

REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN LA ENSEÑANZA DEL
MOVIMIENTO RECTILÍNEO

DIDSON HARVEY SÁNCHEZ MONROY



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
TUNJA
2020

REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN LA ENSEÑANZA DEL
MOVIMIENTO RECTILÍNEO

DIDSON HARVEY SÁNCHEZ MONROY

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Educación Matemática

Director:

Dr. Pedro Nel Maluendas Pardo



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TUNJA

2020

ÍNDICE

Introducción	10
Capítulo 1	12
Planteamiento del Problema, Objetivos y Justificación.....	12
Planteamiento del Problema	12
Objetivo General.....	14
Objetivos Específicos.....	14
Justificación	14
Capítulo 2.....	16
Marco Teórico.....	16
Antecedentes	16
Fundamento Teórico	20
Representaciones Semióticas	20
Semiótica y Noética	20
Clasificación de los Diferentes Tipos de Representación.....	22
Criterios de Congruencia Entre Representaciones.....	24
Teoría de Resolución de Problemas.....	25
Estrategias para la Resolución de Problemas de la Física	30
Estudio Epistemológico del Movimiento.....	31
Movimiento Rectilíneo	35

Movimiento Rectilíneo Uniforme (M.R.U.)	36
Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (M.R.U.V.)	37
Capítulo 3.....	40
Metodología	40
Diseño de la Investigación	40
Unidad de Análisis	41
Etapas de Investigación.....	41
Técnicas e Instrumentos de Recolección de Información.....	43
Observación Participante	43
Diario de Campo	43
Pruebas Escritas	43
Vídeos	43
Foros	44
Plan de Análisis.....	44
Situaciones Problema.....	47
Prueba Preliminar.....	48
Situación 1	48
Situación 2	60
Situación 3	62
Capítulo 4.....	62

Análisis de la Información	62
Análisis Prueba Preliminar	63
Análisis Situación Problema 1	68
Análisis Situación Problema 2	88
Análisis Situación Problema 3	130
Análisis Global de Resultados	162
Capítulo 5.....	165
Conclusiones	165
Referencias.....	170
Anexos	173
Anexo 1. Carta Evaluación por Expertos.....	173
Anexo 2. Prueba Preliminar	175
Anexo 3. Situación Problema 1	178
Anexo 4. Situación Problema 2	180
Anexo 5. Situación Problema 3	183
Anexo 6. Autorización	184
Anexo 7. Asentimiento Informado	185
Anexo 8. Autorización Acudientes	187

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Antecedentes de la investigación	19
Tabla 2. Registros de representación semiótica del movimiento rectilíneo y sus unidades significantes.	44
Tabla 3. Desempeño estudiantes en prueba preliminar.....	67
Tabla 4. Desempeño de estudiantes E7, E8, E9 y E10, en el análisis del trayecto 1 de la situación 1.....	77
Tabla 5. Desempeño de estudiantes E7, E8, E9 y E10, en el análisis del trayecto 2 y 3 de la situación 1.	79
Tabla 6. Apuntes de los estudiantes E7, E8, E9 Y E10 en el diario y el informe de la situación 1.	83
Tabla 7. Representación gráfica y ecuaciones del movimiento rectilíneo.....	86
Tabla 8. Unidades significantes de los registros de representación presentes en la tarea 1, situación problema 2 (Anexo 4)	89
Tabla 9. Respuestas tarea 1 de la situación problema 2 (Anexo 4)	91
Tabla 10. Unidades significantes de los registros de representación presentes en la tarea 2, situación problema 2 (Anexo 4).....	96
Tabla 11. Respuestas tarea 2 de la situación problema 2 (Anexo 3)	97
Tabla 12. Congruencia entre representaciones gráfica y verbal, según respuesta de los estudiantes en la tarea 3, situación 2.....	102
Tabla 13. Transformaciones del registro de representación gráfico velocidad – tiempo. Tarea 4 situación 2	113
Tabla 14. Conversión y tratamiento del registro de representación algebraico y numérico para el M.R.U. Tarea 4 situación 2.....	116

Tabla 15. Conversión y tratamiento del registro de representación algebraico y numérico para el M.R.U.D. Tarea 4 situación 2	119
Tabla 16. Unidades significantes de los registros verbal, algebraico y numérico de la tarea 1 situación 3	132
Tabla 17. Representaciones numéricas y algebraicas de los estudiantes para la tarea 1 situación 3.	133
Tabla 18. Representaciones tabulares y gráficas de los estudiantes para distancia y tiempo de la tarea 1 situación 3.	137
Tabla 19. Representaciones tabulares y gráficas de los estudiantes para velocidad y tiempo de la tarea 1 situación 3.	142

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Teoría de resolución de problemas.....	28
Figura 2. Representación del movimiento de Nicolás Oresme (1323- 1382).....	34
Figura 3. Gráficas del movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.).....	37
Figura 4. Gráficas del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.).....	39
Figura 5. Gráficas del movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado (M.R.U.D.)	39
Figura 6. Diseño de la investigación.....	42
Figura 7. Respuestas de estudiantes E1, E2 Y E3 respectivamente en la tarea 1 de prueba preliminar.....	63
Figura 8. Respuestas de estudiantes E1, E2 Y E3 respectivamente en la tarea 2 de prueba preliminar.....	64
Figura 9. Respuestas de estudiantes E1, E3 Y E4 respectivamente en la tarea 3 de prueba preliminar.....	65
Figura 10. Respuestas de estudiantes E4 y E5 respectivamente en la tarea 5 de prueba preliminar.....	66
Figura 11. Respuestas de estudiantes E4 y E5 respectivamente en la tarea 6 de prueba preliminar.....	67
Figura 12. Algunas respuestas en el foro para la pregunta: “¿Que recomendamos para que el movimiento se visualice mejor?”	69
Figura 13. Trayectos para analizar el movimiento rectilíneo	71
Figura 14. Representación x-t y v-t. Trayecto 1 M.R.U.A, estudiante E4.....	72
Figura 15. Representación x-t y v-t. Trayecto 1 M.R.U.A, estudiante E4.....	72
Figura 16. Descripción del movimiento realizado en cada trayecto, estudiante E4	73

Figura 17. Descripciones en diario e informe, estudiante E4	73
Figura 18. Análisis del estudiante E6 del primer trayecto de la situación 1	74
Figura 19. Análisis del estudiante E6 del trayecto 2 y 3 de la situación 1	75
Figura 20. Ecuaciones del primer trayecto de la situación 1. Estudiante E6	76
Figura 21. Descripciones en diario e informe, estudiante E4	76
Figura 22. Representaciones estudiante E3, primer trayecto situación 1.	82
Figura 23. Representación gráfica x-t y v-t de los tres trayectos recorridos por el móvil en la situación 1.	87
Figura 24. Registros de representación gráficos de la tarea 1, situación problema 2 (Anexo 4). 90	
Figura 25. Solución de tarea 2, situación problema 2 (Anexo 4)	94
Figura 26. Representación gráfica del estudiante E6 a la tarea 2, situación 2 (Anexo 4)	95
Figura 27. Respuesta del estudiante E6 a la tarea 2, situación 2 (Anexo 4)	95
Figura 28. Solución de tarea 2, situación problema 2 (Anexo 4)	101
Figura 29. Respuestas de los estudiantes E6 y E4 respectivamente, de la tarea 3, situación 2. 104	
Figura 30. Respuestas de los estudiantes E9 y E1 respectivamente, de la tarea 3, situación 2. 105	
Figura 31. Respuestas de los estudiantes E2 y E3 respectivamente, de la tarea 3, situación 2. 106	
Figura 32. Respuestas de los estudiantes E6 y E9 respectivamente, de la tarea 3, situación 2. 107	
Figura 33. Solución de la tarea 4, situación 2 (Anexo 4).....	109
Figura 34. Representación geométrica de estudiantes E6, E5, E7 de la tarea 4, situación 2 (Anexo 4)	111
Figura 35. Actividades cognitivas de los registros verbal y gráfico de la tarea 4, situación 2.. 112	
Figura 36. Representación gráfica de distancia – tiempo, por el estudiante E4, Tarea 4, Situación 2.....	124

Figura 37. Representaciones gráficas de distancia – tiempo, por estudiantes E5, E10 y E2 respectivamente. Tarea 4 situación 2	125
Figura 38. Representaciones gráficas de distancia – tiempo, por estudiantes E9, E1 y E8 respectivamente. Tarea 4 situación 2.	126
Figura 39. Representaciones gráficas de aceleración – tiempo, por estudiantes E5, E10 y E2 respectivamente. Tarea 4 situación 2	126
Figura 40. Solución de tarea 5, situación 2 (anexo 4).....	127
Figura 41. Respuesta de estudiantes E1 y E6 respectivamente de tarea 5, situación 2	128
Figura 42. Respuesta de estudiantes E4 y E8 respectivamente de tarea 5, situación 2	128
Figura 43. Respuestas de estudiantes E7 y E9 de la tarea 5, situación 2 (anexo 4).....	129
Figura 44. Representaciones de la aceleración por los estudiantes E6 y E4 respectivamente de la tarea 1 situación 3.	146
Figura 45. Simulador de caída libre y conclusiones del mismo realizadas por los estudiantes E1, E2 y E6 respectivamente, de la tarea 1, situación 3.....	147
Figura 46. Imágenes tomadas de algunos vídeos de los estudiantes para la caída libre de la tarea 1, situación 3.	148
Figura 47. Conclusiones del video realizados por los estudiantes E1, E4, E6 y E7 respectivamente de la tarea 1 situación 3.....	148
Figura 48. Capturas de vídeo y conclusión del estudiante E10, tarea 1 situación 3.....	150
Figura 49. Simulador de caída libre para dos objetos con diferente masa, teniendo en cuenta la densidad del aire.	151
Figura 50. Respuestas de los estudiantes E7, E8 y E10 para la pregunta de la tarea 1 situación 3.	152

Figura 51. Respuestas del estudiante E2 para la pregunta de la tarea 1 situación 3	153
Figura 52. Primeras aproximaciones de estudiantes E4 y E9 de la tarea 2 situación 3.	154
Figura 53. Representaciones utilizadas para el análisis de la distancia por los estudiantes E6, E4 y E7 respectivamente de la tarea 2, situación 3.	155
Figura 54. Representación gráfica de los estudiantes E10, E8, E6, E4 y E7 respectivamente de la tarea 2, situación 3.	156
Figura 55. Representación gráfica de los estudiantes E2, y E9 respectivamente de la tarea 2, situación 3.	157
Figura 56. Representación gráfica de la aceleración con respecto al tiempo de los estudiantes E4, E6 y E7 para la tarea 2, situación 3.....	158
Figura 57. Conclusiones de los estudiantes E1, E4, E6, y E9 de la tarea 2, situación 3.....	159
Figura 58. Gráfica distancia tiempo realizado por el estudiante E1 y su comparación con el simulador de movimiento de un proyectil, para la tarea 2, situación 3.	160
Figura 59. Conclusiones de los estudiantes E1, E4, E6, y E7 de la tarea 2, situación 3 comparando con el simulador de movimiento de un proyectil.....	161

Introducción

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) presenta en los derechos básicos de aprendizaje para los estudiantes de grado décimo, la importancia de desarrollar conocimientos y habilidades en la resolución de problemas mediante el uso de las propiedades de funciones y el uso representaciones tabulares, gráficas y algebraicas entre magnitudes (MEN, 2016).

En el estudio del movimiento rectilíneo se requiere de la identificación de magnitudes y la relación que presentan, además de analizar su variación, lo cual puede hacerse con diversas representaciones. En este sentido Duval (1999) afirma que la comprensión en matemáticas se logra al distinguir un objeto de su representación, además de la existencia de representaciones mentales, es decir, de todo aquel conjunto de imágenes y conceptos que un individuo puede tener sobre un objeto, en donde las representaciones semióticas son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática.

Por otro lado, el movimiento rectilíneo presenta problemas que pueden ser contextualizados, para dar solución a estos se requiere de la utilización de un pensamiento matemático que permita interpretarlos. Además, crear una atmósfera racional y emocional necesaria para el razonamiento matemático y así ser críticos a través de interrogar, desafiar y reflexionar, promoviendo un potencial investigador (Mason, Burton y Stacey, 1998).

En este trabajo se pretende aportar elementos que promuevan las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de representaciones semióticas del movimiento rectilíneo. En primer lugar, se realiza un análisis del tema a partir de una revisión epistemológica, ya que, al analizar la trascendencia de una temática, permite que el estudiante tenga una visión que lo lleva a relacionar mejor los eventos con su entorno, la comprensión del sentido de expresiones utilizadas y su contextualización (León, 2016).

Se plantean experiencias prácticas de movimiento con las cuales se espera que los estudiantes asimilen y construyan el conocimiento del objeto estudiado, a partir de sus conocimientos previos. Esto con el fin de que el estudiante sea llamado a actuar como un matemático, para realizar generalizaciones y posteriormente aplicarlas en la resolución de problemas contextualizados.

El desarrollo de la investigación presente en el documento comprende los siguientes capítulos: En el primero se da a conocer el problema de investigación, los objetivos y la justificación; en el segundo capítulo se describe el marco teórico con algunas investigaciones que trabajaron temáticas relacionadas y el fundamento teórico planteado; en el capítulo tres, se encuentra la metodología implementada y las etapas que permitieron lograr los objetivos; en el capítulo cuatro se realiza el análisis de la información obtenida y en el capítulo cinco se describen las conclusiones.

Con la investigación se busca promover el desarrollo del razonamiento matemático a través de la resolución de problemas, además de la comprensión de actividades cognitivas de tratamiento y conversión de representaciones semióticas del movimiento rectilíneo. Las actividades permitieron evidenciar una mejora en la conceptualización de los componentes del movimiento rectilíneo por parte de los estudiantes y la importancia de los mismos, en las diferentes representaciones.

Capítulo 1

Planteamiento del Problema, Objetivos y Justificación

Planteamiento del Problema

El estudio del movimiento rectilíneo requiere de procesos cognitivos que involucran análisis de problemas y conocimientos matemáticos con diversas representaciones analíticas, gráficas y aplicaciones prácticas, por tal razón se requiere de un análisis estructurado de las tres “actividades cognitivas” referidas a los registros de representación semiótica: la formación, el tratamiento y la conversión (Duval, 1999).

Las representaciones semióticas son relativas a un sistema particular de signos que “pueden ser convertidas en representaciones equivalentes en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza” (Duval, 1999, pp. 27).

En la resolución de problemas con movimiento rectilíneo, es necesario reconocer las magnitudes y ecuaciones necesarias, además de las interpretaciones que estas tienen de manera gráfica, la descripción analítica que presentan y las aplicaciones prácticas que se pueden realizar identificando si se trata de un movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.) o de un movimiento rectilíneo uniformemente variado (M.R.U.V). Estas requieren de la realización de las tres actividades cognitivas referidas por Duval (1999), mencionando que se debe identificar una representación en un sistema determinado, transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas, propias al sistema, y convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema.

Para Moreira (2014) la enseñanza de la física en la educación contemporánea estimula el aprendizaje mecánico de contenidos desactualizados, lo que dificulta la interacción directa de

los estudiantes con el objeto de estudio. Según diversas investigaciones, para lograr un mejor funcionamiento que las clases expositivas y problemas para resolver en casa, hay que tener a los estudiantes trabajando en pequeños grupos con profesores que pueden ayudarlos a aplicar conceptos científicos básicos a situaciones de la vida real.

El desarrollo de habilidades complejas no es una cuestión de llenar un cerebro sino de desarrollarlo, planteando al estudiante problemas que son desafiantes pero factibles, que involucran explícitamente la práctica del pensamiento y del desempeño científico. El profesor es un orientador que estimula a los estudiantes para dominar las habilidades necesarias (Moreira, 2014).

En este sentido, para evitar algunas de las dificultades que suelen presentar los estudiantes para relacionar el análisis del movimiento rectilíneo, con el concepto de función y sus representaciones en los diferentes registros, además de la solución de situaciones problema, es necesario que se identifiquen las magnitudes presentes y su correspondencia con las ecuaciones trabajadas en el concepto de función lineal y función polinómica. Por esto hay que resaltar la relevancia de las matemáticas en las ciencias, tal y como lo expresa Einstein (1933): “estoy convencido de que mediante construcciones puramente matemáticas se pueden descubrir los conceptos y las leyes que los conecten entre sí, que son los elementos que nos ofrecen la clave para la comprensión de los fenómenos naturales”.

Bajo los argumentos expuestos, se abordó la pregunta de investigación ¿Cómo las representaciones semióticas privilegian el aprendizaje del movimiento rectilíneo?

Para dar solución a esta pregunta, se plantean las siguientes preguntas de menor alcance que direccionan el trabajo de investigación: ¿Cómo construir el concepto de movimiento rectilíneo a través de las representaciones semióticas?, ¿qué estrategias se pueden implementar para

promover el tratamiento y conversión de los registros de representación semiótica del movimiento rectilíneo?, ¿cómo observar que el aprendizaje del movimiento rectilíneo con el uso de representaciones semióticas fue adecuado para los estudiantes?

Objetivo General

Analizar las actividades cognitivas realizadas por los estudiantes para posibilitar una mejor comprensión y desarrollo del aprendizaje de las representaciones semióticas en la solución de situaciones propias del movimiento rectilíneo.

Objetivos Específicos

- Aplicar la teoría de los registros de representación semiótica para promover el desarrollo del razonamiento matemático en la resolución de problemas de movimiento rectilíneo.
- Reconocer las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de los registros de representación semiótica del movimiento rectilíneo a través de actividades teóricas y prácticas.
- Identificar el reconocimiento que hacen los estudiantes del concepto de movimiento rectilíneo a través de diferentes representaciones semióticas relacionándolas con su contexto.

Justificación

En el estudio del movimiento rectilíneo se requiere el uso de diversos registros de representación semiótica. En el desarrollo del tema con estudiantes del grado décimo se ha observado que los procesos de conversión no son realizados frecuentemente como una estrategia práctica para una mejor comprensión y análisis. Por esto, es necesario que el docente cree condiciones para la realización de las actividades cognitivas referidas por Duval (1999), potenciando el tratamiento y conversión de registros de representación semiótica del movimiento.

Gomes (2018) a través del análisis de las contribuciones de la teoría de los registros de representación semiótica en la resolución de problemas de la física, concluye que con la inserción de una variedad de registros de representación semiótica y asegurándose de que existe una congruencia entre estos registros, a través de la discriminación de sus unidades significativas, entendidas como los valores que pueden tomar las diferentes variables en cada registro de representación, hay un aumento en la tasa de éxito de los estudiantes con respecto a la solución de los problemas trabajados.

Es fundamental para el desarrollo del tema de movimiento rectilíneo, que se manejen correctamente las funciones lineales y cuadráticas con sus respectivos análisis. Esto para poder relacionar las variables y así comprender e identificar el tratamiento y conversión en los registros de representación semiótica tales como: gráficos, símbolos, tablas, expresiones en lenguaje natural, etc. Para Duval (1999) “la conversión de las representaciones es, para el aprendizaje, una actividad tan fundamental como las actividades de formación o de tratamiento. Esto, porque solo la conversión puede favorecer la coordinación de los registros de representación” (p. 47).

Esta investigación es una propuesta para la enseñanza del concepto de movimiento rectilíneo utilizando la teoría de las representaciones semióticas de Duval y aprovechando la teoría de la resolución de problemas de Mason Burton y Stacey. Para esto se planificaron situaciones problema que motivaron el estudio del movimiento rectilíneo a través de una actividad investigativa, para que los estudiantes pudieran manipular la información del concepto pasando de un registro de representación a otro y realizando una transformación en el interior de un mismo registro. Esto permite que el objeto se pueda aprender según la tesis de Duval (1999), que se reduce a “no hay noesis sin semiósis”, es decir, la aprehensión o producción de una representación

semiótica determina las condiciones para los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto.

Capítulo 2

Marco Teórico

Para el desarrollo del trabajo se tienen en cuenta varios referentes teóricos e investigaciones similares realizadas previamente sobre la teoría de registros de representación semiótica relacionados con funciones, resolución de problemas y la didáctica de la física, para reforzar y sustentar mejor el proceso realizado en la investigación y así tener más herramientas que evidencien el problema planteado.

Antecedentes

En el estudio de Gomes (2018) se plantean las preguntas: ¿Es posible estudiar y aprender física sin que haya un proceso de desarrollo de abstracción, con la utilización de sus signos y símbolos específicos?, ¿cómo desarrollar la abstracción para que sea posible la sistematización de los signos o símbolos en la enseñanza y aprendizaje de la física por parte de los estudiantes? En cuanto a la metodología, se realizó una investigación cualitativa, y para el análisis y recolección de información, se realizaron un total de 20 actividades, entre ellas diagnósticas desarrolladas según los criterios de congruencia y modelo cognitivo de representación centrado sobre la función de objetivación de Duval.

Entre los resultados más importantes, fue posible verificar que cuando hay un desarrollo de los problemas de física con la inserción de una variedad de registros de representación semiótica y, siendo garantizado que ocurra la congruencia entre esos registros, por medio de la discriminación de las unidades significantes, hay un aumento en la tasa de éxito de los estudiantes acerca de la solución de los problemas trabajados. Este trabajo brinda una visión a la presente

investigación con respecto a la importancia del uso de representaciones semióticas en la resolución de problemas, en particular en el área de Física.

Por otro lado, Mayorga (2017), se plantea la pregunta: ¿Cómo favorecer un aprendizaje significativo de la cinemática lineal, específicamente en el análisis de gráficas teniendo en cuenta las normatividades nacionales articulado con el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) desde un enfoque constructivista bajo acciones de un trabajo colaborativo? En cuanto a su metodología, se implementó un tipo de investigación de carácter cualitativa y cuantitativa, fundado en la experimentación, de tal forma que se pueda hacer un contraste entre los elementos iniciales (hipótesis) frente a lo hallado (evidencias) y con ello poder emitir juicios de valor y formular posibles resultados. En los resultados más importantes de la investigación, los estudiantes a pesar de presentar algunas falencias en conocimientos matemáticos, como despejes de ecuaciones lineales y cuadráticas y demás procesos aritméticos y algebraicos inmersos en el análisis gráfico, se encontró que hubo una ganancia de aprendizaje normalizada de 0.27, categorizándose como un nivel bajo pero significativo para la corta intervención realizada, ya que como según el pretest se pasó de un 31% de favorabilidad, frente a un 50% en la aplicación del post test.

Rojas (2014) aborda la pregunta de investigación: ¿Qué explica la dificultad que encuentran los estudiantes para articular los diferentes sentidos asignados a representaciones de un objeto matemático obtenidas mediante transformaciones de tratamiento?, en la metodología establece un enfoque cualitativo seleccionando instituciones de carácter público. Entre los resultados más importantes se evidenciaron dificultades que encontraron varios de los estudiantes en relación con las interpretaciones de las expresiones dadas y con la realización de tratamientos

de dichas expresiones, particularmente en el contexto algebraico una de estas dificultades tiene que ver con la generalización a partir de algunos casos particulares.

En Ospina (2012), se trabajó el problema de comprender las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de situaciones propias del concepto de función lineal. La metodología se realizó con un enfoque cualitativo interpretativo. Entre los resultados más importantes se obtuvo que el contexto de la situación influye en los registros de representación y en las transformaciones que utilizan los estudiantes para resolverlas, asimismo en la identificación de las unidades significantes en la situación y la puesta en correspondencia en los otros registros, los estudiantes mostraron dificultades en la conversión al registro algebraico fuera de otro registro que no sea el gráfico.

En la investigación de Díaz (2010) presenta un paquete de estrategias de enseñanza aprendizaje con aplicaciones a la física, motivando a los estudiantes para que desarrollen el gusto por las asignaturas asociadas a las ciencias básicas. Su metodología es de tipo cualitativo, aplicando el estudio de casos, el aprendizaje significativo, el aprendizaje basado en problemas; usa el método de proyectos y el trabajo cooperativo entre otros. Entre los resultados más importantes, la investigación muestra un pequeño ejemplo de cómo sí pueden funcionar las estrategias planteadas, demostrando que los jóvenes lo que necesitan son clases más activas que los lleven a la construcción de su propio conocimiento, involucrándose en la investigación y aprovechando su creatividad. Este trabajo aporta a la presente investigación material relevante para el diseño de estrategias encaminadas al uso de las representaciones semióticas.

En la **tabla 1**, se presenta el resumen de las tesis analizadas para la construcción de los antecedentes del estudio.

Tabla 1.

Antecedentes de la investigación

Tema	Clase	Marco teórico	Nombre de la tesis	Autor	Año
La abstracción en la enseñanza y aprendizaje de la física	Doctorado	Teoría de los registros de representación semiótica.	La abstracción en la enseñanza y aprendizaje de la física: contribuciones de la teoría de los registros de representación semiótica en la resolución de problemas.	Luís Gomes De Lima	2018
Análisis e interpretación de gráficos en un movimiento rectilíneo	Maestría	Teoría de la actividad de formación por etapas de las acciones mentales	Análisis e interpretación de gráficos en un movimiento rectilíneo desde un enfoque constructivista bajo el trabajo colaborativo-cooperativo haciendo uso de recursos físicos y las TIC en la I.E.M. Palmarito, sede Betania.	Jesús Antonio Mayorga Muñoz	2017
Articulación de saberes matemáticos	Doctorado	Teoría de los registros de representación semiótica.	Articulación de saberes matemáticos: representaciones semióticas y sentidos.	Pedro Javier Rojas Garzón	2014
Aprendizaje del concepto de función lineal.	Maestría	Teoría de los registros de representación semiótica.	Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal	Delma Ospina García	2012
Enseñanza y material de apoyo para física.	Maestría	Constructivismo y teoría de aprendizaje significativo.	Estrategias de enseñanza y material de apoyo para física I.	Silvia Díaz Cerenil	2010

Fundamento Teórico

Para el cumplimiento de los objetivos se toma como fundamento la teoría de representaciones semióticas de Duval, la teoría de resolución de problemas de Mason, Burton y Stacey, además del movimiento rectilíneo como objeto de estudio.

Representaciones Semióticas

Las representaciones semióticas son relativas a un sistema particular de signos que pueden ser convertidos en representaciones equivalentes en otro sistema semiótico, los cuales pueden tomar significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza (Duval, 1999).

Según Godino (2003):

“una característica importante de la actividad matemática es el uso de diversos sistemas de expresión y representación, además del lenguaje natural: variados sistemas de escritura para los números, escrituras algebraicas para expresar relaciones y operaciones, figuras geométricas, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc.”

Para Duval (1999) las representaciones semióticas son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática, no solamente para fines de comunicación, ya que hace parte de un proceso intrínseco al utilizar varios registros de representación semiótica, sean gráficos, símbolos, íconos, tablas, entre otros, además de expresiones en lenguaje natural, es decir, la capacidad de escribir textos coherentes, organizados y argumentados.

Semiótica y Noética

Duval distingue dos conceptos fundamentales: “semiósis, la aprehensión o la producción de una representación semiótica, y noesis, los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto” (1999, p. 14).

Existe una interdependencia estrecha entre noética y semiótica, ya que en las características de la noética el uso de más registros de representación semiótica es típica del pensamiento humano y la creación y desarrollo de sistemas semióticos nuevos es símbolo de progreso del conocimiento, por lo que, “no solo no existe noética sin semiótica, sino que la semiótica se adopta como característica necesaria para garantizar el primer paso hacia la noética” (D’ Amore, 2004).

Según Duval (1999), hay tres actividades cognitivas fundamentales de representación ligadas a la semiósis:

- 1) La formación de representaciones semióticas, es decir, la identificación de una representación en un registro dado.
- 2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación al interior del registro de representación o de un sistema.
- 3) La conversión de una representación, lo cual es la transformación de un objeto, situación o información dada en un registro, en una representación de estos mismos, pero en otro registro conservando la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

El dominio de la semiósis debe ser un objetivo de la enseñanza, ya que esta no es espontánea teniendo en cuenta la diversidad de sistemas de representación semiótica, sus transformaciones y conversiones, resaltando que se debe brindar una atención particular a la conversión de los registros de representación no congruentes entre sí (Godino, 2003).

D’ Amore (2004) plantea que la comunicación en las matemáticas, es condicionada por el registro de representación preseleccionado, el cual puede llegar a ser impuesto de diversas formas, lo que lleva a construir el aprendizaje con la socialización que se puede extraer del medio en el que se comunique.

“Durante el aprendizaje de las matemáticas, se introduce a los estudiantes en un mundo nuevo, tanto conceptual como simbólico (sobre todo representativo)” (D’ Amore, 2004, p. 10).

En el análisis de desarrollo de pensamiento y los problemas de aprendizaje de las matemáticas para un estudio sobre los aprendizajes fundamentales relativos al razonamiento, la comprensión de textos, y la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos, se debe tener en cuenta los tres fenómenos relativos a la semiósis (Duval, 1999), que se encuentran muy relacionados entre sí, los cuales se refieren a:

- 1) Diversificación de los registros de representación semiótica: Los sistemas de representación son muy diferentes entre sí y cada uno de ellos plantea preguntas sobre el aprendizaje.
- 2) Diferenciación entre representante y representado o entre forma y contenido de una representación semiótica: Diferenciación que está asociada a la comprensión de lo que la representación representa y la posibilidad de asociar otras representaciones e integrarlas a los procedimientos de tratamiento.
- 3) Coordinación entre los diferentes registros de representación: Es importante tener en cuenta los fenómenos de congruencia entre las representaciones producidas en los diferentes sistemas de representación semiótica para que puedan ser movilizados y utilizados conjuntamente.

Clasificación de los Diferentes Tipos de Representación

Para caracterizar las representaciones semióticas se recurre a la oposición interno/externo y la oposición consciente/no-consciente, esta última hace referencia a la oposición entre la observación que un sujeto realiza y aquello que se le escapa y no puede observar. En cuanto a las representaciones internas/externas hacen referencia a la oposición entre las representaciones semióticas y aquellas que pertenecen a un sujeto y no son comunicadas a través de representaciones externas (Duval, 1999).

Duval describe que “en la actividad cognitiva de los individuos, las representaciones semióticas se consideran representaciones externas y se oponen a las representaciones mentales que serían no semióticas” (2017, p. 97).

Goldin y Shteingold (2001) hacen referencia a que la enseñanza más efectiva de las matemáticas se logra cuando se entienden los efectos de representaciones externas y actividades matemáticas estructuradas en el aprendizaje de los estudiantes, para esto es necesario poder discutir acerca de las representaciones asignadas al significado de conceptos, además de las relaciones estructurales que desarrollan y la forma en las que asocian las diferentes representaciones a través de procesos internos.

En la enseñanza de cada tema matemático, es importante observar el desarrollo de sistemas internos de representación (representaciones mentales) fuertes y flexibles en cada estudiante como meta esencial, ya que estos pueden desarrollarse independientemente uno del otro, esto puede lograrse aprovechando los nuevos sistemas de representación externa que brindan las nuevas tecnologías (Goldin y Shteingold, 2001).

Duval (2017) presenta una clasificación de los registros utilizados en matemáticas, situando todas las transformaciones de representación que constituyen la actividad matemática, basándose en las siguientes cuatro características fundamentales:

- Los registros *discursivos* son aquellos cuya linealidad está basada en la sucesión para producir y organizar secuencias de palabras o símbolos, no se considera que el lenguaje natural conforma el mismo tipo de representación que los lenguajes formales o los escritos simbólicos.
- Los registros *no discursivos* consisten en la aprehensión simultánea de una organización bidimensional de figuras de n dimensiones, las configuraciones geométricas no hacen parte del

mismo tipo de representación que los gráficos cartesianos, diagramas o imágenes dibujadas a mano.

- En los registros *multifuncionales*, las transformaciones de las expresiones no son algorítmicas, los registros multifuncionales cumplen fuera de las matemáticas las funciones de comunicación y objetivación, y bajo condiciones particulares la función de tratamiento.
- En los registros *monofuncionales* las transformaciones de las expresiones son algorítmicas, por lo cual son específicos para las matemáticas.

Los registros multifuncionales son al menos tan importantes como los monofuncionales, el principal problema es con el lenguaje natural ya que “se utiliza para cumplir la función de comunicación entre estudiantes y maestros y para cumplir la función de tratamiento matemático siempre que sea necesario para justificar o probar, estas dos prácticas del lenguaje natural están en conflicto entre sí” (Duval, 2017, p. 84).

Criterios de Congruencia Entre Representaciones

La conversión entre dos representaciones es congruente, si al segmentar cada una de las representaciones en sus unidades significantes (entendidas como los valores que pueden tomar las diferentes variables en cada registro de representación), para ponerlas en correspondencia, permite evidenciar tres criterios planteados por Duval (1999):

- 1) Correspondencia semántica de los elementos significantes, es decir, a cada unidad significativa simple de una de las representaciones, se puede asignar una unidad significativa elemental.
- 2) Univocidad semántica terminal, que hace referencia a que cada unidad significativa de salida le corresponde una única unidad significativa de llegada.

- 3) Organización de las unidades significantes, lo cual conduce a que las unidades en correspondencia semántica sean aprendidas en el mismo orden, esto es pertinente solo cuando las representaciones tienen el mismo número de dimensiones.

Para Duval “la variación de congruencia y no congruencia es una de las principales causas de malentendido o mala interpretación de los enunciados del problema por parte de los estudiantes” (2017, p. 104).

En el aprendizaje de los estudiantes no se debe cuestionar el tipo de registro no discursivo que se debe elegir para ayudarlos, sino cómo hacer que sean capaces de convertir la representación de cualquier objeto de un registro en otro registro. El proceso cognitivo de conversión de representaciones es siempre fundamental y la variación de congruencia y no congruencia es la que puede llegar a facilitar u obstruir la conversión en situaciones de representaciones múltiples o de representación única (Duval, 2017).

Teoría de Resolución de Problemas

Mason, Burton y Stacey (1998) plantean cinco ideas básicas para el pensamiento matemático en la solución de problemas:

- 1) **Tú mismo** puedes pensar matemáticamente.
- 2) El razonamiento matemático puede **mejorarse** por la práctica unida a la reflexión.
- 3) El razonamiento matemático viene **motivado** por una situación en la que se mezclan contradicción, tensión y sorpresa.
- 4) El razonamiento matemático **se mueve** en una atmósfera cuyos ingredientes principales son pregunta, reto y reflexión.
- 5) El razonamiento de tipo matemático te ayudará a **entenderte** mejor a ti mismo y al mundo que te rodea.

El desarrollo del pensamiento matemático se consigue descubriendo y llevando a cabo el proceso del conocimiento lo que permite mejorar el razonamiento matemático en el cual para Mason et al. (1998) influyen tres factores para su grado de efectividad:

- 1) La competencia presente en el uso de los procesos de investigación matemática.
- 2) La confianza en el dominio de los estados emocionales y psicológicos, para sacar ventaja de ellos.
- 3) El conocimiento del contenido de las matemáticas y, si es necesario, del área en el que se están aplicando.

Al enfrentarse a un problema matemático, hay dos procesos matemáticos fundamentales, los cuales son la particularización y la generalización, estos procesos completos constituyen la esencia del pensamiento matemático. Particularizar significa escoger ejemplos aleatoria, sistemática y hábilmente, además permite simplificar el problema, haciéndolo más concreto o específico, mientras que generalizar significa descubrir alguna ley general que indique conjeturas, que justifique y abra paso al planteamiento de nuevos problemas (Mason et al., 1998).

Es importante escribir los pensamientos, impresiones e ideas que se tienen al abordar un problema, ya que brinda la oportunidad de aprender algo de sí mismos acerca de cómo funcionan los procesos del pensamiento, para ello es posible guiarse por aspectos útiles que se pueden escribir para ayudar en el razonamiento matemático. Siempre que encuentre dificultades u obstáculos en un problema, el escribir, “¡atascado!”, motiva a buscar las razones por las cuales no puede avanzar en el problema tales como: no entiendo, no sé qué hacer acerca de, no puedo ver cómo o porqué, esto puede dar paso a que se puedan ocurrir nuevas ideas o visualizar algo que posiblemente estaba omitiendo, lo cual puede resaltarse con la palabra “¡Ajá!”, para posteriormente describir sus nuevas

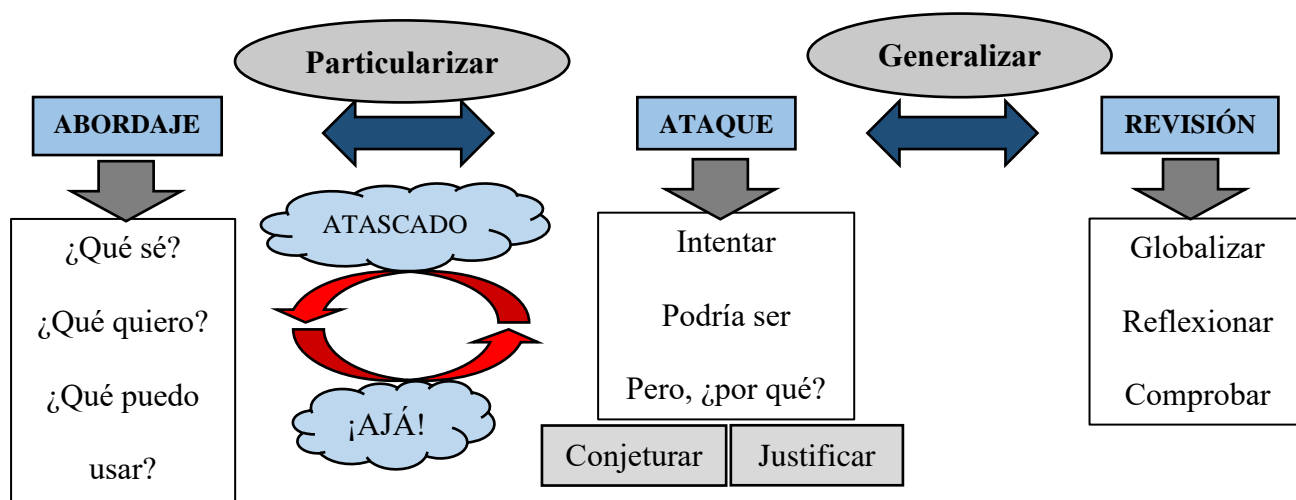
perspectivas e ideas tales como: intento, puede ser, o buscar razones preguntándose, ¿por qué? (Mason et al., 1998).

Mason et al. (1998) describen que un aspecto importante de la fase de “ataque” del problema es el hacer conjeturas ya que constituye la espina dorsal en la resolución de un problema, estas permiten reconocer una ley general cuando aún está brotando, además mencionan que el escribir conjeturas hace más fácil pensar sobre ellas. Durante el razonamiento matemático se introduce en el problema para tener ideas acerca de lo que puede ser cierto y formular conjeturas, comprobarlas y modificarlas realizando así un proceso cíclico con estas.

“Una conjetura es una afirmación que parece ser razonable, pero cuya veracidad no ha sido demostrada” (Mason et al., 1998, p.73).

Realizar conjeturas acerca del, ¿qué?, suele ser fácil, pero ver el, ¿por qué?, requiere de una justificación de todas las afirmaciones planteadas, a través de descubrir una relación que ligue lo que sé con lo que quiero, de modo que sean convincentes para sí mismos y puedan convencer a los demás, lo cual constituye un proceso más estructurado que obliga a enunciar y exteriorizar cosas que pueden llegar a ser obvias para uno mismo. La mayoría de las conjeturas resultan ser falsas, las cuales en muchos casos pueden llegar a ser las más valiosas, el comprobar lleva a menudo a conjeturas mejores de modo que se pueda llegar a ser críticos de una manera útil y positiva (Mason et al., 1998).

El siguiente esquema resume los procesos y fases mencionados anteriormente para la resolución de problemas.

Figura 1.*Teoría de resolución de problemas.***Fuente:** Adaptado de Mason, Burton & Stacey (1998)

Mason et al. (1998) aconsejan reconocer y “fotografiar” algunos estados característicos que se encuentran presentes durante el razonamiento matemático, el tomar apuntes sobre las sensaciones del momento puede llegar a favorecer posteriormente la reflexión. Con el uso de palabras claves es posible que fluyan asociaciones y consejos relevantes de situaciones análogas anteriores de modo que se puede ver como si se obtuviera una ayuda extra, lo cual los autores describen como “el propio monitor interior” el cual funciona como un tutor personal que vigila y hace las preguntas oportunas.

Las palabras claves utilizadas por Mason et al. (1998) relacionados con los estados mencionados anteriormente son:

- **Primeros contactos:** Para entablar los primeros contactos es necesario reconocer y aceptar que hay un verdadero problema, este estado constituye el momento de hacerse una idea global del problema.

- **Entrando en materia:** El objetivo es extraer del problema todo tipo de significados y relaciones, particularizar de manera que el problema esté en sí mismo y no plasmado en una hoja, de manera que lo que se sabe y lo que se quiere aparezca claramente formulado.
- **Fermentado:** Es típico de este proceso el distanciarse un poco del problema para orientarse antes de continuar, este estado se relaciona con la búsqueda de nuevas ideas a través de la indagación de problemas realizados en el pasado con algunas similitudes o bien el manipular el problema en nuevas direcciones para conseguir algo manejable.
- **Seguir avanzando:** En ocasiones se considera la posibilidad de abandonar o buscar ayuda con respecto a un problema, el estar en unión con el problema permite que las cosas vayan cambiando sin tener que tomar la decisión de cambiarlas.
- **Intuyendo:** Es un estado que invade, que no puede producirse intencionalmente, aunque si se puede preparar para ello de manera que surja un esquema que liga lo que se sabe con lo que se quiere dando una sensación de liberación o alivio después de la frustración que pudo producirse en un problema.
- **Mostrarse escéptico:** Las intuiciones suelen ser a menudo incorrectas, por esto hay que mostrarse escéptico, creando una tensión que se debe resolver contestando a la pregunta, ¿estás seguro?, ya que es muy fácil convencerse a sí mismos de las propias ideas, de modo que hay que comprobar cuidadosamente cada etapa del razonamiento.
- **En estado contemplativo:** Es un estado de calma para recordar los pasos más importantes que han llevado a la solución, se trata de una forma suprema de generalización tratando de ver si se puede trascender a un contexto más amplio.

Estrategias para la Resolución de Problemas de la Física

Young y Freedman (2009) mencionan que entender verdaderamente un concepto o principio es lo mismo que saber aplicarlo a diversos problemas prácticos, describiendo que aprender a resolver un problema es indispensable para saber física, para ello plantean algunas estrategias para la resolución de problemas según los siguientes pasos aplicados al movimiento rectilíneo:

- 1) Identificar los conceptos pertinentes: En los problemas de movimiento rectilíneo es fundamental identificar si el cuerpo se mueve con aceleración constante o no para aplicar las ecuaciones pertinentes.
- 2) Plantear el problema siguiendo estos pasos:
 - Decidir el origen de las coordenadas y la dirección positiva.
 - Elegir la dirección positiva del eje, determinará automáticamente las direcciones positivas de velocidad y aceleración.
 - Replantear el problema con palabras y luego traducir su descripción a símbolos y ecuaciones.
 - Hacer una lista de cantidades como: x, x_0, v_x, v_{ox}, a y t . Escribir los valores de las variables conocidas y determinar las incógnitas.
- 3) Encontrar la solución a un problema: Elegir una de las ecuaciones del movimiento rectilíneo, ya sea acelerado o con velocidad uniforme, de tal manera que pueda despejarse el valor de una de las incógnitas.
- 4) Evaluar la respuesta: Examinar los resultados obtenidos para ver si son lógicos.

Los pasos anteriormente mencionados pueden apoyar el razonamiento que los estudiantes realizan al utilizar la teoría de resolución de problemas de Mason, Burton y Stacey, de tal manera

que les permitan cuestionarse y orientar mucho mejor los problemas a resolver, logrando así que puedan interactuar directamente con las representaciones semióticas y realizar el determinado tratamiento y conversión referidos por Duval.

Estudio Epistemológico del Movimiento

El estudio del movimiento de un cuerpo se ha realizado a través de interpretaciones y perspectivas de diversos autores a lo largo de la historia, a continuación, se presenta un panorama con las principales perspectivas del movimiento de un cuerpo, haciendo un recorrido por la historia de las ciencias publicada por Nieto (2009) y el estudio histórico epistemológico del movimiento en la perspectiva newtoniana de León (2016).

Perspectiva Aristotélica. Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.) afirmaba que el movimiento se dividía en dos clases que darían una explicación razonable acerca del por qué se mueven los objetos; una de estas clases era el movimiento natural de los objetos, cuya característica fundamental es que se origina partiendo de la naturaleza de un objeto, teniendo en cuenta la combinación de los cuatro elementos que conforman el mismo (tierra, agua, aire y fuego) la otra clase era el movimiento violento teniendo como causa una fuerza de empuje. Sobre la caída de los objetos, Aristóteles afirmaba que los cuerpos caen con una velocidad proporcional a su peso, actualmente se sabe que esa afirmación es errónea, sin embargo, sus aportes producen un cambio fundamental en el pensamiento, permitiendo una reconstrucción de conocimientos.

Perspectiva Galileana. Para Galileo Galilei (1564 - 1642), la mecánica es una ciencia que necesita un conjunto de axiomas que brinden definiciones de algunos conceptos que sean de utilidad para realizar futuros estudios acerca de la mecánica, a la cual le confiere la identidad de una ciencia racional ya que muestra las razones y descubre las causas de los efectos milagrosos que se producen con diversos instrumentos.

Galileo expone los estudios relacionados con la caída libre, en los cuales afirma que el movimiento es independiente del peso del objeto.

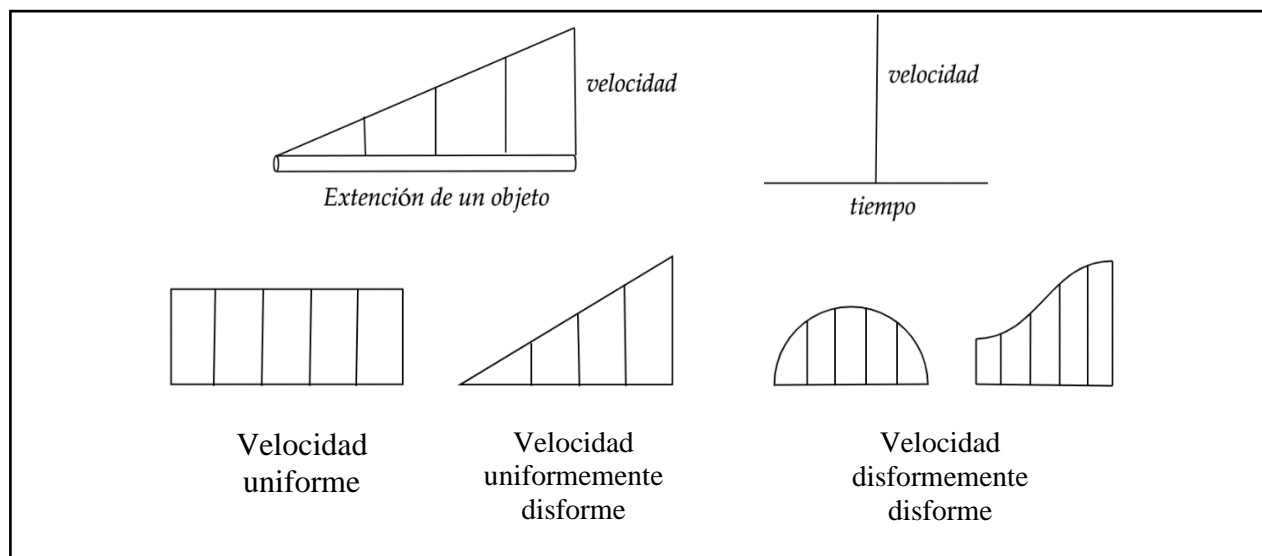
Perspectiva Kepleriana. En el año de 1599 Johannes Kepler (1571-1630) empezaría su trabajo al lado del Danés Tycho Brahe (1546-1601), astrónomo muy importante para el desarrollo de los estudios de Kepler, ya que tenía una inmensa colección de observaciones que traían una exactitud nunca antes vista en la historia de la astronomía. Brahe planteó un nuevo sistema cosmológico influenciado por la física Aristotélica, en el cual dejaría a la tierra inmóvil en el centro del universo, que al igual que en el modelo Ptolemaico, todo giraba alrededor de ella, con la diferencia de que los otros planetas, en vez de girar alrededor de la tierra giran alrededor del sol. Aunque Kepler seguiría desarrollando las tablas planetarias iniciadas por Brahe, de forma paralela desarrollaría sus propias teorías astronómicas que buscarían reforzar la teoría heliocéntrica propuesta por Nicolás Copérnico (1473-1543). Kepler da un gran paso al pensar en el sol como un centro de fuerza, el cual daba alma y vida al universo.

Perspectiva Cartesiana. René Descartes (1596 - 1650) da una caracterización a la naturaleza en su primera “ley de la naturaleza” que cita: “La materia siempre se mantendría en el mismo estado a menos que entre en contacto con otras fuerzas que le obliguen a cambiar de estado”.

Según lo expuesto, Descartes encuentra un argumento más para decir que no se requiere nada para mantener la materia en movimiento; lo que rompe totalmente con el paradigma mecánico-empirista de Aristóteles del movimiento con “potencia infinita”; además, para Descartes no existía en el universo algo que no tuviese que ver con la materia, sosteniendo con esto que todos los fenómenos naturales son generados por partículas de materia en movimiento.

Perspectiva Newtoniana del Movimiento. Isaac Newton (1643 - 1727) se propone realizar una explicación más sistematizada y matemáticamente más elaborada que la propuesta por Descartes, mencionando que la ecuación de la curva entraña la propia naturaleza de la curva más que ser una representación, de modo que estudiar la ecuación se convierte en el estudio general de las propiedades y límites de una curva. Además, estudió problemas cartesianos de impacto entre cuerpos perfectamente elásticos, centro de gravedad, y por tanto de lugares geométricos de reflexión y refracción, entre otros, lo que lo llevó a plantear problemas de suma importancia para el estudio del movimiento, como lo son los conceptos de masa, velocidad, rapidez, fuerza e inercia.

Representación del Movimiento. Aunque Aristóteles ya había usado la línea para representar el tiempo y Euclides para representar magnitudes numéricas, se desarrollan sofisticadas formas gráficas de representación de la intensidad de una cualidad o forma que puede sufrir procesos de incremento, intensificación o disminución. Nicolás Oresme (1323- 1382) en la Universidad de París desarrolla elaborados sistemas de representación geométrica, relacionando en el movimiento la extensión de un objeto con la duración de ese movimiento, generando así un sistema de coordenadas en donde el movimiento se ve como una función del tiempo. Las representaciones que realiza Oresme relacionando la velocidad y el tiempo gráficamente, para el caso del movimiento uniforme se representa con una figura en la cual se hacen líneas verticales de igual longitud, y para el caso del movimiento uniformemente acelerado presenta líneas verticales que crecen uniformemente, además muestra gráficas para movimientos con aceleración y velocidad variable, algunos ejemplos se pueden observar en la figura 2.

Figura 2.*Representación del movimiento de Nicolás Oresme (1323- 1382)***Fuente:** Adaptado de Nieto (2009)

Lenguaje y Enseñanza de la Física Moderna. Los conceptos de la física clásica fueron contruidos y modificados a lo largo del tiempo, de tal forma que se hicieron adaptaciones al lenguaje común surgiendo nuevas terminologías. Paulo y Moreira (2011) mencionan que para Bachelard (1884-1962) el nuevo espíritu científico se implantaría con la comprensión de la física moderna (mecánica cuántica y relatividad). Según la epistemología bachelardiana, una palabra adquiere tal peso en una teoría o conjunto de ideas que tergiversa e impide el desarrollo de la ciencia, de tal manera que se debe ser cuidadosos con el uso del lenguaje clásico para evitar incurrir en obstáculos de naturaleza verbal.

Un problema de conceptualización en física cuántica que todavía no se resuelve es el hecho que no existe un consenso para definir el concepto de dualidad que forma el término “onda-partícula” u “onda y partícula”, puesto que se sabe que los aspectos ondulatorios y corpusculares no se pueden medir simultáneamente.

“Los conceptos de onda y partícula tienen un carácter universal distinto para describir el mundo clásico, que contempla fenómenos que estamos acostumbrados a observar e interactuar en el

mundo perceptible, de donde obtenemos información a partir de la cual construimos nuestros conceptos” (Paulo et. al., 2011, p. 430).

Consideraciones de este tipo no son tenidas en cuenta en este proyecto una vez que se asume que los cuerpos se mueven obedeciendo las leyes de la física clásica.

Movimiento Rectilíneo

Los siguientes conceptos son fundamentales para el estudio del movimiento rectilíneo los cuales son definidos en Castaño et al (2016):

- Cuerpo puntual o partícula material: Es un objeto considerado sin tamaño, el cual puede tener movimiento.
- Trayectoria: Línea que un móvil describe durante su movimiento, puede ser: rectilíneo o curvilíneo, como el circular, elíptico o parabólico.
- Distancia recorrida: Longitud de la trayectoria.
- Desplazamiento: Segmento dirigido que une dos posiciones diferentes de su trayectoria.
- Rapidez: Distancia recorrida por unidad de tiempo.
- Rapidez media: Cociente entre la distancia recorrida por el móvil y el tiempo empleado en recorrerla.
- Velocidad: Razón de cambio de la posición con respecto al tiempo.
- Velocidad instantánea: Es la tasa instantánea de cambio de posición con el tiempo.
- Aceleración: Razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo.
- Aceleración instantánea: Aceleración de un cuerpo en un instante determinado.

Young y Freedman (2009) realizan la descripción de los siguientes conceptos para el análisis del movimiento en línea recta:

- Velocidad media: Cantidad vectorial, que representa el cambio en el desplazamiento dividido entre el intervalo de tiempo.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

- Aceleración media: Es una cantidad vectorial, que representa el cambio en la componente de la velocidad Δv , dividido entre el intervalo de tiempo Δt :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

El sentido vectorial en este contexto no es perceptible, puesto que se presenta un movimiento en una sola dirección, de tal forma que el signo es el único que indica el sentido de la velocidad y desplazamiento.

Movimiento Rectilíneo Uniforme (M.R.U.)

Para Castaño et al., (2016) un móvil describe un movimiento rectilíneo uniforme, cuando su trayectoria es recta y su velocidad instantánea es constante.

Ecuaciones del Movimiento Rectilíneo Uniforme. Para el movimiento rectilíneo uniforme, la velocidad instantánea es la misma medida de la velocidad media, además, entre $t = 0s$ y un tiempo posterior t , el intervalo de tiempo es $\Delta t = t - 0s$, de modo que

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t},$$

obteniendo así la ecuación de posición del movimiento rectilíneo uniforme:

$$x = v \cdot t + x_0.$$

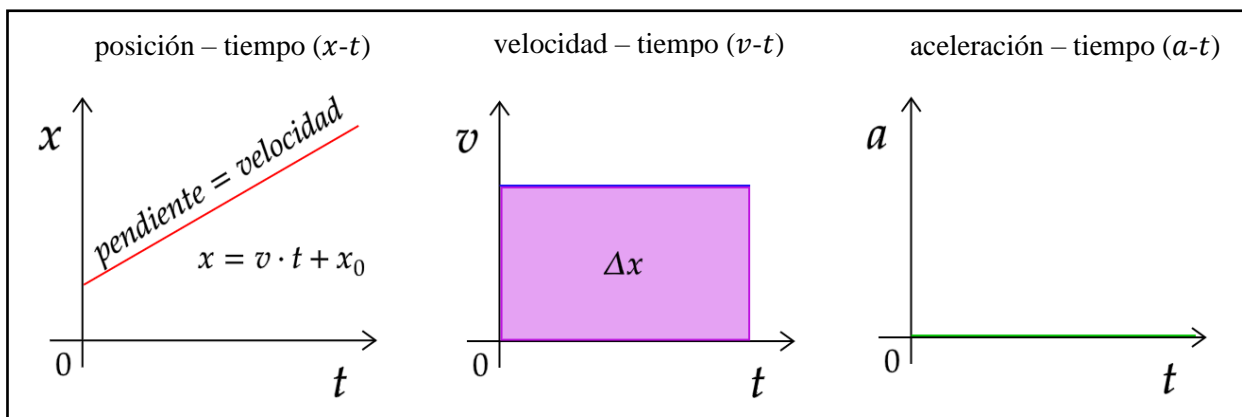
Donde x_0 es la posición inicial del objeto.

Análisis Gráfico del Movimiento Rectilíneo Uniforme. A partir del análisis gráfico es posible interpretar el movimiento rectilíneo de los objetos, la gráfica $x-t$ es una forma de representar visualmente cómo cambia la posición de un móvil con respecto al tiempo. Además,

como la velocidad es constante, la gráfica $v-t$ es un segmento de recta horizontal y la aceleración es igual a cero, puesto que la velocidad no experimenta variación, como se muestra a continuación:

Figura 3.

Gráficas del movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.)



Fuente: Adaptado de Castaño et al. (2016)

A partir de la gráfica $v-t$ se puede determinar el desplazamiento (Δx) con la ecuación $\Delta x = v \cdot t$.

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (M.R.U.V.)

Un cuerpo describe un movimiento rectilíneo uniformemente variado cuando su trayectoria es una recta y, a la vez, su aceleración es constante y no nula.

Cuando un cuerpo describe un movimiento rectilíneo uniformemente variado, puede suceder que:

- Su rapidez aumente, si la trayectoria y la velocidad tienen el mismo signo.
- Su rapidez disminuya, si la aceleración y la velocidad tienen signos contrarios.

Para el movimiento rectilíneo uniformemente variado, la aceleración instantánea es constante. Si la velocidad de un móvil en un tiempo $t = 0s$ es v_0 y al cabo de determinado tiempo t la velocidad es v , se tiene que:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t}.$$

Por tanto, la velocidad con respecto al tiempo cuando la aceleración es constante y el móvil se mueve inicialmente con velocidad v_0 es:

$$v = v_0 + a \cdot t.$$

Para un movimiento con aceleración constante, la velocidad media en cualquier intervalo es sólo el promedio de las velocidades al principio y al final del intervalo. Para el intervalo de 0 a t ,

$$\text{velocidad promedio} = \frac{v_0 + v}{2},$$

Puesto que en el movimiento uniforme el desplazamiento es $\Delta x = v \cdot t$, es posible escribir:

$$\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t,$$

donde $v = v_0 + a \cdot t$, de modo que,

$$\Delta x = \frac{v_0 + v_0 + a \cdot t}{2} \cdot t = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2,$$

como $\Delta x = x - x_0$ se tiene,

$$x - x_0 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2,$$

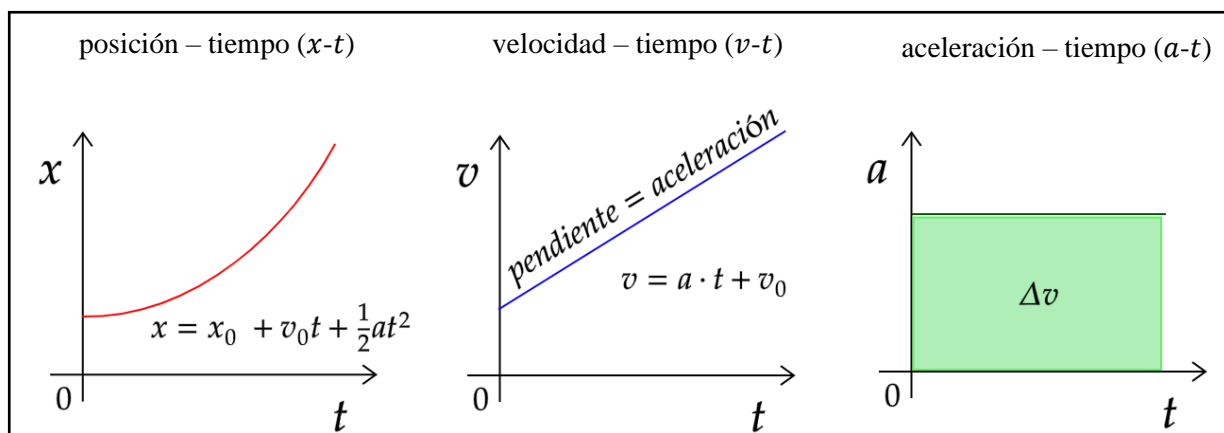
por tanto, la ecuación del desplazamiento con respecto al tiempo cuando la aceleración es constante y el móvil se mueve inicialmente con velocidad inicial v_0 , es:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2.$$

Análisis Gráfico del Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado. En el movimiento uniformemente variado, la gráfica $v-t$ representa el cambio de la velocidad en cada unidad del tiempo para un cuerpo que experimenta una aceleración constante no nula, la relación entre el desplazamiento y el tiempo tiene un término cuyo factor es t^2 , entonces la gráfica $x-t$ para este movimiento es una parábola, a continuación, se muestran las gráficas para un movimiento uniformemente variado con aceleración positiva y con aceleración negativa:

Figura 4.

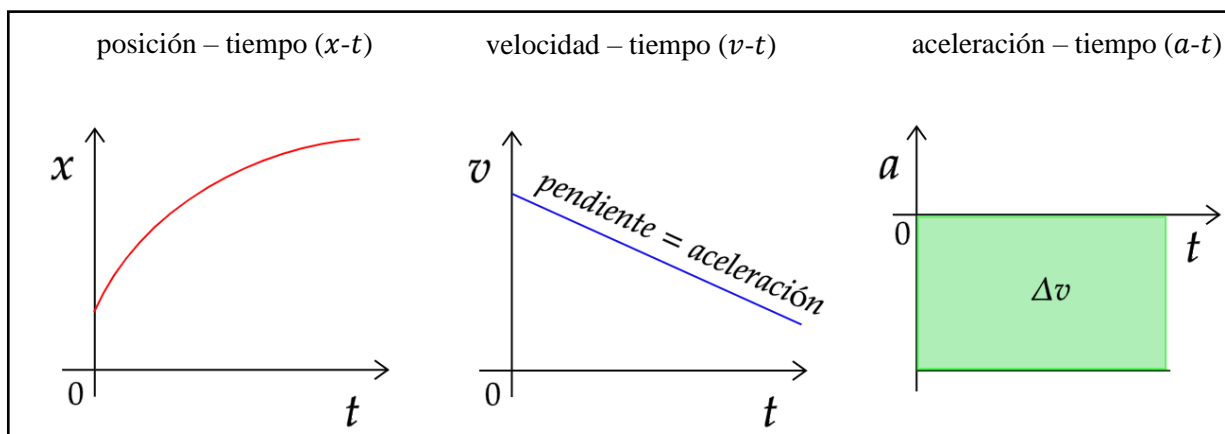
Gráficas del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.)



Fuente: Adaptado de Castaño et al. (2016)

Figura 5.

Gráficas del movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado (M.R.U.D.)



Fuente: Adaptado de Castaño et al. (2016)

A partir de la ecuación $v = v_0 + a \cdot t$, se tiene que:

$$v - v_0 = a \cdot t,$$

como $v - v_0$ corresponde a la variación de la velocidad, entonces:

$$\Delta v = a \cdot t,$$

lo cual coincide con el área del rectángulo que se forma entre la recta y el eje horizontal en la gráfica de $a-t$.

Capítulo 3

Metodología

El enfoque para esta investigación es cualitativo, teniendo en cuenta lo planteado por Sandoval (2002) el cual le apunta a un esfuerzo por comprender la realidad social como fruto de un proceso histórico de construcción visto a partir de la lógica y el sentir de sus protagonistas. Su diseño es desestructurado, abierto y construido en el curso de la investigación, validando a través del diálogo, interacción y vivencia con subjetividad. El enfoque responde a los propósitos de la investigación, ya que se pueden hacer descripciones detalladas del proceso realizado por los estudiantes en los registros de representación semiótica del movimiento rectilíneo.

Para Hernández (2014) los estudios cualitativos pueden desarrollar preguntas antes, durante o después de la recolección y análisis de datos, donde el investigador se introduce en las experiencias de los participantes y construye el conocimiento, además el centro de la investigación está situado en la diversidad de ideologías y cualidades únicas de los individuos lo que constituye la base para esta investigación, al estar involucrados directamente con el objeto de estudio tanto los estudiantes como el profesor, en donde cada uno de ellos realiza planteamientos para solucionar las situaciones y pueda expresarse de diferentes formas para lograr el aprendizaje del objeto movimiento rectilíneo.

Diseño de la Investigación

El diseño para esta investigación es la investigación acción, ya que su principio de base es que existen relaciones desiguales de conocimiento que se constituyen en un factor crítico que habilita a todos los miembros de un grupo o comunidad para participar. Además, permite efectuar una reflexión constante del proceso realizado, las contribuciones de cualquier persona son valoradas y las soluciones incluyen a todo el grupo o comunidad lo cual es esencial al integrar el

objeto de estudio con los registros de representación semiótica del movimiento rectilíneo y la relación de la teoría y su práctica, asimismo presenta tres fases que son: observar, pensar y actuar las cuales se dan de manera cíclica (Hernández, 2014).

Con el diseño de investigación acción se indaga al mismo tiempo que se interviene, además se pueden analizar problemáticas relacionadas con redefinir el modelo educativo de una institución lo cual, en esta investigación, más que redefinirlo, se plantean perspectivas de enseñanza del movimiento rectilíneo y en general el análisis de problemas. Se llevarán a cabo las principales acciones de la investigación acción que constan de los siguientes ciclos: identificar la problemática, elaborar el plan, implementarlo, evaluarlo y realizar realimentación (Hernández, 2014).

Unidad de Análisis

El proyecto se realizó con 24 estudiantes de grado 10° en el área de física del Colegio de la Presentación de Tunja, institución de carácter privado. Para el análisis de la información se tiene una muestra de 10 estudiantes, puesto que estuvieron presentes en todas las sesiones de la investigación y realizaron los envíos pertinentes de las situaciones problema planteadas.

Etapas de Investigación

Para la investigación se llevaron a cabo 3 etapas con el fin de obtener las respectivas conclusiones basadas en el seguimiento continuo a los estudiantes.

Etapas 1: Observación

Se aplicó una prueba preliminar para evidenciar los registros de representación semiótica sobre movimiento rectilíneo, el tratamiento en cada uno de los registros y las conversiones en los diferentes registros que realizan los estudiantes, además en esta etapa se realizó una revisión teórica de los conceptos necesarios para trabajar con el objeto de estudio lo cual se va haciendo durante el desarrollo de las diversas situaciones.

Etapa 2: Planificación

En esta etapa se realizó una revisión bibliográfica del movimiento rectilíneo y un análisis sobre el aprendizaje de este objeto a través de la teoría de las representaciones semióticas y la teoría de resolución de problemas, además de identificar las dificultades que presentan los estudiantes en este proceso para poder crear y aplicar una serie de situaciones problema donde se tuvo en cuenta el uso de los registros de representación semiótica para el movimiento rectilíneo y la orientación del trabajo con diferentes registros de representación a través de una fase de acción constante.

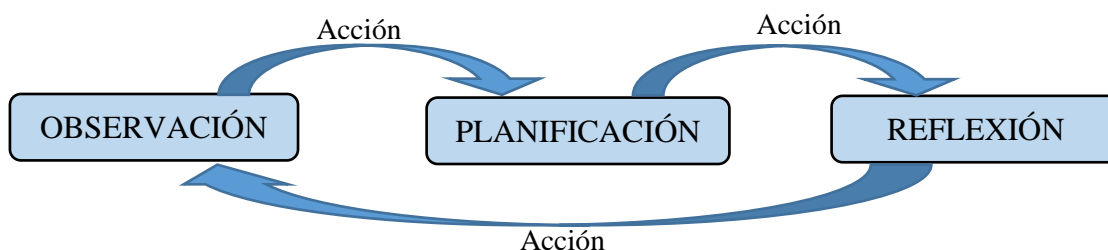
Etapa 3: Reflexión

En esta etapa se analizó e interpretó el proceso que desarrollan los estudiantes en cada registro para el movimiento rectilíneo, de igual forma se pretendía evidenciar y describir si las estrategias didácticas basadas en la teoría de las representaciones semiótica de Duval permitían la comprensión del objeto. Dichas estrategias se basan en la planeación del proceso de enseñanza y aprendizaje, a través de las situaciones problema planteadas, realizadas con el fin de alcanzar los objetivos propuestos.

En la figura 6 se presenta un esquema de las etapas planteadas.

Figura 6.

Diseño de la investigación



Fuente: Elaboración propia

Técnicas e Instrumentos de Recolección de Información

La recolección de la información se realizó a través de instrumentos como los siguientes:

Observación Participante

Al ser necesaria la elaboración de clases virtuales, se pretendió identificar los procesos que los estudiantes realizan, con una interacción y comunicación constante durante la clase, donde se intentó aclarar y especificar los conceptos, utilizando las representaciones semióticas y la teoría de resolución de problemas.

Diario de Campo

A través del diario de campo se registró el proceso que realizaron los estudiantes en el desarrollo de cada una de las estrategias didácticas aplicadas con el uso de las representaciones semióticas para analizar cómo estas privilegian el aprendizaje del movimiento rectilíneo, además los estudiantes escribirán en un diario sus cuestionamientos y conjeturas aplicando lo planteado por Mason, Burton y Stacey (1998).

Pruebas Escritas

Se realizaron pruebas con situaciones problema para evidenciar la evolución que tuvieron los estudiantes durante el proceso y desarrollo de la investigación, teniendo en cuenta los tratamientos y conversiones que le dan a los registros de representación semiótica del objeto Movimiento Rectilíneo. Estas situaciones fueron validadas por juicio de expertos (Ver anexo 1), uno de ellos en educación matemática y otro en el área de física.

Videos

Con el desarrollo del proyecto desde la virtualidad, es indispensable la visualización del trabajo elaborado por los estudiantes, registrando a través de videos la aplicación de las diversas

experiencias realizadas, además de las apreciaciones que tienen al comunicarse con sus compañeros, trabajando en equipo para construir ideas bien fundamentadas.

Foros

Con el foro, los estudiantes pudieron plantear ideas, cuestionamientos y conjeturas para aplicar en el desarrollo de las situaciones problema y complementar su trabajo de manera colaborativa.

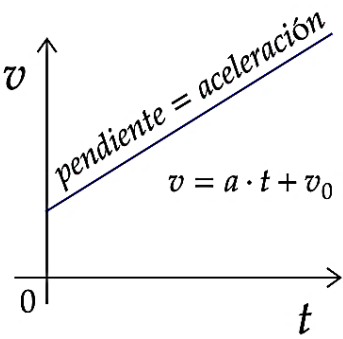
Plan de Análisis

Para analizar los criterios de congruencia entre representaciones, en el momento de la conversión de los registros de representación del movimiento rectilíneo, fue necesario interpretar el tratamiento de cada uno de ellos y la descomposición en sus unidades significantes las cuales se plasman en la tabla 2.

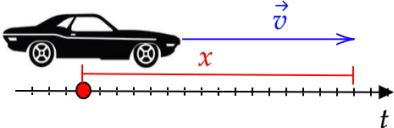
Tabla 2.

Registros de representación semiótica del movimiento rectilíneo y sus unidades significantes.

Tipos de representaciones	Registros de representación	Tratamiento de la representación	Unidades significantes
Monofuncional Discursivos	Numérico $x(t) = v(t) + x_0,$ para $t, v, x_0 \in \mathbb{R}$. En este registro, la representación del movimiento rectilíneo es un procedimiento donde se reemplazan valores numéricos para hacer cálculos matemáticos, determinando un valor numérico para las variables.	Algoritmos de operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división con números reales. Se halla el valor de la posición, velocidad y aceleración en función de un tiempo determinado.	Variables dependientes: Posición (x), velocidad (v), aceleración (a). Variable independiente: tiempo (t). Unidades de medida.

	Algebraico		Variable
	$x = v \cdot t + x_0.$	Despejar variables del	dependiente:
	$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2.$	movimiento utilizando	$x, v, a.$
	En este registro, el movimiento	el despeje de	Variable
	rectilíneo es representado por una	ecuaciones.	independiente: $t.$
	expresión algebraica o mediante	Reemplazo de	Pendiente de rectas
	ecuaciones que permiten	variables y	de las gráficas $x-t$
	determinar las variables del	operaciones para	y $v-t$, las cuales
	movimiento, lo que lleva a formular	determinar funciones	pueden tomar los
	generalizaciones y comunicar de	del movimiento.	siguientes valores:
	manera simbólica las expresiones.		$v > 0; v < 0;$
			$v = 0; v = cte;$
			$a > 0; a < 0;$
			$a = 0; a = cte.$
	Gráfico Cartesiano	Construcción de la	Eje y: Variable
		gráfica identificando	dependiente
		las variables	$(x, v, t).$
		dependiente e	
		independiente en el	Eje x: Variable
		plano cartesiano.	independiente (t).
		Dividir cada eje en las	Escalas y unidades
		escalas adecuadas para	de medición.
	En este registro, el movimiento	facilitar su análisis.	
	rectilíneo se puede representar por	Ubicar las unidades	
	medio de una línea recta, una	en el sistema de	Pendientes
	parábola o incluso con la	coordenadas (x, y)	positivas
	composición de diversos	según la variable	$(crecientes)$ y
	movimientos teniendo en cuenta las	dependiente e	negativas
	funciones de las variables con	independiente del	$(decrecientes)$ en
	respecto al tiempo.	movimiento.	funciones
		Trazar la función	rectilíneas.
	En una gráfica de velocidad en	según sea una línea	
	función del tiempo, la aceleración	recta, parabólica o por	

	instantánea en cualquier punto es igual a la pendiente de la tangente de la curva en ese punto.	composición de movimientos.	En la gráfica $x-t$ la pendiente es la velocidad (v). En la gráfica $v-t$ la pendiente es la aceleración (a).										
	<div><div>Tabular</div><table><tr><td>$v(m/s)$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>$t(s)$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></div>	$v(m/s)$					$t(s)$					Elaborar la tabla con dos filas y las columnas que se requieran dependiendo de la cantidad de valores que se pretenden analizar.	Variable dependiente (x, v, t). Variable independiente (t). La relación entre las variables $x-t$, $v-t$, $a-t$; dependiendo del tipo de movimiento (M.R.U o M.R.U.V.)
$v(m/s)$													
$t(s)$													
	En este registro el movimiento rectilíneo se representa con una tabla de valores en donde se relacionan las variables dependientes e independientes del movimiento.	Ubicar la variable independiente y dependiente con sus respectivas unidades.											
		Asignar los valores correspondientes a cada variable de manera ordenada.											
	<div>Verbal</div>	Describir, explicar, argumentar, deducir, asociar verbalmente.	Variación de las magnitudes presentes en el movimiento y las unidades de medida.										
Multifuncionales	En este registro el movimiento rectilíneo es expresado a través de una descripción en lenguaje natural,	Describir el razonamiento del problema asociado con el movimiento rectilíneo.	Variables dependientes e										
Discursivos	es decir, con la capacidad de escribir textos coherentes, organizados y argumentados, además de la producción oral. Esta representación se relaciona												

	con la capacidad lingüística de las personas, y es básica para interpretar situaciones contextualizadas.	Argumentar el análisis que se extrae de los otros registros de representación (gráfico, tabular, algebraico, numérico, geométrico).	independientes y su relación.
	<p style="text-align: center;">Geométrico</p>  <p>En este registro del movimiento rectilíneo los objetos son considerados sin tamaño, es decir, se consideran como cuerpos puntuales y se pueden representar como imágenes o esquemas que permiten analizar las direcciones del movimiento, velocidad y aceleración.</p>	<p>Representar direcciones de desplazamiento, velocidad y aceleración de cuerpos puntuales.</p> <p>Trazar segmentos de trayectorias según las distancias que recorra un móvil con aceleración constante o nula.</p>	<p>Variación de magnitudes.</p> <p>Dirección de las variables.</p> <p>La velocidad y desplazamiento hacia la izquierda son negativas y hacia la derecha positivas.</p> <p>La aceleración en dirección hacia abajo es negativa.</p>

Fuente: Adaptado de Ospina (2012), elementos tomados de Duval (2017)

Situaciones Problema

Para la recolección de la información de la unidad de análisis, se plantearon situaciones problema, posterior a una prueba preliminar. Cada una de las situaciones están diseñadas para dar cumplimiento a los objetivos planteados y dar respuesta a la pregunta de investigación. Para el diseño de las situaciones, se abordaron algunas teorías de la didáctica de la matemática para construir el conocimiento del movimiento rectilíneo, a través de los saberes previos de los

estudiantes y posteriormente aplicarlos en situaciones contextualizadas, de tal forma que se pueda realizar la actividad matemática pertinente. Para el análisis de cada situación se tuvo en cuenta lo siguiente:

Prueba Preliminar (Ver anexo 2)

Con esta prueba se pretendía identificar el manejo que tienen los estudiantes con respecto a los conocimientos previos del tema, en los cuales se trabajó con funciones lineales identificando la pendiente a partir de una gráfica, además de realizarlas al disponer de una ecuación, con el fin de identificar el manejo con las gráficas de funciones y la identificación de pendientes en funciones lineales, también se buscó observar el manejo algebraico que presentaron al despejar variables en ecuaciones.

Con las preguntas 5 y 6, se buscaba observar la manera en la que interpretaban gráficas y tablas relacionadas con el movimiento rectilíneo, relacionando el análisis de funciones planteado en las preguntas anteriores.

Situación 1 (Ver anexo 3)

El proceso de enseñanza y aprendizaje de esta situación problema está centrado en el hacer matemáticas a través de la investigación realizada por los estudiantes con un enfoque constructivista, donde se tiene la necesidad de indagar y expresar procesos a través de diferentes registros en los cuales fue necesario que el docente provocara la realización de “actividades cognitivas” referidas a los registros de representación semiótica: la formación, el tratamiento y la conversión (Duval, 1999).

Los estudiantes debían comunicar el proceso realizado al desarrollar la actividad, teniendo en cuenta los diversos registros de representación semiótica, además debían seguir las fases planteadas por Mason, Burton y Stacey (1998), las cuales son: Abordaje (¿Qué sé?, ¿qué quiero?, ¿qué puedo usar?), ataque (intentar, podría ser, ¿por qué?) y generalización (globalizar,

reflexionar, comprobar); para lograr identificar estos procesos los estudiantes escribieron un diario en el cuál respondían las preguntas planteadas en cada fase mencionada a medida que avanzaban en el desarrollo de la situación en el trabajo con el movimiento rectilíneo uniforme (M.C.U), el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.) y el movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado (M.R.U.D.).

Para el desarrollo de esta situación los estudiantes debían disponer de un módulo y estudiar el movimiento presentado al soltar un carro de juguete u otro móvil, teniendo en cuenta las variables en cada trayecto.

La situación estaba diseñada con un enfoque constructivista, donde el conocimiento fue la puesta en relación del estudiante que es capaz de conocer, con un objeto de conocimiento, en este caso el movimiento rectilíneo, mediado por una estructura operatoria, esta interacción hace posible que se adapten al medio a través de la reestructuración o reformulación de conceptos previos tales como las funciones lineales y ecuaciones, así mediante la relación de un conjunto de conceptos conexos con la realidad se puede llegar a la naturaleza del conocimiento matemático del objeto trabajado (Waldegg, 1998).

Se incluyen las teorías de base del constructivismo expuestas por Waldegg (1998), puesto que el estudiante tiene que construir lo real a través de la interacción directa con el fenómeno observado y así llegar al conocimiento con experiencias vividas y cognitivas, tanto de manera simultánea con el desarrollo de la actividad, como con aquellos conocimientos adquiridos previamente, con el fin de hacer construcciones a través de transformaciones y reformulaciones de estos conocimientos, en este caso fue importante que el estudiante asociara la ecuación de una recta con las magnitudes presentes en la situación y pudieran deducir la velocidad y aceleración al

calcular la pendiente de la recta, dando un significado más amplio al análisis de las funciones lineales.

Un aspecto importante desde la teoría constructivista es brindar el papel decisivo al estudiante en la construcción del conocimiento, por tanto, en la situación se plantea registrar y representar las magnitudes encontradas y describir el comportamiento observado, en donde ellos tienen que identificar los datos y los medios viables para registrar y comunicar la situación, teniendo en cuenta la intencionalidad de relacionar el uso de tablas, variables dependientes e independientes, las gráficas cartesianas y ecuaciones para un análisis detallado del movimiento, en este sentido los estudiantes elaboran planes de acción para encontrar coherencia entre lo que se está haciendo y lo que ya conoce, relacionando de manera articulada las nociones, conceptos e ideas de las estructuras cognitivas ya constituidas (Waldegg, 1998).

Con el desarrollo de la situación planteada a través de la experiencia práctica, los estudiantes atribuyen un significado propio de los conocimientos adquiridos, con el fin de relacionarlo con su entorno real, por ejemplo, con el desplazamiento de un automóvil, sus variaciones en las magnitudes de velocidad, aceleración y distancia a través del tiempo, encontrando un valor propio al conocimiento de las funciones lineales y sus análisis con las diferentes representaciones semióticas, dando un significado social al realizar prácticas conceptuales construyendo cognitivamente conceptos matemáticos (D' Amore et al., 2017).

Para Ponte, Brocardo y Oliveira (2006), en la investigación matemática el estudiante es llamado a actuar como un matemático, planteando conjeturas, formulando preguntas, realizando pruebas y refutaciones y presentando resultados argumentados; relacionando este planteamiento con el papel del estudiante planteado por Waldegg (1998) en el enfoque constructivista el estudiante se encuentra en una fase activa para la construcción del conocimiento, lo que implica

una intensa actividad intelectual al enfrentarse con la situación planteada a partir de experiencias previas puramente matemáticas, en cuando a las funciones y ecuaciones o basadas en problemas que no había desarrollado en un contexto real, incorporando estos conocimientos desde su perspectiva y así llegar a cuestionarse, indagar y comunicar acerca del proceso realizado para resolver la situación. Además, buscar medios que considera convenientes para su desarrollo tales como graficadores, el uso del computador, la forma en la cuál va a tomar los datos a través de mediciones convenientes, tales como distancias para describir de manera más exacta el movimiento, así como también el tiempo en recorrer los trayectos medidos.

Por otro lado, en cuanto al papel del estudiante, este se encuentra desarrollando una experiencia novedosa para él, aplicando el aprendizaje que ya tienen y aprendiendo intencionalmente al buscar la solución, relacionando sus conocimientos previos y motivándose por expresar en términos matemáticos el movimiento observado por las tres trayectorias, con el fin de analizar la aceleración y velocidad en cada uno de estos, buscado la conveniencia de tomar varias medidas a lo largo de cada trayectoria, para así poder analizar las variaciones presentadas en cada distancia. De esta manera se logra un aprendizaje significativo ya que está trabajando en un contexto que le es familiar al relacionarlo con el movimiento real de un vehículo, las mediciones del velocímetro y los cambios de aceleración entre otras cosas. Con la situación los estudiantes tienen que reestructurar sus conocimientos y hacer un cambio de variable en cuanto a las trabajadas normalmente con “ x ” y “ y ”, como variable independiente y dependiente respectivamente, para describir en términos de las magnitudes propias del movimiento rectilíneo dándole un mayor sentido a los conceptos ya conocidos (Waldegg, 1998).

En cuanto al papel del profesor en esta situación, se tiene en cuenta lo mencionado por Brousseau (1994): “El aprendizaje se considera como una modificación del conocimiento que el

alumno debe construir por sí mismo y que el maestro solo debe provocar” resaltando la importancia que el estudiante aprenda a través de cuestionamientos que no solo son planteados por el profesor sino también por los estudiantes a medida que se van encontrando con desafíos en el desarrollo del análisis del movimiento observado. Así, pueden investigar el problema y pueden abordarlo, generalizarlo y probarlo basados también en la teoría de resolución de problemas, para poder llegar a una construcción general del concepto del movimiento rectilíneo y cómo se comportan las variables dependiendo si el movimiento es acelerado, uniforme o desacelerado.

Waldegg (1998) menciona que el papel del maestro es central al proporcionar situaciones didácticas significativas que le permitan a los estudiantes utilizar sus conocimientos y experiencias previas, de modo que sean interesantes en las circunstancias que se presenten, en este caso la situación fue desarrollada en un entorno virtual, donde los estudiantes realizaron la experiencia fuera del aula de clase, sin embargo, siempre contaron con la guía e instrucción del docente aprovechando las herramientas digitales para aclarar dudas y reafirmar conceptos, los estudiantes podían comunicar y describir sus experiencias a través de videos, lo que les permitió calcular tiempos y observar detalladamente lo que ocurría en cada trayectoria del movimiento. Además, fueron importantes las discusiones entre estudiantes, donde el docente los animaba a partir de preguntas, comentarios y sugerencias para que se involucraran en la resolución del problema a través de foros o videoconferencias. También fue fundamental que el docente proporcionara terminología, por ejemplo, en el caso del movimiento acelerado donde se evidenciaba que la distancia con respecto al tiempo no presentaba un comportamiento rectilíneo sino cuadrático y la forma en la que se describe su ecuación.

Teniendo en cuenta lo anterior, el docente tiene que estar en un papel activo y creativo con el fin de proporcionar los elementos necesarios que lleven a los estudiantes a realizar las

actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas. Orientando a la exploración con el fin de que identifiquen los registros pertinentes para tomar datos, graficarlos y analizarlos con las variables que ellos puedan identificar en el movimiento.

La experiencia es una parte fundamental para el aprendizaje, es por esto que el docente tiene que enseñar relacionando la investigación con la formación. Teniendo en cuenta que el arte de enseñar se aprende enseñando, lo cual es un aspecto fundamental en la teoría de la práctica social. En esta situación problema, el docente debía motivar a los estudiantes y aprender con ellos a través de la vivencia de experiencias con las cuales siempre se logra un aprendizaje, utilizando el pensamiento como un instrumento para resolver problemas basados en el movimiento rectilíneo como objeto de investigación (Riscanevo y Jiménez, 2017).

Mason, Burton y Stacey (1998) plantean la teoría de resolución de problemas dirigido al estudiante con el fin de desarrollar su razonamiento matemático, así con esta situación problema se tiene en cuenta también el constructivismo en el currículo de matemáticas mencionado por Waldegg (1998) ya que este va direccionado a cambiar la aprehensión de conceptos por el de aprender a solucionar problemas en un sentido más amplio que el de una solución rutinaria.

Con la situación planteada, se buscó promover el pensamiento crítico a través de la resolución de problemas, teniendo en cuenta los planteamientos de Skovmose (2000) con respecto a que un sujeto crítico es aquel que actúa y es reflexivo. Así, a diferencia del paradigma del ejercicio, el estudiante aplicó destrezas matemáticas e interpretó y actuó en una situación social y política.

La situación diseñada se encuentra en un ambiente de aprendizaje centrado en un escenario de investigación en situaciones de la vida real, ya que las referencias tomadas son reales (Skovmose, 2000). Los estudiantes están interactuando directamente con el objeto de estudio,

dando un significado para las actividades y no solo para los conceptos. Sin embargo, es importante tener en cuenta que pueden surgir discusiones enfocadas en la indagación, con cuestionamientos tales como, ¿qué pasaría si...?, los cuales no solamente son planteados por el profesor que supervisa, sino también por los estudiantes a lo largo de la investigación del movimiento que ellos están analizando.

Algunos de los aspectos que se pueden llegar a cuestionar en la situación, es lo que ocurre al modificar el ángulo de inclinación de las superficies, así como lo que pueda ocurrir al modificar la masa del objeto, por ejemplo al cambiarlo por una esfera u otro tipo de móvil, también puede surgir cuestionamientos referentes a la caída libre del objeto y como se podría llegar a analizar, con respecto al tipo de movimiento que podría llegar a ser, cómo serían las representaciones gráficas y los análisis de estas, entre otros aspectos que pueden despertar la curiosidad en los estudiantes buscando un análisis más allá de la experiencia planteada.

En cuanto a la evaluación de la actividad con este enfoque constructivista, para Waldegg (1998) “es una actividad continua y cotidiana” de modo que es fundamental la realización de los problemas que surgen con el apoyo de equipos de trabajo que están en constante comunicación, para que sea posible evaluar generalmente sus planteamientos no solo en la parte escrita sino también a través de la observación en cuanto al desenvolvimiento en el grupo de discusión. En este sentido, se tiene en cuenta el dialogo entre los estudiantes y profesor, el uso de la información y las tecnologías de comunicación además de los múltiples factores que intervienen en el desarrollo de la situación tales como sus bases teóricas y prácticas y el entorno en el que se encuentran (Skovmose, 2000).

En la evaluación también se analizaron los diarios de los estudiantes en los cuales aplicaron la teoría de resolución de problemas de Mason et al. (1998) respondiendo interrogantes tales como:

¿Qué sé?, ¿qué quiero?, ¿qué puedo usar?, además de los planteamientos que realizan con el fin de que hallara un camino cuando se encuentre “atascado” en un problema. Así, fue posible analizar los referentes teóricos que ellos consideraron pertinentes en la solución de la situación y poder relacionarlo con la práctica que se desarrolló. Además, se consideró el modelo cognitivo de Cabanne (2010) en el cual el aprendizaje es más efectivo cuando se establecen relaciones significativas y el docente aprovecha las ideas de los estudiantes en la discusión y las complementa o direcciona en aspectos que permitan solucionar cuestionamientos que surgen durante la experiencia planteada.

La estructura de la actividad permitió que los estudiantes llegaran a particularizar con los fenómenos del movimiento rectilíneo, para finalmente generalizar los comportamientos presentados según sus variaciones, la situación se relaciona con el DBA para el grado décimo: Resuelve problemas mediante el uso de las propiedades de las funciones y usa representaciones tabulares, gráficas y algebraicas para estudiar la variación, la tendencia numérica y las razones de cambio entre magnitudes.

La actividad matemática generada por los estudiantes, aborda los procesos generales según los lineamientos curriculares del MEN (1998), teniendo en cuenta los aspectos que componen a cada uno de ellos:

La resolución y planteamiento de problemas donde los estudiantes plantearon estrategias para tomar datos, registrarlos y representarlos, con el fin de analizar las magnitudes que logran identificar. Además, se ven en la necesidad de comunicarse matemáticamente para interpretar y describir los resultados obtenidos, realizando las fases descritas por Mason Burton y Stacey (1998) para la resolución de problemas, verificando e interpretando los resultados para finalmente generalizarlos hacia la construcción del concepto y aplicar las estrategias para solucionar

problemas relacionados. Para ello utilizan los términos y procesos matemáticos necesarios, reforzando el razonamiento matemático que tienen los estudiantes al enfrentarse a situaciones problemas de su entorno.

El *razonamiento* es otra actividad matemática realizada en la situación, puesto que los estudiantes tenían que explorar, comprobar y aplicar ideas. Además de elaborar procesos para llegar a conclusiones, justificando y explorando a profundidad las variaciones presentes en las magnitudes y la forma como estas podían ser descritas matemáticamente con el fin de encontrar una generalización dependiendo del tipo de movimiento, según el comportamiento de las variables. Teniendo en cuenta que el desarrollo de la capacidad del razonamiento matemático es el objetivo de la teoría de resolución de problemas planteada por Mason, Burton y Stacey (1998). También los estudiantes se tienen que cuestionar acerca del proceso realizado y argumentarlo, asociándolo con experiencias previas, haciendo conjeturas y predicciones con respecto a lo que se observa en el movimiento del móvil y las gráficas que se obtienen, entre otras cosas.

La *comunicación* fue una actividad relevante en esta investigación, puesto que, al analizar las representaciones semióticas utilizadas por los estudiantes, fue importante identificar el registro con el cuál ellos se desenvuelven mejor en cuanto a su interpretación y descripción. Por tanto, fue importante la forma en la que comunicaban la situación y resolvían las preguntas planteadas relacionando magnitudes y logrando una generalización de los movimientos. También su comunicación oral fue fundamental ya que tenían que demostrar y describir lo observado, argumentando con conceptos propios de la matemática, así como con las diferentes representaciones semióticas con las cuales podían trabajar para organizar información, formular preguntas y evaluar aquello que se estaba describiendo. Fue necesario argumentar detalladamente

y de una manera bien fundamentada para que sea un discurso persuasivo y convincente con respecto a los procesos que está planteando y desarrollando.

En la actividad de *modelación* a través de representaciones tabulares, gráficas, algebraicas y aritméticas el estudiante reproduce el problema para hacerlo más comprensible y así poderlo transcribir y modelar matemáticamente a partir de elementos previos tales como las funciones lineales, y la interpretación de la ecuación que estas presentan para así lograr una contextualización y generalización del problema.

Los estudiantes también realizaron la actividad matemática de *formulación, comparación y ejercitación de procedimientos* teniendo en cuenta el trabajo conjunto, cuya socialización permitió ver múltiples casos en cuanto a la manera que organizaron y analizaron la información. Logrando comparar y evidenciar similitudes y diferencias en cuanto a los resultados obtenidos y los procesos realizados por cada uno de ellos, puesto que cada estudiante presentó variaciones en sus experiencias, tales como la inclinación de las superficies, así como las medidas que se tomaron como unidad de análisis.

Las actividades matemáticas realizadas desarrollaron el conocimiento matemático al potenciar los pensamientos planteados en los lineamientos curriculares del MEN (1998) en cuanto a:

El *pensamiento numérico y sistemas numéricos*, fue necesario aplicarlo en las actividades matemáticas elaboradas por los estudiantes ya que se necesita un sentido operacional al realizar el tratamiento de los registros de representación semiótica algebraicos y aritméticos. En este se requiere destreza y habilidades numéricas para usarlas en este contexto significativo al desarrollar estrategias útiles en el manejo de números y operaciones. Este pensamiento también es importante

para la actividad de comunicación puesto que es necesario identificar la forma de representar de tal manera que se argumente detalladamente el proceso realizado.

El *pensamiento espacial y sistemas geométricos*, fue usado en la representación y manipulación de la información de manera que se pudo ubicar las magnitudes en un plano cartesiano. Además de relacionar su comportamiento con la observación del movimiento a medida que transcurre el tiempo, realizando representaciones mentales en las cuales se identificó el tiempo como variable independiente, y las variaciones de las otras magnitudes consecutivamente mientras se observó el recorrido del móvil por las superficies. Además, este pensamiento es esencial para la representación y manipulación de la información en el aprendizaje y la resolución de problemas, lo cual fue fundamental para esta situación, en el desarrollo de las diversas actividades matemáticas.

Durante el desarrollo de la situación fue necesario que el estudiante utilizara el *pensamiento métrico y sistemas de medidas*, puesto que se estaba analizando variaciones entre magnitudes a partir de datos que ellos mismos estaban extrayendo por medio de mediciones de tiempo y distancia. Para poder calcular las magnitudes compuestas con las que es importante tener en cuenta que son otras mediciones que se deducen con el cálculo realizado con datos previos, las cuales deben ser representadas en el plano cartesiano considerando la ubicación de coordenadas basadas en sus mediciones. Con este pensamiento también se crea la magnitud a partir de la abstracción del fenómeno observado susceptible de ser medido.

El *pensamiento aleatorio y sistemas de datos* fue necesario en la situación problema, puesto que inicialmente los estudiantes buscaban y recogían datos y decidieron qué tan pertinente era la información obtenida para representarla, ya que observaban que no es muy exacta una gráfica si solamente se tenía en cuenta datos iniciales y finales del recorrido. Además, fue posible hacer

predicciones según el comportamiento de los datos obtenidos teniendo en cuenta que podía haber variaciones en cuanto a la precisión de la toma de estos datos, puesto que se presentan errores en las mediciones.

En el desarrollo de la actividad los estudiantes analizaron, organizaron y modelaron matemáticamente situaciones y problemas que fueron encontrando, por lo tanto, fue importante el *pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos*. Además, se aplicaron varios de los núcleos conceptuales de este pensamiento, tales como la función como dependencia y modelos de función, las magnitudes, teniendo en cuenta en este caso las variaciones de velocidad, distancia y tiempo, el sentido simbólico correspondiente al registro de representación algebraico, además de modelos matemáticos que permiten predecir y analizar este movimiento de manera general.

Por otro lado, el contexto en el que se ubicó la actividad corresponde a situaciones problemas de la vida diaria, puesto que el estudiante se encuentra en interacción directa con el objeto de estudio, además que lo puede asociar con su contexto cotidiano al observar diferentes tipos de movimiento que incluso ellos mismos realizan, identificando aquellas magnitudes que siempre están presentes con sus variaciones y comportamientos gráficos y analíticos.

En la situación se tienen en cuenta las fases en la realización de una investigación propuestas por Ponte, Brocardo y Oliveira (2006) ya que se estaba elaborando una introducción a la tarea a través de la propuesta planteada y ésta es explorada formulando los diferentes cuestionamientos. Posteriormente a través de la formulación de diversas conjeturas con respecto a los datos extraídos de la experiencia con el móvil y analizándolos a profundidad, fue posible justificarlas en el desarrollo de la situación con la comunicación constante con sus compañeros y el profesor. Finalmente, se profundizó en esas conjeturas y se observaron los resultados obtenidos de los estudiantes a través de los diversos procesos realizados, con sus respectivos argumentos que

fundamentaron sus análisis para construir el conocimiento relacionado con el objeto de estudio y reforzar su razonamiento matemático en la solución de problemas.

En cuanto a la relevancia de investigaciones en matemáticas, el desenvolvimiento del trabajo en equipo utilizando argumentos, comunicándose matemáticamente y elaborando informes es fundamental para la producción de significados matemáticos, posibilitando la autonomía de los estudiantes con respecto a los medios para investigar y hacer matemáticas, contribuyendo a su aprendizaje. En este sentido se tiene en cuenta el enfoque de Ponte et. al. (2006) donde a diferencia de Skovmose (2000), describe cómo se puede desarrollar el escenario investigativo, por tanto, con esta situación problema se estaba planteando a los estudiantes la realización de una actividad investigativa a través de tareas consideradas como abiertas y difíciles de larga duración. En estas se tiene la flexibilidad en cuanto a los procesos realizados utilizando sus conocimientos previos, donde a diferencia de un ejercicio, no se dispone de un método inmediato e igual va más allá de un problema, puesto que no es necesariamente un proceso convergente a un punto en particular, sino que los estudiantes pueden llegar a diversas afirmaciones y desarrollos de los cuales pueden ser más compuestos que solo definir de manera general el movimiento rectilíneo. Este proceso fue direccionado por cuestionamientos que surgen del profesor o de los estudiantes; provocar esta discusión es un papel fundamental del docente el cual podía identificar todo este proceso a través de una evaluación presente durante el desarrollo de la clase virtual y los resultados obtenidos.

Situación 2 (Ver anexo 4)

Con esta prueba se buscaba identificar el manejo que tienen los estudiantes en el tratamiento y conversión de los registros de representación semiótica con situaciones propias del movimiento rectilíneo, realizando el respectivo tratamiento en cada registro y las conversiones de

un registro a otro teniendo en cuenta los criterios de congruencia basados en sus unidades significantes.

Con la primera pregunta se buscaba indagar con respecto a las conversiones que el estudiante realizó desde el registro gráfico al registro verbal, a través de una gráfica que representa cuatro trayectos con variaciones de la velocidad con respecto al tiempo.

Con la pregunta dos se pretendía indagar acerca de los tratamientos y conversiones de diversos registros para el movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U), planteando con cada literal, que se provocaran las conversiones pertinentes. Con el literal a, se buscaba la conversión del registro verbal al registro gráfico, provocando también que el estudiante contemplara la posibilidad de realizar la conversión del registro verbal al tabular y así poder pasar al gráfico, con el literal b, se pretendía provocar la conversión del registro gráfico al algebraico y aritmético para realizar el respectivo tratamiento al calcular la ecuación reemplazando los valores de la pendiente y posición inicial, finalmente con el literal c, se buscaba el tratamiento del registro aritmético, calculando el desplazamiento en un tiempo específico.

Con la tercera pregunta se buscó que los estudiantes interpretaran el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado a través del registro gráfico, al realizar la conversión al registro verbal describiendo una situación donde se contextualizara el comportamiento de la gráfica, además de realizar conversión al registro algebraico y luego aplicar el tratamiento aritmético al reemplazar los respectivos valores.

Con la cuarta pregunta se buscaba que el estudiante aplicara los tratamientos y las conversiones de los registros de representación del movimiento a partir de una situación problema contextualizada, donde además de aplicar la teoría de resolución de problemas, tenían que

argumentar a través del uso de las representaciones semióticas en la composición de movimientos que se encuentran planteados la situación (M.R.U y M.R.U.D.).

Finalmente, en el punto 5 se plantearon preguntas que se debían analizar a partir de una gráfica, de la cual debían extraer los datos necesarios para realizar las conversiones a registros algebraicos y numéricos y así poder argumentar las respuestas a las preguntas planteadas.

Situación 3 (Ver anexo 5)

Con esta situación se buscó que los estudiantes argumentaran con base en el trabajo realizado anteriormente, en situaciones del movimiento rectilíneo en un entorno real y así fuera posible analizar las actividades cognitivas que ellos realizaron con los registros de representación semiótica, para identificar el registro que más les facilitaba la interpretación. Además de analizar la manera en la que se comunicaban a través de los registros de representación, aplicando también representaciones virtuales a través de simuladores.

Capítulo 4

Análisis de la Información

Con la información obtenida del desarrollo realizado por los estudiantes a las situaciones problema planteadas, además del diario, foro, videos y clases virtuales, se realizó un análisis tomando como referencia las representaciones semióticas y las actividades cognitivas de formación, tratamiento y conversión que realizaron. Identificando aciertos y dificultades presentadas, teniendo en cuenta los aprendizajes fundamentales relativos al razonamiento referidos por Duval (1999) correspondientes a la diversificación de los registros de representación semiótica, la diferenciación entre representante y representado, y la coordinación entre los diferentes registros de representación.

Por otro lado, se analizan los criterios de congruencia entre las representaciones que los estudiantes describen, las cuales son: Correspondencia semántica, univocidad semántica terminal y la organización de las unidades significantes. Los estudiantes elegidos para el análisis se han identificado con el seudónimo E1 hasta E10.

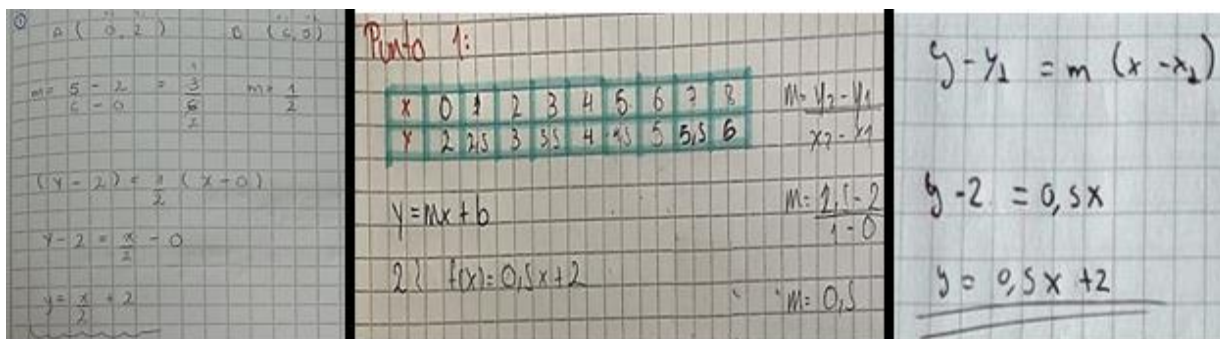
Análisis Prueba Preliminar

La prueba preliminar (ver Anexo 2) tenía como finalidad identificar las dificultades que presentan los estudiantes con respecto a los conocimientos previos del tema, en la cual se plantean tareas relacionadas con el análisis gráfico y algebraico de funciones lineales, ecuaciones e interpretación de gráficas con magnitudes de velocidad, distancia y tiempo.

En la primera tarea se planteaba la obtención de la ecuación de una recta a partir de su representación gráfica. En general los estudiantes utilizaron diferentes métodos para obtener la ecuación, entre estos se pueden apreciar la aplicación del punto-pendiente ($y - y_1 = m(x - x_1)$) y el uso de la ecuación general de la recta ($y = mx + b$). Además, se puede observar la utilización de tablas y puntos coordenados (x, y) para representar los datos, observando una diversificación de registros de representación, algunos de los procesos realizados por los estudiantes se pueden ver en la figura 7.

Figura 7.

Respuestas de estudiantes E1, E2 Y E3 respectivamente en la tarea 1 de prueba preliminar.



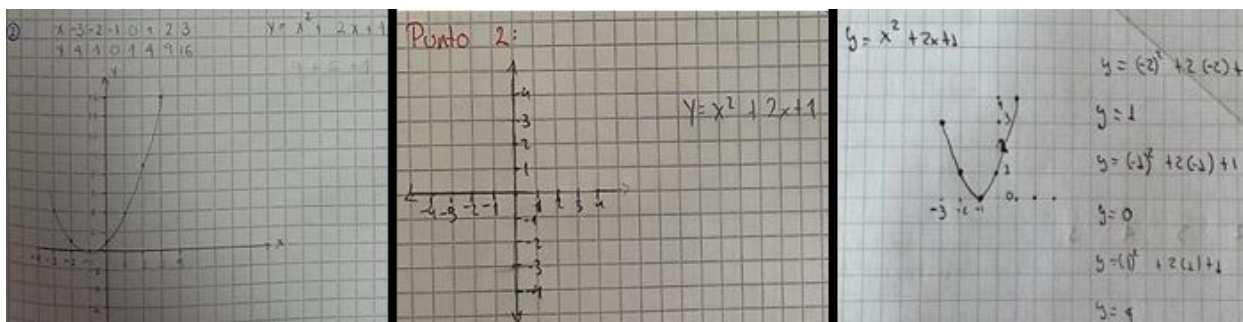
A pesar de que más de la mitad de los estudiantes realizaron estos procesos, otros manifestaban no saber la manera de proceder para obtener la solución requerida, describiendo algunas expresiones algebraicas sin reemplazar valores u obteniendo resultados erróneos.

Se puede ver como tratan de adaptar la representación gráfica a un lenguaje basados en las correspondencias que se pueden llegar a deducir, tales como la obtención de puntos coordinados para relacionarlos más fácilmente con la solución planteada y el uso de la representación tabular para registrar los datos y extraer la información.

En el segundo punto se planteaba la construcción de una gráfica a partir de la ecuación $y = x^2 + 2x + 1$ en el intervalo $(-3,3)$. Se pudo observar que solo 5 estudiantes resolvieron correctamente este punto, los demás no supieron la manera de proceder para solucionarlo. Teniendo en cuenta que la forma más pertinente es lograr una correspondencia entre el registro algebraico y el tabular, para luego ser pasado al registro gráfico y así coordinar correctamente la conversión de registros. En esta actividad se logra identificar falencias en el proceso de conversión del registro algebraico al gráfico.

Figura 8.

Respuestas de estudiantes E1, E2 Y E3 respectivamente en la tarea 2 de prueba preliminar.



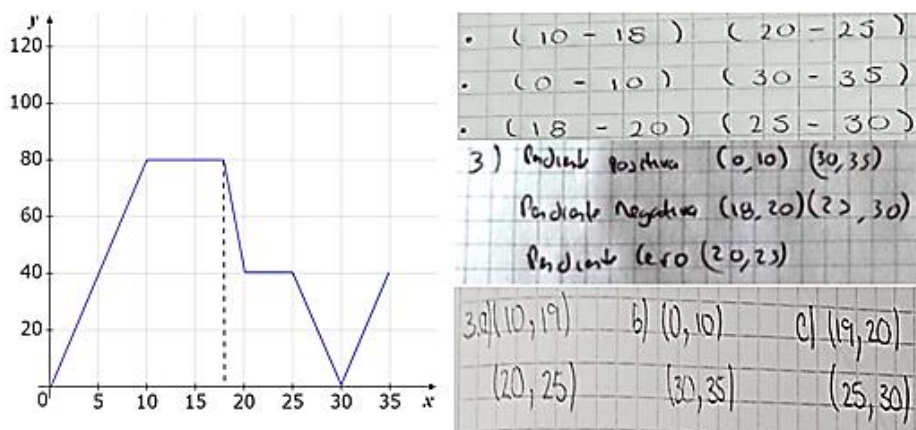
Se observa que a pesar que el estudiante E2 utilizó una tabla de datos en el primer punto, en el segundo no empieza con ese tipo de representación, lo que le dificulta la ubicación en el plano cartesiano, por otro lado, el estudiante E3 pasa directamente del registro numérico al gráfico

sin registrar datos en una tabla. De manera general es posible identificar que los estudiantes utilizan algunos registros de representación, otros por el contrario no tuvieron presente la diversificación de los registros de representación semiótica. Además, falta claridad en los procesos de conversión los cuales son fundamentales para el aprendizaje ya que Duval (1999) plantea que solo éstos pueden favorecer la coordinación de los registros de representación.

En el siguiente punto de la prueba preliminar se planteaba analizar las pendientes de una gráfica, identificando los intervalos en los que es cero, positiva o negativa, lo cual es fundamental para relacionarlo con el aumento o disminución de aceleración de un móvil. La mayoría de los estudiantes describían correctamente los intervalos presentes en la gráfica, algunos utilizando notaciones que no corresponden necesariamente a intervalos, pero que especifican los valores requeridos tal y como se observa en la figura 9.

Figura 9.

Respuestas de estudiantes E1, E3 Y E4 respectivamente en la tarea 3 de prueba preliminar.



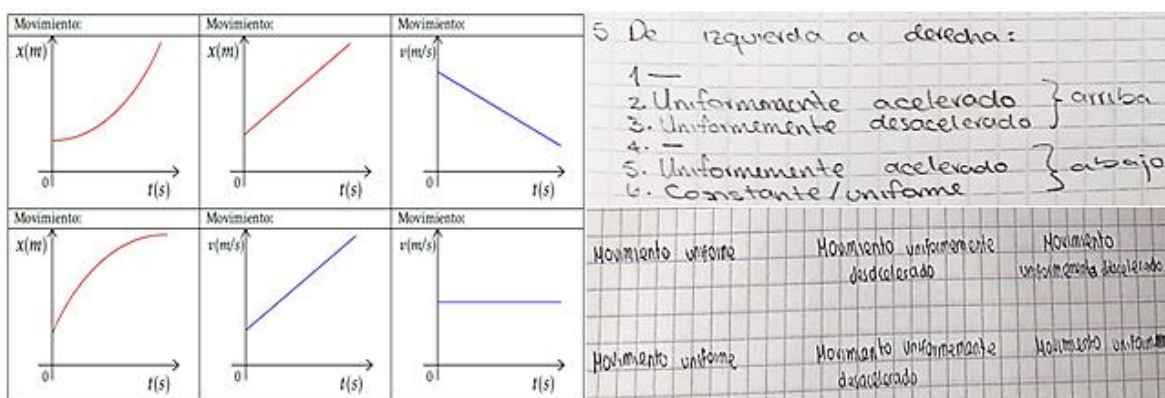
Se pudieron observar datos no muy exactos u omitidos basados en la gráfica. Con esta tarea se pudo identificar que a los estudiantes se les facilita extraer datos de un registro gráfico, sin embargo, hay que reforzar algunos conceptos en los que se debe tener claridad tales como intervalos y pendientes en rectas crecientes, decrecientes y constantes.

En la siguiente tarea basada en el tratamiento del registro algebraico, se logró identificar que los estudiantes realizan los despejes que se requieren, sin embargo, se observan algunas falencias que se deben reforzar. El tratamiento del registro algebraico es fundamental, ya que en la resolución de problemas con movimiento rectilíneo se deben hallar variables y realizar los respectivos despejes dependiendo de los datos que se tengan, para así poder pasar al registro numérico y obtener un valor determinado en la magnitud requerida.

Los siguientes aspectos planteados en la prueba preliminar, estaban centrados de manera directa con el objeto de estudio, basados en el análisis gráfico y la representación gráfica de datos planteados en una tabla con variables de distancia y tiempo. Con estas tareas se logra identificar que los estudiantes relacionan mucho mejor la aceleración o desaceleración en las gráficas de velocidad y presentan dificultad en interpretar las gráficas de desplazamiento como se observa en la figura 10, sin embargo, ningún estudiante respondió acertadamente en la totalidad de las gráficas planteadas.

Figura 10.

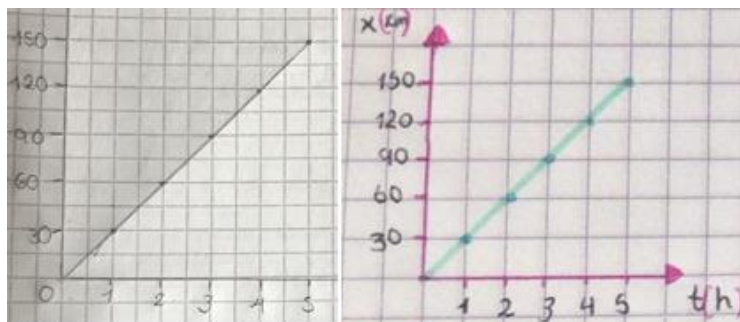
Respuestas de estudiantes E4 y E5 respectivamente en la tarea 5 de prueba preliminar.



El último punto no representó mucha dificultad para los estudiantes ya que lograron realizar la conversión del registro de representación tabular al registro gráfico, algunas de las respuestas se evidencian en la figura 11.

Figura 11.

Respuestas de estudiantes E4 y E5 respectivamente en la tarea 6 de prueba preliminar.



En la tabla 3 se muestra el desempeño en la prueba preliminar de una muestra de 6 estudiantes en base a las respuestas más comunes encontradas, resumiendo lo descrito anteriormente, el símbolo \checkmark indica que el estudiante realizó la transformación semiótica correspondiente y X es el caso contrario.

Tabla 3.

Desempeño estudiantes en prueba preliminar

Tarea Prueba preliminar	Transformación semiótica	E1	E2	E3	E4	E5	E6
1	Gráfico \rightarrow Algebraico	\checkmark	\checkmark	\checkmark	X	X	\checkmark
2	Algebraico \rightarrow Gráfico	\checkmark	X	\checkmark	X	X	X
3	Gráfico \rightarrow Numérico	\checkmark	X	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark
4	Tratamiento Algebraico	\checkmark	X	\checkmark	\checkmark	X	\checkmark
5	Gráfico \rightarrow Verbal	X	X	X	X	X	X
6	Tabular \rightarrow Gráfico	X	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark

Se puede evidenciar que la tarea 3 y 6 presentaron una menor dificultad ya que se puede encontrar una congruencia entre las representaciones, puesto que existe correspondencia semántica entre las unidades significantes, univocidad terminal y el mismo orden de aprehensión. En el caso de la tarea 3 las unidades significantes corresponden a las pendientes de las rectas, su determinado

signo y el intervalo en el que se encuentra y para el caso de la segunda tarea son los datos de la tabla ubicados respectivamente en coordenadas cartesianas.

Por otro lado, en las tareas 1 y 2 basadas en conversiones de registros gráficos y algebraicos, surgen dificultades creadas por la no congruencia entre representaciones, tal y como lo menciona Duval (1999) ya que no hay una correspondencia semántica entre el representante y el representado. Sin embargo, se puede traducir a expresiones que permitan realizar las conversiones adecuadas, tales como la utilización de puntos coordinados para representar valores que luego serán representados en la ecuación particular de cada gráfica o la realización de tablas para poder relacionar directamente la ecuación con la gráfica.

En la tarea 5 se evidencia que a pesar de que algunos estudiantes identifican las pendientes positivas y negativas de una recta, no asocian correctamente estos datos con la aceleración o desaceleración de un móvil. Además, no identifican correctamente lo que representa el incremento de posición con respecto al tiempo, evidenciando que se desconoce un poco el objeto, al no asociar los conocimientos previos con magnitudes del movimiento rectilíneo. Dicho conocimiento se reforzó y construyó con la realización de la situación problema que se aplicó a continuación, teniendo presente lo mencionado por Duval (2017) ya que, en el aprendizaje de los estudiantes, no se debe cuestionar el tipo de registro no discursivo que se debe elegir, sino hacer que sean capaces de convertir la representación de cualquier objeto de un registro en otro registro.

Análisis Situación Problema 1

La primera situación problema (ver anexo 3), es una estrategia de enseñanza basada en el constructivismo, a través de experiencias prácticas, donde los estudiantes interactuaron directamente con el objeto de estudio. El objetivo de esta situación problema era desarrollar el

potencial investigador en los estudiantes, planteando estrategias y argumentos, utilizando las representaciones semióticas para construir el conocimiento del movimiento rectilíneo.

Para analizar el movimiento rectilíneo se propuso la construcción de un módulo con tres trayectorias que son recorridas por un móvil. A través de un foro de discusión los estudiantes plantearon algunas estrategias para una construcción adecuada del módulo, con especificaciones para que fuera posible analizar correctamente el recorrido y así identificar las magnitudes y los valores que estos presentaban.

El foro se realizó con el uso de la plataforma dispuesta por la institución. La primera pregunta planteada fue: “¿Que recomendamos para que el movimiento se visualice mejor?” Algunas de las respuestas se presentan en la figura 12, en donde los estudiantes interactuaron y dieron recomendaciones para la construcción propia de cada uno de ellos.

Figura 12.

Algunas respuestas en el foro para la pregunta: “¿Que recomendamos para que el movimiento se visualice mejor?”



[Redacted name]

Recomendaría usar una pelota que tenga cierto peso pero que su tamaño sea mediano

Citar



[Redacted name]

Usar materiales menos rígidos en la parte de la tabla con el piso

Citar



[Redacted name]

1) seleccionar 3 elementos planos tales como libros grandes, tablas, planchas carton u otro objeto similar (de preferencia que sea resistente)

2) Utilizar ya sea papel o cartulina para unir las intersecciones de cada elemento plano y para que así no sea interrumpida la trayectoria

3) Utilizar un elemento redondo que no sea muy liviano para que no se desvie.

4) ser creativos

Citar



[Redacted name]

El circuito debe ser mas largo para observar los recorridos, no debe ser tan curvo

Citar

Las recomendaciones de los estudiantes fueron un gran apoyo, ya que algunos no tenían claridad en como elaborar el módulo de forma que facilitara el análisis del movimiento rectilíneo en esas superficies. La siguiente pregunta que se realizó en el foro fue: “¿Qué podemos hacer para tomar datos?” Donde algunas de las respuestas fueron: “medir tiempos, distancias y recorridos a medida que haga el experimento”, “podemos grabar la trayectoria, luego, tomamos en cuenta los tiempos y todo lo demás a analizar”, “hacer una tabla donde se registre el tiempo de duración de desplazamiento del objeto a través de la rampa y la distancia que alcanzó a recorrer”.

Con las respuestas planteadas se pudo direccionar el proceso investigativo que realizaron los estudiantes, ya que con esas descripciones fue posible estructurar la forma en la que se pueden tomar datos, aprovechando por ejemplo el uso de grabaciones para una mejor visualización del movimiento y así realizar las mediciones respectivas, además de la importancia de usar la representación tabular para registrar los datos que se obtienen. Durante la sesión de la clase virtual también se recomendó hacer marcas en cada trayecto que efectuara el móvil, para poder tomar mucho mejor los tiempos al recorrer ciertas distancias y la velocidad que tiene el móvil justo en ese punto del recorrido.

Luego de discutir la manera en la cual se realizaba la experiencia, los estudiantes proceden a desarrollarla, en donde se acordó la elaboración de un vídeo donde se evidenciaba el movimiento efectuado por el móvil escogido para la práctica (canica, pelota, carro de juguete, etc.). Además, los estudiantes también realizaron un informe describiendo los hallazgos obtenidos y escribieron un diario según los planteamientos de la teoría de resolución de problemas de Mason et. al. (1998). Los aspectos de la teoría de resolución de problemas se habían trabajado con los estudiantes en la solución de diversos problemas de la física durante el desarrollo de clases anteriores, por lo que los estudiantes ya tenían conocimiento de esta.

Algunas de las construcciones realizadas se presentan en la figura 13, cuyas imágenes fueron tomadas de los videos de los estudiantes.

Figura 13.

Trayectos para analizar el movimiento rectilíneo

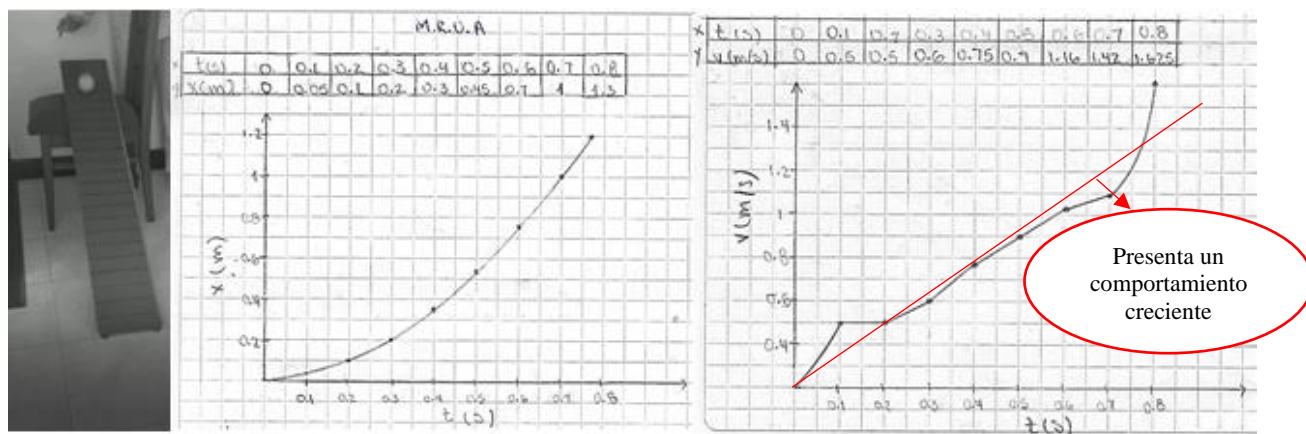


El análisis realizado por los estudiantes se enfocó en cada una de las tres trayectorias, presentando un informe de los datos extraídos y las respectivas gráficas que componen a cada uno de los movimientos. Algunas de las descripciones de los estudiantes se presentan a continuación, tomados del informe enviado, el video y las consideraciones planteadas en el diario.

En la realización de las gráficas se pudo evidenciar algunas irregularidades en la toma de datos debido a errores comunes presentados en la investigación, como en el caso presentado en la figura 14, sin embargo, se puede evidenciar el comportamiento aproximado de las magnitudes de velocidad y distancia.

Figura 14.

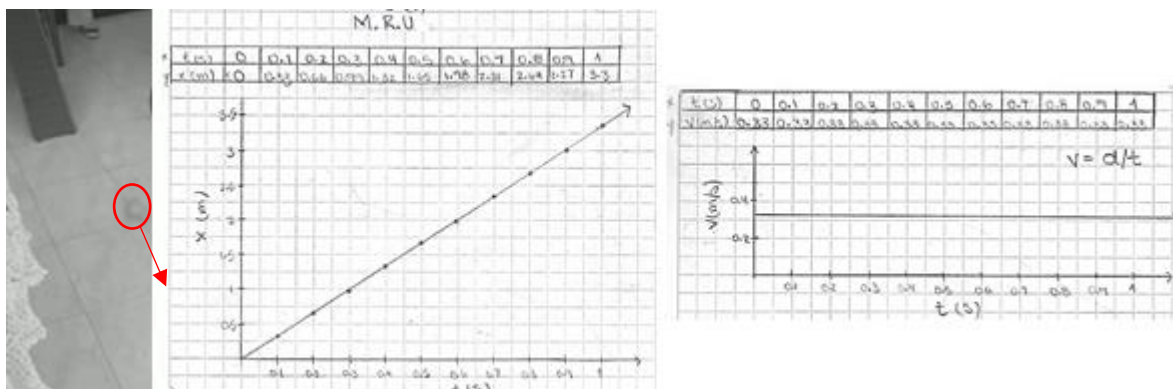
Representación $x-t$ y $v-t$. Trayecto 1 M.R.U.A, estudiante E4



En general, los estudiantes analizaron cada trayecto por aparte comenzando con una distancia inicial $x_0 = 0 \text{ m}$. Los resultados para la distancia y velocidad con respecto al tiempo del trayecto 2 obtenidos por el estudiante 4 se pueden observar en las figuras 15.

Figura 15.

Representación $x-t$ y $v-t$. Trayecto 1 M.R.U.A, estudiante E4



Al observar el comportamiento que los datos presentaban, los estudiantes pudieron explicar lo que ocurre con las magnitudes en cada trayecto, como se muestra en la figura 16, cumpliendo en gran medida con el objetivo de construir el conocimiento del movimiento rectilíneo, además de poder evidenciar el comportamiento de las magnitudes planteadas.

Figura 16.

Descripción del movimiento realizado en cada trayecto, estudiante E4

Trayecto 1: En el trayecto 1 se puede ver tanto en el video como en las gráficas cómo la pelota acelera rápidamente debido a la gravedad y la inclinación de la tabla.

Trayecto 2: Cuando la pelota toca el suelo esta deja de acelerar y continúa por todo el recorrido con el impulso que traía del trayecto 1 y debido a la ausencia de inclinación la velocidad y la aceleración son constante e inexistente respectivamente.

Trayecto 3: Cuando la pelota empieza a subir por la tabla se puede apreciar cómo esta sube cada vez más lento hasta que se detiene y por efecto de la gravedad, se devuelve.

Con el desarrollo de esta estrategia se pudo trabajar en gran medida con la movilización entre registros de representación del movimiento rectilíneo, tales como tabular, gráfico, verbal y algebraico. Además, los estudiantes investigaron utilizando el diario y argumentando con base en los otros cuestionamientos planteados en la guía (ver anexo 3), diseñados teniendo en cuenta los planteamientos de Ponte. et. al. (2006), puesto que en la investigación matemática el estudiante es llamado a actuar como un matemático, algunas de las consideraciones planteadas por el estudiante 4 fueron se evidencian en la figura 17.

Figura 17.

Descripciones en diario e informe, estudiante E4

¿Cuáles son las magnitudes del movimiento?
Las magnitudes del movimiento son: longitud, tiempo, velocidad y aceleración.

¿Qué mediciones se pueden realizar y con qué instrumentos?
Se pueden hacer mediciones de distancia con un metro; de tiempo con un cronómetro y a partir de estos datos se pueden hacer cálculos de aceleración y velocidad.

¿Cómo puede influir el tamaño y peso de la esfera en el recorrido que realiza?

¿Qué se es?
→ El movimiento rectilíneo consiste en el desplazamiento de un objeto en línea recta.
→ En este laboratorio podemos encontrar varios tipos de movimiento rectilíneo; entre ellos están el movimiento rectilíneo uniforme y el movimiento rectilíneo uniformemente variado.

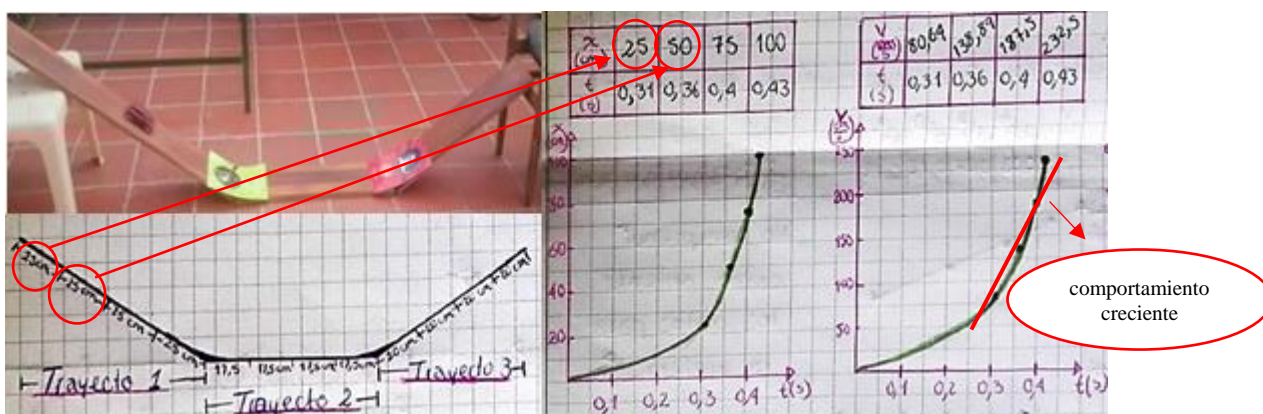
¿Qué se debe usar?
Puedo usar instrumentos de medición como el metro, cronómetro y aparatos en dispositivos como una cámara que me permita observar más detalladamente lo que sucede.

En general se presentaron dificultades en el cálculo de la aceleración, ya que expresaban no tener claridad en la aplicación de la ecuación utilizando los datos obtenidos, sin embargo, se fue realizando intervención en las sesiones de clase para lograr encontrar la relación con la recta de la velocidad al calcular la pendiente de la gráfica, aspectos que se reforzaron, finalmente en la realimentación general de la situación planteada.

Los estudiantes también utilizaron representaciones geométricas ubicando diferentes medidas, tomando los tiempos de cada recorrido, analizando de tal forma que utilizaron una congruencia entre las representaciones. Esto se puede evidenciar en la figura 18, en donde la estudiante establece una correspondencia semántica, además hay una univocidad semántica terminal y se presenta un mismo orden de aprehensión de las unidades significantes de los registros de representación. De este modo se están realizando procesos de conversión del registro de representación geométrica al tabular y posteriormente la actividad de conversión al registro gráfico.

Figura 18.

Análisis del estudiante E6 del primer trayecto de la situación 1

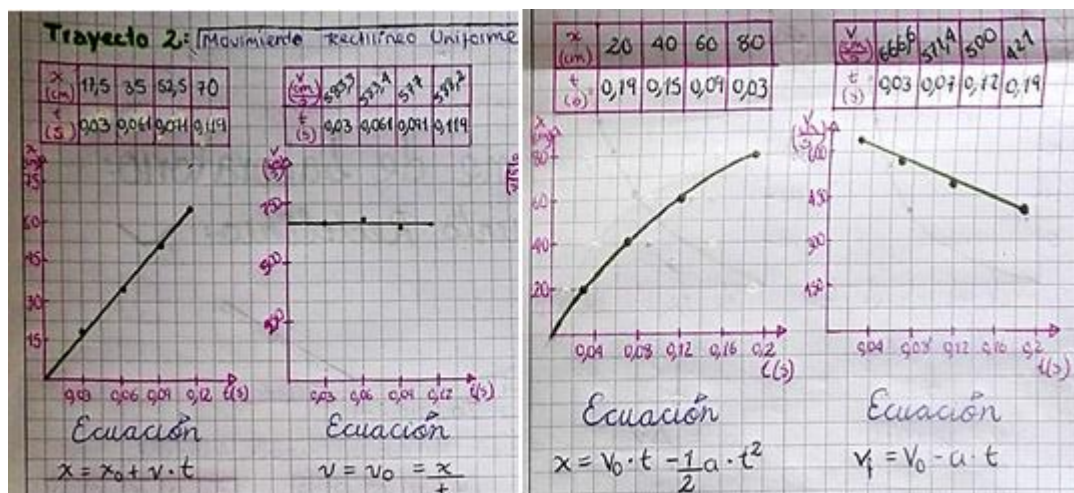


En la actividad de conversión al registro gráfico se puede ver cómo fue posible observar con la experiencia el comportamiento que toman las magnitudes de distancia y velocidad con

respecto al tiempo en el movimiento rectilíneo. Además, a pesar de las variaciones en los datos, se pudo llegar a una aproximación del concepto, observando que con los valores de las magnitudes presentes fue posible deducir el comportamiento gráfico cuando se presenta un movimiento acelerado, uniforme y desacelerado, tal y como se puede observar en la figura 18 y 19.

Figura 19.

Análisis del estudiante E6 del trayecto 2 y 3 de la situación 1



En la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico los estudiantes plantearon las ecuaciones según la gráfica observada. En los encuentros virtuales de realimentación de la situación, se preguntó a la estudiante E6 sobre las ecuaciones descritas expresando: “en las gráficas de rectas es más fácil deducir la ecuación ya que solo es cambiar las letras que conocemos en los ejes “x” y “y” de la ecuación de la recta”. Para el caso de los comportamientos cuadráticos, fue un aspecto que se mencionó en el desarrollo de la clase, en donde se analizó la ecuación para el desplazamiento en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Los estudiantes al describir las ecuaciones presentaron dificultades en el trabajo con valores numéricos, no solo algebraicamente, sin embargo, algunos de ellos cancelaron términos que sabían

que eran cero, como el caso de la distancia y velocidad inicial del recorrido, como se observa en la figura 20.

Figura 20.

Ecuaciones del primer trayecto de la situación 1. Estudiante E6

The image shows two columns of handwritten equations on grid paper. The left column is headed 'Ecuación' with a downward arrow pointing to the first equation, $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$. Below it is the second equation, $x = \frac{1}{2} a \cdot t^2$. The right column is also headed 'Ecuación' with a downward arrow pointing to the first equation, $v = v_0 + a \cdot t$. Below it is the second equation, $v = a \cdot t$.

El diario fue un aspecto fundamental en esta estrategia en la que se construye el conocimiento, teniendo en cuenta que se desarrolló de una manera virtual, en donde se desconoce de manera directa las dificultades y consideraciones que tienen los estudiantes durante el desarrollo, ya que de esta forma los estudiantes tienden a expresar mucho menos sus dudas y algunos prefieren trabajar por su cuenta sin apoyarse mucho en los planteamientos de los compañeros. Parte de estos aspectos se plantearon en el diario en el cual se evidencian varias consideraciones del desarrollo y deducciones obtenidas, como las que se observan en la figura 21.

Figura 21.

Descripciones en diario e informe, estudiante E4

The image shows two pages of handwritten text on grid paper. The left page contains the following text:

¿Qué se? → En este laboratorio se está trabajando el movimiento rectilíneo, por lo tanto necesito obtener datos como la distancia y el tiempo, los cuales serán de vital importancia para hallar otras magnitudes tales como la velocidad y la aceleración. Se trabajaron 3 tipos de movimiento:

- Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado
- Movimiento Rectilíneo Uniforme
- Movimiento Rectilíneo Uniformemente Desacelerado.

 Gracias al desarrollo de este laboratorio, reforcé y complementé conocimientos académicos sobre la física, y puedo afirmar que aunque fue una experiencia un tanto larga y exigió tiempo extra, fue un análisis enriquecedor donde llegué a recordar que:

- La pendiente de la velocidad es la aceleración.

 Y supe (en algunos casos):

- Hallar y utilizar debidamente ecuaciones para hallar los valores de las magnitudes.

 The right page contains the following text:

Durante la elaboración del informe también hubo momentos en los que no comprendí cómo realizar la gráfica de aceleración/tiempo en el tercer trayecto (movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado) pues no supe cómo encontrar los datos de la aceleración.

¿Cómo se hizo? → Tal como lo dije en el interreguante previo, para analizar estos tres tipos de movimiento se necesitaban obtener los datos de distancia y tiempo, para esto utilicé un metro, y un cronómetro.

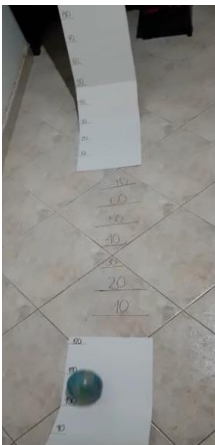
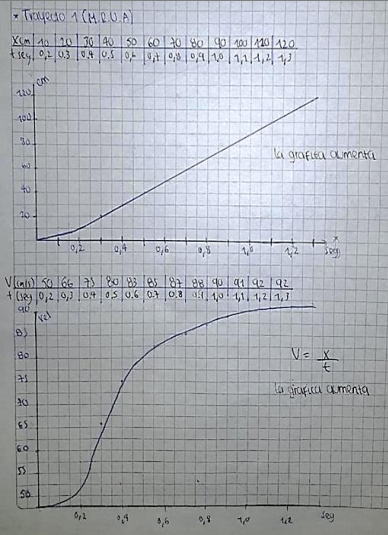

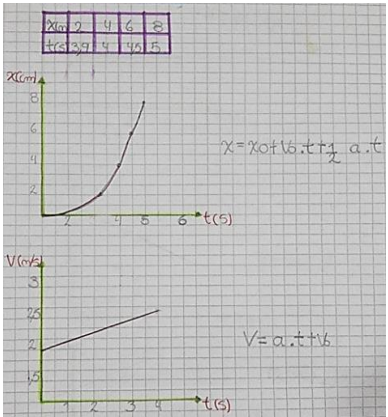
¿Cómo lo hice? → Debido a que los móviles se desplazaban demasiado rápido, y a la hora de tomar el tiempo era complicado, grabé un video del movimiento de ambos móviles, con el video listo pude tomar con mayor facilidad los tiempos con el cronómetro.

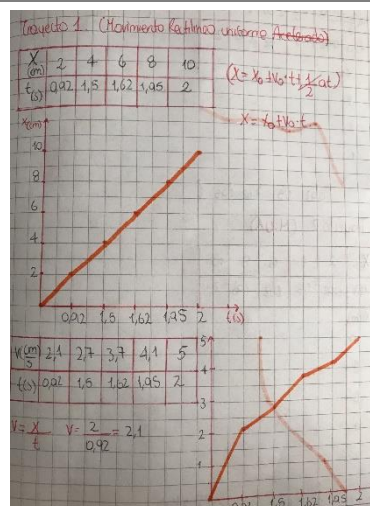
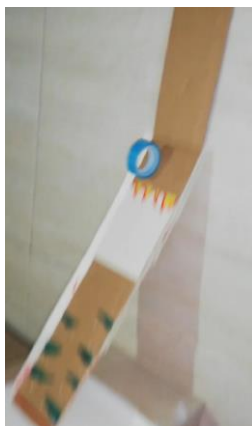
En la tabla 4 y 5 se muestran algunos de los resultados obtenidos por los estudiantes, los cuales se aproximan al comportamiento real de las magnitudes analizadas con el módulo utilizado.

En la tabla 4 se pueden observar representaciones gráficas obtenidas para el primer trayecto, el cual describe un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.).

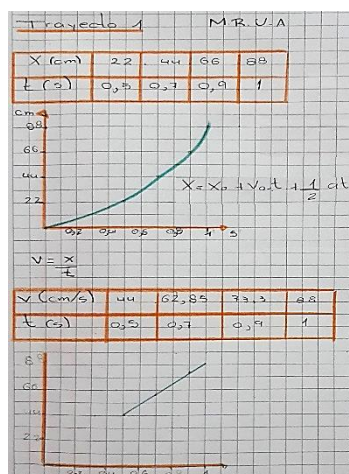
Tabla 4.

Desempeño de estudiantes E7, E8, E9 y E10, en el análisis del trayecto 1 de la situación 1.

Estudiante	Módulo utilizado	Gráfica obtenida	Desempeño
E7			El estudiante E7 ubica los puntos según los datos tomados, sin embargo, no realiza las aproximaciones descritas en clase, ya que en datos experimentales siempre se encontrarán errores.
E8			El estudiante E8 obtiene el comportamiento cuadrático del desplazamiento. Para la velocidad calcula el punto final del recorrido relacionándolo con una recta creciente, pero no tiene en cuenta la velocidad inicial del movimiento.

E9

El estudiante E9 realizó el proceso de tabulación de datos utilizando un móvil que describe un movimiento muy despacio, lo cual le permite tomar mejor los datos, sin embargo, falta concretar correctamente el comportamiento realizado.

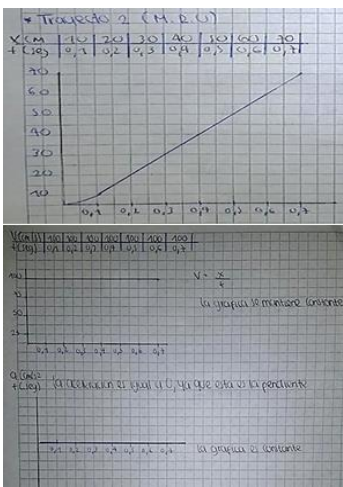
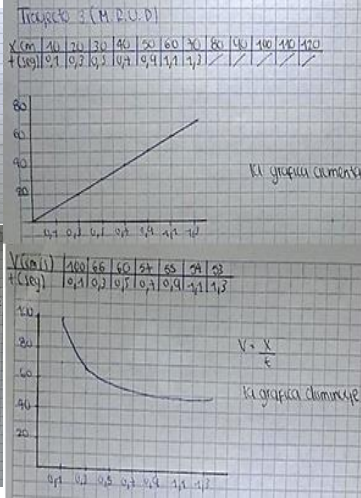
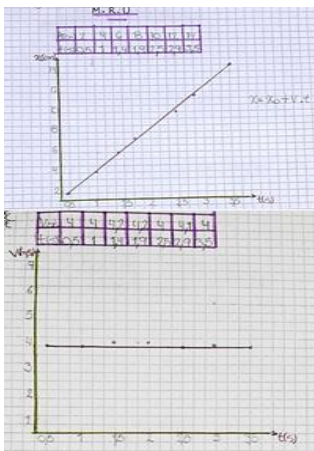
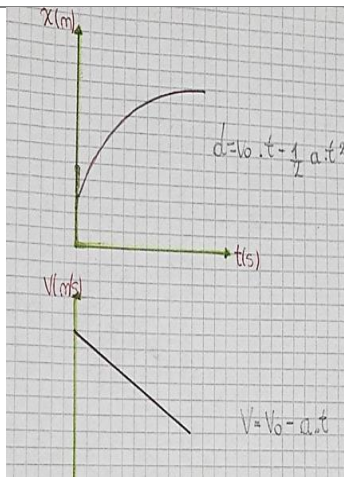
E10

El estudiante E10 realizó una buena toma de datos al cumplir con las recomendaciones descritas por todos, lo que le permitió hacer un análisis acertado del movimiento descrito y acercarse en gran medida al conocimiento del objeto de estudio.

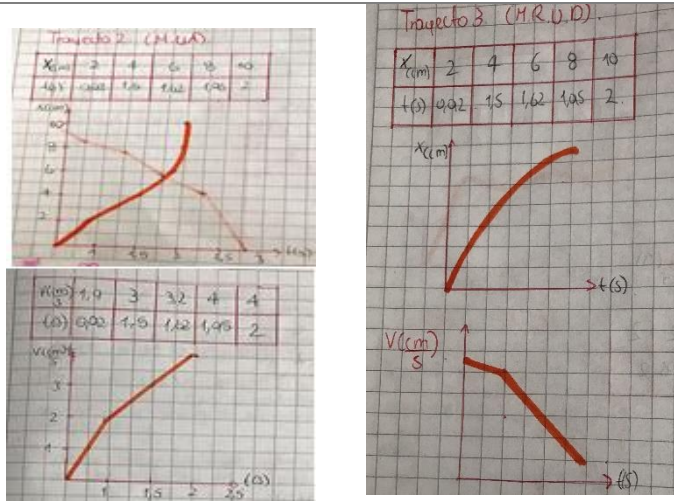
En la tabla 5 se pueden observar representaciones gráficas obtenidas para el segundo y tercer trayecto, el cual describe un movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.) y movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado (M.R.U.D.) respectivamente.

Tabla 5.

Desempeño de estudiantes E7, E8, E9 y E10, en el análisis del trayecto 2 y 3 de la situación 1.

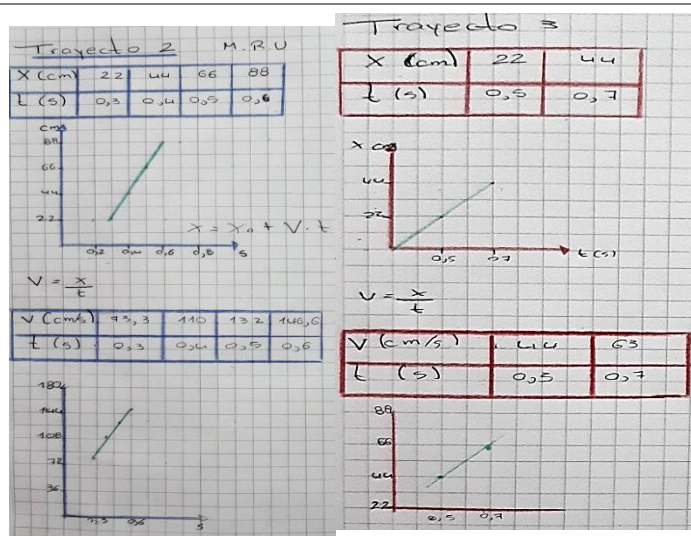
Estudiante	Trayecto 2	Trayecto 3	Desempeño
E7			<p>En el trayecto 2, el estudiante E7 representa correctamente el comportamiento de las magnitudes de distancia, velocidad, y aceleración. Sin embargo, en el trayecto 3 nuevamente le falta realizar una aproximación adecuada de los datos.</p>
E8			<p>El estudiante E8 realizó correctamente las actividades de conversión en el trayecto 2, obteniendo la gráfica para velocidad constante. En el último trayecto solo graficó las consideraciones que tenía del movimiento sin hacer el proceso experimental.</p>

E9



Se puede evidenciar que el estudiante E9 realiza aproximaciones al comportamiento de las magnitudes analizadas, aunque no tiene en cuenta que en el trayecto 2 el móvil ya tiene una velocidad inicial.

E10



El estudiante E10 a pesar de tener un buen módulo de análisis, no interpretó correctamente la velocidad del trayecto 2 por incongruencias en los datos, además en el trayecto 3 solo tomo dos datos lo cual le dificultó una descripción adecuada.

Se puede evidenciar que los estudiantes realizaron aproximaciones al comportamiento real de las magnitudes, de tal manera que al concretar mejor este análisis los estudiantes pueden llegar a reforzar este conocimiento, proporcionando terminología tal y como lo plantea Waldegg (1998) referenciando al papel del profesor en el proceso de la construcción del conocimiento.

Durante el desarrollo de la experiencia se aprovecharon las ideas de los estudiantes en la discusión, ya que según Cabanne (2010) contribuye para un aprendizaje más efectivo, al relacionar los conceptos trabajados con los conocimientos previos planteados en la prueba preliminar, de

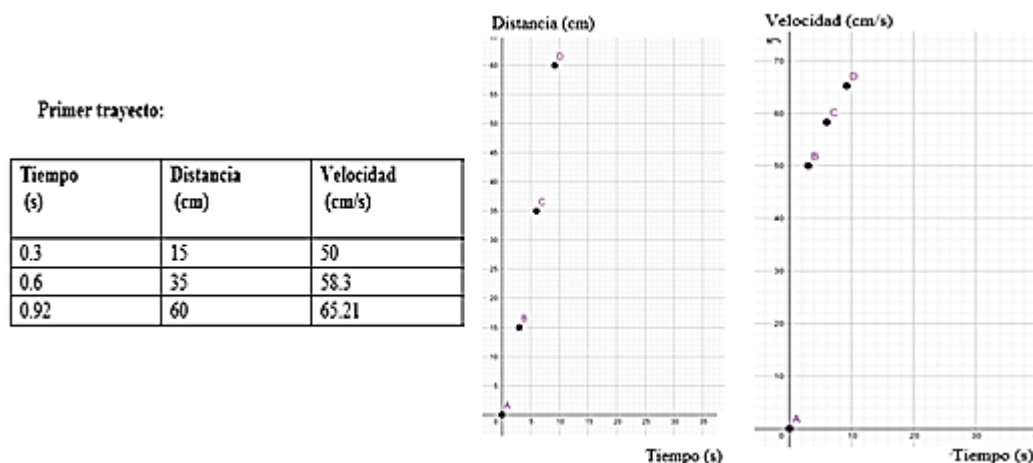
modo que se fue direccionando con el fin de solucionar varios cuestionamientos que puedan llegar a obtener los estudiantes.

La orientación detallada no pudo llevarse a cabo como se esperaba, debido a que la experiencia fue desarrollada de manera virtual por la situación de pandemia que se presentaba, esto llevó a encontrar diferentes dificultades en la virtualidad para guiar a los estudiantes durante el proceso de desarrollo. Esto, debido a que el docente no puede identificar exactamente cómo va cada uno de sus estudiantes, además de las dificultades que presentan, puesto que pocos las tienden a expresar durante la clase virtual. Por otro lado, la mayoría de estudiantes trabajan prácticamente solo con las herramientas u orientaciones generales, sin embargo, cada uno presenta dudas particulares, lo que se puede evidenciar en las soluciones presentadas en el informe final, en donde los errores encontrados pudieron orientarse mucho mejor presencialmente para una consecución acertada en las respuestas de los estudiantes.

Los estudiantes E1 y E3, utilizaron representaciones gráficas de manera virtual de donde fue posible realizar el proceso de conversión del registro tabular al gráfico de una manera más exacta para obtener las respectivas deducciones, lo cual es una buena forma para analizar datos (ver figura 22). Sin embargo, es importante el conocimiento de graficar manualmente para que la comprensión sea más amplia. Además, el aprovechamiento de los nuevos sistemas de representación externa que brindan las nuevas tecnologías permite evidenciar el desarrollo de sistemas internos de representación (Goldin y Shteingold, 2001). Esto se aprovechó en el desarrollo de la situación 3 para tener una interacción más directa al relacionar un contexto real con la teoría que se trabajó en la situación 1.

Figura 22.

Representaciones estudiante E3, primer trayecto situación 1.



En general con la experiencia práctica y el análisis de las diferentes representaciones semióticas del movimiento rectilíneo, los estudiantes le dieron un significado social al realizar prácticas conceptuales construyendo cognitivamente conceptos matemáticos con las magnitudes allí presentadas (D' Amore et al., 2017). Esto fue posible evidenciarlo con las descripciones realizadas por los estudiantes tanto en el diario como en el informe general entregado, algunas de esas consideraciones se pueden observar en la tabla 6.

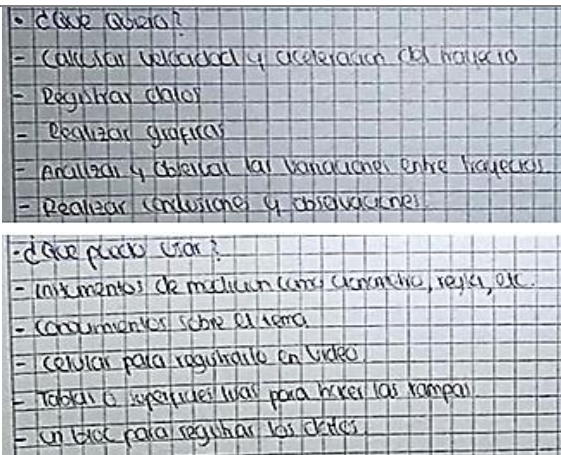
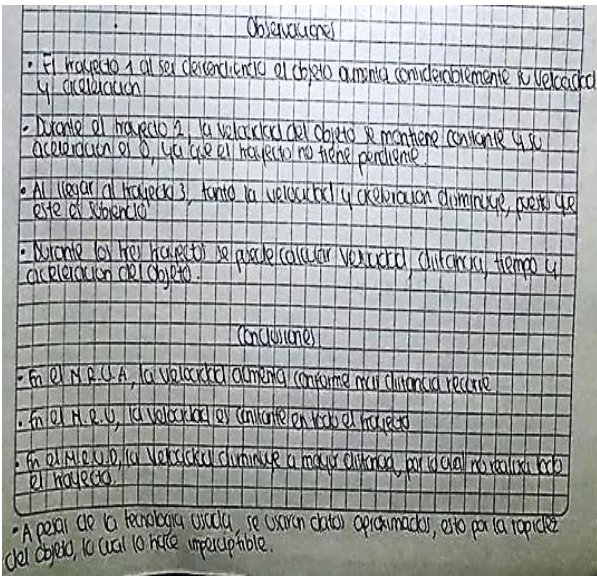

En esta situación problema, los estudiantes desarrollaron las cinco ideas básicas del pensamiento matemático planteado por Mason et. al. (1998) el cual se consiguió con el descubrimiento y desarrollo del conocimiento del movimiento rectilíneo. En este se encontraban los tres factores que permitieron mejorar el razonamiento matemático, dado que se realizó un proceso de investigación matemática, además se sacó ventaja del dominio de estados emocionales, el cual fue planteado en el diario que realizaron los estudiantes y también se aplicó el conocimiento previo necesario, desarrollado en la prueba preliminar.

Con el análisis planteado en el informe, además del diario, los estudiantes describen el comportamiento de las magnitudes según lo observado y sus reflexiones basadas en

cuestionamientos que se pueden obtener durante el desarrollo de la práctica, tal y como se puede ver en la tabla 6. Esto contribuye al desarrollo del pensamiento crítico planteado por Skovmose (2000) ya que los estudiantes tienen que aplicar destrezas matemáticas e interpretar y actuar según la experiencia práctica realizada, a través de una reflexión constante.

Tabla 6.

Apuntes de los estudiantes E7, E8, E9 Y E10 en el diario y el informe de la situación 1.

Estudiante	Apuntes en informe y diario	Desempeño
E7		<p>El estudiante E7 describe en el diario algunos aspectos relacionados en la forma en la que va a proceder para registrar los datos y representarlos, además describe las magnitudes del movimiento por cada trayecto basado en la observación realizada. Luego de las representaciones gráficas logra concluir de manera acertada las descripciones del movimiento rectilíneo en cada trayecto.</p>
		
		

E8

¿Cómo organizo la información?

Se puede hacer tomando esto

V: velocidad

X: Distancia

a: aceleración

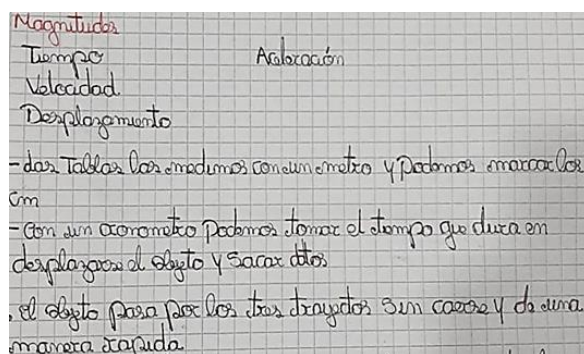
t: tiempo

¿Cómo hacemos para sacar datos exactos del tiempo del recorrido?

-Con un cronometro se puede ir sacando el dato exacto pero sería muy demorado ya que nos tocaría sacar uno por uno, si grabamos un video es más fácil pero asimismo toma su tiempo pausar para sacar el dato aunque podemos ponerlo en modo lento para tener más facilidad para poder ver exactamente donde queremos sacar este.

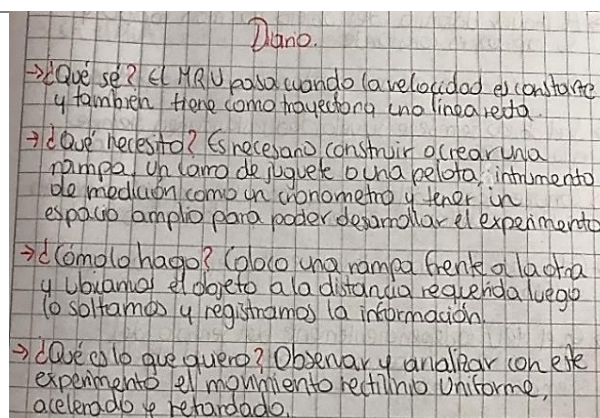
¿Se puede hacer un circuito pequeño?

El objetivo de este laboratorio es poder ver y sacar muchos datos e igual que información si lo hacemos pequeño no podemos observar ejemplo si llega hasta la trayectoria 3 muy alto o si hacia la trayectoria normal sin salirse del circuito entre muchas otras que si se pueden visualizar en un módulo grande con largas distancias.



El estudiante E8 optó por escribir el diario en computador, describiendo las magnitudes del movimiento y la forma de calcularlas para visualizar el comportamiento. Los resultados obtenidos los expresa únicamente de manera gráfica, sin hacer la conversión al registro verbal.

E9



En las descripciones del estudiante E9 se evidencia la construcción de los conceptos del movimiento rectilíneo, basado en las representaciones gráficas realizadas, las cuales, a pesar de no ser muy exactas, reflejan el comportamiento descrito en cada trayectoria del movimiento.

- El MUA su aceleración siempre es constante
- La tabla de valores indica la posición del cuerpo u objeto.
- En el MRU el objeto recorre espacios iguales en tiempos iguales.
- La inclinación de la recta (pendiente) es la velocidad.
- El punto de corte con el eje vertical es la posición inicial.
- En el MUA el objeto recorre más espacio a medida que va pasando el tiempo.
- En el MUA la velocidad varía en cada punto.
- En el MRU es cuando su velocidad es constante y además su trayectoria es recta.
- En la gráfica v/t el MUA coincide con el espacio recorrido.
- En la gráfica de MRU son más inclinadas cuanto más velocidad llevan.
- La gráfica a/t del MUA es una recta constante.
- Un cuerpo que tiene aceleración tiene una velocidad variable.

E10

- DIARIO
- ¿Qué se?
 - Se que el objeto se desliza sin la necesidad de aplicarle una fuerza por sobre la superficie inclinada en forma de rampa.
 - También se que a mayor inclinación de la superficie, el objeto se mueve con mayor rapidez.
 - ¿Qué quiero?
 - Quiero observar el movimiento del objeto durante los recorridos.
 - ¿Qué puedo usar?
 - Me puedo apoyar en los elementos tecnológicos. Para grabar y visualizar el movimiento también, para la medición del tiempo utilizado en cada desplazamiento.
- Posteriormente se observa detenidamente el video y se toman los datos del tiempo en cuanto la pelota pasa por las líneas marcadas, luego se pasan los datos a unas pequeñas tablas y así poder graficar.

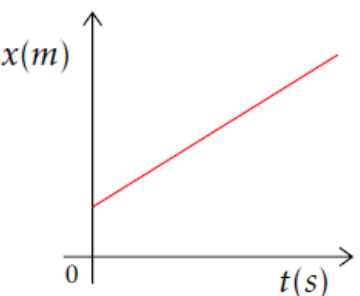
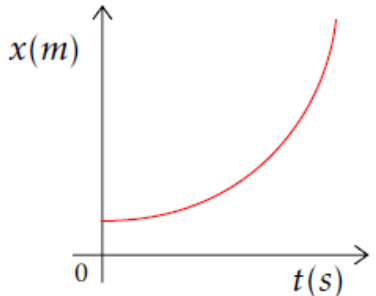
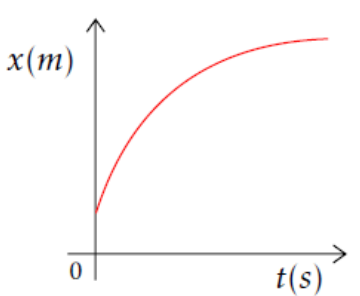
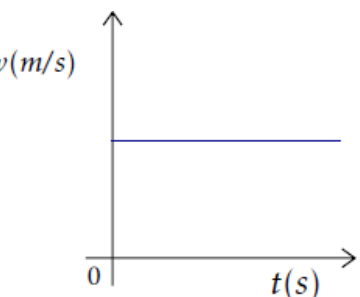
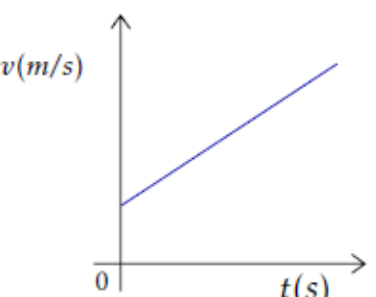
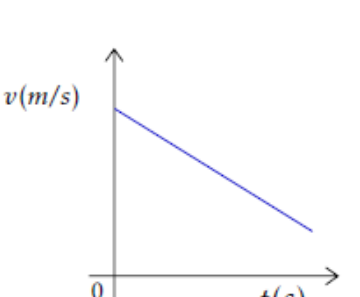
El estudiante E10 describe la importancia de que la superficie no sea tan inclinada para facilitar la toma de datos, planteando además el apoyo en el vídeo, con este se realizan las representaciones tabulares y gráficas de las magnitudes las cuales apoyarán la socialización final del objeto de estudio.

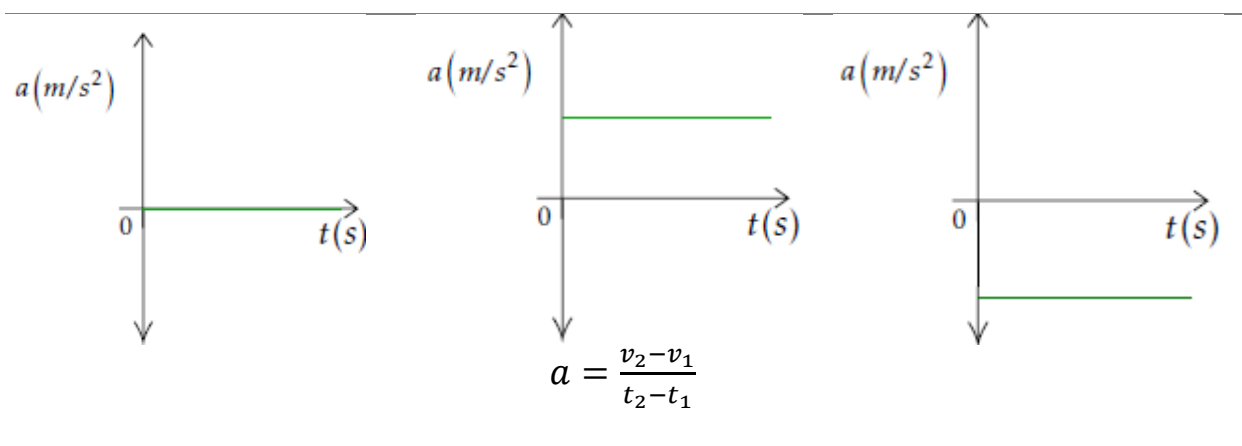
Se pudo evidenciar la dificultad presente para realizar el proceso de conversión del registro gráfico al algebraico, esto se presenta en gran medida porque los estudiantes no encuentran una congruencia de la representación gráfica con la ecuación. Esto teniendo en cuenta lo mencionado por Duval (1999): “la dificultad de la conversión de una representación depende del grado de no-congruencia entre la representación de salida y la representación de llegada” (p. 51).

Una vez realizada esta situación se continuó con la socialización y construcción final del concepto de movimiento rectilíneo, junto con el análisis de las diferentes representaciones semióticas, relacionando las gráficas que muestran un comportamiento rectilíneo con la ecuación de la recta y aplicando los respectivos cambios de variable para las magnitudes presentes en el eje “x” y el eje “y”.

Tabla 7.

Representación gráfica y ecuaciones del movimiento rectilíneo

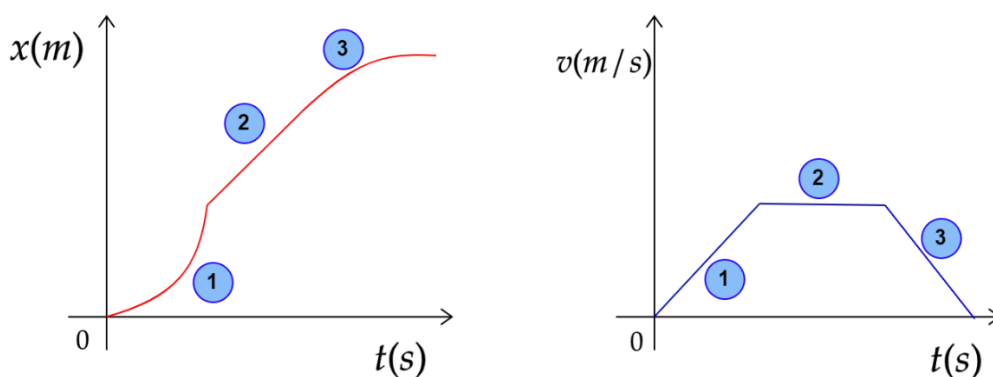
M.R.U.	M.R.U.A.	M.R.U.D.
 $x = x_0 + v_0 t$	 $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	
 $v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$	 $v = v_0 + a t$	



Finalmente, se analizó la representación gráfica del comportamiento de las magnitudes de distancia y velocidad al pasar por los tres trayectos, tal y como se puede apreciar en la figura 23, donde los estudiantes expresaron haber aclarado las dudas que presentaban, culminando exitosamente con la construcción del conocimiento del movimiento rectilíneo visto desde una perspectiva real.

Figura 23.

Representación gráfica $x-t$ y $v-t$ de los tres trayectos recorridos por el móvil en la situación 1.



Fuente: Elaboración propia

De esta forma fue posible responder a la pregunta orientadora correspondiente a la construcción del concepto de movimiento rectilíneo a través de las representaciones semióticas.

Luego de la socialización general del objeto, se procedió al desarrollo de la situación problema 2 (ver anexo 4) en la cual se presentan diversas tareas con el fin de realizar actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las diferentes representaciones semióticas del movimiento rectilíneo.

Análisis Situación Problema 2

La situación problema 2 (anexo 4) tenía como objetivo identificar el manejo que tienen los estudiantes en el tratamiento y conversión de los registros de representación semiótica con situaciones propias del movimiento rectilíneo. Esta se lleva a cabo con tareas que presentan la necesidad de realizar actividades de transformación de representaciones semióticas teniendo en cuenta los criterios de congruencia al identificar las unidades significantes de cada representación.

En la primera tarea era necesario realizar la conversión del registro gráfico al registro verbal, describiendo el comportamiento observado en una gráfica de velocidad con respecto al tiempo, para un móvil que efectúa un movimiento rectilíneo. Posteriormente fue necesario hacer la conversión del registro verbal al registro de representación gráfico para las magnitudes de distancia con respecto al tiempo.

Las unidades significantes de cada representación se describen en la tabla 8, las cuales al identificar correctamente cada una de éstas, hace posible la correspondencia con una unidad significativa de llegada, lo que permite realizar una congruencia entre representaciones según los criterios de Duval (1999).

Tabla 8.

Unidades significantes de los registros de representación presentes en la tarea 1, situación problema 2 (Anexo 4)

Registro Gráfico	Registro verbal del	Registro gráfico
Velocidad- tiempo	comportamiento del móvil	Distancia - tiempo
Eje y : Variable dependiente: Velocidad (v).	La distancia y velocidad presenta variaciones con respecto al tiempo.	Eje y : Variable dependiente: Distancia (x).
Eje x : Variable independiente tiempo (t).		Eje x : Variable independiente: tiempo (t).
Velocidad inicial: $v_0 \neq 0$.	El móvil parte con una velocidad inicial no nula, analizando el desplazamiento desde una distancia igual a cero.	Distancia inicial: $x_0 = 0$.
Unidades de medición: m/s y segundos.	Las unidades en las que se miden las magnitudes son metros y segundos.	Unidades de medición: metros y segundos.
En la gráfica $v-t$ la pendiente de las rectas es la aceleración (a).	La aceleración cambia a medida que realiza el recorrido.	En la gráfica $x-t$ la pendiente de la recta es la velocidad (v) y las curvas dependen si el móvil acelera o desacelera.

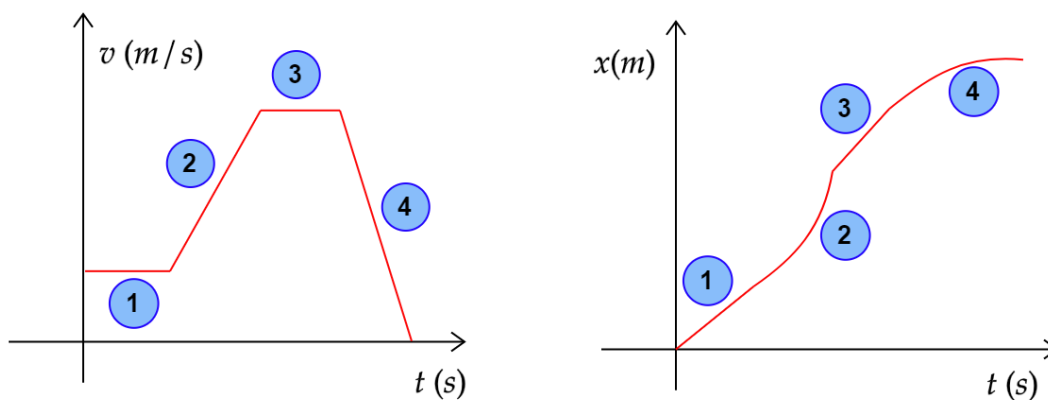
Fuente: Elaboración propia

Con la descripción de las unidades significantes de la tabla 8 se puede realizar una congruencia entre representaciones identificando una correspondencia semántica, univocidad semántica terminal y el mismo orden de aprehensión de las unidades significantes (Duval, 1999).

Los registros de representación gráficos que se analizaron en esta tarea se presentan en la figura 24.

Figura 24.

Registros de representación gráficos de la tarea 1, situación problema 2 (Anexo 4)



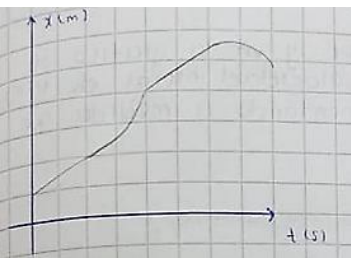
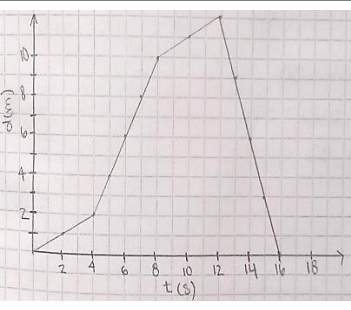
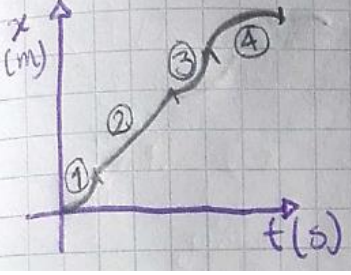
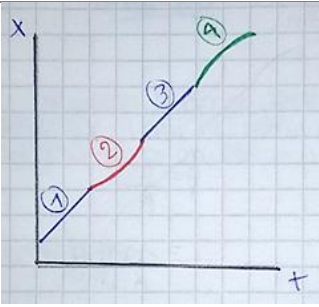
Fuente: Elaboración propia

En general la primera actividad de conversión no presentó mucha dificultad, ya que los estudiantes lograron describir verbalmente el comportamiento en la gráfica, puesto que se observa la relación de unidades significantes de la gráfica con los conceptos del movimiento rectilíneo. Se evidencia la comprensión del objeto desde su representación gráfica, aunque la conversión del registro verbal al gráfico presentó algunas dificultades.

Algunos estudiantes se expresaron en un lenguaje teórico y propio del movimiento rectilíneo y otros con un lenguaje cotidiano. Sin embargo, lograron describir el comportamiento de las magnitudes observado en las gráficas, esto se puede evidenciar en algunas de las respuestas plasmadas en la tabla 9.

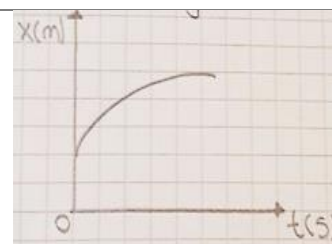
Tabla 9.

Respuestas tarea 1 de la situación problema 2 (Anexo 4)

Estudiante	Conversión de representaciones: Gráfica → Verbal	Conversión de representaciones: Verbal → Gráfica
E1	<p>PTA Comienza un movimiento con cierta velocidad en la cual por un momento se mantiene constante que corresponde al trayecto 1, luego su velocidad aumenta (trayecto 2) llegando a un punto en el que otra vez se vuelve constante (trayecto 3) y por ultimo al tener una velocidad constante esta empieza a disminuir hasta finalizar el recorrido (trayecto 4)</p>	
E4	<p>a- En el primer trayecto vemos cómo el móvil se desliza a velocidad constante. Se sabe que no parte del reposo porque desde el inicio es constante.</p> <p>b- En el segundo trayecto se observa un movimiento uniformemente acelerado.</p> <p>c- Asimismo hay un trayecto en el que vemos movimiento rectilíneo uniforme.</p> <p>d- Finalmente en el trayecto 4 se ve M.R.U.D.</p>	
E6	<p>La gráfica velocidad-tiempo se comporta de manera distinta para cada trayectoria, en la 1ª y 3ª podemos observar que se trata de movimiento rectilíneo uniforme, en la 2ª movimiento rectilíneo uniformemente acelerado y finalmente en la 4ª trayectoria se observa el movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado.</p>	
E7	<p>1) El carro durante el primer trayecto presenta velocidad constante lo cual presenta un M.R.U. Al pasar al trayecto 2 su velocidad incrementa, por lo cual tiene un M.R.U.A. Durante el trayecto 3 vuelve al M.R.U. porque su velocidad es constante. Al finalizar en el trayecto 4 su velocidad decrece, por ende presenta un M.R.U.D.</p>	

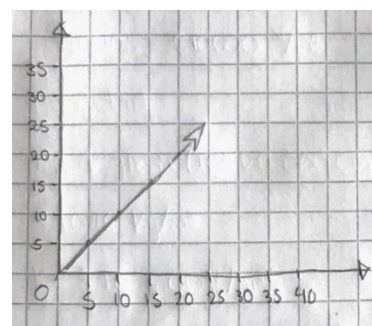
E8

1 el comportamiento de este al principio es constante, luego como se muestra en la gráfica aumenta y posteriormente sigue siendo constante, luego de un tiempo este disminuye totalmente



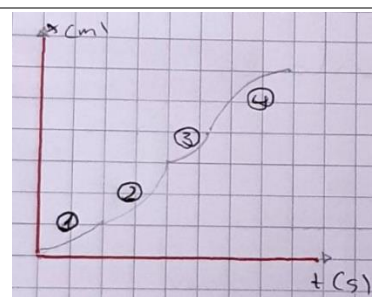
E9

En la gráfica observamos que el ciclista avanza a una velocidad constante, después de determinado tiempo aumenta su velocidad y después de determinado tiempo la mantiene constante y finalmente disminuye la velocidad hasta llegar a un tiempo determinado.



E10

La gráfica que relaciona las variables velocidad-tiempo, presenta un comportamiento distinto en cada trayecto, se puede observar que en los trayectos 1 y 3 se realiza un movimiento rectilíneo uniforme, para el segundo trayecto se realiza movimiento rectilíneo uniformemente acelerado; por último en el cuarto trayecto se realiza el movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado.



Se puede observar que la mayoría de los estudiantes describen la unidad significant de la velocidad inicial con frases tales como: “Comienza con un movimiento con cierta velocidad”, “en el primer trayecto vemos cómo el móvil se desplaza con velocidad constante...”, “el carro durante el primer trayecto presenta velocidad constante...”, “el comportamiento de éste, al principio es constante...”. Mientras que algunos omiten esta descripción, en la tabla 9 se observa que los estudiantes E6 y E10 pasan directamente a describir el movimiento presente en cada trayectoria sin explicar un proceso más detallado teniendo en cuenta todas las unidades significantes de la representación.

En general los estudiantes omiten la unidad significativa relacionada con la aceleración, ya que con frases tales como: “aumenta su velocidad”, “su velocidad incrementa” o “se mantiene constante” hacen referencia a la aceleración nula, positiva o desaceleración presente allí, de modo que plantean directamente si se trata de un M.R.U, M.R.U.A. o M.R.U.D.

La actividad de conversión del registro verbal al gráfico presentó una mayor dificultad ya que varios estudiantes no realizaron esa conversión, mientras que otros presentaron una falta de correspondencia semántica en unidades significantes, como es el caso de los estudiantes E1, E7, E8 y E9, donde inicialmente no comenzaron la gráfica desde una posición $x = 0$, lo cual es fundamental en el análisis gráfico, por otro lado, los estudiantes E8 y E9 no relacionaron la gráfica con cada uno de los trayectos y describen comportamientos con un único trayecto sin variaciones de aceleración.

Los estudiantes E2, E3 y E5 realizaron la conversión del registro gráfico al verbal, pero no lograron hacer la conversión del registro verbal al gráfico al presentar una no-congruencia entre las unidades significantes descritas verbalmente.

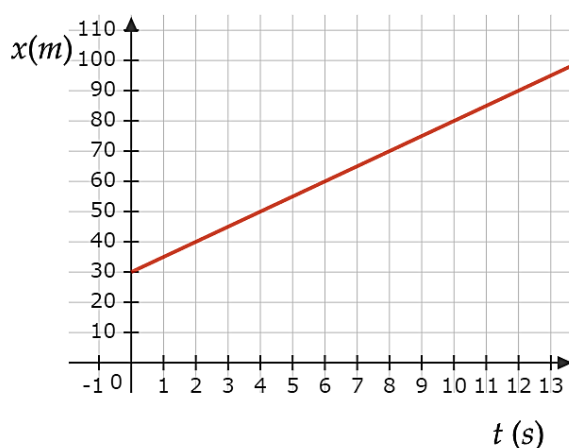
En cuanto al comportamiento de las variables de distancia con respecto al tiempo, en cada trayectoria, se pueden observar aproximaciones al comportamiento real descrito en la figura 24, algunos fallando en la descripción de la trayectoria 3, como es el caso de los estudiantes E6 y E10. El estudiante E4, a pesar de realizar una descripción verbal acertada, no describe correctamente cada una de las trayectorias, considerándolos siempre como comportamientos rectilíneos.

La tarea 2 de la situación problema 2, consistía en realizar varias actividades cognitivas. En primer lugar, se plantea una actividad de conversión del registro de representación verbal al gráfico, posteriormente una conversión del registro gráfico al algebraico para luego realizar

conversión del registro algebraico al numérico con su respectiva representación. Una solución plausible de esta tarea se presenta en la figura 25.

Figura 25.

Solución de tarea 2, situación problema 2 (Anexo 4)



Ecuación

$$x = x_0 + vt$$

$$x = 30 \text{ m} + (5 \text{ m/s}) t$$

Distancia en $t = 20 \text{ s}$

$$x = 30 \text{ m} + (5 \text{ m/s}) (20 \text{ s})$$

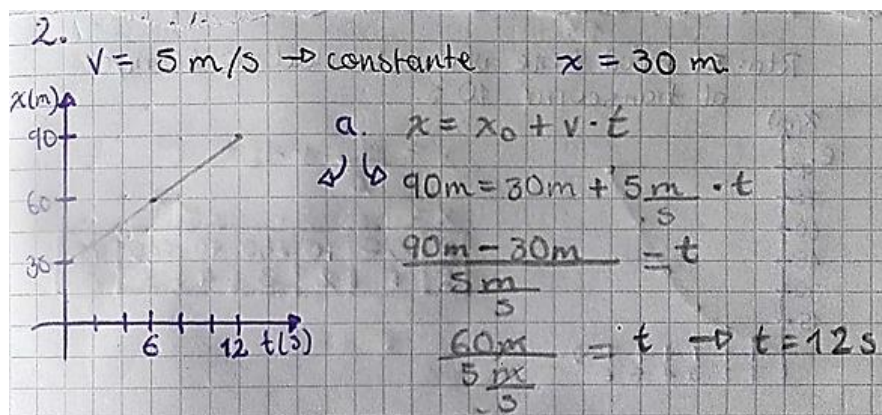
$$x = 130 \text{ m}$$

Fuente: Elaboración propia

Entre los resultados encontrados, los estudiantes utilizan los fenómenos relativos a la semiósis descritos por Duval (1999) ya que utilizan una diversificación de los registros de representación semiótica, al hacer cálculos que en ocasiones son innecesarios para dar solución a la pregunta planteada pero que pueden guiar a los estudiantes en el proceso de encontrar la posible respuesta al problema. Esto se puede evidenciar en la figura 26, donde el estudiante realiza las actividades de conversión además el tratamiento del registro numérico con el fin de comprobar los resultados presentes en la gráfica.

Figura 26.

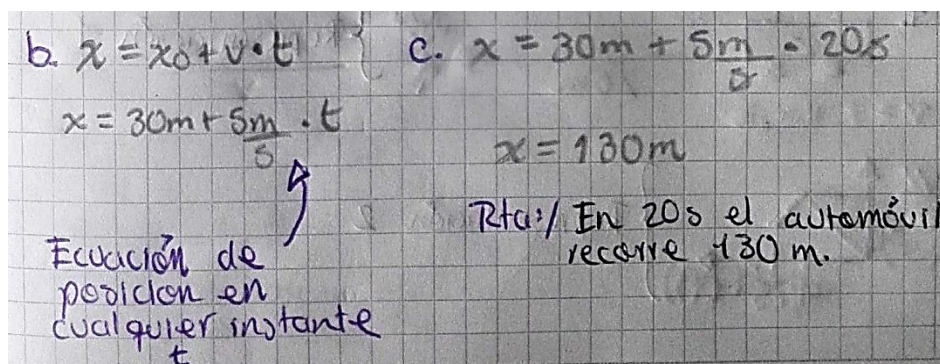
Representación gráfica del estudiante E6 a la tarea 2, situación 2 (Anexo 4)



Se puede observar que el estudiante identifica de manera inmediata la ecuación, relacionando las unidades significantes tanto del registro verbal con el gráfico y así procede a realizar el tratamiento numérico para la comprobación de que efectivamente la distancia de 90 m es la que recorre en 12 s. Con ese análisis realizado dio respuesta directa al planteamiento de la tarea, sin embargo, describió los procesos de conversión detalladamente según se plantea en cada literal, tal y como se aprecia en la figura 27.

Figura 27.

Respuesta del estudiante E6 a la tarea 2, situación 2 (Anexo 4)



Las unidades significantes identificadas en los registros de representación de esta tarea, se presentan en la tabla 10, con las cuales los estudiantes realizaron las actividades cognitivas de tratamiento y conversión.

Tabla 10.

Unidades significantes de los registros de representación presentes en la tarea 2, situación problema 2 (Anexo 4)

Registro verbal del comportamiento del móvil	Registro Gráfico Distancia - tiempo	Registro Algebraico y Numérico
La distancia varía y la velocidad se mantiene constante con respecto al tiempo.	Eje y : Variable dependiente: Distancia (x). Eje x : Variable independiente: tiempo (t).	Variable dependiente: x Variable independiente: t .
El móvil se desplaza con una velocidad constante, analizando el desplazamiento desde una distancia inicial de 30 m.	Velocidad constante: $v = 5 \frac{m}{s}$. Distancia inicial: 30 m.	La pendiente de la recta de las gráficas $x-t$ es la velocidad $v = 5 \frac{m}{s}$, la distancia inicial es $x_0 = 30 m$.
Las unidades en las que se miden las magnitudes son metros y segundos.	Unidades de medición: metros y segundos.	La ecuación del desplazamiento del móvil es: $x = x_0 + vt$ con magnitudes medidas en metros y segundos.

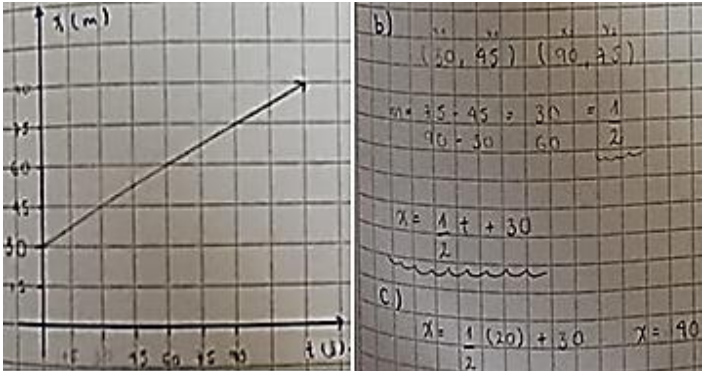
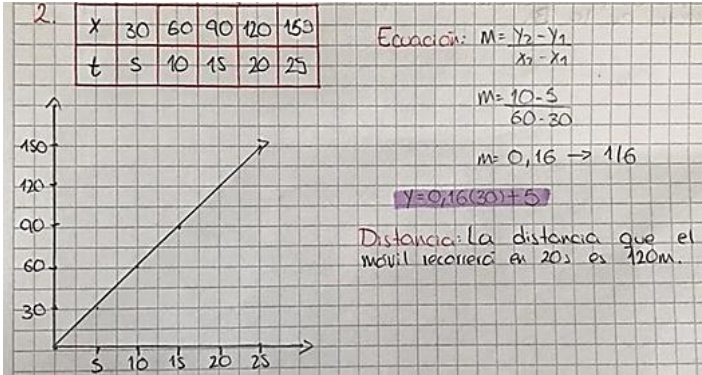
Fuente: Elaboración propia

En general se pudieron encontrar diferentes métodos utilizados por los estudiantes para la actividad de conversión del registro verbal al registro gráfico, aunque la mayoría representó de manera errónea la gráfica. En la tabla 11 se observan algunos de los errores comunes de los

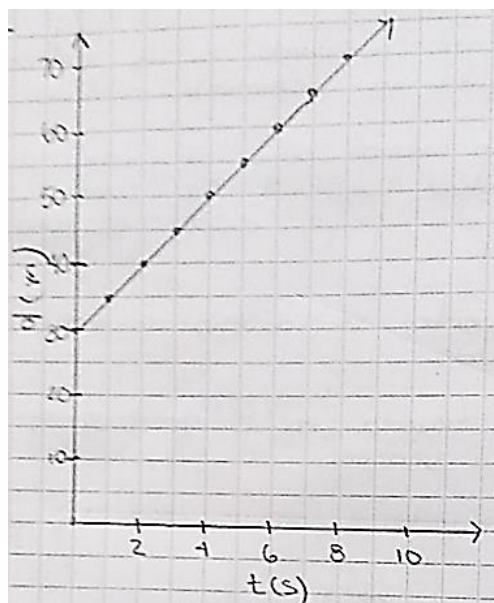
estudiantes al omitir algunas de las unidades significantes de cada registro, en algunos casos se evidencia la no congruencia entre representaciones.

Tabla 11.

Respuestas tarea 2 de la situación problema 2 (Anexo 3)

Estudiante	Actividades cognitivas entre representaciones: Verbal, gráfica, algebraica y numérica	Desempeño
E1		<p>El estudiante no identificó una escala adecuada en la representación de los tiempos, omitiendo que el móvil avanza una distancia de 5 metros cada segundo. En la conversión a registro algebraico se orienta únicamente por la gráfica, de manera que obtuvo resultados erróneos.</p>
E2		<p>El estudiante utiliza el registro tabular para describir los datos del movimiento, sin embargo, no relaciona que la distancia inicial se analiza con un tiempo de 0 segundos, describiendo un proceso erróneo según</p>

E4



$$b- y = 5x + 30$$

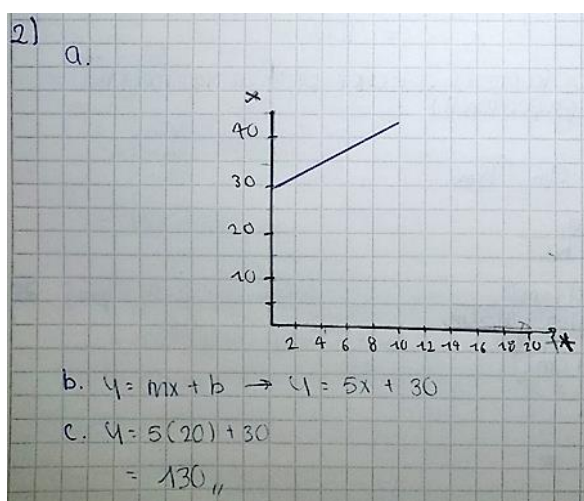
$$c- y = 5(20) + 30$$

$$y = 130''$$

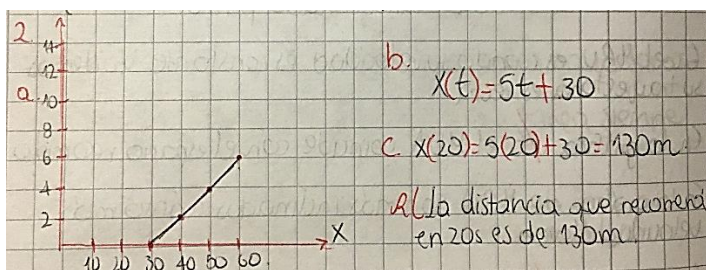
el cambio de la distancia con respecto al tiempo.

El estudiante establece una congruencia adecuada entre las representaciones verbal y gráfica, relacionando que recorre 5 metros cada segundo, ubicando los puntos pertinentes al empezar el movimiento en 30 metros. Además, realiza transformaciones con el registro algebraico y numérico sin cambiar las variables por las magnitudes de distancia y tiempo con sus respectivas unidades.

E7



El estudiante relaciona una gráfica creciente que empieza en una distancia de 30 metros, sin embargo, omite la unidad significativa de la velocidad constante de 5 m/s. En las siguientes respuestas, realiza el tratamiento correcto, omitiendo las unidades de medida.

E9

El estudiante falla en la identificación de las variables dependientes e independientes. Sin embargo, hace un análisis acertado en la ecuación del movimiento y el cálculo de la distancia recorrida en 20 segundos.

En general algunos estudiantes se apoyaron en la representación gráfica para solucionar las otras dos preguntas de esta tarea planteada, como se puede observar en el caso de los estudiantes E1 y E2. También, la mayoría realizó la conversión directamente del registro verbal al algebraico, como se puede observar en la tabla 11 para los estudiantes E4, E7 y E9, donde los estudiantes identificaron la ecuación del movimiento y reemplazaron los respectivos valores, para que así posteriormente se hiciera el tratamiento del registro numérico para calcular la distancia recorrida en 20 segundos.

Con esta tarea se puede concluir que los estudiantes encuentran dificultad en realizar la conversión del registro verbal al gráfico, según los datos iniciales planteados, esto se explica a través de un fenómeno de no congruencia en la actividad de conversión. Duval (1999) menciona que estas dificultades pueden agravarse por el desconocimiento de uno de los dos registros de representación, ya que el estudiante puede llegar a tener pocas oportunidades para hacer una lectura correcta de los gráficos, al no discriminar de manera adecuada las variables presentes.

Por otro lado, se pudo evidenciar una menor dificultad en la conversión del registro verbal al algebraico, debido a que los estudiantes encontraron una mayor relación entre las unidades significantes, puesto que conocían la ecuación que podían utilizar para reemplazar los valores

adecuados. En este sentido Duval (1999) menciona que “los fracasos debidos a la no-congruencia revelan un encerramiento de los registros de representación. Este encerramiento persiste incluso después de que la enseñanza aparentemente haya movilizado diferentes registros de representación” (p. 58).

La tarea 3 de esta situación problema parte del análisis de una gráfica, con el fin de realizar la conversión del registro gráfico al verbal y posteriormente el proceso analítico. Se pudo identificar una diferencia significativa con respecto a la pregunta anterior ya que, en gran mayoría, los estudiantes pudieron plantear una situación que ejemplificara lo observado. Para esto los estudiantes tuvieron en cuenta las unidades significantes, mencionándolas en la descripción de un objeto en movimiento.

Por otro lado, con la estructura que tenía la tarea, se orientó a los estudiantes en la realización de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión, calculando la aceleración, para luego describir la ecuación y poder realizar cálculos con ésta y así finalmente efectuar la conversión al registro gráfico de la distancia con respecto al tiempo. Una solución viable para la tercera tarea se presenta en la figura 28.

Figura 28.

Solución de tarea 2, situación problema 2 (Anexo 4)

Aceleración

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$a = \frac{30 \frac{m}{s} - 10 \frac{m}{s}}{4s - 0s}$$

$$a = 5 \frac{m}{s^2}$$

Ecuación

$$v = v_0 + at$$

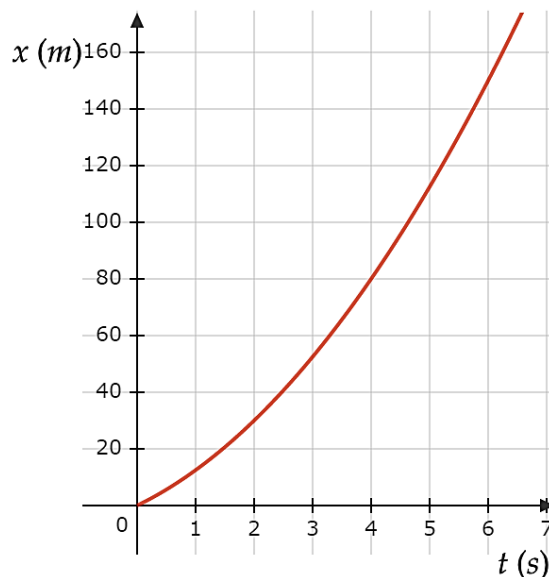
$$v = 10 \frac{m}{s} + 5 \frac{m}{s^2} t$$

Velocidad para $t = 10s$

$$v = 10 \frac{m}{s} + 5 \frac{m}{s^2} (10s)$$

$$v = 60 m/s$$

Gráfica $x(m)$ Vs $t(s)$



Fuente: Elaboración propia

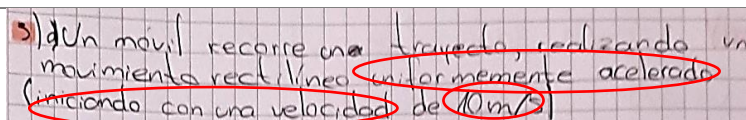
En cuanto al planteamiento de la situación problema, se pueden observar descripciones considerando los aspectos fundamentales vistos en la gráfica. Algunas de las descripciones de los estudiantes se realizaron según el tipo movimiento rectilíneo efectuado por el móvil, considerando algunas o la totalidad de unidades significantes extraídas de la gráfica. En la tabla 12 se observan las unidades significantes que consideraron los estudiantes realizando descripciones de manera verbal y así estableciendo relaciones entre estas.

Tabla 12.

Congruencia entre representaciones gráfica y verbal, según respuesta de los estudiantes en la tarea 3, situación 2.

Unidades significantes del registro gráfico	Estudiante	Relación de las unidades significantes del registro gráfico con el registro verbal descrito por los estudiantes
Variable dependiente: velocidad (v).	E1	
Variable independiente: tiempo (t).	E2	
Velocidad inicial: $v_0 = 10 \frac{m}{s}$.	E4	
Es una recta creciente: La velocidad aumenta con respecto al tiempo. (M.R.U.A)	E6	
Unidades de medición: metros y segundos.	E7	
Unidades de medición: metros y segundos.	E8	
Unidades de medición: metros y segundos.	E9	

E10



Un móvil recorre una trayectoria realizando un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (comenzando con una velocidad de 10 m/s)

Se puede observar que aquellos estudiantes en los que se están marcando tres unidades significantes (E1, E4, E6, E7 Y E8) en la tabla 12, están realizando correctamente la actividad de conversión, ya que se encuentra una congruencia entre los registros de representación gráfico y verbal. Con esas descripciones del registro verbal es posible construir la gráfica realizando una actividad de conversión, cumpliendo con las características del movimiento del objeto.

Por otro lado, con las descripciones de los estudiantes E7, E8 y E9, no fue posible construir correctamente la gráfica, dado que se omiten algunas unidades significantes, o bien, se describen de manera incorrecta, como el caso del estudiante E2 que menciona una velocidad constante. También se puede observar que con la descripción del estudiante E9 se deduce un movimiento rectilíneo uniforme de un objeto que se desplaza únicamente durante 6 segundos.

En los siguientes literales, fue necesario realizar actividades de tratamiento y conversión de registros algebraicos y numéricos. Se puede observar la diversificación de los registros de representación semiótica por la variedad de métodos que utilizan los estudiantes para expresar con diferentes registros externos. Con estos registros es posible hacer una idea del desarrollo de los sistemas internos de representación que realizan los estudiantes, es decir, aquellas representaciones mentales, las cuales exteriorizan a través de diferentes sistemas de representación. Esto es fundamental ya que como lo menciona Goldin y Shteingold (2001), la enseñanza más efectiva de las matemáticas se logra cuando se entienden los efectos de representaciones externas y actividades matemáticas estructuradas en el aprendizaje de los estudiantes.

En la figura 29, se puede observar una comparación de las representaciones externas que utilizaron los estudiantes, en donde se evidencia que el estudiante E6, explica de una manera más detallada los resultados obtenidos, mientras que el estudiante E4, expresa únicamente el valor numérico, aunque es correcto, no utiliza las magnitudes presentes en la gráfica, sino que realiza el tratamiento del registro numérico con términos de los ejes coordenados “x” y “y”.

Figura 29.

Respuestas de los estudiantes E6 y E4 respectivamente, de la tarea 3, situación 2.

Student E6 (Left):

b. $v = v_0 + a \cdot t$
 $a = \frac{v - v_0}{t} \rightarrow a = \frac{40 \frac{m}{s} - 10 \frac{m}{s}}{6s} \rightarrow a = 5 \frac{m}{s^2}$
 Rta: La aceleración del móvil es de $5 \frac{m}{s^2}$.

c. La ecuación de velocidad para este tipo de movimiento es $v = v_0 + a \cdot t$

d. $v = v_0 + a \cdot t$
 $v = 10 \frac{m}{s} + 5 \frac{m}{s^2} \cdot 10s \rightarrow v = 60 \text{ m/s}$
 Rta: El móvil tiene una velocidad de 60 m/s al transcurrir 10 s.

Student E4 (Right):

b- $a = \frac{v_f - v_0}{t}$
 $a = \frac{15 \text{ m/s} - 10 \text{ m/s}}{1s}$
 $a = 5 \text{ m/s}^2$

c- $y = 5x + 10$

d- $y = 5(10) + 10$
 $y = 60p$

En la figura 29 se pueden observar respuestas numéricas correctas, sin embargo, el estudiante E4 no está utilizando conceptos propios del objeto estudiado. Basados en esto, el estudiante no está produciendo una representación semiótica adecuada con el objeto de estudio (semiósisis), de modo que la aprehensión conceptual del objeto (noesis) es menos concreta que la evidenciada en el estudiante E6. Esto es posible contrastarlo con lo mencionado por Duval (1999) “no hay noesis sin semiósisis, es la semiósisis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis” (p. 15)

Por lo general la respuesta de los estudiantes fueron presentadas como se observa en la figura 30, donde se realizó la identificación de la ecuación pertinente y se hizo el tratamiento numérico para llegar a la respuesta adecuada, extrayendo datos de la gráfica y así realizando un proceso de conversión exitoso. Por otro lado, se puede observar que a pesar de que el estudiante E9 falla en el proceso de conversión al registro verbal haciendo descripciones del M.R.U., realiza la siguiente actividad de manera correcta.

Figura 30.

Respuestas de los estudiantes E9 y E1 respectivamente, de la tarea 3, situación 2.

The image shows two columns of handwritten work on grid paper. The left column (labeled 'b') shows the calculation of acceleration $a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{40 - 10}{6 - 0} = 5 \text{ m/s}^2$ and then the velocity equation $v(t) = 10 + 5t$. The right column (labeled 'b.') shows the same calculation for acceleration, then the velocity equation $v = v_0 + at$, and finally the calculation of velocity at $t = 10$: $v = 10 + (5 \cdot 10) \rightarrow v = 60 \text{ m/s}$. There is also a note at the bottom of the left column: 'El la velocidad que me da mas de los otros es de 60 m/s'.

Las respuestas descritas anteriormente fueron las más comunes de los estudiantes, ya que, con la ecuación de la aceleración, ubicaron dos datos de la gráfica para la velocidad y el tiempo, así obtuvieron la ecuación para realizar el tratamiento pertinente. Sin embargo, también se encontraron algunas falencias tal y como se aprecia en la figura 31. El estudiante E2 hizo un cálculo incorrecto de la aceleración al no extraer de manera adecuada los datos de la gráfica, además expresa la ecuación de velocidad que sirve únicamente si el movimiento es rectilíneo uniforme. Por otro lado, el estudiante E3, a pesar de no realizar la conversión al registro verbal expresando que “no sabría como describir esa gráfica”, realizó la conversión al registro algebraico y numérico para obtener las respuestas requeridas, aun así, no utilizó las unidades de medida, lo cual constituye

una unidad significativa encontrada en la gráfica. Además, se puede observar que los estudiantes no realizan una conversión adecuada cuando se les indica que escriban la ecuación de la gráfica, ya que simplemente ponen la ecuación general sin reemplazar los datos pertinentes.

Figura 31.

Respuestas de los estudiantes E2 y E3 respectivamente, de la tarea 3, situación 2.

The image shows two separate pieces of handwritten work on grid paper, one above the other.

Top section (Student E2):

- b) $a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ $a = \frac{40 \text{ m/s} - 5 \text{ m/s}}{6 \text{ s} - 1 \text{ s}}$ $a = \frac{35}{5} = 7 \text{ m/s}^2$
- c) $v = \frac{d}{t}$
- d) la velocidad después de 10s es de 60 m/s

Bottom section (Student E3):

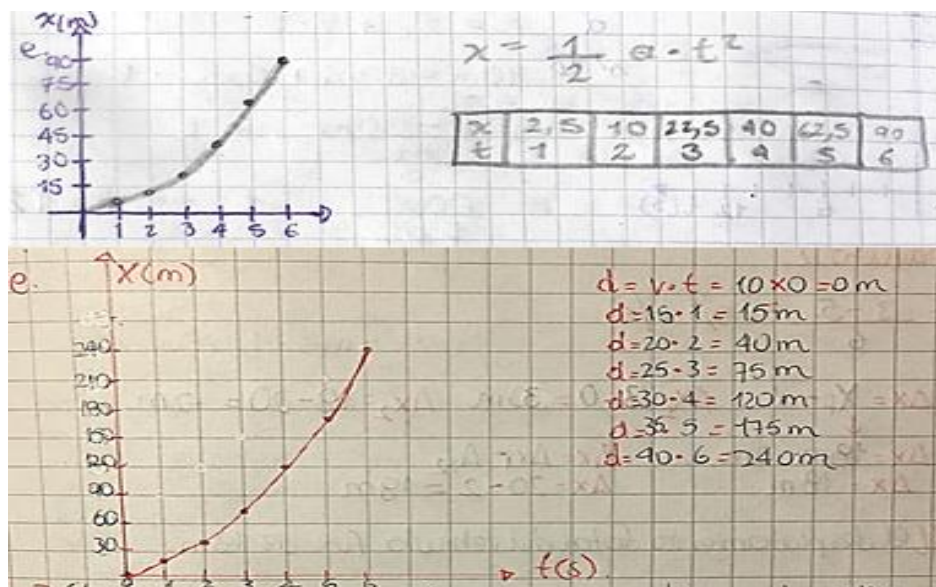
- b $a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{50 - 10}{6 - 0} = 5$
- c $v = a \cdot t + v_0$
- d $v = a \cdot t + v_0 = 5 \cdot 10 \text{ s} + 10 \text{ m/s} = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

En esta tercera tarea se especificaba un proceso particular de conversión para obtener la velocidad alcanzada en un tiempo de 10 segundos. Finalmente, se encontraba la conversión al registro gráfico, de la distancia con respecto al tiempo. Este último proceso efectivamente no se encontraba con los pasos detallados, de modo que a la mayoría se les dificultó, puesto que no encontraron una congruencia entre las representaciones, de modo que representaron erróneamente o simplemente no lo respondieron. Entre las respuestas de los estudiantes se pueden destacar dos aspectos fundamentales como los observados en la figura 32. El estudiante E6 identifica que se debe utilizar la ecuación de distancia del M.R.U.A. pero omite la existencia de una velocidad inicial, lo que hace que los datos no sean correctos a los que describen el movimiento. Por otro

lado, el estudiante E9, utiliza la ecuación de distancia para un M.R.U. pero reemplaza una velocidad diferente según los datos de la gráfica inicial.

Figura 32.

Respuestas de los estudiantes E6 y E9 respectivamente, de la tarea 3, situación 2.



Con esta tarea se pudo observar lo mencionado por Duval (1999) con respecto a que “la diversificación de los registros de representación semiótica es la constante del desarrollo de los conocimientos” (p. 58) ya que el cambio de registros facilita considerablemente el aprendizaje pues ofrece procedimientos de interpretación (Duval, 1999).

Duval (1999) destaca la utilidad que tiene la variedad de registros de representación, ya que las dificultades en los cambios de registro se observan en todos los niveles de enseñanza. Además, plantea que es necesario que se llegue a una coordinación entre representaciones semióticamente heterogéneas de tal manera que “la actividad conceptual implica la coordinación de los registros de representación” (p. 60).

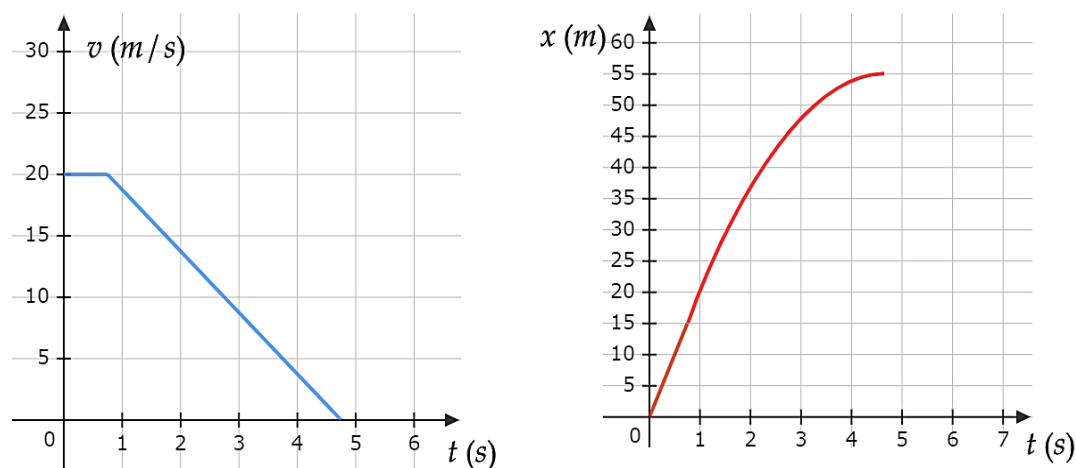
Lo mencionado anteriormente se puede evidenciar en la tercera tarea de la situación 2, ya que la mayoría de los estudiantes pudo resolver hasta el literal “d”, donde se describía un proceso en el que se puede identificar directamente los registros pertinentes para solucionarlo según los datos anteriores. Sin embargo, el literal “e”, planteaba una conversión entre representaciones semióticamente heterogéneas, es decir, era necesario recurrir a la diversidad de representaciones para lograr realizar la representación, proceso que mostró una mayor dificultad para los estudiantes con respecto a los puntos anteriores.

En la figura 32 se evidencian los registros utilizados, ya sean tabular o numérico para organizar los datos y luego graficar. El hacer una descripción detallada paso a paso de las representaciones utilizadas, garantizaría un mayor porcentaje de éxito en esta última actividad de conversión, en este caso sería viable obtener la ecuación, luego representar los datos en una tabla para finalmente graficar. Sin embargo, al existir una comprensión del objeto de estudio, es posible identificar por cuenta propia los registros adecuados, ya sea verbal, algebraico, numérico o tabular. Todo esto, teniendo en cuenta lo que menciona Duval (1999): “la comprensión conceptual aparece ligada al descubrimiento de una invarianza entre representaciones semióticas heterogéneas” (p. 60).

Posteriormente se desarrolló la tarea 4 de la situación problema 2, una solución viable con las diferentes representaciones semióticas para el problema planteado se puede observar en la figura 33.

Figura 33.

Solución de la tarea 4, situación 2 (Anexo 4).



Trayecto 1 : M. R. U.

$$x = x_0 + vt$$

$$x = (20 \text{ m/s})(0,75 \text{ s})$$

$$x = 15\text{m}$$

Aceleración

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$a = \frac{0 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4,75\text{s} - 0,75\text{s}}$$

$$a = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Trayecto 2 : M. R. U. D.

Distancia Total

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x = (15\text{m}) + (20 \text{ m/s})(4 \text{ s}) + \frac{1}{2} \left(-5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (4\text{s})^2$$

$$x = 55\text{m}$$

Fuente: Elaboración propia

Hernández (2014) Plantea que con la investigación acción es fundamental la colaboración de los participantes en la detección de necesidades. En este caso, con el desarrollo de las tareas anteriores, se logró identificar necesidades fundamentales en la orientación personal de cada estudiante con respecto a diferentes cuestionamientos que puedan llegar a tener, teniendo en cuenta las relaciones desiguales de conocimiento y que desde un entorno de educación virtual fue más difícil observar el desarrollo planteado por cada estudiante durante el proceso. Además, se complica la solución de las dudas personales que cada uno llegue a tener, puesto que pocas veces

las suelen transmitir durante la videollamada de la clase y se evidencia la realización de procesos en las cuales, al fallar en un aspecto puede llevar a direccionar erróneamente la solución de la tarea.

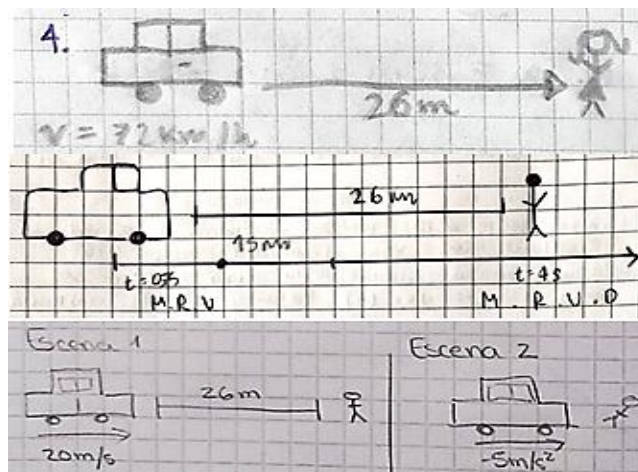
Por lo anterior se desarrolló la tarea 4 de la situación 2 (Anexo 3), con un acompañamiento más específico en donde se motivó a la participación en la solución del problema durante la clase virtual, mediante cuestionamientos, tanto del profesor como de los estudiantes que lleven a que los estudiantes describan un poco mejor el proceso y a medida que se fue solucionando se expresaron las dudas pertinentes.

En primer lugar, teniendo en cuenta la teoría de resolución de problemas de Mason et. al. (1998), se planteó en clase la pregunta, ¿qué sé? Algunas de las respuestas de los estudiantes luego de haber leído el problema son las siguientes: “Es un movimiento rectilíneo”, “el carro desacelera”, “sabemos las ecuaciones que podríamos utilizar”. Con esos planteamientos se pudo llegar al cuestionamiento de, ¿cuántos trayectos se pueden analizar y que tipo de movimiento son? En donde los estudiantes lograron especificar lo siguiente: “se pueden analizar dos trayectos, el primero con un M.R.U. y el segundo con un M.R.U.D”.

Con estos planteamientos se propuso representar el problema de manera gráfica, es decir, que con la imagen realizada se pueda saber en qué consiste el problema, de modo que los estudiantes utilizaron representaciones geométricas de los trayectos del vehículo como se observa en la figura 34.

Figura 34.

Representación geométrica de estudiantes E6, E5, E7 de la tarea 4, situación 2 (Anexo 4)



Con las imágenes anteriores se puede observar una no-congruencia entre la representación realizada por el estudiante E6, ya que según lo que se planteó en clase, no queda en evidencia los dos trayectos, el cambio de aceleración, ni tampoco se está identificando los tiempos en los que describe cada trayecto, tal y como se puede apreciar en la representación realizada por el estudiante E5 el cual relacionó correctamente las unidades significantes de los registros verbal y geométrico. La representación más común realizada por los estudiantes fue la descrita por el estudiante E6, sin embargo, se puede apreciar que el estudiante E7 considera dos escenas y trata de plasmar los datos conocidos, además de la aceleración negativa que se calcula más adelante.

La siguiente pregunta que surge del problema es, “¿qué quiero?” Donde los estudiantes plantearon que para resolver el problema era necesario lo siguiente: “convertir las unidades de Km/h a m/s ”, “si calculamos la distancia que recorre el carro podemos saber si la estrelló o no”, “necesitamos saber la desaceleración para calcular la distancia”, “si la distancia nos da más de 26 m fue porque estrelló a la persona”.

Finalmente, para proceder a solucionar el problema, se preguntó, ¿qué puedo usar? En donde los estudiantes mencionaron lo siguiente: “se podría hacer gráficas para calcular la distancia,

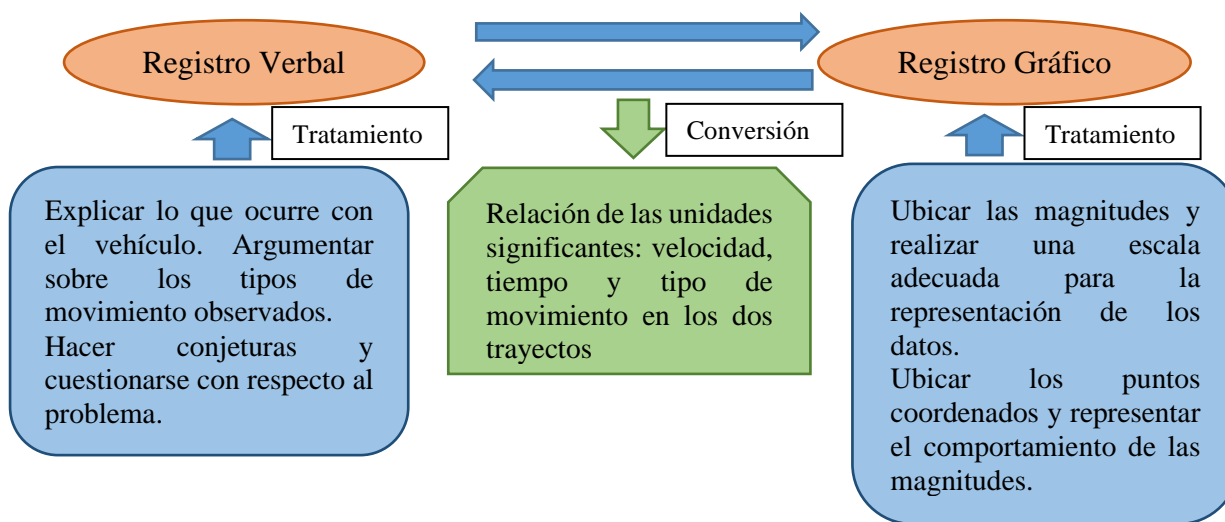
así como hicimos en los puntos anteriores”, “podemos tomar las ecuaciones y reemplazar para hallar la distancia”, “hay dos ecuaciones para calcular distancia, por eso debemos saber cuál utilizar y el tiempo que se reemplaza en cada una”.

Basados en lo anterior se propuso a los estudiantes hacer una representación gráfica de la velocidad con respecto al tiempo según los datos conocidos. La conversión al registro gráfico con su respectivo tratamiento se puede observar en la tabla 13, los cuales fueron desarrollados por algunos estudiantes ya que la mayoría no presentó resultados de esa conversión gráfica.

Duval (1999) plantea un modelo cognitivo de tal forma que la actividad cognitiva de conversión sugiere una correspondencia análoga entre dos registros de representación. En la figura 35 se observa el modelo de la representación centrado en la función de objetivación, para los registros de representación semiótica verbal y gráfico de la tarea 4 situación 2.

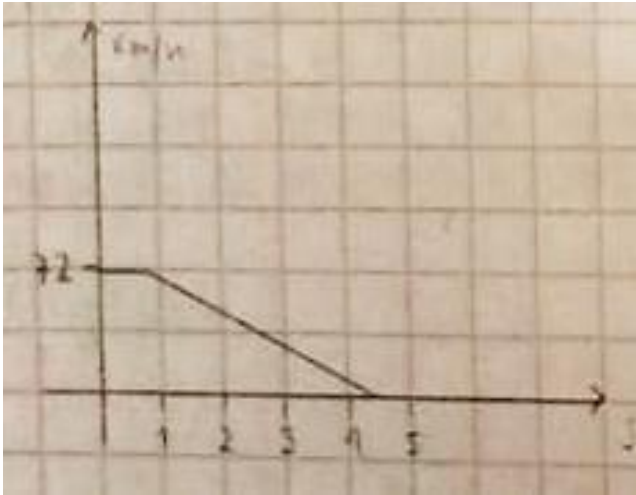
Figura 35.

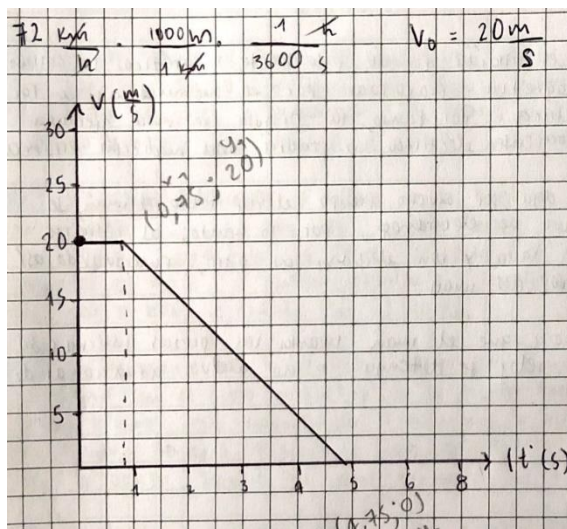
Actividades cognitivas de los registros verbal y gráfico de la tarea 4, situación 2



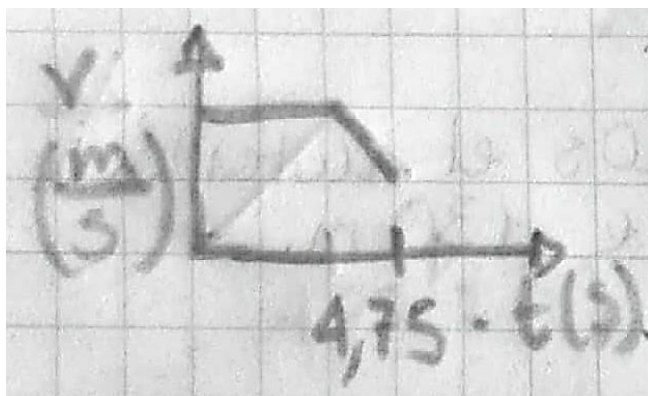
Fuente: Elaboración propia. Adaptado de Duval (1999, p. 65)

Tabla 13.
Transformaciones del registro de representación gráfico velocidad – tiempo. Tarea 4
situación 2

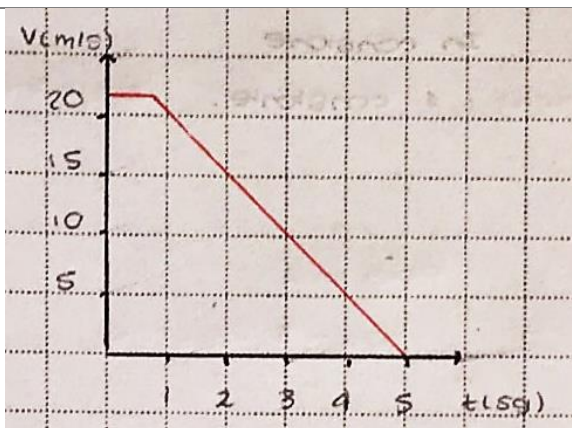
Estudiante	Conversión del registro verbal al gráfico	Desempeño
E1		El estudiante E1 identificó las unidades significantes de los registros de representación, pero no hizo un tratamiento adecuado del registro gráfico, puesto que no representó las magnitudes y no utilizó una escala adecuada para una mejor visualización de los datos. Además, en la gráfica no se aprecia que el movimiento tarda 4,75 s.

E5

El estudiante E5 realizó correctamente la actividad de conversión ya que identificó las unidades significantes estableciendo una congruencia entre las representaciones y realizó un tratamiento adecuado del registro gráfico.

E6

El estudiante E6 no realizó correctamente las actividades de tratamiento y conversión, ya que identificó solamente como unidades significantes las magnitudes y el tiempo que dura el movimiento. Además, no utiliza una escala marcando los valores para la velocidad y el tiempo, de modo que no se podría describir correctamente lo que ocurre con el movimiento.

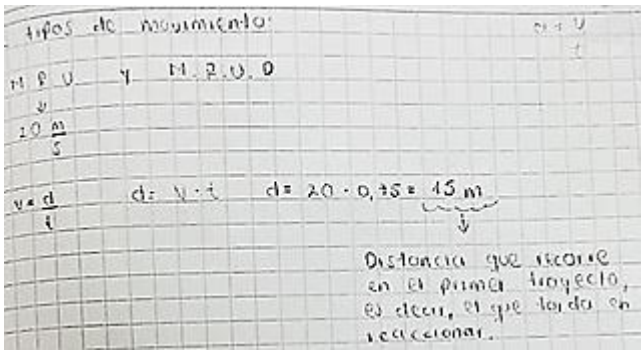
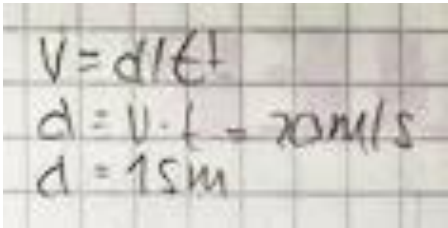
E10

El estudiante E10 realizó el tratamiento del registro gráfico, ubicando las unidades significantes de velocidad inicial y tiempo de manera inexacta.

En el transcurso de la investigación se ha observado que los estudiantes presentan dificultades en la realización de las actividades cognitivas relacionadas con el registro de representación gráfico. En particular con la tarea 4, a pesar de que se realizó el tratamiento del registro verbal de manera conjunta en clase, al intentar la conversión al registro gráfico con su respectivo tratamiento, algunos estudiantes no realizaron las actividades cognitivas planteadas en la figura 34. Esto se puede evidenciar con la tabla 13, ya que únicamente el estudiante E5 realizó una conversión y tratamiento adecuado y el estudiante E10 tuvo una buena aproximación, mientras que los otros estudiantes hicieron procesos erróneos al omitir algunas de las unidades significantes, o simplemente no realizaron la conversión.

Posterior a la representación de la velocidad se procede a dar solución al problema según lo que ya se ha establecido. Los estudiantes realizan el tratamiento algebraico y numérico para expresar y argumentar la respuesta, algunos ampliaron su argumento con el registro verbal de manera que es más factible para evidenciar las representaciones mentales realizadas por los estudiantes. En las tablas 14 y 15 se puede observar el desempeño de los estudiantes en la solución de esta tarea.

Tabla 14.
Conversión y tratamiento del registro de representación algebraico y numérico para el
M.R.U. Tarea 4 situación 2

Registros de representación algebraico y numérico.		Desempeño
Estudiante	Trayecto 1: M.R.U.	
E1		El estudiante hace las descripciones de los movimientos y procede a utilizar las ecuaciones pertinentes para encontrar la distancia recorrida en los primeros 0,75 s. Además, realiza descripciones verbales, lo cual es una muestra de que está comprendiendo los resultados obtenidos.
E2		El estudiante utiliza la ecuación de velocidad, teniendo en cuenta que la distancia la representa con la letra “d” a diferencia del concepto que se construyó en la situación 1. Realiza un tratamiento algebraico adecuado para posteriormente hallar el valor pertinente.

E3

Handwritten student work for E3:

$$72 \text{ Km/h} = \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Objeto ↓

$$x = x_0 + v_0 t$$

$$x = v \cdot t = \frac{20 \text{ m}}{\text{s}} \cdot 0,75 \text{ s}$$

$$x = 15 \text{ m}$$

El estudiante utiliza la ecuación conocida para el M.R.U. e interpreta correctamente que la distancia inicial es cero, eliminándola en el registro algebraico, para posteriormente convertir al numérico y hallar el respectivo valor.

E5

Handwritten student work for E5:

①

$$x = x_0 + v \cdot t$$

$$x = 0 + \frac{20 \text{ m}}{\text{s}} \cdot 0,75 \text{ s}$$

$$x = 15 \text{ m}$$

El estudiante identifica la ecuación y describe que la distancia inicial es cero de manera numérica a diferencia del estudiante E3.

E6

Handwritten student work for E6:

$v = 72 \text{ Km/h}$
 $t = 0,75 \text{ seg. en reaccionar}$
 $t = 4 \text{ seg} \rightarrow v = 0$
 $x = 26 \text{ m.}$
 $x = 0 \text{ m.}$

$\rightarrow 72 \frac{\text{Km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ Km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}$
 $v = 20 \text{ m/s.}$

$x = x_0 + v \cdot t$
 $x = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,75 \text{ s}$
 $x = 15 \text{ m}$

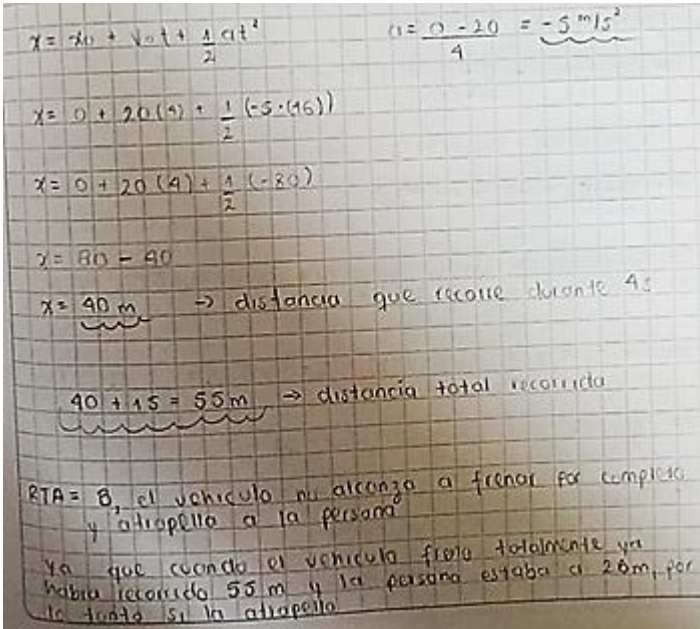
El estudiante hace una recopilación de los datos obtenidos. A pesar de no realizar una representación gráfica adecuada, se puede observar que comprende las magnitudes que se pueden extraer del registro verbal. Con estas utiliza correctamente la ecuación de distancia correspondiente al

		M.R.U. para así calcular la distancia.
E7		El estudiante realiza la especificación del análisis de cada trayecto, teniendo en cuenta que las dos distancias se calculan con expresiones diferentes.
E8		El estudiante E8 a diferencia del estudiante E7, no describe el trayecto 1, pero si representa el tipo de movimiento que hay en este.
E10		El estudiante E10 hace la especificación similar al estudiante E8, describiendo que se trata de un M.R.U.

Con el desempeño de los estudiantes en el análisis de ese primer trayecto, se puede observar cómo utilizan diferentes representaciones semióticas externas para argumentar el proceso realizado y así especificar mejor la respuesta que se obtiene del problema. Esto también se puede evidenciar en la tabla 15, donde se describe el desempeño de los estudiantes en el análisis del segundo trayecto correspondiente a un M.R.U.D.

Tabla 15.

Conversión y tratamiento del registro de representación algebraico y numérico para el
M.R.U.D. Tarea 4 situación 2

Estudiante	Registros de representación algebraico y numérico. Trayecto 2: M.R.U.D.	Desempeño
E1	 <p> $x = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$ $a = \frac{0 - 20}{4} = -5 \text{ m/s}^2$ $x = 0 + 20(4) + \frac{1}{2}(-5)(16)$ $x = 0 + 20(4) + \frac{1}{2}(-80)$ $x = 80 - 40$ $x = 40 \text{ m} \rightarrow \text{distancia que recorre durante 4s}$ $40 + 15 = 55 \text{ m} \rightarrow \text{distancia total recorrida}$ RTA = 8, el vehículo no alcanza a frenar por completo y atrapa a la persona. Ya que cuando el vehículo frena totalmente ya había recorrido 55 m y la persona estaba a 20 m, por lo tanto sí la atrapa. </p>	<p>El estudiante realiza un tratamiento correcto con los valores conocidos de las magnitudes. Elabora de manera adecuada las transformaciones en registros algebraico, numérico y verbal, de tal forma que presenta argumentos sólidos dando así la respuesta al problema. La estudiante analiza el trayecto 2 empezando desde una distancia de cero para luego sumar la recorrida en el trayecto 1.</p>

E2

$$a) = m = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$$

$$m = \frac{20 - 0}{12,75 - 4,75}$$

$$m = \frac{20}{-4} = -5$$

2) M.E.U.D)

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

$$x = 15 \text{ m} + 20 \text{ m/s} \cdot 4 \text{ s} + \frac{1}{2} (-5 \text{ m/s}^2) \cdot (4 \text{ s})^2$$

$$x = 55 \text{ m}$$

El estudiante identifica la ecuación de la aceleración como la pendiente de la recta y realiza el respectivo tratamiento obteniendo la aceleración negativa.

En el cálculo de la distancia, describe que se trata de un MR.U.D. y escribe la ecuación, la cual a diferencia del análisis del trayecto 1, encuentra la necesidad de expresar la ecuación de distancia en términos de X y así calcular la distancia total recorrida con los valores obtenidos.

E3

Trayecto 2

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 20 \text{ m/s}}{0 - 4 \text{ s}} = -5 \text{ m/s}^2$$

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

$$20 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 4 \text{ s} - \frac{1}{2} (-5) (4)^2$$

$$x = 120$$

recorre 120 m a total eso lo que la persona es atrapada

El estudiante realiza un tratamiento erróneo de los datos, ya que reemplaza los valores sin tener en cuenta la unidad significativa de la velocidad inicial, obteniendo un resultado erróneo de la distancia recorrida.

E4

$$a = \frac{V_f - V_0}{t}$$

$$a = \frac{0 - 20}{4}$$

$$a = -5 \text{ m/s}^2$$

$T_1 = 35 \text{ m}$
 $T_2 = 20 \text{ m}$ } 55 metros

Rta: B. porque el vehículo se detiene 9m después de atropellar a la persona y si se hubiese detenido 2s antes igual la habría atropellado porque recorre la misma distancia

El estudiante realizó un tratamiento a partir de una gráfica obteniendo dos valores erróneos, al preguntarle acerca de los resultados obtenidos el estudiante expresó “solo reemplacé en las ecuaciones y analicé la gráfica para saber la distancia que recorre.”

E5

②

$$X = X_0 + V_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$X = 15 \text{ m} + (20 \text{ m/s}) \cdot (4 \text{ s}) + \frac{1}{2} (-5 \text{ m/s}^2) (4 \text{ s})^2$$

$$X = 55 \text{ m}$$

$m = \frac{0 - 20}{4,75 - 0,75}$
 $m = \frac{-20}{4}$
 $m = -5 \text{ m/s}^2$

RTA: B
 ↓
 No alcanza a frenar y atropella a la persona

El estudiante describe los datos de una manera clara, en donde es comprensible el proceso. Sin embargo, la aceleración la expresa como la pendiente de la recta, sin utilizar las magnitudes pertinentes.

E6

$$X = X_0 + V_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

$$X = 15 \text{ m} + 20 \text{ m/s} \cdot 4 \text{ s} - \frac{1}{2} (-5 \text{ m/s}^2) (4 \text{ s})^2$$

$$X = 135 \text{ m}$$

Rta: b. el vehículo no alcanza a frenar por completo y atropella a la persona.
 Debido a que lleva una velocidad inicial muy rápida, esto genera que aunque frena y desacelera, no lo logre hacer y atropella a la persona.

$a = \frac{V_f - V_0}{t}$
 $a = \frac{0 - 20 \text{ m/s}}{4 \text{ s}}$
 $a = -5 \text{ m/s}^2$

El estudiante realiza procesos adecuados, sin embargo, al hacer el cálculo de la distancia falla en el resultado. A partir del valor obtenido concluye de manera verbal con base a la pregunta del problema.

E7

- Trayecto 2:

$$a = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{0 - 20 \text{ m/s}}{0 - 4 \text{ s}}$$

$$= -5 \text{ m/s}^2$$

$$x = x_0 + V_1 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$= 20 \text{ m/s} \cdot 4 \text{ s} - \frac{1}{2} (-5 \text{ m/s}^2) (4 \text{ s})^2$$

$$= 120$$

Rta: En total recorre 135 m, por lo cual la persona es atropellada

El estudiante concluye que la persona del problema es atropellada, sin embargo, utiliza una distancia inicial para el segundo trayecto de 0 m. por otro lado, reemplaza erróneamente el tiempo, por lo que obtiene un resultado equivocado.

E8

M. R. U. D.

$$x = x_0 + V_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

$$x = 15 \text{ m} + (20 \text{ m/s})(4 \text{ s}) + \frac{1}{2} (-5 \text{ m/s}^2)(4 \text{ s})^2$$

$$x = 55 \text{ m}$$

* Es correcto afirmar que el vehículo no alcanza a frenar por completo y atropella a la persona

El estudiante describe el tipo de movimiento y realiza un tratamiento adecuado, interpretando el resultado obtenido y dando una respuesta pertinente al problema.

E9

$$V = d/t \rightarrow d = V \cdot t = 20 \text{ m/seg} \cdot 0,75 \text{ s} = 15 \text{ m}$$

$$V_f = V_0 + a \cdot t \quad a = \frac{V_f - V_0}{t} = -5 \text{ m/seg}^2$$

$$d_{\text{max}} = -V_0^2 / (2 \cdot a)$$

$$d_{\text{max}} = -(20 \text{ m/seg}^2) / (2 \cdot -5 \text{ m/seg}^2)$$

$$d_{\text{max}} = 40 \text{ m}$$

$$d = 15 \text{ m} + 40 \text{ m} = 55 \text{ m}$$

El estudiante utiliza ecuaciones representando la magnitud de la distancia con la letra "d" a diferencia de lo que se ha trabajado anteriormente, por otro lado, analiza el trayecto 2 sin considerar la distancia inicial, la cual suma al

E10

Trabajo 2 N E U D

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x = 15m + (20 m/s)(4.5s) + \frac{1}{2} (-5 m/s^2)(4.5s)^2$$

$$x = 58m$$

final para determinar la distancia total realizada por vehículo.

El estudiante escribió la ecuación a utilizar según el M.R.U.D. y reemplazó los valores sin expresar el cálculo de la aceleración. Por otro lado, no interpretó de manera verbal los datos de modo que falta concretar la respuesta del problema.

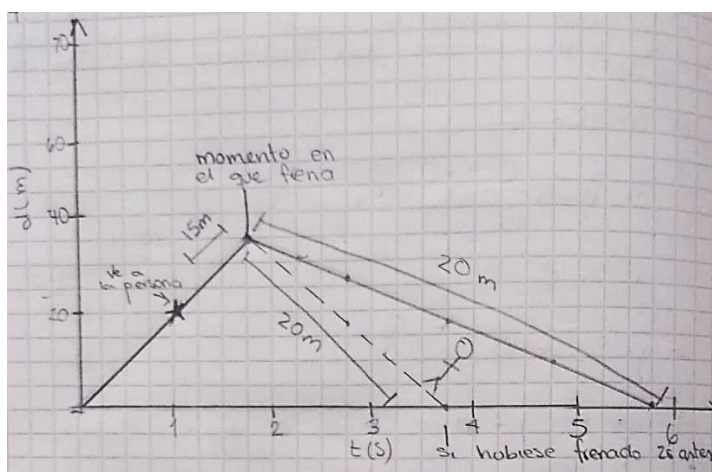
Con las respuestas de la tarea 4, observadas en las tablas 13, 14 y 15, es posible observar la diversidad de registros de representación utilizadas por los estudiantes. Teniendo en cuenta que el problema debía ser argumentado, pocos estudiantes interpretaron la respuesta numérica a través de una representación externa. Sin embargo, manifestaron que la respuesta era la d, algunos llegaron a esta respuesta con valores numéricos erróneos como es el caso de los estudiantes E3, E6 y E7. Con esto se puede observar que a pesar de que los estudiantes utilizan representaciones mentales, algunos no expresan en su totalidad los resultados del problema de manera verbal, pero están expresando numéricamente sus resultados.

En lo anterior hay que tener presente lo planteado por D' Amore (2004) con respecto a que en el aprendizaje de las matemáticas los estudiantes se introducen en un mundo tanto conceptual como simbólico, de tal manera que la comunicación es condicionada por el registro de representación preseleccionado.

Con base a lo anterior se pudo observar que el estudiante E4 utilizó un registro gráfico para realizar su análisis, recurriendo en pocas ocasiones al registro algebraico tal y como se observa en la tabla 15. La gráfica que construyó el estudiante se puede observar en la figura 36, en la cual se registran datos erróneos, pero se puede deducir un poco la representación mental que estaba asociando el estudiante, al tratar de considerar los dos trayectos y lo que pasaría si el vehículo frena 2 s antes.

Figura 36.

Representación gráfica de distancia – tiempo, por el estudiante E4, Tarea 4, Situación 2.



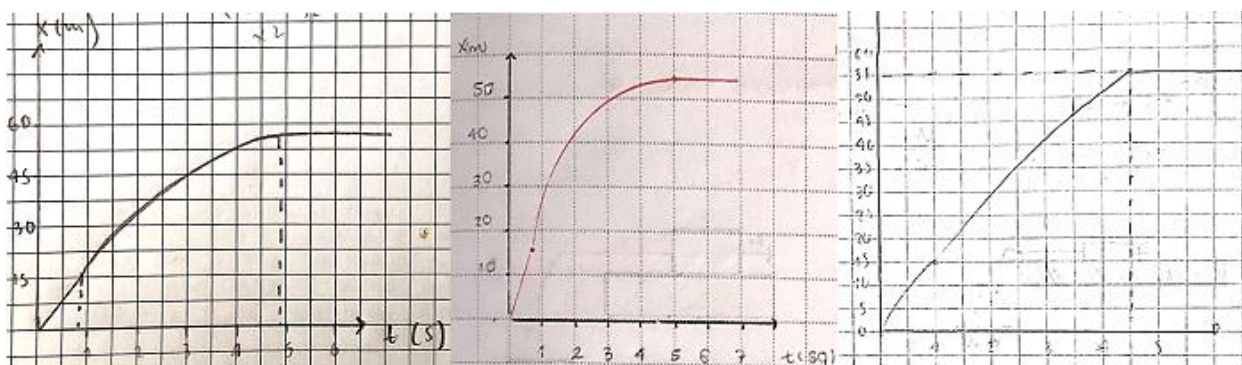
Con la anterior gráfica el estudiante trató de observar lo que ocurría con el movimiento, al preguntarle sobre su razonamiento durante la realimentación en la clase virtual, expresó: “con la gráfica analicé lo que ocurre antes y después de frenar y también lo que pasa si hubiera frenado dos minutos antes”. A pesar de mostrar un comportamiento equivocado de las magnitudes esa fue la manera que el estudiante utilizó para expresar externamente las representaciones internas elaboradas, de este modo, según lo mencionado por Goldin y Shteingold (2001) el estudiante está realizando una asociación de diferentes representaciones a través de procesos internos.

Finalmente, luego de que cada estudiante tenía su respuesta se planteó realizar las gráficas de distancia y aceleración con respecto al tiempo, según los valores hallados. Para esto se instruyó

en la ubicación de los puntos coordenados que representan las unidades significantes del registro algebraico en cada trayecto. Algunas de las representaciones gráficas obtenidas por los estudiantes se pueden observar en las figuras 37, 38 y 39.

Figura 37.

Representaciones gráficas de distancia – tiempo, por estudiantes E5, E10 y E2 respectivamente. Tarea 4 situación 2

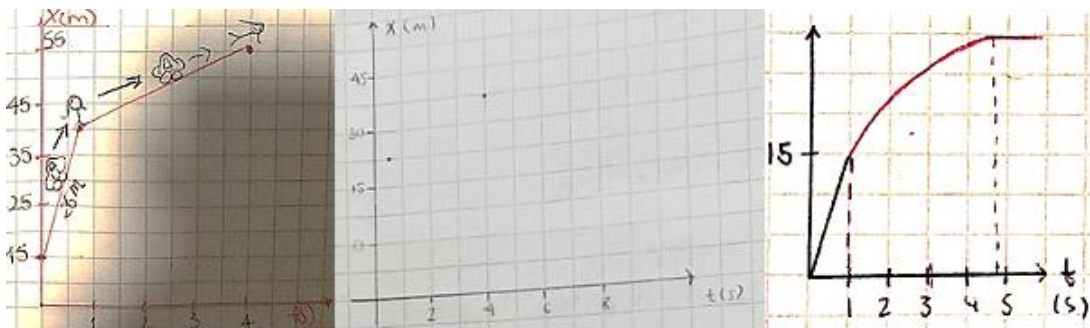


Esta representación se les facilitó más a los estudiantes ya que con la ubicación de las dos distancias recorridas, pudieron relacionar con las gráficas de los movimientos M.R.U. y M.R.U.D. De esta forma se puede apreciar el comportamiento de la distancia con respecto al tiempo. El estudiante E2 realiza el segundo trayecto un poco más recto, pero resalta el hecho de que después de los 4.75 s el vehículo se queda inmóvil de modo que no aumenta ni disminuye los 55 metros.

Por otro lado, algunos estudiantes ubicaron los puntos correspondientes a las distancias recorridas por cada trayecto, pero no relacionaron adecuadamente el comportamiento gráfico, como se observa en la figura 38 para las representaciones de los estudiantes E9 y E1. Además, el estudiante E8 no realizó un tratamiento adecuado del registro de representación, puesto que hay valores que no se están representando.

Figura 38.

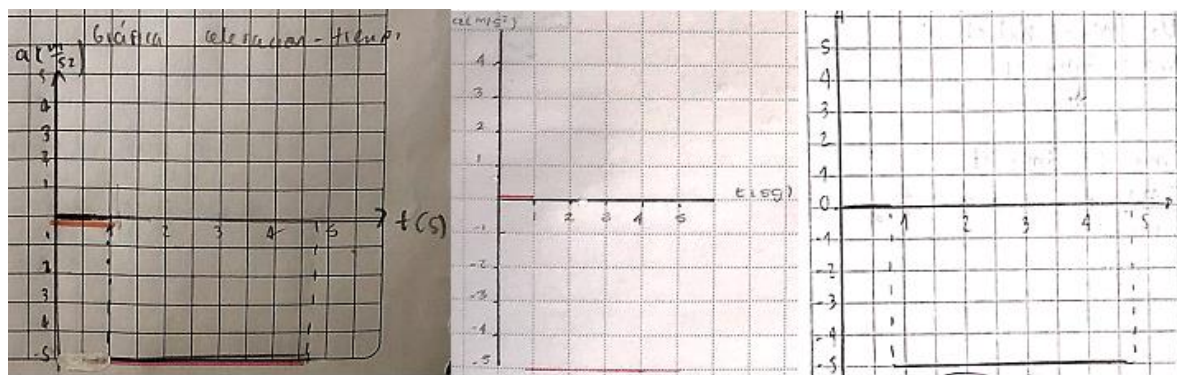
Representaciones gráficas de distancia – tiempo, por estudiantes E9, E1 y E8 respectivamente. Tarea 4 situación 2.



Una vez identificadas las trayectorias, el tiempo empleado y los tipos de movimiento, a los estudiantes se les facilitó la realización de las gráficas de aceleración con respecto al tiempo, tal y como se aprecia en la figura 38.

Figura 39.

Representaciones gráficas de aceleración – tiempo, por estudiantes E5, E10 y E2 respectivamente. Tarea 4 situación 2



La última tarea de la situación problema 2 (anexo 4), planteaba un proceso más específico para su solución, describiendo que es necesario el cálculo de la aceleración de cada trayecto y con este determinar el desplazamiento total del vehículo según la información presente en la gráfica.

El objetivo de esta tarea era analizar las transformaciones que realizan los estudiantes partiendo del registro del registro de representación gráfico, para calcular las diferentes magnitudes presentes en el movimiento. Una solución plausible de la tarea se puede observar en la figura 40.

Figura 40.

Solución de tarea 5, situación 2 (anexo 4)

<i>Trayecto 1</i>	<i>Trayecto 2</i>
<i>Aceleración</i>	<i>Aceleración</i>
$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{5\frac{m}{s} - 0}{4s - 0}$	$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{3\frac{m}{s} - 5\frac{m}{s}}{6s - 4s}$
$a = 1,25\frac{m}{s^2}$	$a = -1\frac{m}{s^2}$
<i>Distancia total recorrida</i>	<i>Distancia total recorrida</i>
$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$	$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$
$x = \frac{1}{2}(1,25)(4s)^2$	$x = 10m + \left(5\frac{m}{s}\right)(2s) + \frac{1}{2}(-1)(2s)^2$
$x = 10m$	$x = 18m$

Fuente: Elaboración propia

Con esta tarea se pudo observar que los estudiantes relacionaron correctamente las pendientes de las rectas con la aceleración y tuvieron en cuenta el valor negativo del segundo trayecto, puesto que es una recta decreciente. Sin embargo, se presentaron falencias en la conversión al registro numérico, dado que el tiempo del segundo trayecto es de 2 segundos, valor que algunos estudiantes pasaron por alto obteniendo respuestas erróneas al reemplazar un tiempo diferente como los observados en la figura 41.

Figura 41.

Respuesta de estudiantes E1 y E6 respectivamente de tarea 5, situación 2

5. aceleración Trayecto 1
 $a = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{5 - 0}{4 - 0} = 1,25 \text{ m/s}^2$

aceleración Trayecto 2
 $a = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{3 - 5}{6 - 4} = -1 \text{ m/s}^2$

La aceleración en el trayecto 1 es de $1,25 \text{ m/s}^2$ y en el trayecto 2 es de -1 m/s^2

$x_1 = 0 + 0 \cdot 4 + \frac{1}{2} (1,25 \cdot (4)^2)$ $x_2 = 0 + 5 \cdot 4 + \frac{1}{2} (-1 \cdot (4)^2)$
 $x_1 = \frac{1}{2} (20)$ $x_2 = 20 - 8$
 $x_1 = 10 \text{ m}$ $x_2 = 12 \text{ m}$

10 + 12 = 22m Por el desplazamiento fue de 22 m

5. $a_1 = \frac{V}{t} \rightarrow a = \frac{5 \text{ m/s}}{4 \text{ s}} \rightarrow a = 1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
 $a_2 = \frac{V - V_0}{t} \rightarrow \frac{3 \text{ m/s} - 5 \text{ m/s}}{6 \text{ s}} \rightarrow a = -0,33 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
 $x_1 = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \rightarrow x = \frac{1}{2} (1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \cdot (4 \text{ s})^2 \rightarrow x = 10 \text{ m}$
 $x_2 = 10 \text{ m} + \frac{5 \text{ m}}{\text{s}} \cdot (3 \text{ s}) - \frac{1}{2} (-0,33 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) (3 \text{ s})^2$
 $x_2 = 26,48 \text{ m}$ $x_{\text{Total}} = 10 \text{ m} + 26,48 \text{ m}$
 Rta: La distancia total recorrida por el vehículo es de 36,48 m.

En general se pudo observar que la mayoría de estudiantes lograron realizar correctamente la conversión del registro verbal al gráfico en el cálculo de las pendientes de las rectas, asociándolo con la aceleración del móvil. Además de las aceleraciones positivas y negativas correspondientes al movimiento rectilíneo uniformemente acelerado o desacelerado. Sin embargo, en la actividad de conversión al registro algebraico correspondiente al cálculo de las distancias, los estudiantes no lo representaron o lo hallaron erróneamente tal y como se observa en la figura 42.

Figura 42.

Respuesta de estudiantes E4 y E8 respectivamente de tarea 5, situación 2

5. $a = \frac{V_f - V_i}{t}$ $a = \frac{V_f - V_i}{t}$
 $a = \frac{5 \text{ m/s} - 0 \text{ m/s}}{4 \text{ s}}$ $a = \frac{3 \text{ m/s} - 5 \text{ m/s}}{2 \text{ s}}$
 $a = 1,25 \text{ m/s}^2$ $a = -1 \text{ m/s}^2$
 T_1 T_2

El desplazamiento total fue de 8,25 m

① $a = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$ $a = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$
 $a = \frac{0 \text{ m} - 5 \text{ m/s}}{4 \text{ s} - 6 \text{ s}}$ $a = \frac{5 \text{ m/s} - 3 \text{ m/s}}{4 \text{ s} - 6 \text{ s}}$
 $a = \frac{-5 \text{ m/s}}{-4 \text{ s}}$ $a = \frac{2}{-2}$
 $a = 1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ $a = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Por otro lado, se observan falencias en cuanto al cálculo de la distancia multiplicando la velocidad por el tiempo. Con esto se puede observar un obstáculo epistemológico, de modo que, como lo menciona Bachelard (1974) las “costumbres intelectuales que fueron útiles y sanas pueden, a la larga, trabar la investigación” (p. 2), en este caso los estudiantes en grados anteriores siempre trabajaron la distancia, calculándola con estos términos: $d = v \cdot t$. Sin embargo, algunos aún no relacionan que cuando un móvil tiene una aceleración no nula, no se puede usar esa expresión. Este obstáculo epistemológico se puede observar en la figura 43, donde no calculan correctamente las distancias de cada trayecto, utilizando ecuaciones del M.R.U. En este sentido Brousseau (2000) menciona que un riesgo para la obtención de obstáculos es el cambio en la práctica, el contexto y el sistema de referencia, de modo que en este caso hay un cambio de la concepción del movimiento a un análisis más general con variables no trabajadas anteriormente como la aceleración lo que requiere una adaptación a los nuevos conceptos.

“Un conocimiento es el resultado de una adaptación del alumno a una situación que justifica este conocimiento haciéndolo más o menos efectivo, diferentes conocimientos conducen a aprender y realizar tareas con diferentes complejidades” (Brousseau, 2000).

Figura 43.

Respuestas de estudiantes E7 y E9 de la tarea 5, situación 2 (anexo 4).

3) a. Trayecto 1:

$$a = \frac{V_f - V_i}{t_f - t_i}$$

$$= \frac{5 - 0}{2 - 0}$$

$$= 2,5$$

$$X = V \cdot t$$

$$= 5 \text{ m/s} \cdot 4 \text{ s}$$

$$= 20 \text{ m/s}$$

trayecto 2:

$$a = \frac{V_f - V_i}{t_f - t_i}$$

$$= \frac{3 - 5}{6 - 4}$$

$$= -1$$

$$X = -1 \cdot 2$$

$$= -2$$

$$X(2) = 20 - 2$$

$$= 18 \text{ m}$$

5 Trayecto 1:

$$a = \frac{V_f - V_i}{t}$$

$$a = \frac{5 - 0}{4}$$

$$a = 1,25 \text{ m/s}^2$$

Trayecto 2:

$$a = \frac{3 - 5}{6} = -0,3 \text{ m/s}^2$$

$$a = 5 \text{ m/s} + t = 20 \text{ m}$$

→ $\Delta x = X_f - X_i$ $\Delta x_1 = 20 - 0 = 20 \text{ m}$ $\Delta x_2 = 18 - 20 = -2 \text{ m}$

$\Delta x = 18 \text{ m} - 0 \text{ m}$ $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$

$\Delta x = 18 \text{ m}$ $\Delta x = 20 - 2 = 18 \text{ m}$

El desplazamiento total del vehículo fue de 18 m.

Se puede observar que los estudiantes llegaron a la respuesta del desplazamiento del móvil, sin embargo, el proceso no es correcto. Durante la realimentación de la situación en la clase virtual, se preguntó al estudiante E9 acerca del proceso realizado expresando: “tomé dos puntos de la recta para calcular la aceleración, pero no estaba segura del trayecto 2, porque el tiempo total era 6s”. En cuanto al cálculo de la distancia el estudiante dijo “calculé las diferencias entre las distancias, multipliqué la velocidad por el tiempo de los trayectos y los resté”, aunque coincide con el valor correcto de la distancia recorrida, no se está realizando un análisis adecuado correspondiente al movimiento rectilíneo uniformemente variado.

Lo anterior se puede describir como un obstáculo epistemológico, puesto que se utiliza una ecuación trabajada desde el grado sexto para el cálculo de la distancia, esto se debe a que considera más claras aquellas ideas que le fueron útiles frecuentemente con respecto a las adquiridas recientemente (Bachelard, 1976).

Análisis Situación Problema 3

El objetivo de la situación problema (Ver anexo 5) es analizar las actividades de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas del movimiento rectilíneo en un entorno real. Para esto se plantearon dos tareas que involucran el análisis de un objeto que cae libremente sobre un vaso con agua, además de analizar el movimiento que describe un objeto al ser lanzado verticalmente hacia arriba.

Para la primera tarea se propuso tomar el tiempo que tarda el objeto en caer al suelo, para posteriormente sumar la altura del vaso y así poder analizar la caída y el comportamiento que tienen las magnitudes presentes. Para determinar el tiempo aproximado de la caída se planteó

calcular 5 tiempos desde la misma altura para posteriormente hallar su promedio y analizar todo a partir de ese único dato inicial.

Cada uno de los estudiantes tomó el tiempo promedio de la caída del objeto y elaboró el proceso según los planteamientos dados por sus compañeros y el profesor. Para esto se tuvieron en cuenta las fases de Ponte et. al. (2006) ya que se analizó la caída de un objeto, se realizaron conjeturas acerca del movimiento presentado, para posteriormente justificarlas y construir el conocimiento de los objetos en caída libre y reforzar el razonamiento matemático en la resolución de problemas en un contexto real.

Las conjeturas iniciales fueron fundamentales, ya que como lo plantea Mason et al. (1998), constituyen la espina dorsal en la resolución de un problema. En el desarrollo de la clase los estudiantes describieron que se trataba de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.) en donde el cuerpo se acelera por acción de la gravedad. Además, se hizo un boceto del comportamiento de la gráfica de velocidad con respecto al tiempo, para que luego se pueda verificar con el uso de las diferentes representaciones semióticas. Con esto se procede a analizar la caída libre del objeto, partiendo por calcular la distancia promedio de donde fue arrojado, teniendo en cuenta que se utiliza la ecuación de distancia del M.R.U.A. pero en esta ocasión no se trabaja con la distancia en términos de “ x ” sino que, al tratarse de un movimiento vertical, se describe en términos de “ y ”.

Con el valor de la altura inicial y la suma de la altura del vaso se procede a determinar la ecuación y realizar la respectiva conversión al registro gráfico. Goldin y Shteingold (2001) plantean que las representaciones mentales de los estudiantes es algo muy complejo para deducir exactamente. Sin embargo, con las representaciones externas se pueden hacer inferencias en cuanto a esas representaciones internas que realiza.

Obtener la ecuación de la distancia recorrida con respecto al tiempo, requiere de un proceso de conversión identificando las unidades significantes de los registros de representación. En este caso, el registro de salida aparentemente tenía una única unidad significativa que era el tiempo que tardaba en caer. Sin embargo, luego de un análisis se lograron identificar diferentes unidades significantes, las cuales se pueden poner en correspondencia con el registro de llegada, partiendo de un registro verbal basado en la observación de la caída del objeto. Las unidades significantes presentes se pueden observar en la tabla 16.

Tabla 16.

Unidades significantes de los registros verbal, algebraico y numérico de la tarea 1 situación 3

Registro verbal de la caída del objeto	Registro Algebraico	Registro Numérico
El objeto cae libremente de tal manera que la velocidad aumenta durante su recorrido.	Variable dependiente: Distancia (y). Variable independiente: Tiempo (t).	Variable dependiente: Distancia ($y \geq 0$). Variable independiente: Tiempo ($t \geq 0$).
El objeto describe un M.R.U.A. cuya distancia inicial es desde donde se suelta el objeto y la distancia final es el contacto con el piso.	Al ser un M.R.U.A. la ecuación que se utiliza para calcular la distancias es: $y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$	La distancia inicial se calcula reemplazando el tiempo obtenido ($t > 0$) en la siguiente ecuación: $y_0 = -\frac{1}{2} \left(9,8 \frac{m}{s^2} \right) t^2.$
Se suma la altura del vaso dado que no se tuvo en cuenta para la toma de datos del tiempo.	Se considera el eje y positivo hacia arriba, de modo que la aceleración de la gravedad es negativa.	La altura del vaso se suma al tiempo obtenido.

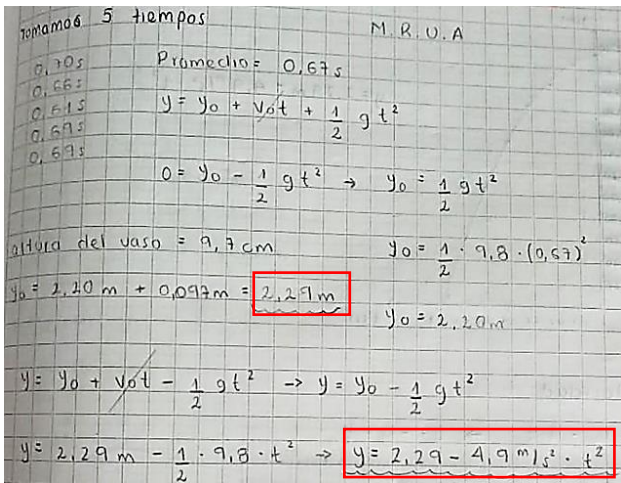
Las unidades en las que se miden las magnitudes son metros y segundos. La ecuación obtenida tiene sus unidades de medición en metros (m) y segundos (s). Unidades de medición: metros (m) y segundos (s).

Fuente: Elaboración propia

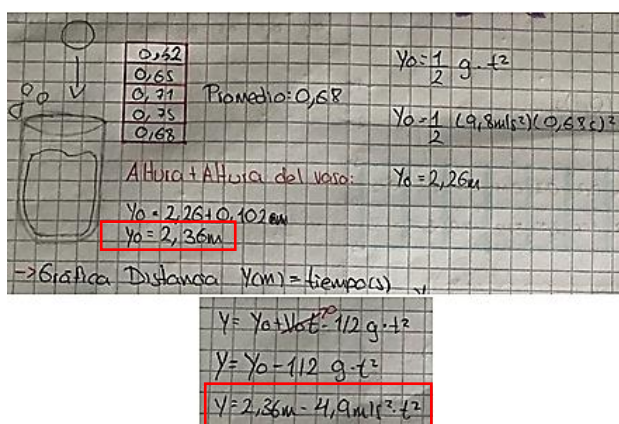
En la tabla 17 se pueden observar las representaciones utilizadas por los estudiantes para describir el análisis de los datos tomados para el tiempo y la obtención de la ecuación del movimiento justo antes de caer en el vaso con agua. En las imágenes tomadas por los estudiantes se resalta la obtención de la distancia inicial y la ecuación de la distancia con respecto al tiempo, del movimiento del objeto justo antes de chocar contra el agua.

Tabla 17.

Representaciones numéricas y algebraicas de los estudiantes para la tarea 1 situación 3.

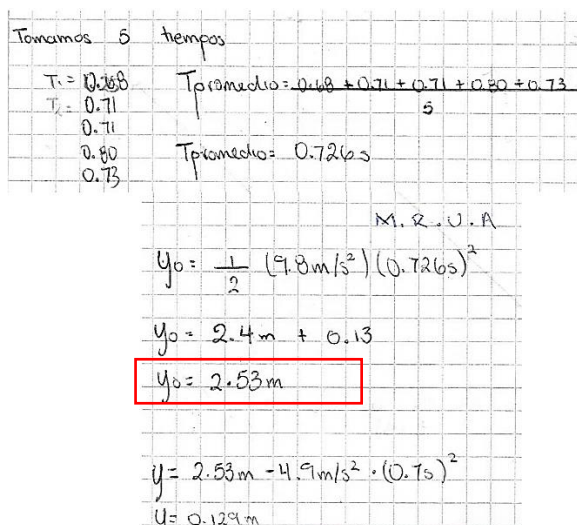
Estudiante	Registros de representación numérico y algebraico.	Desempeño
E1	 <p>Tomamos 5 tiempos</p> <p>0.70s 0.66s 0.61s 0.67s 0.67s</p> <p>Promedio = 0.67s</p> <p>M.R.U.A</p> $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ $0 = y_0 - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow y_0 = \frac{1}{2} g t^2$ <p>altura del vaso = 9.7 cm</p> $y_0 = \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot (0.67)^2$ $y_0 = 2.20 \text{ m} + 0.097 \text{ m} = 2.297 \text{ m}$ $y_0 = 2.29 \text{ m}$ $y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$ $y = 2.29 \text{ m} - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot t^2 \rightarrow y = 2.29 - 4.9 \text{ m/s}^2 \cdot t^2$	El estudiante hace el tratamiento del registro algebraico antes de efectuar la conversión al numérico, describe el proceso realizado para la obtención de la altura inicial y la ecuación del movimiento teniendo en cuenta la altura del vaso y la altura desde donde fue arrojado.

E2



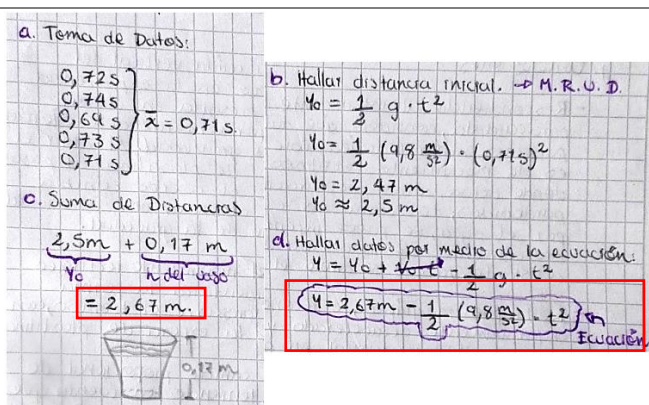
El estudiante realiza un tratamiento correcto, al igual que el estudiante E1, diferencia los procesos para la obtención de la altura total y la ecuación. Aplica directamente la conversión del registro algebraico al numérico sin expresar el tratamiento algebraico.

E4



El estudiante no diferencia los procesos en los que se suma la altura del vaso, realizando un tratamiento inapropiado en el cálculo de la altura inicial. No utiliza expresiones algebraicas, reemplaza directamente los valores, sin dejar indicada la ecuación. Expresa únicamente el reemplazo de la ecuación para un tiempo $t = 0.1 \text{ s}$.

E6



El estudiante utiliza especificaciones verbales de los procesos realizados, lo que facilita el análisis en la presentación de su informe. Además, hace un tratamiento adecuado del registro numérico y algebraico.

E7

Tiempos: #1

- 1) 0,40 seg
- 2) 0,66 seg
- 3) 0,64 seg
- 4) 0,66 seg
- 5) 0,62 seg

Promedio: $\frac{0,40 + 0,66 + 0,64 + 0,66 + 0,62}{5}$
 $= 0,656$
 $\approx 0,66 \text{ seg}$

Altura: $y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$
 $y_0 = \frac{1}{2} g t^2$
 $= \frac{1}{2} (9,8 \text{ m/s}^2) (0,66)^2$
 $= 2,13 \text{ m}$

Altura + altura vaso (9cm)
 $y_0 = 2,13 \text{ m} + 0,09 \text{ m}$
 $= 2,22 \text{ m}$

Se realiza un tratamiento acertado, indicando los diferentes procesos para la obtención de la altura inicial del lanzamiento.

E8

Promedio = Sumar tiempos

M.R.U.A

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_0 = \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_0 = \frac{1}{2} (9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) (0,91)^2$$

$$y_0 = 4,05 \text{ m}$$

Altura + altura de vaso

$$y_0 = 4,05 \text{ m} + 0,07 \text{ m}$$

$$= 4,12 \text{ m}$$

$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

$$y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = 4,12 \text{ m} - 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2$$

No describe los datos de los tiempos tomados, lo que hace que la presentación del dato inicial sea poco fundamentada.

E9

Toman 5 tiempos: 0,42s, 0,52s, 1,02s, 0,47s, 0,50s

Promedio = Sumar tiempos = $\frac{2,93}{5} = 0,586 \text{ s}$

M.R.U.A

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_0 = \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow y_0 = \frac{1}{2} (9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) (0,586)^2$$

$$y_0 = 1,68 \text{ m} + 0,09 \text{ m}$$

Altura + altura del vaso $\rightarrow y_0 = 1,77 \text{ m}$

Ecuación: $y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

$$y = y_0 + \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow y = 1,77 \text{ m} + 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2$$

El estudiante presenta las conjeturas realizadas inicialmente con respecto a la forma en la que las magnitudes se pueden comportar gráficamente. Posteriormente hace un tratamiento de las representaciones algebraicas y numéricas con el tiempo obtenido describiendo el proceso realizado.

E10

1) Toma de datos

0,57 s
0,55 s
0,60 s
0,61 s
0,62 s
→ promedio: 0,58 s

2) Hallar distancia inicial

M.R.U.A

$$y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$y_0 = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$y_0 = \frac{1}{2} (9,8 \frac{m}{s^2}) \cdot (0,57 s)^2$$

$$y_0 = 1,62 \text{ m}$$

3) Sumar resultados

1,82 m + 0,13 m → 2 m

h inicial h del vaso

4) Hallar datos por medio de la ecuación

$$y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$y = 1,82 \text{ m} + \frac{1}{2} (9,8 \frac{m}{s^2}) \cdot t^2$$

$$y = 2 \text{ m} = 0,98 \frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

Con la descripción del estudiante, es comprensible la experiencia realizada y la obtención de la ecuación de la distancia con respecto al tiempo.

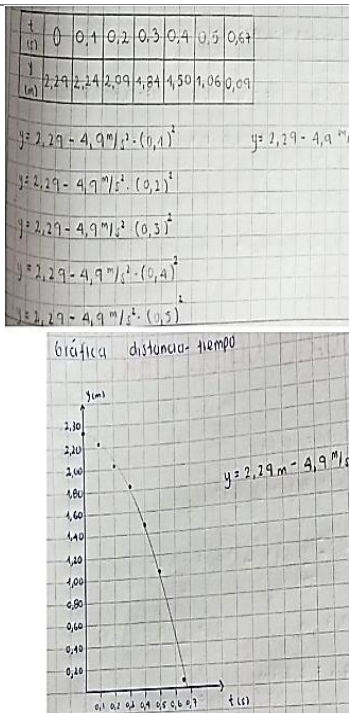
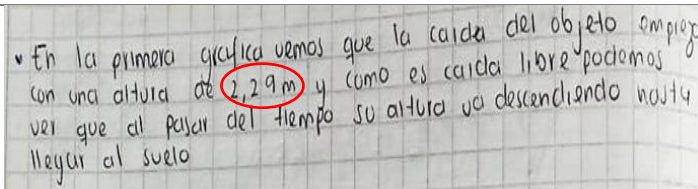
Con la obtención de la ecuación se pudo observar las actividades de tratamiento y conversión de los registros numérico y algebraico realizados por los estudiantes, en donde algunos de ellos describen procesos más específicos, mientras que otros realizan representaciones mentales las cuales no externalizan en el desarrollo del informe presentado de la experiencia, como en el caso del estudiante E4, quien hace el despeje correcto de la distancia inicial, pero en su descripción lo reemplaza directamente sin expresar un tratamiento algebraico.

Posterior a la obtención de la ecuación del movimiento en caída libre, se procede a la actividad de conversión al registro gráfico, para esto según lo trabajado anteriormente, se ve la conveniencia de realizar la conversión primero al registro tabular, teniendo en cuenta el tiempo que tarda el cuerpo en chocar con el agua. Se propuso dar tiempos en intervalos de 0,1 s para la obtención de los datos y la respectiva gráfica. Además de cada una de las gráficas obtenidas, con la experiencia se dieron las conclusiones basados en el comportamiento que presentan las magnitudes. En la tabla 18 se observa las actividades cognitivas realizadas por los estudiantes tomando como registro de salida el registro algebraico de la distancia recorrida por el cuerpo con respecto al tiempo.

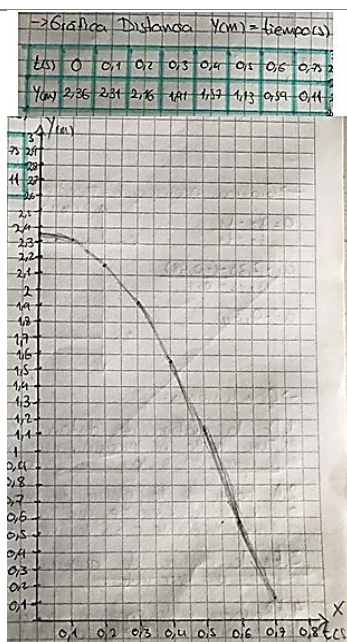
Con la conclusión planteada en la gráfica de distancia con respecto al tiempo, se pretende que los estudiantes mencionen aspectos fundamentales tales como el comportamiento parabólico propio del M.R.U.A. en este caso dirigida hacia abajo por considerar la aceleración negativa. Además, describir la variación de la distancia inicial, hasta chocar con el vaso con agua y llegar al fondo para una distancia $y = 0$.

Tabla 18.

Representaciones tabulares y gráficas de los estudiantes para distancia y tiempo de la tarea 1 situación 3.

Registros de		
Estudiante	representación tabular y gráfico. Distancia-tiempo.	Conclusiones del estudiante y su desempeño
E1		 <p>El estudiante además de las representaciones tabular y gráfica, utiliza el registro de representación numérico como una representación externa con la que describe el proceso para completar la tabla. Con la conclusión planteada el estudiante resalta aspectos tales como la distancia inicial y la variación de la altura sin especificar un comportamiento parabólico.</p>

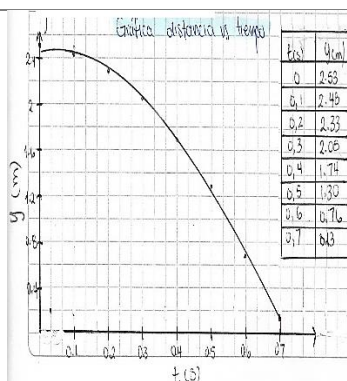
E2



1. De la gráfica de distancia (m) = tiempo (s) se puede concluir que es una caída en picada, entre mayor sea el tiempo, el objeto recorre más cerca del suelo o el fondo.

El estudiante realiza un proceso adecuado de conversión y de tratamiento del registro gráfico utilizando una escala adecuada y señalando las magnitudes presentes en cada eje coordenado. En la conclusión expresa la variación de la distancia con respecto al tiempo sin especificar el comportamiento parabólico del M.R.U.A.

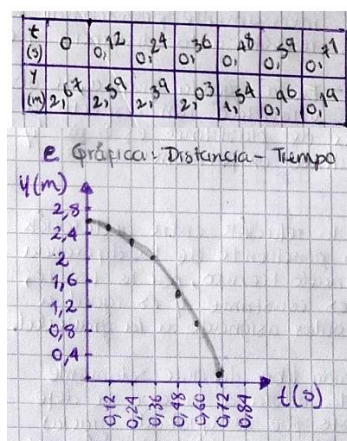
E4



La distancia y el tiempo son inversamente proporcionales, pero la distancia no disminuye de forma constante.

En la conclusión el estudiante hace referencia a que la gráfica efectivamente no presenta un comportamiento rectilíneo.

E6

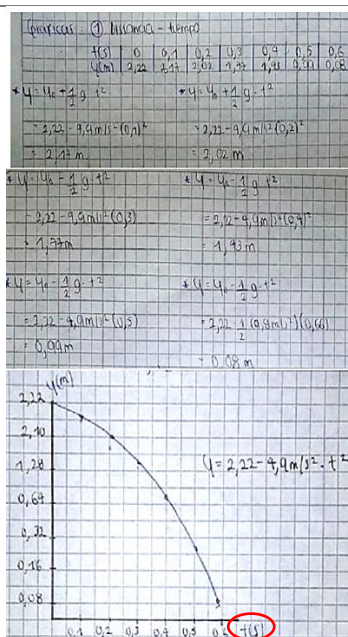


En la primera gráfica, se reconoce el movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado y se identifica la forma inversamente proporcional en que transcurre el tiempo, con respecto a la distancia que recorre la esfera de plastilina.

El estudiante en su conclusión describe que se trata de un movimiento uniformemente desacelerado, esto dado que se está trabajando con una aceleración negativa, todo esto depende de la orientación que se den a los ejes, contextualizando el movimiento es evidente que es un movimiento acelerado. Sin embargo, al comparar esta gráfica con el concepto construido de movimiento rectilíneo se aprecia que la

aceleración negativa hace parte de un M.R.U.D. En este caso es cuestión de tener en cuenta la orientación del eje positivo en la caída.

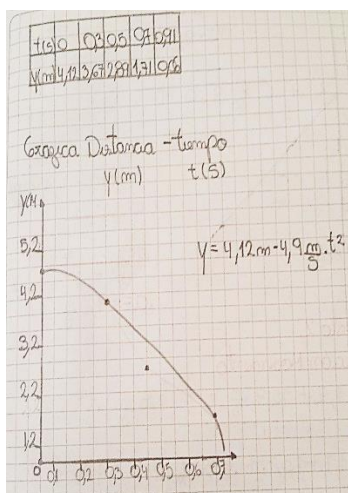
E7



En la gráfica de distancia (y (m) vs t (s)) se presenta un movimiento semiparabólico, el cual a su vez representa un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. M.R.U.D. y de esta manera se evidencia que es inversamente proporcional, ya que a mayor altura menor tiempo.

El estudiante confunde lo observado en la gráfica, ya que al mencionar un movimiento semiparabólico, estaría considerando que el eje x se trata de una distancia horizontal, sin embargo, en la representación gráfica lo identifica como el tiempo. Además, describe un M.R.U.D. por el comportamiento gráfico observado, similar al planteamiento del estudiante E6.

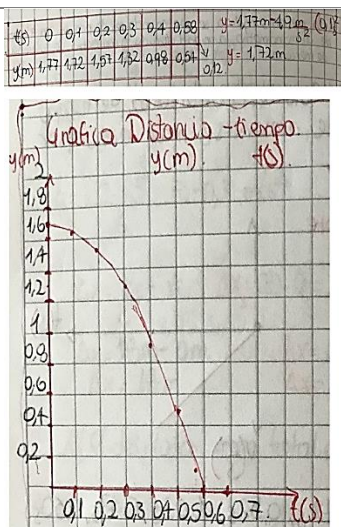
E8



¡ Gracias a esta Gráfica Tomamos la mayoría de datos para poder continuar con los demás.

El estudiante representa únicamente cinco datos en la tabla, sin embargo, en el registro gráfico, hace un tratamiento inapropiado, puesto que no ubica correctamente los valores en los ejes coordenados, lo que hace que en la gráfica no se pueda ver un comportamiento acertado de las magnitudes. Por otro lado, con la conclusión no está describiendo lo que ocurre con las magnitudes presentes.

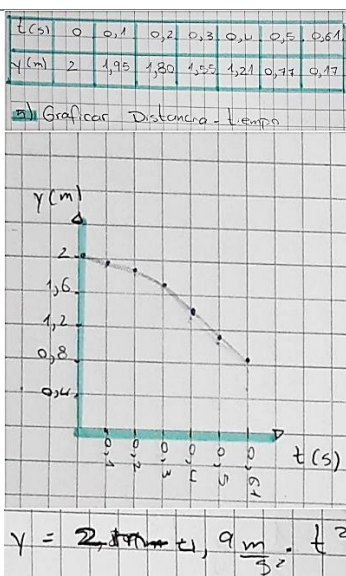
E9



Gráfica 1. $y(m)$ $t(s)$: La gravedad es una fuerza que trata de jalar el objeto hacia abajo, no se toma en cuenta la resistencia al aire, la gráfica es semi-parabólica.

El estudiante realiza una descripción asociando la gráfica con un comportamiento semiparabólico, además menciona un aspecto importante y es que no se toma en cuenta la resistencia del aire lo cual es se analiza con el uso del simulador.

E10



El estudiante no realizó conclusión del comportamiento gráfico, además hizo un tratamiento inapropiado en la gráfica al ubicar erróneamente los datos obtenidos con la ecuación.

En general pocos estudiantes utilizan la representación numérica para describir los valores obtenidos en la tabla, tal y como lo hacen los estudiantes E1 y E7. Esto se debe a que proceden a hacer el cálculo directamente desde la calculadora simplemente reemplazando el valor del tiempo en la ecuación del desplazamiento obtenida anteriormente.

A pesar que los estudiantes realizan esas representaciones internas en el cálculo de los valores consignados en la tabla, es importante tener en cuenta lo planteado por Goldin y Shteingold (2001) con respecto a que la enseñanza más efectiva de las matemáticas se logra cuando se

entienden los efectos de representaciones externas y la realización de actividades estructuradas. En este caso, plasmar los procesos argumentarían mucho mejor el informe realizado en la presentación de resultados en el análisis del movimiento en caída libre.

Se pudo observar que en general la mayoría de los estudiantes realizaron un tratamiento adecuado del registro gráfico, algunos fallando en la ubicación de los puntos coordinados en la actividad de conversión del registro tabular al gráfico. Por otro lado, en las conclusiones planteadas por los estudiantes con respecto a la distancia con respecto al tiempo, se observa que identifican unidades significantes que les permiten dar argumentos basados en el análisis del comportamiento gráfico.

Para Duval (1999) en el registro verbal es donde el razonamiento se desarrolla y encuentra toda su potencia. Por esto, en las conclusiones dadas por los estudiantes no solo se debe comunicar información, sino que también transformarla, así solo se haga explícito lo implícito. Esto se debe a que “toda información que se recibe debe poder transformarse de modo tal que puedan extraerse de ella otras informaciones” (p. 83).

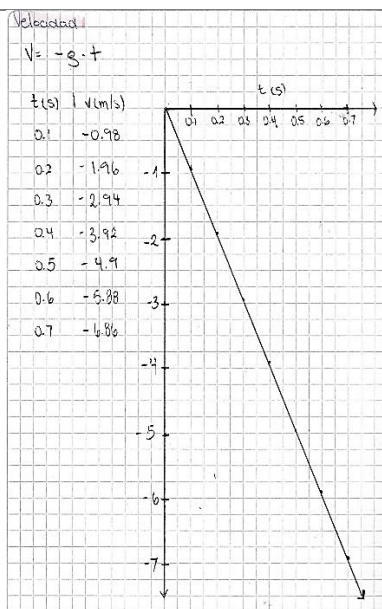
En la tabla 19 se observa el análisis realizado por los estudiantes para la magnitud de velocidad con respecto al tiempo y las respectivas conclusiones basados en el análisis gráfico.

Tabla 19.

Representaciones tabulares y gráficas de los estudiantes para velocidad y tiempo de la tarea 1 situación 3.

Registros de representación		
Estudiante	tabular y gráfico. Velocidad-tiempo.	Conclusiones del estudiante y su desempeño
E1		<p>El estudiante tiene presente que la gráfica representa un aumento de la velocidad a pesar que tenga una dirección negativa. Finalmente, describe que la velocidad nuevamente es cero sin mencionar el cambio de medio al agua. Además, realiza correctamente las transformaciones de los registros tabular y gráfico, incluyendo además, el registro numérico para describir la obtención de los datos de la tabla.</p>
E2		<p>El estudiante describe que la velocidad disminuye a pesar de ser un movimiento en caída libre. Sin embargo, realiza transformaciones adecuadas con los registros tabular y gráficos.</p>

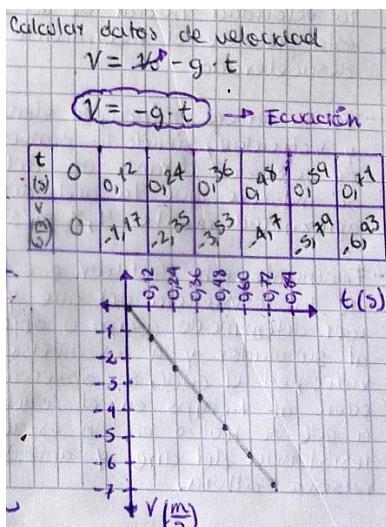
E4



la velocidad es directamente proporcional al tiempo y es de -0.98 m/s .

La estudiante relaciona su argumento con las magnitudes directamente proporcionales, mencionando únicamente el valor para un tiempo $t = 0,1 \text{ s}$, sin embargo, no se está extrayendo información suficiente que describa el movimiento del objeto. Es importante destacar que de manera implícita está describiendo el aumento de velocidad con el paso del tiempo.

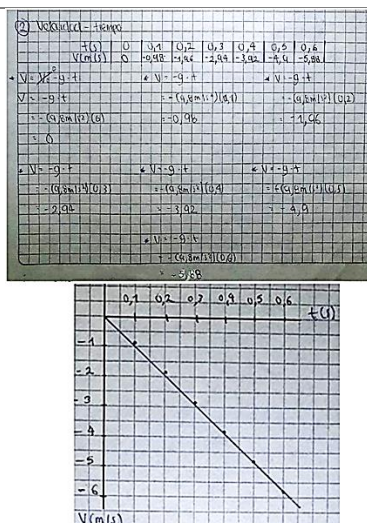
E6



En la segunda gráfica, se observa el cambio proporcional de velocidad con respecto al tiempo, teniendo en cuenta que la velocidad inicial de la esfera de plastilina es 0 m/s y está presente el movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado.

El estudiante realiza argumento de la variación de velocidad, relacionando la caída del objeto con un M.R.U.D. puesto que, en el comportamiento gráfico, así se expresó en la construcción del concepto. Sin embargo, no tiene en cuenta la descripción de que se trata de un movimiento acelerado, solo que presenta ese comportamiento, puesto que la gravedad se considera negativa, teniendo en cuenta las unidades significantes de la tabla 16.

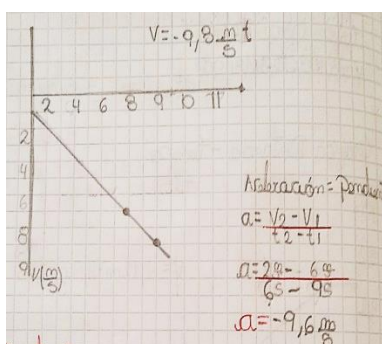
E7



La grafica de Velocidad ($V(m/s)$ vs $t(s)$) presenta una velocidad negativa puesto que el objeto ha caído, a su vez es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.) y de esta manera se evidencia que es directamente proporcional, ya que entre mayor tiempo mayor es la velocidad.

El estudiante presenta un análisis completo de la información, describiendo la velocidad negativa y el tipo de movimiento presentado. Además, realiza una transformación adecuada utilizando el registro tabular, numérico y gráfico.

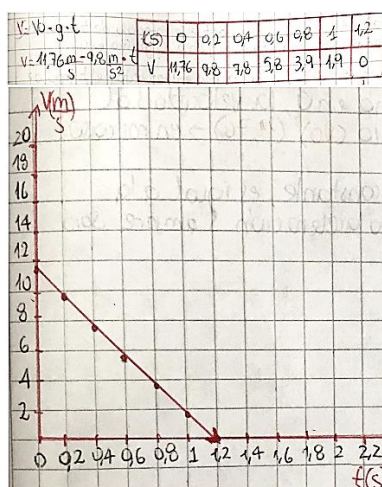
E8



En esta grafica nos da una aceleración negativa y se puede probar cuanto cambia la velocidad.

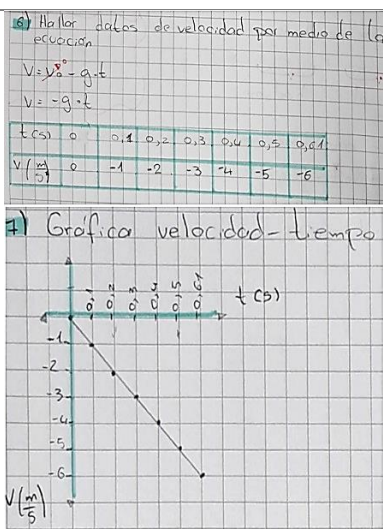
El estudiante utiliza unicamente el registro gráfico para realizar la conversión desde la ecuación de velocidad obtenida. Además, hace un tratamiento inadecuado del registro gráfico. En la conclusión relaciona la aceleración negativa con la pendiente de la recta y el cambio de velocidad.

E9



Grafica 2 ($V(m/s)$ vs $t(s)$): La velocidad inicial siempre es 0, varía la velocidad al caer el objeto, cuando desde cierta altura el objeto se deja caer para permitir que la fuerza de gravedad actúe sobre él.

El estudiante no describe a la gravedad como la aceleración sino como una fuerza que actúa sobre el objeto. Por otro lado, a pesar que en la conclusión describe que la velocidad inicial es cero, esto no se evidencia en la gráfica, ya que la ecuación obtenida es errónea, de modo que la conversión en los otros registros refleja un mal tratamiento del registro algebraico para determinar la ecuación particular de la velocidad.

E10

Se observa que la grafica de velocidad es negativa ya que se realiza un movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado

El estudiante, al igual que el estudiante E6, relaciona la caída del objeto con un M.R.U.D. expresando una velocidad negativa, sin describir la variación de la misma.

Duval (1999) menciona que todo sistema semiótico puede servir de lenguaje sin ser lengua, sin embargo, es importante la interpretación que se les dé a estas. Una de las funciones metacognitivas mencionadas por el autor es la de objetivación, la cual es necesaria para el desarrollo del control que puede tener un sujeto sobre sus actividades, sus vivencias y potencialidades en un mundo imaginario o personal. En este caso se trabajó en un entorno real, sin embargo, fue necesario recurrir un poco a la imaginación o deducción de lo que puede ocurrir cuando el objeto cambia del aire al agua y así poder completar la gráfica en los pocos segundos que pasó la esfera por el vaso con agua.

En cuanto a las conclusiones, la función de objetivación debe estar presente, ya que esta permite que el sujeto tome conciencia de lo que hasta el momento no se es consciente o simplemente no se ha exteriorizado con fines de organización (Duval, 1999). En este caso a pesar de que los estudiantes pueden observar no solo de manera real, sino también virtual con el simulador, que el objeto cae aumentando su velocidad, se llega a relacionar con un M.R.U.D. como el caso del estudiante E6 y E10. Además, con la observación del simulador fue posible analizar la

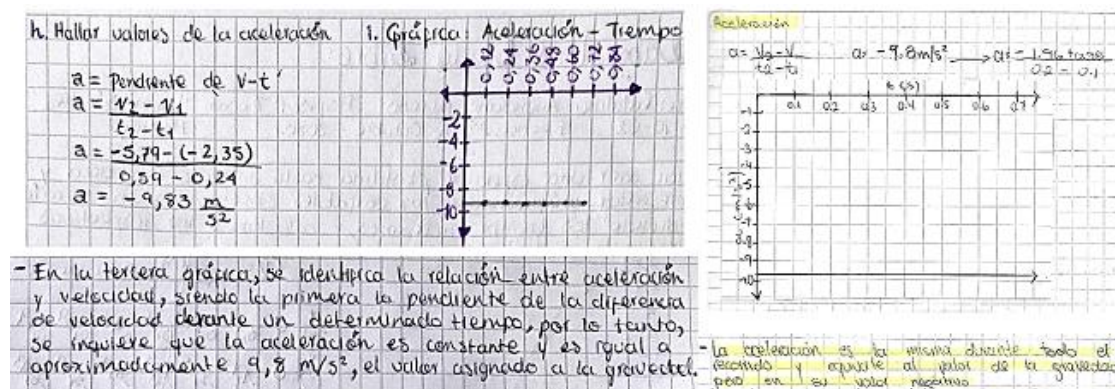
influencia del aire en cuanto al aumento o disminución de la densidad, lo cual se puede extender al análisis de la caída vertical de un objeto en otro medio como el agua.

Posterior al análisis de la distancia y la velocidad con respecto al tiempo se procede al análisis de la aceleración, la cual se determinó con el cálculo de la pendiente de la recta tal y como se había trabajado previamente. Los estudiantes graficaron y concluyeron acerca del resultado de la misma evidenciando que efectivamente se trata de la aceleración de la gravedad, obteniendo un resultado negativo para la gráfica decreciente de la velocidad con respecto al tiempo.

Algunas de las representaciones de la aceleración realizada por los estudiantes se pueden observar en la figura 44, donde los estudiantes relacionaron la aceleración con la pendiente de la velocidad y especificaron que el valor es el de la aceleración de la gravedad.

Figura 44.

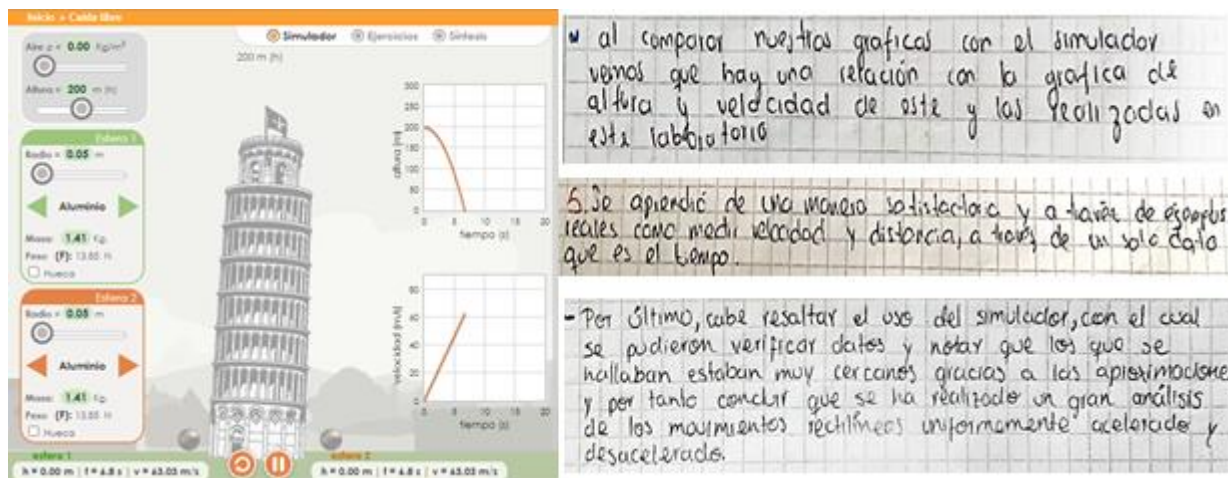
Representaciones de la aceleración por los estudiantes E6 y E4 respectivamente de la tarea 1 situación 3.



El simulador permitió ampliar el argumento de los estudiantes con respecto a la caída del objeto, ya que con este se podían evidenciar las gráficas de distancia y velocidad, además de las variaciones que se presentan al modificar la densidad del medio en el que se desplaza. Algunas de las conclusiones de los estudiantes se pueden observar en la figura 45.

Figura 45.

Simulador de caída libre y conclusiones del mismo realizadas por los estudiantes E1, E2 y E6 respectivamente, de la tarea 1, situación 3.



Fuente: Simulador de caída libre. Tomado de: <http://objetos.unam.mx/fisica/caidaLibre/index.html>

Por otro lado, los estudiantes elaboraron un vídeo en el que observaban dos esferas de plastilina de diferentes tamaños sobre dos vasos con agua, de tal forma que se pudiera obtener una conclusión con respecto al cambio de medio y la influencia del tamaño y masa del objeto. Las imágenes tomadas de algunos de los videos se pueden observar en la figura 46, con los cuales los estudiantes concluyeron el movimiento descrito.

Figura 46.

Imágenes tomadas de algunos vídeos de los estudiantes para la caída libre de la tarea 1, situación 3.



Con la realización de los vídeos los estudiantes pudieron observar detenidamente lo que sucede con el movimiento de las esferas dependiendo su tamaño, elaborando algunas conclusiones como las que se observan en la figura 47.

Figura 47.

Conclusiones del video realizados por los estudiantes E1, E4, E6 y E7 respectivamente de la tarea 1 situación 3.

- ✓ al analizar el video de los 2 vasos, en mi caso, pude observar que los 2 esferas tocaron el fondo del vaso al mismo tiempo, pero en el vaso de la derecha en el cual cayó la esfera más grande vemos que el vaso queda con menos agua ya que la masa de esta esfera era mayor que la del otro vaso.
- La esfera más grande cae antes que la esfera pequeña debido a que no solo es más grande sino que también es más pesada.
- Finalmente, cabe destacar que la caída libre depende solamente de la resistencia del aire y de la altura a la que se dejó caer determinado cuerpo u objeto, esto fue comprobado gracias al simulador y a los diversos intentos para la grabación del video, en el cual, se observa que ambas esferas de plastilina caen al tiempo en el fondo del vaso lleno de agua, debido a que se realizó en un espacio cerrado donde no interfiere la resistencia del aire y ambas esferas fueron lanzadas a la misma altura.
- El video permite observar que la velocidad de los objetos al caer dentro del vaso con agua no varía, con lo cual la masa de estos no depende de su velocidad.

En general con las conclusiones de los estudiantes según las gráficas, el simulador y el video, se observa que resaltan algunos aspectos importantes basados en la identificación de algunas de las unidades significantes obtenidas con la observación de las gráficas, ecuaciones y aspectos de la realidad. Un aspecto fundamental es que los estudiantes trabajaron con una diversificación de registros de representación semiótica, teniendo en cuenta que Duval (1999) menciona que cada uno de los sistemas de representación son muy diferentes entre sí ya que llegan a plantear preguntas específicas sobre el aprendizaje. Sin embargo, aún se observan dificultades en integrar exitosamente todos los registros de representación para obtener una conclusión más fundamentada del análisis realizado.

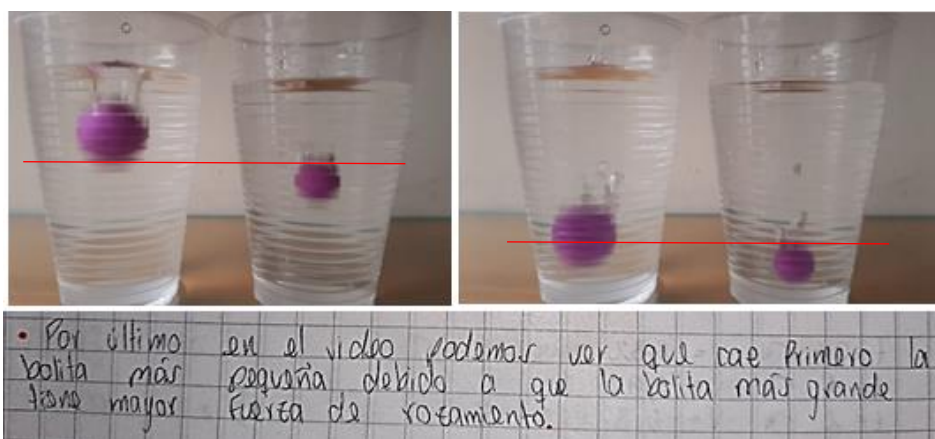
Con las conclusiones también se puede observar la diferenciación entre el representante y representado ya que según Duval (1999) está asociado a lo que el lenguaje utilizado representa, es decir, saber interpretar cada uno de los registros de representación, como el caso de las gráficas de distancia, velocidad y aceleración con respecto al tiempo. Además, saber expresar en otros registros de tal manera que se integren otras representaciones para realizar un proceso de tratamiento, como es el caso del registro numérico para la obtención de la tabla o el registro algebraico para obtener la ecuación despejada y luego reemplazar.

Goldin y Shteingold (2001) mencionan que, con la incorporación de las nuevas tecnologías, es posible desarrollar sistemas internos de representación, de modo que, con el uso del simulador, los estudiantes pueden llegar a visualizar mucho mejor el comportamiento gráfico de las magnitudes presentes, además de poder relacionar mucho mejor su observación con el análisis realizado para así poder concluir. Este aspecto se les dificultó un poco, ya que por lo general tendieron a concluir basados en lo que observaban únicamente en la gráfica sin incorporar los otros registros para un análisis más detallado y unas conclusiones mucho mejor argumentadas.

Para lo anterior se puede observar por ejemplo el análisis realizado por el estudiante E10, el cual realizó un video cuyas tomas se pueden observar en la figura 48 y cuyo argumento podría ser mucho más completo si se tienen en cuenta diversos aspectos tales como el hecho de que la esfera más grande a pesar de entrar un poco más despacio en la superficie del agua, avanza más rápido hasta el punto de que si fuera más profundo, podría sobrepasarla. Con esto se puede hablar de varios factores como el peso, y la variación de la velocidad de los cuerpos.

Figura 48.

Capturas de vídeo y conclusión del estudiante E10, tarea 1 situación 3.



Por otro lado, es posible argumentar mucho más si se extiende a visualizar en el simulador lo que ocurre con diversas masas en una caída que no desprecia la densidad, tal y como se observa en la figura 49.

Figura 49.

Simulador de caída libre para dos objetos con diferente masa, teniendo en cuenta la densidad del aire.

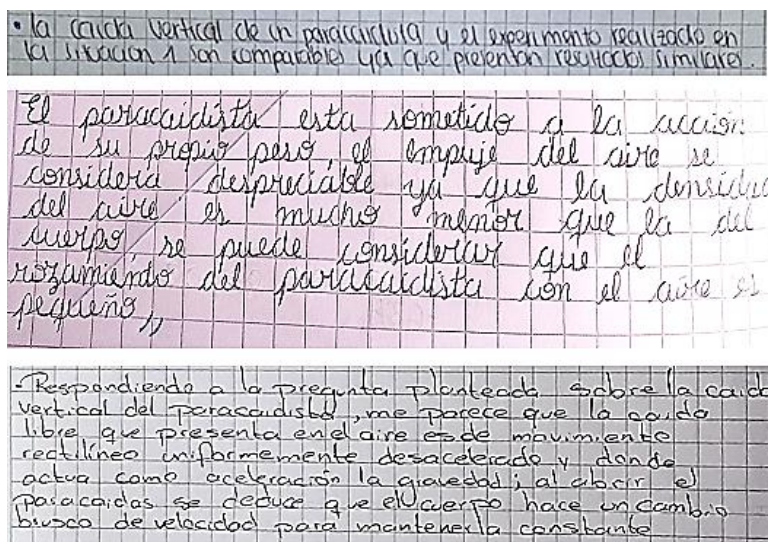


Fuente: Simulador de caída libre. Tomado de: <http://objetos.unam.mx/fisica/caidaLibre/index.html>

Por otro lado, con respecto a la pregunta planteada en la tarea 1 de la situación 3 (ver anexo 4): ¿Basados en la experiencia cómo es posible describir la caída vertical de un paracaidista?, los estudiantes utilizaron argumentos en los que describían variaciones de velocidad, la aceleración y el cambio a una velocidad constante en la caída tal y como se observa en la figura 50.

Figura 50.

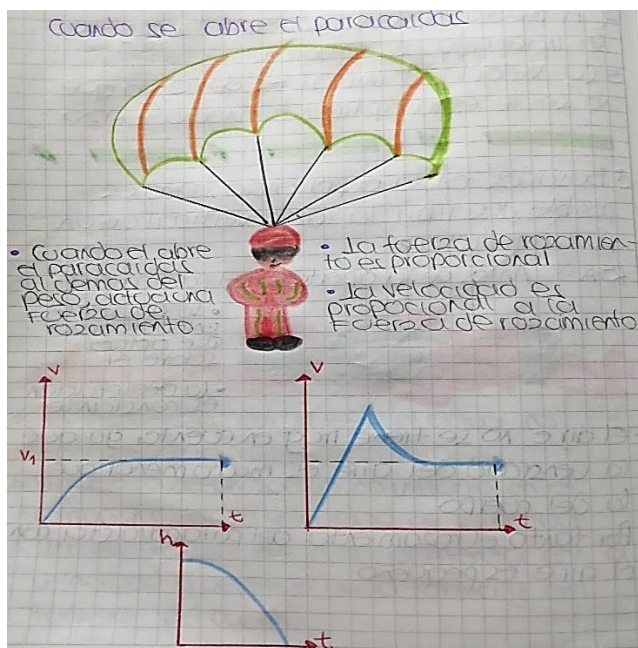
Respuestas de los estudiantes E7, E8 y E10 para la pregunta de la tarea 1 situación 3.



En general para el análisis de la caída libre del objeto sobre el vaso con agua, fue fundamental tener en cuenta los tres fenómenos relativos a la semiósis mencionados por Duval (1999) correspondientes a la diversificación de los registros de representación semiótica, la diferenciación entre representante y representado y la coordinación entre registros de representación. Los estudiantes abordaron estos tres fenómenos los cuales son tenidos en cuenta para el aprendizaje del objeto de estudio. Sin embargo, algunos argumentaron más que otros según los registros de representación semiótica utilizados, por ejemplo, en el caso del estudiante E2, utilizó registros gráficos para fundamentar la respuesta de la pregunta tal y como se observa en la figura 51, además tuvo en cuenta la observación gráfica del simulador para una mejor fundamentación.

Figura 51.

Respuestas del estudiante E2 para la pregunta de la tarea 1 situación 3



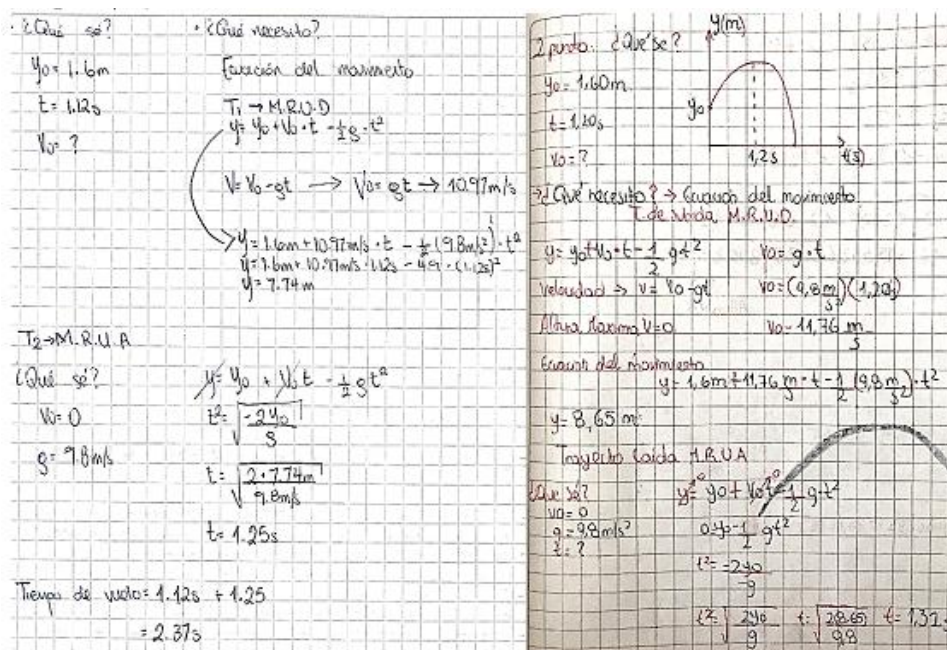
La segunda tarea de la situación problema 3, consistía en un proceso muy similar al primero, realizando un análisis gráfico y analítico de las magnitudes presentes en el movimiento de un objeto lanzado de manera vertical hacia arriba, hasta caer al suelo, partiendo de un único dato, que es el tiempo que tarda el objeto en llegar hasta su altura máxima, arrojándolo desde una altura inicial que es la altura de la persona que realiza el lanzamiento. Durante la clase se tomó el respectivo dato y se procedió a determinar más valores que permitan determinar la ecuación del movimiento para el análisis detallado.

Como primera medida, en la clase se preguntó acerca de lo que sé y lo que necesito, lo cual fue un aspecto fundamental como punto de partida ya que se establecieron los datos iniciales y los necesarios para obtener la ecuación del movimiento. Además, los estudiantes expresaban verbalmente como creían que se verían las gráficas para posteriormente pasar a analizar el movimiento y así estar seguros del comportamiento de las magnitudes de distancia, velocidad y

tiempo. Algunas de estas primeras aproximaciones al problema se pueden observar en la figura 52.

Figura 52.

Primeras aproximaciones de estudiantes E4 y E9 de la tarea 2 situación 3.



En el desarrollo de la situación problema 3, siempre se ha tenido presente los estados mencionados por Mason et. al. (1998) para el razonamiento matemático. En esta primera parte, con los estudiantes se realizó una idea global del problema y se extrajeron aquellos aspectos que direccionan la solución del mismo. En el caso del estudiante E9 se observa el comportamiento gráfico que se mencionó durante la clase, teniendo en cuenta que la altura inicial con la que sale el objeto es la medida de la estatura de cada estudiante.

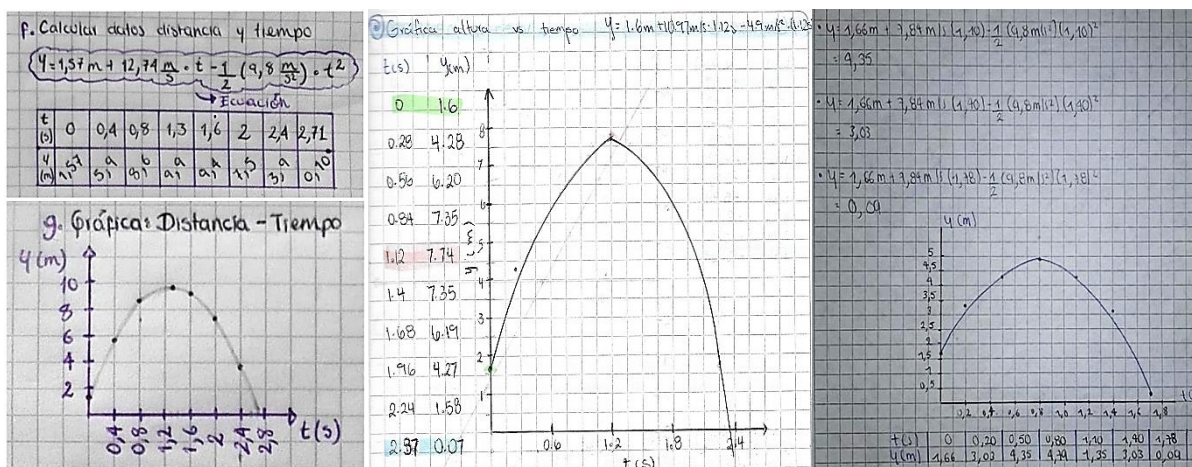
Posteriormente se procede a analizar el tiempo que tarda en caer el objeto, de modo que con los estudiantes se determinó que se podía analizar como un segundo trayecto en caída libre con el cual se podría determinar el tiempo, de este modo se utilizaron representaciones algebraicas y numéricas para determinar el tiempo que demora en caer el objeto y el tiempo total de vuelo.

Con la obtención de la ecuación se procede a la conversión al registro gráfico, pasando por el tabular, en esta transformación de registros de representación se ve una mejoría con respecto a todo el proceso de la investigación, ya que asignan los ejes de manera adecuada, y en su mayoría tienen en cuenta todas las unidades significativas presentes en el registro utilizado. Algunas de las actividades cognitivas de los registros de representación semiótica se pueden observar en la figura 53.

Figura 53.

Representaciones utilizadas para el análisis de la distancia por los estudiantes E6,

E4 y E7 respectivamente de la tarea 2, situación 3.

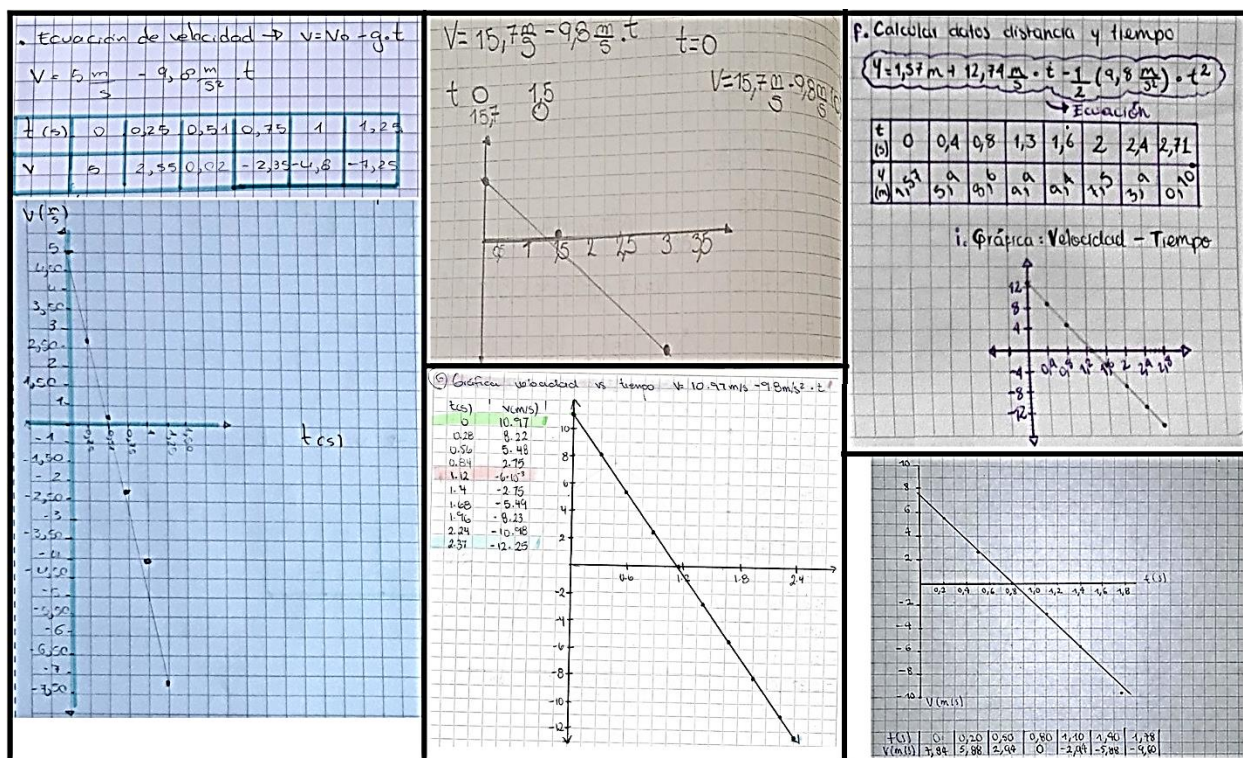


Con esas representaciones es posible observar que los estudiantes tienen en cuenta las unidades significativas de la altura inicial, el tiempo en alcanzar la altura máxima y el tiempo de vuelo, con estos datos es posible hacerse una idea del comportamiento gráfico, como el realizado por el estudiante E4. Sin embargo, es fundamental analizar el recorrido para diferentes tiempos y así poder verificar el comportamiento gráfico, como en el caso del estudiante E6 y E7, aunque el último utilizó también el registro numérico lo cual es un fundamento más amplio de los resultados encontrados en la tabla.

Para el análisis de la velocidad se realizó un proceso análogo al anterior, determinando la ecuación particular y realizando la respectiva representación gráfica pasando por el registro tabular, tal y como se puede observar en la figura 54.

Figura 54.

Representación gráfica de los estudiantes E10, E8, E6, E4 y E7 respectivamente de la tarea 2, situación 3.



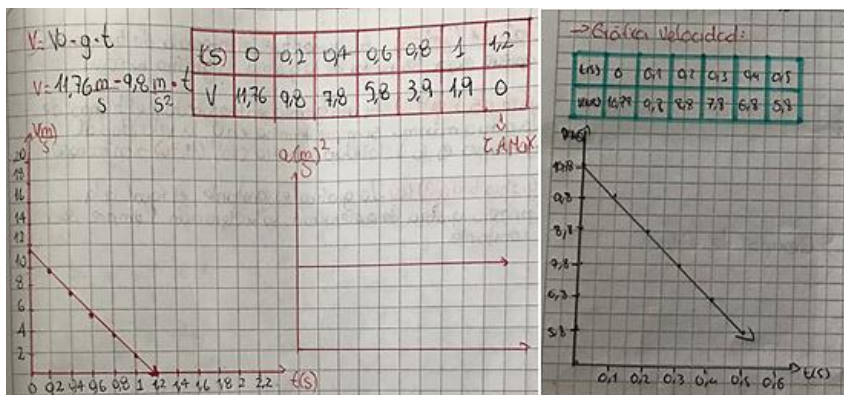
En las anteriores representaciones gráficas se puede observar que en la mayoría hace falta referenciar los ejes coordenados con las magnitudes que se están analizando como lo hacen los estudiantes E10 y E7, puesto que hace parte de una unidad significativa al convertir desde el registro algebraico correspondiente a la ecuación de la recta. Además, es fundamental indicar las unidades de medición y se puede observar también que los estudiantes utilizan una cantidad diferente para los datos del tiempo y la velocidad, en el caso del estudiante E8, únicamente considera tres puntos correspondientes a unidades significantes del tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima y el

tiempo de vuelo, al relacionarlo con un movimiento rectilíneo es posible tener presente el comportamiento rectilíneo de las magnitudes.

Relacionar el análisis de los registros de representación con el contexto real del movimiento es fundamental para tener claridad al momento de realizar las diferentes representaciones, en el caso de la velocidad, saber que el tiempo con el que comienza el movimiento y en el que finaliza son aspectos claves para analizar el movimiento del objeto desde que sale impulsado hasta que cae al suelo. No tener presente lo anterior puede producir que se omitan algunas unidades significantes en el análisis, como es el caso de los estudiantes E2 y E9, los cuales realizaron la representación gráfica únicamente hasta el tiempo en alcanzar la altura máxima, tal y como se observa en la figura 55.

Figura 55.

Representación gráfica de los estudiantes E2, y E9 respectivamente de la tarea 2, situación 3.

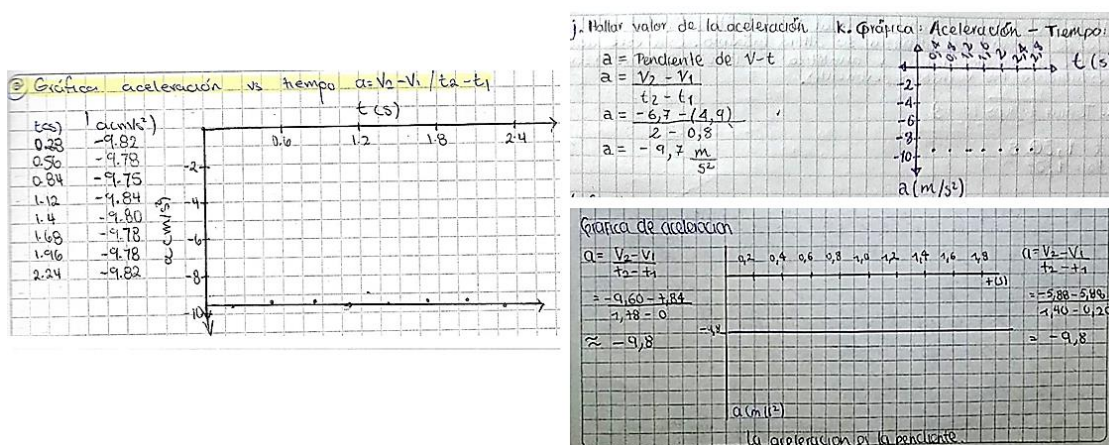


En el caso anterior los estudiantes únicamente asignaron valores para el tiempo en alcanzar la altura máxima omitiendo el trayecto de bajada del cuerpo, de modo que en la gráfica solo registró el trayecto de subida, por lo que las conclusiones obtenidas también hacen referencia al desplazamiento del objeto hacia arriba.

Finalmente, se realizó la conversión al registro gráfico de la aceleración con respecto al tiempo, para esto es necesario relacionar la aceleración con la pendiente de la recta, identificando dos puntos coordenados ya sea de la gráfica o de la tabla para así obtener el valor adecuado. Algunos de los procesos realizados por los estudiantes se pueden observar en la figura 56.

Figura 56.

Representación gráfica de la aceleración con respecto al tiempo de los estudiantes E4, E6 y E7 para la tarea 2, situación 3.



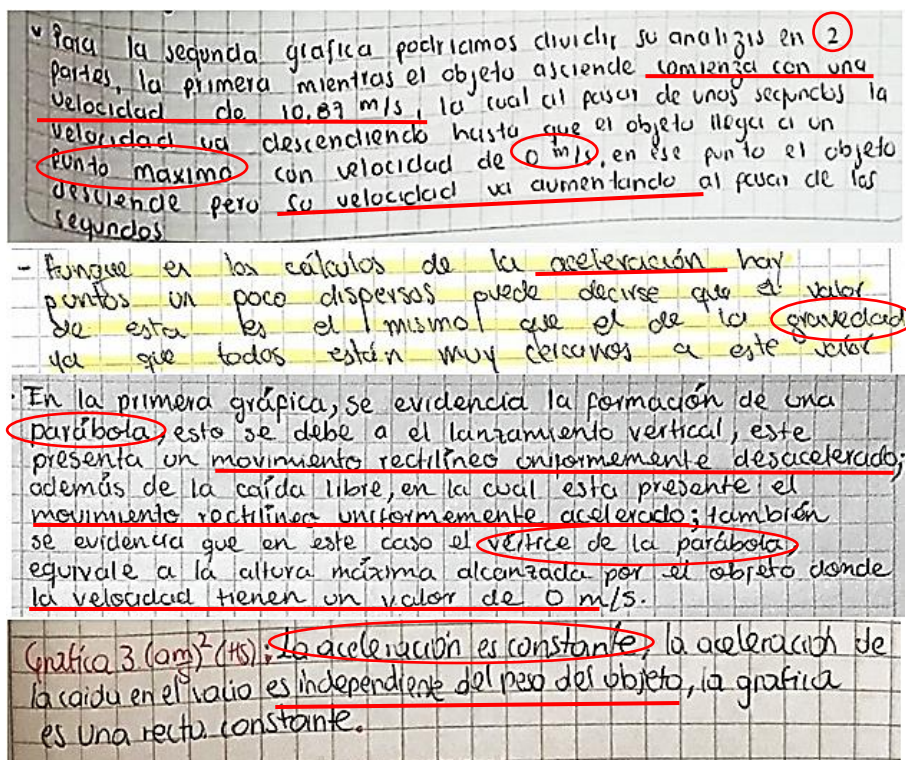
Se puede observar que el estudiante E4 utiliza un registro tabular para analizar la aceleración tomando como referencia cada pareja de puntos coordenados de la tabla anterior, mientras que los estudiantes E6 y E7, utilizan el registro algebraico y numérico para determinar el valor de la recta constante para la aceleración según lo analizado para el movimiento rectilíneo uniformemente variado. Además, se puede observar una coordinación entre los diferentes registros de representación disponibles, los cuales según Duval (1999) el mayor obstáculo para esta coordinación radica en los fenómenos de no-congruencia entre representaciones. Sin embargo, a pesar de que inicialmente se contaba con un único valor del tiempo, según los criterios de congruencia entre representaciones, fue posible relacionar los diferentes registros de

representación semiótica del movimiento rectilíneo para analizar el movimiento vertical del objeto y hacer las respectivas conclusiones según el proceso realizado.

En general las conclusiones planteadas por los estudiantes son muy similares a las descripciones de la tarea anterior, en la cual se destaca el hecho de que se presentan falencias para integrar correctamente todos los registros de representación semiótica utilizados para lograr un argumento sólido y detallado del comportamiento de las magnitudes presentes. Algunas de las conclusiones planteadas por los estudiantes según el movimiento vertical del objeto se pueden observar en la figura 57, en donde se resaltan las unidades significantes descritas, además de la relación con diferentes conceptos matemáticos y con el objeto de estudio del movimiento realizando acertadamente la actividad de conversión al registro verbal.

Figura 57.

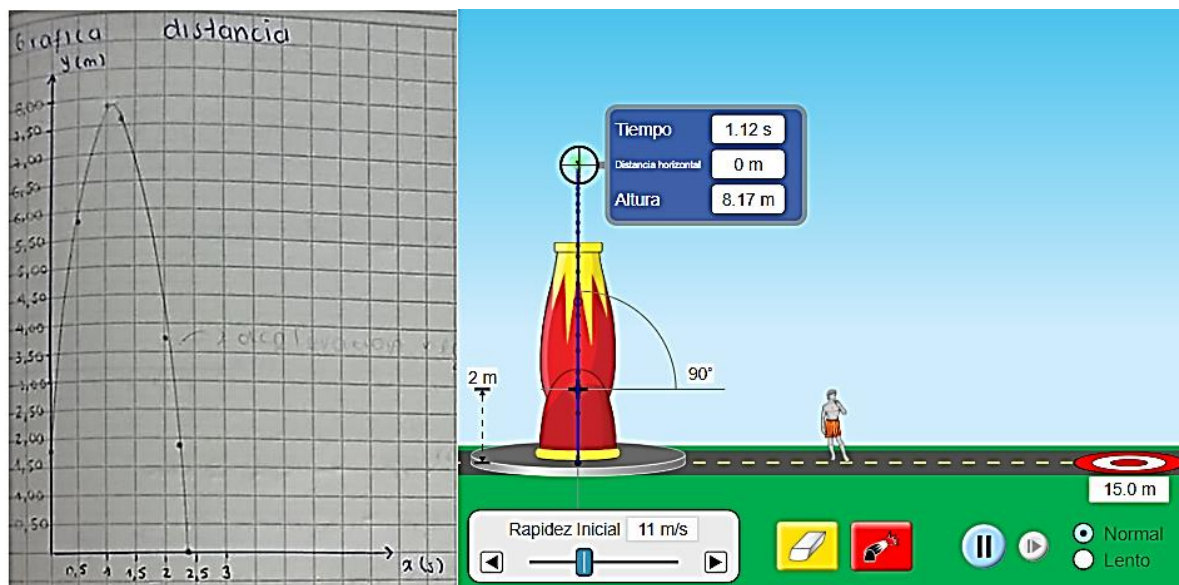
Conclusiones de los estudiantes E1, E4, E6, y E9 de la tarea 2, situación 3.



Finalmente, los estudiantes compararon la experiencia con el uso del simulador propuesto en la guía de la situación 3 (ver anexo 5), de manera que, al igual que la tarea anterior, se buscaba poder ampliar argumentos basados en la observación virtual con la real y relacionarlo con las diversas representaciones utilizadas. Una comparación de la gráfica obtenida del análisis en el contexto real, con el movimiento del simulador se puede apreciar en la figura 58, donde se evidencian resultados muy cercanos del estudiante E1, el cual obtuvo una velocidad inicial de $10,87 \text{ m/s}$ y se comparó con una aproximación de valores en el simulador.

Figura 58.

Gráfica distancia tiempo realizado por el estudiante E1 y su comparación con el simulador de movimiento de un proyectil, para la tarea 2, situación 3.



Fuente: Simulador movimiento de un proyectil. Tomado de: https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_es.html

Algunas de las conclusiones realizadas por los estudiantes al relacionar la experiencia real con el simulador, se pueden observar en la figura 58.

Figura 59.

Conclusiones de los estudiantes E1, E4, E6, y E7 de la tarea 2, situación 3 comparando con el simulador de movimiento de un proyectil.

- ✓ Al comparar los resultados de este estudio con el simulador vemos que obtenemos datos casi iguales.
- A mayor sea la velocidad inicial, mayor sea la altura alcanzada por el proyectil.
- Por último, cabe resaltar el uso del simulador, con el cual se pudieron verificar datos y notar que los que se hallaban estaban muy cercanos gracias a las aproximaciones y por tanto concluir que se ha realizado un gran análisis de los movimientos rectilíneos uniformemente acelerado y desacelerado.
- Los resultados dados por el simulador son similares o aproximados a los obtenidos durante el experimento, con lo cual se deduce que estos son lo más cercanos a la realidad.

En general los estudiantes destacaron que se obtienen valores cercanos del análisis realizado basados en un contexto real, con el simulador, de tal manera que se está teniendo en cuenta los tres fenómenos relativos a la semiósis planteados por Duval (1999), el cual, menciona que para que una representación pueda funcionar verdaderamente se deben disponer de al menos dos sistemas semióticos diferentes y que espontáneamente se puedan convertir de un sistema semiótico a otro sin siquiera notarlo. Todo esto es un aspecto clave para el análisis de esta situación 3, puesto que a partir de un dato se realizaron procesos de conversión que resultaron con la utilización de múltiples registros de representación semiótica del movimiento rectilíneo.

Análisis Global de Resultados

Con la teoría de representaciones semióticas, fue posible desarrollar el aprendizaje en los estudiantes, puesto que, al trabajar con los diversos registros de representación, se pudo dar un significado propio a cada descripción planteada sobre el movimiento rectilíneo, tanto en situaciones del contexto como en problemas que involucran el análisis y descripción de procesos. Esto contribuyó a que los estudiantes comunicaran el desarrollo y los resultados obtenidos, sin limitarse a un solo lenguaje, sino que realizaron descripciones con el uso de los registros verbal, gráfico, algebraico, aritmético y geométrico.

El desarrollo de la investigación, posibilitó una mejor comprensión del movimiento rectilíneo, lo cual se puede observar durante el proceso realizado, donde se reforzaron los conceptos preliminares y se pudo construir el conocimiento del objeto para luego ser aplicado en diversas situaciones. Esto ayudó a los estudiantes a dar un significado más amplio a conocimientos matemáticos aplicados al objeto de estudio, tales como funciones lineales y cuadráticas, sus respectivas ecuaciones y las descripciones verbales que se pueden extraer de estas.

Para la resolución de problemas del movimiento rectilíneo, fue necesario analizar detalladamente las magnitudes presentes en el movimiento y realizar los respectivos análisis a partir de los valores que estos pudieron tomar. Esto contribuyó al desarrollo del razonamiento matemático, de tal forma que se veía la necesidad de recurrir a la utilización de diversos registros de representación y realizar el respectivo tratamiento y conversión con el fin de obtener conclusiones y respuestas al problema planteado.

La teoría de resolución de problemas permitió que los estudiantes pudieran cuestionarse y orientarse mucho mejor en la solución de las situaciones, de tal forma que a pesar de que no se contaba con el apoyo presencial de compañeros y profesor, se pudieron desarrollar las situaciones

problema. Cuando los estudiantes encontraban algún aspecto que bloqueara el desarrollo del problema, era posible seguir las fases de esta teoría y realizar las conjeturas y reflexiones adecuadas. Los estudiantes expresaban en la realimentación final de la investigación, que trabajar con esta teoría, les permitió resolver sus propias dudas, al abordar sus preguntas de distintas formas y así siempre dar una respuesta a un problema, sin considerar la opción de dejar respuestas vacías.

Desarrollar la investigación desde la virtualidad, presentó dificultades en el acompañamiento del desarrollo de las situaciones problema y los análisis que los estudiantes realizaban. Esto se debe a que normalmente se encuentran obstáculos que obstruyen el desarrollo de una situación, en donde los estudiantes pocas veces llegan a expresar esas dudas durante la clase virtual. Sin embargo, con las indicaciones generales, las dudas que algunos expresaban en las clases y las realimentaciones del trabajo con el movimiento rectilíneo, se logró que los estudiantes reconocieran las diferentes representaciones semióticas del objeto y que además las relacionaran con su contexto al aplicarlas en situaciones reales.

Con los resultados obtenidos de las técnicas e instrumentos de recolección de información, fue posible identificar las falencias y aciertos de los estudiantes, los cuales se fueron reforzando durante un proceso de acción constante según las fases de la investigación acción. Durante las clases virtuales se realimentaron las situaciones realizadas, se concretaron los aspectos que componen al movimiento rectilíneo, donde unos estudiantes explicaron algunas de sus respuestas. Esto permitió observar que el aprendizaje del objeto de estudio con el uso de representaciones semióticas fue adecuado para los estudiantes, debido a la apropiación del lenguaje a través de los diferentes registros.

Con la utilización de la teoría de representaciones semióticas, los estudiantes realizaron las actividades cognitivas identificando los registros de representación, haciendo las respectivas

transformaciones dentro del mismo registro y pasando a un registro de representación diferente, esto permitió que los estudiantes no solamente tengan algunas nociones en el cálculo de distancia, velocidad y aceleración, sino que aprendieran de manera general el trasfondo analítico que implican esas magnitudes desde diferentes representaciones. Además, de esta forma los estudiantes también fortalecieron sus conocimientos relacionando conceptos matemáticos, tales como: Dar un significado a la pendiente de una recta al relacionarlo con la velocidad o aceleración de un objeto que describe un movimiento rectilíneo; relacionar las gráficas crecientes o decrecientes de velocidad, con aceleración y desaceleración respectivamente; identificar funciones de rectas o parábolas según el movimiento descrito por un objeto, entre otras.

Los aprendizajes fundamentales relativos al razonamiento, junto con los criterios de congruencia entre representaciones, permitieron identificar el reconocimiento que hacen los estudiantes cuando realizan las actividades cognitivas de tratamiento y conversión, de tal forma que se observó que hicieron una descomposición de las representaciones en las unidades significantes, pero algunas de estas se omitían en los procesos de conversión, lo que dificultaba la transformación entre algunos registros, en particular se evidenció del registro verbal al gráfico. Sin embargo, cuando se tenían presentes todas las unidades significantes de un registro de representación, los estudiantes los relacionaban correctamente, lo que contribuye a la comprensión de los conceptos descritos en el análisis que realizaron del movimiento rectilíneo.

Capítulo 5

Conclusiones

Las siguientes conclusiones surgen de acuerdo a las discusiones en las clases virtuales, las situaciones problema aplicadas a los estudiantes, además de los otros instrumentos para la recolección de datos tales como el foro y el diario de campo.

- Con las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas, realizadas por los estudiantes, fue posible observar la comprensión del objeto de estudio, puesto que hicieron descripciones con el uso diversos registros de representación semiótica del movimiento rectilíneo, reflejando un desarrollo del aprendizaje, al apropiarse del conocimiento aplicándolo en situaciones problema en un entorno real, lo que permitió brindar un significado propio a los diferentes conceptos matemáticos presentes en este objeto de estudio.
- El uso de la teoría de representaciones semióticas contribuyó a que los estudiantes analizaran las diferentes situaciones problema, de tal forma que se reflejó el aprendizaje del movimiento rectilíneo cuando realizaron las actividades de tratamiento y conversión, estableciendo una congruencia entre representaciones y teniendo presentes los aprendizajes fundamentales relativos al razonamiento matemático. Esto se observa en el trabajo con situaciones contextualizadas, en las cuales se parte de datos iniciales para hacer un análisis detallado del movimiento, identificando las unidades significantes pertinentes a cada registro.
- La integración de la teoría de resolución de problemas con las representaciones semióticas apoyó el desarrollo de la investigación en un entorno virtual, ya que permitió que los procesos realizados fueran llevados a cabo según las etapas

planteadas en la investigación acción. Dicha teoría orientó a los estudiantes de tal manera que no se quedaran bloqueados en un problema, sino que pudieran seguir las fases que permitieran encontrar alternativas de solución, ya que no se contaba con un apoyo presencial entre sus compañeros y profesor. Además, de esta forma fue posible observar con más detalle los procesos realizados por los estudiantes según las descripciones planteadas en el diario.

- Con la aplicación de las situaciones problema se pudo observar que, al encontrar una congruencia entre registros de representación, además de la realización de las actividades cognitivas pertinentes, es posible desarrollar el aprendizaje del movimiento rectilíneo, privilegiando la comunicación de resultados y el análisis de problemas. Además, se posibilitó el análisis de situaciones en un entorno real manipulando los diferentes registros de representación y apoyándose en la teoría de resolución de problemas.
- La construcción del concepto a partir de una experiencia práctica contribuyó a que los estudiantes den un mayor significado a las representaciones, lo cual se refleja en el registro verbal utilizado por los estudiantes, aunque algunos pasaban por alto unidades significantes correspondientes a algunos aspectos del movimiento.
- El uso del diario basado en la teoría de resolución de problemas fue un gran apoyo durante el proceso de investigación, ya que no solo ayudó a los estudiantes a plantear sus cuestionamientos y consideraciones, sino que también fue una forma de analizar aquellas representaciones internas que realizan y que muchas veces no tienden a expresar externamente con el uso de los registros de representación.

- El análisis a través de los procesos de investigación de los estudiantes permitió reflejar el razonamiento matemático a través de las representaciones externas que producen, además de poder inferir sobre sus representaciones mentales, ya que se observa la influencia que tiene el trabajar con situaciones contextualizadas. Estas apoyaron no solo la utilización de registros de representación, sino también su interpretación, reflejada en las conclusiones que los estudiantes planteaban con las experiencias prácticas. De esta forma fue posible identificar el reconocimiento que hacen los estudiantes del concepto de movimiento rectilíneo, de manera que hacían descripciones utilizando diversos registros de representación semiótica.
- Realizar la investigación a partir de la virtualidad, debido a la emergencia sanitaria por la que se atravesaba en el momento, permitió identificar algunas debilidades tales como una mayor dificultad en el trabajo conjunto y supervisado entre estudiantes y profesor, ya que, al no poder observar directamente el desarrollo de las situaciones durante el proceso, hace que la evaluación del mismo se complique aún más al no haber una asesoría individual. Sin embargo, fue posible integrar a los estudiantes mediante el foro de discusión y las clases virtuales, donde los estudiantes mencionaban algunas consideraciones.
- Se evidenciaron dificultades en la actividad de conversión de los registros de representación cuando se presentaban fenómenos de no-congruencia entre representaciones como en el caso de la aceleración en la primera situación problema.
- El tratamiento del registro de representación gráfico fue uno de los que presentó más dificultades, además de la conversión a este registro, en particular desde el

registro verbal, ya que en ocasiones no se identificaron las unidades significantes que se encuentran de manera implícita, tales como el tipo de movimiento rectilíneo presentado en la situación problema.

- La conversión del registro gráfico al verbal se les facilitó un poco más a los estudiantes, ya que relacionaban de manera directa unidades significantes con argumentos basados en el movimiento. De esta forma se puede apreciar que aquellos registros que presentan unidades significantes más explícitas presentan una facilidad mayor que aquellos que tienen sus unidades significantes de manera implícita como es el caso del registro verbal.
- En la actividad cognitiva de conversión al registro verbal, la mayoría de estudiantes omitían unidades significantes que se podrían analizar, además, al realizar descripciones verbales de la experiencia se centraban en explicar un único registro sin tener en cuenta la descripción de los múltiples registros usados, integrando, además, las consideraciones observadas en el contexto y el uso del simulador virtual.
- Un obstáculo epistemológico encontrado fue la utilización de la ecuación “ $v = d/t$ ” usada en general para problemas de movimiento con variaciones en estas tres magnitudes (velocidad, distancia y tiempo), de modo que al ampliar el concepto con velocidades y distancias iniciales, además de que haya aceleración pudo llevar a dificultar la comprensión del objeto de estudio, puesto que en ocasiones se tiende a considerar más útil dicha ecuación, ya que funcionaba en cursos previos al realizar análisis con las variables allí presentes.

- Relacionar los criterios de congruencia con las situaciones del contexto, además del uso de simuladores, permitieron direccionar mejor el análisis individual de los estudiantes, lo cual se ve reflejado en los informes presentados por ellos, de tal forma que a partir de algunos datos fue posible ampliar el análisis, buscando la necesidad de la utilización de los registros de representación semiótica para la interpretación de las situaciones problema.
- Los estudiantes trataban de realizar conversiones al registro gráfico como punto de partida del análisis general del movimiento, de tal forma que esto permite que se realice una diversificación de registros de representación, lo que lleva a organizar las ideas y el proceso que se debe hacer.
- El análisis de la distancia con respecto al tiempo del M.R.U.A. fue el que presentó mayor dificultad, tanto para la conversión al registro gráfico, como la obtención de la ecuación en el registro algebraico, cuando las unidades significantes no se encontraban expresados de manera explícita, sin embargo, si se partía de uno de esos dos registros o del registro tabular, a los estudiantes se les facilitaba un poco la conversión.

Referencias

- Bachelard, G. (1974). *La formación del espíritu científico*. Siglo XXI. Paidós Bueno Aires.
- Brousseau, G. (1994). “*Los diferentes roles del maestro*” en *didáctica de Matemáticas*. Paidós Educador.
- Brousseau, G. (2010). *Les obstacles epistemologiques et la didactique des mathematiques*. Universite Bordeaux I.
- Cabanne, N. (2010) *Didáctica de la matemática ¿cómo aprender? ¿cómo enseñar?* Editorial Bonum.
- Castaño, J., Rojas, D y Bautista, M. (2016). *Física Proyecto educativo XX*. Editorial Santillana S.A.S. Bogotá, Colombia.
- D’ Amore, B. y Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (1ª ed). Editorial CADE.
- D’ Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*. Barcelona, España. 35, 90-106.
- Diaz, S. (2010). *Estrategias de enseñanza y material de apoyo para física I*. Centro de investigación de materiales avanzados S.C.
- Duval, R. (1999). *Semiósis y pensamiento humano. Registros semióticos y actividades intelectuales*. Peter Lang S.A. Editions Scientifiques européennes.
- Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. Dunkerque, France. Université du Littoral Côte d’Opale.
- Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática*. Facultad de educación, Universidad de Granada.
- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). *Systems of representations and the development of mathematical concepts*. The roles of representation in school mathematics, 1-23.
- Gomes, L. (2018). *La abstracción en la enseñanza y aprendizaje de la física: contribuciones de la teoría de los registros de representación semiótica en la resolución de problemas*. Universidad de Sao Paulo.

- Hernandez, R. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ª ed.). México D.F. McGraw Hill Education.
- León F. (2016). *Estudio histórico - epistemológico del movimiento en la perspectiva newtoniana*. Universidad Pedagógica Nacional.
- Lucio, R. (1989). Educación y Pedagogía, Enseñanza y Didáctica: diferencias y relaciones. *Revista de la Universidad de La Salle*, (17), 35-46.
- Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988). *Pensar Matemáticamente*. Editorial Labor, S. A. Madrid, España.
- Mayorga, J. (2017). *Análisis e interpretación de gráficas en un movimiento rectilíneo desde un enfoque constructivista bajo el trabajo colaborativo-cooperativo haciendo uso de recursos físicos y las TIC en la I.E.M. Palmarito, sede Betania*. Universidad Nacional de Colombia.
- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. *Cooperativa Editorial Magisterio*.
- MEN. (2009). *Derechos Básicos de Aprendizaje DBA versión 2*.
- Moreira, M. (2014). Enseñanza de la física: aprendizaje significativo, aprendizaje mecánico y criticidad. *Revista de Enseñanza de La Física*, 26(1), 45–52.
- Nieto, M. (2009). “la historia de las ciencias”. Tomado de: <http://historiadelaciencia-mnieto.uniandes.edu.co/>
- Ospina, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto funcional lineal*. Universidad Autónoma de Manizales.
- Paulo, I. & Moreira, M. (2011). O problema da linguagem e o ensino da mecânica quântica no nível médio. *Ciência & Educação (Bauru)*, 17(2), 421–434.
- Ponte, J., Brocardo, J. y Oliveira, H. (2006), *Investigaciones Matemáticas en el aula de clase (1ª ed)*. Editorial Auténtica.
- Jiménez, A., & Riscanevo, L. (2017). La Experiencia Y El Aprendizaje Del Profesor De Matemáticas Desde La Perspectiva De La Práctica Social. *Praxis & Saber*, 8(18), 203–232.
- Rojas, P. J. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: representaciones semióticas y sentidos*. Universidad Distrital San José de Caldas.

Sandoval, C. (2002). *Investigación cualitativa*. Programa de Especialización en Teoría, Métodos y Técnicas de Investigación Social, Bogotá, Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (Icfes), Editores e Impresores Ltda. – arfo.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6(1), 3–26.

Waldegg, G. (1998). Principios constructivistas para la Educación Matemática. *Revista EMA*, 4(1), 15–31.

Young, H. y Freedman, R. (2009) *Física universitaria. (Vol 1. 12ª ed.)* Pearson Education, Mexico.

Anexos

Anexo 1. Carta Evaluación por Expertos

Tunja, 23 julio de 2020

Doctor

EXP. 1

Profesor Titular Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Cordial saludo,

Por medio de la presente solicito por favor se revisen las situaciones problema que se aplicarán en mi proyecto de investigación titulado “representaciones semióticas en la enseñanza del movimiento rectilíneo” cuyo objetivo principal es “analizar las actividades cognitivas realizadas por los estudiantes para posibilitar una mejor comprensión y desarrollo del aprendizaje de las representaciones semióticas en la solución de situaciones propias del movimiento rectilíneo”, con el fin de que sean validadas como instrumento de evaluación, para lo cual se ha considerado su nombre teniendo en cuenta su experiencia en el campo de la educación. Con las situaciones se pretende analizar lo siguiente:

- **Prueba preliminar:** Con esta prueba se pretende identificar el manejo que tienen los estudiantes con respecto a los conocimientos previos del tema.
- **Situación 1:** Con el desarrollo de esta situación se pretende trabajar el potencial investigador en los estudiantes con el fin de que ellos planteen estrategias para el análisis del movimiento y presenten argumentos utilizando los registros de representación semiótica tales como: tablas, gráficas, lenguaje natural, registro

algebraico y aritmético, además tiene como objetivo la aprehensión del concepto desde una perspectiva constructivista en un entorno real.

- **Situación 2:** Con esta prueba se busca identificar el manejo que tienen los estudiantes en el tratamiento y conversión de los registros de representación semiótica con situaciones propias del movimiento rectilíneo.
- **Situación 3:** Con esta situación se busca que los estudiantes argumenten con base al trabajo realizado anteriormente, en situaciones del movimiento rectilíneo en un entorno real y así sea posible realizar un análisis de las actividades cognitivas que ellos realizan con los registros de representación semiótica.

Atentamente,

DIDSON HARVEY SÁNCHEZ MONROY
Estudiante de Maestría en Educación Matemática
UPTC, Tunja

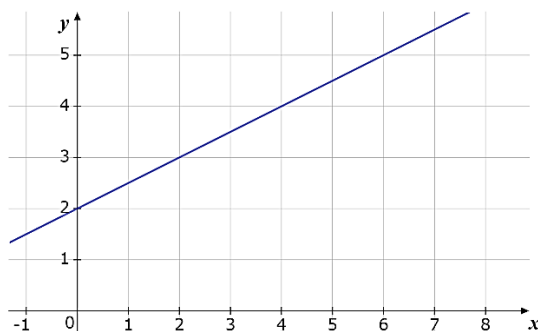
VoBo.
PhD. PEDRO NEL MALUENDAS PARDO
Docente Titular
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Anexo 2. Prueba Preliminar

El objetivo de esta prueba es identificar el manejo que tienen los estudiantes con respecto a los conocimientos previos del movimiento rectilíneo.

Para el desarrollo de la siguiente prueba dispone de un tiempo de 20 minutos, respondiendo con base en los conocimientos que tiene sin investigar en alguna fuente.

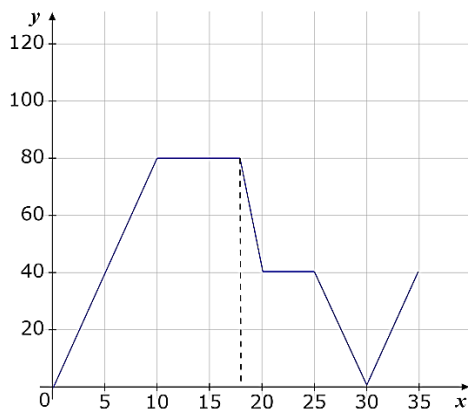
1. Dada la siguiente gráfica, determine la ecuación de la recta.



2. Represente gráficamente la siguiente función en el intervalo $(-3; 3)$: $y = x^2 + 2x + 1$



3. Dada la siguiente gráfica, responda:



¿En qué intervalos la pendiente es cero?

¿En qué intervalos la pendiente es positiva?

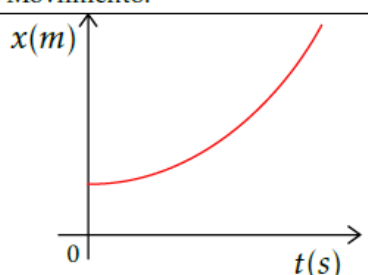
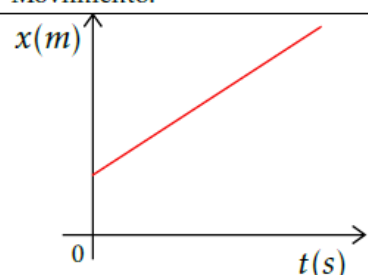
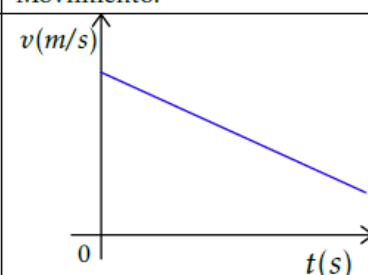
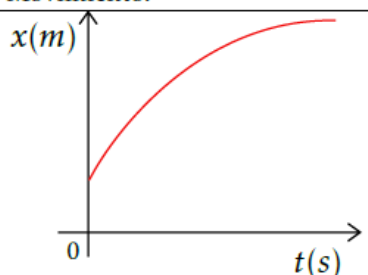
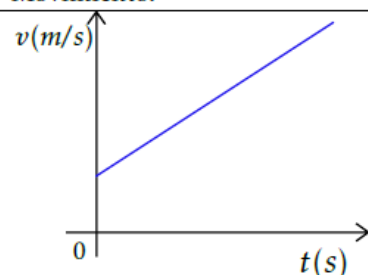
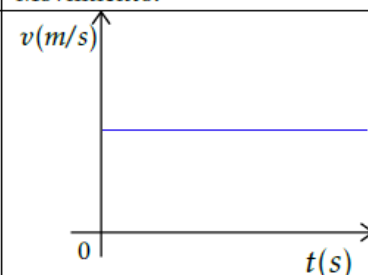
¿En qué intervalos la pendiente es negativa?

4. Despeje los valores indicados en cada ecuación (para $t = 0$; $v = 0$; $a = 0$; $v_0 = 0$):

<p>a) Despejar v_0 en:</p> $a = \frac{v - v_0}{t}$	<p>b) Despejar a en:</p> $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$
<p>c) Despejar t en:</p> $x = \frac{1}{2} a t^2$	<p>d) Despejar v_0 en:</p> $y = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$

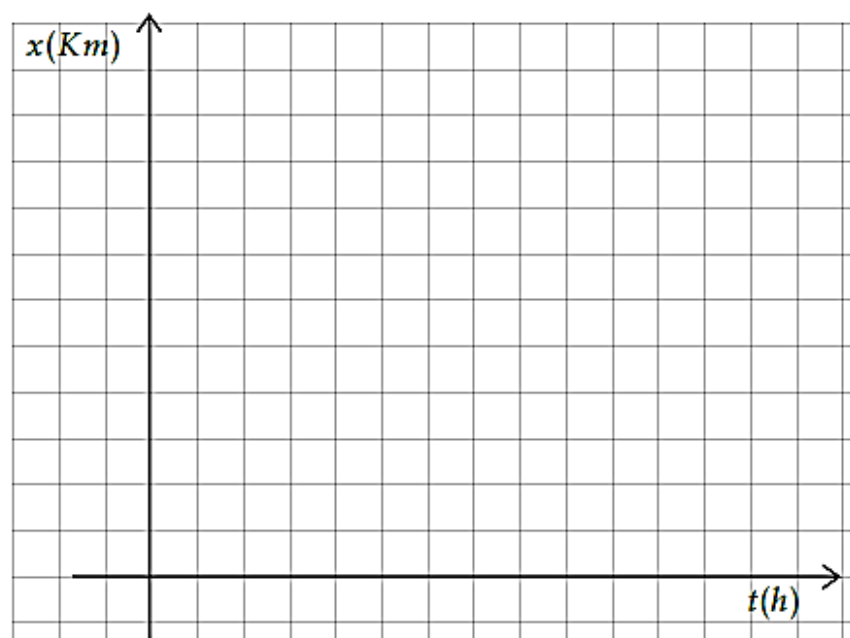
5. Las siguientes gráficas corresponden al movimiento de un cuerpo en línea recta donde x representa la distancia recorrida por el objeto, t el tiempo empleado y v la velocidad.

Clasifique las gráficas según corresponda a un movimiento uniforme, uniformemente acelerado o uniformemente desacelerado.

<p>Movimiento:</p> 	<p>Movimiento:</p> 	<p>Movimiento:</p> 
<p>Movimiento:</p> 	<p>Movimiento:</p> 	<p>Movimiento:</p> 

6. Un tren recorre 30 *Km* hacia el norte cada vez que transcurre una hora, complete la siguiente tabla de datos y realice la respectiva gráfica:

Tiempo (<i>h</i>)	1	2	3	4	5
Distancia (<i>Km</i>)	30	60			

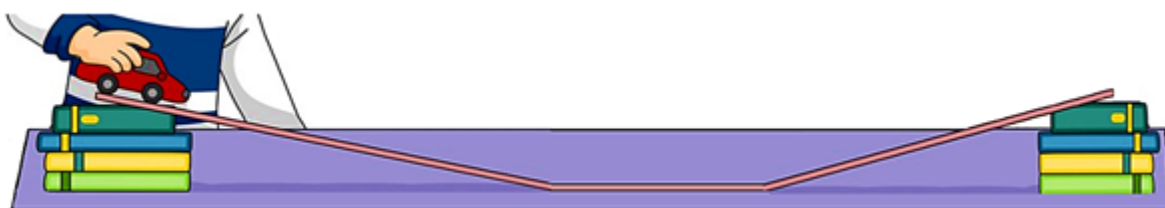


Anexo 3. Situación Problema 1

El objetivo de esta situación problema es desarrollar el potencial investigador en los estudiantes, planteando estrategias y argumentos durante su análisis.

Desarrolle la siguiente experiencia comunicando en un diario el proceso que realiza, utilice los elementos que considere necesarios para observar y medir, tales como grabaciones de vídeo para visualizar detalladamente el movimiento.

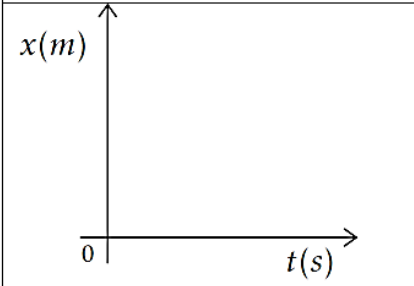
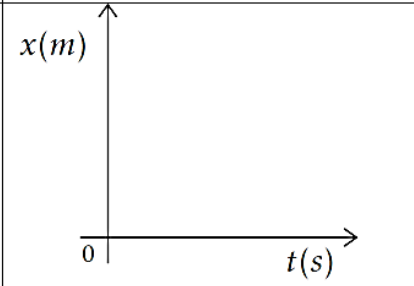
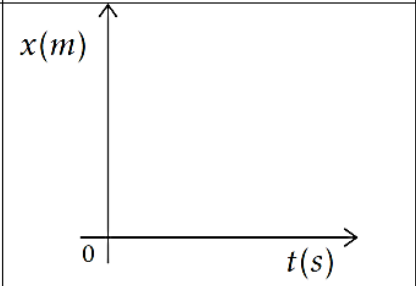
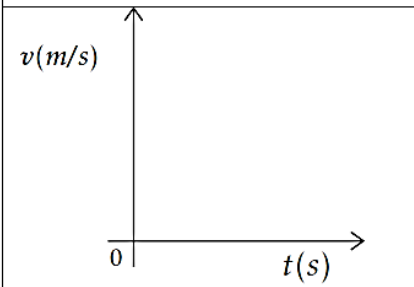
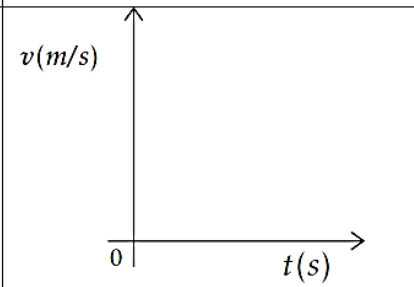
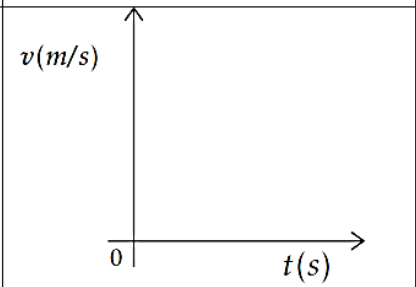
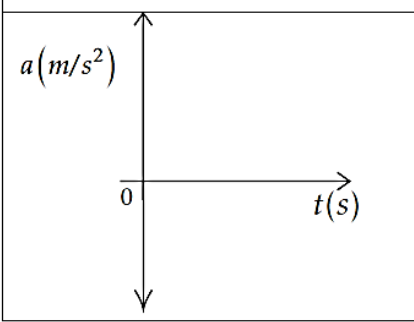
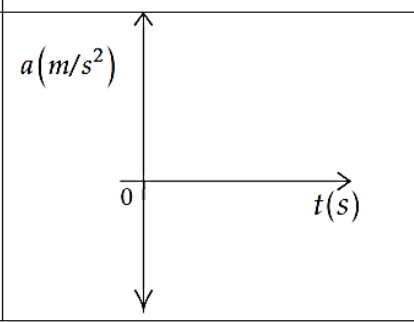
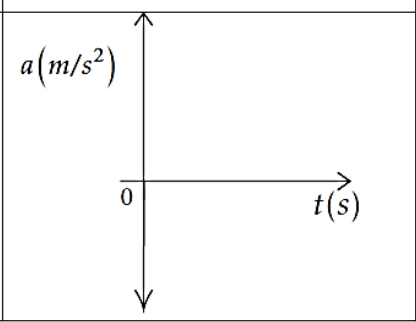
Disponer de un módulo como se muestra en la figura y estudiar el movimiento presentado al soltar un carro de juguete, teniendo en cuenta las variables en cada trayecto.



Fuente: Adaptado del banco de imágenes: <https://es.123rf.com>

- Describa lo observado durante el movimiento por los tres trayectos y responda: ¿Cuáles son las magnitudes presentes en el movimiento? ¿Qué mediciones se pueden realizar y con qué instrumentos?
- Registre los datos necesarios y represente gráficamente el recorrido de cada trayecto, teniendo en cuenta las magnitudes presentes.
- Escriba las ecuaciones correspondientes para cada gráfica realizada y describa el comportamiento de cada una.

Represente las gráficas del movimiento rectilíneo con su respectiva ecuación y elabore conclusiones.

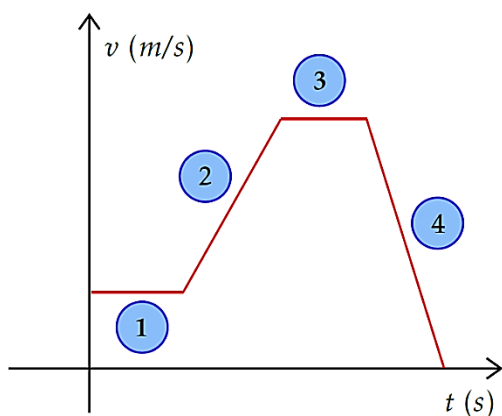
M.R.U.	M.R.U.A.	M.R.U.D.
		
		
		

Anexo 4. Situación Problema 2

El objetivo de esta actividad es identificar el manejo que tienen los estudiantes en el tratamiento y conversión de los registros de representación semiótica del movimiento rectilíneo.

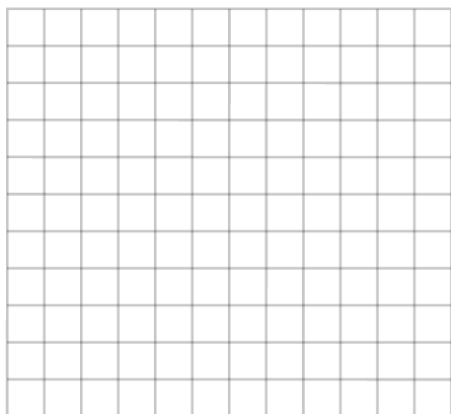
Para el desarrollo de las siguientes actividades dispone de un tiempo de 100 minutos, aplique los conceptos trabajados de movimiento rectilíneo, argumentando detalladamente cada respuesta.

1. Describa el comportamiento observado en la gráfica, para un móvil que realiza un movimiento rectilíneo, luego represéntelo en una gráfica de distancia con respecto al tiempo.

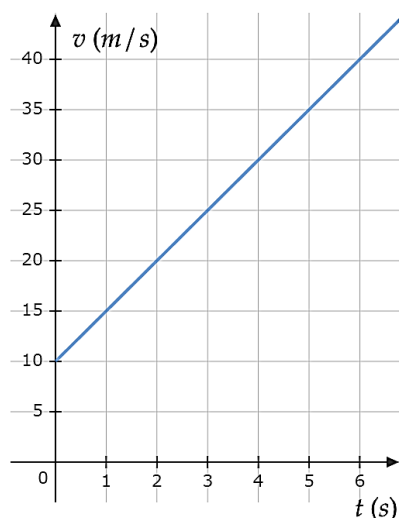


2. Un automóvil se desplaza con una velocidad constante de 5 m/s describiendo una trayectoria rectilínea. Si se va a analizar su recorrido partiendo desde una distancia de 30 m .

- a) Realice la gráfica $x(m)$ Vs $t(s)$.
- b) Determine la ecuación de posición para cualquier instante t .
- c) Determine la distancia que recorrerá en 20 s .



3. Dada la siguiente gráfica, resuelva:



a) Plantee una situación que ejemplifique lo observado:

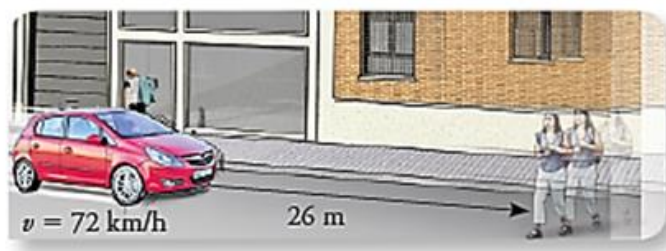
b) Determine la aceleración.

c) Determine la ecuación de velocidad.

d) ¿Qué velocidad tiene después de 10 s?

e) Realice la gráfica $x(m)$ Vs $t(s)$.

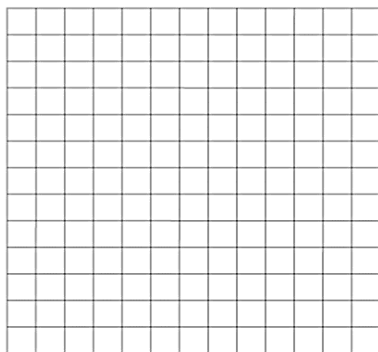
4. Un automóvil se desplaza con rapidez de 72 km/h . Cuando el conductor ve a una persona al frente, tarda $0,75 \text{ s}$ en reaccionar, acciona los frenos y se detiene 4 s después. Si la persona se encontraba a 26 m del automóvil cuando el conductor la vio, es correcto afirmar que



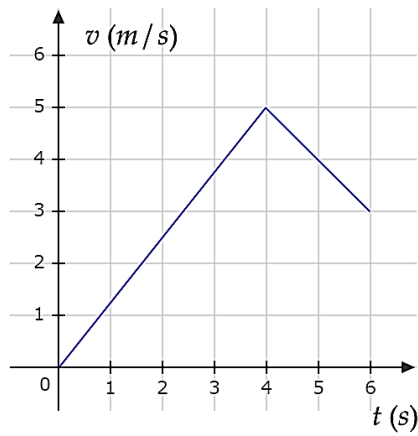
Fuente: Tomado de Castaño et. al. (2016)

- A. El automóvil se detiene antes y queda a cierta distancia de la persona.
- B. El vehículo no alcanza a frenar por completo y atropella a la persona.
- C. El automóvil frena exactamente a 26 m a partir del punto donde se percata de la persona en la vía.
- D. El automóvil debió frenar 2 s antes para no atropellar a la persona.

Argumenta tu respuesta de manera gráfica y analítica.



5. La siguiente gráfica muestra el movimiento de un vehículo, donde se representó la velocidad en función del tiempo. ¿Cuál es la aceleración en cada trayecto? ¿Cuál fue el desplazamiento total del vehículo?



Elaborado por: Didson Harvey Sánchez Monroy, elementos tomados de Castaño et al. (2016)

Anexo 5. Situación Problema 3

El objetivo de esta situación problema es analizar las actividades de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas del movimiento rectilíneo en un entorno real.

Realice las siguientes experiencias describiendo detalladamente el proceso realizado, utilice los recursos que considere pertinentes para el análisis detallado de cada situación.

1. Deje caer una esfera de plastilina hasta un vaso con agua y represente gráficamente las variables observadas en la caída, midiendo los tiempos necesarios, y calculando las respectivas velocidades.

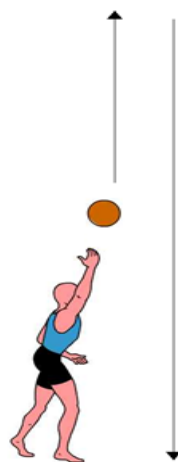
Apoye el argumento del análisis con el siguiente simulador:
<http://objetos.unam.mx/fisica/caidaLibre/index.html>



Fuente: Tomado de Castaño et. al. (2016)

2. Arroje un objeto de manera vertical hacia arriba, y mida el tiempo que se demora en alcanzar su altura máxima. Con ese dato, realice un estudio gráfico y analítico del movimiento realizado describiendo las variables pertinentes.

Compare los resultados obtenidos con el siguiente simulador y escriba las conclusiones obtenidas:
https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_es.html



Fuente: Adaptado de: <http://www.tafadycursos.com>

Anexo 6. Autorización

Tunja, 02 septiembre de 2020

Hermana
María Helena Gómez Reyes
Rectora
Colegio de la Presentación de Tunja

Cordial saludo,

Por medio de la presente me permito solicitar permiso para desarrollar el proyecto de investigación titulado **“Representaciones semióticas en la enseñanza del movimiento rectilíneo”** cuyo objetivo principal es **analizar las actividades cognitivas realizadas por los estudiantes para posibilitar una mejor comprensión y desarrollo del aprendizaje de las representaciones semióticas en la solución de situaciones propias del movimiento rectilíneo**. Este proyecto es realizado como trabajo de grado de la Maestría en educación Matemática de la UPTC, estará bajo la dirección del profesor (PhD) Pedro Nel Maluendas Pardo y se desarrollará en el curso décimo 2, del Colegio de la Presentación de Tunja.

Gracias por la atención prestada.

Atentamente,
DIDSON HARVEY SÁNCHEZ MONROY
Estudiante de Maestría en Educación Matemática
UPTC, Tunja

VoBo.
PhD. PEDRO NEL MALUENDAS PARDO
Docente Titular
Maestría en Educación Matemática

Anexo 7. Asentimiento Informado

Carta de Intención para participar en la investigación que se adelantará durante el año 2020 en el grado décimo-2 del Colegio de la Presentación de Tunja

Queridos(as) estudiantes,

Esta carta tiene como propósito contextualizar nuestra intención investigativa dentro de las actividades que se desarrollan al interior del grado décimo-2 del Colegio de la Presentación de Tunja en el área de física, esta investigación tiene como objetivo principal **analizar las actividades cognitivas realizadas por los estudiantes para posibilitar una mejor comprensión y desarrollo del aprendizaje de las representaciones semióticas en la solución de situaciones propias del movimiento rectilíneo**. Por lo anterior se considera de gran importancia solicitar su colaboración para alcanzar esta intención.

En esta investigación se tiene previsto hacer uso de las siguientes fuentes de información: entrevistas semiestructuradas, y grabaciones de audio y vídeo en las aplicaciones de las actividades. El proceso de análisis de estas fuentes de información comprende: transcripción y edición de lo discutido y analizado, aprobación y autorización del participante involucrado para utilizar lo dicho como objeto de investigación y publicación. Para lo anterior no se identifica al participante, usando un seudónimo, además no afectará la nota de la materia.

Si ustedes consideran que bajo las especificaciones señaladas se debe hacer alguna modificación o delimitación más específica, estaremos atentos a recibir las sugerencias. Si está de acuerdo y es su deseo hacer parte de esta investigación, entonces se deberá hacer constar que fue informado mediante esta carta de presentación y, además, deberá autorizar que los análisis de la información obtenida sean publicados. La participación en esta investigación es absolutamente voluntaria y el manejo de la información recolectada será totalmente confidencial.

Agradecemos de antemano su colaboración,

PhD. Pedro Nel Maluendas Pardo

Didson Harvey Sánchez Monroy

(Investigadores)

Firma en constancia de ser enterado:

Lugar y fecha: _____

Anexo 8. Autorización Acudientes**AUTORIZACIÓN**

Yo, _____ en calidad de acudiente de _____ del grado décimo 2 del Colegio de la Presentación de Tunja, autorizo a los investigadores, PhD Pedro Nel Maluendas Pardo y Didson Harvey Sánchez Monroy, estudiante de Maestría en Educación Matemática, para publicar y divulgar por medios electrónicos o impresos, textos sobre actividades realizadas en el proceso de investigación, encaminada a analizar las actividades cognitivas realizadas por los estudiantes para posibilitar una mejor comprensión y desarrollo del aprendizaje de las representaciones semióticas en la solución de situaciones propias del movimiento rectilíneo. Este proceso será objeto de investigación en el año 2020.

Tunja, ____ de _____ del 2020

Datos del acudiente
