Universidad Tecnológica de Pereira

Trabajo de grado

ESTUDIO SEMIANALITICO-NUMÉRICO DEL MODELO DE LANE-EMDEN PARA DIFERENTES VALORES POLÍTROPOS

Autor: Gustavo Adolfo Carvajal

Director de trabajo de grado: Dr Pedro Pablo Cárdenas Alzate

Trabajo presentado como requisito para optar

al título de LICENCIADO EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

bajo la supervisión del

Grupo de Investigación en Ecuaciones Diferenciales no Lineales GEDNOL

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias básicas

Universidad Tecnológica de Pereira

27 de noviembre de 2019

Agradecimientos

Le doy gracias a mis padres por el invaluable y permanente apoyo, a mi hijo por darme ánimos en los momentos más difíciles, ellos fueron el motor que me mantuvo activo en el difícil camino emprendido hasta ahora.

A mi excelente maestro, el Doctor Pedro Pablo Cárdenas Alzate por gran orientación, su paciencia y dedicación que fueron fundamentales para el desarrollo de este trabajo y su satisfactoria culminación, y por motivarme a emprender este enriquecedor proyecto.

A cada uno de los docentes que aportaron su conocimiento y talento a mi formación, en especial al Dr Pedro Pablo Cárdenas y al Msc Ricardo López Varona por motivarme a leer e interpretar textos y artículos científicos, al Dr José Rodrigo Gonzales por su asesoría académica y la Msc Edwin Andrés Quintero por motivarme a emprender proyectos de investigación.

Gustavo Adolfo Carvajal Betancourt

Índice general

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN Y GENERALIDADES

1.1 Resumen

Muchos fenómenos de la astrofísica pueden describirse mediante el modelo de Lane-Emden, el cual consiste en una ecuación diferencial no lineal que lleva el nombre de los astrofísicos Jonathan Homer Lane y Robert Emden. Las soluciones del modelo de Lane-Emden describen cómo varían la presión y la densidad con el radio, dichas soluciones se conocen como polítropos de índice n. Existen soluciones analíticas para los valores polítropos correspondientes a *n=0,1 y 5* ([21])

Con el fin de hallar soluciones aproximadas al modelo de Lane-Emden se han utilizado un par de técnicas conocidas como el Método de Transformación Diferencial o DTM por su sigla en inglés (Differential Transformation Method) y el Método de Descomposición de Adomian o ADM por su sigla en inglés (Adomian Decomposition Method).

El método de la transformación diferencial y el método de descomposición de Adomian, se conocen como métodos semi-analíticos-numéricos. En este trabajo mostraremos la descripción de cada uno de ellos y posteriormente solucionaremos las ecuaciones de Lane-Emden para los valores polítropos n=1,2,3,4, y 5, y efectuaremos la comparación entre las soluciones analíticas y semi-analíticas.

1.2 Introducción

Las ecuaciones diferenciales permiten modelar muchos fenómenos de la naturaleza, siendo muestra de ello, la gran cantidad de ecuaciones de este tipo que se encuentran en la física. La solución de cierto tipo de ecuaciones diferenciales no lineales requiere de la aplicación de métodos semi-analíticos-numéricos tales como el *método de transformación diferencial* y el *método de descomposición de Adomian.*

El Método de Transformación Diferencial, es un método semi-analítico-numérico que permite hallar soluciones en serie de potencias, el cual consiste en convertir una ecuación diferencial no lineal de dominio real en una ecuación más simple y de dominio natural.

La transformación diferencial se efectúa empleando una serie de teoremas que se aplican dependiendo de cada uno de los términos de la ecuación diferencial no lineal a solucionar. El DTM permite hallar una serie de Taylor que represente una solución aproximada de la ecuación.

El Método de Descomposición de Adomian, es también un método semi-analítico-numérico mediante el cual se convierte una ecuación diferencial no lineal de dominio real, en otra de dominio natural que sea más simple de solucionar. Al aplicar este método se emplea la definición y una serie de teoremas. Este método se centra en los polinomios de Adomian y su respectiva solución y también permite llegar a una serie infinita que representa de manera aproximada, la solución de la ecuación.

1.3 Objetivos

1.3.1 General

Aproximar la solución de la ecuación de Lane-Emden para los valores polítropos correspondientes a n=1,2,3,4 y 5, por el método de transformación diferencial y el método de descomposición de Adomian.

1.3.2 Específicos

- Describir el método de transformación diferencial para ecuaciones diferenciales no lineales.
- Describir el método de descomposición de Adomian para ecuaciones diferenciales no lineales
- Aplicar los métodos de transformación diferencial y descomposición de Adomian a la solución de la ecuación de Lane-Emden para diferentes valores polítropos.
- Comparar las aproximaciones encontradas con el método de transformación diferencial y las obtenidas por otros métodos.

1.4 Justificación

Los métodos de transformación diferencial y de descomposición de Adomian resultan ser bastante efectivos al momento de aproximar soluciones a cierto tipo de ecuaciones diferenciales, entre ellas la ecuación de Lane-Emden. Su gran efectividad y rapidez de convergencia los convierte en una excelente herramienta.

Su efectividad hace importante continuar con el estudio de estos métodos y este trabajo busca estimularlo ya que se describen ambos métodos y se presenta la solución en detalle las soluciones de la ecuación de Lane-Emden para diferentes valores politropos.

1.4.1 Planteamiento del problema

El desarrollo de métodos semi-analítico-numéricos ha estado influenciado por la necesidad de encontrar la forma facilitar los procesos requeridos para la solución de ecuaciones diferenciales como la de Lane-Emden.

Este trabajo pretende hacer un aporte al presentar el desarrollo teórico-práctico de los métodos semi-analítico-numéricos conocidos como método de la transformación diferencial y método de descomposición de Adomian para la ecuación de Lane-Emden, mostrando la solución detallada de ecuaciones del tipo mencionado para diferentes valores politropos.

1.4.2 Estado del arte del Método de Transformación Diferencial (DTM)

En las dos últimas décadas se han realizado una serie de trabajos basados en el DTM, de los cuales algunos de los más recientes son los siguientes: Cárdenas et al ([5]) aplicaron el método para solucionar ecuaciones diferenciales con retardo aplicadas a modelos biológicos. Cárdenas P.P, ([6]) solucionó dos casos especiales de la ecuación de Lane-Emden mediante DTM. Abello et al ([1]) usaron DTM para solucionar la ecuación cúbica no lineal de Schrödinger. Benhammouda et al [4] aplicaron el DTM para dar solución a algunas ecuaciones no lineales con retardo variable. Cárdenas et al ([8]) usaron DTM para solucionar la ecuación equidimensional de Euler.

1.4.3 Estado del arte del Método de Descomposición de Adomian (ADM)

En las dos últimas décadas se han realizado una serie de trabajos con base en este método, de los cuales algunos de los más recientes son los siguientes: Cárdenas et al ([7]) aplicaron ADM en la descripción de algunos modelos biomatemáticos. Mubarak et al ([11]) usaron la técnica de Adomian para resolver la ecuaciones de Emden-Fowler de varios órdenes. Osorio G ([12]) , la aplicó en la aproximación de soluciones a ecuaciones diferenciales con retardo.

CAPÍTULO 2

DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DEL EQUILIBRIO HIDROSTÁTICO

Desde los orígenes de la civilización, las estrellas han sido muy importantes para la humanidad y fundamentales para la navegación, la agricultura y la religión. En la actualidad aún siguen asombrando a gran parte de la humanidad.

La astronomía define una estrella como una esfera de gas muy caliente que tiene la capacidad de producir energía en su interior, transportarla a su superficie y enviarla al espacio en forma de radiación.

A pesar de que el radio, la luminosidad y la temperatura de una estrella permanecen aparentemente constantes, estas están cambiando de manera permanente. Durante la mayor parte de su existencia los cambios ocurren muy lentamente, a través de miles de millones de años, esto permite asumir la estructura de la estrella y la evolución de la misma como estática.

La estructura de una estrella, se puede describir mediante un conjunto de cinco ecuaciones diferenciales que son: ecuación de equilibrio hidrostático, ecuación del transporte de energía, ecuación de la conservación de la masa, ecuación de la conservación de la energía y ecuación del equilibrio térmico. [20]

En este trabajo se consideró únicamente la ecuación del equilibrio hidrostático.

Para la deducción de esta ecuación, se tuvieron en cuenta las siguientes suposiciones[20]:

- La estrella es esférica.
- La estrella se encuentra en equilibrio hidrostático, es decir, existe un equilibrio entre la compresión causada por la gravedad y la presión causada por la energía térmica producto de fusiones nucleares al interior de la estrella.
- La estrella no se encuentra en rotación.
- El gas que constituye la estrella es politrópico.

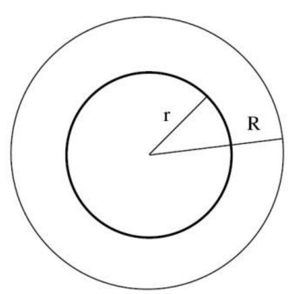

Figura 1. Esfera de gas

La fuerza de compresión que ejerce la gravedad sobre el gas de la estrella, está dada por:

$$F(G) = \frac{m(r)G}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \rho(r) \tag{1.1}$$

donde $m(r)$ es la masa interior de la estrella, $\rho(r)$ es la densidad al interior de la estrella, G es la constante de la gravitación universal y r el radio interior de la estrella.

La masa interior $m(r)$, está dada por:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi (r')^2 dr' \tag{1.2}$$

La fuerza de compresión que soporta la estrella debido a la gravedad, se expresa como:

$$F_c = 4\pi r^2 dP \tag{1.3}$$

donde P es la presión que soporta la estrella.

Igualando las ecuaciones (1.1) y (1.3) obtenemos:

$$\frac{m(r)G}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \rho(r) dr = 4\pi r^2 dP \tag{1.4}$$

$$\frac{m(r)G}{r^2} \rho(r) dr = dP \tag{1.5}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{m(r)G}{r^2} \rho(r) \tag{1.6}$$

El signo negativo esta ecuación indica que la presión disminuye cuando aumenta el radio.

La ecuación (1.6) se conoce como la ecuación del equilibrio hidrostático.

Debido a que el gas que constituye la estrella es politrópico, se hace conveniente eliminar la masa de la ecuación del equilibrio hidrostático, para ello debemos considerar lo siguiente:

La ecuación de la continuidad de masa es:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \tag{1.7}$$

La masa puede expresarse como la masa como:

$$m(r) = -\frac{r^2}{\rho G} \frac{dP}{dr} \tag{1.8}$$

La ecuación de un polítropo es:

$$P = k\rho^{\gamma} \tag{1.9}$$

Donde $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$ siendo n el índice politrópico.

Sustituyendo (1.8) en (1.7) se obtiene:

$$\frac{d}{dr}\left(-\frac{r^2}{\rho G}\frac{dP}{dr}\right) = 4\pi r^2 \rho \tag{1.10}$$

$$\frac{1}{G}\frac{d}{dr}\left(-\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = 4\pi r^2 \rho \tag{1.11}$$

Multiplicamos por $-G$ en ambos lados:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G r^2 \rho \tag{1.12}$$

Multiplicamos por $\frac{1}{r^2}$ en ambos lados:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G \rho \tag{1.13}$$

Sustituyendo (1.9) se tiene que:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{\rho}\frac{d}{dr}(k\rho^{\gamma})\right] = -4\pi G \rho \tag{1.14}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{\rho}k\gamma\rho^{\gamma-1}\frac{d\rho}{dr}\right] = -4\pi G \rho \tag{1.15}$$

Sustituyendo γ en (1.15) se tiene que:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{\rho}k\gamma\rho^{\gamma-1}\frac{d\rho}{dr}\right] = -4\pi G \rho \tag{1.16}$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{n} \tag{1.17}$$

De (1.17)se obtiene:

$$\gamma - 1 = \frac{1}{n} \tag{1.18}$$

Se sustituye en (1.18)en (1.16):

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{\rho}k\left(\frac{n+1}{n}\right)\rho^{\frac{1}{n}}\frac{d\rho}{dr}\right] = -4\pi G \rho \tag{1.19}$$

Se efectúa la sustitución $\rho = \lambda y^n$ en(1.19) donde λ es un factor de escala:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{\lambda y^n}k\left(\frac{n+1}{n}\right)(\lambda y^n)^{\frac{1}{n}}\frac{d}{dr}(\lambda y^n)\right] = -4\pi G(\lambda y^n)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{\cancel{\lambda} y^n}k\left(\frac{n+1}{\cancel{n}}\right)\left(\lambda^{\frac{1}{n}}\right)(\theta)\left(\cancel{\lambda}\cancel{n}\theta^{n-1}\frac{dy}{dr}\right)\right] = -4\pi G(\lambda y^n)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{\cancel{y^n}}k(n+1)\left(\lambda^{\frac{1}{n}}\right)\left(\cancel{y}^n\frac{dy}{dr}\right)\right] = -4\pi G(\lambda y^n)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2 k(n+1)\left(\lambda^{\frac{1}{n}}\right)\left(\frac{dy}{dr}\right)\right] = -4\pi G(\lambda y^n)$$

$$\frac{1}{r^2}\left[(n+1)k\lambda^{\frac{1}{n}}\right]\frac{d}{dr}\left[r^2\left(\frac{dy}{dr}\right)\right] = -4\pi G\lambda y^n \tag{1.20}$$

Se divide (1.20)por $4\pi G\lambda$:

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{(n+1)}{4\pi G}k\lambda^{\frac{1-n}{n}}\right]\frac{d}{dr}\left[r^2\left(\frac{dy}{dr}\right)\right] = -y^n \tag{1.21}$$

Se puede simplificar (1.21) haciendo el cambio de variable:

$$\alpha = \left[\frac{(n+1)}{4\pi G}k\lambda^{\frac{1-n}{n}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Sustituyendo α , en la ecuación (1.21) obtenemos:

$$\alpha^2\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{d}{dr}\left[r^2\left(\frac{dy}{dr}\right)\right] = -y^n \tag{1.22}$$

Se efectúa la sustitución $r = \alpha x$, donde x es un radio adimensional

Elevando al cuadrado en ambos lados de la sustitución propuesta, se tiene que:

$$r^2 = \alpha^2 x^2 \tag{1.23}$$

Se divide (1.23) por x^2 en ambos lados:

$$\alpha^2 = \frac{r^2}{x^2} \tag{1.24}$$

Multiplicando a (1.24)por $\frac{1}{r^2}$ se obtiene:

$$\frac{\alpha^2}{r^2} = \frac{1}{x^2} \tag{1.25}$$

Comparando ambos miembros de la anterior igualdad, se tiene que:

$$r^2 = x^2 \tag{1.26}$$

Sustituyendo (1.24) y (1.26) en (1.22) se obtenemos:

$$\frac{\cancel{r^2}}{x^2}\left(\frac{1}{\cancel{r^2}}\right)\frac{d}{dx}\left[x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = -y^n \tag{1.27}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) + y^n} = 0 \tag{1.28}$$

La ecuación (1.28) es conocida como la ecuación de Lane-Emden de índice n, donde x es un radio adimensional, y es una variable relacionada con la densidad y n es el índice politrópico. La forma de esta ecuación no es única.

La ecuación (1.28) puede expresarse como:

$$\boldsymbol{x^{-2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)+y^n}=0 \tag{1.29}$$

Derivamos con respecto a x la ecuación (1.29)

$$x^{-2}\left(2x\frac{dy}{dx}+x^2\frac{d^2y}{dx^2}\right)+y^n=0 \tag{1.30}$$

Aplicando propiedad distributiva a la ecuación (1.30) obtenemos:

$$2x^{-1}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}+y^n=0 \tag{1.31}$$

Ordenando términos en la ecuación (1.31) obtenemos la denominada *ecuación de Lane-Emden*

$$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+y^n=0} \tag{1.32}$$

Para solucionar la ecuación de Lane-Emden se requieren dos condiciones iniciales, que son:

$$y(0)=1 \;\; y \;\; y'(0)=0$$

Las soluciones de la ecuación de Lane-Emden describen la variación de la presión y de la densidad con el radio, y se conocen como politropos de índice n. Esta ecuación solo presenta soluciones analíticas para valores de $n=0, n=1, n=5$ [21]

En este trabajo presentamos la solución de la ecuación de Lane-Emden para valores de $n=0$ hasta $n=5$.

CAPÍTULO 3

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DE TRANSFORMACIÓN DIFERENCIAL (DTM)

El método de la transformación diferencial se define como:

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} \tag{3.1}$$

donde $y(x)$ es la función original y $Y(k)$ es la función transformada.

La transformada inversa se define como:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k \tag{3.2}$$

En aplicaciones reales la funcion $y(x)$ se expresa como una serie finita, por lo tanto la ecuación (3.2) se escribe como:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} Y(k)x^k \tag{3.3}$$

La expansión en serie de Taylor de la función $y(x)$ alrededor del punto $x = 0$ esta dada por:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=0} \tag{3.4}$$

La transformación diferencial cumple con propiedades de la linealidad. Los siguientes teoremas muestran tanto esta propiedad, como las correspondientes al producto y derivación.

Teorema 1 Si $f(x) = g(x) \pm h(x)$, entonces $F(k) = G(k) \pm H(k)$.

Teorema 2 Si$f(x) = cg(x)$, entonces $F(k) = cG(k),\ c \in \mathbb{R}$.

Teorema 3 Si $f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}$, entonces $F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} G(k+n)$.

Teorema 4 Si$f(x) = g(x)h(x)$, entonces $F(k) = \sum_{r=0}^{k} G(r)H(k-r)$.

Teorema 5 Si $y(x) = x^n$, entonces $Y(k) = \delta(k-n)$, donde $\delta(k-n) \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$

Teorema 6 (Cárdenas) Si $y(x) = x^m f(x)$, con $m \in N$, entonces $Y(k) = \begin{cases} 0, & k < m \\ Y(k-m), & k \geq n \end{cases}$

Teorema 7 Si $f(x) = g(x)\frac{d^2 h(x)}{dx^2}$, entonces:

$$F(k)=\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)\,(k-r+2)G(r)H(k-r+2)$$

Teorema 8 Si $f(x)=ax^m, a\in\ \mathbb{R}$, entonces $F(k)=a\delta(k-n)=\begin{cases}a, & k=m\\ 0, & k\neq m\end{cases}$

Teorema 9. Si $f(x)=u(x)v(x)w(x)\dots p(x)$, entonces :

$Y(k)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{k-r}\dots\sum_{m=0}^{k-r-s-m}U(r)V(s)\,W(m)\dots P(k-r-s-\cdots)$

([5], [8])

CAPÍTULO 4

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LANE-EMDEN MEDIATE DTM

El problema de valor inicial a solucionar es $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+y^n=0,$ sujeto a $y(0)=1\ \ y\ \ y'(0)=0$

Expresamos esta ecuación como:

$$y''+\frac{2}{x}y'+y^n=0 \tag{4.1}$$

Multiplicando por x a (3.1), obtenemos:

$$xy''+2y'+xy^n=0 \tag{4.2}$$

De las condiciones iniciales podemos obtener:

$$Y(0)=0\ \ y\ \ Y(1)=1$$

4.1 Solución de la ecuación de Lane-Emden para n=0

Para $n=0$, la ecuación (4.2) toma la forma;

$$xy''+2y'+x=0 \tag{4.3}$$

La solución analítica de la ecuación (4.3) es:

$$\boldsymbol{y(x)=1+\frac{1}{x}-\frac{x^2}{6}}$$

Hallamos la solución de la ecuación (4.3)mediante el la aplicación del método de la transformación diferencial.

Aplicando los teoremas 3,5 y 7 tenemos que la transformación diferencial de la ecuación $(4.3)\ es$:

$$\sum_{r=0}^{k}[\delta(r-1)(k+2-r)Y(k+2-r)]+2(k+1)Y(k+1)+\delta(k-1)=0 \tag{4.4}$$

Asignamos los valores $k=1{,}2{,}3{,}4\ y\ 5.$

Efectuamos la sustitución k=1 en la ecuación(4.4):

$$\sum_{r=0}^{1}[\delta(r-1)(3-r)Y(3-r)]+2(2)Y(2)+\delta(1-1)=0 \tag{4.5}$$

Solucionamos la sumatoria de la ecuación (4.5):

$$\delta(0-1)(3)Y(3)+\delta(1-1)(2)Y(2)+2(2)Y(2)+\delta(1-1)=0 \tag{4.6}$$

Aplicamos el teorema 5 en la ecuación (4.6):

$$2Y(2)+4Y(2)+1=0$$

$$6Y(2)+1=0$$

$$\boldsymbol{Y(2)=-\frac{1}{6}}$$

Efectuamos la sustitución k=2 en la ecuación (4.4):

$$\sum_{r=0}^{2}[\delta(r-1)(4-r)Y(4-r)]+2(3)Y(3)+\delta(2-1)=0 \tag{4.7}$$

Solucionamos la sumatoria de la ecuación (4.7):

$$\delta(0-1)(4)Y(4)+\delta(1-1)(3)Y(3)+\delta(2-1)(2)Y(2)+2(3)Y(3)+\delta(2-1)=0 \tag{4.8}$$

Aplicamos el teorema 5 a la ecuación (4.8):

$$3Y(3)+6Y(3)=0$$

$$9Y(3)=0$$

$$\boldsymbol{Y(3)=0}$$

Efectuamos la sustitución k=3 en la ecuación (4.4):

$$\sum_{r=0}^{3}[\delta(r-1)(5-r)Y(5-r)]+2(4)Y(4)+\delta(3-1)=0 \tag{4.9}$$

Solucionamos la sumatoria de la ecuación (4.9):

$$\delta(0-1)(5)Y(5)+\delta(1-1)(4)Y(4)+\delta(2-1)(3)Y(3)+\delta(3-1)(2)Y(2)+8Y(4)$$

$$+\delta(3-1)=0 \tag{4.10}$$

Aplicamos el teorema 5 en la ecuación (4.10):

$$4Y(4)+8Y(4)=0$$

$$12Y(4)=0$$

$$\boldsymbol{Y(4)=0}$$

Efectuamos la sustitución k=4 en la ecuación (4.4):

$$\sum_{r=0}^{4}[\delta(r-1)(6-r)Y(6-r)]+2(5)Y(5)+\delta(4-1)=0 \qquad (4.11)$$

Solucionamos la sumatoria de la ecuación (4.11)

$$\delta(0-1)(6)Y(6)+\delta(1-1)(5)Y(5)+\delta(2-1)(4)Y(4)+\delta(3-1)(3)Y(3)+\delta(4-1)(2)Y(2)$$

$$+10Y(5)+\delta(4-1)=0 \qquad (4.12)$$

Aplicamos el teorema 5 en la ecuación (4.12)

$$5Y(5)+10Y(5)=0$$

$$15Y(5)=0$$

$$\boldsymbol{Y(5)=0}$$

Aplicando la ecuación (3.4) y los resultados obtenidos, tenemos que la solución de la ecuación (4.3) es:

$$\boldsymbol{y(x)=1-\frac{x^2}{6}}$$

La figura 2 muestra gráficamente la diferencia entre la solución analítica de la ecuación (4.3) y la solución obtenida aplicando el método de la transformación diferencial (DTM).

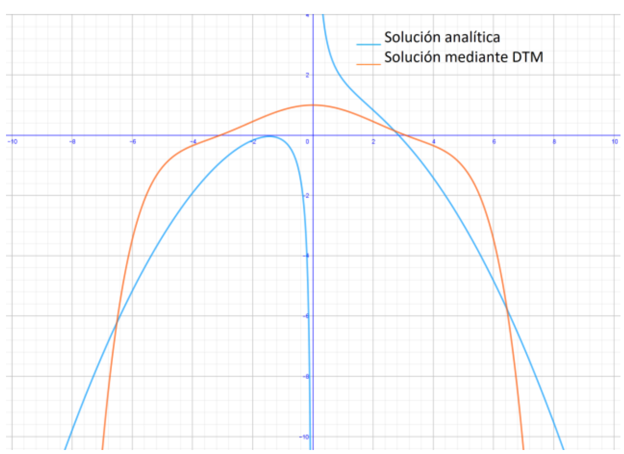

Figura 1. Solución analítica vs DTM para n=0

4.2 Solución de la ecuación de Lane-Emden para n=1

Para $n = 1$, la ecuación (4.2) toma la forma

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \tag{4.13}$$

La solución analítica de la ecuación $(3.2.1)$ es:

$$\boldsymbol{y(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}}$$

Aplicamos los teoremas 3, 5 y 6(cárdenas) tenemos que la transformación diferencial de la ecuación (4.13) es:

$$k(k+1)Y(k+1) + 2(k+1)Y(k+1) + F(k) = 0 \tag{4.14}$$

Asignamos los valores $k = 1,2,3,4\ y\ 5$.

Efectuamos la sustitución k=1 en la (4.14) y obtenemos:

$$1(2)Y(2) + 2(2)Y(2) + F(1) = 0 \tag{4.15}$$

Aplicando el teorema 6(cárdenas) en la ecuación (4.15) obtenemos:

$$2Y(2) + 4Y(2) + Y(0) = 0 \tag{4.16}$$

Aplicando condiciones iniciales en la ecuación (4.16) tenemos que:

$$2Y(2) + 4Y(2) + 1 = 0$$

$$6Y(2) + 1 = 0$$

$$6Y(2) = -1$$

$$\boldsymbol{Y(2) = -\frac{1}{6}}$$

Efectuamos la sustitución k=2 en la (4.14) y obtenemos:

$$2(3)Y(3) + 2(3)Y(3) + F(2) = 0 \tag{4.17}$$

Aplicando el teorema 6(cárdenas) en la ecuación (4.17) obtenemos:

$$6Y(3) + 6Y(3) + Y(1) = 0 \tag{4.18}$$

Aplicando condiciones iniciales en la ecuación (4.18) obtenemos:

$$12Y(3) = 0$$

$$\boldsymbol{Y(3) = 0}$$

Efectuamos la sustitución k=3 en la (4.14) y obtenemos:

$$3(4)Y(4) + 2(4)Y(4) + F(3) = 0 \tag{4.19}$$

Aplicando el teorema 6(cárdenas) en la ecuación (4.19) obtenemos:

$$12Y(4) + 8Y(4) + Y(2) = 0 \tag{4.20}$$

Sustituimos $Y(2) = -\frac{1}{6}$ en la ecuación (4.20):

$$12Y(4) + 8Y(4) - \frac{1}{6} = 0$$

$$20Y(4) = \frac{1}{6}$$

$$\boldsymbol{Y(4) = \frac{1}{120}}$$

Efectuamos la sustitución k=4 en la (4.14) y obtenemos:

$$4(5)Y(5) + 2(5)Y(5) + F(4) = 0 \tag{4.21}$$

Aplicando el teorema 6(Cárdenas) en la ecuación (4.21) obtenemos:

$$20Y(5) + 10Y(5) + Y(3) = 0 \tag{4.22}$$

Sustituimos $Y(3) = 0$ en la ecuación (4.22):

$$20Y(5) + 10Y(5) = 0$$

$$30Y(5) = 0$$

$$\boldsymbol{Y(5) = 0}$$

Efectuamos la sustitución k=5 en la (4.14) y obtenemos:

$$5(6)Y(6) + 2(6)Y(6) + F(5) = 0 \tag{4.23}$$

Aplicando el teorema 6(Cárdenas) en la ecuación (4.23) obtenemos:

$$30Y(6) + 12Y(6) + Y(4) = 0 \tag{4.24}$$

Sustituimos $\mathrm{Y}(4) = \frac{1}{120}$ en la ecuación (4.24)

$$42Y(6) + \frac{1}{120} = 0$$

$$\boldsymbol{Y(6) = -\frac{1}{5040}}$$

Aplicando la ecuación (3.4) y los resultados obtenidos, tenemos que la solución a la ecuación (4.13) es:

$$\boldsymbol{y(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + \cdots}$$

Esta solución tiene la forma:

$$\boldsymbol{y(x) = \frac{senx}{x}}$$

La figura 3 muestra gráficamente la diferencia entre la solución analítica de la ecuación (4.13) y la solución hallada aplicando el método de la transformación diferencial (DTM).

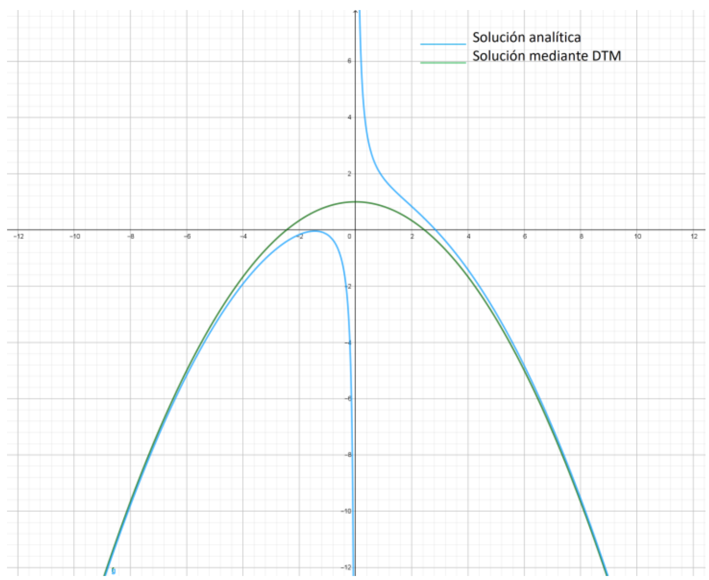

Figura 2. DTM vs solución analítica para n=1

4.3 Solución de la ecuación de Lane-Emden para n=2

Para $n = 2$, la ecuación (4.2) toma la forma:

$$xy'' + 2y' + xy^2 = 0 \tag{4.25}$$

La solución analítica de esta ecuación es:

$$\boldsymbol{y(x) = 1 - \frac{x^4}{20}}$$

Aplicando DTM, tenemos que la transformación diferencial de la ecuación (4.25) es:

$$\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)(k-r+2)\delta(r-1)Y(k-r+2)+2(k+1)Y(k+1)=0$$

$$+\sum_{s=0}^{k}\sum_{m=0}^{k-s}\delta(s-1)Y(m)\,Y(k-s-m)=0 \qquad (4.26)$$

Asignamos los valores $k=1,2,3,4\ y\ 5.$

Efectuamos la sustitución k=1 en la (4.26) y obtenemos:

$$\sum_{r=0}^{1}[(2-r)(3-r)\delta(r-1)Y(3-r)]+2(2)Y(2)$$

$$+\sum_{s=0}^{1}\left[\sum_{m=0}^{1-s}\delta(s-1)Y(m)Y(1-s-m)\right]=0 \qquad (4.27)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.27):

$$\sum_{r=0}^{1}[(2-r)(3-r)\delta(r-1)Y(3-r)]+4Y(2)+\sum_{m=0}^{1}[\delta(0-1)Y(m)Y(1-m)]$$

$$+\sum_{m=0}^{0}\delta(1-1)[Y(m)Y(-m)]=0 \qquad (4.28)$$

Aplicamos teorema 5 a la ecuación (4.28):

$$\sum_{r=0}^{1}[(2-r)(3-r)\delta(r-1)Y(3-r)]+4Y(2)+\sum_{m=0}^{0}[Y(m)Y(-m)]=0 \qquad (4.29)$$

Desarrollamos las sumas en la ecuación (4.29):

$$(2)(3)\delta(0-1)Y(3)+(1)(2)\delta(1-1)Y(2)+4Y(2)+Y(0)Y(0)=0 \qquad (4.30)$$

Aplicamos condiciones iniciales y teorema 5 en la ecuación (4.30):

$$2Y(2)+4Y(2)+1=0$$

$$\boldsymbol{Y(2)=-\frac{1}{6}}$$

Efectuamos la sustitución k=2 en la ecuación (4.26):

$$\sum_{r=0}^{2}[(3-r)(4-r)\delta(r-1)Y(4-r)]+2(3)Y(3)$$

$$+\sum_{s=0}^{2}\sum_{m=0}^{2-s}\delta(s-1)Y(m)Y(2-s-m)=0 \qquad (4.31)$$

Desarrollamos la suma interior en la ecuación (4.31):

$$\sum_{r=0}^{2}[(3-r)(4-r)\delta(r-1)Y(4-r)]+6Y(3)+\sum_{m=0}^{2}\delta(0-1)Y(m)Y(2-m)=0$$

$$+\sum_{m=0}^{1}\delta(1-1)Y(m)Y(1-m)+\sum_{m=0}^{0}\delta(2-1)Y(m)Y(-m)=0 \qquad (4.32)$$

Aplicamos teorema 5 a la ecuación (4.32):

$$\sum_{r=0}^{2}[(3-r)(4-r)\delta(r-1)Y(4-r)]+6Y(3)+\sum_{m=0}^{1}Y(m)Y(1-m)=0 \qquad (4.33)$$

Solucionamos las sumas en la ecuación (4.33):

$$(3)(4)\delta(0-1)Y(4)+(2)(3)\delta(1-1)Y(3)+(1)(2)\delta(2-1)Y(2)+6Y(3)+Y(0)Y(1)$$

$$+Y(1)Y(0)=0 \qquad (4.34)$$

Aplicamos condiciones iniciales y teorema 5 a la ecuación (4.34):

$$6Y(3)+6Y(3)=0$$

$$12Y(3)=0$$

$$\boldsymbol{Y(3)=0}$$

Efectuamos la sustitución k=3 en la ecuación (4.26):

$$\sum_{r=0}^{3}[(4-r)(5-r)\delta(r-1)Y(5-r)]+2(4)Y(4)$$

$$+\sum_{s=0}^{3}\left[\sum_{m=0}^{3-s}\delta(s-1)Y(m)Y(3-s-m)\right]=0 \qquad (4.35)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.35):

$$\sum_{r=0}^{3}[(4-r)(5-r)\delta(r-1)Y(5-r)]+8Y(4)$$

$$+\sum_{m=0}^{3}\delta(0-1)Y(m)Y(3-m)+\sum_{m=0}^{2}\delta(1-1)Y(m)Y(2-m)+\sum_{m=0}^{1}\delta(2-1)Y(m)Y(1-m)$$

$$+\sum_{m=0}^{0}\delta(3-1)Y(m)Y(-m)=0 \qquad (4.36)$$

Aplicamos teorema 5 a la ecuación (4.36):

$$\sum_{r=0}^{3}[(4-r)(5-r)\delta(r-1)Y(5-r)]+8Y(4)+\sum_{m=0}^{2}Y(m)Y(2-m)=0 \qquad (4.37)$$

Solucionamos las sumatorias en la ecuación (4.37):

$$(4)(5)\delta(0-1)Y(5)+(3)(4)\delta(1-1)Y(4)+(2)(3)\delta(2-1)Y(2)+(1)(2)\delta(3-1)Y(2)$$

$$+8Y(4)+8Y(4)+Y(0)Y(2)+Y(1)Y(1)+Y(2)Y(0)=0 \qquad (4.38)$$

Aplicamos teorema 5 y condiciones iniciales a la ecuación (3.3.14):

$$12Y(4)+8Y(4)+Y(2)+Y(2)=0 \qquad (4.39)$$

$$20Y(4)+2Y(2)=0 \qquad (4.40)$$

Efectuamos la sustitución $Y(2)=-\frac{1}{6}$ en la ecuación (4.40):

$$20Y(4)+2\left(-\frac{1}{6}\right)=0$$

$$20Y(4)=\frac{1}{3}$$

$$\boldsymbol{Y(4)=\frac{1}{60}}$$

Efectuamos la sustitución k=4 en la ecuación (4.26):

$$\sum_{r=0}^{4}[(5-r)(6-r)\delta(r-1)Y(6-r)]+2(5)Y(5)$$

$$+\sum_{s=0}^{4}\left[\sum_{m=0}^{4-s}\delta(s-1)Y(m)Y(4-s-m)\right]=0 \quad (4.41)$$

Desarrollamos la suma interior de la ecuación (4.41):

$$\sum_{r=0}^{4}[(5-r)(6-r)\delta(r-1)Y(6-r)]+10Y(5)+\sum_{m=0}^{4}\delta(0-1)Y(m)Y(4-m)$$

$$+\sum_{m=0}^{3}\delta(1-1)Y(m)Y(3-m)+\sum_{m=0}^{2}\delta(2-1)Y(m)Y(2-m)+\sum_{m=0}^{1}\delta(3-1)Y(m)Y(1-m)$$

$$+\sum_{m=0}^{0}\delta(4-1)Y(m)Y(-m)=0 \quad (4.42)$$

Aplicamos teorema 5 a la ecuación (4.43):

$$\sum_{r=0}^{4}[(5-r)(6-r)\delta(r-1)Y(6-r)]+10Y(5)+\sum_{m=0}^{3}Y(m)Y(3-m)=0 \quad (4.44)$$

Desarrollamos las sumas en la ecuación (4.44):

$$(5)(6)\delta(0-1)Y(6)+(4)(5)\delta(1-1)Y(5)+(3)(4)\delta(2-1)Y(4)+(2)(3)\delta(3-1)Y(3)$$

$$+(1)(2)\delta(2-1)Y(2)+Y(0)Y(3)+Y(1)Y(2)+Y(2)Y(1)+Y(3)Y(0)=0 \quad (4.45)$$

Aplicamos condiciones iniciales y teorema 5 a la ecuación (4.45):

$$20Y(5)+Y(3)+Y(3)=0 \quad (4.46)$$

Efectuamos la sustitución $Y(3)=0$ en la ecuación (4.46):

$$20Y(5)=0$$

$$\boldsymbol{Y(5)=0}$$

Efectuamos la sustitución k=5 en la ecuación (4.26)

$$\sum_{r=0}^{5}[(6-r)(7-r)\delta(r-1)Y(7-r)]+2(6)Y(6)$$

$$+\sum_{s=0}^{5}\left[\sum_{m=0}^{5-s}\delta(s-1)Y(m)Y(5-s-m)\right]=0 \quad (4.47)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.47):

$$\sum_{r=0}^{5}[(6-r)(7-r)\delta(r-1)Y(7-r)]+12Y(6)+\sum_{m=0}^{5}\delta(0-1)Y(m)Y(5-m)$$

$$\sum_{m=0}^{4}\delta(1-1)Y(m)Y(4-m)+\sum_{m=0}^{3}\delta(2-1)Y(m)Y(3-m)+\sum_{m=0}^{2}\delta(3-1)Y(m)Y(2-m)$$

$$+\sum_{m=0}^{1}\delta(4-1)Y(m)Y(1-m)+\sum_{m=0}^{0}\delta(5-1)Y(m)Y(0-m)=0 \qquad (4.48)$$

Aplicamos el teorema 5 en la ecuación (4.48):

$$\sum_{r=0}^{5}[(6-r)(7-r)\delta(r-1)Y(7-r)]+12Y(6)+\sum_{m=0}^{4}Y(m)Y(4-m)=0 \qquad (4.49)$$

Desarrollamos las sumas de la ecuación (4.49):

$$(6)(7)\delta(0-1)Y(7)+(5)(6)\delta(1-1)Y(6)+(4)(5)\delta(2-1)Y(5)$$

$$+(3)(4)\delta(3-1)Y(4)+(2)(3)\delta(4-1)Y(3)+(1)(2)\delta(5-1)Y(2)+12Y(6)$$

$$+Y(0)Y(4)+Y(1)Y(3)+Y(2)Y(2)+Y(3)Y(1)+Y(4)Y(0)=0 \qquad (4.50)$$

Aplicamos teorema 5 y condiciones iniciales a la ecuación (4.50):

$$30Y(6)+12Y(6)+Y(4)+Y(2)Y(2)+Y(4)=0 \qquad (4.51)$$

$$42Y(6)+2Y(4)+Y(2)Y(2)=0 \qquad (4.52)$$

Efectuamos las sustituciones $Y(2)=-\frac{1}{6}$ y $Y(4)=\frac{1}{60}$ en la ecuación (4.52):

$$42Y(6)+2\left(\frac{1}{60}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)=0$$

$$42Y(6)+\frac{1}{30}+\frac{1}{36}=0$$

$$42Y(6)+\frac{11}{180}=0$$

$$42Y(6)=-\frac{11}{180}$$

$$\boldsymbol{Y(6)=-\frac{11}{7560}}$$

Aplicando la ecuación (3.4) y los resultados obtenidos, tenemos que la solución de la ecuación (4.25) es:

$$\boldsymbol{y(x)=1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{60}-\frac{11x^6}{7560}+\cdots}$$

La figura 4 muestra gráficamente la diferencia entre la solución analítica de la ecuación (4.25) y la solución obtenida mediante el método de la transformación diferencial (DTM).

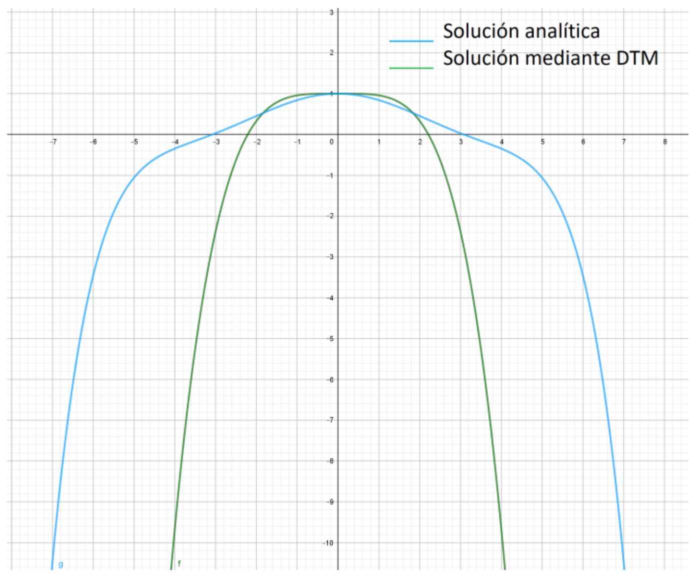

Figura 3. Solución analítica vs DTM para n=2

4.4 Solución de la ecuación de Lane-Emden para n=3

Para $n=3$, la ecuación toma la forma

$$xy''+2y'+xy^3=0 \tag{4.53}$$

La solución analítica para esta ecuación es:

$$\boldsymbol{y(x)=1-\frac{x^6}{30}}$$

Aplicando DTM, tenemos que la transformación diferencial de la ecuación (4.53) es:

$$\sum_{r=0}^{k}[(k-r+1)(k-r+2)\delta(r-1)Y(k-r+2)]+2(k+1)Y(k+1)$$

$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{k-r}\sum_{m=0}^{k-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(k-r-s-m)=0 \qquad (4.54)$$

Asignamos valores $k=1,2,3,4\ y\ 5$

Efectuamos la sustitución k=1 en la ecuación (4.54)

$$\sum_{r=0}^{1}[(2-r)(3-r)\delta(r-1)Y(3-r)]+2(2)Y(2)$$

$$+\sum_{r=0}^{1}\sum_{s=0}^{1-r}\left[\sum_{m=0}^{1-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(1-r-s-m)\right]=0 \qquad (4.55)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.55):

$$\sum_{r=0}^{1}[(2-r)(3-r)\delta(r-1)Y(3-r)]+2(2)Y(2)$$

$$+\sum_{r=0}^{1}\left[\sum_{m=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(0)Y(m)Y(1-r-m)\right]=0 \qquad (4.56)$$

Aplicamos condiciones iniciales en la ecuación (4.56):

$$\sum_{r=0}^{1}[(2-r)(3-r)\delta(r-1)Y(3-r)]+2(2)Y(2)$$

$$+\sum_{r=0}^{1}\left[\sum_{m=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(m)Y(1-r-m)\right]=0 \qquad (4.57)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.57):

$$\sum_{r=0}^{1}[(2-r)(3-r)\delta(r-1)Y(3-r)]+4Y(2)+\sum_{m=0}^{1}\delta(0-1)Y(m)Y(1-m)$$

$$+\sum_{m=0}^{0}\delta(1-1)Y(m)Y(-m)=0 \qquad (4.58)$$

Aplicamos el teorema 5 en la ecuación (4.58):

$$\sum_{r=0}^{1}[(2-r)(3-r)\delta(r-1)Y(3-r)]+4Y(2)+\sum_{m=0}^{0}Y(m)Y(0-m)=0 \qquad (4.59)$$

Desarrollamos las sumatorias de la ecuación (4.59):

$$(2)(3)\delta(0-1)Y(3)+(1)(2)\delta(1-1)Y(2)+4Y(2)+Y(0)Y(0)=0 \qquad (4.60)$$

Aplicamos teorema 5 y condiciones iniciales a la ecuación (4.61):

$$2Y(2)+4Y(2)+1=0$$

$$6Y(2)+1=0$$

$$\boldsymbol{Y(2)=-\frac{1}{6}}$$

Efectuamos la sustitución k=2 en la ecuación (4.54)

$$\sum_{r=0}^{2}[(3-r)(4-r)\delta(r-1)Y(4-r)]+2(3)Y(3)$$
$$+\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{2-r}\left[\sum_{m=0}^{2-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(k-r-s-m)\right]=0 \qquad (4.62)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.62):

$$\sum_{r=0}^{2}[(3-r)(4-r)\delta(r-1)Y(4-r)]+6Y(3)+\sum_{r=0}^{2}\left[\sum_{m=0}^{2-r}\delta(r-1)\,Y(0)Y(m)Y(k-r-m)\right.$$
$$\left.+\sum_{m=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(1)Y(m)Y(k-r-1-m)\right]=0 \qquad (4.63)$$

Aplicamos condiciones iniciales a la ecuación (4.63):

$$\sum_{r=0}^{2}[(3-r)(4-r)\delta(r-1)Y(4-r)]+6Y(3)$$
$$+\sum_{r=0}^{2}\left[\sum_{m=0}^{2-r}\delta(r-1)Y(m)Y(2-r-m)\right]=0 \qquad (4.64)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.64):

$$\sum_{r=0}^{2}[(3-r)(4-r)\delta(r-1)Y(4-r)]+6Y(3)+\sum_{m=0}^{2}\delta(0-1)Y(m)Y(2-m)$$
$$+\sum_{m=0}^{1}\delta(1-1)Y(m)Y(1-m)=0 \qquad (4.62)$$

Aplicamos teorema 5 a la ecuación (4.65):

$$\sum_{r=0}^{2}[(3-r)(4-r)\delta(r-1)Y(4-r)] + 6Y(3) + \sum_{m=0}^{1} Y(m)Y(1-m) = 0 \qquad (4.66)$$

Desarrollamos las sumatorias de la ecuación (4.66):

$$(3)(4)\delta(0-1)Y(4) + (2)(3)\delta(1-1)Y(3) + (1)(2)\delta(2-1)Y(2) + 6Y(3)$$
$$+Y(0)Y(1) + Y(1)Y(0) = 0 \qquad (4.67)$$

Aplicamos teorema 5 y las condiciones iniciales en la ecuación (4.67):

$$6Y(3) + 6Y(3) = 0$$

$$\boldsymbol{Y(3) = 0}$$

Efectuamos la sustitución k=3 en la ecuación (4.54)

$$\sum_{r=0}^{3}[(4-r)(5-r)\delta(r-1)Y(5-r)] + 2(4)Y(4)$$
$$+\sum_{r=0}^{3}\sum_{s=0}^{3-r}\left[\sum_{m=0}^{3-r-s}[\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(3-r-s-m)]\right] = 0 \qquad (4.68)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.68):

$$\sum_{r=0}^{3}[(4-r)(5-r)\delta(r-1)Y(5-r)] + 8Y(4) + \sum_{r=0}^{3}\left[\sum_{m=0}^{3-r}\delta(r-1)Y(0)Y(m)Y(3-r-m)\right.$$
$$\left.+\sum_{m=0}^{2-r}\delta(r-1)Y(1)Y(m)Y(3-r-1-m) + \sum_{m=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(2)Y(m)Y(3-r-2-m)\right] = 0$$
$$(4.69)$$

Aplicamos condiciones iniciales a la ecuación (4.69):

$$\sum_{r=0}^{3}[(4-r)(5-r)\delta(r-1)Y(5-r)] + 8Y(4) + \sum_{r=0}^{3}\left[\sum_{m=0}^{3-r}\delta(r-1)Y(m)Y(3-r-m)\right.$$
$$\left.+\sum_{m=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(2)Y(m)Y(3-r-m)\right] = 0 \qquad (4.70)$$

Desarrollamos la sumatorias interiores en la ecuación (4.70):

$$\sum_{r=0}^{3}[(4-r)(5-r)\delta(r-1)Y(5-r)]+2(4)Y(4)+\sum_{m=0}^{3}\delta(0-1)Y(m)Y(3-m)$$

$$+\sum_{m=0}^{2}\delta(1-1)Y(m)Y(2-m)+\sum_{m=0}^{1}\delta(2-1)Y(m)Y(1-m)$$

$$+\sum_{m=0}^{1}\delta(0-1)Y(2)Y(m)Y(1-m)+\sum_{m=0}^{0}\delta(1-1)Y(2)Y(m)Y(-m)=0 \qquad (4.71)$$

Aplicamos teorema 5 a la ecuación (4.71):

$$\sum_{r=0}^{3}[(4-r)(5-r)\delta(r-1)Y(5-r)]+8Y(4)+\sum_{m=0}^{2}Y(m)Y(2-m)$$

$$+\sum_{m=0}^{0}Y(2)Y(m)Y(0-m)=0 \qquad (4.72)$$

Desarrollamos las sumatorias de la ecuación (4.72):

$$(4)(5)\delta(0-1)Y(5)+(3)(4)\delta(1-1)Y(4)+(2)(3)\delta(2-1)Y(3)+(1)(2)\delta(3-1)Y(2)$$

$$+8Y(4)+Y(0)Y(2)+Y(1)Y(1)+Y(2)Y(0)+Y(2)Y(0)Y(0)=0 \qquad (4.73)$$

Aplicamos teorema 5 y las condiciones iniciales en la ecuación (4.73):

$$12Y(4)+8Y(4)+Y(2)+Y(2)+Y(2)=0 \qquad (4.74)$$

$$20Y(4)+3Y(2)=0 \qquad (4.75)$$

Efectuamos la sustitución $Y(2)=-\frac{1}{6}$ en la ecuación (4.75):

$$20Y(4)-3\left(\frac{1}{6}\right)=0$$

$$20Y(4)-\frac{1}{2}=0$$

$$20Y(4)=\frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{Y(4)=\frac{1}{40}}$$

Efectuamos la sustitución k=4 en la ecuación (4.54):

$$\sum_{r=0}^{4}[(5-r)(6-r)\delta(r-1)Y(6-r)]+2(5)Y(5)$$

$$+\sum_{r=0}^{4}\sum_{s=0}^{4-r}\left[\sum_{m=0}^{4-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(4-r-s-m)\right]=0 \qquad (4.76)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.76):

$$\sum_{r=0}^{4}[(5-r)(6-r)\delta(r-1)Y(6-r)]+2(5)Y(5)+\sum_{r=0}^{4}\left[\sum_{m=0}^{4-r}[\delta(r-1)Y(0)Y(m)Y(4-r-m)]\right.$$

$$+\sum_{m=0}^{3-r}\delta(r-1)Y(1)Y(m)Y(3-r-m)+\sum_{m=0}^{2-r}\delta(r-1)\,Y(2)Y(m)Y(2-r-m)$$

$$\left.+\sum_{m=0}^{1-r}\delta(r-1)\,Y(3)Y(m)Y(1-r-m)\right]=0 \qquad (4.77)$$

Aplicamos las condiciones iniciales y efectuamos la sustitución $Y(3)=0$ en la ecuación (4.77):

$$\sum_{r=0}^{4}[(5-r)(6-r)\delta(r-1)Y(6-r)]+10Y(5)+\sum_{r=0}^{4}\left[\sum_{m=0}^{4-r}[\delta(r-1)Y(m)Y(4-r-m)]\right.$$

$$\left.+\sum_{m=0}^{2-r}\delta(r-1)\,Y(2)Y(m)Y(2-r-m)\right]=0 \qquad (4.78)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.78):

$$\sum_{r=0}^{4}[(5-r)(6-r)\delta(r-1)Y(6-r)]+10Y(5)+\sum_{m=0}^{4}[\delta(0-1)Y(m)Y(4-m)]$$

$$+\sum_{m=0}^{3}[\delta(1-1)Y(m)Y(3-m)]+\sum_{m=0}^{2}[\delta(2-1)Y(m)Y(2-m)]+\sum_{m=0}^{1}[\delta(3-1)Y(m)Y(1-m)]$$

$$+\sum_{m=0}^{2}\delta(0-1)\,Y(2)Y(m)Y(2-m)+\sum_{m=0}^{1}\delta(1-1)\,Y(2)Y(m)Y(1-m)=0 \qquad (4.79)$$

Aplicamos el teorema 5 y las condiciones iniciales en la ecuación (4.79):

$$\sum_{r=0}^{4}[(5-r)(6-r)\delta(r-1)Y(6-r)]+10Y(5)+\sum_{m=0}^{3}Y(m)Y(3-m)$$

$$+\sum_{m=0}^{1}Y(2)Y(m)Y(1-m)=0 \tag{4.80}$$

Desarrollamos las sumatorias de la ecuación (4.80):

$$(5)(6)\delta(0-1)Y(6)+(4)(5)\delta(1-1)Y(5)+(3)(4)\delta(2-1)Y(4)+(2)(3)\delta(3-1)Y(3)$$

$$+(1)(2)\delta(4-1)Y(2)+10Y(5)+Y(0)Y(3)+Y(1)Y(2)+Y(2)Y(1)+Y(3)Y(0)$$

$$+Y(2)Y(0)Y(1)+Y(2)Y(1)Y(0)=0 \tag{4.81}$$

Aplicamos el teorema 5 y condiciones iniciales a la ecuación (4.81):

$$20Y(5)+10Y(5)+Y(3)+Y(3)=0 \tag{4.82}$$

$$35Y(5)+2Y(3)=0 \tag{4.83}$$

Efectuamos la sustitución $Y(3)=0$ en la ecuación (4.83):

$$35Y(5)+2(0)=0$$

$$35Y(5)=0$$

$$\boldsymbol{Y(5)=0}$$

Efectuamos la sustitución k=5 en la ecuación (4.54)

$$\sum_{r=0}^{5}[(6-r)(7-r)\delta(r-1)Y(7-r)]+2(6)Y(6)$$

$$+\sum_{r=0}^{5}\sum_{s=0}^{5-r}\left[\sum_{m=0}^{5-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(5-r-s-m)\right]=0 \tag{4.84}$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.84):

$$\sum_{r=0}^{5}[(6-r)(7-r)\delta(r-1)Y(7-r)]+2(6)Y(6)+\sum_{r=0}^{5}\left[\sum_{m=0}^{5-r}\delta(r-1)Y(0)Y(m)Y(5-r-m)\right.$$

$$+\sum_{m=0}^{4-r}\delta(r-1)Y(1)Y(m)Y(4-r-m)+\sum_{m=0}^{3-r}\delta(r-1)Y(2)Y(m)Y(3-r-m)$$

$$+\sum_{m=0}^{2-r}\delta(r-1)Y(3)Y(m)Y(2-r-m)+\sum_{m=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(4)Y(m)Y(1-r-m)\Bigg]=0 \quad (4.85)$$

Aplicamos las condiciones iniciales y efectuamos la sustitución $Y(3)=0$ en la ecuación (4.85):

$$\sum_{r=0}^{5}[(6-r)(7-r)\delta(r-1)Y(7-r)]+12Y(6)+\sum_{r=0}^{5}\left[\sum_{m=0}^{5-r}\delta(r-1)Y(m)Y(5-r-m)\right.$$

$$\left.+\sum_{m=0}^{3-r}\delta(r-1)Y(2)Y(m)Y(3-r-m)+\sum_{m=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(4)Y(m)Y(1-r-m)\right]=0 \quad (4.86)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.86):

$$\sum_{r=0}^{5}[(6-r)(7-r)\delta(r-1)Y(7-r)]+12Y(6)+\sum_{m=0}^{5}\delta(0-1)Y(m)Y(5-m)$$

$$+\sum_{m=0}^{4}\delta(1-1)Y(m)Y(4-m)+\sum_{m=0}^{3}\delta(2-1)Y(m)Y(3-m)+\sum_{m=0}^{2}\delta(3-1)Y(m)Y(2-m)$$

$$+\sum_{m=0}^{1}\delta(4-1)Y(m)Y(1-m)+\sum_{m=0}^{3}\delta(0-1)Y(2)Y(m)Y(3-m)$$

$$\sum_{m=0}^{2}\delta(1-1)Y(2)Y(m)Y(2-m)+\sum_{m=0}^{1}\delta(2-1)Y(2)Y(m)Y(1-m)$$

$$+\sum_{m=0}^{1}\delta(0-1)Y(4)Y(m)Y(1-m)+\sum_{m=0}^{0}\delta(1-1)Y(4)Y(m)Y(0-m)=0 \quad (4.87)$$

Aplicamos teorema 5 y efectuamos las sustituciones $Y(2)=-\frac{1}{6}$ y $Y(4)=\frac{1}{40}$ en la ecuación (4.87):

$$\sum_{r=0}^{5}[(6-r)(7-r)\delta(r-1)Y(7-r)]+12Y(6)+\sum_{m=0}^{4}Y(m)Y(4-m)+$$

$$-\frac{1}{6}\sum_{m=0}^{2}Y(m)Y(2-m)+\frac{1}{40}\sum_{m=0}^{0}Y(m)Y(0-m)=0 \quad (4.88)$$

Desarrollamos las sumas de la ecuación (4.88):

$$(6)(7)\delta(0-1)Y(7)+(5)(6)\delta(1-1)Y(6)+(4)(5)\delta(2-1)Y(5)+(3)(4)\delta(3-1)Y(4)$$

$$+(2)(3)\delta(4-1)Y(3)+(1)(2)\delta(5-1)Y(2)+12Y(6)+Y(0)Y(4)+Y(1)Y(3)+Y(2)Y(2)$$

$$+Y(3)Y(1)+Y(4)Y(0)-\frac{1}{6}[Y(0)Y(2)+Y(1)Y(1)+Y(2)Y(0)]+\frac{1}{40}Y(0)Y(0)=0 \quad (4.89)$$

Aplicamos teorema 5 y las condiciones iniciales en la ecuación (4.89):

$$30Y(6)+12Y(6)+Y(4)+Y(2)Y(2)+Y(4)-\frac{1}{6}[Y(2)+Y(2)]+\frac{1}{40}=0 \qquad (4.90)$$

Efectuamos las sustituciones $Y(2)=-\frac{1}{6}$ y $Y(4)=\frac{1}{40}$ en la ecuación (4.90):

$$42Y(6)+\frac{1}{40}+\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{40}-\frac{1}{6}\left[\left(-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)\right]+\frac{1}{40}=0$$

$$42Y(6)+\frac{1}{40}+\frac{1}{36}+\frac{1}{40}-\frac{1}{6}\left[-\frac{1}{3}\right]+\frac{1}{40}=0$$

$$42Y(6)+\frac{1}{40}+\frac{1}{36}+\frac{1}{40}+\frac{1}{18}+\frac{1}{40}=0$$

$$42Y(6)+\frac{19}{120}=0$$

$$42Y(6)=-\frac{19}{120}$$

$$\boldsymbol{Y(6)=-\frac{19}{5040}}$$

Aplicando la ecuación (3.4) y los resultados obtenidos, tenemos que la solución de la ecuación (4.53) es:

$$\boldsymbol{y(x)=1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{40}-\frac{19x^6}{5040}+\cdots}$$

La figura 4 muestra gráficamente la diferencia entre la solución analítica de la ecuación (4.53) y la solución hallada aplicando el método de la transformación diferencial (DTM).

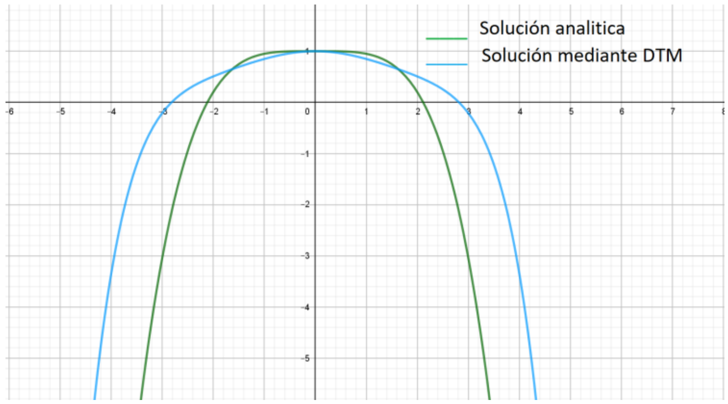

Figura 4. Solución analítica vs DTM, para n=3

4.5 Solución de la ecuación de Lane-Emden para n=4

Para $n = 4$, la ecuación toma la forma

$$xy'' + 2y' + xy^4 = 0 \tag{4.91}$$

La solución analítica de esta ecuación es:

$$\boldsymbol{y(x) = 1 - \frac{x^6}{42}}$$

Aplicando DTM a la ecuación (4.91), obtenemos:

$$\sum_{r=0}^{k}[\delta(r-1)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)] + 2(k+1)Y(k+1)$$

$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{k-r}\sum_{m=0}^{k-r-s}\left[\sum_{p=0}^{k-r-s-m}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(p)Y(k-r-s-m-p)\right] = 0 \tag{4.92}$$

Asignamos valores de $k = 1{,}2{,}3\ y\ 4$

Sustituimos k=1 en la ecuación (4.92):

$$\sum_{r=0}^{1}[\delta(r-1)(2-r)(3-r)Y(3-r)] + 2(2)Y(2)$$

$$+\sum_{r=0}^{1}\sum_{s=0}^{1-r}\sum_{m=0}^{1-r-s}\left[\sum_{p=0}^{1-r-s-m}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(p)Y(1-r-s-m-p)\right] = 0 \tag{4.93}$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.93)

$$\sum_{r=0}^{1}[\delta(r-1)(2-r)(3-r)Y(3-r)]+4Y(2)$$

$$+\sum_{r=0}^{1}\sum_{s=0}^{1-r}\left[\sum_{p=0}^{1-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(0)Y(p)Y(1-r-s-p)=0\right. \qquad (4.94)$$

Aplicamos las condiciones iniciales a la ecuación (4.94):

$$\sum_{r=0}^{1}[\delta(r-1)(2-r)(3-r)Y(3-r)]+4Y(2)$$

$$+\sum_{r=0}^{1}\sum_{s=0}^{1-r}\left[\sum_{p=0}^{1-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(p)Y(1-r-s-p)\ =0\right. \qquad (4.95)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.95):

$$\sum_{r=0}^{1}[\delta(r-1)(2-r)(3-r)Y(3-r)]+4Y(2)$$

$$+\sum_{r=0}^{1}\left[\sum_{p=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(0)Y(p)Y(1-r-p)\right]=0 \qquad (4.96)$$

Aplicamos condiciones iniciales a la ecuación (4.96) :

$$\sum_{r=0}^{1}[\delta(r-1)(2-r)(3-r)Y(3-r)]+4Y(2)+\sum_{r=0}^{1}\left[\sum_{p=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(p)Y(1-r-p)\right]=0 \qquad (4.97)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.97):

$$\sum_{r=0}^{1}[\delta(r-1)(2-r)(3-r)Y(3-r)]+4Y(2)+\sum_{p=0}^{1}\delta(0-1)Y(p)Y(1-p)$$

$$+\sum_{p=0}^{0}\delta(1-1)Y(p)Y(0-p)=0 \qquad (4.98)$$

Aplicamos el teorema 5 a la ecuación (4.98):

$$\sum_{r=0}^{1}[\delta(r-1)(2-r)(3-r)Y(3-r)]+4Y(2)+\sum_{p=0}^{0}Y(p)Y(0-p)=0 \qquad (4.99)$$

Desarrollamos las sumatorias de la ecuación (4.99):

$$\delta(0-1)(1)(2)Y(2)+\delta(1-1)(1)(2)Y(2)+4Y(2)+Y(0)Y(0)=0 \qquad (4.100)$$

Aplicamos las condiciones iniciales y el teorema 5 a la ecuación (4.100)

$$2Y(2)+4Y(2)+1=0$$

$$6(2)+1=0$$

$$\boldsymbol{Y(2)=-\frac{1}{6}}$$

Efectuamos la sustitución k=2 en la ecuación (4.92):

$$\sum_{r=0}^{2}[\delta(r-1)(2-r)(4-r)Y(4-r)]+2(3)Y(3)$$

$$+\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{2-r}\sum_{m=0}^{2-r-s}\left[\sum_{p=0}^{2-r-s-m}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(p)Y(2-r-s-m-p)\right]=0 \qquad (4.101)$$

Desarrollamos sumatoria interna de la ecuación (4.101):

$$\sum_{r=0}^{2}[\delta(r-1)(2-r)(4-r)Y(4-r)]+6Y(3)$$

$$+\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{2-r}\left[\sum_{p=0}^{2-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(0)Y(p)Y(2-r-s-p)\right.$$

$$\left.+\sum_{p=0}^{1-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(1)Y(p)Y(1-r-s-p)\right]=0 \qquad (4.102)$$

Aplicamos teorema 5 y condiciones iniciales a la ecuación (4.102) :

$$\sum_{r=0}^{2}[\delta(r-1)(2-r)(4-r)Y(4-r)]+6Y(3)$$

$$+\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{2-r}\left[\sum_{p=0}^{2-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(p)Y(2-r-s-p)\right]=0 \qquad (4.103)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.103):

$$\sum_{r=0}^{2}[\delta(r-1)(2-r)(4-r)Y(4-r)]+6Y(3)$$

$$+\sum_{r=0}^{2}\left[\sum_{p=0}^{2-r}\delta(r-1)Y(0)Y(p)Y(2-r-p)+\sum_{p=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(1)Y(p)Y(1-r-p)\right]=0 \qquad (4.104)$$

Aplicamos condiciones iniciales en la ecuación (4.104):

$$\sum_{r=0}^{2}[\delta(r-1)(2-r)(4-r)Y(4-r)]+6Y(3)+\sum_{r=0}^{2}\left[\sum_{p=0}^{2-r}\delta(r-1)Y(p)Y(2-r-p)=0 \qquad (4.105)$$

Desarrollamos la interior sumatoria en la ecuación (4.105):

$$\sum_{r=0}^{2}[\delta(r-1)(2-r)(4-r)Y(4-r)]+6Y(3)+\sum_{p=0}^{2}\delta(0-1)Y(p)Y(2-p)$$

$$+\sum_{p=0}^{1}\delta(1-1)Y(p)Y(1-p)=0 \qquad (4.106)$$

Aplicamos teorema 5 en la ecuación (4.106):

$$\sum_{r=0}^{2}[\delta(r-1)(2-r)(4-r)Y(4-r)]+6Y(3)+\sum_{p=0}^{1}Y(p)Y(1-p)=0 \qquad (4.107)$$

Desarrollamos las sumatorias de la ecuación (4.107):

$$\delta(0-1)(2)(4)Y(4)+6Y(3)+Y(0)Y(1)+Y(1)Y(0)=0 \qquad (4.108)$$

Aplicamos el teorema 5 y las condiciones iniciales a la ecuación (4.108):

$$6Y(3)=0$$

$$\boldsymbol{Y(3)=0}$$

Efectuamos la sustitución k=3 en la ecuación (4.92):

$$\sum_{r=0}^{3}[\delta(r-1)(4-r)(5-r)Y(5-r)]+2(4)Y(4)$$

$$+\sum_{r=0}^{3}\sum_{s=0}^{3-r}\sum_{m=0}^{3-r-s}\left[\sum_{p=0}^{3-r-s-m}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(p)Y(3-r-s-m-p)\right]=0 \qquad (4.109)$$

Desarrollamos sumatoria interior en la ecuación (4.110):

$$\sum_{r=0}^{3}[\delta(r-1)(4-r)(5-r)Y(5-r)]+8Y(4)$$

$$+\sum_{r=0}^{3}\sum_{s=0}^{3-l}\left[\sum_{p=0}^{3-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(0)Y(p)Y(3-r-s-p)\right.$$

$$+\sum_{p=0}^{2-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(1)Y(p)Y(2-r-s-p)$$

$$\left.+\sum_{p=0}^{1-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(2)Y(p)Y(1-r-s-p)\right]=0 \qquad (4.111)$$

Aplicamos las condiciones iniciales a la ecuación (4.111):

$$\sum_{r=0}^{3}[\delta(r-1)(4-r)(5-r)Y(5-r)]+8Y(4)$$

$$+\sum_{r=0}^{3}\sum_{s=0}^{3-l}\left[\sum_{p=0}^{3-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(p)Y(3-r-s-p)\right.$$

$$\left.+\sum_{p=0}^{1-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(2)Y(p)Y(1-r-s-p)\right]=0 \qquad (4.112)$$

Desarrollamos sumatorias interiores en la ecuación (4.112):

$$\sum_{r=0}^{3}[\delta(r-1)(4-r)(5-r)Y(5-r)]+8Y(4)$$

$$\sum_{r=0}^{3}\left[\sum_{p=0}^{3-r}\delta(r-1)Y(0)Y(p)Y(3-r-p)+\sum_{p=0}^{2-r}\delta(r-1)Y(1)Y(p)Y(2-r-p)\right.$$

$$\left.+\sum_{p=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(2)Y(p)Y(1-r-p)+\sum_{p=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(0)Y(2)Y(p)Y(1-r-p)\right]=0 \qquad (4.113)$$

Aplicamos las condiciones iniciales en la ecuación (4.113):

$$\sum_{r=0}^{3}[\delta(r-1)(4-r)(5-r)Y(5-r)]+8Y(4)+\sum_{r=0}^{3}\left[\sum_{p=0}^{3-r}\delta(r-1)Y(p)Y(3-r-p)+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(2)Y(p)Y(1-r-p)+\sum_{p=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(2)Y(p)Y(1-r-p)\right]=0 \qquad (4.114)$$

Simplificamos la ecuación (4.114)

$$\sum_{r=0}^{3}[\delta(r-1)(4-r)(5-r)Y(5-r)]+8Y(4)+\sum_{r=0}^{3}\left[\sum_{p=0}^{3-r}\delta(r-1)Y(p)Y(3-r-p)+\right.$$

$$\left.+2\sum_{p=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(2)Y(p)Y(1-r-p)\right]=0 \qquad (4.115)$$

Desarrollamos las sumatoria interiores en la ecuación (4.115):

$$\sum_{r=0}^{3}[\delta(r-1)(4-r)(5-r)Y(5-r)]+8Y(4)+\sum_{p=0}^{3}\delta(0-1)Y(p)Y(3-p)$$

$$\sum_{p=0}^{2}\delta(1-1)Y(p)Y(2-p)+\sum_{p=0}^{1}\delta(2-1)Y(p)Y(1-p)$$

$$+2\left[\sum_{p=0}^{1}\delta(0-1)Y(2)Y(p)Y(1-p)+\sum_{p=0}^{1}\delta(1-1)Y(2)Y(p)Y(-p)\right]=0 \qquad (4.116)$$

Aplicamos teorema 5 a la ecuación (4.116)

$$\sum_{r=0}^{3}[\delta(r-1)(4-r)(5-r)Y(5-r)]+8Y(4)+\sum_{p=0}^{2}Y(p)Y(2-p)$$

$$+2\sum_{p=0}^{1} Y(2)Y(p)Y(-p) = 0 \qquad (4.117)$$

Desarrollamos las sumatorias en la ecuación (4.117):

$$\delta(0-1)(4)(5)Y(5) + \delta(1-1)(3)(4)Y(4) + \delta(2-1)(2)(3)Y(3) + \delta(3-1)(1)(2)Y(2)$$

$$+8Y(4) + Y(0)Y(2) + Y(1)Y(1) + Y(2)Y(0) + 2[Y(2)Y(0)Y(0)] = 0 \qquad (4.118)$$

Aplicamos el teorema 5 y las condiciones iniciales a la ecuación (4.118)

$$12Y(4) + 8Y(4) + Y(2) + Y(2) + 2Y(2) = 0 \qquad (4.119)$$

$$20Y(4) + 4Y(2) \qquad (4.120)$$

Efectuamos la sustitución $Y(2) = -\frac{1}{6}$ en la ecuación (4.120)

$$20Y(4) + 4\left(-\frac{1}{6}\right) = 0$$

$$20Y(4) - \frac{2}{3} = 0$$

$$20Y(4) = \frac{2}{3}$$

$$Y(4) = \frac{2}{60}$$

$$\boldsymbol{Y(4) = \frac{1}{30}}$$

Efectuamos la sustitución k=4 en la ecuación (4.92):

$$\sum_{r=0}^{4}[\delta(r-1)(5-r)(6-r)Y(6-r)] + 2(5)Y(5)$$

$$+\sum_{r=0}^{4}\sum_{s=0}^{4-r}\sum_{m=0}^{4-r-s}\left[\sum_{p=0}^{4-r-s-m}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(p)Y(4-r-s-m-p)\right] = 0 \qquad (4.121)$$

Desarrollamos la sumatoria interior de la ecuación (4.121)

$$\sum_{r=0}^{4}[\delta(r-1)(5-r)(6-r)Y(6-r)] + 10Y(5)$$

$$+\sum_{r=0}^{4}\sum_{s=0}^{4-r}\left[\sum_{p=0}^{4-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(0)Y(p)Y(4-r-s-p)\right.$$

$$+\sum_{p=0}^{3-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(1)Y(p)Y(3-r-s-p)$$

$$+\sum_{p=0}^{2-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(2)Y(p)Y(2-r-s-p)$$

$$\left.+\sum_{p=0}^{1-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(3)Y(p)Y(1-r-s-p)\right]=0 \qquad (4.122)$$

Aplicamos las condiciones iniciales y efectuamos la sustitución $Y(3)=0$ en la ecuación (4.122):

$$\sum_{r=0}^{4}[\delta(r-1)(5-r)(6-r)Y(6-r)]+10Y(5)$$

$$+\sum_{r=0}^{4}\sum_{s=0}^{4-r}\left[\sum_{p=0}^{4-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(p)Y(4-r-s-p)\right.$$

$$+\sum_{p=0}^{2-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(2)Y(p)Y(2-r-s-p)=0 \qquad (4.123)$$

Desarrollamos la sumatoria interna en la ecuación (4.123):

$$\sum_{r=0}^{4}[\delta(r-1)(5-r)(6-r)Y(6-r)]+10Y(5)+\sum_{r=0}^{4}\left[\sum_{p=0}^{4-r}\delta(r-1)Y(0)Y(p)Y(4-r-p)\right.$$

$$+\sum_{p=0}^{3-r}\delta(r-1)Y(1)Y(p)Y(3-r-p)+\sum_{p=0}^{2-r}\delta(r-1)Y(2)Y(p)Y(2-r-p)$$

$$+\sum_{p=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(3)Y(p)Y(1-r-p)+\sum_{p=0}^{2-r}\delta(r-1)Y(0)Y(2)Y(p)Y(2-r-p)$$

$$\left.+\sum_{p=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(1)Y(2)Y(p)Y(1-r-p)\right]=0 \qquad (4.124)$$

Aplicamos condiciones y efectuamos la sustitución $Y(3)=0$ iniciales en la ecuación (4.124)

$$\sum_{r=0}^{4}[\delta(r-1)(5-r)(6-r)Y(6-r)]+10Y(5)+\sum_{r=0}^{4}\left[\sum_{p=0}^{4-r}\delta(r-1)Y(p)Y(4-r-p)\right.$$

$$\left.+\sum_{p=0}^{2-r}\delta(r-1)Y(2)Y(p)Y(2-r-p)+\sum_{p=0}^{2-r}\delta(r-1)Y(2)Y(p)Y(2-r-p)\right]=0 \quad (4.125)$$

Desarrollamos la sumatoria interna en la ecuación (4.125):

$$\sum_{r=0}^{4}[\delta(r-1)(5-r)(6-r)Y(6-r)]+10Y(5)+\sum_{p=0}^{4}\delta(0-1)Y(p)Y(4-p)$$

$$+\sum_{p=0}^{3}\delta(1-1)Y(p)Y(3-p)+\sum_{p=0}^{2}\delta(2-1)Y(p)Y(2-p)+\sum_{p=0}^{1}\delta(3-1)Y(p)Y(1-p)$$

$$+\sum_{p=0}^{2}\delta(0-1)Y(2)Y(p)Y(2-p)+\sum_{p=0}^{1}\delta(1-1)Y(2)Y(p)Y(1-p)$$

$$+\sum_{p=0}^{2}\delta(0-1)Y(2)Y(p)Y(2-p)+\sum_{p=0}^{1}\delta(1-1)Y(2)Y(p)Y(1-p)=0 \quad (4.126)$$

Aplicamos el teorema 5 en la ecuación (4.126):

$$\sum_{r=0}^{4}[\delta(r-1)(5-r)(6-r)Y(6-r)]+10Y(5)+\sum_{p=0}^{3}Y(p)Y(3-p)$$

$$+\sum_{p=0}^{1}Y(2)Y(p)Y(1-p)+\sum_{p=0}^{1}Y(2)Y(p)Y(1-p)=0 \quad (4.127)$$

Simplificamos la ecuación (4.127)

$$\sum_{r=0}^{4}[\delta(r-1)(5-r)(6-r)Y(6-r)]+10Y(5)+\sum_{p=0}^{3}Y(p)Y(3-p)$$

$$+2\sum_{p=0}^{1}Y(2)Y(p)Y(1-p)=0 \quad (4.128)$$

Desarrollamos las sumatorias en la ecuación (4.128):

$$\delta(0-1)(5)(6)Y(6)+\delta(1-1)(4)(5)Y(5)+\delta(2-1)(3)(4)Y(4)+\delta(3-1)(2)(3)Y(3)$$

$$+\delta(4-1)(1)(2)Y(2)+10Y(5)+Y(0)Y(3)+Y(1)Y(2)+Y(2)Y(1)+2[Y(2)Y(0)Y(1)$$

$$Y(2)Y(1)Y(0)]=0 \tag{4.129}$$

Aplicamos condiciones iniciales a la ecuación (4.129):

$$20Y(5)+10Y(5)=0$$

$$30Y(5)=0$$

$$\boldsymbol{Y(5)=0}$$

Aplicando la ecuación (3.4) y los resultados obtenidos, tenemos que la solución de la ecuación (4.91) es:

$$\boldsymbol{y(x)=1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{30}x^4+\cdots}$$

La figura 6, muestra la diferencia entre la solución analítica de la ecuación (4.91) y la solución encontrada aplicando el método de la transformación diferencial (DTM).

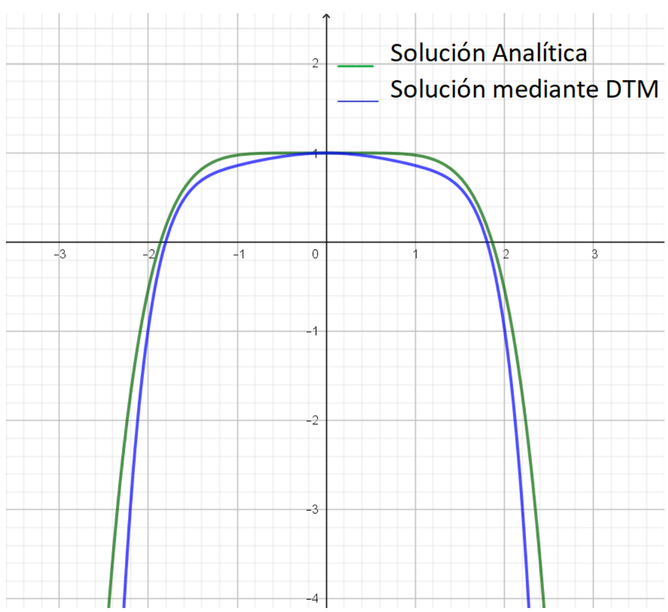

Figura 5. Solución analítica vs DTM para n=4

4.6 Solución de la ecuación de Lane-Emden para n=5

Para $n = 5$, la ecuación toma la forma

$$xy'' + 2y' + xy^5 = 0 \tag{4.130}$$

La solución analítica para esta ecuación es:

$$\boldsymbol{y(x) = 1 - \frac{1}{84}x^8}$$

Aplicando DTM, que la transformación diferencial de la ecuación (4.130) es:

$$\sum_{r=0}^{k}[\delta(r-1)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)] + 2(k+1)Y(k+1)$$

$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{k-r}\sum_{m=0}^{k-r-s}\sum_{p=0}^{k-r-s-m}\sum_{q=0}^{k-r-s-m-p}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(p)Y(q)Y(k-r-s-m-p-q) = 0$$

$$(4.131)$$

Asignamos valores de $k = 0,1,2,3 \ y \ 4$

Efectuamos la sustitución k=1 en la ecuación (4.131):

$$\sum_{r=0}^{1}[\delta(r-1)(2-r)(3-r)Y(3-r)] + 2(2)Y(2)$$

$$+\sum_{r=0}^{1}\sum_{s=0}^{1-r}\sum_{m=0}^{1-r-s}\sum_{p=0}^{1-r-s-m}\left[\sum_{q=0}^{1-r-s-m-p}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(p)Y(q)Y(1-r-s-m-p-q)\right] = 0$$

$$(4.132)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.132):

$$\sum_{r=0}^{1}[\delta(r-1)(2-r)(3-r)Y(3-r)] + 4Y(2)$$

$$+\sum_{r=0}^{1}\sum_{s=0}^{1-r}\sum_{m=0}^{1-s-r}\left[\sum_{q=0}^{1-r-s-m}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(0)Y(q)Y(1-r-s-m-q)\right] = 0 \quad (4.133)$$

Aplicamos condiciones iniciales a la ecuación (4.133):

$$\sum_{r=0}^{1}[\delta(r-1)(2-r)(3-r)Y(3-r)]+4Y(2)$$

$$+\sum_{r=0}^{1}\sum_{s=0}^{1-r}\sum_{m=0}^{1-s-r}\left[\sum_{q=0}^{1-r-s-m}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(q)Y(1-r-s-m-q)\right]=0 \tag{4.134}$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.134):

$$\sum_{r=0}^{1}[\delta(r-1)(2-r)(3-r)Y(3-r)]+4Y(2)$$

$$+\sum_{r=0}^{1}\sum_{s=0}^{1-r}\left[\sum_{q=0}^{1-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(0)Y(q)Y(1-r-s-q)\right]=0 \tag{4.135}$$

Aplicamos condiciones iniciales a la ecuación (4.135):

$$\sum_{r=0}^{1}[\delta(r-1)(2-r)(3-r)Y(3-r)]+4Y(2)$$

$$+\sum_{r=0}^{1}\sum_{s=0}^{1-r}\left[\sum_{q=0}^{1-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(q)Y(1-r-s-q)\right]=0 \tag{4.136}$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.139):

$$\sum_{r=0}^{1}[\delta(r-1)(2-r)(3-r)Y(3-r)]+4Y(2)$$

$$+\sum_{r=0}^{1}\left[\sum_{q=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(0)Y(q)Y(1-r-q)\right]=0 \tag{4.137}$$

Aplicamos condiciones iniciales a la ecuación (4.137):

$$\sum_{r=0}^{1}[\delta(r-1)(2-r)(3-r)Y(3-r)]+12Y(2)+\sum_{r=0}^{1}\left[\sum_{q=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(q)Y(1-r-q)\right]=0 \tag{4.138}$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.138):

$$\sum_{r=0}^{1}[\delta(r-1)(2-r)(3-r)Y(3-r)] + 4Y(2) + \sum_{q=0}^{1}\delta(0-1)Y(q)Y(1-q)$$

$$+\sum_{q=0}^{0}\delta(1-1)Y(q)Y(-q) = 0 \qquad (4.139)$$

Aplicamos teorema 5 a la ecuación (4.139):

$$\sum_{r=0}^{1}[\delta(r-1)(2-r)(3-r)Y(3-r)] + 4Y(2) + \sum_{q=0}^{0}Y(q)Y(-q) = 0 \qquad (4.140)$$

Desarrollamos las sumatorias de la ecuación (4.140):

$$\delta(0-1)(2)(3)Y(3) + \delta(1-1)(1)(2)Y(2) + 4Y(2) + Y(0)Y(0) = 0 \qquad (4.141)$$

Aplicamos teorema 5 y condiciones iniciales a la ecuación (4.142):

$$2Y(2) + 4Y(2) + 1 = 0$$

$$6Y(2) + 1 = 0$$

$$\boldsymbol{Y(2) = -\frac{1}{6}}$$

Efectuamos la sustitución k=2 en la ecuación (4.131):

$$\sum_{r=0}^{2}[\delta(r-1)(3-r)(4-r)Y(4-r)] + 2(3)Y(3)$$

$$+\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{2-r}\sum_{m=0}^{2-r-s}\sum_{p=0}^{2-r-s-m}\left[\sum_{q=0}^{2-r-s-m-p}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(p)Y(q)Y(2-r-s-m-p-q)\right] = 0$$

$$(4.142)$$

Desarrollamos las sumatoria interior en la ecuación (4.142):

$$\sum_{r=0}^{2}[\delta(r-1)(3-r)(4-r)Y(4-r)] + 6Y(3)$$

$$+\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{2-r}\sum_{m=0}^{2-r-s}\left[\sum_{q=0}^{2-r-s-m}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(0)Y(q)Y(2-r-s-m-q)\right] = 0 \qquad (4.143)$$

Aplicamos las condiciones iniciales a la ecuación (4.143):

$$\sum_{r=0}^{2}[\delta(r-1)(3-r)(4-r)Y(4-r)]+6Y(3)$$

$$+\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{2-r}\sum_{m=0}^{2-r-s}\left[\sum_{q=0}^{2-r-s-m}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(q)Y(2-r-s-m-q)\right]=0 \qquad (4.144)$$

Desarrollamos las sumatoria interior en la ecuación (4.144):

$$\sum_{r=0}^{2}[\delta(r-1)(3-r)(4-r)Y(4-r)]+6Y(3)$$

$$+\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{2-r}\left[\sum_{q=0}^{2-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(0)Y(q)Y(2-r-s-q)\right]=0 \qquad (4.145)$$

Aplicamos el teorema 5 a la ecuación (4.145):

$$\sum_{r=0}^{2}[\delta(r-1)(3-r)(4-r)Y(4-r)]+6Y(3)$$

$$+\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{2-r}\left[\sum_{q=0}^{2-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(q)Y(2-r-s-q)\right]=0 \qquad (4.146)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.146):

$$\sum_{r=0}^{2}[\delta(r-1)(3-r)(4-r)Y(4-r)]+6Y(3)+\sum_{r=0}^{2}\left[\sum_{q=0}^{2-r}\delta(r-1)Y(0)Y(q)Y(2-r-q)\right]=0$$

$$(4.147)$$

Aplicamos las condiciones iniciales a la ecuación (4.147):

$$\sum_{r=0}^{2}[\delta(r-1)(3-r)(4-r)Y(4-r)]+6Y(3)+\sum_{r=0}^{2}\left[\sum_{q=0}^{2-r}\delta(r-1)Y(q)Y(2-r-q)\right]=0 \quad (4.148)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.148):

$$\sum_{r=0}^{2}[\delta(r-1)(3-r)(4-r)Y(4-r)]+6Y(3)+\sum_{q=0}^{2}\delta(0-1)Y(q)Y(2-q)$$

$$+\sum_{q=0}^{1}\delta(1-1)Y(q)Y(1-q)+\sum_{q=0}^{0}\delta(2-1)Y(q)Y(-q)=0 \qquad (4.149)$$

Aplicamos el teorema 5 a la ecuación (4.149):

$$\sum_{r=0}^{2}[\delta(r-1)(3-r)(4-r)Y(4-r)]+6Y(3)+\sum_{q=0}^{1}Y(q)Y(1-q)=0 \qquad (4.150)$$

Desarrollamos las sumatorias de la ecuación (4.150):

$$\delta(0-1)(3)(4)Y(4)+\delta(1-1)(2)(3)Y(3)+\delta(2-1)(1)(2)Y(2)+6Y(3)+Y(0)Y(1)$$

$$+Y(1)Y(0)=0 \qquad (4.151)$$

Aplicamos el teorema 5 a la ecuación (4.151):

$$6Y(3)+6Y(3)=0$$

$$12Y(3)=0$$

$$\boldsymbol{Y(3)=0}$$

Efectuamos la sustitución k=3 en la ecuación (4.131):

$$\sum_{r=0}^{3}[\delta(r-1)(4-r)(5-r)Y(5-r)]+2(4)Y(4)$$

$$+\sum_{r=0}^{3}\sum_{s=0}^{3-r}\sum_{m=0}^{3-r-s}\sum_{p=0}^{3-r-s-m}\left[\sum_{q=0}^{3-r-s-m-p}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(p)Y(q)Y(3-r-s-m-p-q)\right]=0$$

$$(4.152)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.152):

$$\sum_{r=0}^{3}[\delta(r-1)(4-r)(5-r)Y(5-r)]+8Y(4)$$

$$\sum_{r=0}^{3}\sum_{s=0}^{3-r}\sum_{m=0}^{3-r-s}\left[\sum_{q=0}^{3-r-s-m}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(0)Y(q)Y(3-r-s-m-q)\right.$$

$$\sum_{q=0}^{2-r-s-m}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(1)Y(q)Y(2-r-s-m-q)$$

$$\left.+\sum_{q=0}^{1-r-s-m}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(2)Y(q)Y(1-r-s-m-q)\right]=0 \qquad (4.153)$$

Aplicamos condiciones iniciales a la ecuación (4.153):

$$\sum_{r=0}^{3}[\delta(r-1)(4-r)(5-r)Y(5-r)]+8Y(4)$$

$$+\sum_{r=0}^{3}\sum_{s=0}^{3-r}\sum_{m=0}^{3-r-s}\left[\sum_{q=0}^{3-r-s-m}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(q)Y(3-r-s-m-q)\right.$$

$$\left.+\sum_{q=0}^{1-r-s-m}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(2)Y(q)Y(1-r-s-m-q)\right]=0 \qquad (4.154)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.154):

$$\sum_{r=0}^{3}[\delta(r-1)(4-r)(5-r)Y(5-r)]+8Y(4)$$

$$+\sum_{r=0}^{3}\sum_{s=0}^{3-r}\left[\sum_{q=0}^{3-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(0)Y(q)Y(3-r-s-q)\right.$$

$$+\sum_{q=0}^{2-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(1)Y(q)Y(2-r-s-q)$$

$$+\sum_{q=0}^{1-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(2)Y(q)Y(1-r-s-q)$$

$$\left.+\sum_{q=0}^{1-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(0)Y(2)Y(q)Y(1-r-s-q)\right]=0 \qquad (4.155)$$

Aplicamos condiciones iniciales a la ecuación (4.155):

$$\sum_{r=0}^{3}[\delta(r-1)(4-r)(5-r)Y(5-r)]+8Y(4)$$

$$+\sum_{r=0}^{3}\sum_{s=0}^{3-r}\left[\sum_{q=0}^{3-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(q)Y(3-r-s-q)\right.$$

$$+\sum_{q=0}^{1-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(2)Y(q)Y(1-r-s-q)$$

$$\left.+\sum_{q=0}^{1-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(2)Y(q)Y(1-r-s-q)\right]=0 \qquad (4.156)$$

Simplificamos la ecuación (4.156)

$$\sum_{r=0}^{3}[\delta(r-1)(4-r)(5-r)Y(5-r)]+8Y(4)$$

$$+\sum_{r=0}^{3}\sum_{s=0}^{3-r}\left[\sum_{q=0}^{3-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(q)Y(3-r-s-q)\right.$$

$$\left.+2\sum_{q=0}^{1-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(2)Y(q)Y(1-r-s-q)\right]=0 \qquad (4.157)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.157):

$$\sum_{r=0}^{3}[\delta(r-1)(4-r)(5-r)Y(5-r)]+8Y(4)$$

$$+\sum_{r=0}^{3}\left[\sum_{q=0}^{3-r}\delta(r-1)Y(0)Y(q)Y(3-r-q)+\sum_{q=0}^{2-r}\delta(r-1)Y(1)Y(q)Y(2-r-q)\right.$$

$$\left.+\sum_{q=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(2)Y(q)Y(1-r-q)+2\sum_{q=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(0)Y(2)Y(q)Y(1-r-q)\right]=0$$

$$(4.158)$$

Aplicamos condiciones iniciales a la ecuación (4.158):

$$\sum_{r=0}^{3}[\delta(r-1)(4-r)(5-r)Y(5-r)]+8Y(4)$$

$$+\sum_{r=0}^{3}\left[\sum_{q=0}^{3-r}\delta(r-1)Y(q)Y(3-r-q)\ +\sum_{q=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(2)Y(q)Y(1-r-q)\right.$$

$$\left.+2\sum_{q=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(2)Y(q)Y(1-r-q)\ \right]=0 \qquad (4.159)$$

Desarrollamos las sumas interiores en la ecuación (4.159):

$$\sum_{r=0}^{3}[\delta(r-1)(4-r)(5-r)Y(5-r)]+8Y(4)+\sum_{q=0}^{3}\delta(0-1)Y(q)Y(3-q)$$

$$+\sum_{q=0}^{2}\delta(1-1)Y(q)Y(2-q)+\sum_{q=0}^{1}\delta(2-1)Y(q)Y(1-q)+\sum_{q=0}^{0}\delta(3-1)Y(q)Y(-q)$$

$$+\sum_{q=0}^{1}\delta(0-1)Y(2)Y(q)Y(1-q)$$

$$+\sum_{q=0}^{0}\delta(1-1)Y(2)Y(q)Y(-q)+2\left(\sum_{q=0}^{1}\delta(0-1)Y(2)Y(q)Y(1-q)\right.$$

$$\left.+\sum_{q=0}^{0}\delta(1-1)Y(2)Y(q)Y(-q)\ \right)=0 \qquad (4.160)$$

Aplicamos el teorema 5 a la ecuación (4.160):

$$\sum_{r=0}^{3}[\delta(r-1)(4-r)(5-r)Y(5-r)]+8Y(4)+\sum_{q=0}^{2}Y(q)Y(2-q)$$

$$+\sum_{q=0}^{0}Y(2)Y(q)Y(-q)+2\sum_{q=0}^{0}Y(2)Y(q)Y(-q)\ =0 \qquad (4.161)$$

Simplificamos la ecuación (4.161):

$$\sum_{r=0}^{3}[\delta(r-1)(4-r)(5-r)Y(5-r)]+8Y(4)$$

$$+\sum_{q=0}^{2}Y(q)Y(2-q)+\ 3\sum_{q=0}^{0}Y(2)Y(q)Y(-q)\ =0 \qquad (4.162)$$

Desarrollamos las sumatorias de la ecuación (4.162):

$$\delta(0-1)(4)(5)Y(5)+\delta(1-1)(3)(4)Y(4)+\delta(2-1)(2)(3)Y(3)+\delta(3-1)(1)(2)Y(2)$$

$$+8Y(4)+Y(0)Y(2)+Y(1)Y(1)+Y(2)Y(0)+3Y(2)Y(0)Y(0)\ =0 \qquad (4.163)$$

Aplicamos el teorema 5 y las condiciones iniciales a la ecuación (4.163):

$$12Y(4)+8Y(4)+Y(2)+Y(2)+3Y(2)\ =0 \qquad (4.164)$$

Simplificamos la ecuación (4.164)

$$20Y(4)+5Y(2)\ =0 \qquad (4.165)$$

Efectuamos la sustitución $Y(2)=-\frac{1}{6}$ en la ecuación (4.165):

$$20Y(4)+5\left(-\frac{1}{6}\right)\ =0$$

$$20Y(4)-\frac{5}{6}\ =0$$

$$20Y(4)=\frac{5}{6}$$

$$Y(4)=\frac{5}{120}$$

$$\boldsymbol{Y(4)=\frac{1}{24}}$$

Efectuamos la sustitución k=4 en la ecuación (4.131):

$$\sum_{r=0}^{4}[\delta(r-1)(5-r)(6-r)Y(6-r)]+2(5)Y(5)$$

$$+\sum_{r=0}^{4}\sum_{s=0}^{4-r}\sum_{m=0}^{4-r-s}\sum_{p=0}^{4-r-s-m}\left[\sum_{q=0}^{4-r-s-m-p}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(p)Y(q)Y(4-r-s-m-p-q)\right]=0$$

$$(4.166)$$

Desarrollamos la sumatoria interior en la ecuación (4.166):

$$\sum_{r=0}^{4}[\delta(r-1)(5-r)(6-r)Y(6-r)]+10Y(5)$$

$$+\sum_{r=0}^{4}\sum_{s=0}^{4-r}\sum_{m=0}^{4-r}\left[\sum_{q=0}^{4-r-s-m}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(p)Y(q)Y(4-r-s-m-q)\right.$$

$$+\sum_{q=0}^{3-r-s-m}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(1)Y(q)Y(3-r-s-m-q)$$

$$+\sum_{q=0}^{2-r-s-m}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(2)Y(q)Y(2-r-s-m-q)$$

$$\left.+\sum_{q=0}^{1-r-s-m}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(3)Y(q)Y(1-r-s-m-q)\right]=0 \qquad (4.167)$$

Aplicamos condiciones iniciales y efectuamos la sustitución $Y(3)=0$ en la ecuación (4.167)

$$\sum_{r=0}^{4}[\delta(r-1)(5-r)(6-r)Y(6-r)]+10Y(5)$$

$$+\sum_{r=0}^{4}\sum_{s=0}^{4-r}\sum_{m=0}^{4-r}\left[\sum_{q=0}^{4-r-s-m}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(p)Y(q)Y(4-r-s-m-q)\right.$$

$$\left.+\sum_{q=0}^{2-r-s-m}\delta(r-1)Y(s)Y(m)Y(2)Y(q)Y(2-r-s-m-q)\right]=0 \qquad (4.168)$$

Desarrollamos las sumatorias interiores en la ecuación (4.168):

$$\sum_{r=0}^{4}[\delta(r-1)(5-r)(6-r)Y(6-r)]+10Y(5)$$

$$+\sum_{r=0}^{4}\sum_{s=0}^{4-r}\left[\sum_{q=0}^{4-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(0)Y(p)Y(q)Y(4-r-s-q)\right.$$

$$+\sum_{q=0}^{3-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(1)Y(p)Y(q)Y(3-r-s-q)$$

$$+\sum_{q=0}^{2-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(2)Y(p)Y(q)Y(2-r-s-q)$$

$$\left.+\sum_{q=0}^{1-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(3)Y(p)Y(q)Y(1-r-s-q)\right]=0 \qquad (4.169)$$

Aplicamos condiciones iniciales y efectuamos la sustitución $Y(3)=0$ en la ecuación (4.169)

$$\sum_{r=0}^{4}[\delta(r-1)(5-r)(6-r)Y(6-r)]+10Y(5)$$

$$+\sum_{r=0}^{4}\sum_{s=0}^{4-r}\left[\sum_{q=0}^{4-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(p)Y(q)Y(4-r-s-q)\right.$$

$$\left.+\sum_{q=0}^{2-r-s}\delta(r-1)Y(s)Y(2)Y(p)Y(q)Y(2-r-s-q)\right]=0 \qquad (4.170)$$

Desarrollamos las sumatorias interiores en la ecuación (4.170):

$$\sum_{r=0}^{4}[\delta(r-1)(5-r)(6-r)Y(6-r)]+10Y(5)+\sum_{r=0}^{4}\left[\sum_{q=0}^{4-r}\delta(r-1)Y(0)Y(p)Y(q)Y(4-r-q)\right.$$

$$+\sum_{q=0}^{3-r}\delta(r-1)Y(1)Y(p)Y(q)Y(3-r-q)+\sum_{q=0}^{2-r}\delta(r-1)Y(2)Y(p)Y(q)Y(2-r-q)$$

$$+\sum_{q=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(3)Y(p)Y(q)Y(1-r-q)+\sum_{q=0}^{2-r}\delta(r-1)Y(0)Y(2)Y(p)Y(q)Y(2-r-q)$$

$$\left.+\sum_{q=0}^{1-r}\delta(r-1)Y(1)Y(2)Y(p)Y(q)Y(1-r-q)\right]=0 \qquad (4.171)$$

Aplicamos condiciones iniciales y efectuamos la sustitución $Y(3)=0$ en la ecuación (4.171):

$$\sum_{r=0}^{4}[\delta(r-1)(5-r)(6-r)Y(6-r)]+10Y(5)+\sum_{r=0}^{4}\left[\sum_{q=0}^{4-r}\delta(r-1)Y(p)Y(q)Y(4-r-q)\right.$$

$$\left.+\sum_{q=0}^{2-r}\delta(r-1)Y(2)Y(p)Y(q)Y(2-r-q)+\sum_{q=0}^{2-r}\delta(r-1)Y(2)Y(p)Y(q)Y(2-r-q)\right]=0$$

$$(4.172)$$

Simplificamos la ecuación (4.172):

$$\sum_{r=0}^{4}[\delta(r-1)(5-r)(6-r)Y(6-r)]+10Y(5)+\sum_{r=0}^{4}\left[\sum_{q=0}^{4-r}\delta(r-1)Y(p)Y(q)Y(4-r-q)\right.$$

$$\left.+2\sum_{q=0}^{2-r}\delta(r-1)Y(2)Y(p)Y(q)Y(2-r-q)\right]=0 \qquad (4.173)$$

Desarrollamos las sumatorias interiores en la ecuación (4.173):

$$\sum_{r=0}^{4}[\delta(r-1)(5-r)(6-r)Y(6-r)]+10Y(5)+\sum_{q=0}^{4}\delta(0-1)Y(p)Y(q)Y(4-q)$$

$$+\sum_{q=0}^{3}\delta(1-1)Y(p)Y(q)Y(3-q)+\sum_{q=0}^{2}\delta(2-1)Y(p)Y(q)Y(2-q)$$

$$+\sum_{q=0}^{1}\delta(3-1)Y(p)Y(q)Y(1-q)$$

$$+\sum_{q=0}^{0}\delta(4-1)Y(p)Y(q)Y(-q)+2\left(\sum_{q=0}^{2}\delta(0-1)Y(2)Y(p)Y(q)Y(2-q)\right.$$

$$\left.+\sum_{q=0}^{1}\delta(1-1)Y(2)Y(p)Y(q)Y(1-q)+\sum_{q=0}^{0}\delta(2-1)Y(2)Y(p)Y(q)Y(-q)\right)=0 \qquad (4.174)$$

Aplicamos el teorema 5 a la ecuación (4.174):

$$\sum_{r=0}^{4}[\delta(r-1)(5-r)(6-r)Y(6-r)] + 10Y(5) + \sum_{q=0}^{3} Y(p)Y(q)Y(3-q)$$

$$+2\sum_{q=0}^{1} Y(2)Y(p)Y(q)Y(1-q) = 0 \qquad (4.175)$$

Desarrollamos las sumatorias en la ecuación$(3.6.46)$:

$$\delta(0-1)(5)(6)Y(6) + \delta(1-1)(4)(5)Y(5) + \delta(2-1)(3)(4)Y(4) + \delta(3-1)(2)(3)Y(3)$$

$$+\delta(4-1)(1)(2)Y(2) + Y(0)Y(0)Y(3) + Y(1)Y(1)Y(2) + Y(2)Y(2)Y(1) + Y(3)Y(3)Y(0)$$

$$+2[Y(2)Y(0)Y(0)Y(1) + Y(2)Y(1)Y(1)Y(0)] = 0 \qquad (4.176)$$

Aplicamos el teorema 5 a la ecuación (4.176):

$$20Y(5) = 0$$

$$\boldsymbol{Y(5) = 0}$$

Aplicando la ecuación (3.4) y los resultados obtenidos, encontramos que la solución de la ecuación (4.130) es:

$$\boldsymbol{y(x) = 1 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^6 + \cdots}$$

La figura 6 muestra la aproximación entre la solución analítica y la solución hallada mediante DTM

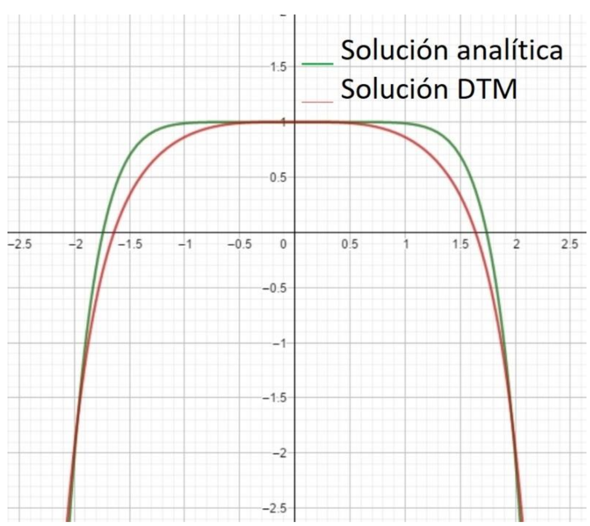

Figura 6. Solución analítica vs DTM para n=5

CAPÍTULO 5

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE ADOMIAN

Este método se aplica para la solución de ecuaciones diferenciales de la forma

$$Fu = g \tag{5.1}$$

donde F representa un operador diferencial no lineal que contiene términos lineales y no lineales y g es un función cualquiera en términos de las variables independientes.

El método de descomposición de Adomian consiste en descomponer la parte lineal de F en $L + R$, donde L es un operador invertible que corresponde a la derivada más alta, y R corresponde al resto del operador. La ecuación (2.1) se escribe de la forma:

$$Lu + Ru + Nu = g \tag{5.2}$$

donde Nu representa los términos no lineales.

Solucionando para Lu, la ecuación (2.2) toma la forma

$$Lu = g - Ru - Nu \tag{5.3}$$

Aplicando el operador inverso en ambos lados tenemos que:

$$L^{-1}(Lu) = L^{-1}(g) - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu) \tag{5.4}$$

El método de descomposición de Adomian permite hallar una solución en serie de la forma:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{5.5}$$

Este método nos permite descomponer el término no lineal Nu en una serie de polinomios de la forma:

$$Nu = \sum_{0}^{\infty} A_n \tag{5.6}$$

donde A_n representa los polinomios de Adomian, los cuales se pueden ser calculados mediante la siguiente ecuación de recurrencia:

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} \tag{5.7}$$

Donde λ es un parámetro.

Para el cálculo de los polinomios de Adomian, se aplicó un algortimo que presentamos a continación, y que permite calcularlos de una manera sencilla, dicho algoritmo es el siguiente:

$$A_0 = N(y_0)$$

$$A_1 = y_1 N'(y_0)$$

$$A_2 = y_2 N'(y_0) + \frac{1}{2!} y_1^2 N''(y_0)$$

$$A_3 = y_3 N'(y_0) + y_1 y_2 N''(y_0) + \frac{1}{3!} y_1^3 N'''(y_0)$$

.
.
.

CAPÍTULO 6

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LANE-EMDEN MEDIANTE EL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE ADOMIAN.

El problema de valor inicial a solucionar es $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+y^n=0,$ sujeto a $y(0)=1\;\;y\;\;y'(0)=0$

Aplicaremos el Método de Descomposición de Adomian para la solución de este problema.

6.1 Solución de la ecuación de Lane-Emden para n=o

Para el valor n=0, la ecuación de Lane-Emden toma la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+1=0 \tag{6.1}$$

Para esta ecuación tenemos que:

$$L(.)=x^{-2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)(.) \tag{6.2}$$

$$L(y)=\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx} \tag{6.3}$$

De la ecuación (6.1) tenemos que:

$$Ny=1$$

Definimos el operador inverso como:

$$L^{-1}(.)=\int_0^x x^{-2}\int_0^x x^2(.)dxdx \tag{6.4}$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, podemos hallar los polinomios de Adomian con la siguiente formula de recurrencia:

$$y_i=-\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2A_{i-1}dx\right)dx \tag{6.5}$$

Asignamos los valores $i=1,2\;y\;3$

Efectuamos la sustitución $i=1$

Hallamos A_0:

$$A_{i-1}=A_0$$

$$A_0=N(y_0)$$

$$A_0=1$$

Aplicamos la fórmula (6.5):

$$y_1=-\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2A_0dx\right)dx \tag{6.6}$$

Sustituimos A_0 en la ecuación (6.6) e integramos:

$$y_1 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2(1)dx\right)dx$$

$$y_1 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 dx\right)dx$$

$$y_1 = -\int_0^x x^{-2}\left(\frac{x^3}{3}\right)dx$$

$$y_1 = -\frac{1}{3}\int_0^x x dx$$

$$\boldsymbol{y_1 = -\frac{1}{6}x^2}$$

Efectuamos la sustitución $i = 2$

Hallamos A_1:

$$A_{i-1} = A_1$$

$$A_1 = y_1 N'(y_0)$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^2\frac{d}{dx}[1]_1$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^2[0]_1$$

$$A_1 = 0$$

Aplicamos la fórmula (6.5):

$$y_2 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 A_1 dx\right)dx \qquad (6.7)$$

Sustituimos A_1 en la ecuación(6.7)

$$y_2 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2(0)dx\right)dx$$

$$\boldsymbol{y_2 = 0}$$

Efectuamos la sustitución $i = 3$

Hallamos A_2:

$$A_{i-1} = A_1$$

$$A_2 = y_2 N'(y_0) + \frac{1}{2!}y_1^2 N''(y_0)$$

$$A_2 = (0)\frac{d}{dx}[1]_1 + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{6}x^2\right)^2 \frac{d^2}{dx^2}[1]_1$$

$$A_2 = (0)\frac{d}{dx}[1]_1 + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{6}x^2\right)^2 (0)$$

$$A_2 = 0$$

Aplicamos la fórmula (6.5):

$$y_3 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 A_2 dx\right)dx \tag{6.8}$$

Sustituimos A_2 en la ecuación (6.8)

$$y_3 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2(0)dx\right)dx$$

$$\boldsymbol{y_3 = 0}$$

Tenemos que la solución de la ecuación (6.1) tiene la forma:

$$y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots \tag{6.9}$$

Sustituyendo los anteriores resultados en la ecuación (6.9) obtenemos la solución de la ecuación (6.1):

$$\boldsymbol{y(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2}$$

6.2 Solución de la ecuación de Lane-Emden para n=1

Para el valor n=2, la ecuación de Lane-Emden toma la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0 \tag{6.10}$$

Para esta ecuación tenemos que:

$$L(.) = x^{-2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)(.) \tag{6.11}$$

$$L(y) = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} \tag{6.12}$$

De la ecuación (6.10) tenemos que:

$$N(y) = y$$

Definimos el operador inverso como:

$$L^{-1}(.) = \int_0^x x^{-2} \int_0^x x^2(.)dxdx \quad (6.13)$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, podemos hallar los polinomios de Adomian con la siguiente formula de recurrencia:

$$y_i = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 A_{i-1}dx\right)dx \quad (6.14)$$

Asignamos los valores $i = 1, 2\ y\ 3$

Efectuamos la sustitución $i = 1$

Hallamos A_0:

$$A_{i-1} = A_0$$

$$A_0 = N(y_0)$$

$$A_0 = 1$$

Aplicamos la fórmula (6.14):

$$y_i = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 A_0 dx\right)dx \quad (6.15)$$

Sustituimos A_0 en la ecuación (6.15) y desarrollamos las integrales:

$$y_1 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2(1)dx\right)dx$$

$$y_1 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 dx\right)dx$$

$$y_1 = -\int_0^x x^{-2}\left(\frac{x^3}{3}\right)dx$$

$$y_1 = -\frac{1}{3}\int_0^x xdx$$

$$\boldsymbol{y_1 = -\frac{1}{6}x^2}$$

Efectuamos la sustitución $i = 2$

Hallamos A_1:

$$A_{i-1} = A_1$$

$$A_1 = y_1 N'(y_0)$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^2 \frac{d}{dx}[y]_1$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^2(1)$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^2$$

Aplicamos la fórmula (6.14):

$$y_2 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 A_1 dx\right)dx \qquad (6.16)$$

Sustituimos A_1 en la ecuación (6.16) y desarrollamos las integrales:

$$y_2 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2\left(-\frac{1}{6}x^2\right)dx\right)dx$$

$$y_2 = \frac{1}{6}\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^4\, dx\right)dx$$

$$y_2 = \frac{1}{6}\int_0^x x^{-2}\left(\frac{x^5}{5}\right)dx$$

$$y_2 = \frac{1}{30}\int_0^x x^{-2}(x^5)dx$$

$$y_2 = \frac{1}{30}\int_0^x x^3 dx$$

$$y_2 = \frac{1}{30}\left(\frac{x^4}{4}\right)$$

$$\boldsymbol{y_2 = \frac{1}{120}x^4}$$

Efectuamos la sustitución $i = 3$

Hallamos A_2

$$A_{i-1} = A_2$$

$$A_2 = y_2 N'(y_0) + \frac{(y_1)^2}{2!}N''(y_0)$$

$$A_2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{120}}x^4[1]_1 + \frac{\left(-\frac{1}{6}x^2\right)^2}{2!}[0]_1$$

$$A_2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{120}}x^4[1]$$

$$A_2 = \frac{1}{120}x^4$$

Aplicamos la fórmula (6.14):

$$y_3 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 A_2 dx\right)dx \qquad (6.15)$$

Sustituimos A_2 en la ecuación (6.15) e integramos y obtenemos:

$$y_3 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2\left(\frac{1}{120}x^4\right)dx\right)dx$$

$$y_3 = -\frac{1}{120}\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^6 dx\right)dx$$

$$y_3 = -\frac{1}{120}\int_0^x x^{-2}\left(\frac{x^7}{7}\right)dx$$

$$y_3 = -\frac{1}{840}\int_0^x x^5 dx$$

$$\boldsymbol{y_3 = -\frac{1}{5040}x^6}$$

Tenemos que la solución de la ecuación (6.10) tiene la forma:

$$y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \dots \tag{6.16}$$

Aplicando los anteriores resultados y las condiciones iniciales en la ecuación (6.16) tenemos que la solución de la ecuación (6.10) es:

$$\boldsymbol{y(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6 + \cdots}$$

6.3 Solución de la ecuación de Lane-Emden para n=2

Para el valor n=2, la ecuación toma la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \tag{6.17}$$

Para esta ecuación tenemos que:

$$L(.) = x^{-2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)(.) \tag{6.18}$$

$$L(y) = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} \tag{6.19}$$

De la ecuación $(5.3.1)$ tenemos que:

$$Ny = y^2$$

Definimos el operador inverso como:

$$L^{-1}(.) = \int_0^x x^{-2} \int_0^x x^2(.)dxdx \qquad (6.20)$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales podemos hallar los polinomios de Adomian con la siguiente formula de recurrencia:

$$y_i = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 A_{i-1}dx\right)dx \qquad (6.21)$$

Asignamos los valores $i = 1, 2\ y\ 3$

Efectuamos la sustitución $i = 1$

Hallamos A_0

$$A_{i-1} = A_0$$

$$A_0 = N(y_0)$$

$$A_0 = 1$$

Aplicamos la fórmula (6.21):

$$y_i = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 A_0 dx\right)dx \qquad (6.22)$$

Sustituimos A_0 en la ecuación (6.22) e integramos:

$$y_1 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2(1)dx\right)dx$$

$$y_1 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 dx\right)dx$$

$$y_1 = -\int_0^x x^{-2}\left(\frac{x^3}{3}\right)dx$$

$$y_1 = -\frac{1}{3}\int_0^x xdx$$

$$\boldsymbol{y_1 = -\frac{1}{6}x^2}$$

Efectuamos la sustitución $i = 2$

Hallamos A_1

$$A_{i-1} = A_1$$

$$A_1 = y_1 N'(y_0)$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^2\frac{d}{dx}[y^2]_1$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^2[2y]_1$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^2[2]$$

$$A_1 = -\frac{1}{3}x^2$$

Aplicamos la fórmula (6.22):

$$y_2 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 A_1 dx\right)dx \tag{6.23}$$

Sustituimos A_1 en la ecuación (6.23) e integramos:

$$y_2 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2\left(-\frac{1}{3}x^2\right)dx\right)dx$$

$$y_2 = \frac{1}{3}\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^4\, dx\right)dx$$

$$y_2 = \frac{1}{3}\int_0^x x^{-2}\left(\frac{x^5}{5}\right)dx$$

$$y_2 = \frac{1}{15}\int_0^x x^{-2}(x^5)dx$$

$$y_2 = \frac{1}{15}\int_0^x x^3 dx$$

$$y_2 = 15\left(\frac{x^4}{4}\right)$$

$$\boldsymbol{y_2 = \frac{1}{60}x^4}$$

Efectuamos la sustitución $i = 3$

Hallamos A_2

$$A_{i-1} = A_2$$

$$A_2 = y_2 N'(y_0) + \frac{(y_1)^2}{2!}N''(y_0)$$

$$A_2 = y_2 N'(y^2) + \frac{(y_1)^2}{2!}N''(y^2)$$

$$A_2 = \frac{1}{60}x^4[2y]_1 + \frac{\left(-\frac{1}{6}x^2\right)^2}{2!}[2]_1$$

$$A_2 = \frac{1}{60}x^4[2] + \frac{\left(-\frac{1}{6}x^2\right)^2}{2}[2]$$

$$A_2 = \frac{1}{30}x^4 + \frac{1}{72}x^4[2]$$

$$A_2 = \frac{1}{30}x^4 + \frac{1}{36}x^4$$

$$A_2 = \frac{11}{180}x^4$$

Aplicamos la fórmula (6.22):

$$y_3 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 A_2 dx\right)dx \tag{6.24}$$

Sustituimos A_2 en la ecuación (6.24) y desarrollamos las integrales.

$$y_3 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2\left(\frac{11}{180}x^4\right)dx\right)dx$$

$$y_3 = -\frac{11}{180}\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^6 dx\right)dx$$

$$y_3 = -\frac{11}{180}\int_0^x x^{-2}\left(\frac{x^7}{7}\right)dx$$

$$y_3 = -\frac{11}{1260}\int_0^x x^5 dx$$

$$\boldsymbol{y_3 = -\frac{11}{7560}x^6}$$

Tenemos que la solución de la ecuación (6.17) tiene la forma:

$$y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots \tag{6.25}$$

Sustituyendo los anteriores resultados y las condiciones iniciales en la ecuación (6.25), tenemos que la solución de la ecuación (6.17)es:

$$\boldsymbol{y(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{60}x^4 - \frac{11}{7560}x^6 + \cdots}$$

6.4 Solución de la ecuación de Lane-Emden para n=3

Para el valor n=3, la ecuación toma la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + y^3 = 0 \tag{6.26}$$

Para esta ecuación tenemos que:

$$L(.) = x^{-2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)(.) \tag{6.27}$$

$$L(y) = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} \tag{6.28}$$

De la ecuación (6.26) tenemos que:

$$Ny = y^3$$

Definimos el operador inverso como:

$$L^{-1}(.) = \int_0^x x^{-2} \int_0^x x^2 (.) dx dx \qquad (6.29)$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales podemos hallar los polinomios de Adomian con la siguiente formula de recurrencia:

$$y_i = -\int_0^x x^{-2} \left(\int_0^x x^2 A_{i-1} dx \right) dx \qquad (6.30)$$

Asignamos los valores $i = 1, 2\ y\ 3$

Efectuamos la sustitución $i = 1$

Hallamos A_0

$$A_{i-1} = A_0$$

$$A_0 = N(y_0)$$

$$A_0 = 1$$

Aplicamos la ecuación (6.30)

$$y_i = -\int_0^x x^{-2} \left(\int_0^x x^2 A_0 dx \right) dx \qquad (6.31)$$

Sustituimos A_0 en la ecuación (6.31) y desarrollamos las integrales:

$$y_1 = -\int_0^x x^{-2} \left(\int_0^x x^2 (1) dx \right) dx$$

$$y_1 = -\int_0^x x^{-2} \left(\int_0^x x^2 dx \right) dx$$

$$y_1 = -\int_0^x x^{-2} \left(\frac{x^3}{3} \right) dx$$

$$y_1 = -\frac{1}{3} \int_0^x x dx$$

$$\boldsymbol{y_1 = -\frac{1}{6} x^2}$$

Efectuamos la sustitución $i = 2$

Hallamos A_1

$$A_{i-1} = A_1$$

$$A_1 = y_1 N'(y_0)$$

$$A_1 = -\frac{1}{6} x^2 \frac{d}{dx} [y^3]_1$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^2[3y^2]_1$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^2[3]$$

$$A_1 = -\frac{1}{2}x^2$$

Aplicamos la fórmula (6.31):

$$y_2 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 A_1 dx\right)dx \tag{6.32}$$

Sustituimos A_1 en la ecuación (6.32) y desarrollamos las integrales:

$$y_2 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2\left(-\frac{1}{2}x^2\right)dx\right)dx$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^4\, dx\right)dx$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\int_0^x x^{-2}\left(\frac{x^5}{5}\right)dx$$

$$y_2 = \frac{1}{10}\int_0^x x^{-2}(x^5)dx$$

$$y_2 = \frac{1}{10}\int_0^x x^3 dx$$

$$y_2 = \frac{1}{10}\left(\frac{x^4}{4}\right)$$

$$\boldsymbol{y_2 = \frac{1}{40}x^4}$$

Efectuamos la sustitución $i = 3$

Hallamos A_2

$$A_{i-1} = A_2$$

$$A_2 = y_2 N'(y_0) + \frac{(y_1)^2}{2!}N''(y_0)$$

$$A_2 = y_2 N'(y^3) + \frac{(y_1)^2}{2!}N''(y^3)$$

$$A_2 = \frac{1}{40}x^4[3y^2]_1 + \frac{\left(-\frac{1}{6}x^2\right)^2}{2!}[6y]_1$$

$$A_2 = \frac{1}{40}x^4[3] + \frac{\left(-\frac{1}{6}x^2\right)^2}{2}[6]$$

$$A_2 = \frac{3}{40}x^4 + \frac{1}{72}x^4[6]$$

$$A_2 = \frac{3}{40}x^4 + \frac{1}{12}x^4$$

$$A_2 = \frac{19}{120}x^4$$

Aplicamos la fórmula (6.31):

$$y_3 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 A_2 dx\right)dx \tag{6.33}$$

Sustituimos A_2 en la ecuación (6.33) y desarrollamos las integrales:

$$y_3 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2\left(\frac{19}{120}x^4\right)dx\right)dx$$

$$y_3 = -\frac{19}{120}\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^6 dx\right)dx$$

$$y_3 = -\frac{19}{120}\int_0^x x^{-2}\left(\frac{x^7}{7}\right)dx$$

$$y_3 = -\frac{19}{840}\int_0^x x^5 dx$$

$$y_3 = -\frac{19}{5040}x^6$$

$$\boldsymbol{y_3 = -\frac{19}{5040}x^6}$$

La solución de la ecuación (6.26)tiene la forma:

$$y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots \tag{6.34}$$

Sustituyendo los anteriores resultados y las condiciones iniciales en (6.34) tenemos que la solución de la ecuación (6.26)es:

$$\boldsymbol{y(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{40}x^4 - \frac{19}{5040}x^6 + \cdots}$$

6.5 Solución de la ecuación de Lane-Emden para n=4

Para el valor n=4, la ecuación de Lane-Emden toma la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + y^4 = 0 \tag{6.35}$$

Para esta ecuación tenemos que:

$$L\ \ (.) = x^{-2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)(.) \tag{6.36}$$

$$L(y) = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} \tag{6.37}$$

De la ecuación (6.37) tenemos que:

$$Ny = y^4$$

Definimos el operador inverso como:

$$L^{-1}(.) = \int_0^x x^{-2} \int_0^x x^2 (.) dxdx \tag{6.38}$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales podemos hallar los polinomios de Adomian con la siguiente formula de recurrencia:

$$y_i = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 A_{i-1} dx\right) dx \tag{6.39}$$

Asignamos los valores $i = 1{,}2\ y\ 3$

Efectuamos la sustitución $i = 1$

Hallamos A_0

$$A_{i-1} = A_0$$

$$A_0 = N(y_0)$$

$$A_0 = 1$$

Aplicamos la fórmula (6.39):

$$y_i = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 A_0 dx\right) dx \tag{6.40}$$

Sustituimos A_0 en (6.40) y desarrollamos las integrales:

$$y_1 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2(1)dx\right)dx$$

$$y_1 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 dx\right)dx$$

$$y_1 = -\int_0^x x^{-2}\left(\frac{x^3}{3}\right)dx$$

$$y_1 = -\frac{1}{3}\int_0^x x dx$$

$$\boldsymbol{y_1 = -\frac{1}{6}x^2}$$

Efectuamos la sustitución $i = 2$

Hallamos A_1

$$A_{i-1} = A_1$$

$$A_1 = y_1 N'(y_0)$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^2 \frac{d}{dx}[y^4]_1$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^2[4y^3]_1$$

$$A_1 = -\frac{2}{3}x^2$$

Aplicamos la fórmula (6.39)

$$y_2 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 A_1 dx\right)dx \tag{6.41}$$

Sustituimos A_1 en (6.41) y desarrollamos las integrales:

$$y_2 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2\left(-\frac{2}{3}x^2\right)dx\right)dx$$

$$y_2 = \frac{2}{3}\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^4\,dx\right)dx$$

$$y_2 = \frac{2}{3}\int_0^x x^{-2}\left(\frac{x^5}{5}\right)dx$$

$$y_2 = \frac{2}{15}\int_0^x x^{-2}(x^5)dx$$

$$y_2 = \frac{2}{15}\int_0^x x^3\,dx$$

$$y_2 = \frac{2}{15}\left(\frac{x^4}{4}\right)$$

$$\boldsymbol{y_2 = \frac{1}{30}x^4}$$

Efectuamos la sustitución $i = 3$

Hallamos A_2

$$A_{i-1} = A_2$$

$$A_2 = y_2 N'(y_0) + \frac{(y_1)^2}{2!}N''(y_0)$$

$$A_2 = y_2 N'(y^4) + \frac{(y_1)^2}{2!}N''(y^4)$$

$$A_2 = \frac{1}{30}x^4[4y^3]_1 + \frac{\left(-\frac{1}{6}x^2\right)^2}{2!}[12y^2]_1$$

$$A_2 = \frac{1}{30}x^4[4] + \frac{\left(-\frac{1}{6}x^2\right)^2}{2}[12]$$

$$A_2 = \frac{2}{15}x^4 + \frac{1}{72}x^4[12]$$

$$A_2 = \frac{2}{15}x^4 + \frac{1}{6}x^4$$

$$A_2 = \frac{3}{10}x^4$$

Aplicamos la fórmula (6.39):

$$y_3 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 A_2 dx\right)dx \tag{6.42}$$

Sustituimos A_2 en (5.5.7) y desarrollamos las integrales:

$$y_3 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2\left(\frac{3}{10}x^4\right)dx\right)dx$$

$$y_3 = -\frac{3}{10}\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^6 dx\right)dx$$

$$y_3 = -\frac{3}{10}\int_0^x x^{-2}\left(\frac{x^7}{7}\right)dx$$

$$y_3 = -\frac{3}{70}\int_0^x x^5 dx$$

$$y_3 = -\frac{3}{420}x^6$$

$$\boldsymbol{y_3 = -\frac{1}{140}x^6}$$

La solución de la ecuación (6.35)tiene la forma:

$$y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots \tag{6.43}$$

Sustituyendo los anteriores resultados y las condiciones iniciales en (6.43), tenemos que la solución de la ecuación (6.35) es:

$$\boldsymbol{y(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{30}x^4 - \frac{1}{140}x^6 + \cdots}$$

6.6 Solución de la ecuación de Lane-Emden para n=5

Para el valor n=5, la ecuación de Lane-Emden toma la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + y^5 = 0 \tag{6.44}$$

Para esta ecuación tenemos que:

$$L(.) = x^{-2}\frac{d}{dx}\left(x^{2}\frac{d}{dx}\right)(.) \tag{6.45}$$

$$L(y) = \frac{d^{2}y}{dx^{2}} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} \tag{6.46}$$

De la ecuación $(5.6.1)$ tenemos que:

$$Ny = y^{5}$$

Definimos el operador inverso como:

$$L^{-1}(.) = \int_{0}^{x} x^{-2}\int_{0}^{x} x^{2}(.)dxdx \tag{6.47}$$

Teniendo en cuenta Las condiciones iniciales podemos hallar los polinomios de Adomian con la siguiente formula de recurrencia:

$$y_{i} = -\int_{0}^{x} x^{-2}\left(\int_{0}^{x} x^{2}A_{i-1}dx\right)dx \tag{6.48}$$

Asignamos los valores $i = 1{,}2\ y\ 3$

Efectuamos la sustitución $i = 1$

Hallamos A_{0}

$$A_{i-1} = A_{0}$$

$$A_{0} = N(y_{0})$$

$$A_{0} = 1$$

Aplicamos la fórmula (6.48):

$$y_{i} = -\int_{0}^{x} x^{-2}\left(\int_{0}^{x} x^{2}A_{0}dx\right)dx \tag{6.49}$$

Sustituimos A_{0} en (6.49) y desarrollamos las integrales:

$$y_{1} = -\int_{0}^{x} x^{-2}\left(\int_{0}^{x} x^{2}(1)dx\right)dx$$

$$y_{1} = -\int_{0}^{x} x^{-2}\left(\int_{0}^{x} x^{2}dx\right)dx$$

$$y_{1} = -\int_{0}^{x} x^{-2}\left(\frac{x^{3}}{3}\right)dx$$

$$y_{1} = -\frac{1}{3}\int_{0}^{x} xdx$$

$$\boldsymbol{y_{1} = -\frac{1}{6}x^{2}}$$

Efectuamos la sustitución $i = 2$

Hallamos A_1

$$A_{i-1} = A_1$$

$$A_1 = y_1 N'(y_0)$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^2 \frac{d}{dx}[y^5]_1$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^2[5y^4]_1$$

$$A_1 = -\frac{5}{6}x^2$$

Aplicamos la fórmula (6.48):

$$y_2 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 A_1 dx\right)dx \qquad (6.50)$$

Sustituimos A_1 en (6.50) y desarrollamos las integrales

$$y_2 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2\left(-\frac{5}{6}x^2\right)dx\right)dx$$

$$y_2 = \frac{5}{6}\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^4\, dx\right)dx$$

$$y_2 = \frac{5}{6}\int_0^x x^{-2}\left(\frac{x^5}{5}\right)dx$$

$$y_2 = \frac{5}{30}\int_0^x x^{-2}(x^5)dx$$

$$y_2 = \frac{5}{30}\int_0^x x^3 dx$$

$$y_2 = \frac{5}{30}\left(\frac{x^4}{4}\right)$$

$$\boldsymbol{y_2 = \frac{1}{24}x^4}$$

Efectuamos la sustitución $i = 3$

$$A_{i-1} = A_2$$

$$A_1 = y_2 N'(y_0) + \frac{(y_1)^2}{2!}N''(y_0)$$

$$A_1 = y_2 N'(y^5) + \frac{(y_1)^2}{2!}N''(y^5)$$

$$A_2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{24}}\boldsymbol{x^4}[5y^4]_1 + \frac{\left(-\frac{1}{6}x^2\right)^2}{2!}[20y^3]_1$$

$$A_2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{24}}x^4[5] + \frac{\left(-\frac{1}{6}x^2\right)^2}{2}[20]$$

$$A_2 = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{24}}x^4 + \frac{1}{72}x^4[20]$$

$$A_2 = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{24}}x^4 + \frac{5}{18}x^4$$

$$A_2 = \frac{35}{72}x^4$$

Aplicamos la fórmula (6.48):

$$y_3 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 A_2 dx\right)dx \qquad (6.51)$$

Sustituimos A_2 en (6.51)y desarrollamos las integrales:

$$y_3 = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2\left(\frac{35}{72}x^4\right)dx\right)dx$$

$$y_3 = -\frac{35}{72}x^4\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^6 dx\right)dx$$

$$y_3 = -\frac{35}{72}x^4\int_0^x x^{-2}\left(\frac{x^7}{7}\right)dx$$

$$y_3 = -\frac{35}{504}\int_0^x x^5 dx$$

$$y_3 = -\frac{35}{3024}x^6$$

$$\boldsymbol{y_3 = -\frac{5}{432}x^6}$$

La solución de la ecuación (6.44)tiene la forma:

$$y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots \qquad (6.52)$$

Sustituyendo los anteriores resultados y las condiciones iniciales en (6.52), tenemos que la solución de la ecuación (6.44) es:

$$\boldsymbol{y(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{5}{432}x^6 + \cdots}$$

CONCLUSIONES

En este trabajo presentamos las propiedades y teoremas más importantes del Método de Transformación Diferencial y el Método de Descomposición de Adomian y la aplicación de ellos en un problema de la astrofísica.

Comparamos gráficamente las soluciones obtenidas por el Método de Transformación Diferencial con las obtenidas mediante métodos analíticos lo que permite observar la efectividad del DTM.

Presentamos la solución paso a paso de la ecuación de Lane-Emden para diferentes valores politropos, lo que hace de este trabajo un material de consulta para futuras investigaciones y el diseño de programas computacionales adecuados para solucionar problemas con cada uno de los dos métodos aplicados en este trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Abello, C., Cárdenas, P.P., and González, J. (2017). *An Iterative Method for Solving Cubic Nonlinear Schrodinger Equation.* Contemporary Engineering Sciences, Vol. 10, 2017, no. 22, 1095 – 1102.

[2] Abello, C. (2016). *Resolución de Modelos Físico-Matemáticos no Lineales por el Método de Descomposición de Adomian*, tesis de grado en Maestría en Enseñanza de la Matemática, Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.

[3] Ballén, J., León, P. (2017). *Método de Descomposición de Adomian*, tesis de Maestría en Matemática Aplicada, Universidad Eafit, Medellín, Colombia.

[4] Benhammouda, B., and Vazquez H. (2016). *A New multi-step technique with differential transform method for analytical solution of some nonlinear variable delay differential equations.* Benhammouda and Vazquez-Leal SpringerPlus (2016)5:1723. DOI 10.1186/s40064-016-3386-8.

[5] Cárdenas, P.P., Gonzáles, J., Trujillo, J. (2017). *An Iterative Method for Solving Delay Dierential Equations Applied to Biological Models.* Applied Mathematical Sciences, Vol. 11, 2017, no. 26, 1287 – 1295.

[6] Cárdenas, P.P. (2014). *An Iterative Method for Solving Two Special Cases of Lane-Emden Type Equation*. American Journal of Computational Mathematics, 2014, 4, 242-253.

[7] Cárdenas, P.P., Cardona, J., and Rojas, L. (2018). *Some Biomathematical Models Applying the Adomian Method.* International Journal of ChemTech Research, Vol.11 No.07, pp 239-246.

[8] Cárdenas, P.P., León, J., and Rodriguez, C. (2016). *The Zhou's Method for Solving the Euler Equidimensional Equation*. Applied Mathematics, 2016, 7, 2165-2173.

[9] Habila, A., (2018). *Applications of Differential Transform Method To Initial Value Problems.* American Journal of Engineering Research (AJER), Volume-6, Issue-12, pp-365-371.

[10] Habila, A., and Alamin, S. (2018). *Efficiency of Differential Transform Method to Solve Systems of Ordinary Differential Equations.* International Journal of Mathematics and Physical Sciences Research, Vol. 6, Issue 1, pp: (76-83), Month: April-September 2018.

[11] Mubarak, A., and Qaid, Y. (2018). *Adjusted Adomian Decomposition Method for Solving Emden-Fowler Equations of Various Order.* MAYFEB Journal of Mathematics - ISSN 2371-6193 Vol 3 (2018) - Pages 1-10.

[12] Osorio, G. (2017). *Aproximación de Soluciones a Ecuaciones Diferenciales con Retardo por el Método de Descomposición de Adomian*, tesis de grado en Maestría en Enseñanza de la Matemática, Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.

[13] Oke, A. S. (2017). *Convergence of Differential Transform Method For Ordinary Differential Equations.* Journal of Advances in Mathematics and Computer Science 24(6): 1-17, 2017; Article no. JAMSC.36489.

[14]Patil, N., and Khambayat, A. *Differential Transform Method for system of Linear Differential Equations.* Research Journal of Mathematical and Statistical Sciences, Vol. 2(3), 4-6, March (2014).

[15] Trujillo, J. (2016). *Aproximación Numérica de Ecuaciones Diferenciales con Retardo por el Método de Transformación Diferencial Aplicado a Modelos Biológicos*, tesis de grado en Maestría en Enseñanza de la Matemática, Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.

[16] Ucar, F., Yaman, V., and Yilmaz, B. (2018). *Iterative Methods For Solving Nonlinear Lane-Emden Equations.* Marmara Fen Bilimleri Dergisi 2018, 2: 176-188, DOI: 10.7240/marufbd.410960.

[17] Xie, L., Zhou, C., and Xu, S. (2019). *Solving the Systems of Equations of Lane-EmdenType by Differential Transform Method Coupled with Adomian Polynomials*. School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, No. 818 Fenghua Road, Ningbo 315211, Zhejiang, China

[18] Yazdani, A., Vahidi, J., and Ghasempour, S. (2016). *Comparison Between Differential Transform Method and Taylor Series Method for Solving Linear and Nonlinear Ordinary Differential Equations.* International Journal of Mechatronics, Electrical and Computer Technology (IJMEC), Vol. 6(20), Apr. 2016, PP. 2872-2877.

[19] Zomot, N. H., and Ababneh, O. Y. (2016). *Solution of Differential Equations of Lane-Emden Type by Combining Integral Transform and Variational Iteration Method.* Nonlinear Analysis and Differential Equations, Vol. 4, 2016, no. 3, 143 – 150.

[20] (2019). Retrieved 6 June 2019, from:http://www.astrosen.unam.mx/~richer/docencia/astrofisica1/estructura_estatica.pdf

[21]Luna.ovh. (2019). Ecuación de Lane-Emden. [online] Available at: https://www.luna.ovh/planeta/es/Ecuaci%C3%B3n_de_Lane-Emden [Accessed 2 Jul. 2019].