

**REPRESENTACIÓN DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES A PARTIR DE  
SITUACIONES DIDÁCTICAS EN BÁSICA SECUNDARIA DEL COLEGIO NUESTRA  
SEÑORA DEL ROSARIO.**

**PRESENTADO POR:  
ÁNGEL LEONARDO CUBIDES QUEVEDO**



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA  
TUNJA  
2021**

**REPRESENTACIÓN DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES A PARTIR DE  
SITUACIONES DIDÁCTICAS EN BÁSICA SECUNDARIA DEL COLEGIO NUESTRA  
SEÑORA DEL ROSARIO.**

**ÁNGEL LEONARDO CUBIDES QUEVEDO**

**Trabajo de grado, requisito parcial para optar al título de Magíster en Educación  
Matemática.**

**Director: Mg. OLGA YANETH PATIÑO PORRAS.**



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA  
TUNJA  
2021**

## Resumen

Indagar sobre la naturaleza que nos rodea y el desarrollo de conocimientos en muchas ciencias necesita del apoyo geométrico. Ya que la geometría nos brinda maneras de analizar, organizar y sistematizar las diferentes nociones del espacio y así la comprensión y admiración por el entorno natural que tenemos a nuestro alrededor. Por tanto, es fundamental generar estrategias para profundizar en este tipo de pensamiento matemático. De esta manera la investigación plantea el desarrollo del pensamiento espacial por medio de la construcción de objetos tridimensionales específicos del entorno y la implementación de una serie de situaciones didácticas para potenciar el pensamiento geométrico, trabajando con estudiantes de grado noveno del colegio Nuestra Señora del Rosario de Tunja.

En esta investigación se trabajó con un enfoque cualitativo basado en la metodología de investigación pedagógica de manera descriptiva. La cual se desarrolló en 3 fases: la primera en la que se aplicó un diagnóstico con el fin de identificar las fortalezas y debilidades que poseen los estudiantes; la segunda fase consistente en el diseño de situaciones didácticas y la tercera en la que se implementó y evaluó la aplicación de estas situaciones. Con el fin de potenciar en los estudiantes el pensamiento espacial. Obteniendo un análisis favorable a partir de lo observado y recolectado, ya que se evidenció construcción de aprendizaje significativo, partiendo de la implementación de las situaciones didácticas elaboradas con formas geométricas tridimensionales reales.

Palabras clave: *Situaciones didácticas, geometría, pensamiento espacial, objetos tridimensionales y entorno.*

## Abstract

Inquiring about the nature that surrounds us and the development of knowledge in many sciences needs geometric support. Geometry gives us ways to analyze, to organize and to systematize the different notions of space and in this way to comprehend and to admire for the natural environment around us. Therefore, it is essential to generate strategies to deepen this type of mathematical thinking. This research proposes the development of spatial thinking through the construction of three-dimensional objects specific to the environment and the implementation of a series of didactic situations to enhance geometric thinking of ninth grade students of the Nuestra Señora del Rosario school in Tunja.

In this research we worked with a qualitative approach based on the pedagogical research methodology in a descriptive way. It was developed in 3 phases: the first phase consisted of a diagnosis to identify the strengths and weaknesses of the students; the second phase consisted of the design of didactic situations; and the third phase consisted of the implementation and evaluation of the application of these situations to promote spatial thinking in students. A favorable analysis was obtained from what was observed and collected, since the construction of meaningful learning was evidenced, starting from the implementation of the didactic situations elaborated with real three-dimensional geometric shapes.

**Key words:** **Didactic situations, geometry, spatial thinking, three-dimensional objects, and environment.**

**Contenido**

<b>Resumen.....</b>	<b>III</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>IV</b>
<b>Introducción.....</b>	<b>XIII</b>
<b>Planteamiento del problema.....</b>	<b>1</b>
Descripción del problema .....	1
Formulación del problema .....	3
<b>Justificación .....</b>	<b>4</b>
<b>Objetivos .....</b>	<b>6</b>
Objetivo general .....	6
Objetivos específicos .....	6
<b>Marco Referencial .....</b>	<b>7</b>
Antecedentes históricos.....	7
Antecedentes teóricos.....	10
Investigaciones relativas al uso de las Teoría de las Situaciones Didácticas.....	11
Investigaciones relativas al uso de la geometría .....	13
<b>Marco Teórico .....</b>	<b>16</b>
Competencia matemática .....	16

Aprendizaje en matemáticas .....	18
Geometría y pensamiento espacial.....	19
Resolución de problemas y desarrollo de competencias.....	21
Didáctica de la matemática .....	23
La Didáctica de la Matemática de la Escuela Francesa. ....	26
Teoría de las situaciones didácticas. ....	26
Tipos de Situaciones a-didácticas .....	33
1. Situación de acción. ....	34
2. Situación de Formulación .....	35
3. La situación de validación.....	36
4. Situación de Institucionalización .....	37
Constructivismo .....	38
Los niveles de Van Hiele para la enseñanza de la Geometría.....	38
Teoría del desarrollo de Piaget.....	41
<b>Marco Conceptual.....</b>	<b>43</b>
<b>Metodología .....</b>	<b>49</b>
Enfoque investigativo.....	49
Descripción de la unidad de análisis. ....	50
Etapas del proceso de investigación.....	50
Primera fase: Diagnóstico .....	50

Segunda fase: Situaciones e implementación .....	51
Tercera Fase: evaluación.....	51
Tipo de análisis. ....	52
Categorías de análisis .....	54
Aplicación de situaciones didácticas.....	54
<b>Resultados .....</b>	<b>55</b>
Estándar para grado noveno, pensamiento espacial.....	56
Prueba diagnostica .....	57
Prueba final .....	65
Comparación prueba diagnóstica – prueba final .....	68
Situaciones didácticas .....	69
Situación acción .....	70
Representaciones tridimensionales en las situaciones de acción .....	76
Situación formulación .....	79
Representaciones tridimensionales en las situaciones formulación.....	87
Situaciones de validación .....	89
Representaciones tridimensionales en las situaciones validación.....	92
<b>Análisis .....</b>	<b>94</b>
Situaciones didácticas .....	94
Situación acción .....	95

Situación formulación .....	98
Situación de validación .....	100
Representaciones tridimensionales .....	103
Prueba diagnóstica – prueba final .....	108
<b>Conclusiones .....</b>	<b>110</b>
<b>Bibliografía .....</b>	<b>113</b>
<b>Anexos .....</b>	<b>120</b>
Anexos 1: Consentimiento informado .....	120
Anexos2: Prueba diagnostica .....	121
Anexos 3: situación didáctica N 1.....	123
Anexos 4: situación didáctica N 2.....	124
Anexos 5: situación didáctica N 3.....	125
Anexos 6: Situación didáctica N 4 .....	126
Anexos 8: PRUEBA FINAL .....	128

**Lista de tablas**

<b>Tabla N 1. Análisis estadístico de grado noveno por desempeños, competencias y componentes. Nuestra Señora del Rosario de Tunja. Matemáticas.....</b>	<b>2</b>
<b>Tabla 2: Desempeños pruebas grado 901 .....</b>	<b>59</b>
<b>Tabla 3: Resultados prueba final. Grado 901 .....</b>	<b>66</b>
<b>Tabla 4: Desempeños prueba final. Grado 901.....</b>	<b>67</b>
<b>Tabla 5: Respuesta a pregunta situación didáctica n 2. ....</b>	<b>76</b>

**Lista de figuras**

<b>Figura 1. Triángulo didáctico. Elaboración propia .....</b>	<b>28</b>
<b>Figura 2. Componente geométrico espacial. Elaboración propia.....</b>	<b>56</b>
<b>Figura 3 . Resultados prueba diagnóstica (anexo 2) Elaboración propia.....</b>	<b>58</b>
<b>Figura 4. Respuesta del estudiante E18 a la pregunta 1 de la prueba diagnóstica. (Anexo 2)</b> .....	<b>60</b>
<b>Figura 5. Respuesta del estudiante E8 a la pregunta 2 de la prueba diagnóstica. (Anexo 2)</b> .....	<b>61</b>
<b>Figura 6. Planta de distribución vivienda familiar pregunta 3. Tomada de Pinterest.....</b>	<b>62</b>
<b>Figura 7. Respuesta del estudiante E5 a la pregunta 2 de la prueba diagnóstica. (Anexo 2)</b> .....	<b>62</b>
<b>Figura 8. Elaboración propia a pregunta 5 de la prueba diagnóstica. (Anexo 2) .....</b>	<b>63</b>
<b>Figura 9. Elaboración de estudiante prueba diagnóstica. (Anexo 2) .....</b>	<b>64</b>
<b>Figura 10. Comparativa prueba diagnóstica – prueba final Elaboración propia. ....</b>	<b>68</b>
<b>Figura 11. Cubo real para manipulación por parte del estudiante. (Anexo 3) .....</b>	<b>70</b>
<b>Figura 12. Respuesta del estudiante E 20 a la situación didáctica n 1 (Anexo 3) .....</b>	<b>71</b>
<b>Figura 13. Respuesta del estudiante E 15 a la situación didáctica n 2 (Anexo 3) .....</b>	<b>73</b>

<b>Figura 14. Representación vivienda a partir de prismas (Anexo 4).....</b>	<b>74</b>
<b>Figura 15. Respuesta del estudiante E 07 a la situación didáctica n 1 (Anexo 3) .....</b>	<b>77</b>
<b>Figura 16. Respuesta del estudiante E 12 a la situación didáctica n 1 (Anexo 3) .....</b>	<b>78</b>
<b>Figura 17. Respuesta del estudiante E 16 a la situación didáctica n2 (Anexo 4) .....</b>	<b>79</b>
<b>Figura 18. Imagen planteada para situación didáctica n3 (Anexo 5) .....</b>	<b>80</b>
<b>Figura 19. Imagen planteada para situación didáctica n3 (Anexo 5) .....</b>	<b>81</b>
<b>Figura 20. Respuesta del estudiante E 15 a la situación didáctica n3 (Anexo 5) .....</b>	<b>83</b>
<b>Figura 21. Respuesta del estudiante de la grada del patio E 14 a la situación didáctica n4 (Anexo 6).....</b>	<b>85</b>
<b>Figura 22. Respuesta del estudiante E 12 a la situación didáctica n4 (Anexo 6) .....</b>	<b>85</b>
<b>Figura 23. Respuesta del estudiante E 11 a la situación didáctica n4 (Anexo 6) .....</b>	<b>86</b>
<b>Figura 24. Respuesta del estudiante E 11 a la situación didáctica n4 (Anexo 6) .....</b>	<b>87</b>
<b>Figura 25. Respuesta del estudiante E 14 a la situación didáctica n3 (Anexo 5) .....</b>	<b>88</b>
<b>Figura 26. Respuesta del estudiante E 14 luego de algunas indicaciones a la situación didáctica n3 (Anexo 5) .....</b>	<b>89</b>
<b>Figura 27. Respuesta de representantes de grupos a la situación didáctica n5 (Anexo 7)...</b>	<b>91</b>
<b>Figura 28. Imagen planteada para situación didáctica n3 (Anexo 5) .....</b>	<b>92</b>
<b>Figura 29. Respuesta del estudiante E 17 a la situación didáctica n 1 y n 3 (Anexo 3 y 4) ..</b>	<b>97</b>

<b>Figura 30. Respuesta del estudiante E 14 a la situación didáctica n 4 (Anexo 6) .....</b>	<b>99</b>
<b>Figura 31. Respuesta del estudiante E 14 a la situación didáctica n 5 (Anexo 7) .....</b>	<b>101</b>
<b>Figura 32. Respuesta de representantes de grupos a la situación didáctica n5 (Anexo 7). .</b>	<b>102</b>
<b>Figura 33. Respuesta del estudiante E 08 a la situación didáctica n 1 y n 2 (Anexo 3 y 4)</b>	<b>104</b>
<b>Figura 34. Respuesta del estudiante E 19 a la situación didáctica n 5 (Anexo 7) .....</b>	<b>105</b>
<b>Figura 35. Respuesta del estudiante E 12 a la situación didáctica n 5 (Anexo 7) .....</b>	<b>107</b>
<b>Figura 36. Respuesta del estudiante E 19 a la prueba diagnóstica (Anexo 8) .....</b>	<b>108</b>

## Introducción

El aprendizaje del componente geométrico es una parte fundamental para comprender el mundo en el cual habitamos. Este tipo de pensamiento basado en geometría ha marcado el desarrollo de varias generaciones aportando a la evolución de diversos campos de la actividad humana o disciplinas como las artes, la arquitectura y las ciencias que generan descripción, construcción y análisis del mundo que nos rodea.

La presente investigación pedagógica surgió con la necesidad de potenciar el estudio y comprensión de dicho campo de saber, teniendo en cuenta los Lineamientos Curriculares y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA, 2016) establecidos para grado noveno, en donde el estudiante debe estar preparado para construir conocimiento por medio de la observación de figuras y objetos reales, deduciendo y analizando sus propiedades mediante construcción de objetos tridimensionales de su entorno.

Por esta razón se orientó el presente trabajo en el estudio y la implementación de situaciones didácticas que permitan el fortalecimiento del aprendizaje geométrico, ya que día a día las instituciones educativas están minimizando estos conceptos y representaciones gráficas y en general su teoría esto basado en la práctica pedagógica realizada en la institución. Escudero (2017) sugiere:

“las situaciones didácticas estratégicas, disminuyen la frecuencia de tales deficiencias que dificultan el mejoramiento de aprendizaje y comprensión. Las situaciones didácticas

implementadas y los tipos de interacción suscitados entre docente – estudiante y saber (medio), se fundamentan bajo la perspectiva de la teoría de situaciones didácticas”.

Para ello se diseñó una propuesta pedagógica que pretendió incorporar una secuencia didáctica basadas en cinco actividades. Todo ello para el mejoramiento del proceso de aprendizaje geométrico en el aula, con el objetivo de desarrollar pensamiento geométrico en la representación de objetos tridimensionales del entorno; propuesta dirigida a estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario de Tunja.

Estas situaciones didácticas se diseñaron a partir de una prueba preliminar, de exploración y construcción gráfica del entorno real de la Institución, es decir: patio central y cancha de microfútbol. Utilizando elementos geométricos del contexto que permitieron diferentes representaciones y modelaciones con el fin de fortalecer diferentes procesos mentales cognitivos, que permitió el desarrollo de capacidades para un mejor entendimiento del medio que nos rodea día a día.

Finalmente, se evaluaron estas situaciones teniendo presente los objetivos planteados durante esta investigación. Paso continuo, se plantearon diferentes teorías que ayudan al uso de nuevas estrategias y metodologías que lleven al desarrollo del pensamiento espacial mediante la interpretación de las formas tridimensionales del entorno. De esta manera se analiza el trabajo realizado sobre la aplicación de ésta para determinar el alcance de los objetivos y los cambios en los procesos de enseñanza aprendizaje para esta nueva estrategia generada.

## **Planteamiento del problema**

### **Descripción del problema**

La geometría es trascendental ya que genera en los estudiantes percepción de formas del espacio y la necesidad de crear, construir y transformar el mundo que los rodea. Castellanos (2010) afirma que con ella es factible desarrollar habilidades, tales como: la visualización y capacidad para explorar, representar y describir su entorno; proporciona un conocimiento útil en la vida cotidiana, en las ciencias, en las técnicas y en diversos campos de la actividad humana. Ciertas habilidades geométricas no evolucionan adecuadamente y este es uno de los principales problemas, puesto que los procesos memorísticos y de mecanización impiden su desarrollo.

En concordancia con lo anterior, se debe tener presente los Lineamientos Curriculares en Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (MEN,1998), donde sugiere que la enseñanza de la geometría debe estar encaminada a lo que Howard Gardner (2013) planteó para el desarrollo de las múltiples inteligencias, es decir: “Desarrollar la inteligencia espacial como: la intuición, la comprensión, el uso y el reconocimiento de las propiedades de las figuras, además del efecto que ejercen en éstas las transformaciones, hacer uso de la observación para que a partir de las regularidades se pueda llegar a establecer conjeturas, a generalizar, analizar y resolver situaciones problema”. Esto es importante, ya que los lineamientos son herramientas de orientación para el docente en su labor.

Por otra parte, los resultados de las pruebas colombianas para la Evaluación de la Educación, Saber 2019, pruebas internas que se realizaron en la institución Educativa Nuestra Señora del Rosario de Tunja cómo podemos observar en la tabla N1 y por último una prueba diagnóstica realizada a los estudiantes. Nos Arrojan probables resultados de bajo desempeño en el proceso que desarrolla el pensamiento espacial métrico, con objetos tridimensionales para grado noveno.

Esto ocurre debido a que los estudiantes aprenden la geometría de manera mecánica enfocada primeramente a la observación de una representación gráfica, como los elementos básicos de la geometría: punto, recta, segmento, triángulo, cuadrado y círculo. Rojas (2014), argumenta que la geometría no se profundiza adecuadamente en sus aplicaciones, todo esto hace minimizar la comprensión al momento de la conceptualización, por tanto, no es posible desarrollar un adecuado pensamiento espacial. Por estos motivos los estudiantes no desarrollan un adecuado proceso del pensamiento espacial – métrico con objetos tridimensionales de su entorno.

#	DES.	DBA	COMPETENCIAS		COMPONENTES		Porcentajes				
							A	B	C	D	NR
1	4.1	10	C90	Comunicación	G34	Aleatorio	4	22	4	70	0
2	4.1	10	C46	Razonamiento y Argumentación	G34	Aleatorio	4	48	9	39	0
3	4.2	11	C128	Resolución de problemas	G34	Aleatorio	17	43	13	26	0
4	4.2	11	C90	Comunicación	G34	Aleatorio	0	13	74	13	0
5	4.2	11	C90	Comunicación	G34	Aleatorio	4	0	57	39	0
6	5.1	9	C90	Comunicación	G6	Numérico - Variacional	0	0	4	96	0
7	5.1	9	C46	Razonamiento y Argumentación	G6	Numérico - Variacional	65	22	9	4	0
8	5.1	9	C128	Resolución de problemas	G6	Numérico - Variacional	9	26	52	13	0
9	1.1	3	C128	Resolución de problemas	G6	Numérico - Variacional	9	48	9	35	0
10	1.1	3	C128	Resolución de problemas	G6	Numérico - Variacional	13	30	39	17	0
11	2.1	5	C90	Comunicación	G7	Geométrico - Métrico	30	65	4	0	0
12	2.1	5	C46	Razonamiento y Argumentación	G7	Geométrico - Métrico	65	13	13	9	0
13	2.1	5	C128	Resolución de problemas	G7	Geométrico - Métrico	22	9	39	26	4
14	2.1	5	C46	Razonamiento y Argumentación	G7	Geométrico - Métrico	9	9	4	78	0
15	2.1	5	C46	Razonamiento y Argumentación	G7	Geométrico - Métrico	35	13	30	22	0

**Tabla N 1.** Análisis estadístico de grado noveno por desempeños, competencias y componentes.  
Nuestra Señora del Rosario de Tunja. Matemáticas

### **Formulación del problema**

¿De qué manera las situaciones didácticas, implementadas en un contexto específico, permiten fortalecer el pensamiento espacial - métrico a partir de la construcción de objetos tridimensionales derivados del entorno cotidiano?

## Justificación

La finalidad que tiene el siguiente trabajo de investigación, es renovar las estrategias de enseñanza de la geometría; para de este modo volverla un poco más dinámica a la hora de aprenderla y enseñarla. Así mismo mejorar el proceso de pensamiento espacial-métrico, ya que nos brinda herramientas que lo lleven a desenvolverse y dar explicación a su contexto.

En primer lugar, la presente investigación radica su pertinencia en la posibilidad de crear alternativas de orden didáctico que fortalezcan el aprendizaje del pensamiento geométrico, en escalas que rebasen la construcción bidimensional del espacio, así como también en la apropiación y reconocimiento de diversos entornos, fundamentales en la dinámica constructiva de diversas ciencias o campos de saber.

En segundo lugar, para el campo profesional de la enseñanza en matemáticas en especial en geometría es pertinente por cuanto brinda herramientas que contribuyen a la adquisición profunda de conceptos que por sus niveles de abstracción requieren de alternativas pragmáticas y concretas, que a su vez faciliten la posibilidad de crear innovaciones pedagógicas en el ámbito de la didáctica de estos campos teóricos.

Finalmente, esta propuesta busca rescatar un subcampo de la matemática que en los ámbitos de la educación básica se ha visto desplazado por la priorización de campos tales como la aritmética, trigonometría, cálculo, entre otros; dicho desplazamiento ha dificultado el desempeño de los estudiantes no solo en las pruebas saber, sino también en la proyección y la aplicabilidad de dicho conocimiento en otras ciencias. Por tal razón, esta investigación intentó contribuir en el desarrollo

de las capacidades ofreciendo propuestas innovadoras bajo una propuesta didáctica que incorpora una secuencia de actividades para potenciar el proceso de aprendizaje geométrico en el aula, con el objetivo de desarrollar la representación de objetos tridimensionales del entorno.

## **Objetivos**

### **Objetivo general**

Implementar una serie de situaciones didácticas para potenciar el desarrollo del pensamiento espacial-métrico desde la representación de objetos tridimensionales del entorno.

### **Objetivos específicos**

- Identificar las fortalezas y debilidades que poseen los estudiantes para la construcción de figuras tridimensionales del ambiente que nos rodea.
- Aplicar situaciones didácticas que permitan fortalecer habilidades visuales y espaciales en los estudiantes con base en factores del entorno.
- Evaluar los alcances de las situaciones didácticas aplicadas en el proceso de aprendizaje de los estudiantes en el desarrollo de habilidades visuales y espaciales.

## Marco Referencial

En el siguiente capítulo se efectúo una revisión histórica de la geometría, los diferentes trabajos de investigación que hablan sobre la implementación de la teoría de las situaciones didácticas y de las maneras de aprendizaje relacionadas con la enseñanza de la geometría. Esta revisión con la finalidad de lograr una jerarquización adecuada de cada uno de sus antecedentes y partes teóricas para el trabajo de investigación.

### Antecedentes históricos

La geometría tiene un papel principal en las ramas de la matemática, Ávila 2019 afirma: esta rama de la matemática tiene un prestigio de miles de años, por ello es importante hacer un recorrido a través del tiempo para reconocer su importancia en el desarrollo de la humanidad, con el fin de reflexionar sobre la evolución y las diferentes manifestaciones de los conceptos, los procesos y los contextos en los cuales se ha desarrollado la geometría. (p.14)

**Geometría en la Grecia Antigua.** Los griegos quienes acudieron a las escuelas egipcias, estudiaron y perfeccionaron los métodos egipcios, surgidos de la necesidad de medir la tierra y hacer construcciones civiles y llevaron a la geometría más allá del sentido práctico que le dieron las otras civilizaciones, convirtiéndola en una rama del saber intelectual y artístico, y haciendo surgir la trigonometría y la geodesia. (Thompson, 1951).

Entre los matemáticos más destacados se reconoce a Thales de Mileto (640 A. C). quién se dedicó a la geometría y la aplicó a la astronomía, posteriormente, Pitágoras se encargó de investigar sistemáticamente los principios de la geometría y aplicarle métodos lógicos, por otra parte en la escuela Pitagórica mediante el estudio de la estrella de cinco puntas, los Pitagóricos descubrieron muchas propiedades de los triángulos y los pentágonos, los griegos aportaron las mejores demostraciones de proposiciones que ya se conocían, se dice que fue Pitágoras quién primero demostró que “*el cuadrado construido con un lado igual al mayor de los lados de un triángulo rectángulo, tiene un área igual a la suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados son los otros lados del triángulo*”, este es el famoso Teorema de Pitágoras (Thompson, 1951).

Posteriormente Arquitas (400. A.C) continuó la línea pitagórica y resolvió el problema de la duplicación del cubo y fue el primero en aplicar la geometría a la mecánica, por su parte Hipias de Eli (449 -350 A. C) resolvió los problemas de la trisección del ángulo y de la cuadratura del círculo, estas soluciones no se consiguieron con métodos de geometría tradicional pues eran imposibles de resolver con regla y compás, en la investigación de estos problemas también se destacó Hipócrates de Cios quien además descubrió muchas propiedades del círculo y los ángulos y escribió el primer texto de geometría pura. (Thompson, 1951).

Platón y su discípulo Aristóteles se encargaron de difundir y mejorar estos conocimientos en Atenas y fueron quienes formalmente dieron fundamentos lógicos a esta ciencia. (Thompson, 1951)

Euclides (330 – 275 a.c.) escribió su gran obra *Elementos de Matemáticas*, trece libros, de los cuales se destacan los siete primeros dedicados a la geometría “*Elementos de la Geometría*”, en los cuales de manera muy sistemática enunció con precisión los fundamentos, simplificó los resultados y demostraciones de las proposiciones, clasificó, ordenó y enumero los principios fundamentales las proposiciones y las definiciones, además agregó proposiciones de su propia autoría, hasta la época actual este libro ha sido referente para diseñar los libros de geometría elemental. La geometría Euclidiana basa sus construcciones y demostraciones en la circunferencia y la línea recta, (regla y compás), la geometría bajo esa concepción se denomina geometría plana y trata figuras que pueden construirse sobre un plano y cuerpos sólidos compuestos de superficies planas. (Thompson, 1951)

Arquímedes (287 – 212 a.c.). Este matemático usó el método de exhaución como su método de razonamiento en obras: La cuadratura de la parábola, La esfera y el Cilindro, La Medida del Círculo, Las Espirales, Sobre Conoides y Esferoides Arquímedes usó el método para demostrar formalmente las cuadraturas y curvaturas que había concebido a través de su método de exploración mecánica. A pesar de sus múltiples inventos prácticos, mostró en sus escritos que daba más importancia a los principios generales que a las aplicaciones. Autores (Hilbert, (s.f.)) (Klein, (s.f.)) del siglo XX han resaltado la importancia que Arquímedes concedió al principio de Eudoxo en la construcción de las estructuras geométricas. (Thompson, 1951).

Durante la edad media en la geometría no se mostraron sucesos importantes, fue hasta la edad moderna cuando se volvió a prestar atención a los fundamentos lógicos de la geometría y personajes como Descartes (1593-1662) quien retomó los métodos de Euclides y descubrió nuevos

principios, creo fundamentos que luego Juan Víctor Poncelet desarrollaría para crear la geometría proyectiva transformada posteriormente por Monge en geometría descriptiva. (Thompson, 1951). En 1637 Rene Descartes transformó radicalmente la geometría y creó la geometría analítica bajo la introducción de las ecuaciones algebraicas. (Thompson, 1951).

Las culturas precolombinas y de la parte oriental desarrollaban varios tipos de tallados o pinturas en piedras, metales, telas basadas en las transformaciones que realizaban de figuras geométricas a través de traslaciones, rotaciones o simetría (Perero, 1994).

La geometría es una ciencia donde no solo se trabaja transformaciones geométricas, sino que también enseña a medir, se encontraba presente en la península de Yucatán, territorio de la cultura Maya. La serpiente emplumada y las fases de la luna son el punto de partida de esta ciencia de ahí surge el círculo, el cuadrado, el pentágono y las relaciones del número de oro pitagórico. La geometría se desarrolló y floreció de acuerdo a 21 estas formas, y cayó para nunca levantarse, cuando desapareció el modelo crotálico por la conquista española que erradicó sus usos y sus costumbres (Díaz, 1995).

## **Antecedentes teóricos**

Las investigaciones que se presentan a continuación afirman procesos coherentes de la enseñanza y aprendizaje de la geometría en el espacio, donde se tienen en cuenta estudios sobre situaciones didácticas aplicadas en la geometría, estos estudios son de orden tanto nacional como internacional, y se consideran pertinentes para la elaboración de la investigación.

## **Investigaciones relativas al uso de las Teoría de las Situaciones Didácticas**

La siguiente investigación elaborada por Sánchez J. (2016) presenta su trabajo de tesis doctoral, Diseño y estudio de situaciones didácticas que favorecen el trabajo con registros semióticos, donde propone una adecuada actividad matemática y necesariamente genera la articulación y conversión entre los diversos registros de representación con los que podemos hacer referencia a los objetos matemáticos (Registro de la Lengua Natural, Registro Numérico, Registro Tabular, Registro Figural, Registro Geométrico, Registro Algebraico y Registro Gráfico).

La utilización de estos sistemas de representación es esencial para el ejercicio y el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales del alumno, especialmente en la cognición matemática, debiéndose centrar en las transformaciones que se pueden efectuar entre representaciones y dentro de cada una de ellas, y no tanto en las representaciones semióticas empleadas. Por esta razón la investigación se centra en el diseño y desarrollo de ingenierías didácticas sustentadas en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau; dando resultados favorables. A través de un examen inicial u un examen final de los contenidos evaluados mediante el mismo modelo de examen, se han detectado diferencias significativas entre ambos grupos, viéndose una mejora sustancial en el rendimiento de los alumnos del grupo experimental.

De igual manera Silva A (2017) realiza un estudio relacionado con una propuesta didáctica para el fortalecimiento del aprendizaje de los números racionales en el grado 601 a través de la teoría de las situaciones didácticas, cuyo objetivo fue Diseñar e implementar una secuencia didáctica

desde la perspectiva de la teoría de situaciones didácticas, que el aprendizaje de los números racionales. El diseño utilizado en este trabajo fue investigación – acción en espiral según Kemmis y McTaggart, con la finalidad de mejorar la práctica docente y la forma de actuar en el aula de clase.

Participaron 36 estudiantes en donde se identificó, analizó y evaluó básicamente bajo 4 fases las cuales seguían este orden identificación del problema, elaboración del plan de acción, ejecución del plan y evaluación del plan. Esto permitió concluir que la planificación continua de la práctica metodológica y pedagógica con propuestas diferentes hacia los estudiantes generan actitudes positivas y didácticas para una buena comprensión, aplicación e interpretación de los números racionales en la solución de situaciones polémicas de su cotidianidad logrando que se sintieran interesados por aprender y reaprender de los saberes que traían frente a los nuevos saberes.

En la propuesta de zapata (2014) el desarrollo del pensamiento espacial a través del aprendizaje por descubrimiento, permite conducir al estudiante a razonar de manera deductiva y así evidenciar los procesos de pensamiento para adquirir un desarrollo cognitivo, ya no tan efímero y superficial, sino de manera significativa, teniendo en cuenta que a medida que los estudiantes cambian de nivel, se debe tener también un mayor grado de complejidad en la forma como se abordan los diferentes temas, en este caso, los que aborda el pensamiento espacial a fin de lograr el desarrollo de competencias y obtener mejores resultados en las pruebas externas.

El estudio investigativo es de tipo descriptivo, con el fin de centrar las acciones que muestran los estudiantes al momento de desarrollar actividades, argumentado en el marco teórico desde la

propuesta de la teoría del descubrimiento de Bruner (1961), donde se vincula la unidad didáctica que permitirá evidenciar conceptos, teorías y formulaciones. Por último, las conclusiones obtenidas dan por entendido que luego de la implementación y análisis, se reitera la necesidad de darle una mirada objetiva a la enseñanza de la geometría espacial.

### **Investigaciones relativas al uso de la geometría**

En su artículo “*Mathematics in the school* elaborado por Lavicza (2007) trata una introducción basada en la investigación de la geometría euclidiana, se utiliza el software de geometría dinámica GeoGebra, para explorar las definiciones y pruebas de muchos de los teoremas más interesantes en el tema. Algunos conceptos trabajados incluyen centros de triángulo, inscrita, circunscrita y círculos inscritos, medial y triángulos órticos, el círculo de nueve puntos, la dualidad, y los teoremas de Ceva y Menelao, así como numerosas aplicaciones de los teoremas.

En la investigación “*La geometría con Cabri : una visualización a las propiedades de los triángulos*” Alemán (2009), se abordan los procesos que se desarrollan en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en el tema “propiedades de los triángulos”, en el nivel de enseñanza media, cuyo objetivo era explorar las propiedades de los triángulos, favoreciendo la visualización, experimentación y descubrimiento de nuevas relaciones geométricas a través del uso del programa CABRI GEOMETRE, para lo cual se considerara pertinente aplicar esta experiencia con los alumnos de octavo grado del centro de educación básica durante dos meses tiene un enfoque de investigación cualitativa, se realizaron guías para formalizar los conceptos y construcción del conocimiento con los alumnos.

En la investigación *Aprendizaje Significativo en Geometría Para el Grado Octavo*. Ávila, (2019). Tuvo como objetivo diseñar una propuesta de aprendizaje significativo para potenciar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en los estudiantes, Para la elaboración de estrategias para la mejoría en este aprendizaje matemático. Para esta implementación se partió identificando las falencias que presentaron los estudiantes, con el fin de fortalecer los conceptos propios de la asignatura, motivándolos e involucrándolos en el desarrollo de la estrategia, donde una de sus fases fue la observación del contexto y la relación de este con las figuras geométricas conocidas por ellos.

La investigación tuvo un enfoque cualitativo basado en el método estudio de caso, aborda un análisis descriptivo en torno al aprendizaje significativo realizando como propuesta una observación-reflexión, planeación-acción seguido de la observación-reflexión, Con la aplicación de la propuesta de aprendizaje se crea aprendizaje consciente, comprometido y disciplinado donde el estudiante aprende a aprender, aprende activamente, realiza mejoras continuas en su proceso cognitivo adquisitivo creando así compromiso claro en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Jiménez y herrera, (2017) elaboran una reflexión docente sobre situaciones problema para desarrollar el pensamiento matemático, esta investigación identificó que la mayoría de estudiantes de los grados tercero y quinto de la I.E. Antonio Ricaurte de Santana - Boyacá, presentaron debilidades en las diferentes competencias y componentes que evalúa el ICFES. Además, por medio de esta reflexión se reconoció, que los docentes no orientan en su totalidad, algunos

contenidos y conceptos necesarios. Ante esta situación, se centralizó la investigación en el docente, dando gran importancia a su reflexión para (re)significar sus prácticas de aula.

El método que implementaron fue la investigación acción la cual adoptó el modelo de Kemmis, y el usó de taller investigativo como técnica, en el cual participaron tres docentes de grado tercero y una docente de grado quinto, quienes orientan el área de matemáticas en primaria. Se desarrollaron secuencias didácticas y centros de aprendizaje, lo que permitió: integrar los contenidos de los pensamientos que poco se orientaban, trabajar con los estudiantes de manera transversal diferentes pensamientos, fortalecer en los estudiantes las estrategias de comprensión, el desarrollo de competencias matemáticas y la construcción de conceptos. Finalmente se concluye que un proceso crítico y reflexivo, es el camino para la transformación educativa.

## **Marco Teórico**

En este capítulo se presenta la base teórica para el aprendizaje por medio de situaciones didácticas, como metodología que facilita la reflexión sobre la evolución y las diferentes manifestaciones de los conceptos, los procesos y los contextos en los cuales se ha desarrollado la geometría. Además, se pretende una aproximación teórica de los diferentes referentes de la educación en cuanto a la didáctica de las matemáticas y aspectos que aportan los elementos pedagógicos didácticos. De modo que, favorezca el desarrollo de las habilidades geométricas en sólidos regulares y su enseñanza para los estudiantes.

## **Competencia matemática**

Conforme avanzan las sociedades los modelos epistemológicos cambian teniendo en cuenta las tendencias nuevas en la filosofía de las matemáticas, donde se deben adoptar los siguientes supuestos. Ausubel (1983) afirma: Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos. (p,49)

En este sentido forman parte de la competencia matemática los siguientes aspectos: La habilidad para explicar y como se explica para dar claridad y precisión a informaciones, datos y argumentaciones, lo que incrementa la posibilidad real de seguir aprendiendo en el transcurso de

la vida. como segundo aspecto se debe tener en cuenta los conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana.

La puesta en práctica de estos procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de diversas soluciones. Generan disposiciones de los estudiantes y progresiva seguridad, confianza hacia la información y las situaciones que contienen elementos o soportes matemáticos cuando la aplicación lo amerita , basadas en el gusto por descubrir y validar su conocimiento a través del razonamiento.

Esta competencia cobra realidad cuando los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan. Los estándares básicos de competencias en matemáticas plantean: El desarrollo en la educación obligatoria se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana. (p.52)

Para el desarrollo de la competencia matemática, necesitamos involucrar los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y resolver problemas de situaciones cotidianas involucrando el pensamiento geométrico. Es decir, aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático. Además para el desarrollo de pensamiento matemático tenemos que involucrar la labor que desempeña el docente quien tiene un papel importante como

mediador para dar o construir una mejor y contundente respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad.

### **Aprendizaje en matemáticas**

No todos los autores están de acuerdo en lo que significa aprender matemáticas, ni en la forma en que se produce el aprendizaje. Soto (2017), refiere a que la mayoría tiene una idea en común la cual refiere en que el aprendizaje en matemáticas se realiza en dos ámbitos uno conductual y otro cognitivo donde la adaptación al medio, una situación concreta, y los conocimientos se adquieren por progresos que suponen rupturas cognitivas. Es decir, estos conocimientos son discontinuos y generan cambios de modelos implícitos y de concepciones.

Por estas justificaciones podemos hablar de Brousseau (1983) el cual afirma que la concepción del aprendizaje se apoya básicamente en tres principios:

1. El aprendizaje es un proceso de construcción del conocimiento, pero no es de memorización, ni procesos mecánicos pues genera retención y absorción de conceptos.
2. El aprendizaje es dependiente del conocimiento previo del alumno, ya que emplea el conocimiento que ya posee para construir conocimientos nuevos.
3. El alumno es consciente de sus progresos cognitivos, y puede llegar a controlarlos, aumentarlos o regularlos.

Es decir que el aprendizaje resulta ser el proceso propio de construcción significativa del conocimiento, pero a su vez puede darse un proceso colectivo esto con el fin de generar una participación activa de los estudiantes, en vez de una simple recepción de normas y conocimiento objetivado. según (Bauersfeld, 1994). El desarrollo individual de construcción de conocimiento se basa en la participación de los alumnos en las actividades de la sociedad, como parte de ella que son. Además, de esta manera se pretende que la resolución de problemas y sobre todo el saber cómo enfrentarse a estas situaciones problemáticas constituyen un vínculo excelente para la formación de conceptos matemáticos (D'Amore 1997).

## **Geometría y pensamiento espacial**

Según Schulmaister (2008), la geometría es la parte más concreta de las matemáticas, tangible, intuitiva y llevada a la realidad. Ha sido estudiada por más dos mil años, en niveles crecientes de rigor, abstracción y generalidad. Algunos conocimientos de formas y ubicación espacial son primordiales y se han desarrollado o aprendido desde la infancia, esto debido a la experimentación con el contexto. Los niños generan conocimiento a través de las primeras figuras básicas que van reconociendo como el cuadrado, triángulo y el círculo. Luego en el colegio estos procesos se van fortaleciendo. Por esta razón la geometría es una herramienta que sirve para reconocer, entender, analizar y apreciar el mundo en el cual vivimos.

Lo cual conlleva a una apreciación de toda la naturaleza que está constituida por diferentes formas geométricas. la geometría nos brinda un medio para desarrollar el pensamiento espacial; según MEN(1998) en los Lineamientos curriculares, denotan que cuando hablamos de

pensamiento espacial involucra el desarrollo de la percepción espacial y de las intuiciones sobre las figuras bidimensionales y tridimensionales, es decir el trabajo con objetos bidimensionales y tridimensionales y sus movimientos y transformaciones permite integrar nociones sobre volumen, área y perímetro, lo cual a su vez posibilita conexiones con los sistemas métricos o de medida y con las nociones de simetría, semejanza y congruencia, entre otras.

Así, la geometría activa se presenta como una alternativa para mejorar el pensamiento espacial, la comprensión y uso de las propiedades de las figuras y las interrelaciones entre ellas. Paz (2017), afirma que el efecto que ejercen sobre ellas las diferentes transformaciones, el reconocimiento de propiedades y las relaciones e invariantes a partir de la observación de regularidades conduce al establecimiento de conjeturas y generalizaciones, el análisis y resolución de situaciones problema que propician diferentes miradas desde lo analítico, desde lo sintético y lo transformacional.

Así mismo, desde los Lineamientos Curriculares, se propone mejorar este tipo de pensamiento espacial para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios. Este manejo del pensamiento espacial fortalece procesos para los estudiantes que desean estudiar una profesión como la arquitectura, la aviación, la ingeniería, el diseño, el dibujo técnico, el desarrollo de juegos, entre otros. Por esta razón se espera que la geometría no siga siendo dejada a un lado en los currículos de matemáticas.

El Ministerio de Educación, desde los Lineamientos Curriculares, propone aspectos a tener en cuenta en estos procesos de enseñanza y aprendizaje; así mismo, define el significado del pensamiento espacial en los sistemas geométricos de la siguiente forma: En los sistemas

geométricos se hace énfasis en el desarrollo espacial, el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construye y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y diversas traducciones a representaciones materiales (Lineamientos curriculares MEN, 1998, p.37)

El estudio del pensamiento espacial, como lo plantea los Estándares Básicos de Competencias MEN (2006), es más perceptible cuando utiliza y comprende la geometría para desarrollar actividades en diferentes áreas del conocimiento, como las artes, el diseño, las construcciones físicas, los deportes, las danzas, para entender fenómenos naturales y muchos otros. Dentro del desarrollo del pensamiento espacial, entender las formas tridimensionales se hace de vital importancia, ya que estas hacen parte del espacio que nos rodea. Esto genera que sea imprescindible poderlas reconocer, entender, analizar y representarlas. El Ministerio de Educación Nacional de Colombia, tanto en sus Lineamientos Curriculares MEN (1998), como en los Derechos Básicos de Aprendizaje DBA (2016), proponen que, desde los últimos grados de primaria, los estudiantes empiecen a identificar las figuras en tres dimensiones, además que puedan describirlas desde diferentes posiciones y puntos de vista.

### **Resolución de problemas y desarrollo de competencias**

En el pensamiento matemático una de sus principales preocupaciones es la resolución de problemas y esto está en sintonía con el instinto natural del niño a realizar preguntas y a buscar respuestas. Iriarte, (2011) propone: La educación ha generado en las últimas décadas investigaciones pertenecientes al campo cognitivo y curricular, interesándose en los aspectos

pedagógicos y didácticos. Teniendo esto presente, las estrategias didácticas están dirigidas con el objetivo de que el estudiante sea un sujeto activo en el proceso de aprender. Específicamente en la educación matemática; esto abordando o teniendo en cuenta los diferentes procesos generales, tales como: el razonamiento, la modelación, la comunicación matemática, la formulación y resolución de problemas contextualizados.

La resolución de problemas ha tomado fuerza en el campo investigativo, debido a la importancia que esta tiene en el desarrollo de competencias para la vida, de esta manera es como en diferentes documentos, resaltan su valor y la necesidad del desarrollo de esta competencia. Para ello se refleja en: (Informe Cockcroft, 1982; PISA 2006; Lineamientos Curriculares de Matemática,1998). Donde la resolución de problemas tiene una justificación que pretende evidenciar, mediante experiencias de aula, que la estrategia metodológica de Resolución de Problemas planteadas por Pólya (1965), desarrolla competencias básicas, genéricas y específicas. Por esta razón, las nociones matemáticas más básicas se apoyan y se construyen partiendo de situaciones problemáticas, que ofrecen y dan la oportunidad de verificar qué estrategias resolutivas utiliza y cuáles son las dificultades que se pueden llegar a encontrar (D'Amore 1997).

El proceso de resolución de problemas al utilizarse como recurso metodológico, propone según callejo (1998): el desarrollo de las capacidades de los estudiantes, esta guiado desde una reflexión y valoración continua que van dando cuerpo a la toma de decisiones de manera estratégica. De hecho, la capacidad para resolver problemas integraría a todos los demás, ya que cuando resolvemos problemas ponemos en juego la mayor parte capacidades deseables en un matemático. (García, 1992). “Resolver problemas es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente

camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no se consigue de forma inmediata, utilizando los medios adecuados”

Cuando hablamos de resolución de problemas debemos tener presente lo que argumenta Polya, (1981) en donde él define que los problemas tienen que ser vistos como situaciones reales, para nuestro desenvolvimiento en la vida misma. (Iriarte 2011). Concluye que se resuelven mediante un proceso razonado con el fin de que los alumnos se cuestionen, experimenten, hagan conjeturas y ofrezcan explicaciones. Ahora bien, con respecto a la competencia matemática. De igual manera. Vasco (2006) resalta que: en esta sociedad globalizada, se requiere cada vez más de herramientas proporcionadas por las matemáticas y relaciona la resolución de problemas, desde el desarrollo de diferentes conocimientos declarativos, procedimentales y actitudinales, que se interaccionan para desempeñarse en este campo.

## **Didáctica de la matemática**

La didáctica de la matemática es una disciplina del conocimiento que se ocupa de los diferentes fenómenos que se presentan en el saber matemático. Pero esta disciplina ha evolucionado constantemente cuando se habla de enseñanza. La palabra didáctica. Proviene del griego *didasko*. Que significa “arte de enseñar”. Según Ian Amos Comenius cuando introdujo esta palabra en su obra “Didáctica Magna”.

Esta disciplina llamada didáctica puede ser determinada como la ciencia del aprendizaje y la enseñanza. Dentro de esta ciencia de la enseñanza y aprendizaje es necesaria la combinación del

hacer y el saber didáctico, es decir, la teoría y la práctica. Heinz Griesel, pedagogo alemán define: “La Didáctica de las Matemáticas es la ciencia del desarrollo de las planificaciones realizables en la enseñanza de la matemática”. Hasta aquí, podemos asociar el término didáctica como sinónimo de metodología. según (Vidal, 2009). la didáctica de la matemática son las secuencias de enseñanza, a la elaboración de guías; es decir, nuevamente se reduce al método. en efecto, cuando dialogamos de material didáctico lo realizamos utilizando “ didáctico” como un adjetivo.

Es de aclarar que el 100% de la teoría no es posible ser llevada a cabo, es decir que puede ser aplicable a la realidad. En los años 70' surge en Francia la acepción de “Didáctica de las Matemáticas” por el docente investigador Guy Brousseau pionero de la didáctica de las matemáticas, quien le da vida a esta nueva disciplina científica que estudia la comunicación de conocimientos y de sus transformaciones, teoría para comprender las relaciones que operan en el aula durante los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Brousseau expresa que por medio de una epistemología experimental que intenta teorizar sobre la producción y circulación de los saberes. Hace que su campo de estudio corresponda a los fenómenos que ocurren en la enseñanza de la matemática, relacionados con los estudiantes, la teoría o saber y los agentes educativos. esta parte epistemológica de la didáctica posee tres etapas según diferentes acepciones de la palabra didáctica:

- **Etapa Antigua:** En la cual hace referencia a solo el docente quien era el que dominaba muy bien su disciplina y lo didáctico se les atribuía a sus cualidades o estrategias de como enseñaba.

• **Etapa Clásica:** En la cual hace referencia a una participación más activa sobre la investigación de los procesos de enseñanza y aprendizaje en matemáticas. Los estudios realizados son liderados por la psicología de la educación, con aportes de otros teóricos como: Piaget, Vygotsky, Ausubel, entre otros, a tal punto que incluso se publican libros con el nombre de Didáctica de las Matemáticas, que se refieren a estos estudios o bien a estrategias metodológicas basadas en estas ideas.

• **Etapa actual:** En la cual se inicia a concebir la Didáctica de las Matemáticas como ciencia, en la que no sólo se considera los aportes de la etapa clásica (desde otras disciplinas) sino que se abordan fundamentalmente y como punto de inicio, las propias matemáticas.

Por tanto, para investigar en Didáctica de las Matemáticas, es necesario contar con un equipo multidisciplinario con expertos en matemáticas, pero vistas desde distintas disciplinas. Soto, (2017). Concluye que la acepción de didáctica es específica de la disciplina, y, por tanto, no se sostiene la idea de una didáctica general, sometida a la pedagogía, sino al conjunto de didácticas (de la matemática, de la física, de la biología, de la historia, etcétera), que tienen su particularidad en los problemas que emergen de sus propios objetos de conocimiento, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de éstos. Hay que notar que el campo metodológico acá resulta ser parte de la Didáctica de las Matemáticas, pues el término “didáctica” aparece como sustantivo.

### **La Didáctica de la Matemática de la Escuela Francesa.**

La denominada “escuela francesa de Didáctica de la Matemática” nació en los años setenta, en 1973 se celebró un coloquio titulado veinte años de la didáctica de las matemáticas en Francia: homenaje a Guy Brousseau y Gerard Vergnaud. En esta fecha nace la asociación francesa de investigadores en didáctica de matemáticas. Esta escuela trabaja por descubrir, analizar e interpretar los fenómenos y procesos ligados a la adquisición, comprensión y a la transmisión del conocimiento matemático.

En esta escuela se trabajan dos perspectivas epistemológicas, pero cada una con sus características propias. Por un lado, la corriente que dice que la identificación e interpretación de fenómenos y procesos del cual es objeto de interés, supone el desarrollo de un cuerpo teórico, y no puede reducirse a observaciones realizadas a partir de experiencias aisladas, ni de cuestionarios de opinión; y por otro lado, la convicción de que la teoría a trabajar debe ser de carácter específico y solo del saber matemático, y no puede provenir de la simple aplicación de una teoría ya desarrollada en otros dominios.

### **Teoría de las situaciones didácticas.**

La teoría de las situaciones es desarrollada por Guy Brousseau la cual está dentro de la disciplina de la didáctica de la matemática de la escuela francesa. Se trata de una teoría de la enseñanza, que busca las condiciones para una Génesis artificial de los conocimientos matemáticos. Esta teoría de las situaciones fue retomada, reformulada y enriquecida por la

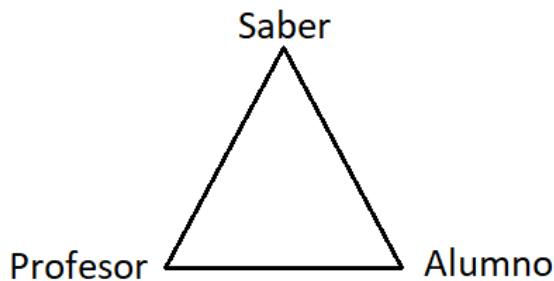
comunidad de investigadores de la comunidad francesa de didáctica de la matemática. Ubicándonos en la didáctica de la matemática, como sentido moderno como disciplina científica.

La noción de situación para Brousseau corresponde o propone un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Además, la teoría de situaciones está sustentada bajo una concepción constructivista del aprendizaje, concepción que es caracterizada por Brousseau (1986) de esta manera: El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje.

Este modelo nos lleva a pensar la enseñanza como un proceso centrado en la producción de conocimientos matemáticos nuevos en el ámbito escolar. En el momento que se produce conocimiento se debe establecer nuevas relaciones, como transformar y reorganizar otras. Esto implica que los conocimientos que se producen tienen que ser validados, según las normas y los procedimientos aceptados por la comunidad matemática.

Algunas de estas “situaciones” requieren o necesitan de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero existen algunas situaciones que ofrecen la posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso “genético”. (Vidal, 2009).

Por **situación didáctica** se entiende que es una situación construida para la interacción de un sujeto con cierto medio. Esta situación es elaborada con toda la intención del profesor con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado o en vías de construcción. Además, Brousseau, en 1982 propone que, para la construcción de una situación didáctica esta debe ser planificada: primero se debe tener en cuenta actividades problematizadoras cuya necesidad de ser abordadas para llegar a una solución, implique la emergencia del conocimiento matemático que de cierta manera da sentido a la clase, la que ocurre en el aula, en un escenario llamado triángulo didáctico. Este triángulo manifiesta las interacciones entre tres protagonistas de acuerdo a los vértices del triángulo.



**Figura 1.** Triángulo didáctico. Elaboración propia

**El medio didáctico aparece como la intersección de las interacciones que se producen entre el saber, el alumno y el profesor.**

Cuando se trabaja con una situación didáctica cualquiera, surgen “momentos”, los cuales son una necesidad de aprendizaje denominados como situaciones **a- didácticas**, estas presentan características debido al trabajo que realiza el alumno, definida así por Brousseau (1986): afirma los momentos van creciendo debido a la interacción del alumno con el problema propuesto, de

igual manera por medio de la socialización o discusión con sus compañeros frente al problema. Es decir, cuando interactúa con el medio o situación planteada por el docente.

El profesor debe estar a la expectativa de que el alumno verdaderamente se responsabilice por trabajar en él y si no llega a su solución, debe por lo menos dar ciertas aproximaciones para cumplir los objetivos propuestos. por esta razón, en estas situaciones a- didácticas el interés que genera en la investigación planteada es la observación, para reconocer estrategias que manejan los estudiantes o como busca maneras para llegar a una solución del problema que se le ha planteado.

El profesor debe tener ya planificado la situación didáctica, de modo que nacen estos momentos. “situaciones a- didácticas” en que los alumnos deben interactuar con el problema, para que se propicien conflictos cognitivos, de esta manera se propicie la discusión, el debate y la socialización de preguntas. Por tanto, el papel que el docente desempeña es guiar e intervenir en este proceso dando señales, ayudas, creando interrogantes y respuestas. Pero sin dar conclusiones finales para llegar a la solución del problema. A este proceso dialectico Brousseau le llama Proceso de Devolución.

Este rol del docente es muy importante y Panizza (2003), nos brinda un ejemplo en este proceso indicando: “El maestro se pregunta ¿qué se puede decir? Lo que se puede es alentar la resolución, decir que hay diferentes maneras de resolverlo, anunciar que luego se discutirán, recordar restricciones de la consigna (por ejemplo, si están trabajando sobre las propiedades de un cuerpo, decir “recuerden que no vale armarlo”), etc. Estas intervenciones estarán pensadas para mantener y motivar a los estudiantes a estar en la tarea.

El rol del docente debe tener en cuenta que el aprendizaje no se da de la misma manera en todos.

Ante esta realidad el maestro tiene dos opciones:

- Utilizar las diferencias que se le presentan como un potencial que trae diversos talentos al grupo y que beneficia a todos.
- Tratarlas sólo de manera superficial, o ignorarlas, y perder la gran oportunidad que brinda la diversidad.

Es necesario que el docente pueda crear en el aula una atmósfera que invite a todos a investigar, a aprender, a construir su aprendizaje, y no sólo a seguir pasos necesarios que propone el docente.

El rol del docente no es sólo brindar información y controlar la disciplina, sino ser un vínculo apropiado entre el estudiante y el ambiente. Dejando de ser el principal protagonista del aprendizaje para pasar a ser el guía o acompañante de los estudiantes.

Pero ¿cómo se puede lograr? Brooks y Brooks (1999), proponen una serie de características que conforman el perfil de un maestro que se considera propicio para atender a la diversidad que se encuentra dentro del aula de clase y de este modo tomar ventaja de la riqueza que esta diversidad aporta al ambiente de aprendizaje.

En una situación didáctica, se debe estar de acuerdo en que el profesor y el estudiante afirman conocer lo que espera el uno del otro y el cómo lo llevan a cabo. De esta manera se da el contrato didáctico. Sin embargo, a medida que se realiza la situación planteada, esta comienza a evolucionar produciendo cambios en el contrato, generando nuevas situaciones didácticas y a- didácticas según los pactos establecidos.

Es así como unas secuencias de situaciones didácticas van conduciendo a otras. Sadovsky, (2005). Afirma: **el contrato didáctico** “tradicional”, consiste en que el docente es el único sabedor de la verdad, el que decide que está bien o está mal, el docente es el que enseña y el alumno es quien se encarga de anotar lo que el docente dice. Este contrato, en definitiva, es contradictorio a un modelo de clase basado en situaciones a-didácticas. Vidal, afirma: “Otro aspecto del contrato tradicional y que es anómalo por cierto, es la confianza que tienen los estudiantes al concebir que el profesor siempre les dará problemas que se pueden resolver y que además deben resolverlos como él lo desea, generalmente de una sola manera.”

Por esta razón es necesario utilizar un contrato en el que el profesor puede dar problemas que tengan una, ninguna, muchas o infinitas soluciones y que sean los mismos estudiantes que lleguen a esas conclusiones, los estudiantes están acostumbrados a preguntar. ¿siempre se hace así? Esperando encontrar un patrón o una regla general para resolver todo tipo de problema similar. como ocurre en la habitual enseñanza y aprendizaje de las rutinas, que por cierto se ha tomado a las matemáticas en el aula, despojando al aprendizaje por descubrimiento en último plano.

A continuación, se plantean dos ejemplos de rupturas de contrato didáctico dados por Montoya, (2001): Ejemplo 1: El profesor trata de resolver un problema en forma oral y en conjunto con sus alumnos. Se esfuerza de suscitar la iniciativa y participación de ellos, y le gustaría recibir rápidamente ideas, sugerencias (aunque sean erróneas) que sirvieran de punto de partida, para ensayos o conjeturas. Pero el curso permanece ¡desesperadamente mudo! Los alumnos han

confundido esta situación con la de una interrogación oral? En la situación descrita los alumnos no saben a qué juego se juega.

Ejemplo 2: El profesor propuso un ejercicio al curso (considerado débil en su conjunto) y trata de recoger ideas para partir o enfocar el problema. Un alumno hace una intervención claramente perdida. El profesor le pide que escriba su proposición en el pizarrón y se apresta a suscitar una crítica con todo el curso. Pero el inspector general, presente en la sala, que no había captado hasta ese momento qué tipo de contrato didáctico estaba en juego, no pudo sobreponerse a su impaciencia. Salió a la pizarra y en algunos segundos explicó que la frase escrita era una estupidez y propuso inmediatamente una lista de contraejemplos, que el profesor se proponía justamente hacer que los alumnos descubrieran por sí solos. De este modo el ejercicio se terminó antes de haber comenzado.

Este contrato didáctico tiene un papel muy importante. Vidal (2009), afirma: El contrato didáctico también juega un rol primordial en los exámenes o concursos. En una prueba se califica como excelente sólo al que resuelve correctamente. En contraste, en la Agrégation en Mathématiques, de Francia -concurso en el que participan profesores para hacer clases en los distintos niveles educativos y que son sometidos a resolver problemas de matemáticas para obtener una plaza de trabajo-los estudiantes saben que, tratando inteligentemente un problema, aunque sea la mitad, pueden obtener una excelente nota.

Esto se puede evidenciar de igual manera aquí en Colombia, en donde su puntuación se plantea a través de la efectividad de sus respuestas, además se evalúan las aptitudes, experiencia, competencias,

relaciones interpersonales y condiciones de personalidad de los aspirantes a ocupar cargos en el área de matemáticas.

Brousseau propone un modelo desde el cual pensar la enseñanza como un proceso centrado en la producción de conocimientos matemáticos nuevos en el ámbito escolar. En el momento que se produce conocimiento se debe establecer nuevas relaciones, como transformar y reorganizar otras. Esto implica que los conocimientos que se producen tienen que ser validados, según las normas y los procedimientos aceptados por la comunidad matemática. Además, toma las hipótesis centrales de la epistemología de Jean Piaget como marco para modelizar la producción de conocimientos. Sostienen al mismo tiempo que el conocimiento matemático se va constituyendo esencialmente a partir de reconocer, abordar y resolver problemas generados a su vez por otros problemas. (Sadovsky,2005, p2).

### **Tipos de Situaciones a-didácticas**

Brousseau determina las situaciones didácticas, en distintos "momentos" para la aprehensión de un conocimiento. Estos momentos son:

- **Para el alumno:**

Situaciones de Acción.

Situaciones de Formulación.

Situaciones de Validación.

- **Para el profesor:**

Situación de Institucionalización.

Para exemplificar cada uno de estos momentos, se tomará como ejemplo el ejercicio matemático denominado "la Carrera a 20". Esta es una situación didáctica que su finalidad es decir 20, empezando por 1 o 2, luego el rival le suma 1 o 2 al número dado por su contrincante y así se intercambian los turnos hasta que el que dice 20 gana.

### **1. Situación de acción.**

Las situaciones de acción son aquellas relaciones establecidas entre los estudiantes y un medio en general sea: material, o simbólico. la situación requiere solamente la puesta en acto de conocimientos implícitos por parte del estudiante, abordando el problema de manera individual. Los estudiantes deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.

Este juego debe ser desarrollado por parejas, los estudiantes deben establecer quien inicia primero e iniciar hasta que se determine un ganador, basándose en la regla general de sumar 1 o 2 unidades al número dicho por su adversario. Los estudiantes hacen pequeños análisis que les permiten decidir qué número jugar, por medio de constantes retroalimentaciones que se presentan como consecuencia de repetir el juego una y otra vez.

En esta etapa es donde los estudiantes experimentan y juegan con opciones con un único objetivo, ganar. Cuando ocurren varias jugadas, en las que ganan y pierden, el alumno comienza a tratar de buscar estrategias, patrones o pistas para ganar. Por ejemplo, si juega y llega a 17 se dará cuenta que ya ha ganado pues la única opción que le queda a su oponente es decir 18 y 19 para el ganador decir 20, así sucesivamente van encontrando más pistas que asegure pueda tener una relación exitosa con su estrategia o sirva para que la modifique.

De esta manera emerge la dialéctica de la acción, una secuencia (según Brousseau) de interacciones entre el alumno y el medio. Se prefiere usar la palabra "dialéctica", ya que es más que una interacción. El alumno puede jugar con los resultados de su decisión y sus estrategias son teoremas que se comprobarán o se derrumbarán por la experiencia, en una suerte de diálogo con la situación.

## **2. Situación de Formulación**

Los estudiantes pasan al tablero teniendo en cuenta el número de partidas ganadas, se divide en dos partes. En la primera parte el estudiante que no está en el tablero recoge toda la información de lo que observa en las jugadas de los representantes en el tablero, mientras que el niño que juega en el tablero, están en la situación didáctica de acción.

En la segunda parte, cada estudiante que está sentado debe explicar la estrategia que propone, poniéndola en discusión con los demás, apostando por ganar. Su único medio de acción es formular estrategias. Brousseau 1986 afirma: "La situación de formulación consiste en un trabajo en grupo,

donde se requiere la comunicación de los estudiantes; esto es, compartir experiencias en la construcción del conocimiento". Las cuales les implementara el estudiante que está en frente, Se recibirán dos retroalimentaciones para el alumno proponente: una de sus compañeros de equipo que cuestionarán la propuesta y otra proveniente de las jugadas en el tablero que le darán o no razón a su proposición. El proceso asociado a este momento es la dialéctica de la formulación.

### **3. La situación de validación.**

En la fase de validación el trabajo es de forma colectiva, es decir, una vez que los estudiantes han desarrollado sus actividades de forma individual pasan a formular y reformular para así, validar sus ideas de forma grupal. Aquí interviene el medio didáctico, se pone a juicio de un interlocutor el producto obtenido de esa interacción. Brousseau 1986

En esta fase se pone en práctica la dialéctica de la Validación. En ésta, la tarea del estudiante consiste en justificar las declaraciones formuladas en las anteriores fases o etapas anterior como, por ejemplo: "hay que jugar 11", "yo jugué 11 y perdí". Para ello relaciona estas fases y explica por qué se produjeron. Así, cada estudiante debe poder refutar una razón que considere como falsa, con algún argumento como un contraejemplo. En esta fase no se aconseja la discusión inminente del profesor - alumno, ya que implícitamente está presente su autoridad, la que desfavorece la simetría de las posiciones que deben tener los sujetos que discuten.

#### 4. Situación de Institucionalización

La institucionalización del saber representa una actividad de suma importancia en el cierre de una situación didáctica. En esta los estudiantes ya han construido su conocimiento y simplemente el docente retoma y formaliza, aporta observaciones y clarifica conceptos ante los cuales la situación tuvo problemas. Brousseau 1986

En esta etapa se tienen en cuenta a las anteriores etapas, pero es el profesor quien está al mando. Antes de finalizar una situación didáctica, en que los estudiantes han pasado por las situaciones de acción, formulación y validación, el profesor debe formalizar conclusiones finales a las que los estudiantes han podido llegar a medida de cada fase, de modo de despersonalizarlas, descontextualizarlas y dejarlas como un saber general que permita ser evocado como conocimiento previo para otro saber o bien para asimilarlo con otro saber, esto es, relacionarlo en el futuro. Sin la institucionalización, lo más probable es que los estudiantes se queden en la actividad puramente lúdica y no logren extraer la intención u objetivo de la situación didáctica.

Por otra parte, debemos resaltar la aplicación del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. la importancia de estudiar geometría y lo que esto significa para la sociedad moderna; El Modelo de Van Hiele explica la evolución del razonamiento geométrico a través de cinco niveles consecutivos y del apoyo que brindan sus fases a la organización del currículo, así como a partir de una comparación con la teoría del desarrollo de Piaget.

## **Constructivismo**

El Constructivismo como corriente pedagógica para la enseñanza en este caso de las matemáticas es muy coherente con la Pedagogía Activa; se interesa por las condiciones en las cuales la mente realiza la construcción propia de conceptos matemáticos, por la forma como los organiza en estructuras y por la aplicación que les da; todo ello tiene consecuencias inmediatas en el papel que juega el estudiante en la responsabilidad que conlleva la generación y desarrollo de sus conocimientos. No alcanza con que el docente haya hecho las construcciones mentales; pues cada estudiante necesita a su vez realizarlas; en eso nada ni nadie lo puede reemplazar. (Lineamientos curriculares MEN, 1998, p. 11) Al igual que lo mencionado anteriormente por D' Amore, Chevallard y Duval, para quienes los procesos de enseñanza aprendizaje en el constructivismo se centran en el sujeto, el docente tiene la función de crear un entorno colaborativo para que los estudiantes participen activamente en su propio aprendizaje. Se resaltan otros autores reconocidos dentro de esta corriente pedagógica, quienes muestran algunas diferencias en sus teorías, pero las cuales tienen un mismo objetivo, el involucrar de forma efectiva al niño para que llegue a los aprendizajes que se pretenden en el marco de este trabajo de investigación.

## **Los niveles de Van Hiele para la enseñanza de la Geometría.**

De acuerdo con Crowley (1987) y Jaime (1993), El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele explica cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico en los estudiantes categorizándolos en cinco niveles consecutivos: la visualización, el análisis, la deducción informal, la deducción formal y el rigor. Los cuales se repiten con cada aprendizaje nuevo, el estudiante se

ubica en un nivel dado al inicio del aprendizaje y, conforme vaya cumpliendo con un proceso, avanza al nivel superior.

De acuerdo con Jaime (1993), el modelo de Van Hiele abarca dos aspectos básicos, el descriptivo es importante porque mediante este se identifican diferentes formas de razonamiento geométrico de los individuos y se puede valorar su progreso. A su vez el instructivo marca pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en el nivel de razonamiento geométrico en el que se encuentran.

El modelo de Van Hiele ayuda a explicar la propuesta de investigación, en el proceso de aprendizaje de la geometría, el razonamiento geométrico de los estudiantes, ya que transcurre por una serie de niveles. Vargas (2013) afirma: El modelo de van hiele distribuye el conocimiento en cinco niveles de razonamiento, secuenciales y ordenados. Dentro de cada nivel propone una serie de fases de aprendizaje que el estudiante debe cumplir para avanzar de un nivel a otro, lo que constituye la parte instructiva del modelo. (p.82)

La caracterización del modelo de Van Hiele se elabora a través de 5 niveles, respecto de los que no hay un convenio establecido en cuanto a su numeración: algunos autores hablan de los niveles del 0 al 4 y otros los enumeraran del 1 al 5. Se tomo principalmente de Jaime (1993).

**Nivel 1: Reconocimiento o visualización.** Los alumnos bajo la guía del profesor identifican las figuras por su forma, sin que las propiedades de éstas jueguen un papel importante en el reconocimiento. Este proceso de razonamiento sobre objetos matemáticos básicos (formas o figuras simples) se lleva a cabo mediante consideraciones visuales de los objetos como un todo.

(Burger y Shaughnessy, 1986). Las figuras geométricas tales como cuadrados, triángulos, rectángulos, circunferencias, se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus propiedades y componentes.

**Nivel 2: Análisis.** Los alumnos identifican una figura mediante sus propiedades, las cuales se consideran independientes unas de otras. En este proceso de razonamiento los estudiantes son capaces de descubrir y generalizar propiedades que aún no conocían, este nivel se lleva a cabo a través de la identificación de los componentes y atributos de las figuras.

**Nivel 3: Deducción informal u orden.** Los estudiantes que se encuentran en este nivel son capaces de formular definiciones abstractas, es decir, adquieren la habilidad de conectar lógicamente diversas condiciones necesarias y suficientes que debe satisfacer una clase de figuras geométricas, además de reconocer cómo unas propiedades de los objetos geométricos se derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones. Los estudiantes son capaces de formular justificaciones informales de resultados matemáticos. En este nivel el significado intrínseco de la deducción, es decir, el papel de los axiomas, definiciones y teoremas no se comprende completamente. (van Hiele, 1999).

**Nivel 4: Deducción.** Los estudiantes logran con plena capacidad probar teoremas deductivamente y establecen relaciones entre teoremas. Entienden la necesidad de justificar deductivamente resultados matemáticos o proposiciones, con base en un sistema axiomático. El alumno es capaz de demostrar un resultado de diferentes formas.

**Nivel 5: Rigor.** Los estudiantes logran establecer teoremas en diferentes sistemas axiomáticos y analizan o comparan esos sistemas. Además, el niño es capaz de realizar deducciones abstractas. El razonamiento geométrico en este nivel es bastante abstracto y no necesariamente involucra el uso de modelos pictóricos o concretos. En este nivel los postulados o axiomas son objeto de análisis y escrutinio, esto genera una visión globalizadora del área que está estudiando.

De esta manera, la teoría de situaciones didácticas y el modelo de van Hiele son utilizados como herramientas teóricas, las cuales nos permitirán conocer cómo el estudiante construye el concepto y razonamiento de algún tema en específico, se trata de que se reconozcan patrones para la solución de un problema por medio de la experimentación.

### **Teoría del desarrollo de Piaget.**

La teoría de Piaget explica como el desarrollo cognitivo del niño se va dando por procesos de cambios de estructuras, están vienen relacionadas por un proceso llamado asimilación, para Piaget se trata del acceso de elementos externos al cerebro del sujeto; iniciando por la adaptación y acomodación, en donde establece que en el momento que se logra una igualdad entre aprendizaje asimilado y pasa a aprendizaje acomodado se da un logro cognitivo.

Esta propuesta de Piaget, según Villar (2003) la interacción entre el sujeto y la realidad en el que se desenvuelve, garantiza la construcción de conocimiento. El individuo al actuar en su realidad se encamina a la construcción de las características de ésta, por tal motivo va estructurando su propio cerebro. Además, Piaget habla de las capacidades internas que tienen los niños al relacionarse con su realidad, estas capacidades son oler, manipular, morder, golpear entre otras.

Estas acciones generan esquemas mentales, para ir organizando conceptos de la realidad. Así van conformando su mundo en este caso compuesto por objetos geométricos.

Estos esquemas mentales, se relacionan con la investigación trabajada ya que las representaciones que debe hacer el niño de los objetos tridimensionales, durante cada una de las situaciones didácticas necesita de las acciones mencionadas anteriormente. Inhelder & Piaget (2012), deducen que existe una diferencia entre percepción y representación. La percepción se da cuando el niño tiene la oportunidad de generar acciones como coger, tocar, sentir el objeto a estudiar, es decir se genera un contacto directo con él. Para la representación estos dos autores plantean que es dirigido a la imaginación del niño, a lo que recuerda de este objeto cuando no lo tiene en sus manos, así mismo ocurriría cuando lo están tocando, en ese momento también lo está representando mentalmente por la experiencia que ha generado con las acciones mencionadas anteriormente.

Dentro de las situaciones didácticas como la acción, formulación y validación propuestas para esta investigación, el estudiante puede acercarse al objeto matemático porque puede manipularlo ya que son espacios reales y del contexto de los estudiantes. Este punto formulado por Piaget es clave para el análisis de las situaciones didácticas, se debe determinar el logro de las representaciones tridimensionales, ya que el estudiante no solo realiza representación mental, sino que también construcción de modelos reales y representaciones en hojas de cada actividad o entorno.

## Marco Conceptual

La geometría es la ciencia que trata de la construcción de figuras basadas por condiciones dadas, Una construcción es la representación de una figura por medio de puntos y líneas, esta figura puede ser geométrica si es una combinación de puntos, líneas, superficies y cuerpos sólidos, formada bajo condiciones determinadas. (Thompson, 1951)

En este capítulo se tiene en cuenta esencialmente los elementos básicos de dos tipos de geometría, la primera se da en dos dimensiones la cuál trata las figuras planas, conocida como geometría plana; la segunda es la geometría de tres dimensiones, es decir la que caracteriza las figuras en el espacio conocida como geometría tridimensional., puesto que son los cimientos de las estructuras, ya que son tan concluyentes que no es necesario profundizar en ellos.

**Intersección:** si dos rectas diferentes se intersecan, su intersección contiene un punto solamente. (Moise & Downs, 1964)

**Rectas paralelas:** mediante las pendientes, podemos decir con bastante facilidad si dos rectas no verticales son paralelas, bajo las siguientes condiciones. Sí dos rectas no verticales son paralelas, entonces tienen la misma pendiente. Esto se deduce que:

$$\Delta P_1 R P_2 \sim \Delta P'_1 R' P'_2$$

Esto basado en (Moise & Downs, 1964). Si dos rectas distintas no verticales se interceptan, entonces sus pendientes son distintas.

Si las dos rectas se interceptan en  $P$ , como en la figura, entonces sus pendientes son:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m' = \frac{y_3 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Aquí,  $m \neq m'$ , porque los denominadores son los mismos y los numeradores son distintos.

Dado esto obtenemos que:

Dos rectas no verticales son paralelas, si y solo si, sus pendientes son iguales, Dos líneas son paralelas cuando se mantienen siempre a la misma distancia y nunca se encuentran o se intersectan.

(Moise & Downs, 1964)

**Rectas perpendiculares.** Dos rectas perpendiculares, tiene como característica que la pendiente de una recta es el reciproco negativo de la pendiente de la otra.

Dos rectas son perpendiculares si sus ángulos formados son ángulos rectos, es decir son de 90 grados. (Moise & Downs, 1964).

**Ángulo.** Un ángulo es la figura geométrica que resulta al unir dos rayos que tienen el mismo punto inicial. Los rayos son los lados del ángulo y el punto común es el vértice del ángulo. (Moise & Downs, 1964).

**Ángulo recto.** Un ángulo recto es aquel que mide 90 grados, sus dos lados son dos semirrectas perpendiculares y el vértice es el origen de dichas semirrectas. (Moise & Downs, 1964).

**Intersección.** Es el corte de dos curvas, dos superficies, dos sólidos, dos rectas que es respectivamente, un punto, una recta o una superficie. (Moise & Downs, 1964)

**Congruencia.** Dos figuras geométricas son congruentes si tienen exactamente la misma forma y el mismo tamaño. (Moise & Downs, 1964).

**Figura plana.** Aquellas compuesta por una secuencia limitada de segmentos rectos consecutivos que cierran una región en el plano. Estos segmentos son llamados lados, y los puntos en que se intersectan se llaman vértices. También se puede ver como la unión de puntos consecutivos q forman una circunferencia es llamada figura plana. (Moise & Downs, 1964)

**Cuadrilátero.** Sean A, B, C, D cuatro puntos coplanarios. Si tres cualesquiera de ellos no están alineados, y los segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  y  $\overline{DA}$  se intersecan solamente en sus extremos, entonces la reunión de los cuatro segmentos se llama cuadrilátero (figura plana de cuatro lados).

Los cuatro segmentos se llaman lados, y los puntos A, B, C y D se llaman vértices. Los ángulos  $\angle DAB$ ,  $\angle ABC$ ,  $\angle BCD$  y  $\angle CDA$  se llaman ángulos del cuadrilátero. (Moise & Downs, 1964).

**Rectángulo.** Si los cuatro lados del cuadrilátero son ángulos rectos, entonces el cuadrilátero se llama rectángulo, el cuadrilátero se simboliza  $\square ABCD$ . (Moise & Downs, 1964).

**Cuadrado.** Si los cuatro ángulos son rectos y los cuatro lados son congruentes, entonces el cuadrilátero es un cuadrado, el cuadrilátero se simboliza  $\square ABCD$  (Moise & Downs, 1964).

**Triángulo.** Si  $A$ ,  $B$ ,  $C$  son tres puntos cualesquiera no alineados, entonces la reunión de los segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$  se llama triángulo, y se indica con  $\triangle ABC$ . Los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  se llaman vértices, y los segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$  se llaman lados. Todo triángulo  $\triangle ABC$  determina tres ángulos:  $\angle BAC$ ,  $\angle ABC$  y  $\angle ACB$ . A estos los llamamos ángulos del triángulo  $\triangle ABC$ .

Algunos tipos de triángulos son:

**Triángulo isósceles.** Un triángulo con los dos lados congruentes se llama isósceles, el lado desigual es la base, los dos ángulos asociados con la base son ángulos en la base y el ángulo opuesto a la base es el ángulo en el vértice. (Moise & Downs, 1964).

**Triángulo equilátero.** Un triángulo con sus tres lados congruentes se llama equilátero. (Moise & Downs, 1964).

**Triángulo equiángulo.** Un triángulo con sus tres ángulos congruentes se llama equiángulo. (Moise & Downs, 1964).

**Triángulo Escaleno.** Un triángulo para el cual dos lados cualesquiera no son congruentes se llama escaleno. (Moise & Downs, 1964)

**Circunferencia.** Es la frontera de una región redonda en un plano. Curva plana cerrada cuyos puntos equidistantes de otro, se le llama centro situado en el mismo plano, limita la superficie del círculo. (Moise & Downs, 1964)

**Círculo.** Parte de plano limitado por la circunferencia. (Moise & Downs, 1964)

**Paralelogramo<sup>1</sup>.** Un cuadrilátero convexo cuyos pares de lados opuestos son iguales y paralelos dos a dos.

**Rombo.** Es un paralelogramo cuyos lados son todos congruentes entre sí. (Moise & Downs, 1964).

**Polígono.** Es una figura formada por la reunión de varios segmentos de manera que no se crucen y solamente se toquen en los extremos (Moise & Downs, 1964).

**Polígono Regular.** Un polígono es regular, si es convexo, todos sus lados son congruentes y todos sus ángulos son congruentes. (Moise & Downs, 1964).

**Prisma.** Es un tipo de **poliedro** formado por dos caras paralelas que son polígonos idénticos denominados bases. Estas figuras se unen por las caras laterales que son paralelogramos (cuadriláteros cuyos lados opuestos son paralelos). (Moise & Downs, 1964).

---

<sup>1</sup> **Nota:** Los Cuadrados, Rectángulos y Rombos son todos Paralelogramos. (Moise & Downs, 1964).

**Poliedro.** Es una figura geométrica con tres dimensiones constituido por un número finito de caras que, a su vez, son polígonos. (Moise & Downs, 1964).

**Cubo.** Es un cuerpo formado por seis caras que son cuadradas. La particularidad de estos cuerpos es que todas las caras son congruentes, están dispuestas de forma paralela y de a pares, y tienen cuatro lados. (Moise & Downs, 1964).

**El tronco de pirámide, pirámide truncada, o pirámide trunca,** es un poliedro comprendido entre la base de la pirámide y un plano que corta a todas las aristas laterales. Si el plano es paralelo al plano de la base se dice que el tronco es de bases paralelas. La distancia entre las bases es la altura del tronco. Un tronco de bases paralelas de una pirámide regular está formado por dos bases, polígonos regulares semejantes, y varias caras laterales que son trapecios isósceles. Las alturas de estos trapecios se llaman apotemas. (Bloomington & Indiana, 1969).

## Metodología

La técnica de recolección y análisis para esta investigación se basa en Hurtado (2010), donde nos argumenta: “La metodología es el área del conocimiento que se encarga de métodos, técnicas, estrategias y procedimientos que utilizara el investigador para lograr sus objetivos”. Teniendo en cuenta lo mencionado, la metodología proporciona herramientas para describir y analizar los procedimientos y técnicas empleadas en el desarrollo de esta investigación, que orientan la recolección de datos, organización y el análisis de los mismos, en relación con los objetivos formulados y a las características del problema que se investiga. Por esta razón se hizo referencia al tipo diseño de la investigación, la forma de análisis, las técnicas e instrumentos empleados.

### **Enfoque investigativo.**

Para esta metodología de trabajo se trabajó en una investigación cualitativa, Hernández (2018) afirma: “las investigaciones cualitativas suelen producir preguntas antes, durante o después de la recolección y análisis de los datos, la acción indagatoria se mueve de manera dinámica entre los hechos y su interpretación” (pág. 8). Para la realización de esta investigación con enfoque cualitativo, parte de un enfoque de tipo exploratorio, descriptivo e implementación de esquema pedagógico innovador, sobre la representación de objetos tridimensionales del entorno con estudiantes de noveno grado del colegio Nuestra Señora del Rosario de Tunja.

### **Descripción de la unidad de análisis.**

Los actores del desarrollo del presente trabajo fueron estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario de Tunja. Este nivel académico se encuentra distribuido en tres cursos, para un total de 84 estudiantes a los cuales se le aplico la prueba diagnóstica. El curso elegido para la implementación de las situaciones didácticas fue el curso 901 con 23 estudiantes esto dado por el bajo desempeño que obtuvieron tanto en pruebas externas como en prueba diagnóstica.

### **Etapas del proceso de investigación.**

La investigación se desarrolló en tres fases: Diagnóstico, situaciones e implementación y evaluación; donde se recolecta por medio de encuestas (fase diagnóstica), observación de procesos previos y posteriores a la implementación del esquema didáctico; luego se realizó el análisis del progreso por cada secuencia o situación didáctica, para luego concluir con una prueba final que examino la efectividad de la aplicación de las situaciones didácticas. Que luego será comparada con la prueba diagnóstica.

#### **Primera fase: Diagnóstico**

En esta fase se recolecto información de los conocimientos previos de los estudiantes sobre conceptos básicos y construcciones de objetos geométricos, esta recolección se realiza mediante la aplicación de una prueba (diagnóstica) escrita y construcciones a regla y compás y materiales

manipulables, además se tuvo en cuenta los resultados de las pruebas para grado noveno aplicadas por la institución, con el fin de verificar las debilidades y fortalezas en este proceso geométrico.

### **Segunda fase: Situaciones e implementación**

Se analizó que objetos tridimensionales son más comunes en el entorno de los estudiantes, para el diseño de las secuencias. Las situaciones didácticas están organizadas de forma ascendente, es decir, en cada situación implementada el nivel de construcción y representación debe ir aumentando para ir creando situaciones con mayor dificultad de solución. De igual manera se tuvo en cuenta que las figuras geométricas están totalmente relacionadas con el análisis de la fase anterior. En esta fase se debe ir proyectando estos objetos tridimensionales con problemas del contexto de los estudiantes, para que exista una transversalidad de los temas en grado noveno y se pueda crear una mejor secuencia didáctica que garantice una construcción de conocimiento colectivo y transversal.

### **Tercera Fase: evaluación**

Finalmente, esta fase se detectó que habilidades visuales y geométricas adquieren los estudiantes con el diseño e implementación de las situaciones didácticas con el contexto. Es decir que se implementó una serie de situaciones didácticas con el fin de analizar si son factibles y propician el mejoramiento a la construcción de conocimiento colectivo de los estudiantes. En esta última fase, se evaluó si las secuencias son correctas y acertadas para la clara construcción de conocimientos en el proceso geométrico, además en la construcción y resolución de problemas.

Esto se trabajó con un test final como una herramienta más ágil de representación de los objetos tridimensionales y confrontación con la prueba inicial.

Este tipo de investigación logra en nuestro campo educativo una gran importancia porque ayuda a superar dos aspectos como lo es la teoría-práctica y el educador-investigador; y así hace posible unificar teoría y práctica. En tal sentido, es necesario que el docente cuente con las estrategias adecuadas, que le permita explorar y profundizar más su formación en cuanto a la investigación de los sucesos socio-culturales de su entorno.

### **Tipo de análisis.**

La investigación es de tipo exploratorio, descriptivo e implementación de esquema pedagógico innovador, durante este proceso de las situaciones didácticas se realiza el seguimiento a estas, por medio de la observación y describiendo cómo se presentó la secuencia; la recolección de datos se hace de forma cualitativa, es decir por medio de test y los desempeños frente a cada una de las situaciones didácticas desarrolladas por los estudiantes.

Se utilizó como instrumento una prueba diagnóstica donde se emplearon preguntas abiertas que permitieron conocer los conceptos básicos de la geometría que manejan los estudiantes, de igual manera la observación realizada al grupo y al trabajo después de dar solución a las actividades planteadas para el diseño de la situación didáctica en cada sesión. Finamente un test final para la verificación y validación de la situación didáctica. Para así, realizar una descripción de todos los factores que intervinieron, definiendo el alcance logrado durante la implementación de la situación didáctica.

Este tipo de investigación facilita el acompañamiento en los diferentes momentos que se presentan durante las diferentes situaciones didácticas, así, mientras se va dando los procesos de enseñanza y aprendizaje, se va realizando la búsqueda y el análisis durante todas las etapas de las situaciones; la descripción resultante durante cada momento del ejercicio permitirá junto con los instrumentos de recolección de datos, hacer un análisis preciso de lo que se alcanzó, al final, la parte fundamental es comprender a los estudiantes en sus procesos, eventos y su contextualización con las actividades planteadas.

En conclusión, los procesos de enseñanza y aprendizaje implementados, lleva a que los estudiantes logren las soluciones de los ejercicios propuestos y el propósito del análisis, el cual consistió en determinar si las características de las situaciones didácticas escogidas, llevan a los estudiantes a promover las representaciones tridimensionales mediante la visualización de formas geométricas reales.

Esta recolección y análisis de los resultados cualitativos se trabajó por medio de la observación, así lograr describir los diferentes momentos para llevar a cabo registros de los pormenores, enfatizando en la relación de cada estudiante con sus compañeros y el apoyo entre pares, igualmente va determinando el manejo acertado de las herramientas didácticas dispuestas; determinando al final, si mediante el trabajo colaborativo y el adecuado uso de las herramientas didácticas.

## Categorías de análisis

Para lograr una investigación descriptiva de forma acertada y ordenada, se definen las siguientes categorías que se tendrán en cuenta en el análisis.

- Situaciones didácticas.
- Figuras tridimensionales.

## Aplicación de situaciones didácticas

Para la creación de estas situaciones el docente tuvo en cuenta los resultados de la prueba inicial y algunos conceptos geométricos elementales, con el fin de reforzar conceptos previos que deben tener los estudiantes para el desarrollo adecuado de las situaciones. Ya que, en algunos casos, estos no están todavía asimilados por completo por los estudiantes y es importante para el progreso de las situaciones.

Para la aplicación de este trabajo investigativo se tomó la teoría de las situaciones didácticas y se desarrollaron en 5 situaciones diferentes por parte de los estudiantes, las cuales aparecen en los anexos con sus respectivos resultados para luego analizar los resultados y así lograr a un análisis concreto de la aplicación y efectividad de cada una de las situaciones. La propuesta pedagógica de enseñanza aprendizaje que se elaboró, tiene el objetivo del desarrollo del pensamiento espacial, mediadas por la construcción y representación tridimensional del entorno basados en el dibujo y la solución de ejercicios cotidianos.

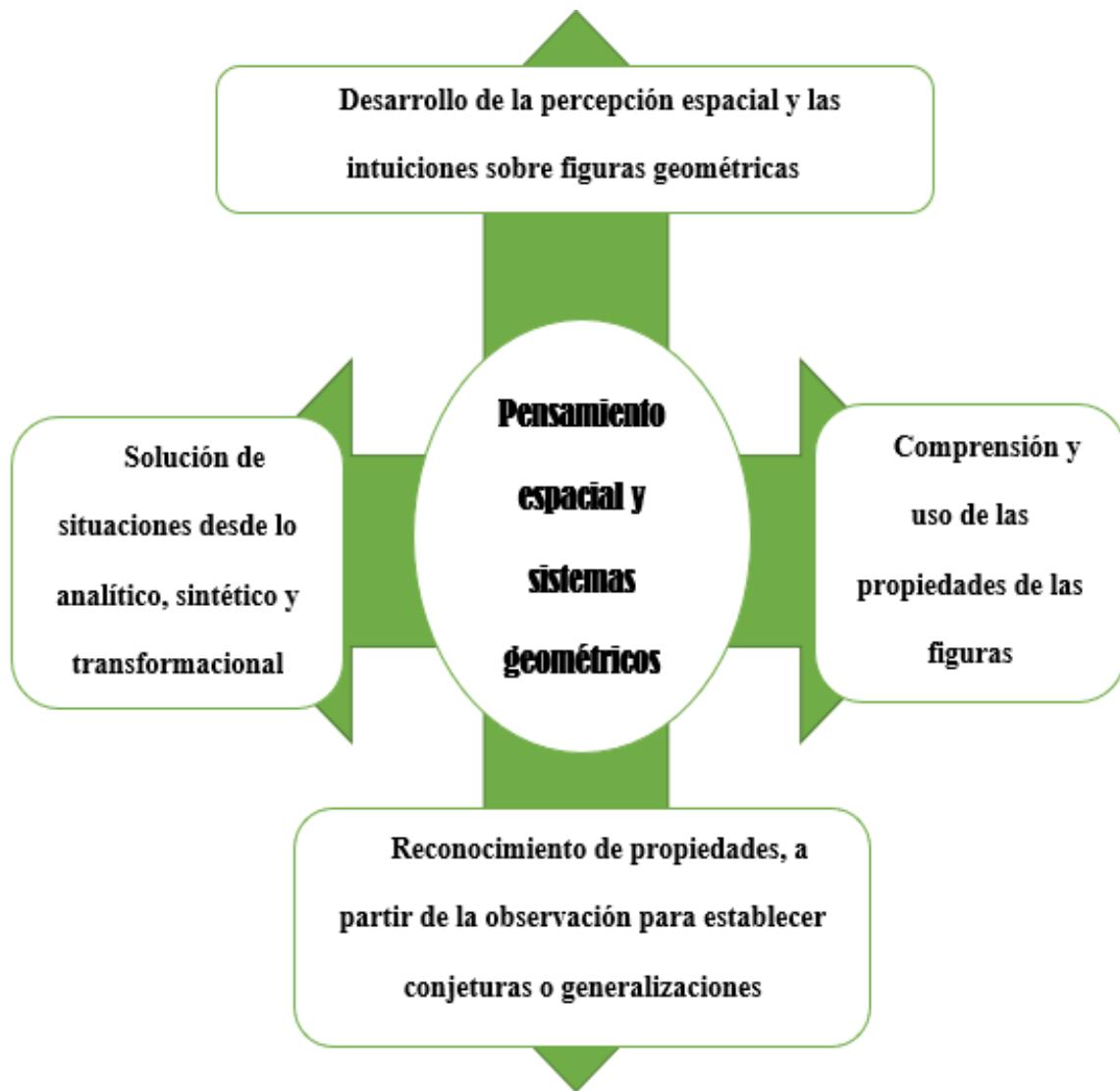
## Resultados

En este capítulo se presenta la descripción de los resultados, los cuales se organizaron teniendo en cuenta ciertas características como: situaciones didácticas y figuras tridimensionales. Después de la descripción de los resultados, se tomaron en cuenta estos para realizar el análisis pertinente de la investigación, mostrando cómo se implementaron las situaciones didácticas que se propusieron para este proyecto.

Godino (2003) afirma: la implementación de situaciones didácticas genera una construcción de aprendizaje significativo, pero estas situaciones deben trabajarse mediante la solución de problemas geométricos, el estudiante debe participar de manera activa para la construcción de sus propios conocimientos geométricos. Según Gómez (2011), la construcción de conocimiento geométrico se desarrolla partiendo de tres pasos:

- Conceptualización: Aprendizaje de definiciones o construcción de conceptos.
- Investigación: Definir objetos geométricos a través de la indagación y observación respecto a sus características, propiedades y relaciones entre ellos, es decir construir conocimiento geométrico por medio de la exploración.
- Demostración: la elaboración de pasos o procedimientos que permitan solucionar, comprobar y demostrar su veracidad.

Así mismo, para el MEN el componente geométrico espacial tiene la siguiente descripción:



**Figura 2.** Componente geométrico espacial. Elaboración propia

### **Estándar para grado noveno, pensamiento espacial.**

Para este aspecto se tienen en cuenta los estándares manejados para grado noveno según MEN y las adecuaciones generadas en la malla curricular de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario de Tunja.

Los criterios relacionados con competencias o habilidades son las siguientes:

- Descompongo y relaciono figuras planas y objetos tridimensionales para conocerlos mejor.
- Represento objetos tridimensionales en diferentes posiciones y desde distintos puntos de vista, es decir, el manejo de la perspectiva.
- Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
- Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área y volumen de regiones.

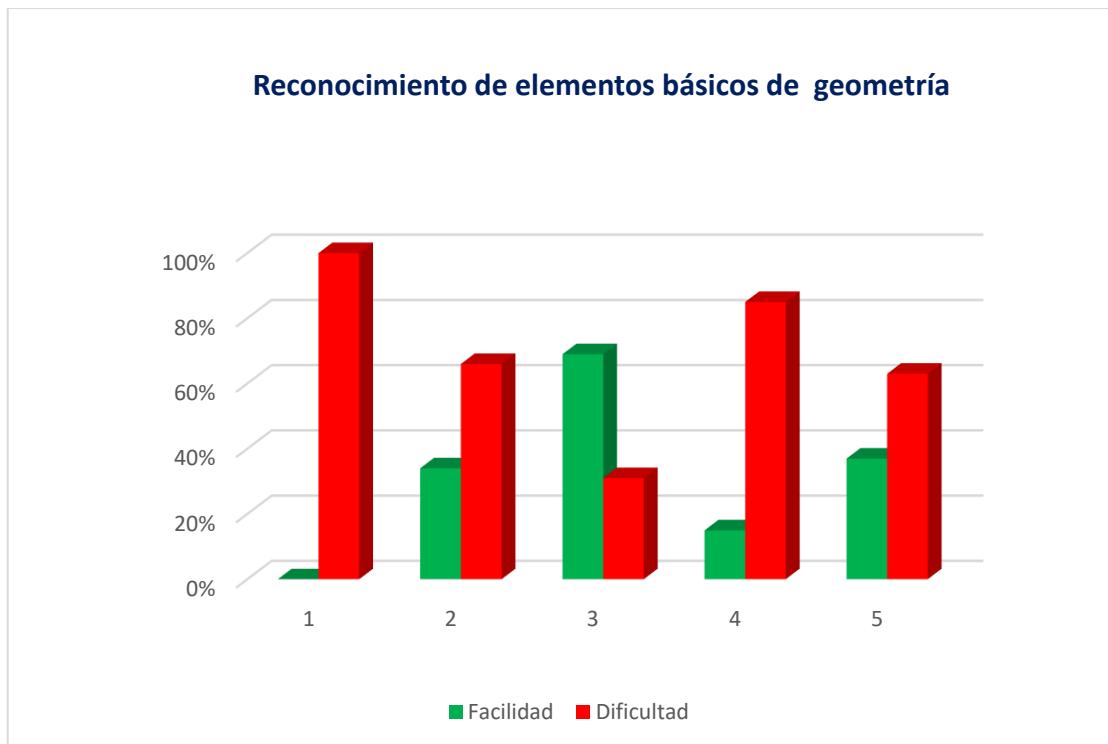
Teniendo en cuenta las competencias y los estándares descritos anteriormente, esto aportará elementos conceptuales para el análisis de los resultados de los estudiantes durante la implementación de las situaciones didácticas.

### **Prueba diagnostica**

Se aplicó la prueba diagnóstica a grado noveno el cual contaba con un total de 84 estudiantes de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario de Tunja. El objetivo de la prueba diagnóstica fue indagar sobre los conocimientos previos de los estudiantes acerca de los conceptos básicos de la geometría. Esto desde el punto de vista de construcciones de objetos geométricos y

la relación de la geometría con su entorno. Durante la aplicación de la prueba diagnóstica se encontraron los siguientes resultados:

### **Prueba Diagnóstica acerca de conceptos básicos de la geometría.**

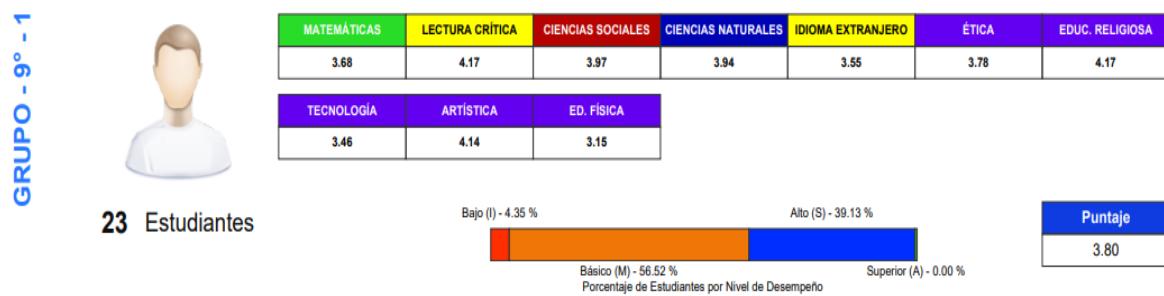


**Figura 3 .** Resultados prueba diagnóstica (anexo 2) Elaboración propia

*Nota1: 1 Construcción de un cuadrado 2. Rectas paralelas y perpendiculares 3. Identificación de elementos geométricos 4. Teorema de Pitágoras 5. Identificación de figuras en 3D.*

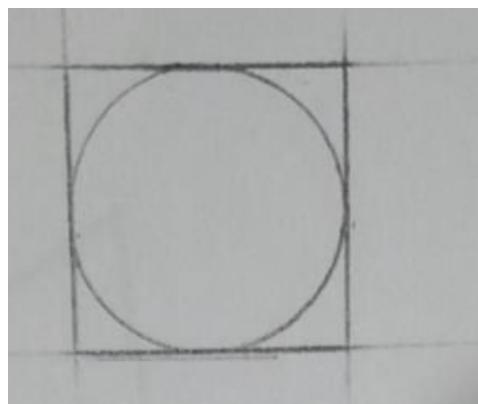
De acuerdo con los resultados obtenidos de esta prueba se escogió un curso de grado noveno para la muestra, a los cuales se le realizó el seguimiento respectivo durante la implementación de las diferentes situaciones didácticas; se escogió el grado 901 ya que fue el grado que presentó más bajo desempeño frente a los demás grados. Los resultados de estos estudiantes seleccionados sirven para diagnosticar el nivel en el cual están, frente al desarrollo del pensamiento espacial. Esta prueba (diagnóstica) constaba de cinco puntos, en la que se debían identificar, realizar

construcciones y definir algunos conceptos geométricos que permitieran verificar las debilidades y fortalezas en este proceso geométrico.



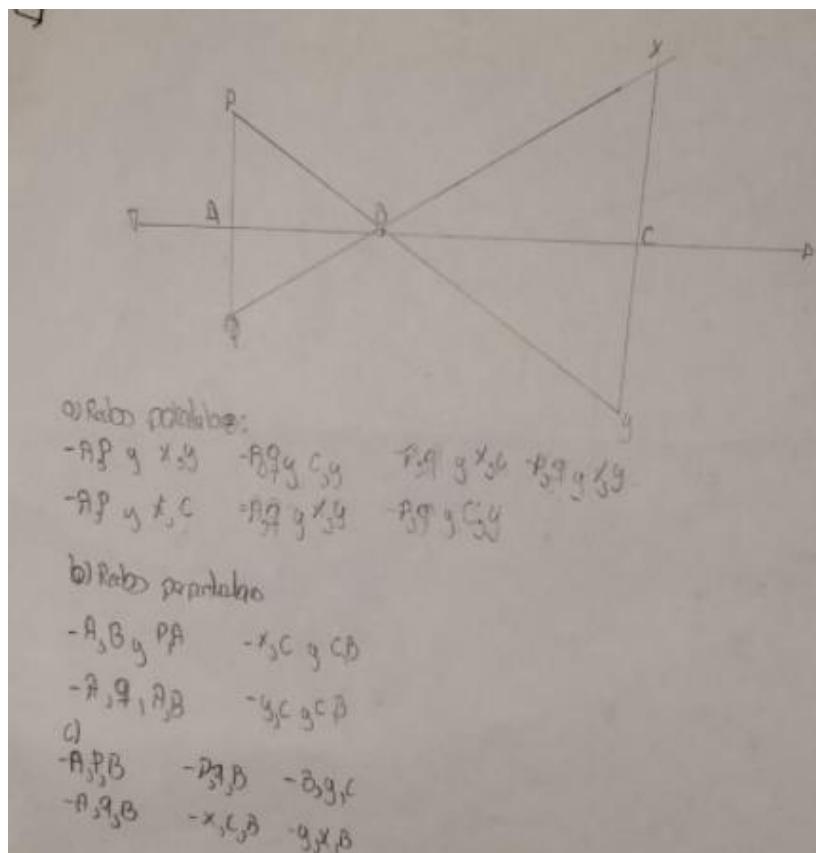
**Tabla 2:** Desempeños pruebas grado 901

En la primera pregunta se encuentra que la totalidad de los estudiantes no construye correctamente un cuadrado, además solo reconocen una perspectiva de construcción y visualización. El cuadrado es una de las figuras geométricas que comúnmente se estudia y se ha utilizado bastante durante su transcurso escolar. Al indagar con dichos estudiantes, afirman que esto se debe a que las construcciones que siempre han realizado son guiadas por su cuaderno con cuadricula o guías, mientras que en la prueba es una hoja blanca sin ningún tipo de margen o guía de orientación.



**Figura 4.** Respuesta del estudiante E18 a la pregunta 1 de la prueba diagnóstica. (Anexo 2)

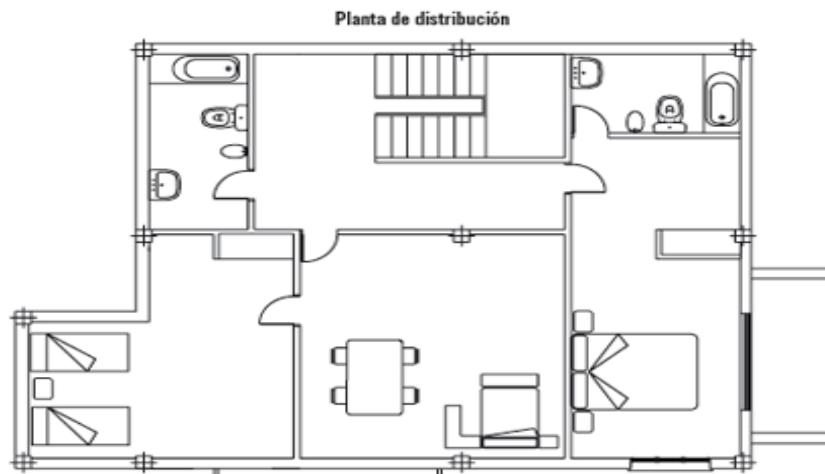
En la segunda pregunta se observó que un 34% de los estudiantes reconoce el concepto de rectas paralelas, rectas perpendiculares o la construcción de un triángulo. Un 66% de los estudiantes no define y tampoco reconoce los conceptos mencionados anteriormente; aunque se hallan impartido en primaria y parte de bachillerato no lo recuerdan. Es preocupante pues si vemos las construcciones arquitectónicas una de sus principales bases para el dibujo o creación de planos o espacios son rectas paralelas y perpendiculares, en el test realizado los estudiantes no tienen claro el concepto y la construcción entre rectas paralelas y perpendiculares; tampoco la necesidad y utilidad que brindan en muchos campos laborales.



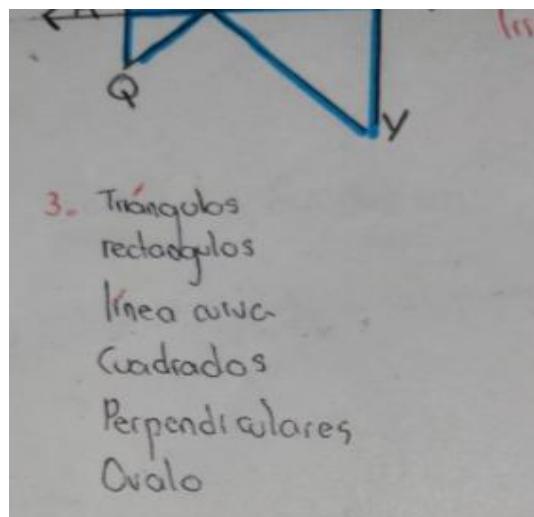
**Figura 5.** Respuesta del estudiante E8 a la pregunta 2 de la prueba diagnóstica. (Anexo 2)

Para nuestra tercera pregunta se utilizó un plano arquitectónico, en donde se pide identificar más de diez elementos geométricos, un 69% de los estudiantes logran el objetivo de la pregunta, y un 31 % presenta dificultad en encontrar más de diez elementos geométricos en la representación. En esta pregunta el objetivo era indagar sobre los elementos geométricos que reconocen en un entorno específico, se planteó reconocer mínimo diez, pero revisando cada uno de los pliegos se puede observar que no reconocen la totalidad de elementos geométricos, además que es alarmante que un tercio de la población no logre reconocer más de diez elementos. Este ejercicio nos permitió articular ideas para ir complementando las actividades; ya que ninguno de los estudiantes abordó la

totalidad de elementos; es decir, los estudiantes no identificaron el 100% de todos los elementos planteados en el plano.



**Figura 6.** Planta de distribución vivienda familiar pregunta 3. Tomada de Pinterest

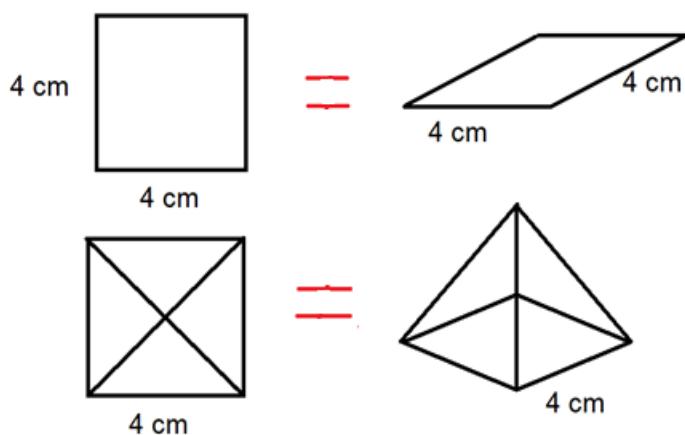


**Figura 7.** Respuesta del estudiante E5 a la pregunta 2 de la prueba diagnóstica. (Anexo 2)

En la cuarta pregunta se analizó y se encontró que tan solo el 15 % de los estudiantes reconocen el concepto y aplicabilidad del teorema de Pitágoras, ya que la longitud de la hipotenusa del

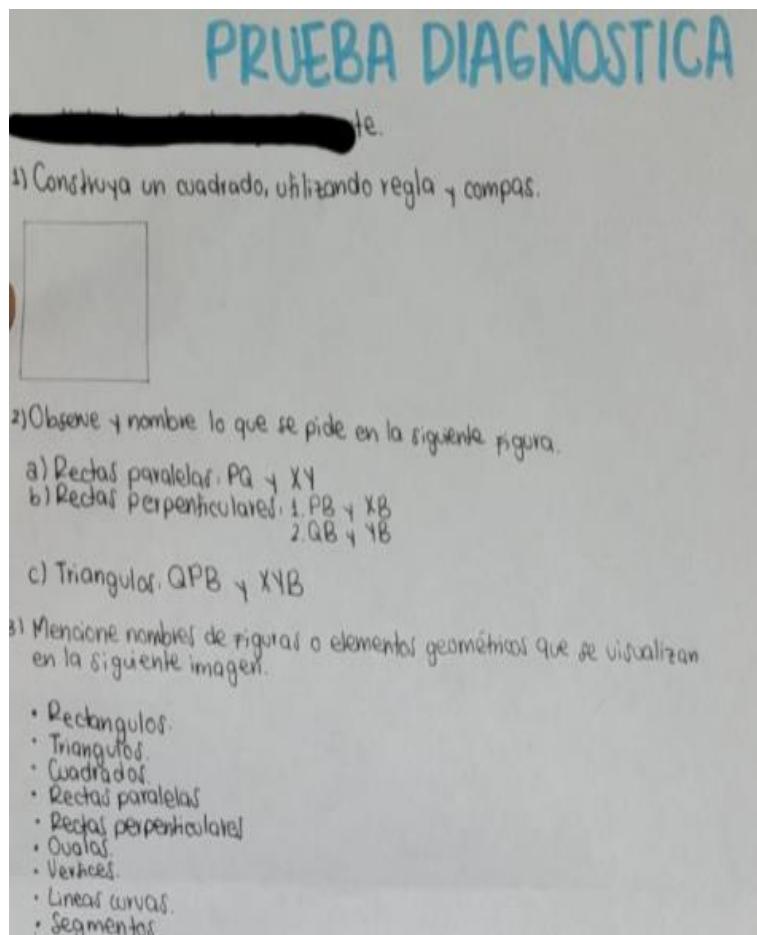
triángulo rectángulo, cuyos catetos son 3 y 4 unidades es igual a 5 unidades. Este punto se planteó por el uso continuo en la construcción, la solución de problemas trigonométricos, el trazo y comprobación de un ángulo recto. Un alto porcentaje de los estudiantes no comprenden, no recuerdan y no tienen clara la utilidad de la expresión pitagórica para encontrar alguno de sus lados de un triángulo. Es importante saber y reconocer cada una de las características de un triángulo. Ya que este polígono es uno de los más importantes de la historia.

Por otra parte, en la pregunta cinco se planteó 2 parejas de figuras geométricas semejantes, pero vistas desde perspectivas distintas, donde, bajo primera observación parecen no ser semejantes. Se puede observar que el 63% de los estudiantes responde que las figuras no son semejantes o iguales; esto se debe a que los estudiantes están acostumbrados a ver las figuras planas desde una sola perspectiva; de igual modo va a ocurrir con las figuras tridimensionales. No se contempla cómo de la geometría de dos dimensiones empleando una profundidad, un movimiento o una visión diferente del punto, se observa que puede consolidar un pensamiento espacial más adecuado.



**Figura 8.** Elaboración propia a pregunta 5 de la prueba diagnóstica. (Anexo 2)

Ya observando los resultados generales, se determina la coincidencia que existe del bajo desempeño en la prueba diagnóstica y en la Prueba Saber presentadas por los estudiantes el año anterior, Por lo tanto, esto corrobora la necesidad de generar nuevas estrategias o herramientas para fortalecer el proceso del desarrollo espacial y generar un aprendizaje significativo en grado 901, la cual es muestra para este trabajo investigativo.



**Figura 9.** Elaboración de estudiante prueba diagnóstica. (Anexo 2)

Por lo tanto, la importancia de generar nuevas estrategias o herramientas es esencial para fortalecer este proceso y generar un aprendizaje significativo, la cual es base de este trabajo investigativo.

## Prueba final

Se aplicó la prueba final muy similar a la prueba diagnóstica. El objetivo de esta prueba fue determinar los avances adquiridos en el desarrollo del pensamiento espacial, luego de la implementación de las situaciones didácticas y al final poder entablar una comparación entre los dos momentos, para así analizar los cambios y demostrar que los procesos de aprendizaje generados en los estudiantes de grado 901 de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario de Tunja han logrado una notable mejoría en la representación de objetos tridimensionales del entorno.

Esta prueba final consta de 10 preguntas, donde algunas son de verdadero y falso y las demás de selección múltiple, las cuales fueron tomadas de la prueba inicial y de los cuadernillos de las Pruebas Saber noveno que se implementan en la institución.

Luego de la aplicación de la prueba diagnóstica se encontraron los siguientes resultados dados en la tabla N°4. Observando estos resultados generales, la evaluación del grupo muestra que, teniendo en cuenta el nivel de desempeño de bajo a superior dados en la tabla N°5, para el análisis se tomó como referencia las tablas N° 4 y N° 5, en donde se indica el resultado de 23 estudiantes, a los cuales se les realizó un seguimiento durante la implementación de las situaciones didácticas. En la prueba final se retomaron 5 preguntas de la diagnostica, pero que se modificaron con la intención de aumentar su dificultad en comparación de la prueba diagnóstica; de este modo se derivó una progresión o retroceso de los estudiantes, basándonos en aciertos y fallos.

**Registro prueba final. Noveno 901. Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario**

Estudiante	Pre1	Pre2	Pre3	Pre4	Pre5	Pre6	Pre7	Pre8	Pre9	Pre10
01	V	✓	50	18	V	C	B	B	C	A
02	V	✓	60	20	V	C	B	B	A	A
03	V	X	50	15	V	C	B	B	C	A
04	V	✓	50	11	V	C	D	B	C	A
05	V	✓	70	15	V	C	D	B	C	A
06	V	✓	50	15	V	C	D	B	B	A
07	V	✓	50	17	V	D	B	B	C	A
08	V	X	50	20	V	D	B	B	C	A
09	V	✓	50	17	V	C	D	B	C	A
10	V	✓	50	15	V	C	B	B	B	A
11	V	✓	50	14	V	C	A	B	C	A
12	V	✓	50	18	V	C	B	B	D	A
13	V	✓	70	17	V	C	B	B	C	A
14	V	✓	50	15	V	D	B	B	C	A
15	V	✓	50	15	V	C	B	B	C	A
16	V	X	50	15	V	C	B	B	C	A
17	V	✓	50	15	V	C	A	D	C	A
18	V	✓	70	15	V	C	B	D	C	A
19	V	✓	50	18	V	C	B	B	C	A
20	V	✓	50	17	V	D	C	B	C	A
21	V	✓	50	15	V	D	C	C	C	A
22	V	✓	50	16	V	D	B	B	C	A
23	V	X	40	15	V	C	B	C	C	A
<b>Respuesta</b>	V	✓	50	≥ 15	V	C	B	B	C	A
<b>Aciertos</b>	<b>100 %</b>	<b>87 %</b>	<b>78 %</b>	<b>91 %</b>	<b>100 %</b>	<b>74 %</b>	<b>65 %</b>	<b>82 %</b>	<b>82 %</b>	<b>100 %</b>
<b>Errores</b>	<b>0</b>	<b>13 %</b>	<b>22 %</b>	<b>9 %</b>	<b>0</b>	<b>26 %</b>	<b>35 %</b>	<b>18 %</b>	<b>18 %</b>	<b>0</b>

**Tabla 3:** Resultados prueba final. Grado 901.

### **Desempeños prueba final grado 901**

<b>Desempeños</b>			
<b>Superior</b>	<b>Alto</b>	<b>Básico</b>	<b>Bajo</b>
91 al 100 %	80 al 90%	60 al 79%	1 al 59%
<b>01, 15, 19,</b>	<b>02, 03, 04, 05, 06</b>	<b>21, 23</b>	
	<b>07, 08, 09, 10, 11</b>		
	<b>12, 13, 14, 16, 17</b>		
	<b>18, 20, 22.</b>		
<b>CÓDIGOS DE ESTUDIANTES DE GRADO 901</b>			

**Tabla 4:** Desempeños prueba final. Grado 901.

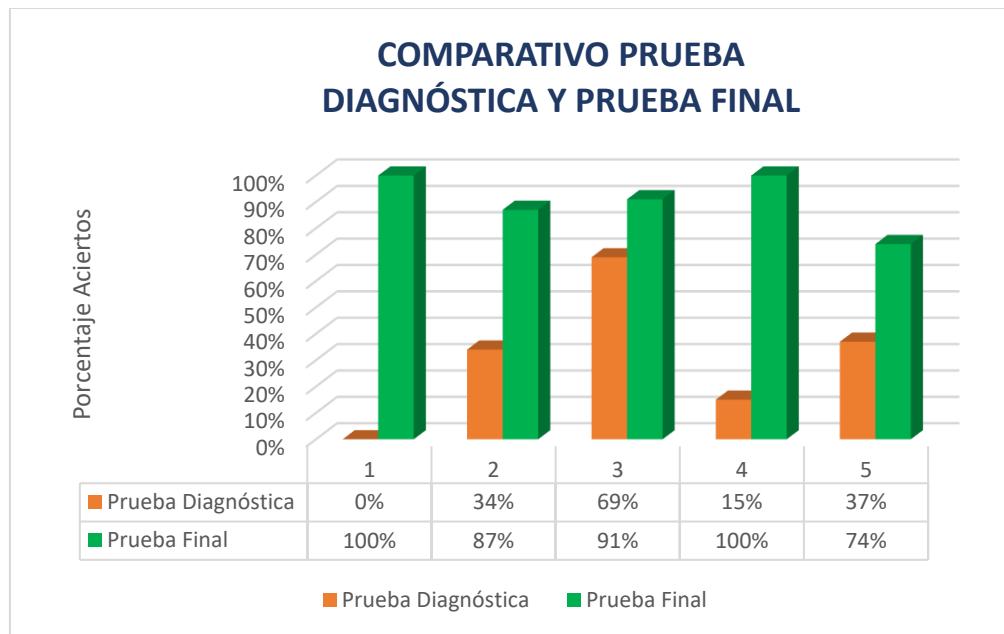
En la tabla N 4, se observa que varias de las preguntas tuvieron 100% de efectividad, como lo fue en la pregunta número 1, numero 5 y numero 10. Estas preguntas requieren que el estudiante reconozca e implemente saberes previos; además, que genere visualización mediante puntos de vista o perspectivas. Estos resultados reflejan un trabajo preciso y un progreso en el desarrollo del pensamiento espacial, a partir de las situaciones didácticas.

Por otra parte, el alto porcentaje de estudiantes en un desempeño alto es significativo. Los estudiantes implementaron distintas estrategias para la solución de cada pregunta; sea por la exploración espacial, el reconocimiento de elementos básicos de la geometría o conceptos ya trabajados en cada situación didáctica. Estas estrategias adquiridas en las situaciones didácticas permiten el manejo de formas bidimensionales y la evolución para la construcción de formas

tridimensionales. En el desempeño básico tan solo dos estudiantes presentan este nivel de desempeño. Esto es favorable para la investigación, pues ningún estudiante de la muestra refleja bajo desempeño en la prueba final y así mismo ocurrió en las situaciones aplicadas.

### **Comparación prueba diagnóstica – prueba final**

En esta primera gráfica se señala el cambio que se presentó entre las dos pruebas, tomando las cinco preguntas iniciales como muestra, ya que se generaron tanto en la prueba diagnóstica como en la prueba final. Esta prueba se realizó con el grupo 901 que hace referencia a 23 estudiantes.



**Figura 10.** Comparativa prueba diagnóstica – prueba final Elaboración propia.

Comparando los resultados de las dos pruebas realizadas a los estudiantes participantes, se encuentra que todos los estudiantes mejoraron su desempeño, es decir, que en la prueba diagnóstica

se encontraba que los estudiantes no tenían una efectividad del 100 %, en esta ocasión generada por la prueba final; pero se halla 3 estudiantes con un nivel de desempeño superior. A pesar de que en la prueba diagnóstica se encontraban estudiantes con bajo desempeño, en esta última prueba no se encuentran estudiantes con este tipo de desempeños, teniendo como referencia los resultados obtenidos luego de la implementación de las situaciones didácticas.

Luego de la implementación de las situaciones didácticas, se hace perceptible un progreso, teniendo en cuenta lo reportado en la gráfica anterior, donde los estudiantes, por medio de sus aprendizajes dirigidos hacia el desarrollo del pensamiento espacial, mejoraron la representación tridimensional y la solución de problemas de orden geométrico estandarizada por la prueba final. Analizando las dos pruebas arroja un porcentaje de aciertos, que es mayor en esta última prueba. En conclusión, el mejoramiento es significativo en esta última prueba, asociado con la implementación de las situaciones didácticas y los diferentes aspectos nombrados.

### **Situaciones didácticas**

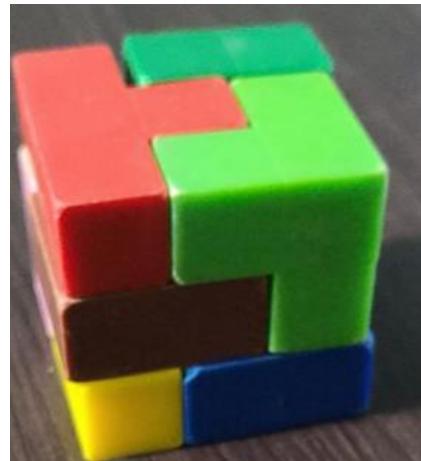
A continuación, se presenta el desarrollo de las diferentes actividades que involucran los distintos "momentos" para la aprehensión de un conocimiento. Estos momentos contribuyen a la eficacia del proceso en la implementación de estas situaciones didácticas, que buscan la posibilidad de construir y estructurar aprendizajes prácticos, como lo plantea la Pedagogía Activa desde una mirada constructivista. El objetivo de cada una de las actividades fue ir creando una secuencia de situaciones didácticas, que finalmente mejoraran el proceso geométrico de objetos tridimensionales desde el entorno.

## Situación acción

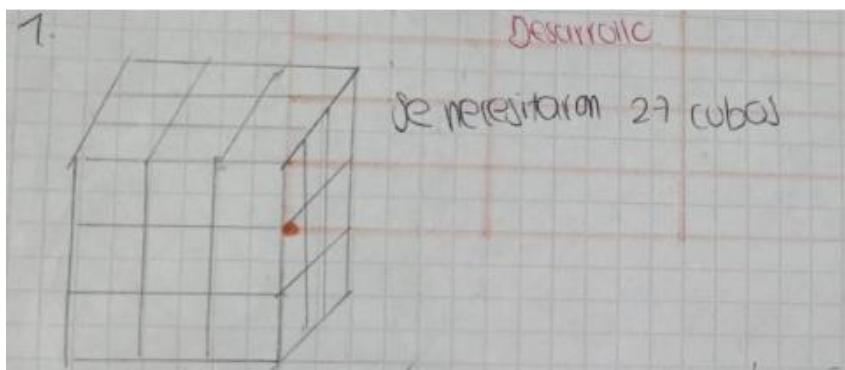
### *Situación 1. cubos y cubitos*

**Objetivo:** Generar imaginación, curiosidad y perspectivas por parte de los estudiantes para hablar del concepto de tridimensionalidad y construcción de un cubo de colores.

La actividad está estructurada para forjar un primer acercamiento entre los estudiantes y el pensamiento geométrico. Para este ejercicio los estudiantes trabajan individualmente con el fin de indagar saberes previos para la construcción de un cubo de 3 x 3, movilizando conocimientos primarios, logrando determinar conceptos y nociones que se trabajan para lograr el dibujo geométrico.



**Figura 11.** Cubo real para manipulación por parte del estudiante. (Anexo 3)



**Figura 12.** Respuesta del estudiante E 20 a la situación didáctica n 1 (Anexo 3)

El estudiante necesitó pasar por un momento de retroalimentación individual, para relacionar la imagen construida con una real dada, ya que se llevó un cubo soma y un cubo Rubik para una mejor orientación de la actividad. En la primera pregunta se pretende acercar al estudiante al objeto matemático, para que aquél incorpore sus propios métodos o medios para la construcción del cubo, teniendo en cuenta lo trabajado en su proceso escolar en geometría.

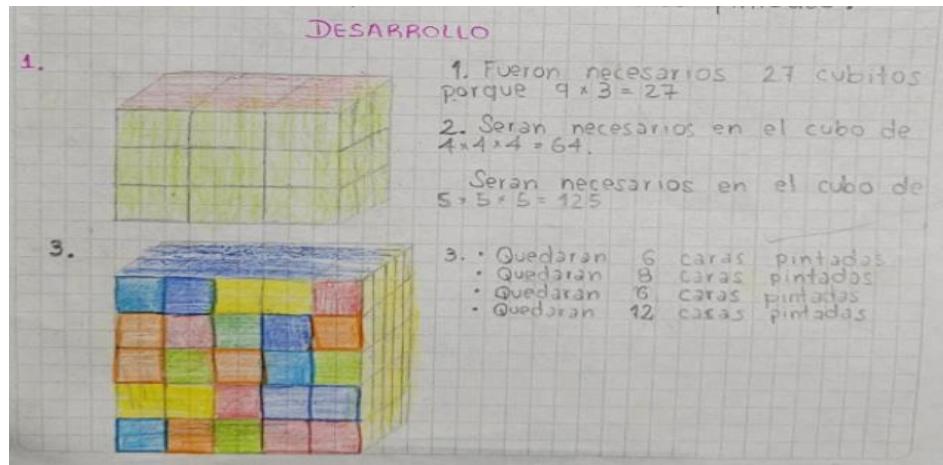
En este ejercicio se presentan varios resultados iniciando con la construcción de un cubo con ciertas medidas. En esta fase de la actividad se evidencia cómo las dimensiones o ángulos para la realización de un cubo no coinciden, es decir la construcción no es adecuada. Por otra parte, las personas que realizaron el cubo en una hoja sin márgenes o cuadrícula; de igual manera, no logran la construcción correcta. Así mismo, la hipótesis de los estudiantes acerca de la cantidad de cubitos que se necesitaron para construir un cubo de arista tres cubitos, expresaron que tan solo 9 cubitos se necesitaban, otros 18 cubitos y otros 27 cubitos.

La segunda pregunta plantea un cubo de 4 cubitos por arista y 5 cubitos por arista y cuantos cubitos son necesarios para la construcción de cada uno de ellos. Durante esta situación los

estudiantes van reflexionando sobre las formas de construir y responder las preguntas, sin tener ayuda por parte del docente. Si el estudiante tenía alguna duda se realizaba, el papel del docente es fundamental ya que se les plantea una nueva pregunta que los haga reflexionar y realizar alguna hipótesis de cómo solucionar la situación y de forma individual como colectiva van en la búsqueda de respuestas.

Para la segunda parte de esta situación implementada, ya construido el cubo de  $3 \times 3$  se realiza la construcción de un cubo de  $4 \times 4$  y  $5 \times 5$ , y se solucionan las preguntas de manera individual. De acuerdo al trabajo realizado se forman parejas de trabajo para revisar lo planteado por cada estudiante; esta revisión debe contener una visión argumentativa para poder aceptar las propuestas que se generaron para dar solución a la actividad. Esto ayudó a la creación de un espacio donde los estudiantes emplearon varias formas de visualización del cubo y cada una de sus partes, es decir, un espacio donde tienen que imaginar o buscar formas de saber cómo está constituida esta figura, desde su interior o su exterior y en diferentes ángulos. Para dar solución a lo planteado, al decidir cuántos cubitos no tienen pintura o están pintados en una, dos o tres caras, se genera una relación e identificación entre la representación de la geometría bidimensional y tridimensional.

De esta manera se logra un adecuado acercamiento al objeto matemático y se va direccionando el propósito de cada situación planteada para la construcción y visualización de objetos tridimensionales. El docente en esta actividad estará como observador y generalizador para la reflexión por parte de los estudiantes. Además, al llevarse a cabo algunos cubos Rubik y cubo somas para poder apoyar a los estudiantes al momento de contestar las preguntas, se motiva una dinámica de apropiación concreta de conceptos, fórmulas y esquemas.



**Figura 13.** Respuesta del estudiante E 15 a la situación didáctica n 2 (Anexo 3)

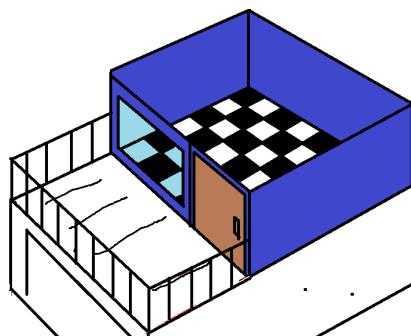
En suma, a nivel general se observó que, por cada pregunta realizada, se dio lugar a dificultades espaciales o de ubicación, pues para imaginar el cubo por dentro algunos querían desarmar los cubo Rubik, otros pintaban y tachaban las caras de los cubos, es decir buscaban diferentes formas de solución, pero de una u otra forma daban por entendido el objetivo de la actividad creando alternativas y nuevas formas de solución y de construcción de conocimiento nuevo.

Por lo anterior dicha actividad busco promover el trabajo individual y luego una interacción del estudiante con su compañero en un medio real como lo es el cubo Rubik o el cubo soma, con el objetivo de verificar la importancia que tiene este objeto tridimensional en nuestro entorno, ya que es una de las figuras más utilizadas para la construcción real y más conocida por su estudio desde el ámbito escolar.

### **Situación 2. Construcción de prismas.**

**Objetivo:** Reconocer los objetos geométricos que son necesarios para la construcción de figuras tridimensionales.

Esta segunda situación prevé un trabajo muy similar respecto a la actividad anterior. La siguiente situación fue elaborada con la intención de generar de nuevo una situación acción, donde el estudiante de forma individual, parte de sus saberes previos para la solución de algunos problemas planteados. Esta situación didáctica está diseñada e implementada a partir de la construcción de una figura real del entorno, que se relaciona con la construcción tridimensional; en este escenario el estudiante debe involucrar la actividad anterior y por medio de la construcción de un cubo lograr el siguiente constructo.



**Figura 14.** Representación vivienda a partir de prismas (Anexo 4)

Durante esta situación de acción, los estudiantes inician dibujando una estructura real y tridimensional constituida a base de dos prismas, uno más grande que el otro, para de esta manera iniciar el proceso de visualización y construcción de conocimiento propio de geometría 3D, en esta ocasión iniciando con prismas donde sus bases son polígonos regulares, para una transición de lo

bidimensional a lo tridimensional bajo la relación de objetos geométricos que tienen en común estas dimensiones.

Luego se realizaron tres preguntas acerca de la situación planteada para esto se tiene el siguiente resultado:

<p><b>¿Reconoce figuras geométricas?</b></p> <p><b>Cuáles.</b></p> <p>Estudiante 01.</p>	<p>1 vértices 2 rectángulos 3 cuadrados 4 linea recta 5 recta paralela 6 trapecio 7 recta perpendicular</p>
<p><b>¿Reconoce figuras geométricas?</b></p> <p><b>Cuáles.</b></p> <p>Estudiante 23</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Punto</li> <li>• linea recta</li> <li>• Rectángulo</li> <li>• Cuadrado</li> <li>• Trapecio</li> <li>• Recta perpendicular</li> <li>• Recta paralela</li> <li>• linea curva</li> <li>• Prismas rectangular</li> <li>• Cubo</li> <li>• Aristas</li> <li>• Recta secante</li> </ul>
<p><b>¿De acuerdo a su construcción cree usted que está bien realizada, explique por qué?</b></p> <p>Estudiante 19</p>	<p>no, porque las rectas no cumplen con el criterio de perpendicular y paralelismo, además la perspectiva no es adecuada.</p>

<p><b>¿De acuerdo a su construcción cree usted que está bien realizada, explique por qué?</b></p>	<p>Sí, porque cumple los parámetros de tridimensionalidad, es decir que hay simetría entre las rectas y la perspectiva es igual a la planteada por el profesor.</p>
<p>Estudiante 07</p>	<p><b>¿Cree que la geometría es un saber que es necesario y está en cualquier parte nuestro entorno?</b></p> <p>En cuanto a esta pregunta los 23 estudiantes están de acuerdo en que la geometría está involucrada y constituye nuestro entorno.</p>

**Tabla 5:** Respuesta a pregunta situación didáctica n 2.

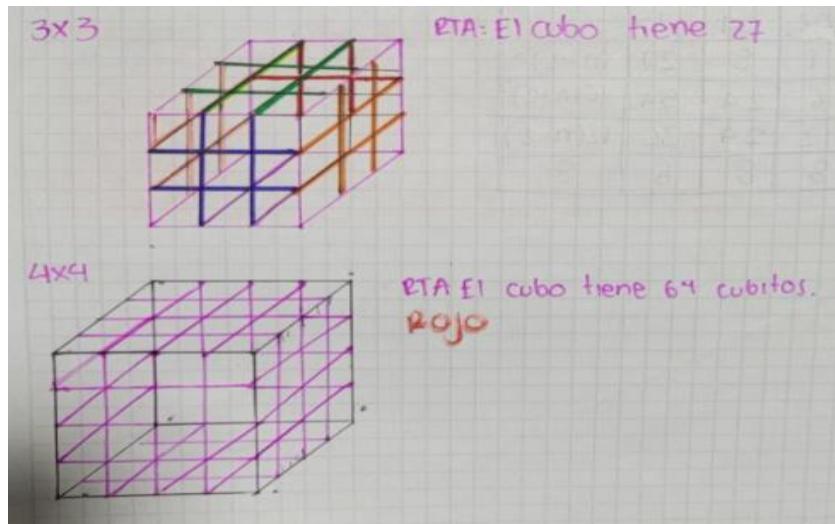
Esta situación reflejó en la función docente un papel importante ya que, por medio de una construcción geométrica cotidiana, se genera en los estudiantes motivación, indagación e identificación de conceptos y elementos geométricos ya trabajados, ya sea para crear nuevos saberes o reestructurarlos. Esta actividad fue llevando a los estudiantes a una representación de su propio entorno, de su propia realidad.

### **Representaciones tridimensionales en las situaciones de acción**

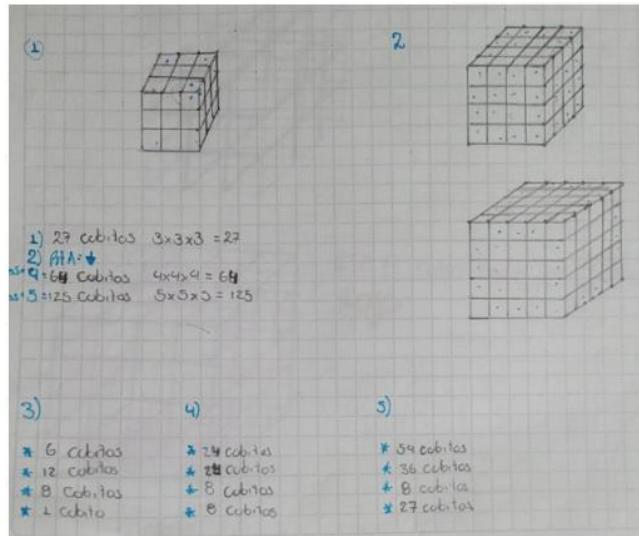
En el proceso de solución de las dos anteriores situaciones, los estudiantes tuvieron un primer acercamiento al proceso espacial, dados por los ejercicios de visualización y construcción, con el objetivo de llegar a una representación tridimensional. Ya que al principio ignoraban partes que constituyen la figura real sea del cubo o de la construcción real, algunos estudiantes en la primera situación tuvieron inconvenientes al visualizar e imaginar cada cubito coloreado; en las esquinas

tres caras quedaban pintadas, en el centro de la arista dos caras, pero en medio de la cara solo una cara. En esta solución de la primera situación se puede percibir la falta de visualización y perspectivas que poseen los estudiantes. Pero al continuar con los cubos de mayor volumen el estudiante logra el desarrollo más ágil, ya que la considera como una secuencia geométrica y de esta manera logra visualizar por colores las caras exteriores e interiores de un cubo.

En este proceso el estudiante reflexiona sobre la posición de él como observador, teniendo en cuenta el cubo y el modelo realizado en la hoja de dibujo. Para dar solución a las preguntas de las situaciones uno, se tuvo que construir la figura en tres dimensiones para dar una mejor amplitud y entendimiento al problema. Los resultados cada vez iban mejorando y se lograba dar profundidad y mejor construcción a la figura. El docente en esta actividad intentó proporcionar ciertos parámetros para lograr una perspectiva o ángulos correctos.



**Figura 15.** Respuesta del estudiante E 07 a la situación didáctica n 1 (Anexo 3)

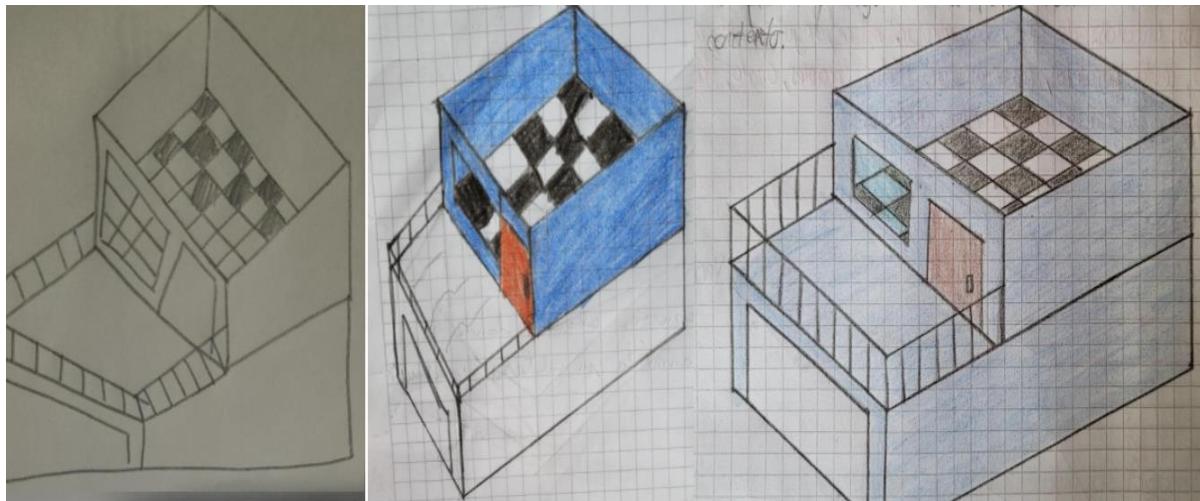


**Figura 16.** Respuesta del estudiante E 12 a la situación didáctica n 1 (Anexo 3)

Durante la situación de construcción de una figura del entorno, el estudiante busca estrategias para lograr la representación tridimensional, de tal forma que cada niño escoge un punto de partida para lograr la representación tridimensional planteada, determinando qué le queda más factible al hacer, según sus propios conocimientos y habilidades. Para los estudiantes esta actividad fue al parecer interesante ya que, por los dibujos y la insistencia de lograr mejores resultados para ver su buen diseño en tres dimensiones, los estudiantes mantuvieron la iniciativa y creatividad para las actividades subsecuentes.

Al final dicha fase se responde una serie de preguntas como se señalan en la tabla n°6 acerca de reconocimiento, explicación y conceptos geométricos ilustrados en la figura. Este dialogo sobre características y conceptos trabajados arroja definiciones claras sobre la noción de prisma o el cómo está constituida la figura real mencionada. Se llega a la conclusión que una figura tridimensional parte de una figura plana donde se le genera una profundidad o altura, o la unión de n número de bases o figuras planas. Con esta actividad se dio lugar a cierta motivación y

curiosidad por hacer más figuras reales. Que favoreció el desarrollo de la tercera actividad que era intervenir en un espacio real de la institución.



**Figura 17.** Respuesta del estudiante E 16 a la situación didáctica n2 (Anexo 4)

### Situación formulación

En estas situaciones los estudiantes empiezan a trabajar en grupo, realizando diferentes ejercicios de representación tridimensional, desde entornos reales, para luego ir formulando estrategias individuales, que permitan comentarlas con su grupo de trabajo e ir reformulando una táctica concreta para la solución. Aquí es necesaria la comunicación y las formas de lenguaje que utilicen para trasmitir sus ideas.

**Actividad 3. Construcción de un espacio real de la institución.**

**Objetivo:** Construir por medio de un dibujo un espacio tridimensional de la institución para identificar y generar conocimiento real y práctico.



**Figura 18.** Imagen planteada para situación didáctica n3 (Anexo 5)

En esta actividad se empleó más del tiempo del planeado, ya que los estudiantes no estaban acostumbrados a plasmar figuras reales basados en un dibujo tridimensional, lo cual requiere de instrucciones claras para el logro óptimo del ejercicio; Los estudiantes presentaron un trabajo colaborativo, que involucró la formulación donde se representa el patio central de la institución. Cada estudiante formuló estrategias para lograr la construcción, al igual que generaron preguntas acerca de perspectivas que incitaron reflexión y reestructuración de ideas para lograr la actividad.

Esto motivo cierta creatividad en los estudiantes, al incluir más objetos geométricos en sus dibujos con una construcción elaborada teniendo en cuenta ángulos y diferentes perspectivas. Este trabajo colaborativo permitió que el estudiante realizara partes, con la ayuda e ideas proporcionadas por sus compañeros. Ya que el dibujo de esta zona del colegio tiene bastantes detalles arquitectónicos y es rica en elementos geométricos (se encontraban prismas, cuerpos redondos pirámides truncadas y elementos ya mencionados anteriormente), que fueron valiosos como herramienta fundamental para la cuarta actividad.



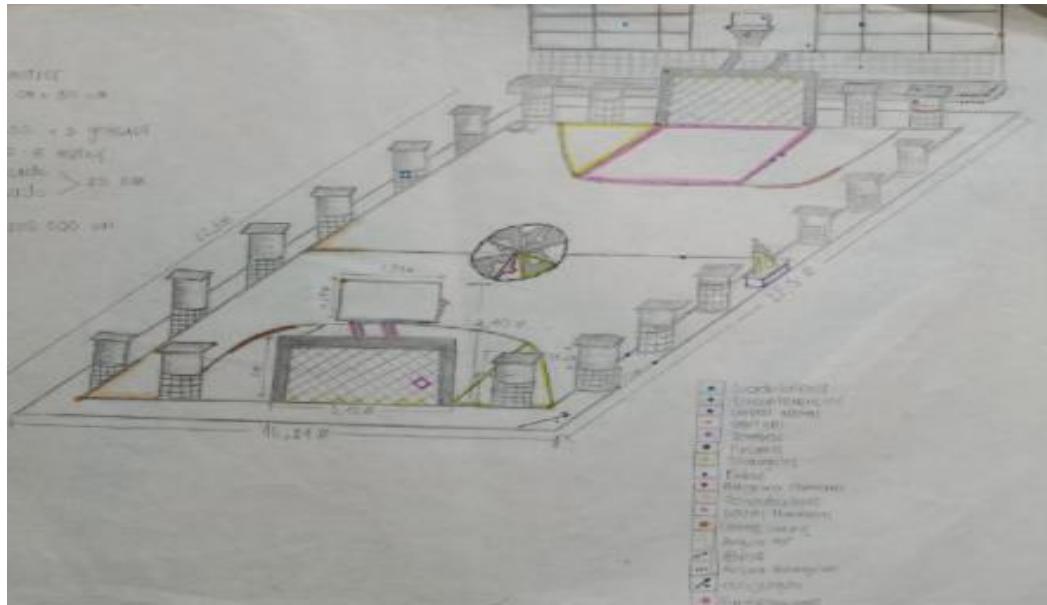
**Figura 19.** Imagen planteada para situación didáctica n3 (Anexo 5)

En estos ejercicios los estudiantes identificaron elementos geométricos a partir de la observación del patio central y la representación del entorno mencionado en tres dimensiones. Esto

garantiza que se familiaricen con las representaciones tridimensionales. Además, se integran conceptos y construcciones realizadas en las anteriores situaciones, lo cual evidenció que la actividad desarrollada reflejara la composición, la evolución de la geometría y la interpretación de la realidad. En este ejercicio se proponen indicios sobre volumen, se retoman conceptos de área y perímetro, ya que el espacio es cotidiano y da la oportunidad de medir y comprobar. Con ello, los estudiantes plantearon hipótesis de cómo calcular volumen área o perímetros de las figuras que representaron por medio del dibujo.

La relación que existe entre compañeros y docentes fue provechosa, ya que el docente genera ideas, preguntas y pautas para que el estudiante construya sus propios conocimientos mediante un trabajo colectivo. Como se menciona anteriormente en el contrato didáctico, donde se habla de un medio de interacción entre el docente y el estudiante. Por ejemplo, a la hora de dibujar fue difícil para el estudiante, ya que debía plasmar la base de la cancha en ángulos diferentes a los trabajados en años anteriores, es decir lograr darle a una figura bidimensional una profundidad y movimiento para generar una vista 3D.

Finalmente, esto genera posibles rotaciones o visualizaciones concretas, es decir, genera cierta alteración la actividad, ya que algunos estudiantes al mostrar resultados a los compañeros o docente no se lograba dar la dimensión correspondiente, o sea no era coherente el dibujo, pero brindaba oportunidades para ir afianzando y utilizando herramientas que hicieran palpable esta representación tridimensional.



**Figura 20.** Respuesta del estudiante E 15 a la situación didáctica n3 (Anexo 5)

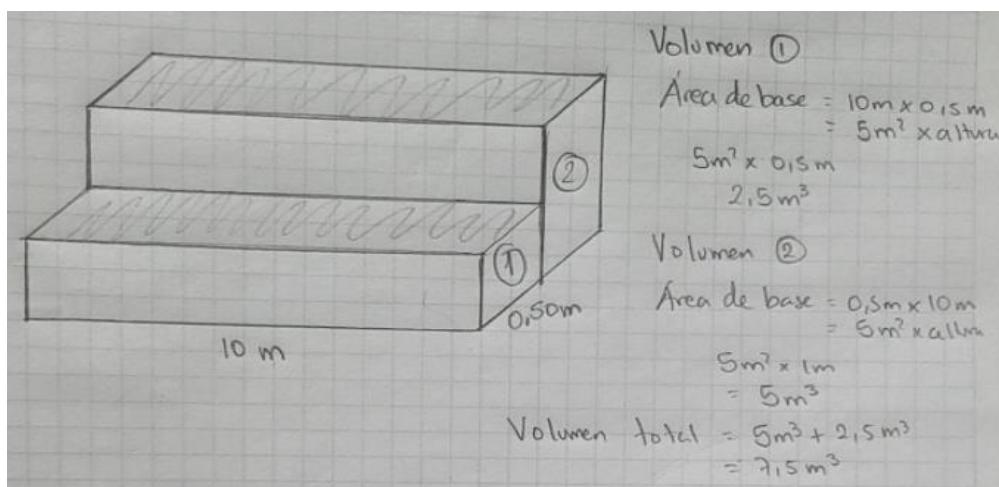
Por otra parte, de la situación N 4 se desprendieron planteamientos y resultados propios de un ejercicio que se adecuó a la situación formulación. Estas actividades se desarrollaron en un tiempo por cada una de ellas de más o menos 3 a 4 semanas dependiendo la dificultad algunas fueron más rápidas de trabajar otras, ya que tenían bastante ensayo y error como en las situaciones donde se plantearon problemas y representaciones tridimensionales reales.

**Situación 4. Construcción de concepto de área y volumen de figuras geométricas de un entorno en específico (patio central).**

**Objetivo:** Construir el concepto de área y volumen por medio de medidas reales, de figuras geométricas, en un espacio tridimensional como el patio central.

Para esta actividad los estudiantes tuvieron contacto con figuras existentes e interacción con sus compañeros, para de este modo desarrollar la actividad que consistía en trabajar con medidas reales, que fueron tomadas por ellos mismos con ayuda de un flexómetro. Encontrando contacto con la figura y en el cálculo dinámico y tangible, que da fortaleza a la hora de solucionar áreas y volúmenes de figuras que ellos habían medido y representado gráficamente en 3D. Este ejercicio propició en los estudiantes el cálculo aproximado de áreas, perímetros y volumen de las figuras geométricas, teniendo en cuenta saberes previos de geometría 2D y que fueron de utilidad para las situaciones planteadas anteriores.

Esta actividad motivó la participación de los estudiantes forma colectiva. El trabajo del docente, en tanto mediador, que verifica la efectividad de la secuencia didáctica. El docente en esta fase de la situación formuló incógnitas sobre la forma en que encontraban un área o volumen acerca de la coherencia con lo que observaban o palpaban, lo cual ayudaría a la formulación y validación de cada concepto o expresión matemática para la solución de esta actividad.



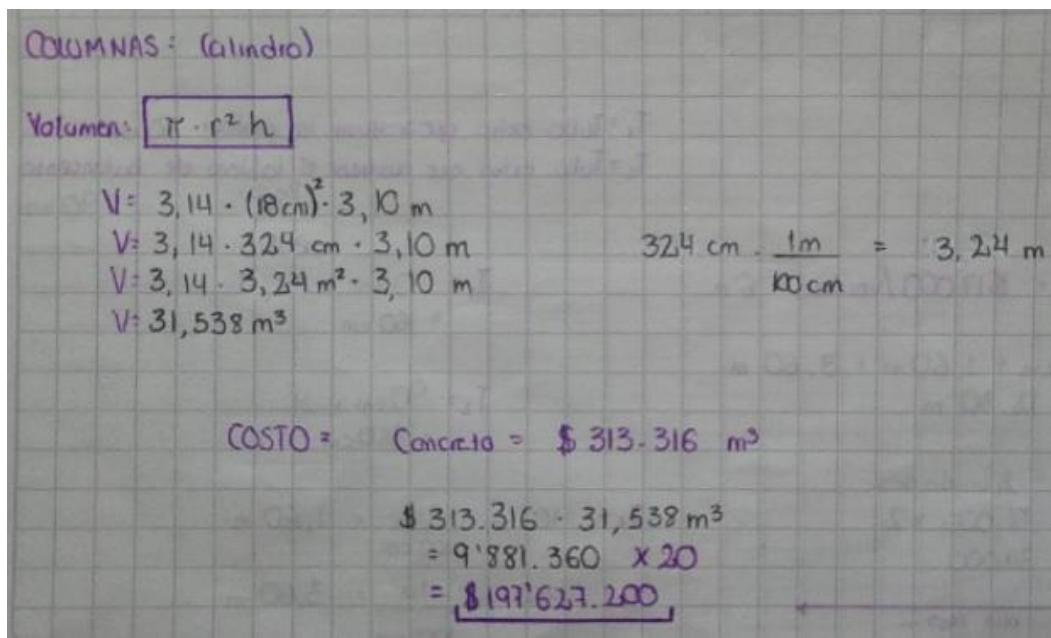
**Figura 21.** Respuesta del estudiante de la grada del patio E 14 a la situación didáctica n4

(Anexo 6)

Dicha actividad fue primordial para la evaluación final de la situación didáctica. Por medio de lo observado y lo recolectado se evidenció que los estudiantes reconocen, representan y solucionan de manera adecuada cualquier tipo de cálculo. Se interesaron y lograron gradualmente una construcción del concepto de objetos tridimensionales del entorno y su aplicación en el mundo real.

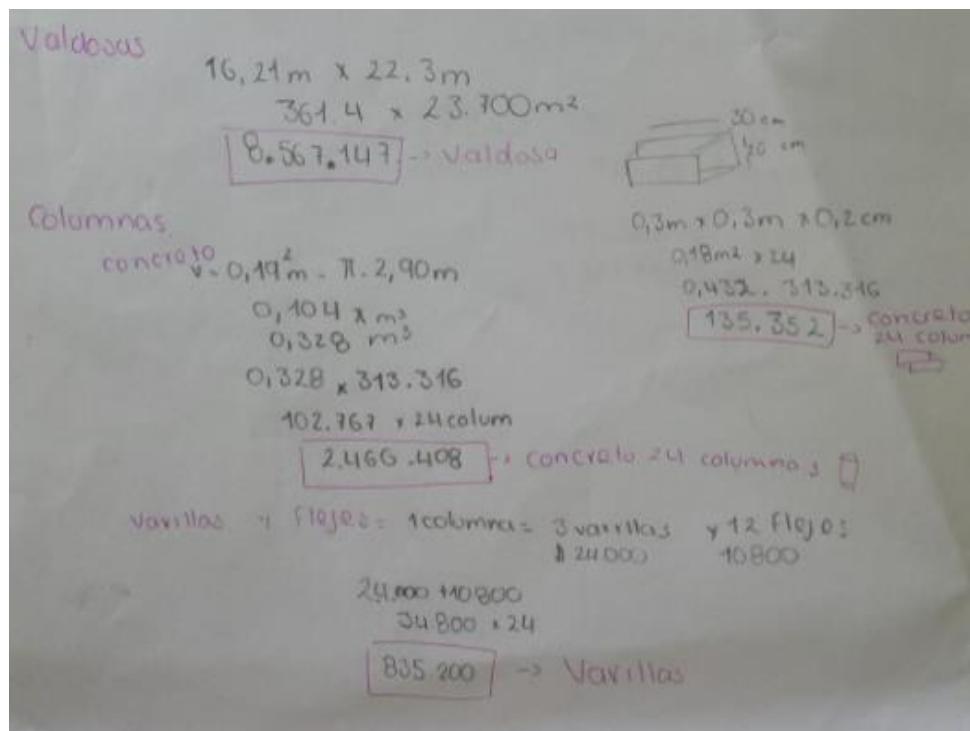


**Figura 22.** Respuesta del estudiante E 12 a la situación didáctica n4 (Anexo 6)



**Figura 23.** Respuesta del estudiante E 11 a la situación didáctica n4 (Anexo 6)

Durante este proceso el docente además de crearles estas situaciones, también su acción fue de observador de situaciones como la interacción entre compañeros, las formulaciones de hipótesis entre ellos para la solución de problemas geométricos, la visualización y construcción de figuras tridimensionales y el trabajo colectivo que garantiza, la comunicación de argumentos y la contrapropuesta del compañero para llegar a la solución.



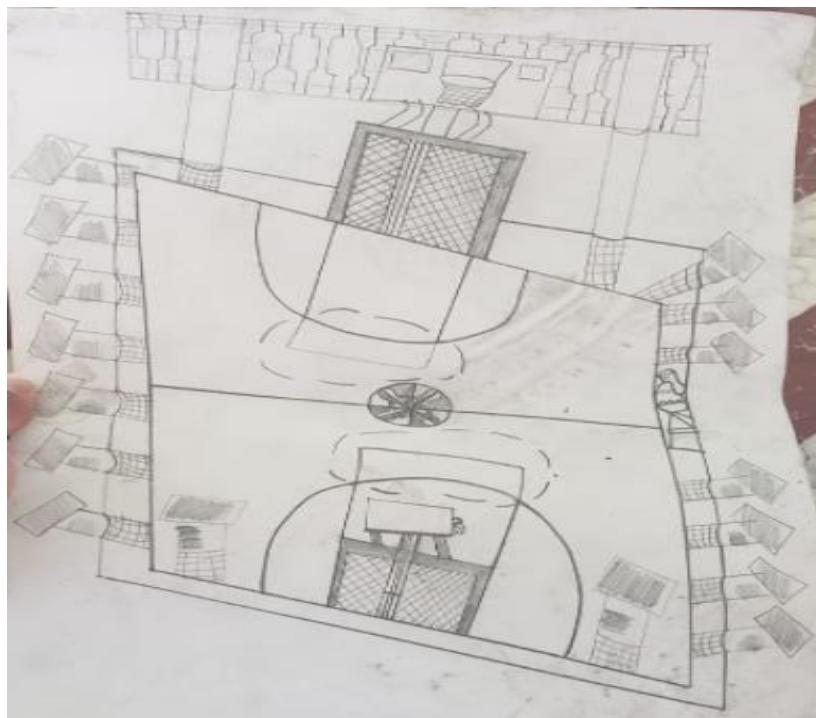
**Figura 24.** Respuesta del estudiante E 11 a la situación didáctica n4 (Anexo 6)

### Representaciones tridimensionales en las situaciones formulación

Durante estas situaciones de formulación, el objetivo se cumplía en favor de las representaciones tridimensionales, esto debido a la formulación que se realizaba por grupos de trabajo; al ofrecer cada uno sus argumentos o estrategias de representación de la figura. Estos constructos tienen bases de dibujo técnico y algunas sugerencias por parte del docente.

Sin embargo, esta tarea realizada se daba partiendo de los fallos en cada dibujo, lo cual favoreció el acierto en cada suceso. De otro lado, como la situación planteada es cotidiana ellos podían medir, visualizar, palpar, comparar su dibujo y dar solución a lo planteado; para ello es

importante el papel que cumple el docente ya que orienta y hace caer en cuenta a sus estudiantes de ciertas perspectivas o trazos que están dados de manera inadecuada.



**Figura 25.** Respuesta del estudiante E 14 a la situación didáctica n3 (Anexo 5)

Cada vez que se generaba una pregunta los estudiantes para llegar a su interpretación debían relacionar la geometría tridimensional con su entorno, de esta manera construye pensamiento geométrico; es de resaltar que en ningún momento el docente genera expresiones matemáticas para el cálculo de magnitudes relacionadas con las figuras tridimensionales; todo lo que se va recolectando es producto de las situaciones que desarrollan los estudiantes, al final como se muestra en las imágenes se puede observar cómo han llegado a las respuestas después de un proceso en el cual participaron activamente los miembros de cada grupo y el docente.



**Figura 26.** Respuesta del estudiante E 14 luego de algunas indicaciones a la situación didáctica n3 (Anexo 5)

### Situaciones de validación

Las situaciones de validación están presentes en las últimas actividades, pero tiene una connotación importante en esta última actividad, ya que emplea la secuencia trabajada para la solución de esta actividad final. En esta fase el estudiante aplica diferentes estrategias que empleó para resolver las diferentes situaciones problema que se generaron anteriormente. Además, el estudiante tuvo presente los errores que se presentaron al validar otras afirmaciones por los compañeros, de manera que se van reformulando otras propuestas para llegar a la respuesta concreta del problema planteado; de esta forma se interiorizan o reafirman nuevos conocimientos.

**Situación 5. Solución de problemas geométricos con figuras reales.**

**Objetivo:** Demostrar el volumen de dos piezas geométricas plantadas en las situaciones anteriores a partir de lo trabajado en las actividades.

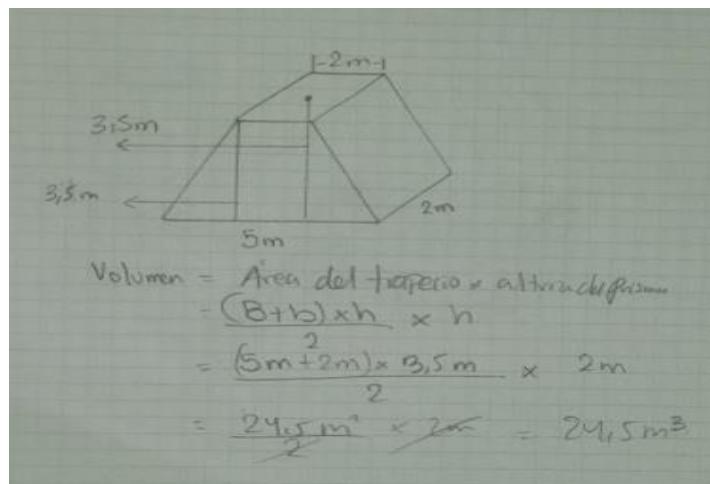
En esta situación de validación, teniendo en cuenta a Brousseau (2007), los estudiantes deben estar dispuestos a proponer nuevas ideas, estrategias y soluciones para resolver situaciones problemas, además está preparado para persuadir a sus compañeros de cómo se logra esta solución por medio de su proceso ya llevado a cabo.

Durante esta fase de validación, los estudiantes tuvieron la oportunidad de observar una forma tridimensional. El docente les indicó qué volúmenes deben hallar para que se dispongan a medir y calcular sin dar fórmulas o expresiones para llegar a la solución. Este ejercicio implica en primer lugar la visualización, luego la representación mental y por último la construcción de esa pieza geométrica tridimensional en una hoja. Desde el punto de vista que cada estudiante plantee, esto genera varias alternativas.

Otra parte fundamental de la actividad para la validación de esta situación fue una explicación de acuerdo con un representante designado por el grupo, para que orientara la forma empleada para la solución del problema planteado por el docente. Esta manera permitió validar cada una de las experiencias trabajadas y reformulando o indicando errores que se presentaban para validar la estrategia de solución; así fue posible definir cuál de las propuestas fue la más viable. El propósito en estas situaciones era lograr representaciones tridimensionales y el cálculo de sus áreas y

volúmenes; además la construcción social de aprendizaje incita la construcción de conocimiento propio, partiendo de los saberes que se han adquirido en las situaciones anteriores.

Los dos objetos geométricos planteados fueron una columna cilíndrica que hace parte del patio central y un prisma trapezoidal. Este prisma no está dentro de los objetos geométricos del patio, pero fue planteado por las construcciones tridimensionales que generaron los estudiantes, pues este sólido de base era un trapecio, creó una situación a – didáctica al no contemplar este momento en la situación. Los estudiantes plantearon un prisma trapezoidal para reemplazar la pirámide truncada. Esto incito una indagación por parte del docente, para entender por qué algunos grupos familiarizan o dan por semejante estos dos sólidos.



**Figura 27.** Respuesta de representantes de grupos a la situación didáctica n5 (Anexo 7)



**Figura 28.** Imagen planteada para situación didáctica n3 (Anexo 5)

El cambio en la situación didáctica final, modifco la manera de exposición o confrontación con sus compañeros, al explicar los cálculos para la columna cilíndrica y el prisma trapezoidal y de esta manera validar estos conceptos; pero al llegar a la situación de la figura correspondiente (una pirámide truncada), concibe un ejercicio nuevo que implica la cooperación para aclarar e interpretar la construcción y la forma de calcular su área y volumen.

Por último, en las situaciones de validación, el trabajo cooperativo se hizo más evidente, ya que se generó con grupos mayores a dos; se validaron las diferentes propuestas y cada uno defendía su propio punto de vista para dar solución a las diferentes situaciones. Esta actividad también sirvió para que ellos se enteraran de errores cometidos y posibles soluciones. Esta interacción reveló cómo desde propuestas activas y en comunidad, se pueden construir aprendizajes significativos.

**Representaciones tridimensionales en las situaciones validación**

En esta parte de la investigación las situaciones de validación están involucradas con ejercicios de representación que permiten una optimización en la comprensión de la realidad y sus formas tridimensionales. Después de trabajar en las diferentes situaciones, los estudiantes ya identificaron la geometría por medio de la visualización e imaginación de su forma. Es de aclarar que estas formas están fuera y al interior del colegio, en nuestro hogar, ciudad, el parque, el centro comercial.

Es así como los estudiantes van razonando sobre la conformación de múltiples formas tridimensionales del entorno.

A través de este trabajo colectivo, la situación se pudo validar, tanto por los integrantes del grupo, como también por los demás grupos. Así mismo se verificó el proceso de visualización por los cuales pasaron los estudiantes, ya que se enfrentaron a un modelo real, para lograr su representación desde puntos de vista diferentes.

Esta última situación planteada encierra desde la prueba diagnóstica y concluye con esta la situación N5, para poder verificar su efectividad con la prueba final. Esta situación maneja un grado más alto de complejidad que las anteriores situaciones; pero los estudiantes operativizaron sus representaciones tridimensionales y en un menor tiempo, ya que en anteriores actividades se debía dar más tiempo ya que sus dibujos presentaban características erradas y por cuenta propia preferían mejorarlo en casa o en las siguientes sesiones de clase.

## Análisis

El análisis de esta investigación se realizó teniendo presente las categorías de análisis previstas anteriormente, dando lugar a una reflexión de dos partes: la prueba diagnóstica y la prueba final.

### Situaciones didácticas

Las situaciones planteadas en este trabajo de investigación tienen como base la teoría de situaciones didácticas, desarrolladas por Brousseau. Se diseñaron 5 situaciones didácticas, de las cuales se implementaron dos de acción, dos de formulación y una final de validación. La última situación es de institucionalización, donde los estudiantes recopilaron el trabajo desarrollado desde la situación N3 dieron certeza de los saberes elaborados y reconstruidos. Así mismo el docente recapitula cada una de las acciones realizadas por sus estudiantes, detallando qué paso se surte para cada situación y así acoplarlo con los conocimientos adquiridos sobre representaciones de objetos tridimensionales.

Esta situación de institucionalización se implementó luego de aplicar el test final y de recolectar los resultados de este trabajo investigativo; se trabajó con los estudiantes de grado noveno y los participantes de grado 901, quienes fueron los que desarrollaron cada una de las situaciones. El diseño de cada una de las situaciones didácticas fue planificado para mostrar las habilidades o tácticas que utilizan los estudiantes para generar saberes y aplicarlos en situaciones problema, llevándolos a conseguir aprendizajes significativos acerca del pensamiento espacial y competencia

matemática de comunicación y representación, concordantes con los estándares que se plantean en el MEN que involucra grado noveno sobre las representaciones de objetos tridimensionales.

Cuando hablamos de competencias de comunicación y representación, estamos interpretando la capacidad que posee el estudiante para identificar conceptos matemáticos y lo capaz de lograr una descripción concreta, a partir de gráficas, tablas de valores, expresiones simbólicas, lenguaje matemático; esta descripción se manifiesta en cada una de las situaciones trabajadas por los estudiantes, cuando se generaron problemas de esa índole.

Para el caso de los estándares, la representación tridimensional se trabajó a partir de varios medios, como el dibujo, representaciones del entorno real y visualización de figuras geométricas trabajadas en años anteriores. Como lo plantea Brouseau (2007), los medios o interacciones que se le plantean a los estudiantes deben acercar al sujeto al objeto matemático, de forma que, mediante el uso del dibujo real usado como representación tridimensional, uso del cubo Rubik para desarrollar técnicas de visualización y la implementación de un entorno real, se organice la metodología de las situaciones didácticas para a un objetivo general de orden pedagógico y analítico.

### **Situación acción**

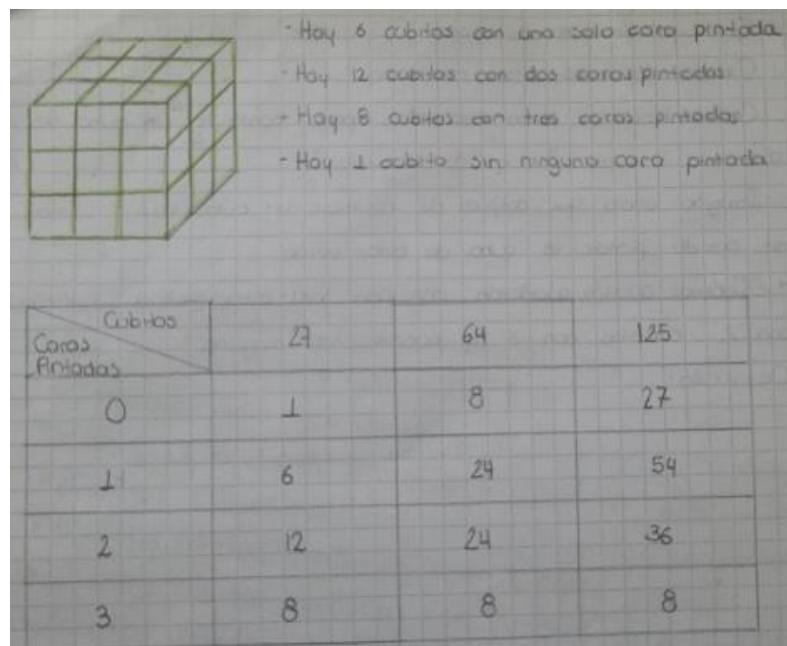
Durante la situación acción, los estudiantes trabajaron dos actividades de forma individual y grupal en algunos momentos; esta primera fase pretendía que el estudiante implementara sus saberes previos, que se han desarrollado durante su proceso escolar. Ya teniendo en cuenta se daba lugar al despliegue de cada actividad, lo cual incidió en la emergencia de nuevos saberes o

reformulación de algunos de ellos. La actividad bien estructurada por medio de situaciones didácticas lleva a los estudiantes a la autónoma construcción de conocimiento que puede involucrarla con la realidad que viven, como lo plantea la teoría de desarrollo cognitivo de Piaget.

En esta situación acción el estudiante debe enfrentarse a un problema individualmente, esto implica que por sus propios medios inicie una búsqueda de conocimientos para dar una solución. De esta manera no puede apoyarse de un compañero como usualmente ocurre, este proceso genera que la solución deba darse por sí misma, luego se espera que el estudiante muestre interés y participación activa formulando constantemente preguntas a su docente, lo cual genera una nueva pregunta para que el estudiante pueda reflexionar acerca de lo planteado y del mismo modo cree un nuevo obstáculo que pueda ser más sencillo del anterior pero que al solucionarlo llegue a la respuesta general de su actividad.

En ese sentido, lo primero que se pretende es un ejercicio de visualización, para llegar a una clara representación y de esta manera tener un primer acercamiento al objeto matemático. En algunas preguntas de la primera actividad se involucran preguntas que poseen pensamiento numérico y variacional, con el fin de hallar volúmenes sencillos. Con estos procedimientos los estudiantes utilizaron diferentes maneras de representación, dirigidas en una primera vez hacia un cubo y luego la representación de una vivienda a partir de cubos. Así, durante las situaciones acción, los estudiantes pasaban de ejercicios de representación en dos dimensiones a modelos de tres dimensiones; esto ayudaba a visualizar vistas auxiliares y con la ayuda de los colores la imaginación salía más a flote teniendo en cuenta cada punto de vista del observador.

Esto con el fin de que, en la siguiente situación el dibujo se construyera en un menor tiempo con una mejor perspectiva, ya que cada vez el espacio a dibujar es más complejo; todo esto para fortalecer el pensamiento espacial según lo aclara debería realizarse desde los estándares básicos de competencias MEN (2006).



**Figura 29.** Respuesta del estudiante E 17 a la situación didáctica n 1 y n 3 (Anexo 3 y 4)

Los 23 estudiantes que son los que se tomaron de muestra obtuvieron sobresalientes resultados durante la situación acción; se tomaron algo de más de tiempo, pero se recogieron buenos resultados, ya que se destacaron en el proceso de solución de problemas geométricos en forma individual, uso de lenguaje geométrico, al conocer características y propiedades del objeto matemático trabajado; de esta manera pudieron ir construyendo un significado, como lo plantea D' Amore (2005). De forma individual se enfrentan con situaciones problemas, en donde

retroalimentaron saberes previos, construyendo de manera adecuada conceptos y estrategias para la solución de éstos y así enfrentarse a otro tipo de situaciones.

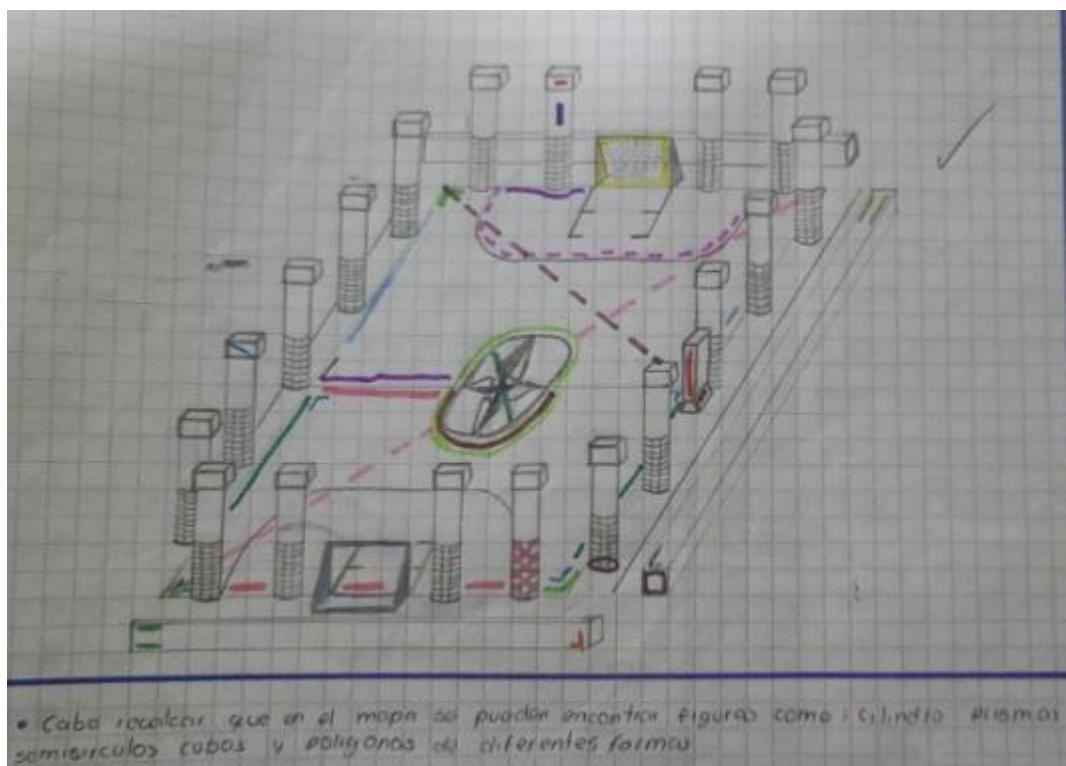
En conclusión, durante estas situaciones de acción, los estudiantes se acercaron más al objetivo del trabajo, que son las representaciones tridimensionales. De igual manera relacionan las actividades como el cubo y la vivienda como elementos básicos de la geometría y principales para la mayoría de construcciones reales que tenemos a nuestro alrededor, lo cual motivo más curiosidad y escenarios que propician ideas para la construcción de representaciones tridimensionales reales, al determinar áreas y volúmenes de las figuras construidas.

### **Situación formulación**

Las situaciones de formulación se caracterizan por el trabajo colectivo, donde se hace visible en la propuesta de la teoría de las situaciones didácticas como lo define Brouseeau (2007), en el cual su objetivo es optar por la comunicación, en donde se propaga una estrategia para lograr resultados. El propósito de estas situaciones es que en colectivo se formulen métodos para responder a las consignas que se les ha propuesto; así sucesivamente se van resolviendo los problemas de representación tridimensional durante cada una de las situaciones planteadas.

Durante la situación N 3, los estudiantes transitaron por problemas de representación tridimensional que incluían perspectivas, rotación y ángulos de visualización, con el fin de aproximarse a la siguiente situación y se hallen formas de calcular áreas y volúmenes; la comunicación entre pares fue importante, ya que en la primera adecuación del plano cada uno

imaginaba y argumentaba cómo debían ir los trazos para dar la figura tridimensional correspondiente para visualizar la imagen real. En la segunda parte debían determinar los objetos y elementos geométricos que se presentaban en la representación realizada; aunque al final del ejercicio ya parece sencillo, se observa que entre compañeros llegan a un común acuerdo para especificar elementos geométricos y construcciones tridimensionales.



**Figura 30.** Respuesta del estudiante E 14 a la situación didáctica n 4 (Anexo 6)

En esta fase, el trabajo colaborativo se hizo presente, no solo entre parejas o en grupo sino a partir del acompañamiento del docente durante estas situaciones, como se plantea en la teoría de “desarrollo próximo” de Vygotsky (2000), en donde los estudiantes son autónomos de su conocimiento gracias a la intervención de contextos reales y sociales. Así, el docente es partícipe

de los fallos que comenten sus estudiantes al argumentar o dibujar ejercicios que involucren la representación tridimensional, al confundir vistas, ángulos y trazos, pertinentes para entender, solucionar y visualizar una figura real. Para lograr este objetivo el docente debía dar soluciones o pistas acertadas, presentar ideas y ejemplos de cómo pueden ir rotando la imagen o imaginándola para ir plasmando en el papel.

En conclusión, las situaciones de formulación marcan una pauta importante, ya que los estudiantes realizaron ejercicios de visualización espacial, llegando a la rotación de objetos de forma imaginaria y comprobando con las figuras reales de la institución, para al final formular posibles respuestas o estrategias de solución de forma colectiva, estas posibles respuestas son muy favorables, ya que ayudaron a los estudiantes a conocer y replantear nuevos métodos para llegar a la visualización y por ende a la representación real de objetos tridimensionales, Ya que cumplen con ciertas competencias y estándares ya mencionados, las situaciones de formulación aportaron en el trabajo colaborativo, para reformular los diferentes procesos a seguir, llegando a una construcción del conocimiento a partir de la interacción con los compañeros.

### **Situación de validación**

La situación de validación se presentó durante la situación N 5. En estas dinámicas los estudiantes trabajaron en grupos, fortaleciendo el trabajo cooperativo y la construcción de aprendizajes desde la teoría de Vygotsky (2000); durante esta situación el trabajo fue grupal pero casi siempre presentó un líder; éste recogía los argumentos de cada uno y los planteaba para llegar a conclusiones concretas, buscando convencer a los demás grupos de sus posibles soluciones; al

final, se hizo una validación con todos los líderes de los grupos, para determinar aciertos y errores en cada grupo.

En esta última situación, los estudiantes tuvieron que llegar a la representacional real, pero en una hoja de papel del modelo tridimensional presentado por el docente, luego tenían que imaginar como calcular área y volumen desde las características del dibujo. Dio pie a tener en cuenta aprendizajes previos, ayudando a la discusión de cómo debería representarse las vistas del patio central; así cada estudiante validaba sus argumentos, encontrando falencias en su estrategia a desempeñar, todo esto para validar el objetivo de cada situación didáctica.

Volumen =  $A \text{ de la base} \cdot h$  (trapezio de la estructura)  $A = \frac{B \cdot b}{2} \cdot h$

$$V = 2,106 \text{ m}^2 \cdot 1,8 \text{ m}$$

$$V = 3,79 \text{ m}^3$$

$$\text{COSTO} = \text{Concrete} = \$ 313.316 \text{ m}^3$$

$$\$ 313.316 \cdot 3,79 \text{ m}^3$$

$$= \$ 1'187.467$$

$$A = \frac{2,16 \text{ m}^2}{2} \cdot 1,95 \text{ m}$$

$$A = 1,08 \text{ m} \cdot 1,95 \text{ m}$$

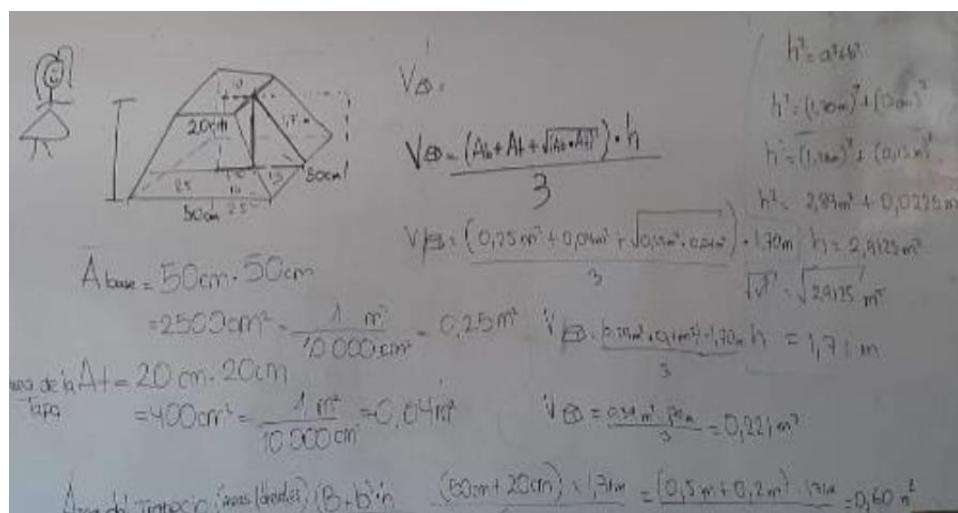
$$A = 2,106 \text{ m}^2$$

**Figura 31.** Respuesta del estudiante E 14 a la situación didáctica n 5 (Anexo 7)

En la segunda etapa de esta situación, se representaron diferentes formas tridimensionales encontradas en el patio central de la institución como: cilindros, prismas, cubos, pirámides, esferas, etc. Este espacio fue elegido por el docente ya que contiene bastante concepto geométrico para trabajar y representar. En estos ejercicios desarrollados, los estudiantes validaron mediante argumentos propios o conclusiones por medio de cada grupo, la forma adecuada de construcción,

representación y solución de figuras tridimensionales del entorno. Al finalizar entre grupos se escogió a una persona para representar y defender su argumento, para de esta manera lograr la validación general del ejercicio, en donde todos comparaban los procesos, errores y resultados que se generaban por cada grupo. Dando por entendido que los estudiantes formulan tácticas para llegar a la solución acertada de loa diferentes situaciones.

Teniendo en cuenta los resultados mencionados anteriormente, los estudiantes adquirieron aprendizajes basados en el pensamiento espacial con el fin de lograr la representación tridimensional de un entorno real, demostradas en cada producto final, tales como el dibujo tridimensional siguiendo patrones dados, como la visualización y representación de las vistas auxiliares que de un solo vistazo no son posibles de observar, además demostrando resultados obtenidos por las situaciones y prueba final calculando áreas y volúmenes de figuras reales, donde ellos se encargan de medir y proponer situaciones de desarrollo enfocados al aprendizaje del pensamiento espacial en un entorno específico.

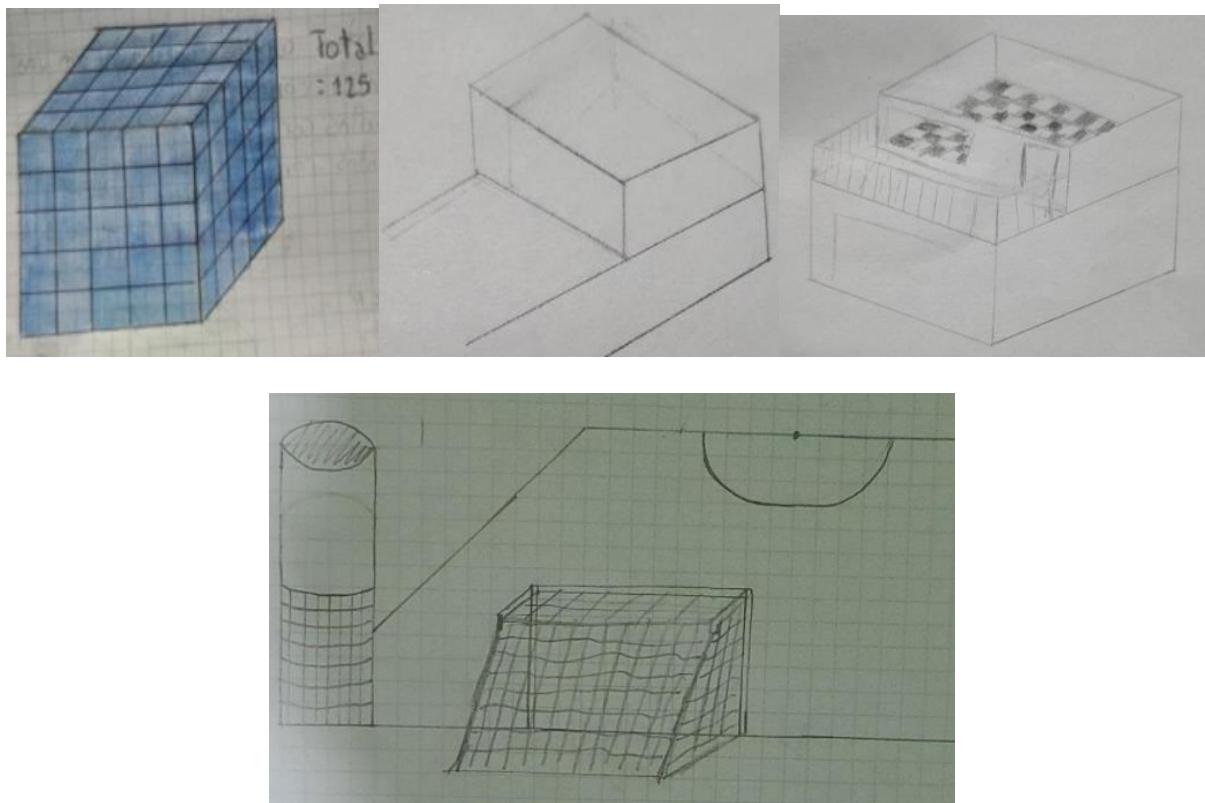


**Figura 32.** Respuesta de representantes de grupos a la situación didáctica n5 (Anexo 7)

## **Representaciones tridimensionales**

En esta parte del análisis se plantearon los logros alcanzados por cada situación. Se buscó con cada una de las actividades mejorar las representaciones de figuras tridimensionales, tal como se plantea desde el componente geométrico métrico del MEN, donde nos relaciona la construcción y manipulación de objetos tridimensionales a partir de la representación bidimensional, teniendo en cuenta sus características, propiedades y transformaciones.

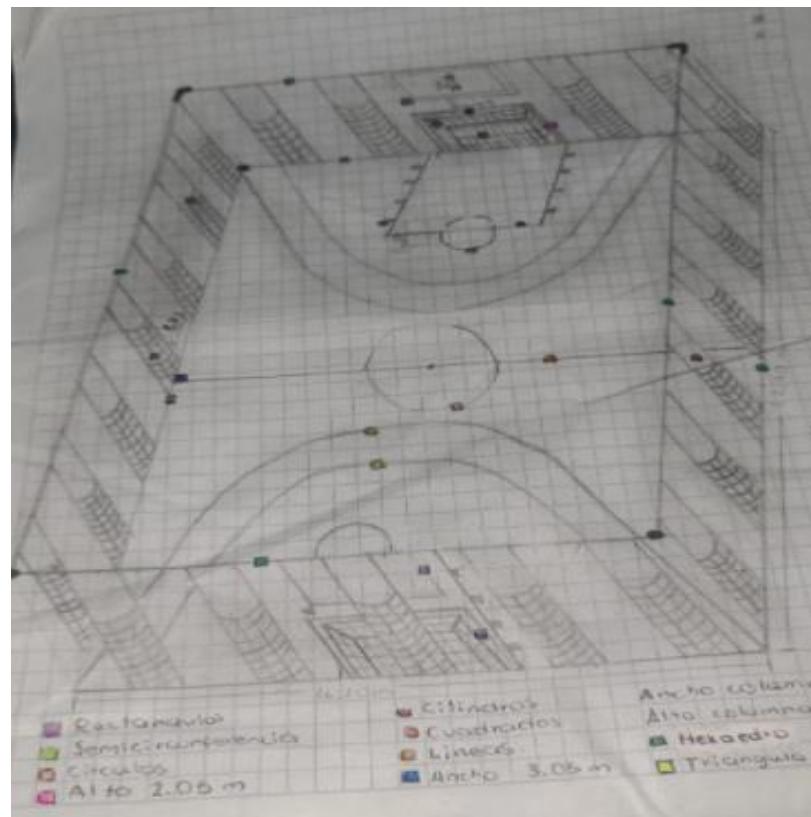
Durante el transcurso de las situaciones de acción, las representaciones tridimensionales partieron de ejercicios básicos, en los que dichas representaciones tridimensionales partían de un juego matemático conocido como cubo Rubik. A partir de esta figura geométrica los estudiantes identificaron sus caras, aristas, vértices, áreas, perímetros y volúmenes indirectamente. Esta actividad originó la implementación de diversas formas de solución y de comunicación para expresar el desarrollo de cada actividad. Dando por entendido cómo se constituye la figura tridimensional más usada por las personas como es el cubo, se creó un concepto general de lo que es volumen y además la forma en que el plano bidimensional pasa a ser un plano guiado por tres ejes; a partir de n cubos se puede construir figuras tridimensionales reales.



**Figura 33.** Respuesta del estudiante E 08 a la situación didáctica n 1 y n 2 (Anexo 3 y 4)

Durante las situaciones de formulación, emergió un ámbito en el que se debió tener en cuenta las anteriores situaciones y un acercamiento más eficaz al momento de visualizar figuras tridimensionales y llegar a su representación mental acertada. En estas situaciones se involucra la validación, ya que se implementa la figura tridimensional construida por los estudiantes, recordando que se llevó a cabo por ejercicios y esquemas previos como el cubo y la vivienda para hablar de unidades cúbicas y llegar a nociones de volumen y forma; aquí las representaciones tridimensionales se lograron por el trabajo colectivo; ya que los estudiantes formularon procesos o estrategias a seguir y dependiendo de los aciertos y errores los compañeros encontraron la

validación de los argumentos, para así llegar a la construcción y cálculos de área y volúmenes propuestos por el docente y el estudiante.

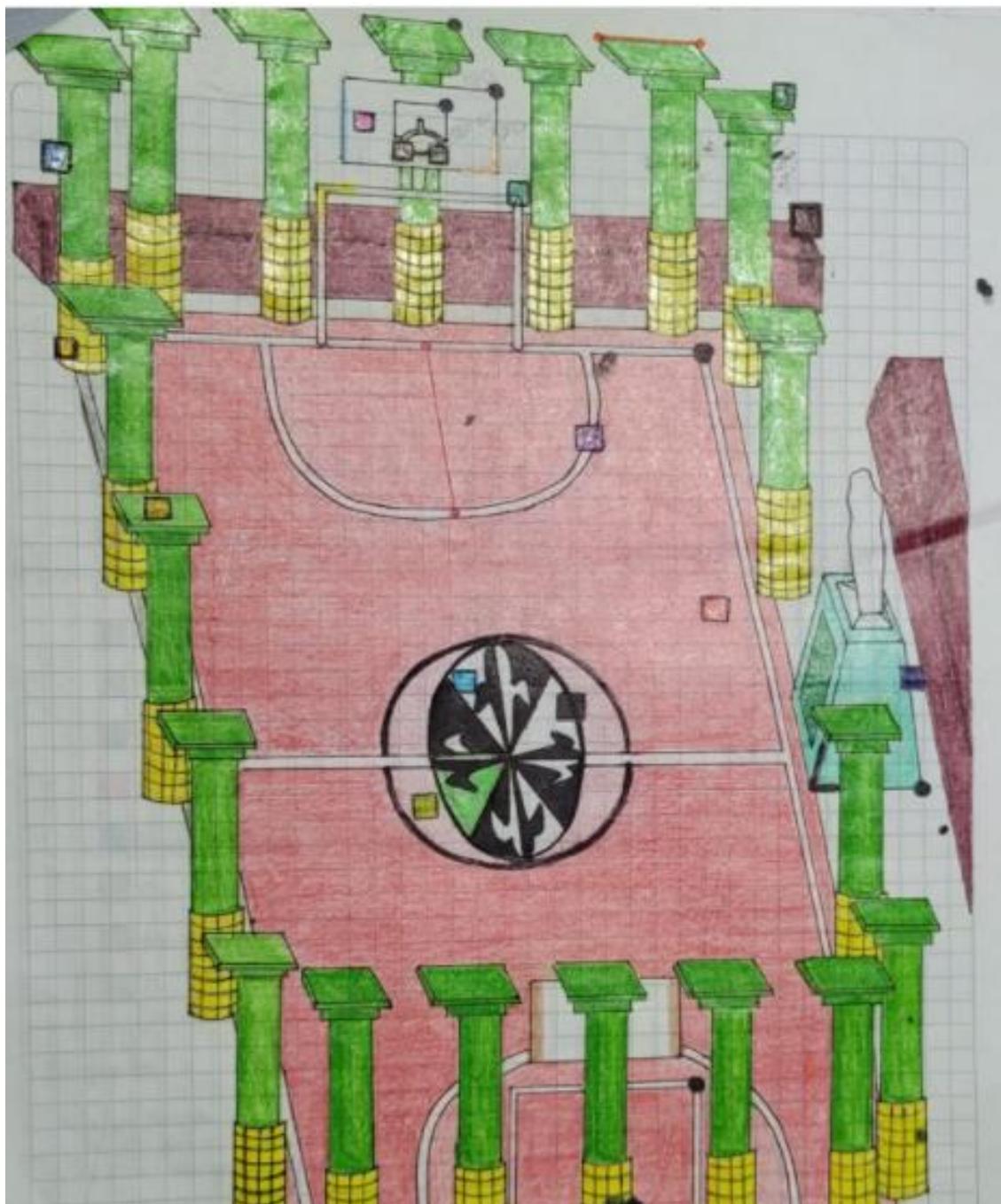


**Figura 34.** Respuesta del estudiante E 19 a la situación didáctica n 5 (Anexo 7)

En resumen, durante las situaciones didácticas trabajadas se enfatizó en lograr la representación más aproximada de objetos tridimensionales bajo un entorno específico. Esta construcción del patio central involucró la visualización de objetos geométricos, representación mental partiendo de lo bidimensional hacia lo tridimensional. Teniendo en cuenta los resultados, los componentes y estándares mencionados anteriormente el desempeño de cada estudiante es

superior bajo el criterio de representaciones tridimensionales, desde diferentes posiciones y perspectivas.

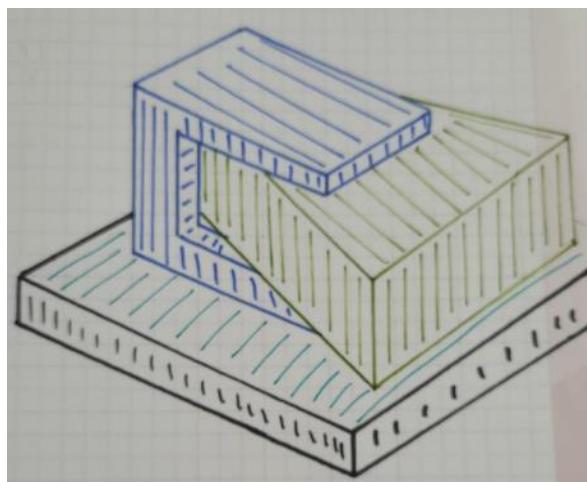
La implementación de estas cinco situaciones didácticas, teniendo en cuenta las representaciones tridimensionales fortalecieron el pensamiento espacial en los estudiantes y la forma de entender la geometría, pues ya no solo tenían que observarlas, sino visualizarlas y construirlas bidimensionalmente y tridimensionalmente. Así como lo plantea los estándares en matemáticas del MEN (2006), el pensamiento geométrico debe estar dirigido al actuar sobre el espacio real; crear, dibujar, producir, construir y retomar de estos esquemas los elementos que le sirvan al estudiante para llegar a una construcción, conceptualización y representación de conocimiento propio.



**Figura 35.** Respuesta del estudiante E 12 a la situación didáctica n 5 (Anexo 7)

## Prueba diagnóstica – prueba final

En este análisis se reflejan cambios sustanciales brindados por los desempeños logrados en las dos pruebas. Si miramos la prueba diagnóstica, solo se contaba con saberes previos; lo cual pretendía indagar sobre conceptos geométricos que el estudiante tenía desde su desarrollo escolar, mientras que, en la prueba final, los estudiantes ya ha habían pasado por una implementación de situaciones didácticas basadas en la teoría de Brousseau (2007), en donde se ha tenido la oportunidad del manejo de escenarios reales y herramientas como el dibujo bidimensional y tridimensional.



**Figura 36.** Respuesta del estudiante E 19 a la prueba diagnóstica (Anexo 8)

De esta forma se puede observar que los 23 estudiantes, durante la prueba diagnóstica, presentaban desempeños medios y bajos, evidenciando de este modo la necesidad de implementar estrategias en la búsqueda de un mejoramiento y fortalecimiento en el desarrollo del pensamiento espacial. Así, después de la implementación de estas situaciones didácticas, se realizó la prueba final. Los resultados mostraron que existe un mejoramiento en el desempeño matemático, tal como la investigación lo prevé en su proceso adquisitivo.

El aprendizaje logrado por los estudiantes y demostrados en la prueba final, muestran un mejoramiento progresivo para el desarrollo del pensamiento geométrico espacial. Estas situaciones enfatizaron en ciertos logros tales como: representaciones tridimensionales y la solución de problemas, teniendo una relevancia significativa en los resultados y en la implementación de cada una de las actividades que tenían un propósito de interacción con el mundo real.

## Conclusiones

- En este proceso investigativo se evidencia que con la implementación de las situaciones didácticas se desarrolló un progreso en los procesos de pensamiento geométrico según el MEN. Esto se presentó por parte del estudiante en su acercamiento al objeto matemático de forma individual y grupal. En este punto de la implementación los estudiantes fueron adaptando y restructurando sus conocimientos, partiendo de sus saberes previos.
- A pesar que la propuesta busca afianzar los estándares previstos por el MEN en lo que concierne en el desarrollo de pensamiento geométrico, este proyecto da luces frente a la necesidad del trabajo colectivo como elemento central en la construcción de conocimiento. El esquema de situaciones didácticas induce una simetría en aquellos que participan activamente en el desarrollo del pensamiento matemático.
- En la medida que esta propuesta se articula a contextos determinados, refuerza la adquisición y asimilación de conceptos desde factores propios de la cotidianidad, dando lugar a formulaciones alternativas a los esquemas tradicionales de reconstrucción bidimensional, por un acercamiento a entornos específicos, que aseguran el afianzamiento de aquel saber cuya característica primordial es la configuración de constructos con un elevado margen de abstracción y generalidad.

- Esta propuesta de forma indirecta contribuye a modelos de orientación vocacional que requieren de reconstrucciones espaciales del entorno y de contribuciones teóricas y prácticas a la solución de problemas propias de los escenarios vitales de la realidad humana.
- Con esta situación diseñada con relación al cumplimiento de nuestro objetivo general de este trabajo investigativo, demostró que los estudiantes del grado 901 de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario, pueden visualizar y posteriormente representar mentalmente y solucionar problemas con objetos tridimensionales, logrando la comprensión de estas formas desde diferentes perspectivas e ilustrarlos mediante el dibujo técnico.
- Por otra parte, se evidenció el modo por el cual los estudiantes desarrollaron su pensamiento espacial, con la solución de ejercicios mediante problemas que involucran construcciones con regla, áreas, perímetros y volúmenes. Así mismo, se logró la comprensión de las formas tridimensionales logrando que los estudiantes relacionaran los conceptos geométricos y las formas tridimensionales con su realidad. Ya que estos hacen parte de los espacios presentes en su diario vivir.
- El análisis de lo observado y recolectado refleja que los estudiantes lograron aprendizajes significativos, partiendo de representaciones del objeto matemático ya que pueden realizarse de varias formas. Así, para llegar a la representación de las formas tridimensionales, se diseñaron e implementaron situaciones didácticas cuyas

características fueron: la visualización, el análisis, la representación y la explicación del entorno a partir del pensamiento matemático teniendo en cuenta el componente geométrico.

- La implementación de situaciones didácticas, nos llevan a la reflexión crítica sobre la manera en la cual se reformula los modelos de trasposición didáctica, para que, de esta manera, puedan pensarse nuevas estrategias que permitan a nuestros estudiantes generar y construir cambios significativos autónomos o en comunidad sobre sus aprendizajes.
- Finalmente, se puede decir que el uso de situaciones didácticas donde involucre un entorno común para los estudiantes, logra el mejoramiento en la parte geométrica de la matemática. Por consiguiente, se recomienda vincular nuestra creatividad para el diseño de planes de clase, para así poder llegar a institucionalizar este tipo de prácticas pedagógicas en beneficio de los estudiantes. Dichas Prácticas de enseñanza-aprendizaje de la geometría se deben enfocar en la construcción del conocimiento a partir del desarrollo del pensamiento espacial y el trabajo colaborativo por parte de los estudiantes y docentes, desde su cotidianidad.
  - Esto fue visible entre la prueba diagnóstica y cada una de las actividades desarrolladas, notándose los faltantes cognitivos antes de la implementación de estas y el mejoramiento de estos después de su implementación.

## Bibliografía

- Acosta, J. E. (s.f). *elementos de geometria*. Medellin, Antioquia, Colombia: Universidad de Antioquia, Departamento de Matemáticas.
- Ausubel, D. P., Novak, J. D. y Hanesian, H. (1983). Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo (2a. ed.). Trillas. México
- Alemán Cruz, J. M. (2009). *La geometría con Cabri : una visualización a las propiedades de los triángulos*. Tegucigalpa, Honduras. Obtenido de <http://www.cervantesvirtual.com/nd/ark:/59851/bmc794s4>
- Acosta, M. (2013). formalización de razonamiento con geometrix.
- Acosta, J. E. (s.f). *elementos de geometria*. Medellin, Antioquia, Colombia: Universidad de Antioquia, Departamento de Matemáticas.
- Ávila, O. (2019). *Aprendizaje significativo en geometría para grado octavo*. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
- Bauersfeld, (1994). *el interaccionismo simbólico en educación matemática*. [https://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos\\_teoricos/Godino\\_Llinares\\_Interaccionismo.PDF](https://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/Godino_Llinares_Interaccionismo.PDF)
- Bauersfeld, H. (1994): *Perspectives on Classroom Interaction. Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*.
- Brousseau, G. (2007) Iniciación al estudio de las situaciones didácticas. Libros del Zorzal. Buenos Aires.
- Brousseau. (1986). *la théorisation des phénomènes d'enseignement des Mathématiques, tesis, Bordeus*.

- Eric W. Weisstein (Bloomington, Indiana, 18 de marzo de 1969) es un enciclopedista estadounidense, creador y mantenedor de la enciclopedia en línea *MathWorld*, así como de *Eric Weisstein's World of Science (ScienceWorld)*.
- Burger, W.F & Shaughnessy, J.M. (1986): characterizing the Van Hiele levels of development in geometry, Journal for Research in Mathematics Education vol. 17 n° 1, pp. 31 – 48.
- Castellanos, I. (2010). *Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software GeoGebra con alumnos de magisterio de la e.n.m.p.n.* <http://www.cervantesvirtual.com/obra/visualizacion-y-razonamiento-en-las-construcciones-geometricas-utilizando-el-software-geogebra-con-alumnos-de-ii-de-magisterio-de-la-enmpn/>
- Chevallard, Y. et al. (1997). Evolución de la problemática Didáctica. En Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Barcelona, España.
- Chevallard, Y. (1997). La transposición didáctica, Del saber sabio al saber enseñado.
- crowley, M.(1987). El modelo de Van Hiele. [www.proyectosur.com/descarga%20innovacion/van\\_hiele.doc](http://www.proyectosur.com/descarga%20innovacion/van_hiele.doc).
- Escudero Domínguez, A.M. (2017). Una propuesta de enseñanza de la geometría en Educación Infantil. En Simposio Internacional El Desafío de Emprender en la Escuela del SigloXXI (39-54), Sevilla, España: Universidad de Sevilla.
- Eisner, E. W. (1998). *El Ojo Ilustrado, indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa.* Barcelona: Paidós. file:///C:/Users/ASUS/Downloads/44445-Texto%20del%20art%C3%ADculo-68991-2-10-20140425.pdf

- Euskovasco[EJ] (2012).*Competencia matematica cuarto curso de E. primaria.*  
[http://ediagnostikoak.net/edweb/cas/item-liberados/ED09\\_Euskadi\\_Matem\\_EP4.pdf](http://ediagnostikoak.net/edweb/cas/item-liberados/ED09_Euskadi_Matem_EP4.pdf)
- Escobar, A.(2015). *Propuesta metodológica para la enseñanza-aprendizaje de la geometría mediada por el diseño de situaciones problema que contribuye a la formación de valores en el grado sexto de la I.E. Lola González.*  
<https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/56585>
- (Gardner, 2. (2013). *Aprendizaje Significativo en Geometría Para el Grado Octavo.*
- Gardner, H. (2013). Inteligencias múltiples: la teoría en la práctica. Barcelona: Paidós.  
file:///C:/Users/ASUS/Downloads/DialnetLaTeoriaDeLasInteligenciasMultiplesEnLaEns  
enanzaDe-4690236.pdf
- Godino, J., & Recio, Á. (Mayo de 2001). *significados institucionales de la demostración. implicaciones para la educación matemática. investigación didáctica,* 405-414.  
Recuperado el 2016
- Godino, J. Cajaraville, J. Fernández, T. Gonzato, M. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. Revista Números, Volumen 77 ISSN: 1887-1984.
- González, J. J., & Reyes, E. H. (2012). *obstaculos epistemologicos cognitivos y didacticos en enseñanza-aprendizaje de la geometria.* Duitama, Boyacá, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Recuperado el Abril de 2016
- Gómez, M. (2011). Pensamiento Geométrico y Métrico en las Pruebas Nacionales. Universidad Nacional de Colombia
- Hernández Sampieri, R., Fernandez Colado, C., & Baptista Lucio, p. (2006). *Metodología de la investigación 4ta edición.* iztapalapa, México. Obtenido de

<http://es.slideshare.net/miguelsantiagolopezzuleta/metodologia-de-la-investigacion-4ta-edicion-sampieri-2006>

- Hurtado, J. (2018) *El Proyecto de Investigación. Qué es investigar. El “quiénes” de la investigación. Maestría en Ciencias Penales y Criminológicas.* Materia: seminario de trabajo de grado. Material de estudio. Universidad Yacambú. Sexto trimestre
- Hurtado, J. (2010). *metodología de la investigación holística.* Caracas: Fundación Sypal.
- Idania, C. (23 de febrero de 2012). *Visualizacion y razonamiento en las contrucciones geometricas utilizando el software Geogebra con alumnos de magisterio de la e.n.m.p.n.* Obtenido de <http://www.cervantesvirtual.com/obra/visualizacion-y-razonamiento-en-las-construcciones-geometricas-utilizando-el-software-geogebra-con-alumnos-de-ii-de-magisterio-de-la-enmpn/>
- Inhelder, J. & Piaget. (2012) Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial. Recuperado de <http://dspace.usc.es/handle/10347/3692.1956>
- Iriarte, J.(2011). *Desarrollo de la competencia resolución de problemas desde una didáctica con enfoque metacognitivo.* <https://www.redalyc.org/pdf/853/85322574002.pdf>
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías en el plano.* La Evaluación del nivel de razonamiento (Tesis Doctoral). Universidad de Valencia, España.
- Lavicza, Z. (2007). *Mathematics in the school.* Recuperado el 5 de Abril de 2016, de <http://www.jstor.org/stable/30216033>
- López, S. (2006). *El empleo del software Cabri-Géomètre II en la enseñanza de la Geometría en la Universidad Autónoma de Guerrero, México.* Chilpancingo, Guerrero, México. Recuperado el Abril de 2016

- MEN, Colombia (2006). Estándares Básicos de Competencias. Recuperado de <http://www.mineducacion.gov.co>
- MEN, Colombia (2015). Derechos básicos de aprendizaje. Recuperado de <http://www.colombiaaprende.edu.co>
- MEN, Colombia (2016). Derechos básicos de aprendizaje. Recuperado de <http://www.colombiaaprende.edu.co>
- MEN, Colombia (2017). Índice sintético de calidad. Recuperado de <http://www.colombiaaprende.edu.co>
- MEN, Colombia. (2009). Decreto de evaluación nacional 1290 reglamentación. Bogotá D.C.
- MEN. (1998). Serie lineamientos curriculares. Matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales. Santafé de Bogotá, Colombia.
- Montoya, M. (2001). El Contrato Didáctico. Documento de trabajo. Magíster en Didáctica de la Matemática. PUCV. Valparaíso, Chile.
- Moise, E., & Downs, F. (1964). *GEOMETRÍA MODERNA*. Estados Unidos de America: AddisonWesley Publishing Company de Reading. Recuperado el Abril de 2016
- Panizza, Mabel, Bartolomé, Olga, Broitman, Claudia, Fregon, Dilma, Itzcovich, Horacio, Quaranta, María Emilia, Ressia de Moreno, Beatriz, Saiz, Irma Elena, Tarsow, Paola & Wolman, Susana. (2003). *Enseñar Matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB: Análisis y propuesta (1 ed.)*. Buenos Aires, Argentina: Paidos. Recuperado el 2016
- Piaget, J. (1978). La equilibración de las estructuras cognitivas, Siglo XXI. Madrid
- Piaget, J. (1981) La teoría de Piaget, Revista para el estudio de la educación y el desarrollo, 4: sup2, 13-54,

- Presa, M. J. (2012). Teoría de las situaciones didácticas de Brousseau. *Musas matemáticas...para inspirar clases creativas.* Obtenido de <http://musasmatematicas.blogspot.com.co/2012/06/situaciones-didacticas-resumiendo.html>
- Rojas, F. (2014). Estrategia didáctica para la enseñanza de la geometría del hexaedro. Medellín, Colombia.
- Sampieri. (2018). Metodología de la investigación sexta edición.
- Sadovsky, P. (2005) Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos, de Patricia Sadovsky. Educación Matemática, vol. 18, núm. 1, abril, 2006, pp. 177-179 Grupo Santillana México
- Sánchez, M. (2012) ¿Qué es la didáctica de las matemáticas? <https://mariosanchezaguirar.com/2012/09/28/que-es-la-didactica-de-las-matematicas/>
- Sánchez J. (2007). “Diseño y estudio de situaciones didácticas que favorecen el trabajo con registros semióticos” hace un aporte a todas aquellas actividades planteadas para el aprendizaje de los estudiantes. <https://eprints.ucm.es/40389/1/T38101.pdf>
- Soto, R. (2017). *realidad aumentada y secuencias didácticas como elementos de mejora en la educación matemática y la formación permanente del profesorado.* [https://repositorio.uam.es/bitstream/handle/10486/680152/soto\\_varela\\_roberto.pdf?sequence=1](https://repositorio.uam.es/bitstream/handle/10486/680152/soto_varela_roberto.pdf?sequence=1)
- Schulmaister, M. (2008). Presentación La enseñanza de la geometría. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. México, D.F
- Hernández - Sampieri - Mendoza, (2018). Metodología de la investigación. las rutas cuantitativas, cualitativas y mixtas.

- Thompson. (1951). *GEOMETRIA*.
- Vargas. G. (2013). *the van hiele model and the teaching of the geometry:* file:///C:/Users/ASUS/Downloads/Dialnet-ElModeloDeVanHieleYLaEnsenanzaDeLaGeometria-4945319.pdf
- Van Hiele, *Structure and insight*, Academic Press, New York, 1986.
- Villar, F. (2003) El enfoque constructivista de Piaget. Proyecto docente. Universidad de Barcelona. España.
- Vygotsky, L. (2000) El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Biblioteca de bolsillo. España.
- Zapata, G. (2014). EL desarrollo del pensamiento espacial a través del aprendizaje por descubrimiento. universidad de Antioquia

## Anexos

### Anexos 1: Consentimiento informado

**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA Y TECNOLOGICA DE COLOMBIA  
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA  
CONCEPTO DE FUNCIÓN**



Yo, \_\_\_\_\_ en calidad de acudiente de \_\_\_\_\_ del grado noveno, autorizo a los investigadores, Mg- Olga Yaneth Patiño Porras y Ángel Leonardo Cubides Quevedo para publicar y divulgar por medios electrónicos e impresos, sobre actividades realizadas en el proceso de investigación, encaminada a la representación de objetos tridimensionales a partir de situaciones didácticas en básica secundaria del Colegio Nuestra Señora del Rosario. Este proceso será objeto de investigación en el año 2021.

#### Firma del acudiente

---

**Documento “consentimiento informado”**

**Anexos2: Prueba diagnostica**

**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA Y TECNOLOGICA DE COLOMBIA**  
**MAESTRIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**  
**PRUEBA DIAGNÓSTICA**



Nombre:

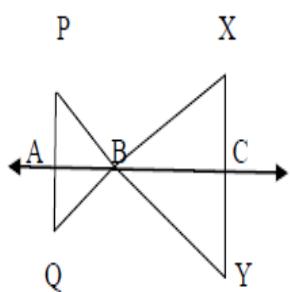
Grado:

Fecha:

*La siguiente actividad está planteada para estudiantes de grado noveno, la cual tiene como objetivo Identificar las fortalezas y debilidades que poseen los estudiantes para la construcción de figuras tridimensionales de su contexto.*

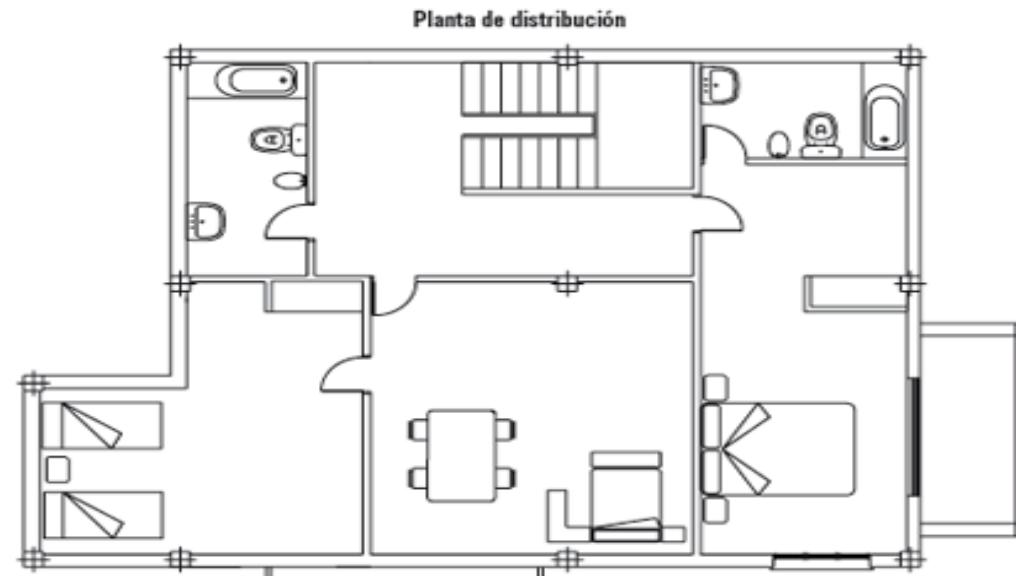
- 1. construya un cuadrado con dos perspectivas diferentes, utilizando sus herramientas como regla y compás.**

- 2. Observe, señale y defina lo que se pide en la siguiente figura.**

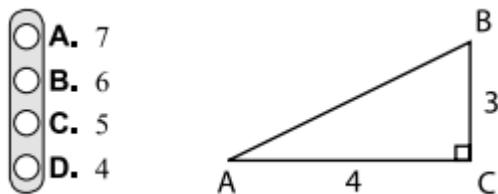


- a) Rectas Paralelas \_\_\_\_\_  
 b) Rectas Perpendiculares \_\_\_\_\_  
 c) Triángulos \_\_\_\_\_

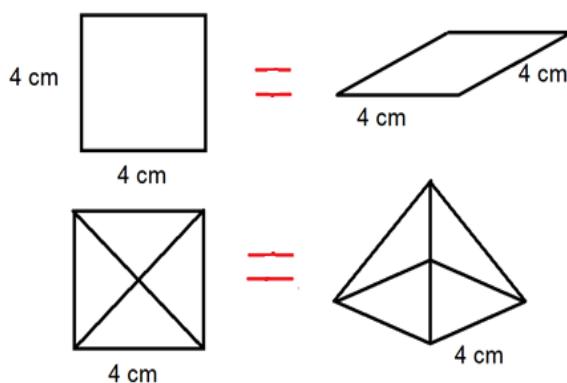
**3.** mencione más de 10 nombres de figuras o elementos geométricos que se visualizan en la siguiente imagen.



**4.** ¿cuál es la longitud del lado AB en el triángulo rectángulo ABC?



**5.** Observe las siguientes figuras y decida si las construcciones o afirmaciones son falsas o verdaderas.



### Anexos 3: situación didáctica N 1

**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA Y TECNOLOGICA DE COLOMBIA**  
**MAESTRIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**  
**ACTIVIDAD UNO. CUBOS Y CUBITOS.**

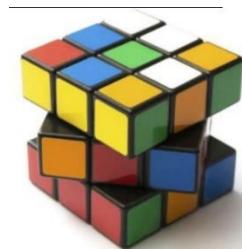
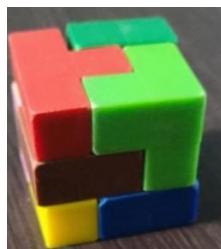


*La siguiente actividad fue planteada para estudiantes de grado noveno, la cual tuvo como objetivo generar imaginación y perspectivas por parte de los estudiantes para hablar del concepto de tridimensionalidad y construcción de un prisma.*

Nombre:

Grado: 901      Fecha:

- 1. Construya un cubo de aristas “3 cubitos”. ¿Cuántos cubitos fueron necesarios?**
  
  
  
- 2. ¿Cuántos cubito serán necesarios para construir un cubo de arista “4cubitos”? y de 5 cubitos?**
  
  
  
- 3. Imagina ahora que después de construido un cubo de “3 cubitos” se decide pintar este cubo de color verde.**
  - a. ¿cuántos cubos quedaran con una sola cara pintada?**
  - b. ¿Cuántos cubitos quedaran con 3 caras pintadas?**
  - c. ¿Cuántos cubitos quedaran con ninguna cara pintada?**
  - d. ¿Cuántos cubitos quedaron con dos caras pintadas?**



#### Anexos 4: situación didáctica N 2

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA Y TECNOLOGICA DE COLOMBIA

MAESTRIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTIVIDAD NÚMERO 2. CONSTRUCCIÓN DE PRISMAS.



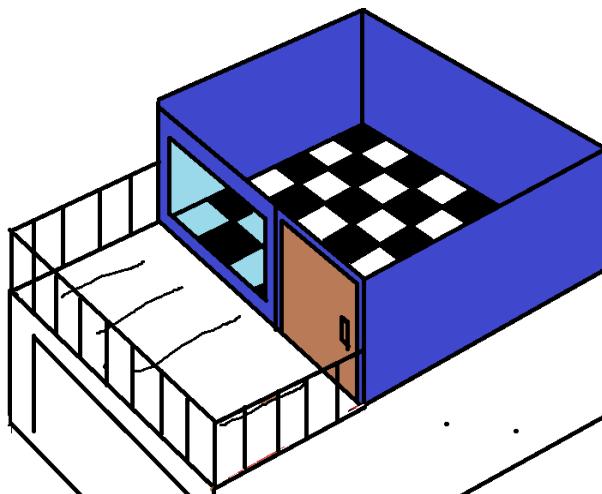
*La siguiente actividad fue planteada para estudiantes de grado noveno, la cual tuvo como objetivo reconocer los objetos geométricos que son necesarios para la construcción de figuras tridimensionales.*

Nombre:

Grado: 901

Fecha:

**1. construya la siguiente imagen planteada en el tv.**



**¿Reconoce figuras geométricas? Cuales.**

**¿De acuerdo a su construcción cree usted que está bien realizada, explique por qué?**

**¿Cree que la geometría es un saber que es necesario y está en cualquier parte nuestro entorno?**

## Anexos 5: situación didáctica N 3

**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA Y TECNOLOGICA DE COLOMBIA**  
**MAESTRIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**  
**ACTIVIDAD NÚMERO 3. CONSTRUCCIÓN DE UN ENTORNO REAL.**



*La siguiente actividad fue planteada para estudiantes de grado noveno, la cual tuvo como objetivo construir por medio de un dibujo, un espacio tridimensional de la institución para identificar y generar conocimiento real y práctico.*

1. Realice la siguiente representación, por medio de un dibujo tridimensional en una hoja tamaño carta u oficio.



2. Identifique todo tipo de elemento geométricos y organícelos en una lista o una forma de convenciones.
3. Teniendo en cuenta la representación y su trabajo desempeñado, defina el concepto de volumen.

**Anexos 6: Situación didáctica N 4.**

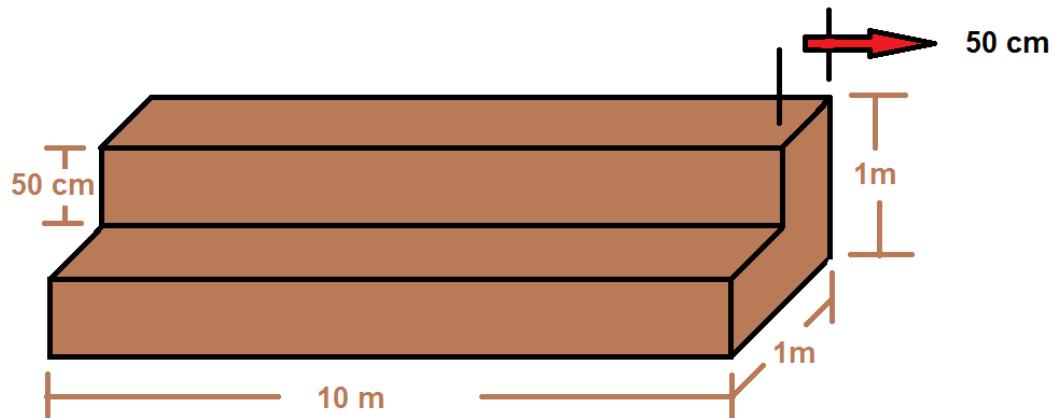
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA Y TECNOLOGICA DE COLOMBIA  
MAESTRIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA



**ACTIVIDAD NÚMERO 4. CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTO DE ÁREA Y VOLUMEN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS DE UN ENTORNO EN ESPECÍFICO (PATIO CENTRAL).**

*La siguiente actividad fue planteada para estudiantes de grado noveno, la cual tuvo como objetivo Construir el concepto de área y volumen por medio de medidas reales, de figuras geométricas, en un espacio tridimensional como el patio central.*

- 1. Calcular el área y volumen de la siguiente figura “grada de cancha de fútbol”**



**Fuente:** Elaboración propia.

- 2. Teniendo en cuenta la situación anterior, calcular el volumen y el área de los diferentes objetos tridimensionales mencionados en su lista de convenciones.**

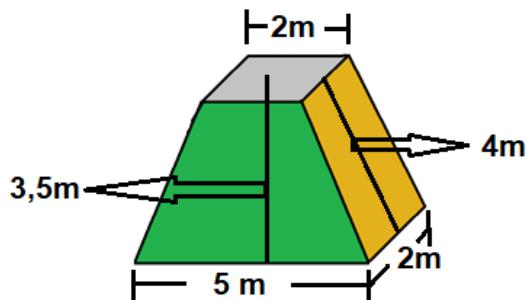
**Anexos 7: Situación didáctica N 5.**



**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA Y TECNOLOGICA DE COLOMBIA**  
**MAESTRIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**  
**ACTIVIDAD NÚMERO 5. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS CON**  
**FIGURAS REALES.**

*La siguiente actividad fue planteada para estudiantes de grado noveno, la cual tuvo como objetivo de demostrar el volumen de dos piezas geométricas plantadas en las situaciones anteriores a partir de lo trabajado en las actividades.*

1. ¿Reconoce la figura planteada en su representación tridimensional del patio central y que función cumple?



2. Nombre la figura anterior, luego calcule su volumen y área. Plantee cada paso realizado con la ayuda de sus compañeros.
3. Nombre la siguiente figura, luego calcule su volumen y área. Para las medidas verificar con flexómetro en patio central. Plantee cada paso realizado con la ayuda de sus compañeros.



4. ¿reconoce la figura planteada en su representación tridimensional del patio central y que función cumple?

**Anexos 8: PRUEBA FINAL**

**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA Y TECNOLOGICA DE COLOMBIA**  
**MAESTRIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**  
**PRUEBA FINAL.**



Nombre:

Grado:

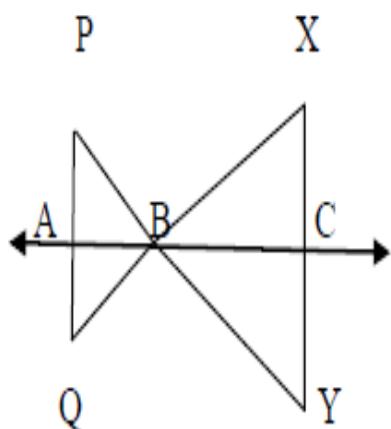
Fecha:

*La siguiente actividad está planteada para estudiantes de grado noveno, la cual tiene como objetivo Identificar las fortalezas y debilidades que desarrollaron los estudiantes para la construcción de figuras tridimensionales de su contexto, luego de la implementación de situaciones didácticas.*

1. De acuerdo a la siguiente figura considera verdadera o falsa la construcción de un cuadrado con dos perspectivas diferentes.

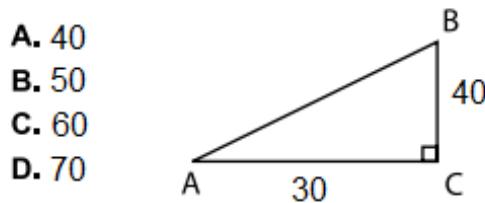


2. Observe, señale y defina lo que se pide en la siguiente figura.



- a) Rectas Paralelas \_\_\_\_\_
- b) Rectas Perpendiculares \_\_\_\_\_
- c) Triángulos \_\_\_\_\_

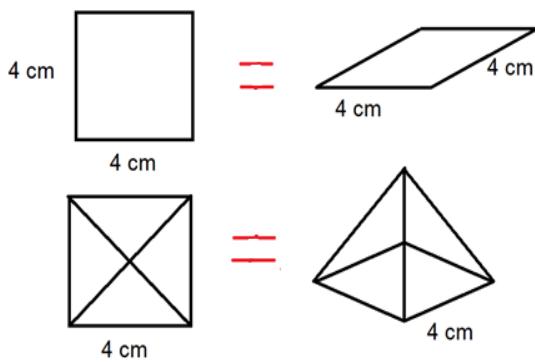
3. ¿cuál es la longitud del lado AB en el triángulo rectángulo ABC?



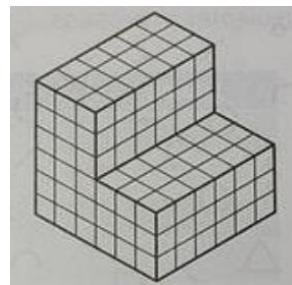
4. Mencione más de 15 elementos geométricos que se visualizan en la siguiente imagen. Coloréalos donde sea necesario.



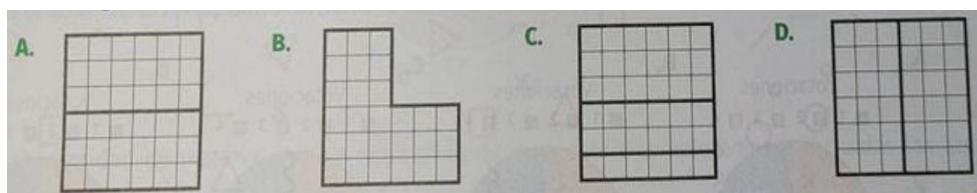
5. Observe las siguientes figuras y decida si las construcciones o afirmaciones son falsas o verdaderas.



6. A continuación, se representa un sólido geométrico.



De las siguientes vistas la que NO corresponde al sólido representado es.



7. Se desea construir un tanque de forma cilíndrica para almacenar agua, este tanque debe cubrirse con una lámina de material especial para evitar filtraciones. Las medidas del tanque se muestran a continuación.



La cantidad de material que se debe comprar para cubrir completamente incluidas las tapas superior e inferior del tanque es:

A.  $(39/2) \pi m^2$       B.  $(39/4) \pi m^2$       C.  $(33/2) \pi m^2$       D.  $(33/4) \pi m^2$

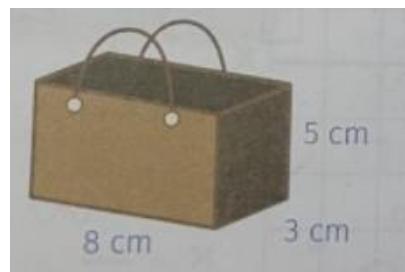
8. A una empresa diseñadora de bolsas de empaque, un cliente le ha encargado elaborar bolsas de cartón en forma de prisma recto que tengan la misma capacidad. Le han presentado al cliente varios diseños, pero el desea escoger aquel con el cual se emplee

la menor cantidad de cartón, ya que el precio depende de esto. De los siguientes modelos el que más le conviene al cliente es:

A.



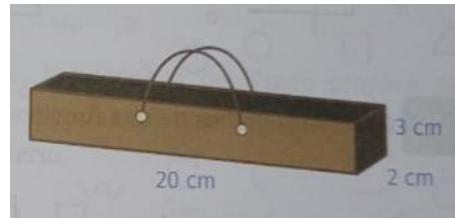
C.



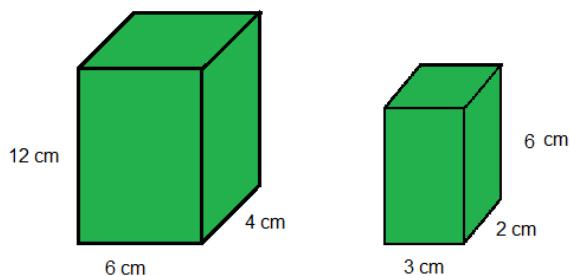
B.



D.



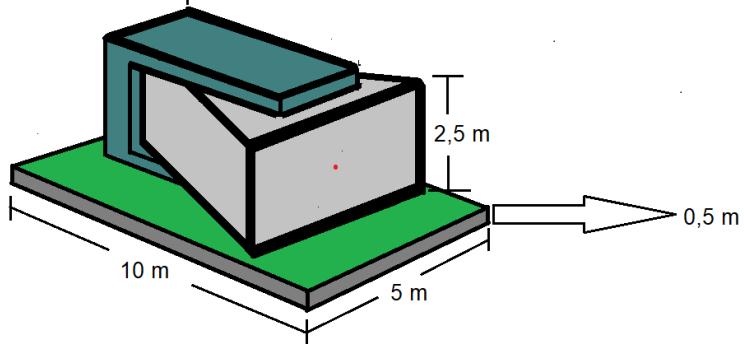
9. Tenemos dos prismas con tapa con las dimensiones mostradas a continuación:



Al comparar las áreas superficiales de los dos prismas, es correcto afirmar que el área del prisma 1 es:

- a. 2 veces el área del prisma 2
- b. 6 veces el área del prisma 2
- c. 4 veces el área del prisma 2
- d. 8 veces el área del prisma 2

10. Dibuje la siguiente imagen tridimensional.



Calcular el volumen de la base de la figura.

- a.  $25 \text{ m}^3$       b.  $225 \text{ m}^3$       c.  $125 \text{ m}^3$       d.  $50 \text{ m}^3$