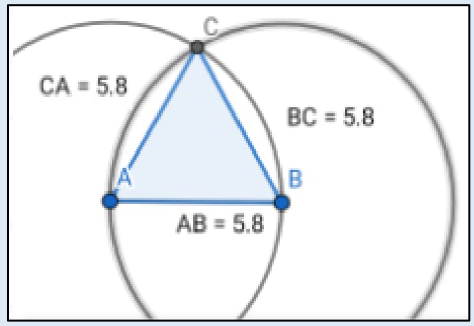


Figura 47

Longitud de los lados del triángulo de E3

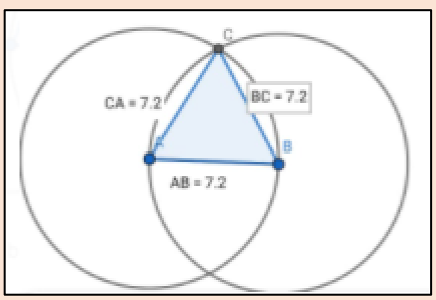


Figura 48

Longitud de los lados del triángulo de E4

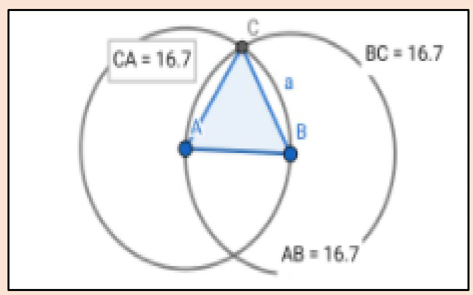


Figura 52

Longitud de cada lado del triángulo de E5

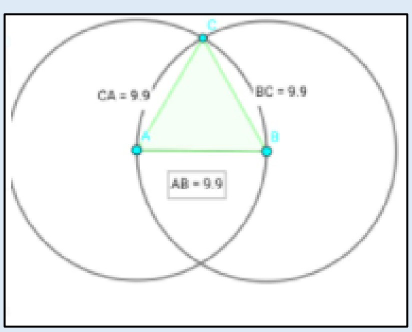


Figura 56

Longitud de los lados del triángulo de E8

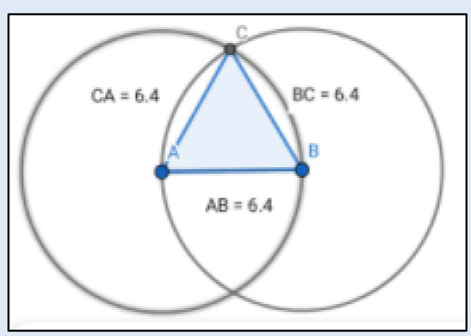
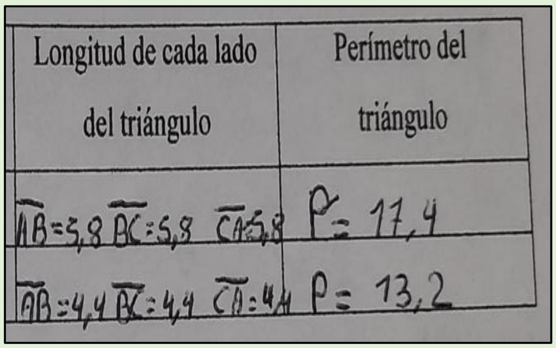


Tabla 17

Registro de la información de la longitud de los lados y perímetro del triángulo

Figura 45

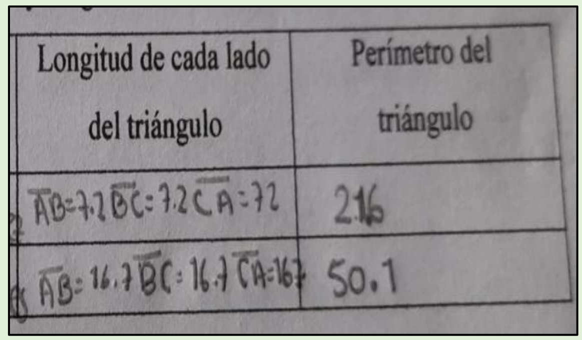
Longitud de cada lado y perímetro del triángulo de E1 y E2



Longitud de cada lado del triángulo	Perímetro del triángulo
$\overline{AB}$=5,8 $\overline{BC}$=5,8 $\overline{CA}$=5,8	P= 17,4
$\overline{AB}$=4,4 $\overline{BC}$=4,4 $\overline{CA}$=4,4	P= 13,2

Figura 49

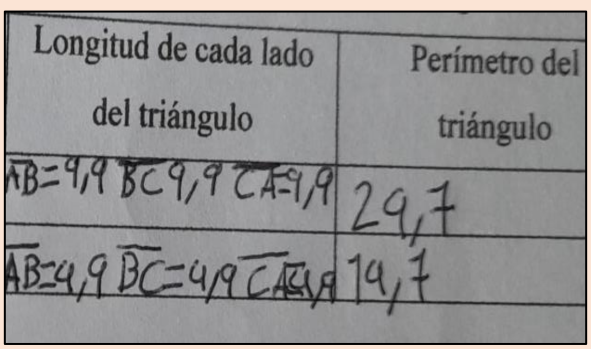
Longitud de cada lado y perímetro del triángulo de E3 y E4



Longitud de cada lado del triángulo	Perímetro del triángulo
$\overline{AB}$=7.2 $\overline{BC}$=7.2 $\overline{CA}$=7.2	21.6
$\overline{AB}$= 16.7 $\overline{BC}$: 16.7 $\overline{CA}$=16.7	50.1

Figura 53

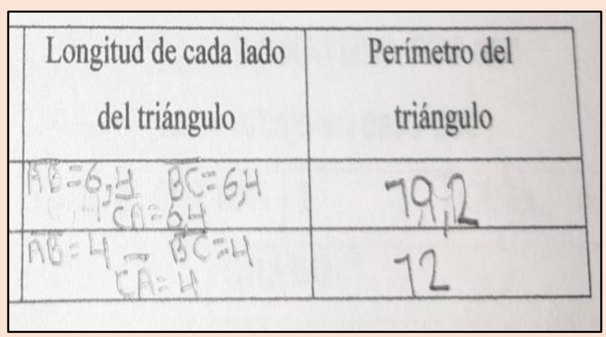
Longitud de los lados del triángulo de E5 y E6



Longitud de cada lado del triángulo	Perímetro del triángulo
$\overline{AB}$=9,9 $\overline{BC}$9,9 $\overline{CA}$=9,9	29,7
$\overline{AB}$=4,9 $\overline{BC}$=4,9 $\overline{CA}$=4,9	14,7

Figura 57

Longitud de los lados del triángulo de E7 y E8



Longitud de cada lado del triángulo	Perímetro del triángulo
$\overline{AB}$=6,4 $\overline{BC}$=6,4 $\overline{CA}$=6,4	19,2
$\overline{AB}$=4 $\overline{BC}$=4 $\overline{CA}$=4	12

Tabla 18

Medida de los ángulos del triángulo

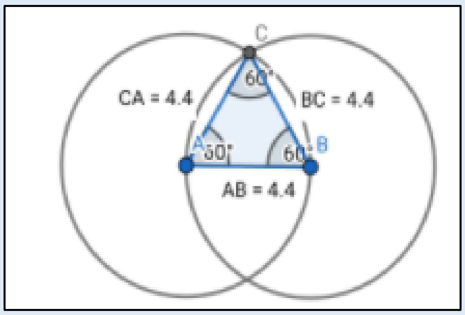
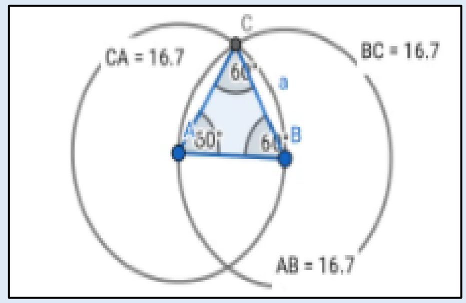
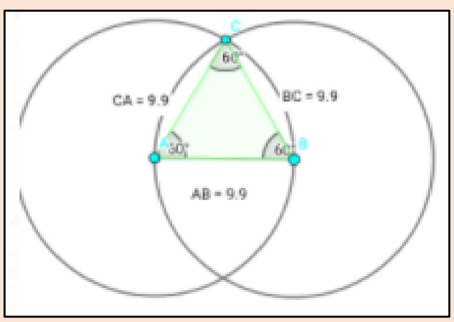
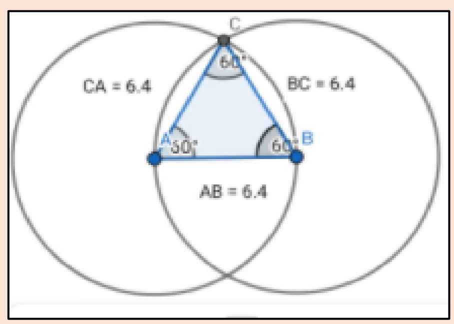
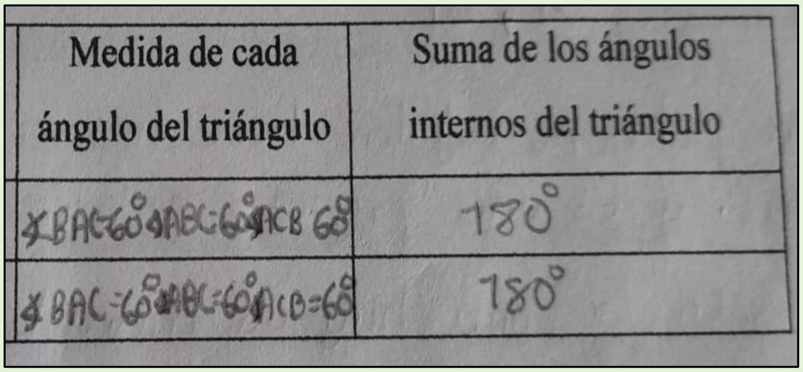
Figura 46 *Medida de cada ángulo del triángulo de E1*  	**Figura 50** *Medida de cada ángulo del triángulo de E4* 
Figura 54 *Medida de cada ángulo del triángulo de E6*  	**Figura 58** *Medida de cada ángulo del triángulo de E8* 

Tabla 19

Registro de la información de la medida de los ángulos y la suma interna de los ángulos del triángulo.

Figura 51

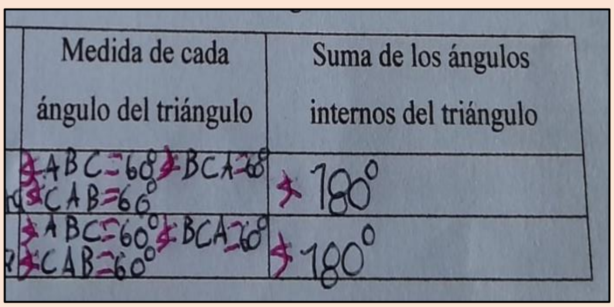
Medida de cada ángulo del triángulo de E3 y E4



Medida de cada ángulo del triángulo	Suma de los ángulos internos del triángulo
∢BAC=60° ∢ABC=60° ∢ACB 60°	180°
∢BAC=60° ∢ABC=60° ∢ACB=60°	180°

Figura 55

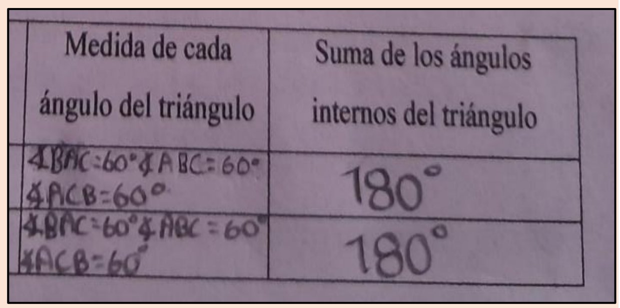
Medida de cada ángulo del triángulo de E5 y E6



Medida de cada ángulo del triángulo	Suma de los ángulos internos del triángulo
∢ABC=60° ∢BCA=60° ∢CAB=60°	∢ 180°
∢ABC=60° ∢BCA=60° ∢CAB=60°	∢ 180°

Figura 59

Medida de cada ángulo del triángulo de E7 y E8



Medida de cada ángulo del triángulo	Suma de los ángulos internos del triángulo
∢BAC=60° ∢ABC=60° ∢ACB=60°	180°
∢BAC=60° ∢ABC=60° ∢ACB=60°	180°

Nivel 1 Análisis (comparación)

En cada grupo de trabajo, los estudiantes reconocieron las propiedades del triángulo a partir de la observación y experimentación por medio de las herramientas de GeoGebra como el reconocimiento del triángulo equilátero a partir de las medidas de los lados y el reconocimiento del triángulo equilátero acutángulo a partir de la medida de los ángulos internos del triángulo. En este nivel los estudiantes en su totalidad describieron el triángulo por las propiedades observadas a partir de las fases de aprendizaje de indagación, orientación dirigida, explicación, orientación libre e integración, pero aquí no las relacionaron entre sí. El lenguaje utilizado corresponde al nivel trabajado, porque utilizaron una escritura de la información obtenida de acuerdo a lo que se solicitaba en el nivel, la mayoría de los estudiantes asimilaron los conocimientos establecidos para el nivel y reconocieron el triángulo como equilátero y acutángulo.

Situación de validación

Para el desarrollo de esta situación, los cuatro grupos se reunieron nuevamente en el salón de clases, en cada grupo se escogió un representante para que expusiera los resultados encontrados. En primer lugar, E1 representante del grupo 1, expresó que la longitud de los lados del triángulo siempre era la misma y que la medida de los ángulos del triángulo no cambia a pesar de hacer variaciones a la construcción, punto de vista que fue compartido por el representante del grupo 2, grupo 3 y grupo 4. Por su parte el representante del grupo 2, el estudiante E3 mencionó en relación a las propiedades del triángulo: *"es un polígono regular que tiene tres ángulos, tres lados, tres vértices y es equilátero".* E2 representante del grupo 1 agregó a lo dicho por E3: "*es un triángulo de tres lados, tres vértices, tres ángulos y sus medidas son iguales y es un triángulo equilátero"*, así el representante del grupo 3, E6 intervino y agregó a lo dicho por sus compañeros: " *no tiene diagonales, la medida de cada ángulo del triángulo es* $60°$ *y la suma interna es* $180°$*"*, y finalmente E7 representante del grupo 4 argumentó: " *es un polígono regular de tres lados, tres vértices, tres ángulos, es un triángulo equilátero y acutángulo".*

En la actividad de buscar algunos objetos del entorno de los estudiantes donde encontraran partes similares o superficies cuya forma es triangular, E1 mencionó algunos objetos que tuvieran forma triangular en su superficie, como en: *"las escuadras, las varillas y algunos juguetes*", por su parte E3 expresó: "*un espejo, la varilla de la ventana, una silla y la tina tiene una figura de triángulo.* E7 agregó: *"en las baldosas, en las paredes, en las ventanas y en los armarios*, E6 complementó diciendo: "*en las vigas del techo, en las baldosas, en las puertas y entre muchos otros objetos que hay en la casa".* El investigador en este punto recordó el concepto de superficie y volumen para identificar estar superficies triangulares. De esta manera, cada estudiante argumentó y defendió correctamente el conocimiento adquirido frente a sus demás compañeros en relación con las propiedades y construcción del triángulo, evidenciando el logro a lo propuesto para la situación de validación.

Nivel 2 Ordenación (clasificación)

De manera conjunta los estudiantes identificaron el triángulo por medio de sus propiedades en interacción con las herramientas del programa GeoGebra a través de las fases de aprendizaje. Los estudiantes reconocen como unas propiedades del triángulo se derivan de otras y se relacionan entre sí, además reconocen el triángulo por su forma geométrica y la relación que tiene con objetos cuya superficie es triangular. Así mismo, los estudiantes en la adquisición del conocimiento utilizaron un lenguaje acorde al nivel de clasificación, lo cual les permitió reconocer en su momento algunas propiedades del triángulo y relacionarlas entre sí.

Por tanto, se concluye que, en el desarrollo de los procesos de las situaciones y niveles establecidos, se fue logrando la adquisición del conocimiento esperado, primero desde un trabajo autónomo de los estudiantes a partir de la interacción con el medio GeoGebra, donde se visualizó la correcta construcción del triángulo, pero se presentaron dificultades en la redacción del procedimiento utilizado. En la situación de formulación y validación se establece que se logró lo estipulado en la situación didáctica de acuerdo a lo propuesto en el análisis a priori.

Nivel 3 Deducción formal (argumentación)

Cada estudiante realizó argumentaciones básicas basadas en las propiedades observadas a partir de la construcción del triángulo y el tránsito por las fases de indagación, orientación dirigida, explicación, orientación libre e integración permitiendo justificar adecuadamente las propiedades del triángulo construido, a partir de la discusión generada en la situación de validación donde se presentaron puntos de vista a favor de acuerdo a lo expresado por algunos estudiantes.

Situación de Institucionalización

En esta situación el docente formalizó los resultados obtenidos y los relacionó con lo argumentado por los estudiantes en las situaciones establecidas. El docente concluyó con los estudiantes, que la figura geométrica construida era el triángulo equilátero, el cual es un polígono regular formado por tres lados, tres vértices, en el cual no se pueden trazar diagonales, confirmando el argumento expuesto por E6: "*porque no se pueden unir dos vértices no consecutivos por medio de un segmento*". Además, los tres lados tienen la misma medida por lo que se según la longitud de sus lados se clasifica en triángulo equilátero, tiene tres ángulos, cada uno mide 60°, por lo que según la medida de los ángulos se clasifica en triángulo acutángulo, porque sus ángulos internos son agudos, por tanto, la suma de los ángulos internos del triángulo es igual a 180°.

Actividad 2. Problema 51 del Papiro Rhind – área del triángulo

Situación de acción

De acuerdo a la metodología propuesta para esta situación, cada estudiante trabaja de manera individual y autónoma, siguiendo las indicaciones dadas en la guía de trabajo. Para la construcción del primer triángulo rectángulo utilizan la herramienta segmento y del segundo triángulo rectángulo la herramienta polígono, luego cada estudiante mide la longitud de la base hasta obtener que sea igual a 4 aumentando o disminuyendo la longitud del segmento, y midiendo la altura del triángulo hasta que sea igual a 10.

De acuerdo al trabajo realizado por cada estudiante, se concluye que el estudiante El construyó los triángulos sin ninguna dificultad como se muestra en la Figura 60, evidenciando una excelente comprensión de las indicaciones dadas, un buen manejo de las herramientas segmento y polígono e interactividad para utilizar la herramienta color y la aplicación de los conocimientos previos sobre la clasificación de los triángulos según la medida de sus ángulos, porque relacionó la construcción realizada con un triángulo rectángulo.

Por su parte, el estudiante E2 en las construcciones realizadas presentó dificultad para disminuir el tamaño del lado de la base del triángulo construido con la herramienta polígono, después de realizar variaciones en aumentar o disminuir la longitud de la base, logró que esta fuera igual a 4, como se observa en la Figura 61.

En las construcciones realizadas por el estudiante E3 como se observa en la Figura 62 se evidenció una excelente interacción con las herramientas del GeoGebra, siguiendo las instrucciones dadas en la guía sin la intervención del docente y aplicando sus conocimientos previos en relación a el triángulo rectángulo.

En cambio, el estudiante E4 presentó dificultad en la construcción del triángulo rectángulo utilizando la herramienta segmento, ya que al medir la longitud de la base del triángulo no obtenía el resultado correspondiente a la longitud del segmento. Por lo cual, E4 solicitó ayuda a E8, este último le indicó a E4 que construyera nuevamente el triángulo con segmentos, y volviera a medir, ante lo cual el docente se acercó a E4 y le explicó cómo debía utilizar la herramienta segmento y la herramienta distancia, además le explicó como aumentar o disminuir el lado de la base del triángulo para que fuera igual a 4. En la Figura 63 se observa que E4 dejó como altura $BA = 9{,}9$, entonces, no logro dejar la altura del triángulo igual a 10, así mismo, se evidenció buena disposición para el desarrollo de la actividad a pesar de las dificultades presentadas y la aplicación de los saberes previos en cuanto a la forma del triángulo rectángulo.

En las construcciones realizadas por E5 se evidenció buena disposición para realizar las construcciones de los triángulos de acuerdo a lo realizado en la Figura 64, así como una excelente interacción con las herramientas del GeoGebra, siguiendo las instrucciones dadas en la guía sin la intervención del docente y aplicando sus conocimientos previos en relación con el triángulo rectángulo.

De acuerdo a las indicaciones dadas, se observó que E6 tuvo buena disposición para realizar las construcciones de los triángulos (ver Figura 65), así como una excelente interacción con las herramientas de GeoGebra, pero por accidente borró los triángulos, ante lo cual, tuvo que iniciar nuevamente todo el trabajo sin la intervención del docente y aplicando sus conocimientos previos en relación a la forma del triángulo rectángulo.

El estudiante E7 manifestó recordar cómo es el contorno de un triángulo rectángulo y de acuerdo a las indicaciones dadas en la guía procedió a construir los dos triángulos: en la Figura 66 se ilustra el triángulo construido con segmentos, donde no presentó dificultades y mantuvo buena disposición para el desarrollo de la situación.

Finalmente, el estudiante E8 realizó las construcciones de los triángulos rectángulos aplicando los conocimientos previos sobre la clasificación de los triángulos según la medida de sus ángulos como se observa en la Figura 67, además interactuó con las diferentes herramientas del GeoGebra siguiendo las instrucciones dadas en la guía. En la Tabla 20 se ilustran las construcciones de los triángulos rectángulos.

Tabla 20

Triángulos rectángulos

Figura 60

Construcciones de los triángulos de E1

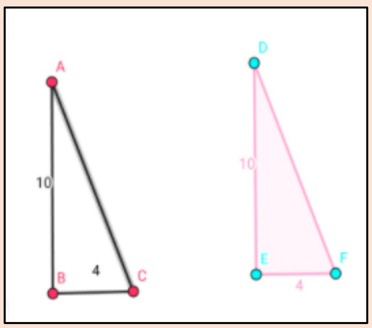


Figura 61

Construcciones de los triángulos de E2

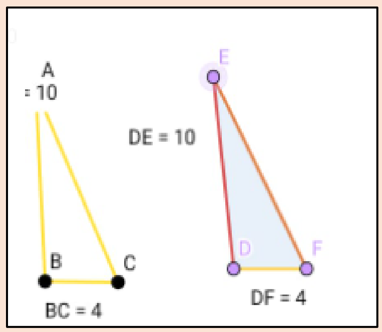


Figura 62

Construcciones de los triángulos de E3

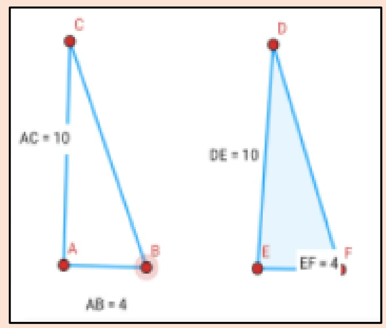


Figura 63

Construcciones de los triángulos de E4

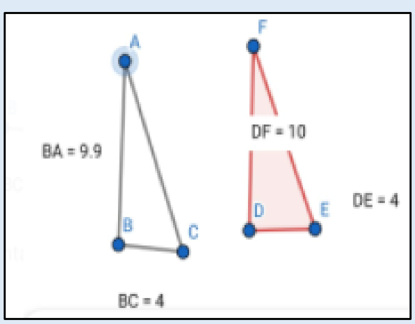


Figura 64

Construcciones de los triángulos de E5

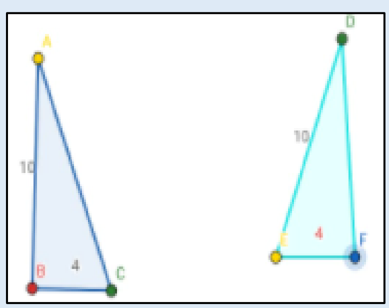


Figura 65

Construcciones de los triángulos de E6

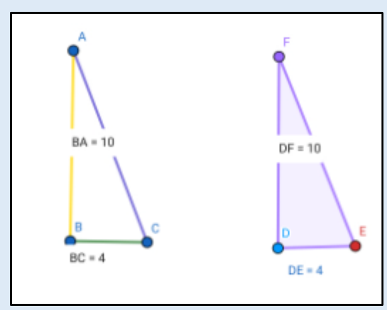


Figura 66

Construcción del triángulo con segmentos de E7

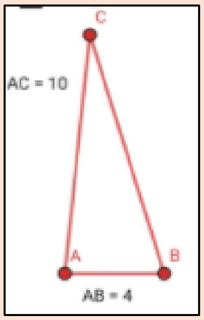
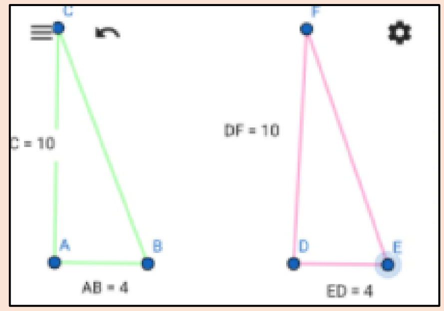


Figura 67

Construcciones de los triángulos de E8



Se concluye que la mayoría de los estudiantes comprendieron la situación propuesta y actuaron de manera dinámica y activa para seguir las indicaciones dadas sin la intervención del docente, logrando lo propuesto en esta primera situación.

Nivel 0 de visualización o reconocimiento (familiarización)

De acuerdo a la información obtenida en este nivel y las fases de aprendizaje de indagación, orientación dirigida, orientación libre e integración los estudiantes construyeron el triángulo por su forma de acuerdo a sus conocimientos previos, además el razonamiento de cada uno de los estudiantes se llevó a cabo mediante consideraciones visuales a partir de las dos construcciones de los triángulos rectángulos.

Así mismo, el lenguaje utilizado por los estudiantes es acorde con el contenido de la situación propuesta. De igual manera, se evidenció que cada estudiante asimiló los conocimientos que estaban propuestos para este nivel, en relación a la familiarización con el triángulo rectángulo y el área del mismo de acuerdo a la contextualización del Problema 51 del Papiro Rhind.

Situación de formulación

En esta situación el docente interviene para explicar a los estudiantes que las unidades utilizadas por los egipcios para el cálculo de áreas de terrenos en la agricultura era el *"setat"* entendido como *arura* que corresponden a la unidad fundamental de superficie equivalente a un cuadrado de un "*khet"* de lado, además les indicó que $1\, khet = 100\, codos$ y $1\, setat = 10.000\, codos\ cuadrados$, después se les indicó como debían hacer la conversión de unidades, seguidamente se les explicó a los estudiantes que debían calcular el área de un triángulo de tierra de 10 $khet$ de altura y 4 $khet\ de\ base$.

En el trabajo realizado por el grupo 1 (E1 y E2) para determinar el área del triángulo construido con segmentos en *setat*, E1 intercambio información con E2 para colocarse de acuerdo en las unidades a utilizar para el procedimiento, E2 le expresa a E1: "*utilizamos codos o khet"* por lo que E2 le dijo: "*en khet"*. Los dos estudiantes continúan con el trabajo en grupo, tienen buena comunicación, E2 le explica a E1: "*para pasar los 10 khet a codos, debemos multiplicar* $10\ \times 100$ *y es igual a 1000 codos, lo mismo hacemos con el valor de la base"* , luego procedieron a determinar el área del triángulo por lo que E2 le dice a E1: "*hay que dividir* $400.000\ codos\ cuadrados$ *entre dos para obtener el área del triángulo"* en el diálogo entre los estudiantes se evidenció iniciativa por parte de E2 para desarrollar la propuesta, mientras que E1 adoptó un rol pasivo en el desarrollo de la situación. En la Figura 68 se ilustra el procedimiento utilizado por E1 y E2 para calcular el área del triángulo en *setat.*

Se observa que el valor del área del triángulo construido con segmentos obtenida por E1 y E2 es igual a 20 $setat$ utilizando la expresión $A = \frac{b \times h}{2}$, así obtuvieron el mismo resultado del área dado por el escriba en la solución del problema. En la descripción del procedimiento se evidencian dificultades en la argumentación dada, porque expresaron: "*primero construimos las figuras, después medimos los lados para obtener 10 de altura y 4 de base".* Luego, E1 y E2 utilizaron la herramienta área y determinaron el área del triángulo construido con la herramienta polígono. Para el triángulo de E1, este obtuvo como área 20 *setat* y E2 obtuvo en un primer momento 19,8 $setat$, por lo que al comparar los resultados del área del triángulo identificaron que eran diferentes y E1 argumento: "*en el primer intento mi compañera como* 19,8 *en el área del triángulo, luego disminuyo la longitud de la base para que fuera igual a* 4 *y, por tanto, el área cambio a 20*". De esta manera, los resultados del área de E1 y E2 fueron iguales como se observa en las medidas realizadas por E2 en la Figura 69.

Con respecto al trabajo del grupo 2 (E3 y E4), E3 preguntó a E4: "*cómo desarrollar el área del triángulo construido con segmentos"* por lo que E4 le mostró a E3 lo que estaba haciendo y le indicó: "*expresando los* 10 $khet$ *en codos",* después continuaron calculando el área del triángulo, expresaron el valor de la base en *codos* y utilizaron la expresión $A = \frac{b \times h}{2}$, cuando determinaron el área en *codos cuadrados* como se muestran en la Figura 70, E4 le explicó a E3: "*cómo pasar de codos cuadrados a setat, porque E3 no entiende, por lo cual E4 le explica a E3 que* 10.000 *codos cuadrados es igual a* 1 $setat$*".* En el proceso de comparación e intercambio de información se observó un trabajo cooperativo entre los estudiantes.

Se puede observar que el área del triángulo construido con segmentos es igual a 20 $setat$, pero no se realizó el procedimiento completo, porque tienen el área en 200.000 codos cuadrados y luego la expresan como 20 $setat$, por lo cual faltó realizar de manera completa el proceso de conversión de unidades para que fuera claro todo el procedimiento y no aplicaron el argumento dado por E4 en relación a la equivalencia entre *codos cuadrados* y *setat*. En relación a la argumentación del procedimiento indicaron: "*pasar las medidas de la base y la altura a codos, los multiplicamos y luego los dividimos entre dos y salió codos cuadrados y ese resultado lo convertimos en setat".* Después, utilizaron la herramienta área para calcular el área del triángulo construido con la herramienta polígono, el resultado dado por GeoGebra en las construcciones de E3 y E4 fue igual a $20\ setat$, lo cual verificaron de manera manual nuevamente como se observa en la Figura 71.

En el grupo 3 (E5 y E6), se observó que inicialmente E5 y E6 no intercambiaron información sobre lo que debían realizar, unos minutos después de entender lo que debían hacer E6 toma la iniciativa y menciona a E5: "*debemos pasar los* $10\ khet$ *y los* $4\ khet$ *a codos, para eso multipliquemos* $10\ por\ 100$ *y* $4\ por\ 100$*"* ante lo cual E5 inicia con el procedimiento. Luego, utilizan la expresión $A = \frac{b \times h}{2}$, después, cuando multiplican $1000\ \times 400$ las unidades que obtienen son codos cuadrados, E5 le expresa a E6 que las unidades del área deben ser $setat$, por lo cual, utilizan qué $1\ setat = 10.000\ codos\ cuadrados$, y con ayuda mutua obtienen que el área del triángulo es igual a $20\ setat$ como se muestra en la Figura 72, que corresponde a la respuesta dada por el escriba en la solución del problema. En consenso E5 y E6 describieron el procedimiento que utilizaron para calcular el área: "*primero que todo pasamos los khet a codos, después los codos los pasamos a codos cuadrados y dividimos la base y la altura entre 2 y después utilizamos la información de que un setat es igual a* 10.000 *codos cuadrados y hay supimos la respuesta del área den setat"*

Seguidamente, E5 y E6 utilizaron la herramienta área y determinaron el área del triángulo construido con la herramienta polígono como se muestra en la Figura 73, en esta ocasión en el triángulo de E5, este obtuvo como área 19,7 *setat* y E2 obtuvo $20\ setat$, por lo que al comparar los resultados del área del triángulo identificaron que eran diferentes, por lo que E6 expreso a E5:" *los resultados del área son aproximadamente iguales, aunque el área de E5 es un número decimal"*, en general, se observó que los dos estudiantes trabajaron cooperativamente.

Finalmente, en el grupo 4 (E7 y E8) se observó que E7 y E8 se colaboraron en el proceso del cálculo del área, además utilizaron la expresión $A = \frac{b \times h}{2}$ para determinar el área del triángulo en codos cuadrados, E7 le manifestó a su compañero que no comprendía bien como pasar de codos cuadrados a *setat*, por lo que E8 le manifestó: "*debemos dividir los* 20.000 $codos\ cuadrados\ entre$ 10.000 $codos\ cuadrados,$ *para obtener la respuesta en setat"*, tanto E7 y E8 obtuvieron como valor del área $2\ setat$, se evidenció en el proceso que realizaron como se muestra en la Figura 74, que cometieron un error al pasar los $10\ khet$ de la altura a codos, porque al multiplicar $10\ \times 100 = 1000$ y ellos escribieron 100 y ninguno de los dos se dio cuenta del error cometido.

En la descripción del procedimiento para obtener el valor del área del terreno del triángulo realizado por E7 y E8 mencionaron: "*se pasaron las medidas del triángulo (khet) a codos y luego se hizo el procedimiento del área del triángulo, luego los resultados finales se pasaron de codos cuadrados a setat"* aunque tenían claro el procedimiento a realizar cometieron un error al realizar la multiplicación. Después, utilizaron la herramienta área para calcular el área del triángulo construido con la herramienta polígono, el resultado dado por GeoGebra en las construcciones de E7 fue igual a $19{,}7$ y el resultado del área de E8 dado era igual a $19.8\ setat$, por tanto, E7 manifestó: "*al comparar la medida del área con mi compañero evidenciamos que los resultados dados por GeoGebra fueron diferentes, pero con mi compañero decidimos que los resultados eran aproximadamente igual a 20"* como se aprecia en la Figura 75.

Se identifica que los estudiantes no se dieron cuenta que el área del triángulo construido con segmentos no era igual al valor del área dado por GeoGebra, no compararon correctamente cada valor del área. En la Tabla 21 se evidencia el área del triángulo construido con segmentos y en la Tabla 22 el área del triángulo construido con la herramienta polígono.

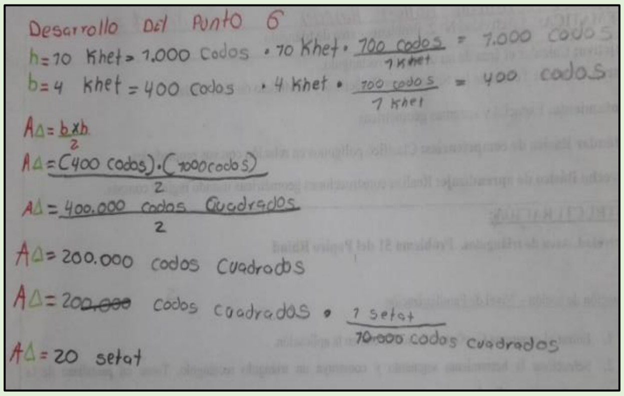
Por tanto, se concluye que los estudiantes realizaron un trabajo en grupo, intercambiaron información, compararon los datos obtenidos del área del triángulo en *setat*, utilizaron conversión de unidades. En tres de los cuatro grupos obtuvieron la misma respuesta dada por el escriba en la solución del problema, a pesar que en la solución dada por el escriba utilizaron la expresión matemática $A = \frac{b}{2} \times h$ y los estudiantes utilizaron $A = \frac{b \times h}{2}$.

Tabla 21

Área del triángulo construido con segmentos

Figura 68

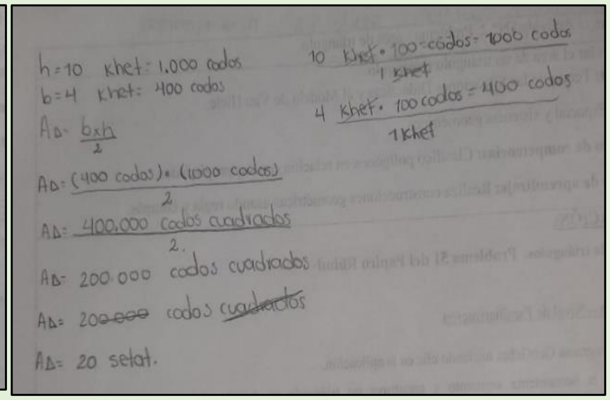
Área del triángulo construido con segmentos de E1 y E2



Desarrollo Del Punto 6
h = 10 Khet = 1.000 Codos · 10 Khet · 100 codos / 1 Khet = 1.000 codos
b = 4 Khet = 400 Codos · 4 Khet · 100 codos / 1 Khet = 400 codos
A∆ = b x h / 2
A∆ = (400 codos) · (1000 codos) / 2
A∆ = 400.000 codos Cuadrados / 2
A∆ = 200.000 codos Cuadrados
A∆ = 200.000 codos cuadrados · 1 setat / 10.000 codos cuadrados
A∆ = 20 setat

Figura 70

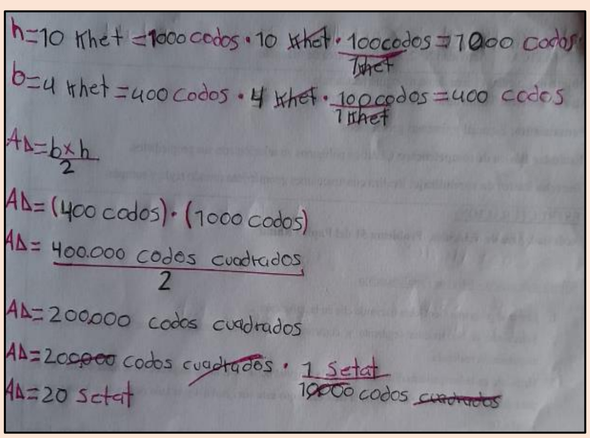
Área del triángulo construido con segmentos de E3 y E4



h = 10 khet = 1.000 codos
b = 4 khet = 400 codos
10 khet · 100 codos / 1 khet = 1000 codos
4 khet · 100 codos / 1 khet = 400 codos
A∆ = b x h / 2
A∆ = (400 codos) · (1000 codos) / 2
A∆ = 400.000 codos cuadrados / 2
A∆ = 200.000 codos cuadrados
A∆ = 200.000 codos ~~cuadrados~~
A∆ = 20 setat.

Figura 72

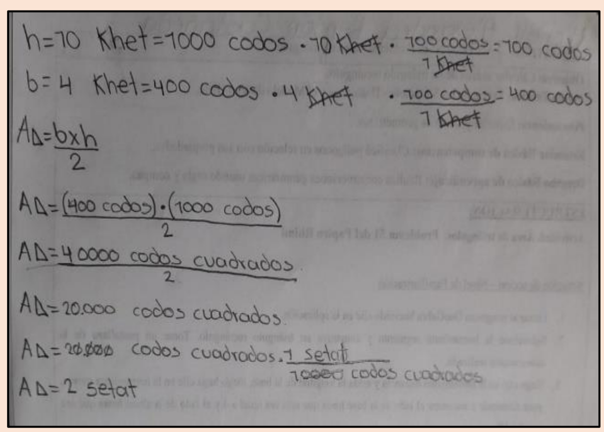
Área del triángulo construido con segmentos de E5 y E6



h = 10 khet = 1000 codos · 10 ~~khet~~ · 100 codos / 1 khet = 1000 codos
b = 4 khet = 400 codos · 4 ~~khet~~ · 100 codos / 1 khet = 400 codos
A∆ = b x h / 2
A∆ = (400 codos) · (1000 codos)
A∆ = 400.000 codos cuadrados / 2
A∆ = 200.000 codos cuadrados
A∆ = 200.000 codos ~~cuadrados~~ · 1 setat / 10000 codos ~~cuadrados~~
A∆ = 20 setat

Figura 74

Área del triángulo construido con segmentos de E7 y E8



h = 10 Khet = 1000 codos · 10 ~~Khet~~ · 100 codos / 1 ~~Khet~~ = 100 codos
b = 4 Khet = 400 codos · 4 ~~Khet~~ · 100 codos / 1 ~~Khet~~ = 400 codos
A∆ = b x h / 2
A∆ = (400 codos) · (1000 codos) / 2
A∆ = 40000 codos cuadrados / 2
A∆ = 20.000 codos cuadrados
A∆ = 20.000 codos cuadrados · 1 setat / 10000 codos cuadrados
A∆ = 2 setat

Tabla 22

Área del triángulo construido con la herramienta polígono

Figura 69

Área del triángulo construido con la herramienta polígono de E2

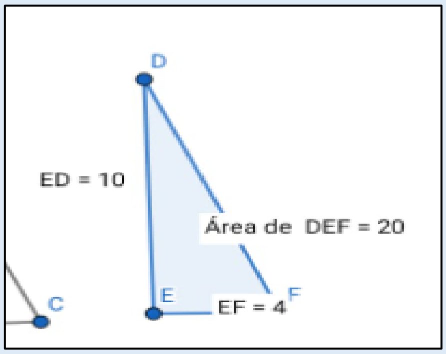


Figura 71

Área del triángulo construido con la herramienta polígono de E4

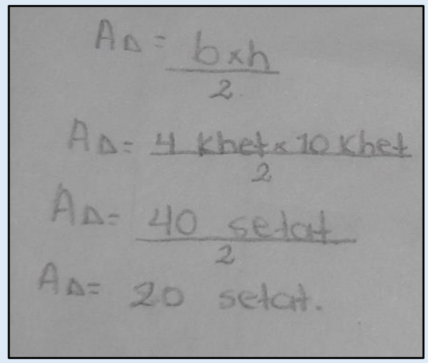


Figura 73

Área del triángulo construido con la herramienta polígono de E5

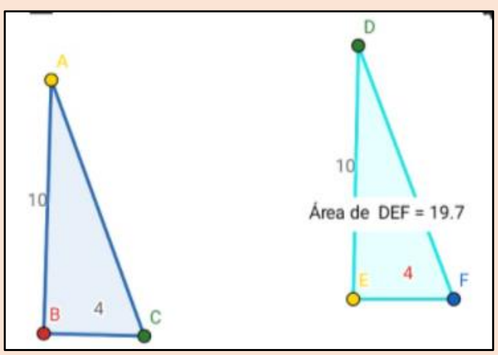
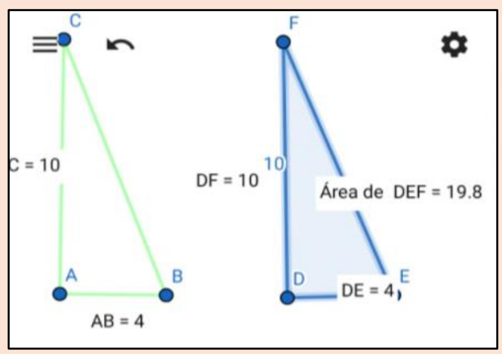


Figura 75

Área del triángulo construido con la herramienta polígono de E7



Nivel 1 Análisis (comparación)

En cada grupo de trabajo los estudiantes reconocieron la forma del triángulo rectángulo a partir de la experimentación y las fases de aprendizaje por medio de las herramientas de GeoGebra.

De manera informal describieron como calcular el área del triángulo rectángulo y como realizar la conversión de unidades utilizadas por los egipcios para el cálculo de áreas de terrenos en la agricultura. En relación al lenguaje utilizado hubo dificultad en la argumentación del procedimiento para calcular el área del triángulo y en cuanto al manejo de las unidades los estudiantes realizaron las conversiones según las indicaciones dadas. Por tanto, se concluye que la mayoría de los estudiantes asimilaron los conocimientos establecidos para este nivel calculando el área de los triángulos.

Situación de validación

En esta situación los representantes de cada grupo socializaron los resultados encontrados en la situación de acción y situación de formulación, para ello, el docente inició dirigiendo el discurso a seguir, por lo que le preguntó a E1 que, si al comparar los datos obtenidos con su compañero el valor de las dos áreas del triángulo eran igual, al respecto E1 expresó: "*las dos áreas son iguales porque con mi compañera obtuvimos las misma cantidades y unidades a pesar de que mi compañera al iniciar obtuvo en el área* 19,8 *pero que soluciono moviendo el lados de la base"*, luego E7 intervino y agregó: "*que ellos obtuvieron que las áreas de los dos triángulos no eran iguales, porque en el área obtenida manualmente tuvimos un resultados de* $2\,setat$ *y en el resultado del área obtenida en el programa GeoGebra obtuvimos* 19", ante lo cual E6 participo mencionando que: "*las áreas de los triángulos eran iguales a* $20\,setat$*"* por lo cual E7 agregó: "*que se había confundido y que el área es* $20\,setat$*"*, por último E3 agregó: "*el área de los dos triángulos si es igual a* $20\,setat$*"* y E1 expresó adicionalmente que las unidades del área eran: "20 *setat*" argumento que fue compartido por E3, E6 y E7.

En relación a las propiedades del triángulo rectángulo el docente indicó a E7 que compartiera con sus compañeros las propiedades del triángulo rectángulo que habían identificado con su compañero en el desarrollo de la situación propuesta, por lo que expresó: "*tiene tres* *vértices, tiene tres lados, tiene tres ángulos, uno de sus ángulos mide 90° y uno de sus lados mide más que los otros"*, E6 participo y dijo: "*estoy de acuerdo con lo que dijo mi compañero, porque los triángulos rectángulos tienen un ángulo de noventa grados"*, E3 mencionó al respecto: "*que el triángulo rectángulo tiene un ángulo recto".* El docente continuó guiando la discusión y preguntó a E6 que, si se podía calcular el área del triángulo utilizando otros procedimientos, por lo que E6 respondió: "*sí, se puede utilizar dividiendo la base con dos y luego multiplicando por la altura"* argumento que fue compartido por E7 porque manifestó: "*al buscar otros procedimientos realizamos un ejemplo de base divido por dos y multiplicado por la altura* $\frac{b}{2} \times h = Área\ del\ triángulo$*"*, por su parte E1 y E3 manifestaron no encontrar ningún otro procedimiento al utilizado. Así los representantes de cada grupo expusieron a sus compañeros la información encontrada y lo aprendido en el desarrollo de cada situación, por lo cual se logró lo propuesto en esta situación.

Nivel 2 Ordenación (clasificación)

Los estudiantes construyeron el triángulo rectángulo por medio de la interacción con las herramientas del programa GeoGebra, se reconoció como calcular el área de un triángulo a través del tránsito por las fases de aprendizaje, en este caso, un triángulo rectángulo, también en dos grupos establecieron otro procedimiento para determinar el área del triángulo y utilizaron un lenguaje acorde al contexto de la situación presentada en cuanto al manejo de las unidades de la longitud y área establecida por los egipcios para el cálculo de áreas de terrenos en la agricultura.

Por lo anterior, se menciona que en el tránsito por la situación de acción, formulación y validación se logró que los estudiantes determinaran que el área de cada triángulo construido era igual a $20\ setat$ que corresponde a la solución dada por el escriba, de acuerdo a lo propuesto en el análisis a priori, aunque los estudiantes utilizaron un procedimiento equivalente, porque el escriba tomo la mitad de la base y el resultado lo multiplico por la altura.

Nivel 3 Deducción formal (argumentación)

Cada uno de los estudiantes realizaron argumentaciones básicas basadas en el cálculo del área del triángulo rectángulo mencionaron que habían aprendido cuales eran las unidades y equivalencias de las mismas que utilizaban los egipcios para medir terrenos y que en la actualidad ya no se utilizan. Además, en dos grupos se identificó que el área de un triángulo se puede calcular como el producto de la mitad de la base por la altura, dando logro a los establecido en este nivel a través de las fases de indagación, orientación dirigida, explicación, orientación libre e integración.

Situación de Institucionalización

En esta situación el docente formalizó los resultados obtenidos y los relacionó con lo argumentado por los estudiantes en las situaciones anteriores. El docente les explicó que la unidad de superficie utilizada en la civilización egipcia era el $setat$, termino que los griegos lo llamaron como arura, además les explicó que un *setat* es la superficie de un cuadrado de un *khet* de lado, unidad que fue utilizada en gran medida por los egipcios para medir la superficie de terrenos en los campos. Nuevamente, les aclaró que $1\ khet = 100\ codos$ y $1\ setat = 10.000\ codos\ cuadrados$.

El docente finalizó explicándoles a los estudiantes como el escriba había dado solución al problema 51 del Papiro Rhind y comparando el procedimiento con el utilizado por ellos, de modo que identificaran el área del triángulo igual a la mitad producto de la base por la altura o igual al producto de la mitad de la base por la altura.

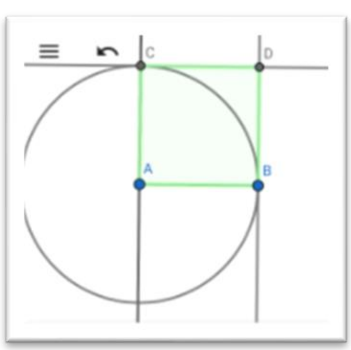
Actividad 3. Construcción del cuadrado

Para la situación didáctica relacionada con la construcción del cuadrado cada estudiante interactuó con las herramientas del programa de manera individual y tuvieron buena disposición para desarrollar la situación propuesta por medio de la interacción con las herramientas de GeoGebra en la construcción de segmentos, circunferencias (centro, punto), rectas perpendiculares, rectas paralelas e intersección de puntos. En primer momento, E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7 y E8 no presentaron dificultades y de manera autónoma procedieron a la construcción del cuadrado siguiendo las indicaciones dadas. Además, se evidenció que los estudiantes aplicaron los saberes previos sobre el cuadrado para identificar la forma geométrica del mismo en la medida en que iban realizando la construcción.

En la finalización de la situación de acción E4 pregunto a la docente como utilizar la herramienta polígono porque estaba uniendo el vértice A con el D y luego el vértice C con B y no lograba obtener la forma del cuadrado. Por lo cual el docente le explicó que debía unir en orden los vértices A, B, C y D de acuerdo a la indicación dada en la situación. E4 borró la unión de los vértices que había realizado y luego utilizó la herramienta polígono uniendo de manera ordenada los 4 vértices como se ilustra en la Figura 76.

Figura 76

Construcción del cuadrado de E4



Los demás estudiantes E1, E2, E3, E5, E6, E7 y E8 no presentaron dificultades en la situación presentada. Además, en la redacción del procedimiento utilizado para la construcción del cuadrado, E1 manifestó: "*Si utilizo primero el segmento, una circunferencia, una recta perpendicular, etc, entonces, construyó un cuadrado"*. Por su parte E2 mencionó: "*si construyo un segmento, una circunferencia y un polígono, entonces construyo un cuadrado"*. Así E3 expresó: "*si construyo un segmento, circunferencia, recta paralela, perpendicular y polígono, entonces construyo un cuadrado"*. De manera similar E4 dijo: "*si dibujé un segmento AB luego hice una circunferencia, entonces hice dos rectas perpendiculares construyo un cuadrado y le pongo colores"*.

Por su parte, E6 expresó: "*si uno toma el segmento y marca A, B, se le hace clic en el punto a y b, entonces hay se va a construir un círculo después de seguir las instrucciones se construye un cuadrado"* lo cual evidenció confusión en la comprensión del procedimiento. Igualmente, E5 expresó: "*selecciono la herramienta segmento AB luego hago punto entonces circunferencia centro en A y punto en B luego construyo una recta perpendicular al segmento AB y hago punto en C"*. En cambio, E7 estableció: "*si construyo con las herramientas segmento, centro, punto, segmento, entonces me queda un cuadrado"* y por último E8 indicó: "*si construyo con las herramientas segmentos, centro punto, segmento, entonces hago un cuadrado"*. Por tanto, se identifica que hubo dificultades en la redacción del procedimiento utilizado para la construcción del cuadrado.

Nivel 0 de visualización o reconocimiento (familiarización)

Para este nivel se establece que los estudiantes reconocieron el cuadrado por su forma a partir de la observación sin que sean explicitas las propiedades del cuadrado, así los estudiantes se familiarizaron con la construcción del cuadrado por medio de las herramientas de GeoGebra y el tránsito por las fases de indagación, orientación dirigida, orientación libre e integración. Los estudiantes identificaron el cuadrado como un todo. En relación al lenguaje utilizado se menciona que hubo dificultades en el registro escrito en la redacción del procedimiento utilizado porque no lo argumentaron de manera correcta y secuencial.

Situación de formulación

En esta fase de socialización, respecto a medir la longitud de un lado del cuadrado construido se tiene que en el grupo 1 (E1 y E2), E1 le preguntó a el docente que, si había determinado de manera correcta la longitud del lado, por lo que el docente le indicó que había medido bien el lado como se muestra en la Figura 77, pero E1 después decidió medir la longitud de los otros tres lados. En cambio, E2 siguió la indicación y mido la longitud de un solo lado como se observa en la Figura 78. En consenso E1 y E2 determinaron que la longitud de los demás lados era igual a la longitud del lado que se había medido por tratarse de un cuadrado como se establece en la Figura 79, además determinaron el perímetro del cuadrado de acuerdo a los conocimientos previos.

Tanto E1 como E2 se ponen de acuerdo para mencionar que respecto a las medidas de los lados del cuadrado: *"son iguales y el resultado es el mismo"*. De acuerdo a la indicación dada de observar los ángulos del cuadrado y determinar la medida de cada uno (ver Figura 80), E1 y E2 coinciden en indicar que: *"la medida de cada ángulo del cuadrado es igual a* 90° *y, por tanto, se puede determinar la suma de los ángulos internos del cuadrado sumando los cuatro ángulos"*. Al utilizar la herramienta mover y tomar el cuadrado de uno de los vértices y moverlo E2 le dice a E1 que pasa con la medida de los lados del cuadrado: "*la longitud de los lados del cuadrado cambia, pero al disminuir el tamaño también disminuye la medida, pero las medidas de los ángulos no* *cambian, siempre es de* $90°$*”* por su parte E1 le dice a E2: *“las longitudes de los lados del cuadrado si cambian al agrandar y disminuir, pero siempre son iguales”*.

En el grupo 2 (E3 y E4), E4 le pregunta a el docente si habían realizado de manera correcta la medida del lado, por lo cual el docente le indica que si está correctamente determinada la medida del lado. E4 no sigue totalmente la indicación de medir un solo lado (ver Figura 81), sino que decidió medir los cuatro lados del cuadrado construido.

E3 le dice a E4: “*debe justificar todo el procedimiento de las medidas de los lados del cuadrado”* y agrega que al medir un lado la longitud de los demás lados es: “*lo mismo que la que medí, porque todos sus lados son iguales”* y luego que E4 midiera todos los lados del cuadrado señala: “*la longitud de los demás lados es la misma porque todos sus lados son iguales”* de acuerdo a lo registrado en la Figura 82. Se observa que con respecto a la construcción de E4 la medida del lado $AB = 11.4$ y tanto E3 como E4 en su registro colocaron $AB = 11.3$ cometiendo un error en el registro de la información dada por el GeoGebra. Para determinar el perímetro del cuadrado construido tanto E3 como E4 se pusieron de acuerdo para hacer la suma y calcular el perímetro haciendo la suma de las cuatro medidas de los lados, así ellos realizaron la suma en las hojas de la guía. El docente interviene en el trabajo realizado en cada grupo para indicar que no deben utilizar la herramienta ángulo para medir cada ángulo, sino que deben observar la construcción realizada para determinar la medida de cada ángulo como se muestra en la Figura 83. Ante lo cual E4 le dice a E3 que: “*cada ángulo mide* $90\,°$*”* se observa que después de lo que le dice a su compañero procede a medir cada ángulo para verificarlo y le muestra a E3 las medidas.

De acuerdo al registro de la información obtenida de E3 y E4 se establece que ninguno de los dos utilizó la escritura adecuada para indicar la medida de cada ángulo. Además, en relación a tomar el cuadrado de un vértice y moverlo, E4 le explica a E3 en su celular que: “*al agrandar el* *cuadrado, aumentan las medidas de cada lado y al disminuir el cuadrado disminuyen las medidas de los lados, pero es igual en cada lado y que las medidas de los ángulos siguen siendo las mismas, no cambian"* así E3 agrega: "*la medida de los ángulos siempre es la misma"*

Respecto al trabajo realizado en el grupo 3 (E5 y E6) como se observa en la Figura 84, se tiene que utilizaron la herramienta distancia y midieron la longitud de un lado del cuadrado. De esta manera siguieron completamente la indicación dada y establecieron en común acuerdo que: "*los demás lados miden igual"*. Para determinar el perímetro del cuadrado E6 le indica a E5 que: "*para determinar el perímetro se puede multiplicar o se puede sumar"* por lo que E5 le responde que: "*es mejor sumar"* de esta manera calculan el perímetro de los cuadrados construidos y lo registran en la tabla dada, aunque E6 si multiplica $4{,}3 \times 4$ obteniendo $17, 2$, mientras que E5 si realiza la suma $6 + 6 + 6 + 6 = 24$.

Se puede observar en el registro de la información que ninguno de los dos establece de manera correcta la medida de cada lado (ver Figura 85), es decir, que $\overline{AB} = 4{,}3$ y así para cada uno de los demás lados, de manera similar ocurre con la escritura que utilizan para el perímetro.

Por otro lado, cuando se les pidió observar los ángulos del cuadrado construido, E6 le indica a E5: *"cada ángulo mide* $90°$*"* por lo que E5 observó su construcción y estuvo de acuerdo con el argumento dado por su compañero y registraron la información encontrada de acuerdo a lo señalado en la Figura 86. De acuerdo a la información registrada no utilizan la escritura para expresar la medida de cada uno de los ángulos del cuadrado, para determinar la suma de los ángulos internos del cuadrado E6 expresa a E5: "*debemos sumar cuatro veces 360"* ante lo cual cada uno procede y realiza la suma. Al tomar de un vértice el cuadrado y moverlo, E6 le indicó a E5 que: "*siempre las medidas son iguales al aumentar o disminuir el tamaño del cuadrado"* y de acuerdo a lo observado E5 menciona respecto a los ángulos: "*sigue siendo la misma medida de* $90°$*"* por lo que E6 está totalmente de acuerdo y le dice: "*como es un cuadrado todos sus ángulos van a ser siempre rectos".*

Por último, en el trabajo realizado en el grupo 4 (E7 y E8), E7 mide la longitud de los cuatro lados del cuadrado construido por lo que no sigue la indicación dada en la situación, mientras que E8 si mide solo un lado del cuadrado como se muestra en la Figura 87. En común acuerdo, E7 y E8 indican respecto a la medida de los demás lados del cuadrado que: "*todos sus lados miden lo mismo".* Para calcular el perímetro ellos deciden sumar la medida de cada lado del cuadrado, sin embargo, tanto E7 como E8 en el procedimiento que realizaron sumaron la longitud de los lados del cuadro y para verificar también multiplicaron la medida de un lado del cuadrado por cuatro obteniendo el mismo resultado, en la Figura 88 se muestran los resultados encontrados. Además, ellos también indicaron respecto a la longitud de los lados del cuadrado que: "*es un polígono regular y por lo tanto todos sus lados son iguales"*.

Respecto a la indicación de observar los ángulos de cuadrado coincidieron en expresar que: *"cada ángulo mide* 90°*, por tratarse de ángulo rectos".* Además, en la Figura 89 para calcular la suma interna de los ángulos internos del cuadrado, expresaron: "*debemos sumar cada ángulo del cuadrado"* por lo que procedieron a realizar la suma y obtuvieron 360° como suma de los ángulos internos del cuadrado. De acuerdo a la indicación de tomar el cuadrado de un vértice y hacerle variaciones en diálogo estuvieron de acuerdo en señalar que: "*las longitudes aumentan o disminuyen, pero sus lados siguen siempre iguales y los ángulos siempre van a medir lo mismo".* En la Tabla 23 se muestran la longitud del lado de los cuadrados, en la Tabla 24 está el registro de la información de la longitud de los lados y perímetro del cuadrado y en la Tabla 25 está el registro de las medidas de los ángulos del cuadrado.

Por tanto, en esta situación los estudiantes intercambiaron información que identificaron de acuerdo a las construcciones realizadas, en consenso argumentan, comparan y comunican los resultados encontrados de las longitudes de los lados del cuadrado y las medidas de los ángulos.

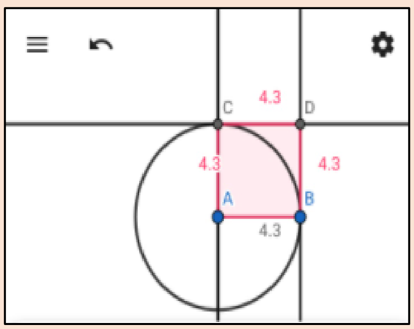
Tabla 23

Longitud del lado del cuadrado

<table>
<tr>
<td>

Figura 77

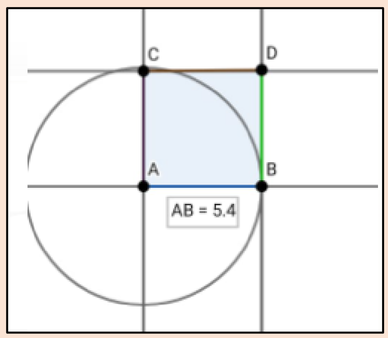
Longitud del lado del cuadrado de E1



</td>
<td>

Figura 78

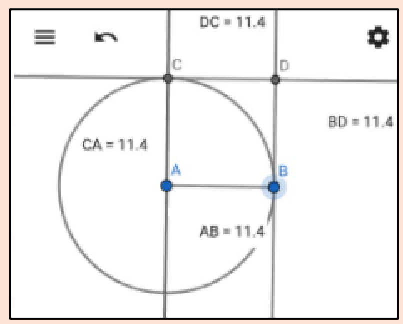
Longitud del lado del cuadrado de E2



</td>
<td>

Figura 81

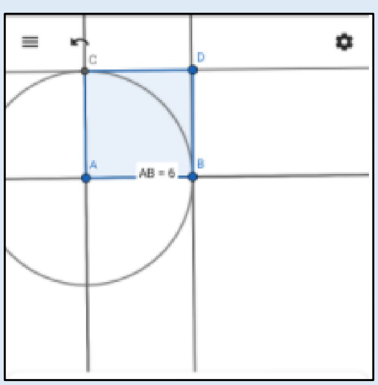
Longitud de los lados del cuadrado de E4



</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Figura 84

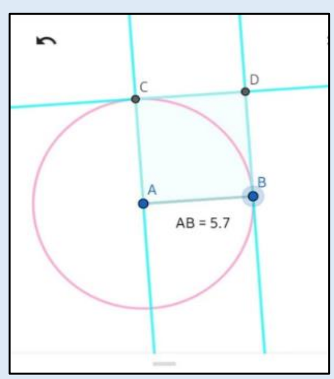
Longitud del lado del cuadrado de E5



</td>
<td>

Figura 87

Longitud del lado del cuadrado de E8



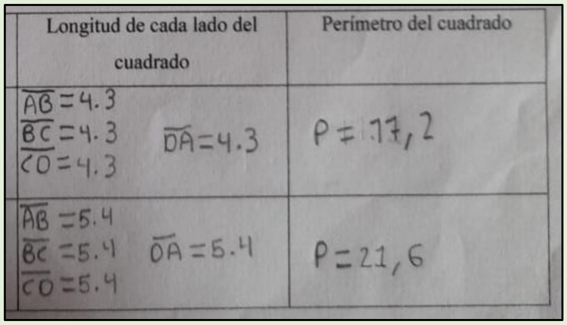
</td>
</tr>
</table>

Tabla 24

Registro de la información de la longitud de los lados y perímetro del cuadrado

Figura 79

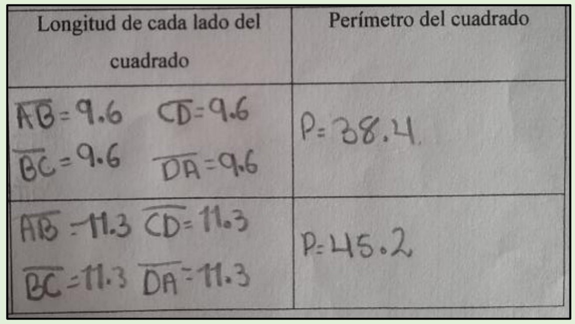
Longitud de cada lado y perímetro del cuadrado de E1 y E2



Longitud de cada lado del cuadrado	Perímetro del cuadrado
$\overline{AB}=4.3$ $\overline{BC}=4.3$ $\overline{CO}=4.3$ $\overline{DA}=4.3$	P = 17,2
$\overline{AB}=5.4$ $\overline{BC}=5.4$ $\overline{CO}=5.4$ $\overline{OA}=5.4$	P=21,6

Figura 82

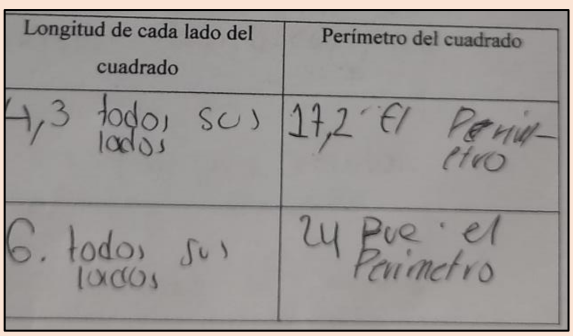
Longitud de cada lado y perímetro del cuadrado de E3 y E4



Longitud de cada lado del cuadrado	Perímetro del cuadrado
$\overline{AB}=9.6$ $\overline{CD}=9.6$ $\overline{BC}=9.6$ $\overline{DA}=9.6$	P=38.4
$\overline{AB}=11.3$ $\overline{CD}=11.3$ $\overline{BC}=11.3$ $\overline{DA}=11.3$	P=45.2

Figura 85

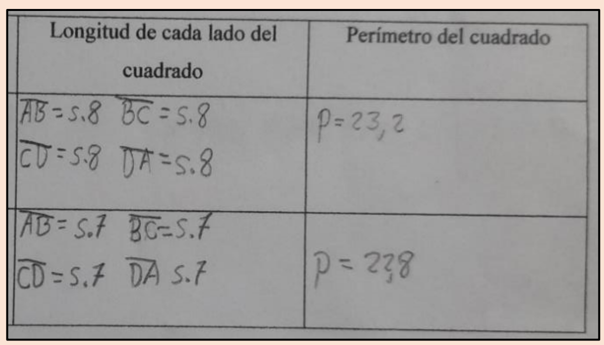
Longitud de cada lado y perímetro del cuadrado de E5 y E6



Longitud de cada lado del cuadrado	Perímetro del cuadrado
4,3 todos sus lados	17,2 El Perimetro
6. todos sus lados	24 Pue el Perimetro

Figura 88

Longitud de cada lado y perímetro del cuadrado de E7 y E8



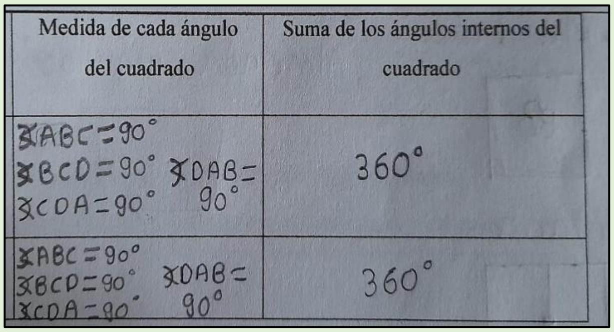
Longitud de cada lado del cuadrado	Perímetro del cuadrado
$\overline{AB}=5.8$ $\overline{BC}=5.8$ $\overline{CD}=5.8$ $\overline{DA}=5.8$	P=23,2
$\overline{AB}=5.7$ $\overline{BC}=5.7$ $\overline{CD}=5.7$ $\overline{DA}$ 5.7	P = 238

Tabla 25

Registro de la medida de los ángulos del cuadrado

Figura 80

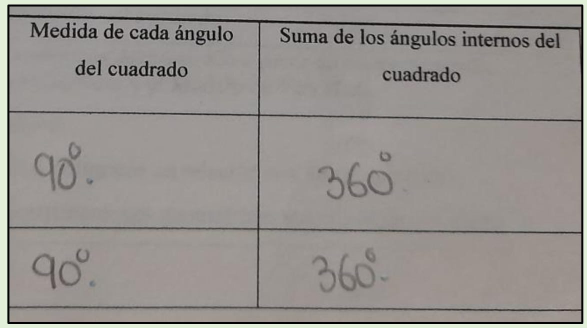
Medida de cada ángulo del cuadrado de E1 y E2



Medida de cada ángulo del cuadrado	Suma de los ángulos internos del cuadrado
∡ABC = 90° ∡BCD = 90° ∡CDA = 90° ∡DAB = 90°	360°
∡ABC = 90° ∡BCD = 90° ∡CDA = 90° ∡DAB = 90°	360°

Figura 83

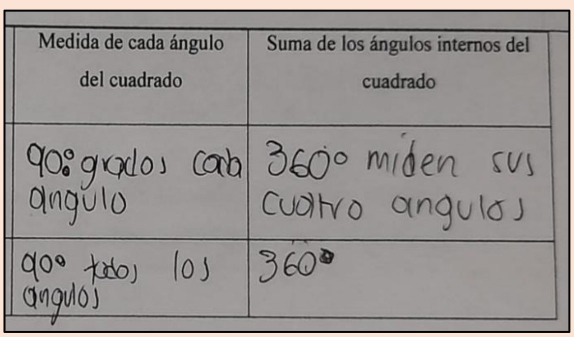
Medida de cada ángulo del cuadrado de E3 y E4



Medida de cada ángulo del cuadrado	Suma de los ángulos internos del cuadrado
90°.	360°.
90°.	360°.

Figura 86

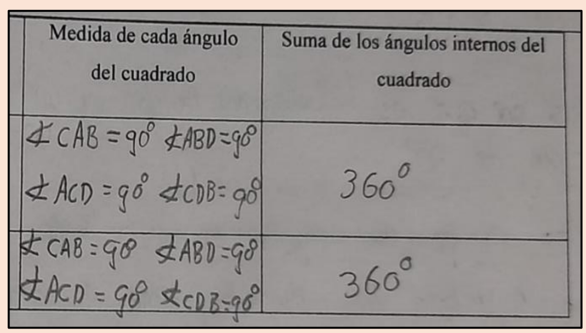
Medida de cada ángulo del cuadrado de E5 y E6



Medida de cada ángulo del cuadrado	Suma de los ángulos internos del cuadrado
90° grados cada angulo	360° miden sus cuatro angulos
90° todos los angulos	360°

Figura 89

Medida de cada ángulo del cuadrado de E7 y E8



Medida de cada ángulo del cuadrado	Suma de los ángulos internos del cuadrado
∡CAB = 90° ∡ABD = 90° ∡ACD = 90° ∡CDB = 90°	360°
∡CAB = 90° ∡ABD = 90° ∡ACD = 90° ∡CDB = 90°	360°

Nivel 1 Análisis (comparación)

Los estudiantes reconocieron las propiedades del cuadrado a partir de la observación y experimentación por medio de las herramientas de GeoGebra y el tránsito por las fases de aprendizaje. Además, describieron el cuadrado por la longitud de sus lados, el perímetro, la medida de cada uno de sus ángulos y la suma interna de los ángulos del cuadrado. El lenguaje utilizado corresponde al nivel trabajado, a pesar de que en el grupo 1 y grupo 2 hubo dificultades en el registro de las medidas de los lados y medidas de los ángulos, se entiende de manera correcta lo que los estudiantes quisieron expresar, así se evidencia la asimilación de los conocimientos establecidos para el nivel y el reconocimiento del cuadrado.

Situación de validación

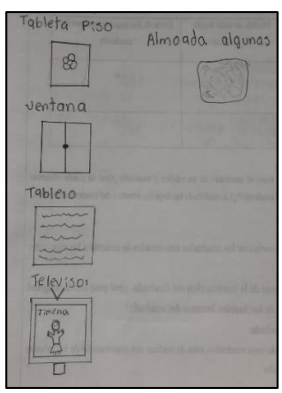
Para el desarrollo de esta situación, el docente guío el discurso puesto que ningún estudiante quería iniciar con la exposición de los argumentos encontrados en el tránsito de las dos anteriores situaciones, así el docente preguntó a E1: *"¿qué se puede establecer en relación con los lados del cuadrado?"* por lo que E1 argumentó: "*la longitud de los lados del cuadrado si cambian al hacerle variaciones al tamaño del cuadrado, pero cada lado siempre tiene la misma medida"*, por su parte E7 se une a la conversación y agrega: "*sí, es cierto, porque al aumentar o disminuir el tamaño del cuadrado la longitud de los lados cambian, pero todos los lados tienen la misma longitud"* por lo cual el docente expresa a E7 "*muy bien E7".* A la discusión se une el representante del grupo 2, E3 y agrega: "*estoy de acuerdo con lo que dicen mis compañeros"* de igual manera el representante del grupo 3, E6 menciona: "*si estoy de acuerdo, porque al disminuir o aumentar el tamaño del cuadrado van a cambiar las medidas de los lados, pero los cuatro lados van a tener iguales medidas".*

E3 agrega a lo dicho por sus compañeros que: "*la medida de los ángulos internos del cuadrado siempre es la misma porque es un cuadrilátero"*, por tanto, E1 decide participar y menciona: "*la medida de cada ángulo es de noventa grados"* argumento que es compartido por E7 y justificado por E6, el cual expresó: "*porque el cuadrado se supone que tiene todos sus ángulos rectos y el único ángulo que mejor dicho es recto es noventa grados, pero todos sus ángulos van* *a ser rectos".* Seguidamente, el docente interviene y le pide al representante del grupo 4, que mencione las propiedades que identificó del cuadrado, por lo que E7 expresa que con su compañero identificaron que: "*es un polígono regular, es un polígono convexo, tiene cuatro lados, tiene cuatro vértices, dos diagonales, tiene cuatro ángulos rectos, cada ángulo mide noventa grados, la suma interna de sus ángulos es igual a trescientos sesenta grados y sus lados son paralelos dos a dos"* E3, E1 y E7 en su orden manifestaron estar de acuerdo por lo expuesto por E7.

Nuevamente, el docente dirigió la discusión y les dijo que pensarán en objetos que tuvieran forma cuadrada en su superficie y los mencionaran y trataran de realizar una representación de los mismos, por lo que E3 indicó que con su compañero establecieron; "*las ventanas, espejos, la silla, el tablero de la cancha de baloncesto y la baldosas",* E1 quiso participar y agregó: "*tableta del piso, ventana, tablero, televisor, algunas almohadas"* y en la guía de trabajo dibujo los objetos mencionados.

Figura 90

Objetos con forma o superficie cuadrada del entorno de E1



Por otra parte, E6 mencionó: "*las cuadriculas de los cuadernos, la cuadricula de los tableros, el marco de las ventanas, y las baldosas, entre otras muchas"* y E7 complementó mencionando los objetos: "*una silla, el tablero de baloncesto, en las baldosas y los espejos"* El único grupo que realizó representación gráfica de los objetos que mencionaron fue el grupo 1, por cuestiones de tiempo les fue imposible a los demás alcanzar a hacer las representaciones. Así, se concluye que cada estudiante participante argumentó y defendió correctamente el conocimiento adquirido frente a sus demás compañeros en relación con las propiedades y construcción del cuadrado en relación a lo establecido en el análisis a priori.

Nivel 2 Ordenación (clasificación)

De manera grupal todos los estudiantes lograron identificaron el cuadrado por sus propiedades por medio de la interacción con las herramientas del programa GeoGebra, se evidencia que los estudiantes establecieron que unas propiedades del cuadrado se derivan de otras y se relacionan entre sí, como lo es la longitud de los lados, la medida de los ángulos y la clasificación del cuadrado según sus medidas y según sus ángulos, también reconocieron el cuadrado por su forma geométrica y lo relacionaron con algunos objetos de su entorno que tienen forma o superficie cuadrada. Así mismo, los estudiantes en el tránsito del nivel desarrollaron las fases de aprendizaje propuestas y expresaron las propiedades identificadas del cuadrado a partir de su construcción y les permitió la conceptualización de los conocimientos establecidos para este nivel.

Nivel 3 Deducción formal (argumentación)

Cada uno de los estudiantes realizaron argumentaciones básicas fundamentadas en las propiedades observadas a partir de la construcción del cuadrado, no realizaron demostraciones lógicas formales y en cuánto al proceso desarrollado E1 y E2 mencionaron: "*hemos aprendido a hacer el cuadrado en la aplicación GeoGebra y hemos aprendido a ponernos de acuerdo con mi compañera"*, E3 concluyo que: " *aprendimos las propiedades del cuadrado trabajando en equipo* *y ha fortalecido nuestros conocimientos"* E7 agregó: "*aprendimos las propiedades del cuadrado y aprendimos a construir el cuadrado"* por su parte E5 menciona que: "*aprendimos las propiedades del cuadrado, nos sirvió trabajar en grupo"*.

Situación de Institucionalización

Esta situación estuvo a cargo del docente el cual formalizó los resultados obtenidos y argumentados por los estudiantes en las situaciones anteriores. Por tanto, les explicó que de acuerdo a lo expuesto por E7 la figura geométrica construida era el cuadrado, el cual es un polígono regular porque todos sus lados tienen la misma medida, es un polígono convexo porque sus ángulos interiores son menores de 180° y al trazar todas sus diagonales, estas quedan en la parte interna del cuadrado, adicionalmente, les explicó que tiene cuatro lados, cuatro vértices, dos diagonales, tiene cuatro ángulos rectos, es decir, ángulos de 90° como lo expreso E6 en su momento, la suma de los ángulos internos es igual a 360° y es un paralelogramo porque sus lados son paralelos dos a dos como lo argumento E7.

Actividad 4. Propiedades del pentágono

La aplicación de esta actividad se llevó a cabo en una hora de 45 minutos debido al desarrollo de una actividad institucional.

Situación de acción

En esta primera parte los estudiantes procedieron al desarrollo de la situación por medio de la interactividad con las herramientas segmento, polígono y polígono regular. El estudiante E1 realizó las tres construcciones del polígono de cinco lados en la ventana de trabajo sin presentar dificultades, así mismo, lo realizó E3, E5, E6 y E8 con sus respectivas construcciones.

En cambio, E2 y E7 no siguieron la indicación de construir las tres figuras geométricas en la misma ventana de trabajo, al iniciar la actividad únicamente construyeron el polígono de cinco lados por medio de la herramienta segmento, por lo cual, solicitaron ayuda del docente y este les aclaró que debían utilizar la herramienta mover para disminuir el tamaño de la figura construida y construir los otros dos polígonos de cinco lados. Por su parte, E4 cuando inició solicitó ayuda del docente porque no comprendía las tres primeras indicaciones, luego leyó nuevamente las indicaciones dadas en la situación y realizó las construcciones sin que recibiera la orientación del docente.

En la Tabla 26 se muestran los polígonos de cinco lados construidos de acuerdo a las indicaciones dadas.

Tabla 26

Polígonos de cinco lados

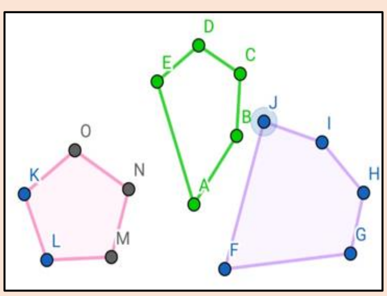
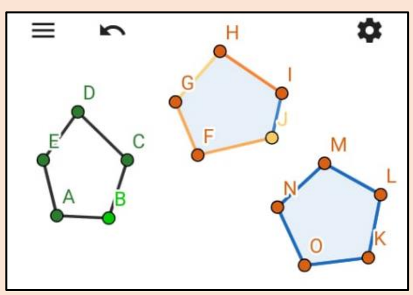
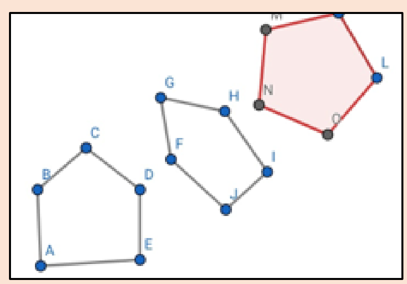
Figura 91	**Figura 92**	**Figura 93**
Polígonos de cinco lados de E1	*Polígonos de cinco lados E2*	*Polígonos de cinco lados E3*
		

Figura 94

Polígonos de cinco lados E4

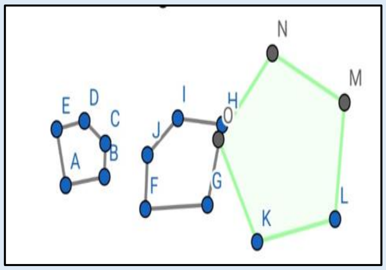


Figura 95

Polígonos de cinco lados E5

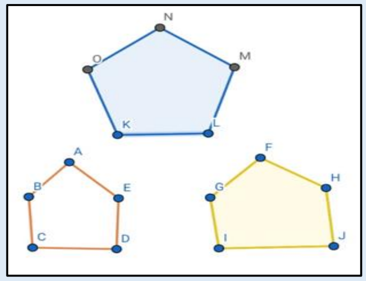


Figura 96

Polígonos de cinco lados E6

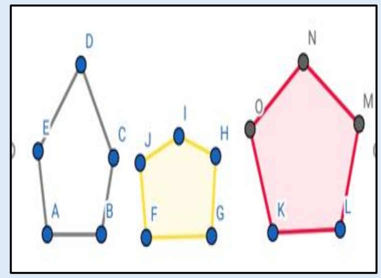


Figura 97

Polígonos de cinco lados E7

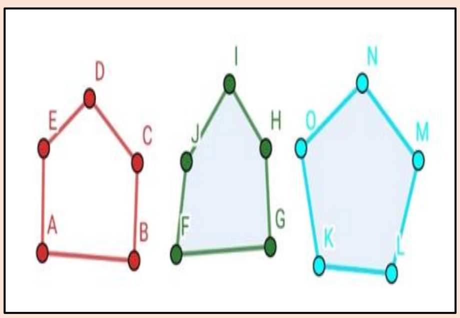
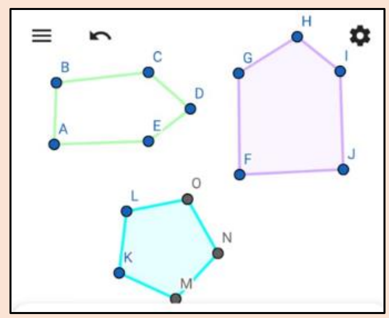


Figura 98

Polígonos de cinco lados E8



Por tanto, los estudiantes aplicaron los conocimientos previos sobre el uso de la herramienta segmento, polígono y polígono regular para realizar las construcciones del polígono de cinco lados de acuerdo a lo establecido en el análisis a priori, además identificaron las figuras construidas como pentágonos y en su mayoría las relacionaron con la forma de una casa como lo expresaron en el desarrollo de la situación de acción.

Nivel 0 de visualización o reconocimiento (familiarización)

De acuerdo a las categorías de análisis los estudiantes E2, E3, E4, E6, E7 por observación identificaron al construir los pentágonos que se trataba de polígonos regulares e irregulares.

Mientras que E1, E5 y E8 observaron las construcciones por unos minutos y luego si establecieron que eran irregulares y regulares y fue percibido por los estudiantes como una unidad a través del tránsito por las fases de indagación, orientación dirigida, orientación libre e integración, pero en este nivel, sin evidenciar el reconocimiento de componentes o de algunas propiedades. En relación al lenguaje utilizado por los estudiantes este es acorde con lo propuesto en la situación, además se familiarizaron con la construcción de un polígono de cinco lados por medio de la herramienta segmento, polígono y polígono regular.

Situación de formulación

Después del trabajo individual, los estudiantes en cada grupo identificaron las similitudes y diferencias entre las tres figuras: En el grupo 1 (E1 y E2) establecieron en relación a las similitudes: "*tiene los mismos lados, los mismos vértices, una figura es más pequeña y la otra es más grande, además se ve que tienen diferente medida"* además E1 le dice a E2: "*cada figura tiene los lados más cortos y más largos*", *así* como diferencias E2 argumento a E1: "*uno es más pequeño, el otro un lado es más largo que los demás, son construidas con diferentes herramientas",* por lo que E1 estuvo de acuerdo.

En el grupo 2 (E3 y E4) al iniciar con esta situación no intercambiaron información, pero después de unos minutos de observación el docente les indicó que debían compartir e intercambiar lo identificado en las tres figuras, situación similar se presentó en el grupo 4 (E7 y E8), después cada uno compartió con el otro las semejanzas y diferencias que habían reconoció de las construcciones y en consenso en el grupo 2 establecieron semejanzas: "*que tienen diferente tamaño, unos más grandes que otros, uno es más grande que los otros dos y que todos tienen una forma diferente"* en lo referente a las diferencias mencionaron: "*que tienen diferentes tamaños y* *que unos son más grandes y otros más pequeños, que tienen medidas diferentes y son diferentes figuras".*

En el grupo 4 (E7 y E8) las similitudes que argumentaron fueron más explicitas en relación a los componentes de las tres figuras: "*tiene 5 vértices, 5 lados, tiene dos paralelas, son polígonos y 5 ángulos"* en cuanto a las diferencias de las tres figuras expresaron: "*tienen diferentes medidas, una figura fue construida con segmentos, otra con polígono y otra con polígonos regulares"* de acuerdo a los establecido E8 le dice a E7: "*pueden tener las tres figuras las mismas medidas"* pero E7 le responde que: "*no porque fueron construidas con diferentes herramientas".*

Finalmente, en el grupo 3 (E5 y E6) en diálogo mencionaron como similitudes: "*que tiene 5 vértices, 5 lados, todas tres tienen 5 ángulos y que todos sus lados no tienen las mismas medidas".* En relación a las diferencias E6 le argumenta a E5: "*que los polígonos construidos por segmentos o por polígono son irregulares y el construido por polígono regular todos sus lados son iguales y sus ángulos"* y este último decide estar de acuerdo con E6 por los argumentos dados.

De todas las justificaciones dadas por los estudiantes en cada grupo, la expresada por E6 se relaciona con el objetivo de la actividad. Se establece que cada estudiante intercambio información con su compañero de trabajos, también, argumentaron, compararon y comunicaron con otro estudiante los resultados encontrados de las similitudes y diferencias del polígono de cinco lados construido con la herramienta segmento, del polígono construido con la herramienta polígono y del polígono de cinco lados construidos con la herramienta polígono regular.

Nivel 1 Análisis (comparación)

Los estudiantes reconocen las similitudes y diferencias del polígono de cinco lados construido con la herramienta segmento, del polígono construido con la herramienta polígono y del polígono de cinco lados construidos con la herramienta polígono regular a partir de la observación y experimentación y el desarrollo de las fases de aprendizaje.

De manera informal se describe el polígono de cinco lados por sus propiedades, pero no se relacionan ni figuras ni propiedades y no se pueden elaborar definiciones de acuerdo a lo expresado en cada grupo, en particular con lo descrito en el grupo 3 y en el grupo 4, porque mencionaron que eran polígonos de cinco lados regulares o irregulares que los demás grupos expresaron, pero en relación al tamaño y largo de cada lado.

Situación de validación

Para el desarrollo de esta fase, nuevamente los estudiantes se reunieron de manera conjunta en el salón de clases, allí el docente guío la discusión puesto que ningún estudiante tomo la iniciativa, por tanto, le preguntó a E4 *¿qué puede concluir de las similitudes y diferencias de los pentágonos construidos?* por lo que E4 respondió: "*son diferentes construcciones porque se construyeron con diferentes herramientas"* Inmediatamente, el representante del grupo 2, E3 mencionó: "*estoy de acuerdo con lo que mi compañero dijo porque las tres figuras no son iguales y las tres figuras se realizaron con diferente herramienta"* en ese momento E1 levanto la mano para participar y agregó: "*las herramientas eran segmento, polígono y polígono regular"* el docente interviene y les dice: "*muy bien".* Después, E6 expresa que quiere participar por lo cual le cede la palabra y dice: "*el pentágono construido con segmentos o polígono normal son irregulares y el otro construido es un polígono regular, es decir, que todos sus lados son iguales"* E3 al participar expresa: "*que está de acuerdo con lo que expone su compañero",* mientras que E1 indica: "*decidimos medir el polígono construido con la herramienta segmento y la herramienta polígono regular y nos dio que tienen diferentes medidas"* En cuanto a las propiedades del pentágono que lograron reconocer a través del desarrollo de la actividad E1 nuevamente quiso participar y dijo: "*tiene cinco vértices, cinco lados y que es convexo",* E3 al respecto agregó: " *que tiene cinco lados, cinco vértices y cinco ángulos, y es polígono pentágono"* E7 mencionó: *"tiene cinco lados, cinco vértices, cinco ángulos, dos paralelas y cinco diagonales"* por último, E6 participo voluntariamente y dijo: "*tiene cinco ángulos, cinco lados, cinco vértices"*, de esta manera, E8 se unió a la conversación y argumentó: *"tiene cinco lados, cinco vértices, cinco ángulos, es un polígono convexo, según sus medidas puede ser regular o irregular"*

En la actividad de identificar objetos del entorno que tuvieran forma pentagonal en la superficie, E6 mencionó: "*el frente del salón de clases, la pared, la entrada de la iglesia, los relojes"* E1 participo enseguida y dijo: " *la pared de salón, el patio, la chapa y la baldosa"* por su parte E7 nombró: " *unas gafas, la pared del salón de clases, las baldosas y el reloj"* y de manera similar E3 mencionó: "*la forma de la pared del salón, algunas gafas, las baldosas y la puerta de la iglesia del pueblo"* . Al finalizar de hablar los estudiantes que participaron el docente pregunto si ¿había más objetos con forma pentagonal? A lo que los estudiantes mencionaron que únicamente los que habían dicho.

Para finalizar, se menciona que cada estudiante argumentó los resultados obtenidos en las situaciones anteriores, defendió el conocimiento adquirido frente a sus demás compañeros en relación con las similitudes y diferencias del polígono de cinco lados construido con la herramienta segmento, del polígono construido con la herramienta polígono y del polígono de cinco lados construidos con la herramienta polígono regular.

Nivel 2 Ordenación (clasificación)

Los estudiantes identificaron el polígono de cinco lados por medio de sus propiedades y como unas propiedades se derivan de otras, los estudiantes lo clasificaron como un polígono convexo, irregular para los construidos con la herramienta segmento y la herramienta polígono y como regular para el construido con la herramienta polígono regular, de acuerdo a la clasificación de los polígonos según la medida de sus lados. Algunos estudiantes presentaron dificultades para expresar de manera oral las propiedades de los pentágonos construidos o lo comprendido por ellos. Además, cada uno de los estudiantes clasificó los pentágonos de acuerdo a las propiedades observadas e identificadas en las fases de aprendizaje y a la familiarización con las herramientas indicadas. Se determina que, en las situaciones de acción, formulación y validación, por tanto, se logró el objetivo propuesto en relación con el pentágono regular y el pentágono irregular de acuerdo a lo establecido en el análisis a priori.

Nivel 3 Deducción formal (argumentación)

Cada estudiante presentó conclusiones basadas en las propiedades observadas a partir de las construcciones realizadas, además reconocieron el pentágono por su forma y en el proceso de su construcción utilizando las herramientas de GeoGebra y el desarrollo de las fases de aprendizaje del modelo y según la medida de sus lados lo identificaron en regular e irregular, así mismo argumentaron que aprendieron a construir un polígono regular de cinco lados y adquirieron más conocimiento sobre el pentágono

Situación de Institucionalización

El docente retomó los argumentos de los estudiantes para establecer que de acuerdo a lo expresado por E7 los pentágonos construidos tienen cinco lados, cinco vértices, cinco ángulos y cinco diagonales y aclaró que no todos los pentágonos construidos tienen dos paralelas. Así mismo, que los pentágonos construidos en el desarrollo de la clase son convexos porque los ángulos interiores son menores que 180° y según la medida de sus lados el polígono construido con la herramienta segmento y el polígono construido con la herramienta polígono son irregulares, mientras que el construido con la herramienta polígono regular es regular porque todos sus lados tienen igual medida.

Actividad 5. Construcción del pentágono

Para el desarrollo de esta actividad participaron los estudiantes E1, E2, E3, E4, E6, E7 y E8, el estudiante E5 no participó porque el día en que se aplicó la actividad no asistió a la Institución Educativa.

Situación de acción

En esta primera parte los estudiantes interactuaron con las herramientas de GeoGebra para realizar la construcción del pentágono regular, inicialmente todos los estudiantes realizaron la construcción de acuerdo a lo indicado en las instrucciones, E1, E3, E6, E7 y E8 no presentaron ningún problema en la construcción del pentágono, en algunas ocasiones E3 le preguntaba a el docente: "*así profe"* por lo cual el docente le indicaba que: "*sí, está bien*". Luego, E4 le dice a el docente que se confundió en la indicación 12, el docente le responde que: "*lea nuevamente el paso anterior y la indicación dada en el punto doce"* E4 decide leer nuevamente y expresa a la docente: "*profe no entiendo, ayúdeme"* por lo cual la docente se acerca y le indica: "*se debe construir la circunferencia con centro en G y punto H, luego debe observar los puntos de intersección con la circunferencia de color rojo, va a marcar el punto de la izquierda como I y lo va a demarcar de color azul, después el punto de intersección de la derecha lo nombra como J"* después el estudiante comprendió el error que estaba cometiendo y continuo adelante con su construcción.

Los estudiantes continuaron con la construcción del pentágono y finalizando en el punto 16, E2 expresó: "*profe, no puedo marcar la intersección entre las circunferencias de color rojo y* *rosado"* por tanto, la docente se acercó y observó la construcción realizada por E2 y le indicó: "*la intersección entre la circunferencia de color rojo y la circunferencia de color rosado es en la parte inferior, debe tener cuidado y marcar correctamente la intersección cerca al punto D"* después E2 le manifestó al docente haber entendido donde debía marcar la intersección.

A continuación, en la Tabla 27 se evidencian las construcciones de los pentágonos construidos por los estudiantes.

Tabla 27

Construcciones de los estudiantes para el pentágono

Figura 99

Construcción del pentágono de E1

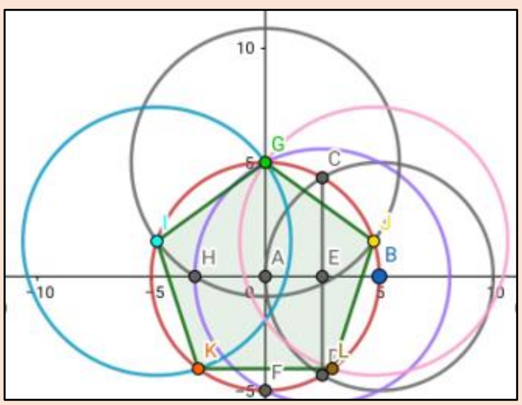


Figura 100

Construcción del pentágono de E2

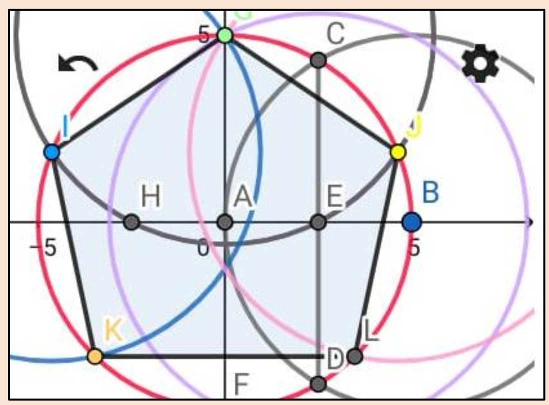


Figura 101

Construcción del pentágono de E3

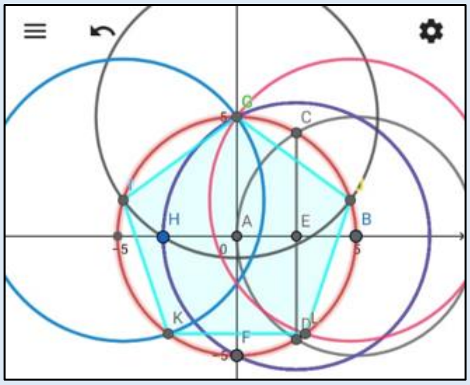


Figura 102

Construcción del pentágono de E4

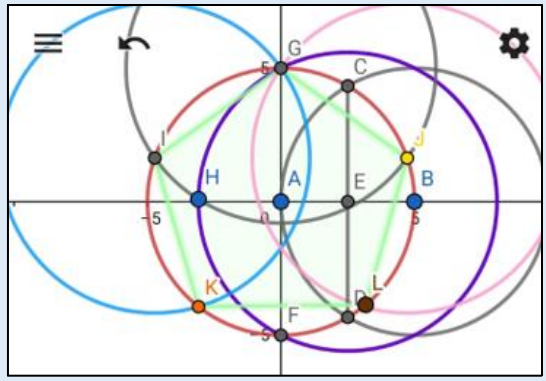


Figura 103

Construcción del pentágono de E6

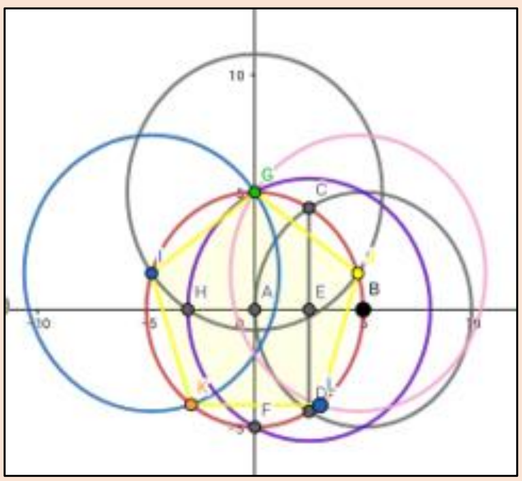


Figura 104

Construcción del pentágono de E7

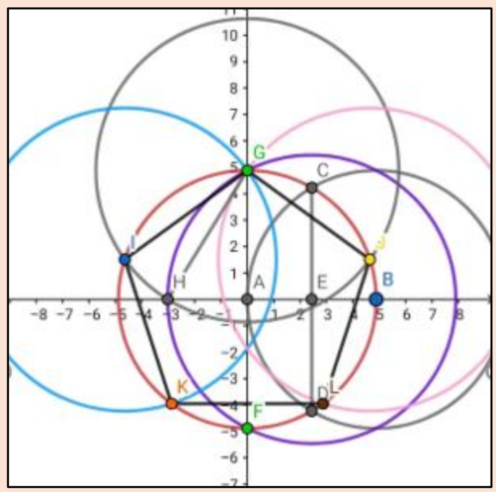
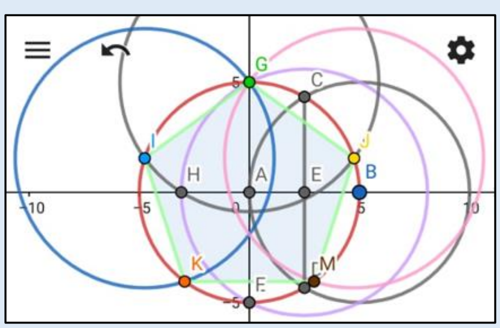


Figura 105

Construcción del pentágono de E8



Se establece que se logró el objetivo de que cada uno de los estudiantes realizara la construcción del pentágono regular por medio de las herramientas de GeoGebra principalmente con la interacción con la herramienta circunferencia (punto, centro).

Nivel 0 de visualización o reconocimiento (familiarización)

A partir de la construcción del pentágono regular se pudo observar la familiarización que los estudiantes tienen con las herramientas de GeoGebra, además reconocieron el pentágono regular por su apariencia, sin que las propiedades del pentágono construido jugara un papel explícito en la identificación a través de las fases de aprendizaje. Además, el proceso de razonamiento sobre la identificación del pentágono regular se lleva a cabo mediante consideraciones visuales de la construcción realizada como un todo sin reconocer aun las propiedades y componentes del pentágono regular.

Situación de formulación

En el análisis de la fase de formulación se estudió la forma como los estudiantes comunican la información matemática encontrada y las diferentes interacciones de los estudiantes. Los grupos de trabajo que se organizaron para el desarrollo de esta situación corresponden a: Grupo 1 (E1–E2-E6), grupo 2 (E3-E4) y el grupo 3 (E7-E8), cada uno de los grupos trabajo en grupos pequeños de manera que el docente se acercaba alternamente para observar el proceso realizado.

En el grupo 1 (E1, E2 y E6), los tres estudiantes utilizaron la herramienta distancia para medir la longitud de cada lado del pentágono, E1 no presentó dificultades para medir cada lado del pentágono, de igual manera ocurrió con E2 (ver Figura 106) y finalmente E6 determinó la medida de cada lado del pentágono construido. Luego, los estudiantes del grupo 1 precedieron a comparar las medidas de los lados de las construcciones del pentágono de cada uno. E6 decide tomar la iniciativa en el grupo y les dice a sus compañeros: "*en cada construcción las medidas son iguales por tratarse de un pentágono regular"* argumento que fue compartido por sus compañeros de grupo.

Se observa en la Figura 107 que en el registro de la información no se utiliza la misma notación para denotar la medida de todos los lados, porque escriben que $\overline{IG} = 5.9$ y $JL = 5.9$. Además, en el registro de los valores del perímetro de los pentágonos construidos, los tres estudiantes cometieron el error de registrar de manera incorrecta los valores del perímetro, y ninguno identificó el error. Enseguida, establecieron en relación con la longitud de los lados del pentágono que: "*todos sus lados son iguales por lo tanto es un polígono regular, pentágono"*. Luego, utilizaron la herramienta ángulo para medir los ángulos del pentágono, en sus mediciones E1 y E6 obtuvieron que cada ángulo mide $108°$, pero E2 obtuvo que cada ángulo era igual a $112°$, en discusión conjunta E6 señalo: "*borre los ángulos que midió y vuelva a medir"* E1 estuvo de acuerdo con el argumento dado por E6, luego, E2 procedió a medir nuevamente y obtuvo que cada ángulo era igual a $112°$, en grupo identificaron que quizás se había cometido algún error en la construcción del pentágono, ya que tenían claro que la medida de los ángulos del pentágono era igual a $108°$ como se observa en la Figura 108.

En relación a la suma interna de los ángulos del pentágono, el docente intervino y les indicó que consultaran en el cuaderno de geometría la expresión para determinar la suma de los ángulos internos. Tanto E1, E2 como E6 para determinar la suma interna de los ángulos primero multiplicaron $108° \times 5 = 540°$, luego utilizaron la expresión que encontraron en el cuaderno $S_n = 180°(n-2)$ para $n = 5$ y obtuvieron que era igual a $540°$, en el registro de la interpretación de la información E2 cometió el error de indicar que la suma interna de los ángulos del pentágono construido era $540°$ y no determinarla para los valores de los ángulos obtenidos, ninguno de los tres integrantes del grupo identificó el error que estaban cometiendo. Concluyeron en común acuerdo que: "*las medidas de los ángulos del pentágono son iguales porque es un polígono regular, a pesar de que E2 obtuvo diferentes medidas*".

En el grupo 2 (E3 y E4), al iniciar con el desarrollo de la situación de formulación se observó que optaron por un rol pasivo, no hablaban y cada uno media los lados del pentágono, el docente al observar la situación, se acercó y les indicó que debían socializar la información, intercambiar ideas con los correspondientes argumentos y colocarse de acuerdo para la obtención de resultados favorables. Después, de la indicación dada, midieron la longitud de los lados del pentágono construido como se muestra en la Figura 109.

Luego, E3 le indicó a E4 que: "*un lado del pentágono que había construido media* 5.8 *y los otros medían 5.9*" por su parte E4 le expreso a E3: *"a mí un lado mide* 6.3*, el otro mide* 5.7 *y los otros tres miden* 5.8*"* por tanto, ellos concluyeron que: "*es un pentágono irregular, porque no tienen todos sus lados iguales*" como se ilustra en la Figura 110. Para determinar el perímetro E3 y E4 realizaron la suma de las medidas de los lados del pentágono.

Después, de acuerdo a las indicaciones dadas midieron los ángulos de los pentágonos construidos como se observa en la Figura 111, tanto E1 como E2 en las medidas de los ángulos obtuvieron que dos de los ángulos construidos median $107.6°$ y los otros tres $108.6°$, por lo que identificaron que: "*como todos los lados no eran iguales, entonces, los ángulos no son iguales*". Para la suma interna de los ángulos, E4 sumo los cinco valores de los ángulos obteniendo $539°$, mientras, que E3 utilizó la expresión $S_n = 180°(n-2)$, y determinó que la suma interna de los ángulos del pentágono era igual a $540°$ y de manera conjunta dijeron que: "*eran aproximadamente iguales*" y, por lo tanto, registraron que la suma interna de los ángulos era igual a $540°$.

Por último, en el grupo 3 (E7 y E8) cada estudiante utiliza la herramienta distancia para medir la longitud de cada lado del pentágono, en la Figura 112 se ilustra las medidas de los lados del pentágono regular construido por E8, el cual con la herramienta ocultar /mostrar ocultó las circunferencias construidas.

En la construcción de E8 se pudo observar que utilizó la herramienta mostrar/ocultar para ocultar las construcciones de las circunferencias realizadas. Luego, de observar las medidas realizadas en los pentágonos en conjunto mencionaron que: “*todos sus lados son iguales porque es un pentágono regular”.* Para determinar el valor del perímetro E7 y E8 iban a utilizar la calculadora del celular, pero el docente estaba observando y les aclaró que debían realizar las operaciones respectivas. E7 realizó la operación $5.7 \times 5 = 28.5$ *o* $P = 5.7 + 5.7 + 5.7 + 5.7 + 5.7 = 28.5$ y por su parte E8 realizó la operación $P = 5{,}88 + 5{,}88 + 5{,}88 + 5{,}88 + 5{,}88 = 29{,}40$, la información se registró en la Figura 113.

Después, procedieron a medir los ángulos internos del pentágono con la herramienta ángulo, por lo que E7 le señala a E8 en el celular de él como medir los ángulos del pentágono, por lo que E7 procedió a medir y obtuvo que sus ángulos miden $108°$ cada uno y E8 obtuvo que sus ángulos también miden $108°$. Al respecto, en diálogo establecieron que: “*es un polígono regular porque tiene todos sus ángulos iguales”.* Para determinar la suma interna de los ángulos tanto E7 como E8 realizaron la operación $108° \times 5 = 540°$ y utilizaron que $S_n = 180°(5 - 2) = 540°$, por lo que concluyeron que la suma interna es igual a $540°$ cómo se observa en la Figura 114.

A continuación, en la Tabla 28 se muestra la longitud de los lados del pentágono, en la Tabla 29 el registro de la información de la longitud de los lados y perímetro del pentágono y en la Tabla 30 el registro de la información de la longitud de la medida de los ángulos y la suma interna de los ángulos del pentágono.

Tabla 28

Longitud de los lados del pentágono

Figura 106

Longitud de los lados del pentágono de E2

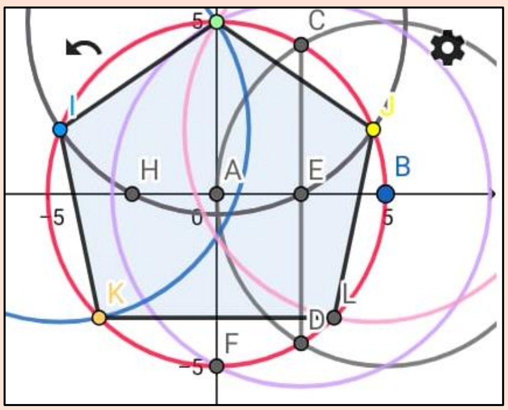


Figura 109

Longitud de los lados del pentágono de E3

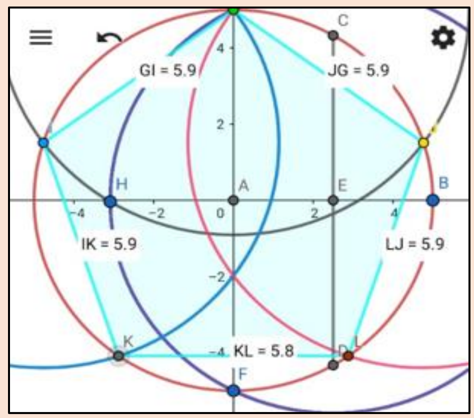


Figura 112

Longitud de los lados del pentágono de E8

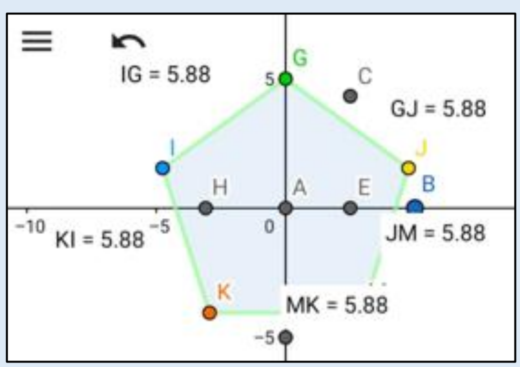
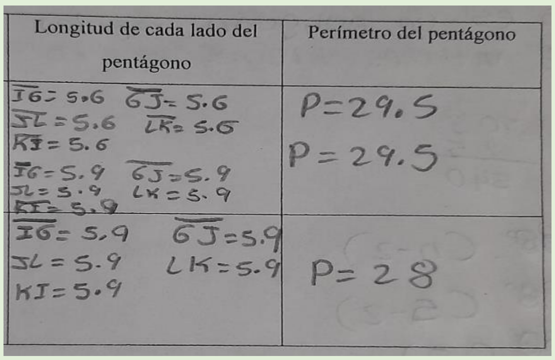


Tabla 29

Registro de la información de la longitud de los lados y perímetro del pentágono

Figura 107

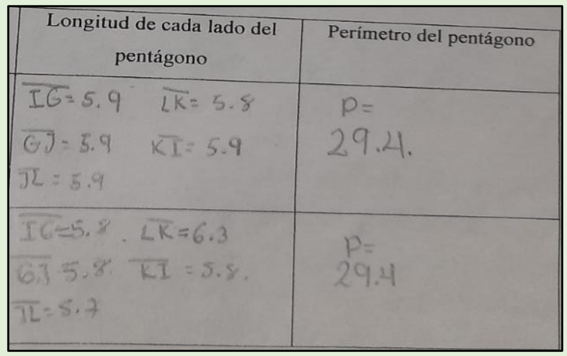
Longitud de cada lado y perímetro del pentágono de E1, E2 y E6



Longitud de cada lado del pentágono	Perímetro del pentágono
$\overline{IG} = 5.6$ $\overline{GJ} = 5.6$ $\overline{JL} = 5.6$ $\overline{LK} = 5.6$ $\overline{KI} = 5.6$ $\overline{IG} = 5.9$ $\overline{GJ} = 5.9$ $\overline{JL} = 5.9$ $LK = 5.9$ $\overline{KI} = 5.9$	$P = 29.5$ $P = 29.5$
$\overline{IG} = 5.9$ $\overline{GJ} = 5.9$ $JL = 5.9$ $LK = 5.9$ $KI = 5.9$	$P = 28$

Figura 110

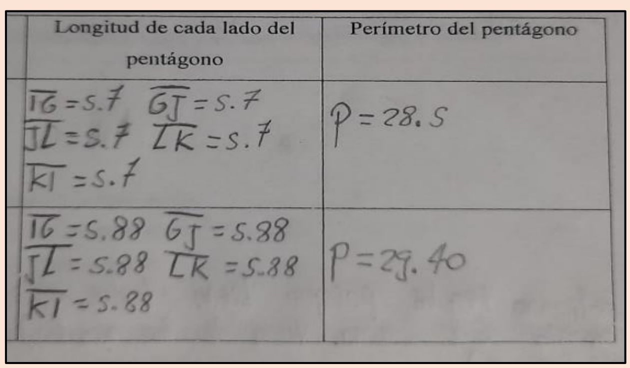
Longitud de cada lado y perímetro del pentágono de E3 y E4



Longitud de cada lado del pentágono	Perímetro del pentágono
$\overline{IG} = 5.9$ $\overline{LK} = 5.8$ $\overline{GJ} = 5.9$ $\overline{KI} = 5.9$ $\overline{JL} = 5.9$	$P = 29.4.$
$\overline{IG} = 5.8$ $\overline{LK} = 6.3$ $\overline{GJ}$ 5.8 $\overline{KI} = 5.8.$ $\overline{JL} = 5.7$	$P = 29.4$

Figura 113

Longitud de cada lado y perímetro del pentágono de E7 y E8.



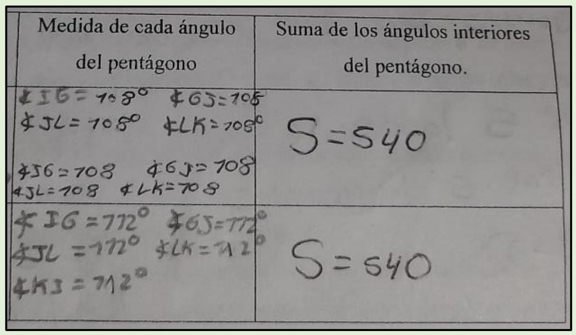
Longitud de cada lado del pentágono	Perímetro del pentágono
$\overline{IG} = 5.7$ $\overline{GJ} = 5.7$ $\overline{JL} = 5.7$ $\overline{LK} = 5.7$ $\overline{KI} = 5.7$	$P = 28.5$
$\overline{IG} = 5.88$ $\overline{GJ} = 5.88$ $\overline{JL} = 5.88$ $\overline{LK} = 5.88$ $\overline{KI} = 5.88$	$P = 29.40$

Tabla 30

Registro de la información de la longitud de la medida de los ángulos y la suma interna de los ángulos del pentágono

Figura 108

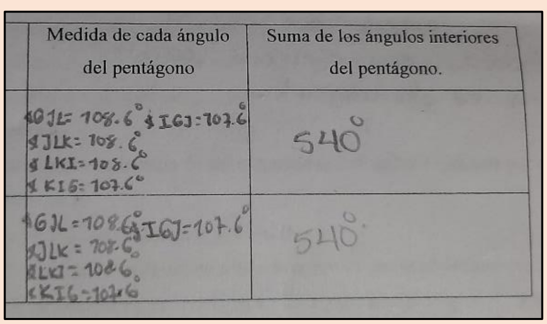
Medida de cada ángulo del pentágono de E1, E2 y E6



Medida de cada ángulo del pentágono	Suma de los ángulos interiores del pentágono.
∢IG = 108° ∢GJ = 108 ∢JL = 108° ∢LK = 108° ∢JG = 108 ∢GJ = 108 ∢JL = 108 ∢LK = 108	S = 540
∢IG = 112° ∢GJ = 112° ∢JL = 112° ∢LK = 112° ∢KI = 112°	S = 540

Figura 111

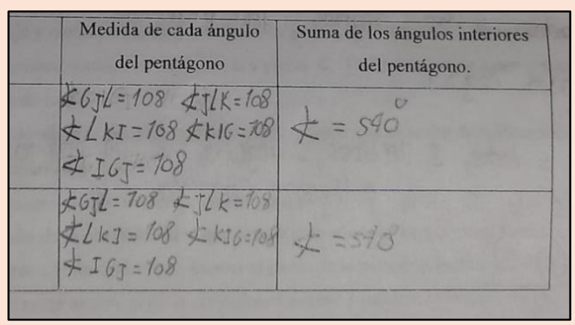
Medida de cada ángulo del pentágono de E3 y E4



Medida de cada ángulo del pentágono	Suma de los ángulos interiores del pentágono.
∢GJL = 108.6° ∢IGJ = 107.6° ∢JLK = 108.6° ∢LKI = 108.6° ∢KIG = 107.6°	540°
∢GJL = 108.6° ∢IGJ = 107.6° ∢JLK = 108.6° ∢LKI = 108.6° ∢KIG = 107.6	540°

Figura 114

Medida de cada ángulo del pentágono de E7 y E8



Medida de cada ángulo del pentágono	Suma de los ángulos interiores del pentágono.
∢GJL = 108 ∢JLK = 108 ∢LKI = 108 ∢KIG = 108 ∢IGJ = 108	∢ = 540°
∢GJL = 108 ∢JLK = 108 ∢LKI = 108 ∢KIG = 108 ∢IGJ = 108	∢ = 540

Nivel 1 Análisis (comparación)

Los estudiantes reconocen las propiedades del pentágono regular a partir de la observación y experimentación por medio de las herramientas de GeoGebra. De manera informal describen el pentágono regular por sus propiedades, aunque todavía no estaban en la capacidad de elaborar definiciones (en la mayoría de los casos), además, establecieron en el tránsito por las fases de aprendizaje que el pentágono regular cumple una determinada propiedad o condición en relación con la medida de sus lados y la medida de sus ángulos.

Además, el lenguaje utilizado corresponde al apropiado para el nivel de análisis, exceptuando algunos registros incorrectos de las medidas de los lados, pero no se hace énfasis en lo que queda mal o se deja de responder, sino en el porqué de las respuestas dadas.

Situación de validación

Para esta situación, los tres grupos se reunieron todos en el salón de clases, para la socialización de los resultados; en cada grupo se escoge un representante para que exponga los resultados encontrados en las dos anteriores situaciones.

En el inició de la situación ningún estudiante quiere iniciar la exposición de los resultados encontrados, por lo que el docente decidió liderar la conversación y pregunta: ¿cuáles son los resultados encontrados que se obtuvieron en relación a la longitud de los lados y la medida de los ángulos del pentágono? E7 intervine y concluye que: "*todos los lados y los ángulos del pentágono tienen la misma medida porque es un polígono regular"* luego, E1 levanta la mano para participar y expresa: "*todos los ángulos son iguales y la medida es* $108°$*"* y E6 agrega: *"la suma interna de los ángulos es igual a* $540°$ *y lo calculamos sumando sus ángulos o con la fórmula y el resultado es el mismo"*.

Después, E3 pide la palabra y dice que: "*el resultado es el mismo"* el docente pregunta que: ¿cuál es el resultado? Por lo E3 expresa: "*el resultado de la suma interna de los ángulos es la misma, primero dijo* $504°$ *digo* $540°$*"*.

Seguidamente, el docente pregunta que: ¿Cuáles son las propiedades que identificaron del pentágono? El primer estudiante en participar fue E7 y dice: "*el pentágono tiene cinco lados, cinco vértices, cinco ángulos cada uno mide* $108°$, *es un polígono regular, tiene cinco diagonales que determinamos con la fórmula* $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ *y trazando las diagonales en el pentágono construido para mirar si era el mismo resultado y es un polígono convexo*". Después E2 expresa que quiere participar y menciona: "*estoy de acuerdo con mi compañero, tiene cinco lados de igual medida, tiene cinco diagonales, tiene cinco vértices de* $108°$, *es un polígono regular y es un polígono convexo*" luego, el docente corrige a E2 aclarando: "*no son los vértices los que miden* $108°$, *son los ángulos internos del pentágono*".

Así mismo, E3 se motiva a participar y establece: "*es un pentágono regular, es un convexo, la mayoría de los lados miden igual, excepto uno, tiene cinco ángulos que miden aproximadamente* 108*, la suma interna es aproximadamente igual a* $540°$ *y tiene cinco diagonales, porque primero mi compañero conto cuatro y luego utilizamos la fórmula y nos dio cinco diagonales*" ante lo argumentado por E3, el estudiante E6 dice: "*todos los lados miden igual, porque es un pentágono regular, lo mismo pasa con los ángulos, quizás te equivocaste en la construcción*" en este momento, el docente interviene y aclara a todos: "*E3 y E4 obtuvieron que las medidas y los ángulos no eran iguales, porque quizás habían ubicado mal alguna construcción del pentágono, la suma de los ángulos si es aproximadamente igual a* $540°$" por lo que luego de la aclaración los estudiantes comprenden la información dada por E3.

Se establece que los estudiantes logran por medio de la interacción con el GeoGebra la construcción del pentágono regular para identificar propiedades del mismo y reconocer las relaciones entre las propiedades.

Nivel 2 Ordenación (clasificación)

En este nivel se logró a partir del tránsito por las fases que los estudiantes identificaron el pentágono regular por medio de sus propiedades, además reconocieron cómo unas propiedades del pentágono regular se derivan de otras y las relacionaron como la medida de los lados, la medida de los ángulos y por la forma geométrica del pentágono regular. El lenguaje utilizado por los estudiantes en este nivel es acorde de acuerdo a lo propuesto en la situación, así mismo, se logra identificar que hubo un aprendizaje significativo que inició a partir de la construcción del pentágono favoreciendo la comprensión de las propiedades del mismo en el tránsito de las situaciones de acción y formulación y por los niveles de visualización, análisis y ordenación, dándose el logro del objetivo propuesto para esta situación didáctica y de acuerdo a lo establecido en el análisis a priori.

Nivel 3 Deducción formal (argumentación)

Cada estudiante realiza argumentaciones básicas fundamentadas en las propiedades observadas a partir de la construcción del pentágono permitiendo justificar adecuadamente lo expuesto en la situación de validación para estar de acuerdo o no con lo expresado por los demás estudiantes y lo establecido en cada una del as fases de aprendizaje.

Situación de Institucionalización

Por último, el docente retomó los argumentos expuestos por los estudiantes e indica que la figura geométrica construida es un pentágono regular, el cual es un polígono regular de cinco lados iguales, la medida de sus ángulos es igual a $108°$ y la suma interna de los ángulos es igual a $540°$ que se puede determinar utilizando la expresión $S_n = 180°(n-2)$, además el pentágono construido tiene 5 diagonales que se pueden contar o que se pueden determinar con utilizando

$d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ como algunos de ustedes lo realizaron para determinar la cantidad de diagonales. Expresa además que si en las construcciones realizadas por E3 y E4 no eran de igual medida los lados y los ángulos era porque se había cometido algún error o era la información dada por GeoGebra, que se debía revisar según la construcción realizada. Por último, indica a los estudiantes que se puede determinar la suma interna de los ángulos y el número de diagonales de un polígono de n lados utilizando las expresiones $S_n = 180°(n-2)$ y $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$, ante lo cual propuso determinar la medida de los ángulos, la suma interna de los ángulos y cantidad de diagonales para el hexágono, heptágono, octágono, nonágono y decágono.

Discusión de resultados

De acuerdo a lo propuesto en el objetivo general, se utilizó la metodología de la Ingeniería Didáctica según lo expresado por Artigue (1995) para el diseño de las cinco actividades de la secuencia didáctica. Para la primera actividad, en particular los estudiantes del grupo 1, no identificaron el triángulo como equilátero según las medidas de los lados ni como acutángulo según las medidas de los ángulos, evidenciando dificultades en la conceptualización de los saberes previos y realizando una devolución no correcta de lo propuesto. En la situación de formulación los estudiantes intercambiaron la información encontrada de acuerdo a los planteamientos de Brousseau (2007) para esta situación, lo cual les exigió comunicar la información geométrica encontrada. Así mismo, en la situación de validación, aparte de explicar la información encontrada, estuvieron atentos a las argumentaciones de los compañeros para complementar y defender la información de acuerdo a lo propuesto por Brousseau (2007) para la situación.

En la segunda actividad correspondiente a la solución del problema 51 del Papiro Rhind se establece que fue necesaria la intervención del docente al inicio de la situación de formulación para explicar la equivalencia de las unidades en que se contextualiza la situación para la correspondiente resolución por parte de los estudiantes, lo cual exigió que los estudiantes en común acuerdo se comunicaran e interactuaran con las herramientas de GeoGebra. En general, se observó como lo sustenta Brousseau (2007) un buen tránsito de los estudiantes por cada una de las situaciones de la Teoría de las Situaciones Didácticas, a excepción del resultado encontrado en el grupo 4, que no corresponde a la respuesta del problema. La asimilación que los estudiantes tuvieron con la situación fue acertada, ya que no se habían enfrentado a situaciones que involucraran medidas de longitud como *khet* y *codos* y la unidad de área como el *setat*, sino que estaban familiarizados con unidades como el metro y el metro cuadrado respectivamente. Además, reconocieron que el área del triángulo también se puede determinar como el producto de la mitad de la base por la altura como lo calculo en su momento el escriba en la solución del problema que presenta Maza (2016). Se evidenció en particular, en la situación de validación, que los estudiantes inicialmente no deseaban realizar una devolución de la información encontrada como lo sustenta Brousseau (2007), por lo cual fue necesario la intervención del docente con algunas preguntas hacia los estudiantes para iniciar con el discurso y validar el conocimiento de acuerdo a lo propuesto en el análisis a priori, de manera similar se presentó en la tercera, cuarta y quinta actividad.

En la aplicación de la tercera actividad se menciona que de acuerdo a lo expresado por Brousseau (2007) los estudiantes transitaron por las situaciones de acción, formulación y validación logrando identificar y establecer las propiedades geométricas del cuadrado a partir de la construcción del mismo usando como medio de interacción el software GeoGebra. Aunque, en la situación de validación se presentó la misma dificultad para iniciar en cuanto a la participación de los estudiantes.

En la cuarta actividad, algunos estudiantes en la situación de acción presentaron dificultades de comprensión lectora en relación a lo que debían realizar, por lo cual el docente les recomendó leer y comprender nuevamente cada indicación dada en la guía. De manera organizada en grupo sustentaron e intercambiaron la información. Analizaron y argumentaron las semejanzas y diferencias geométricas de las tres figuras construidas cumpliendo el objetivo de la actividad y lo señalado en el análisis a priori de acuerdo a lo establecido por Brousseau (2007) para la situación de acción.

Finalmente, en la quinta actividad se menciona que la complejidad aumento debido a las construcciones geométricas que se realizaron lo que dificultó que en uno de los grupos reconocieran el pentágono como regular. A pesar, de las dificultades presentadas los demás estudiantes establecieron en la situación de validación que la construcción realizada correspondía al pentágono regular y reconocieron las propiedades geométricas del mismo.

Se especifica, que en el desarrollo de las situaciones diseñadas no se evidenció por parte del investigador el Efecto Topaze, porque de acuerdo a lo expresado por Chavarría (2006) el docente no intervino en la resolución de las situaciones presentadas a los estudiantes, y fueron estos quienes realizaron la construcción del conocimiento por medio de la interacción con el software GeoGebra de acuerdo a las indicaciones dadas en la situación. De manera general, se evitó en las diferentes interacciones que se establecen en la situación didáctica el efecto Jourdain, el deslizamiento metacognitivo y el uso abusivo de la analogía.

Según lo mencionado por Fouz (2013) en los niveles y en las fases de aprendizaje los estudiantes reconocieron el triángulo, cuadro y pentágono regular por su apariencia o forma. Además, el razonamiento de los objetos geométricos se realizó por medio de consideraciones visuales a partir de las construcciones realizadas. También, los estudiantes reconocieron las propiedades del triángulo, cuadrado y pentágono regular, así como las relaciones de las mismas. De igual manera, durante el proceso de intercambio de información y discusión se presentaron argumentaciones básicas basadas en las propiedades geométricas de cada polígono regular, como se propone en el modelo de Van Hiele (Fouz, 2013), pero en esta situación se evidenciaron dificultades en la redacción del procedimiento de la construcción del triángulo y del cuadrado, estableciéndose dificultades en la competencia argumentativa de los estudiantes.

Conclusiones

La presente investigación se originó al formular la pregunta: ¿Qué situaciones didácticas y adidácticas, mediadas por el software GeoGebra pueden contribuir con la comprensión de los elementos geométricos de los polígonos regulares en estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa José María Silva Salazar? para dar respuesta se establecen los objetivos de investigación y de acuerdo a las fases de la Ingeniería Didáctica se realizaron actividades para el cumplimiento de estos objetivos y por tanto del objetivo general que da respuesta a la pregunta del trabajo de investigación.

En la revisión bibliográfica de los antecedentes de la investigación se establece que la manera de presentarlos en los grupos definidos permite realizar un énfasis especial acerca de trabajos realizados sobre el objeto polígonos regulares fundamentados en la Teoría de las Situaciones Didácticas y el modelo de Van Hiele, lo que permite reconocer algunos aportes a esta investigación como: la importancia del uso del GeoGebra como medio de interacción en las situaciones didácticas, la incorporación del modelo de Van Hiele para el aprendizaje de la geometría y el diseño de situaciones didácticas fundamentadas en la Teoría de las situaciones didácticas utilizando la metodología de la ingeniería didáctica. Además, la integración de estas dos Teorías permite reconocer que las situaciones didácticas estan mediadas por el software GeoGebra y que el modelo de Van Hiele con sus respectivos niveles son un referente para estimar la comprensión de los estudiantes.

Con respecto al primer objetivo específico se realizó el estudio de la dimensión epistemológica, didáctica y cognitiva para la enseñanza del objeto polígonos regulares, con la descripción de un recorrido histórico y epistemológico donde se evidencia que, en la literatura consultada, no se habla del surgimiento del objeto polígono regular, sino que aparecen como algo dado. Al respecto, en las primeras civilizaciones se demarcaban los terrenos para la agricultura en forma poligonal con el fin de calcular el área y de igual forma sus diseños fueron utilizados en la construcción de altares. También se llegó a establecer una relación directa entre los números y la geometría, por medio de los números poligonales.

Dentro del recorrido histórico se realizó el análisis semiótico a dos problemas que fueron propuestos por los egipcios con el fin de incorporar uno de estos dos problemas como actividad de la secuencia didáctica diseñada. Por tanto, se concluye que la incorporación del problema 51 del Papiro Rhind en la implementación de la secuencia didáctica permitió que los estudiantes se relacionaran con el cálculo de área de terrenos triangulares, además de reconocer las unidades de medida establecida por los egipcios para la longitud (*khet o codos)* y para el área (*setat)* y efectuar procedimientos de conversión de unidades entre medidas de área.

En la dimensión didáctica se describe el análisis curricular: al respecto, se menciona que no está definido ningún DBA para grado séptimo que haga referencia a los polígonos regulares en el pensamiento geométrico (MEN, 2015), y en este aspecto se considera una falencia ya que se desea dar continuidad a lo propuesto en grado sexto y fundamentar lo establecido en grado octavo, por tanto, se decide trabajar en esta investigación con el DBA de grado sexto y con el DBA de grado octavo guardando coherencia con el Estándar Básico seleccionado. Además, en la revisión del texto escolar de la Institución Educativa se observó que se trabaja el objeto matemático polígonos regulares dando prevalencia a la representación gráfica de los polígonos en especial del triángulo, pero hace falta incluir la construcción geométrica de los demás polígonos regulares. En general, el texto escolar de los estudiantes de grado séptimo como propuesta didáctica y pedagógica favorece la construcción de aprendizajes significativos promoviendo la participación de manera activa de los estudiantes, fortaleciendo la formación integral por medio de procesos cognitivos y la propuesta de diferentes situaciones problemas que involucran la transversalidad con ejes temáticos de otras áreas.

Con relación a lo anterior, se argumenta que la propuesta de la construcción de los polígonos regulares para la comprensión de las propiedades de los mismos favorece nuevos procesos cognitivos para la adquisición y/o fortalecimiento del conocimiento geométrico. Finalmente, en la dimensión cognitiva se presentan algunos trabajos sobre los obstáculos, errores y dificultades en el aprendizaje del objeto matemático polígono regular, que principalmente se debe a la falta de motivación e interés de los estudiantes por el tema, la no vinculación de software de geometría dinámica para el desarrollo de las temáticas, la falta de dominio de los saberes previos, deficiencias en el manejo de representación simbólica de los elementos o características de los polígonos y en deficiencias en la compresión lectora de situaciones problemas propuestas.

Para el desarrollo del segundo objetivo específico, primero se diseña la secuencia didáctica que corresponde a la construcción de las cinco actividades propuestas, donde la primera de estas, corresponde a la construcción del triángulo, la segunda al problema 51 del Papiro Rhind, la tercera a la construcción del cuadrado, la cuarta se relaciona con propiedades del pentágono y en la quinta se establece la construcción del pentágono regular. Estas situaciones didácticas se diseñaron y propusieron con el fin de promover la construcción geométrica de los primeros tres polígonos regulares a partir de situaciones adidácticas desarrolladas por lo estudiantes en interacción con el software GeoGebra y para el tránsito por las situaciones de acción, formulación y validación siguiendo la propuesta de la Teoría de las Situaciones Didácticas, así como el paso por el nivel de visualización, el nivel de análisis o comparación, el nivel de ordenación o clasificación y finalmente por el nivel de deducción formal o argumentación según los fundamentos del Modelo de Van Hiele. Y como segundo aspecto, resultado del diseño de las situaciones, se realiza el análisis a priori de acuerdo con lo que el docente espera que sus estudiantes realicen en cada situación didáctica propuesta.

Respecto al tercer objetivo específico, se implementó la secuencia didáctica en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas y el Modelo Van Hiele usando como medio de interacción el software GeoGebra y lo propuesto en la metodología.

Para dar cumplimiento al cuarto objetivo se realizó el análisis a posteriori de los polígonos regulares, para ello, en la triangulación de la información recolectada de la aplicación de la secuencia se identificó cómo los estudiantes se enfrentaban a la situación propuesta y cómo utilizaban las herramientas del GeoGebra para realizar las construcciones indicadas.

Las prácticas geométricas que emergieron fueron acordes a lo indicado en el análisis a priori, en la situación de acción los estudiantes siguieron las indicaciones dadas y realizaron las construcciones establecidas, realizando un trabajo autónomo, dinámico y exploratorio con ayuda de los saberes previos. En la situación de formulación, en general se observó que los estudiantes establecieron comunicación en grupo, intercambiaron la información matemática de manera cooperativa; trabajaron, se apoyaron, plantearon hipótesis de la información encontrada. En la situación de validación se presentaron dificultades porque en la mayoría de los casos ningún estudiante deseaba participar, por lo que fue necesario que el docente moderara en el inició la discusión para que cada grupo socializara los resultados encontrados, que fueron complementados por los demás estudiantes para mejorar el conocimiento esperado.

En lo referente a las argumentaciones dadas por lo estudiantes se establece que en general estas fueron acordes a los resultados esperados, dado que cada estudiante justificó de manera correcta las relaciones y propiedades que identificaba a partir de las construcciones realizadas.

Finalmente, en la situación de institucionalización el docente retomó los argumentos de los estudiantes en las anteriores situaciones y formalizó el conocimiento matemático de acuerdo a la situación didáctica presentada.

En lo relacionado con los Niveles de Van Hiele y al tránsito de los estudiantes por estos niveles se concluye que estos, de manera secuencial pasaron de un nivel a otro de acuerdo al desarrollo de las fases de aprendizaje y las características definidas para cada nivel. Además, dentro de la evaluación de los resultados se tuvo presente el razonamiento realizado por ellos: también se valoró la forma como respondieron y el porqué de cada una de sus respuestas más no lo que no contestaron o respondían mal. Por lo que la atención en los análisis realizados se centró en las respuestas dadas por los estudiantes.

Se establece que según los resultados encontrados de la aplicación de la secuencia didáctica se logró dar cumplimiento al objetivo general de la investigación que establecía implementar situaciones didácticas y adidácticas mediadas por el software GeoGebra que lleven a la comprensión de los elementos geométricos de los polígonos regulares en estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa José María Silva Salazar.

Por tanto, se concluye que la Teoría de las Situaciones Didácticas como marco teórico permite que los estudiantes construyan el conocimiento matemático de manera autónoma a partir de la interacción con el medio GeoGebra que en esta investigación se utilizó con la finalidad de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes en lo referente al pensamiento geométrico a partir de la construcción de los polígonos regulares y la relación de estos con objetos cuya superficie es triangular, cuadrada o pentagonal. Además, esta Teoría permite que los estudiantes aprendan a trabajar cooperativamente en grupo, a identificar la información dada, a proponer soluciones a lo planteado y a argumentar los resultados encontrados en consenso con los demás estudiantes, lo cual permite potenciar las competencias y habilidades matemáticas utilizando recursos de las TIC como lo es el software GeoGebra.

En relación al Modelo de Van Hiele se concluye que permite mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, además permite realizar un análisis a fondo del razonamiento realizado por los estudiantes en cada nivel y observar de manera ordenada y progresiva la construcción del saber geométrico por medio del lenguaje utilizado, los símbolos matemáticos utilizados y la relación entre estos a través de las fases del modelo.

Finalmente, se concluye que es necesaria la incorporación del uso de GeoGebra en las clases de geometría como estrategia para promover espacios de interacción entre los estudiantes, además como medio dinámico en el aprendizaje de la geometría motiva a los estudiantes a manipular las herramientas del programa lo que lleva a potenciar las competencias matemáticas y a fortalecer el trabajo en grupo entre los estudiantes.

Limitaciones de la Investigación

Esta investigación hace uso del Software GeoGebra y no de otros programas matemáticos debido a la interacción previa de los estudiantes con el programa, lo cual permitió una mejor manipulación de las herramientas del programa para la construcción de los polígonos regulares en estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa José María Silva Salazar, colegio de carácter público. De otra parte, se utiliza la metodología de la Ingeniería didáctica ya que es la metodología que favorece el trabajo desde la Teoría de las Situaciones Didácticas. Otra limitación en el desarrollo de la investigación la constituye la no presencialidad de todos los estudiantes en las clases debido a la pandemia del Covid-19, lo cual limita la muestra de estudiantes para poder desarrollar la secuencia didáctica de actividades propuestas.

Perspectivas a Futuro

Queda abierta la propuesta de continuar con el estudio de movimientos en el plano cartesiano como traslación, rotación y reflexión de los polígonos regulares porque se ha evidenciado que en pruebas de matemáticas como: Evaluar para Avanzar y Pruebas Saber para grado séptimo se proponen situaciones problemas que involucran el movimiento de polígonos en el plano cartesiano; así mismo, continuar con el estudio de los poliedros, aspecto en el cual los estudiantes suelen presentar dificultades en el pensamiento espacial, para lo cual, se sugiere utilizar como medios de interacción otros programas de geometría dinámica como el Cabri y el Geup para fortalecer competencias matemáticas de los estudiantes.

Así mismo, respecto al análisis epistemológico del objeto polígonos regulares es pertinente retomar en el diseño de las situaciones adidácticas lo relacionado con los números poligonales y la aproximación al número pi en términos de la razón del círculo inscrito en un cuadrado. De igual manera, presentar situaciones contextualizadas en la resolución de problemas del objeto polígonos regulares sin el uso de software.

Referencias

Arias, F. (2012). *El Proyecto de Investigación. Introducción a la metodología científica.* Editorial Episteme, C.A.

Artigue, M. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Brousseau, G. (1994). *Los diferentes roles del maestro en didáctica de la matemática. Aportes y reflexiones.* Paidós Educador.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de las situaciones didácticas.* Libros el Zorzal.

Callupe, F. (2019). *El software Geogebra como recurso tecnológico para el aprendizaje de polígonos regulares en estudiantes del cuarto grado de San Juan de Ondores* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión]. http://repositorio.undac.edu.pe/handle/undac/1793

Cástillo, V. (2015). *Secuencia Didáctica para contribuir en la construcción del concepto de área como magnitud con estudiantes de Educación Primaria* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú.]. https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/6751

Chavarría, J. (2006). *Teoría de las Situaciones Didácticas*. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática.

Chevallard, Y., Bosch, M., y Gascón, J. (2005). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Editorial Horsori.

Ciro, F., y Villegas, S. (2016). *Visualización de los conceptos geométricos en los polígonos con el software GeoGebra* [Tesis de Maestría, Universidad Pontificia Bolivariana]. https://repository.upb.edu.co/bitstream/handle/20.500.11912/3254/Tesis%20final_%20Fabiola%20y%20Sandra.pdf?sequence=1

Clemens, S., O´daffer, P., y Cooney, T. (1998). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* Addison Wesley Longman de México, S.A. de C.V.

Córdoba, F. (12-14 de noviembre de 2014). *Las TIC en el aprendizaje de las matemáticas: ¿Qué creen los estudiantes?* Congreso Iberoaméricano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación.

Cuervo, T., Fonseca, C., y Sepúlveda, O. (2021). La Comprensión de los polígonos regulares por medio del GeoGebra en estudiantes de séptimo. *Revista Boletín Redipe*, 10(7), 372 - 384. https://doi.org/10.36260/rbr.v10i7.1374

Ezguerro, M. (2014). *Uso de GeoGebra en la enseñanza de Geometría analítica en 4° en la ESO* [Tesis de Maestría,Universidad Internacional de la Rioja]. https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/2428/ezquerro.garcia.pdf?sequence=1

Fouz, F. (2013). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. *Uniciencia, 27(1), 74-94*

Godino, J., y Ruiz, F. (2002). *Geometría y su Didáctica para maestros.*Universidad de Granada. ReproDígital.C/Baza.

Gómez, Y. (2018). *Diseño de una estrategia didáctica matemática, para potenciar el pensamiento geométrico, en estudiantes de cuarto grado, a partir de la resolución de situaciones* *problema de área y perímetro en polígonos regulares* [Tesis de Maestría, Universidad Industrial de Santander].

Hernández, R., Collado, C., y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación.*, Mcgraw - Hill/ Interamericana Editores.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2020). *Informe Nacional de Resultados para Colombia - PISA 2018.* Bogotá.

Ixcaquic, I. (2015). *Modelo de Van Hiele y Geometría Plana.* [Tesis de Pregrado, Universidad Rafael Landívar]. http://recursosbiblio.url.edu.gt/tesisjcem/2015/05/86/Ixcaquic-Ilsi.pdf

Jara , C. (2015). *Aplicación del modelo de razonamiento de Van Hiele mediante el uso del software GeoGebra en el aprendizaje de la Geometría en tercer grado de educación secundaria del Colegio San Carlos de Chosica* [Tesis de Maestría,Universidad Nacional de Educación]. https://repositorio.une.edu.pe/bitstream/handle/UNE/954/TM%20CE-Em%20J24%202015.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Jiménez, J. (2014). *Propuesta Didáctica para la enseñanza del concepto de polígono mediante el módulo tortuga de Python.*[Tesis de Maestría,Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/54250

Kline, M. (1972). *El Pensamiento matemático de la antiguedad a nuestros días, I.*Alianza Editorial.

Kresa, P. (1689). *Elementos Geométricos de Euclides.*Traducción de P.Jacobo Kresa.

Leung, F. (2006). "The impact of information and communication Tecnology on Our Understading of the Nature of mathematics". *For the Learning of mathematics*, 26(1): 29 - 35.

Lupiáñez, J., y Rico, L. (2008). Análisis Didáctico y Formación Inicial de Profesores. Competencias y Capacidades en el Aprendizaje de los Escolares. *PNA*, 3(1), 35-48.

Maguiña, A. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el modelo de Van Hiele*. [Tesis de Maestría,Pontificia Universidad Católica del Perú]. https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/4733

Maza, C. (2016). *Matemáticas en el antiguo Egipto.*

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas,* Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Visión 2019: Educación para una discusión,* Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje.* Ministerio de Educación Nacional.

Ortiz, A. (2005). *Historia de la matemática.* Pontifica Universidad Católica del Perú.

Otero, N. (2018). *Secuencia Didáctica para el aprendizaje del concepto de Hexágono en el marco del modelo de Van Hiele* [Tesis de Maestría, Universidad del Cauca]. http://repositorio.unicauca.edu.co:8080/xmlui/handle/123456789/1099

Peñuela, C. (2015). *Construcción de polígonos regulares con regla y compás para desarrollar el pensamiento geométrico en estudiantes de grado séptimo* [Tesis de Pregrado,Universidad de los Llanos]. https://repositorio.unillanos.edu.co/handle/001/352

Ramírez, R. (2011|). *Construcción de polígonos regulares* [Tesis de Maestría,Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/10420

Rodriguez, C. (2011). *Construcción de polígonos regulares y cálculo de áreas de superfices planas utilizando el programa GeoGebra: Una estrategia metodológica para la construcción de aprendizajes significativos en estudiantes de grado séptimo.*[Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/9056

Said, E. (2015). *Hacia el fomento de las TIC en el sector educativo Colombiano.* Editorial Universidad del Norte.

Stewart, I. (2007). *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años.* Crítica.

Organización de las Naciones Unidas para la Cultura, las Ciencias y la Educación (2008). *Los aprendizajes de los estudiantes de América Latina y el Caribe. Primer reporte de los resultados del Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo.* Salesianos Impresiones.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry (Final Report of the Cognitive Development and Achievement in Secundary School Geometry Project)* [Undergraduate Thesis, University of Chicago]. https://ucsmp.uchicago.edu/resources/van_hiele_levels.pdf

Valdivia, N. y Baquedano, I. (2014). *Validación de propuesta didáctica basada en estrategias para la construcción de polígonos regulares haciendo uso de material del medio, en estudiantes de octavo grado "D" del Instituto Nacional Lic. Miguel Larreynaga del municipio San Juan del Río Coco* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua Managua]. http://repositorio.unan.edu.ni/id/eprint/809

Vargas, G., y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la Geometría. *Uniciencia*, 74-94. https://www.redalyc.org/pdf/4759/475947762005.pdf

Anexos

Consentimiento Informados

Consentimiento Informado Institución Educativa

Buenavista, 08 de septiembre de 2021

Rectora:
Mercedes Ussa Valbuena
Institución Educativa José María Silva Salazar

Reciba un cordial y respetuoso saludo. Por medio de la presente me permito solicitar permiso para desarrollar el proyecto de investigación titulado: "El software GeoGebra para la comprensión de los polígonos regulares en estudiantes de grado séptimo". Esta investigación se desarrollará en el grado 7ª de esta Institución por la profesora **Deisy Tatiana Cuervo Lancheros** y estará bajo la dirección de la profesora (PhD) Omaida Sepúlveda Delgado Docente Titular UPTC

.

Gracias por la atención prestada.

Atentamente,

Deisy Tatiana Cuervo Lancheros
Estudiante de Maestría en Educación Matemática
Docente de Matemáticas – Institución Educativa José María Silva Salazar

Yo, ____ identificada con cédula ______________________ Rectora de la Institución Educativa José María Silva Salazar manifiesto y valido con mi firma estar informada de la investigación que se llevará a cabo en el plantel educativo con estudiantes de grado séptimo A por parte de la profesora Deisy Tatiana Cuervo Lancheros, estudiante del programa de Maestría en Educación Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
Igualmente, autorizo la utilización de la información que de allí se derive, solo para los fines académicos pertinentes.

____
Firma

Consentimiento Informado Estudiante

Estimado Padre/Madre de Familia o Acudiente

Soy estudiante del Programa de Maestria en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia y estoy llevando a cabo la investigación titulada "El software GeoGebra para la comprensión de los polígonos regulares en estudiantes de grado séptimo". Por tanto, me dirijo respetuosamente para solicitar su autorización para que su hijo (a) participe voluntariamente en el desarrollo de la secuencia didáctica planeada.

Se desarrollarán cinco clases de una duración máxima de dos horas de acuerdo al horario establecido para la asignatura de matemáticas entre los días 13 y 23 de septiembre, en donde el estudiante desarrollará actividades de pensamiento espacial y geométrico. El proceso de la información será estrictamente confidencial y ni su nombre ni el de su hijo (a) se verá afectado de ninguna manera, es decir, su identidad será preservada confidencialmente. Por otro lado, la participación o no participación en el desarrollo de esta investigación no afectara de ninguna manera la nota del estudiante.

La participación es voluntaria, usted y su hijo (a) tienen derecho de retirar el consentimiento para desistir en cualquier momento. El estudio no conlleva ningún riesgo. No recibirá ninguna compensación por participar. Si tiene alguna pregunta sobre esta investigación, se puede comunicar con el investigador al número de celular 320486966.

Si desea que su hijo (a) participe, por favor diligenciar la autorización y devolverla. Preguntas o dudas sobre los derechos de su hijo (a) pueden ser resueltas en cualquier momento.

Cordialmente,

Deisy Tatiana Cuervo Lancheros
Estudiante de Maestria en Educación Matemática
Docente de Matemáticas – Institución Educativa José María Silva Salazar

AUTORIZACIÓN

He leído el procedimiento descrito arriba. El investigador me ha explicado el estudio y ha contestado mis preguntas. Voluntariamente doy mi consentimiento para que mi hijo (a) ____, participe en este estudio.

____
Firma Padre/Madre/ Acudiente
CC. ____________________

Guía de Observación

GUÍA DE OBSERVACIÓN		
FECHA:	HORA:	PERIODO DE DURACIÓN:
SUCESO OBSERVADO	COMENTARIO DEL OBSERVADOR	

Situaciones Didácticas

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="4">INSTITUCIÓN EDUCATIVA JOSÉ MARÍA SILVA SALAZAR – BUENAVISTA BOYACÁ</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">FORMATO PARA TALLERES POR ASIGNATURA FTP 001
Guías, talleres y evaluaciones para trabajo en casa 2021</td></tr>
<tr><td>TALLER</td><td>1</td><td>EVALUACIÓN</td><td>1</td><td>GUÍA</td><td colspan="2">#1</td></tr>
<tr><td colspan="3">ÁREA: Matemáticas</td><td colspan="4">ASIGNATURA: Geometría</td></tr>
<tr><td colspan="3">DOCENTE: Deisy Tatiana Cuervo Lancheros</td><td colspan="4">GRADO: 7</td></tr>
<tr><td colspan="3">CORREO ELECTRÓNICO: deisylancheros@gmail.com</td><td colspan="4">WHATSAPP: 3204869661</td></tr>
<tr><td>SEMANA:
Novena semana del Tercer periodo</td><td colspan="2">TIEMPO DE ENVÍO:
Una semana</td><td colspan="2">TIEMPO DE TRABAJO:
2 horas</td><td colspan="2">FECHA Y HORA DE ENTREGA:
13 de septiembre</td></tr>
<tr><td>TEMÁTICA:</td><td colspan="6">Actividad N° 1. Construcción del triángulo</td></tr>
</table>

Objetivo: Comprender las propiedades geométricas del triángulo a partir de su construcción.

Marco Teórico: Teoría de las Situaciones Didácticas y el Modelo de Van Hiele.

Pensamiento: Espacial y sistemas geométricos.

Estándar Básico de competencias: Clasificó polígonos en relación con sus propiedades.

Derecho Básico de aprendizaje: Realiza construcciones geométricas usando regla y compás.

Situación problema. Construcción del triángulo

Se va a utilizar el programa GeoGebra que es un software educativo de exploración para trabajar con puntos, rectas, segmentos de recta, rayos, círculos, ángulos, polígonos y curvas cónicas. Además, cuenta con herramientas de selección, rotación, reflexión, construcción entre otras y, permite obtener ecuaciones de rectas y circunferencias.

<u>Situación de acción - Nivel de familiarización</u>

1. Entre al programa GeoGebra haciendo clic en la aplicación.
2. Seleccione la herramienta segmento y grafique el segmento AB.
3. Seleccione la herramienta circunferencia (centro, punto), haga centro en A y luego marque el punto B.
4. Seleccione la herramienta circunferencia (centro, punto), haga centro en B y luego marque el punto en A.
5. Seleccione la herramienta punto y haga clic en la intersección de las dos circunferencias, en un punto C.
6. Seleccione la herramienta polígono y una los vértices A, B, C.
7. ¿Cuál es la figura geométrica construida?
8. Redacte el procedimiento realizado para la construcción del triángulo en la forma:

Si
____

Entonces,
____

Situación de Formulación- Nivel de Comparación

En grupos de dos o tres estudiantes desarrollar:

9. Haga clic en la herramienta distancia y mida la longitud de los lados del triángulo ABC. Compare los resultados con otros estudiantes y diligencie la información en la siguiente tabla:

Nombre del estudiante	Longitud de cada lado del triángulo	Perímetro del triángulo

10. ¿Qué se puede observar con respecto a la longitud de los lados del triángulo? ¿Cómo se clasifica el triángulo obtenido según la longitud de sus lados?
11. Haga clic en la herramienta ángulo y mida los ángulos del triángulo. Compare los resultados con otros estudiantes y diligencie la información en la siguiente tabla:

Nombre del estudiante	Medida de cada ángulo del triángulo	Suma de los ángulos internos del triángulo

12. ¿Cómo se clasifica el triángulo según la medida de los ángulos?
13. Con la herramienta seleccionar objeto, tome un vértice del triángulo y muévalo. ¿Qué pasa con las longitudes de los lados?

Situación de Validación – Nivel de clasificación

En cada grupo escoger un representante, para socializar los resultados encontrados de acuerdo a las siguientes preguntas:

14. Explicar los resultados que se obtuvieron de la construcción del triángulo, ¿qué pasa con la longitud de los lados del triángulo, siempre es la misma medida en los tres lados? ¿La medida de los ángulos del triángulo varía?
15. Mencione algunas propiedades del triángulo.
16. Buscar algunos objetos en su entorno donde haya partes similares a triángulos: clasificarlos y mencionar del porqué de cada caso.

Situación de Institucionalización – Nivel de argumentación

17. ¿Qué conclusiones se pueden establecer del desarrollo de la situación?

    El profesor ayudará a identificar, luego de escuchar a los estudiantes, que la construcción realizada corresponde a un triángulo equilátero, el cual es un polígono regular que tiene tres lados iguales y la medida de cada uno de sus ángulos corresponde a 60° y, por tanto, la medida de la suma interna de los ángulos del triángulo corresponde a 180°.

Secretaría de Educación | Boyacá Avanza	**INSTITUCIÓN EDUCATIVA JOSÉ MARÍA SILVA SALAZAR – BUENAVISTA BOYACÁ**	

FORMATO PARA TALLERES POR ASIGNATURA FTP 001

Guías, talleres y evaluaciones para trabajo en casa 2021

TALLER	**2**	**EVALUACIÓN**	**2**	**GUÍA**	**#**	**2**

ÁREA: Matemáticas	**ASIGNATURA:** Geometría
DOCENTE: Deisy Tatiana Cuervo Lancheros	**GRADO: 7**
CORREO ELECTRÓNICO: deisylancheros@gmail.com	**WHATSAPP:** 3204869661

SEMANA:	**TIEMPO DE ENVÍO:**	**TIEMPO DE TRABAJO:**	**FECHA Y HORA DE ENTREGA:**
Novena semana del Tercer periodo	Una semana	2 horas	15 de septiembre

TEMÁTICA:	Actividad N° 2. Problema 51 del Papiro Rhind - área de triángulo

Objetivo: Calcular el área de un triángulo rectángulo.
Marco Teórico: Teoría de las Situaciones Didácticas y el Modelo de Van Hiele.

Pensamiento: Espacial y sistemas geométricos.

Estándar Básico de competencias: Clasificó polígonos en relación con sus propiedades.

Derecho Básico de aprendizaje: Realiza construcciones geométricas usando regla y compás.

ESTRUCTURACIÓN:

Actividad. Área de triángulos. Problema 51 del Papiro Rhind

Se va a utilizar el programa GeoGebra que es un software educativo de exploración que permite trabajar con puntos, rectas, segmentos de recta, rayos, círculos, ángulos, polígonos y curvas cónicas. Además, cuenta con herramientas de selección, rotación, reflexión, construcción entre otras y, permite obtener ecuaciones de rectas y circunferencias.

Situación de acción – Nivel de Familiarización

2. Seleccione la herramienta segmento y construya un triángulo rectángulo. Tome un pantallazo de la construcción realizada.
3. Haga clic en la herramienta distancia y mida la longitud de la base, luego haga clic en la herramienta mover, para disminuir o aumentar el lado de la base hasta que esta sea igual a 4 y el lado de la altura hasta que sea igual a 10.
4. En la misma ventana de trabajo seleccione la herramienta polígono y construya un triángulo rectángulo. Tome un pantallazo de la construcción realizada.
5. Haga clic en la herramienta distancia y mida la longitud de la altura del triángulo, luego hacer clic en la herramienta mover, para disminuir o aumentar el lado de la altura hasta que esta sea igual a 4 y el lado de la altura hasta que sea igual a 10.

Nota: Adjuntar los pantallazos de las construcciones realizadas al enviar las evidencias de la actividad.

Situación de Formulación- Nivel de Comparación

En grupos de dos estudiantes desarrollar las siguientes tareas:

6. Determinar el área del triángulo construido con segmentos (en una hoja), si la altura corresponde a $10\,khet$ y la base a $4\,khet$ ($1\,khet = 100\,codos$; $1\,setat = 10.000\,codos\ cuadrados$) Comparar el procedimiento y el resultado del área en $setat$ con el compañero. Diligenciar la información en la siguiente tabla:

Nombre del estudiante	Descripción del procedimiento. Área del triángulo

7. Hacer clic en la herramienta área, luego seleccionar el triángulo construido con la herramienta polígono si la altura corresponde a $10\,khet$ y la base a $4\,khet$ ($1\,khet = 100\,codos$; $khet\ \times khet = setat$) determinar el área del triángulo en $setat$. Comparar con el mismo compañero los resultados del área del triángulo y diligenciar la información en la siguiente tabla:

Nombre del estudiante	Área del triángulo

Situación de Validación – Nivel de clasificación

En cada grupo escoger un representante, para socializar los resultados encontrados de acuerdo a las siguientes preguntas:

8. Explicar los resultados obtenidos de acuerdo al área del triángulo construido con segmentos (valor del área de forma manual) y el área del triángulo construido con la herramienta polígono (valor del área dado por el programa).
9. ¿Cuáles son las unidades del área?
10. Mencione algunas propiedades de los triángulos rectángulos.
11. Se puede calcular el área del triángulo utilizando otros procedimientos. Escribir los resultados encontrados. Justificar.

Situación de Institucionalización – Nivel de argumentación

12. ¿Qué conclusiones se pueden establecer del desarrollo de la situación?

    El profesor ayudará a identificar, luego de escuchar a los estudiantes, que el área del triángulo es igual a la mitad producto de la base por la altura.

Secretaría de Educación · Boyacá Avanza	INSTITUCIÓN EDUCATIVA JOSÉ MARÍA SILVA SALAZAR – BUENAVISTA BOYACÁ	

FORMATO PARA TALLERES POR ASIGNATURA FTP 001

Guías, talleres y evaluaciones para trabajo en casa 2021

TALLER	**3**	**EVALUACIÓN**	**3**	**GUÍA**	**#**	**3**

ÁREA: Matemáticas	**ASIGNATURA:** Geometría
DOCENTE: Deisy Tatiana Cuervo Lancheros	**GRADO: 7**
CORREO ELECTRÓNICO: deisylancheros@gmail.com	**WHATSAPP:** 3204869661

SEMANA:	**TIEMPO DE ENVÍO:**	**TIEMPO DE TRABAJO:**	**FECHA Y HORA DE ENTREGA:**
Novena semana del Tercer periodo	Una semana	2 horas	16 de septiembre

TEMÁTICA:	Actividad N° 3. Construcción del cuadrado

Objetivo: Comprender las propiedades geométricas del cuadrado a partir de su construcción.

Marco Teórico: Teoría de las Situaciones Didácticas y el Modelo de Van Hiele

Pensamiento: Espacial y sistemas geométricos.

Estándar Básico de competencias: Clasificó polígonos en relación con sus propiedades.

Derecho Básico de aprendizaje: Realiza construcciones geométricas usando regla y compás.

ESTRUCTURACIÓN:

Actividad. Construcción del Cuadrado

Se va a utilizar el programa GeoGebra que es un software educativo de exploración para trabajar con puntos, rectas, segmentos de recta, rayos, círculos, ángulos, polígonos y curvas cónicas. Además, cuenta con herramientas de selección, rotación, reflexión, construcción entre otras y, permite obtener ecuaciones de rectas y circunferencias.

Situación de acción – Nivel de Familiarización

1. Entre al programa GeoGebra haciendo clic en la aplicación.
2. Seleccione la herramienta segmento y dibuje el segmento AB.
3. Haga clic en la herramienta circunferencia (centro, punto), dibuje una circunferencia con centro en A y luego marque el punto en B.
4. Construya una recta perpendicular al segmento AB que pase por el punto A.
5. Determine el punto de intersección de la circunferencia con la recta perpendicular, un punto C.
6. Construya una recta perpendicular al segmento AB que pase por B.
7. Construya una recta paralela al segmento AB que pase por C, marque el punto de intersección de las dos últimas rectas trazadas, nombre este punto como D.
8. Construya el cuadrado $ABCD$ con la herramienta polígono.
9. Redacte el procedimiento realizado para la construcción del cuadrado en la forma:

   Si

   ____

   Entonces,

   ____

Nota: Adjuntar los pantallazos de las construcciones realizadas al enviar las evidencias.

Situación de formulación – Nivel de comparación

En grupos de dos o tres estudiantes desarrollar:

10. Haga clic en la herramienta distancia y mida la longitud de un lado, ¿Cuánto mide la longitud de los demás lados? Justificar.
11. Compare con dos compañeros los resultados de las medidas de los lados del cuadrado. Diligencie la información en la siguiente tabla.

Nombre del estudiante	Longitud de cada lado del cuadrado	Perímetro del cuadrado

12. ¿Qué conclusiones se pueden establecer en relación con la longitud de los lados del cuadrado?

13. Observe los ángulos del cuadrado, ¿Cuál es la medida de cada ángulo? Compare con tres compañeros los resultados de las medidas de los ángulos del cuadrado. Diligencie la información en la siguiente tabla:

Nombre del estudiante	Medida de cada ángulo del cuadrado	Suma de los ángulos internos del cuadrado

14. Con la herramienta seleccionar objeto, tome el cuadrado de un vértice y muévalo ¿Qué se puede observar respecto a las longitudes de los lados del cuadrado? ¿La medida de los ángulos internos del cuadrado cambian? ¿Cómo clasificar el cuadrado según la medida de los ángulos?

<u>Situación de validación – Nivel de clasificación</u>

En cada grupo escoger un representante, para socializar los resultados encontrados de acuerdo a las siguientes preguntas:

15. Explicar los resultados que se obtuvieron de la construcción del cuadrado, ¿qué relación existe entre la longitud de los lados del cuadrado y la medida de los ángulos internos del cuadrado?
16. Mencione algunas propiedades del cuadrado.
17. Buscar algunos objetos de su entorno donde haya cuadrados, trate de realizar una construcción de los mismos manteniendo la misma longitud de cada lado.

<u>Situación de Institucionalización – Nivel de argumentación</u>

18. ¿Qué conclusiones se pueden establecer del desarrollo de la situación?
    El profesor ayudará a identificar, luego de escuchar a los estudiantes, que la construcción realizada corresponde a un cuadrado, el cual es un polígono regular que tiene cuatro lados

iguales y la medida de cada uno de sus ángulos corresponde a 90° y, por tanto, la medida de la suma interna de los ángulos del triángulo corresponde a 360°.

Secretaría de Educación | Boyacá Avanza	**INSTITUCIÓN EDUCATIVA JOSÉ MARÍA SILVA SALAZAR – BUENAVISTA BOYACÁ**	

FORMATO PARA TALLERES POR ASIGNATURA FTP 001

Guías, talleres y evaluaciones para trabajo en casa 2021

TALLER	**4**	**EVALUACIÓN**	**4**	**GUÍA**	**#**	**4**

ÁREA: Matemáticas	**ASIGNATURA:** Geometría
DOCENTE: Deisy Tatiana Cuervo Lancheros	**GRADO: 7**
CORREO ELECTRÓNICO: deisylancheros@gmail.com	**WHATSAPP:** 3204869661

SEMANA:	**TIEMPO DE ENVÍO:**	**TIEMPO DE TRABAJO:**	**FECHA Y HORA DE ENTREGA:**
Primera semana del cuarto periodo	Una semana	2 horas	20 de septiembre

TEMÁTICA:	Actividad N° 4. Propiedades del pentágono

Objetivo: clasificar el pentágono en irregular y regular.

Marco Teórico: Teoría de las Situaciones Didácticas y el Modelo de Van Hiele.

Pensamiento: Espacial y sistemas geométricos.

Estándar Básico de competencias: Clasificó polígonos en relación con sus propiedades.

Derecho Básico de aprendizaje: Realiza construcciones geométricas usando regla y compás.

Actividad. Propiedades del pentágono 1

Se va a utilizar el programa GeoGebra que es un software educativo de exploración que permite trabajar con puntos, rectas, segmentos de recta, rayos, círculos, ángulos, polígonos y curvas cónicas. Además, cuenta con herramientas de selección, rotación, reflexión, construcción entre otras y, permite obtener ecuaciones de rectas y circunferencias.

Situación de acción – Nivel de Familiarización

1. Entre al programa GeoGebra haciendo clic en la aplicación.
2. Seleccione la herramienta segmento y dibuje un polígono de cinco lados.
3. Seleccione la herramienta polígono y dibuje un polígono de cinco lados.
4. Seleccione la herramienta polígono regular y dibuje un polígono de cinco lados, primero marque dos puntos y luego indique el número de vértices.

Nota: Adjuntar los pantallazos de las construcciones realizadas al enviar las evidencias.

<u>Situación de formulación – Nivel de comparación</u>

En grupos de dos o tres estudiantes desarrollar:

5. ¿Qué similitudes encuentra entre las tres figuras? Socialícelas con el compañero y diligencie la siguiente tabla.

Nombre del estudiante	Similitudes entre las figuras

6. ¿Qué diferencias encuentra entre las tres figuras? Compárelas con dos compañeros y registre la información:

Nombre del estudiante	Diferencias entre las figuras

<u>Situación de validación – Nivel de clasificación</u>

En cada grupo escoger un representante, para socializar los resultados encontrados de acuerdo a las siguientes preguntas:

7. Explicar los resultados que se obtuvieron de las similitudes y diferencias de los pentágonos construidos.

8. Explicar los resultados que se obtuvieron en relación con los lados del pentágono construido con segmentos y el pentágono construido con la herramienta polígono regular.
9. Mencione algunas propiedades que identifica de los pentágonos construidos.
10. Buscar algunos objetos de su entorno donde haya pentágonos y mencione algunas características de los mismos.

Situación de Institucionalización – Nivel de argumentación

11. ¿Qué conclusiones se pueden establecer del desarrollo de la situación?

    El docente guiará las respuestas de los estudiantes para identificar el pentágono como una figura geométrica de cinco lados que puede ser regular e irregular.

Secretaría de Educación – Boyacá Avanza	**INSTITUCIÓN EDUCATIVA JOSÉ MARÍA SILVA SALAZAR – BUENAVISTA BOYACÁ**	

FORMATO PARA TALLERES POR ASIGNATURA FTP 001

Guías, talleres y evaluaciones para trabajo en casa 2021

TALLER	**5**	**EVALUACIÓN**	**5**	**GUÍA**	**#**	**5**

ÁREA: Matemáticas	**ASIGNATURA:** Geometría
DOCENTE: Deisy Tatiana Cuervo Lancheros	**GRADO: 7**
CORREO ELECTRÓNICO: deisylancheros@gmail.com	**WHATSAPP:** 3204869661

SEMANA: Primera semana del cuarto periodo	**TIEMPO DE ENVÍO:** Una semana	**TIEMPO DE TRABAJO:** 2 horas	**FECHA Y HORA DE ENTREGA:** 22 de septiembre

TEMÁTICA:	Actividad N° 5. Construcción del pentágono

Objetivo: Comprender las propiedades geométricas del pentágono a partir de su construcción.

Marco Teórico: Teoría de las Situaciones Didácticas y el Modelo de Van Hiele.

Pensamiento: Espacial y sistemas geométricos.

Estándar Básico de competencias: Clasificó polígonos en relación con sus propiedades.

Derecho Básico de aprendizaje: Realiza construcciones geométricas usando regla y compás.

Actividad. Construcción del Pentágono

Situación de acción – Nivel de Familiarización

1. Entre al programa GeoGebra haciendo clic en la aplicación.
2. En la ventana de trabajo seleccione la opción mostrar ejes.
3. Colocar un punto A en el origen del plano cartesiano.
4. Colocar un punto B en el punto de coordenadas $(5, 0)$.

5. Construir una circunferencia (centro, punto) marcar centro en A y luego marcar el punto B. Utilizar la opción color y marcar el contorno de esta circunferencia de rojo.
6. Construir otra circunferencia con centro en B y punto en A.
7. Marcar los puntos de intersección entre las dos circunferencias, el punto superior nómbrelo como C y el punto inferior nómbrelo D.
8. Construir un segmento entre el punto C y el punto D.
9. Colocar un punto de intersección E entre el segmento y el eje x.
10. Marcar el punto de intersección entre la circunferencia de centro en A y punto B (circunferencia de color rojo) con la parte positiva del eje y como un punto G, utilice color para marcar el punto G de color verde.
11. Construir una circunferencia (centro, punto) con centro en E y punto G. Utilizar la opción color y marcar el contorno de esta circunferencia de morado.
12. Marcar los puntos de intersección entre la circunferencia de color morado que se acaba de realizar y el eje x, marcar el punto de la parte izquierda como H.
13. Construir una circunferencia (centro, punto) con centro en G y punto H.
14. Marcar los puntos de intersección de la circunferencia que se acaba de construir con la circunferencia de centro en A y punto B (circunferencia de color rojo), marcar el punto de la parte izquierda como I (utilizar color para marcar el punto I de color azul) y el de la parte derecha como J (utilizar color para marcar el punto J de color amarillo). G, I, J son vértices del pentágono.
15. Construir una circunferencia (centro, punto) con centro en I y punto G (utilizar la opción color y marcar el contorno de esta circunferencia de azul), luego marcar el punto de intersección con la circunferencia centro en A y punto B (circunferencia de color rojo) como el punto K, utilizar color para marcar el punto K de color naranja.
16. Construir una circunferencia (centro, punto) con centro en J y punto G(utilizar la opción color y marcar el contorno de esta circunferencia de rosado), luego marcar el punto de intersección con la circunferencia centro en A y punto B (circunferencia de color rojo) como el punto L (utilizar color para marcar el punto de café). K, L son vértices del pentágono.
17. Con la herramienta polígono construir el pentágono $IGJLK$.

<u>Situación de formulación – Nivel de comparación</u>

En grupos de dos o tres estudiantes desarrollar:

18. Utilizar la herramienta distancia para medir la longitud de cada lado del pentágono.

19. Compare con el compañero los resultados de las medidas de los lados del pentágono. Diligencie la información en la siguiente tabla.

Nombre del estudiante	Longitud del lado del pentágono	Perímetro del pentágono

    a. ¿Qué conclusiones se pueden establecer en relación con la longitud de los lados del pentágono? Justificar.

20. Con la herramienta ángulo medir cada ángulo interno del pentágono.
    Tomar un pantallazo de las mediciones realizadas
21. Compare con otro compañero los resultados de las medidas de los ángulos del pentágono. Diligencie la información en la siguiente tabla:

Nombre del estudiante	Medida de cada ángulo del pentágono	Suma de los ángulos interiores del pentágono.

    a. ¿Qué conclusiones se pueden establecer en relación con la medida de los ángulos del pentágono? Justificar.

<u>Situación de validación – Nivel de clasificación</u>

En cada grupo escoger un representante, para socializar los resultados encontrados de acuerdo a las siguientes preguntas:

22. Explicar los resultados que se obtuvieron de la construcción del pentágono, ¿qué relación existe entre la longitud de los lados del pentágono y la medida de los ángulos internos del pentágono?
23. Mencione algunas propiedades del pentágono.

<u>Situación de Institucionalización – Nivel de argumentación</u>

24. ¿Qué conclusiones se pueden establecer del desarrollo de la situación?