UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

PROYECTO DE GRADO

USO DE GEOGEBRA PARA AFRONTAR OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN EL CURSO DE MATEMÁTICAS 1 DE LA UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

AUTORES: LUIS ÁNGEL MONTOYA SUÁREZ

ALEJANDRO DÍAZ LLANO

DIRECTOR: CARLOS ALBERTO RODRÍGUEZ VARELA

14 de junio de 2016

Índice General

Quiero hacer un reconocimiento a todas aquellas personas que han contribuido en la formación profesional y humana a lo largo de este camino, tanto en los salones de clase como fuera de ellos; la paciencia, los desvelos, el amor, el apoyo en las adversidades, dando siempre el impulso para seguir adelante.

A todos aquellos a quienes he conocido, aprecio y admiro, de quienes he recibido grandes lecciones.

En particular a:

Dios, por permitirme el suficiente entendimiento y concederme salud para poder discernir y disfrutar estos momentos.

Dora Inés, mi esposa, pues sin el amor, cariño y apoyo, seguramente hubiera perdido el camino.

Luis Alberto Estrada, que con su corazón grande y desprendido me brindó todo su apoyo para alcanzar mi formación profesional y humana; incluso en varias oportunidades con su conocimiento.

A mis amigos entrañables: Alejandro Díaz y Alejandro Estrada.

Luis Ángel Montoya Suárez

A la memoria de Andrés Felipe Ordóñez Acosta

Alejandro Díaz Llano

AGRADECIMIENTOS

A Carlos Alberto Rodríguez V., por la gestión y apoyo en la dirección de todo el proyecto y la orientación en la aplicación de la propuesta, a Edwin Joe Orrego, por la asesoría durante la ejecución del proyecto, a Harold Duque S. y Carlos A. Muñoz, por las recomendaciones y consejos durante el inicio del proyecto, a Daniela Castaño R., por tomarse la molestia de leer el documento y sugerir correcciones tan importantes, a todos los docentes que nos dieron voz de aliento para sacar el proyecto adelante y a todos nuestros compañeros por su acompañamiento durante esta tarea.

INTRODUCCIÓN

La investigación plantea el uso de GeoGebra® para afrontar errores en el aprendizaje del concepto de límite de una función en el curso de matemáticas 1 de la Universidad Tecnológica de Pereira (UTP).

En la pedagogía y la dinámica del proceso de aprendizaje se reconocen algunos errores cognitivos que se generan durante el aprendizaje de un concepto y se denominan *obstáculos epistemológicos*. Desde diferentes proyectos y estudios en varios lugares del mundo se han reconocido algunos obstáculos durante el aprendizaje del concepto límite, que vienen a formar parte de los procesos educativos de los estudiantes y no se reconoce un indicador único sobre origen de los mismos.

El interés de la investigación está basado en la necesidad de usar alternativas tecnológicas para disminuir y afrontar estos errores en el aprendizaje del concepto de límite de una función. Con este objetivo, se hace uso del software libre GeoGebra, aplicado al proceso académico de un grupo de experimento. Así mismo, se toma un grupo de control para contrastar los resultados obtenidos durante el aprendizaje del concepto.

Al final se presentan las conclusiones conseguidas en la implementación de la investigación; las opiniones de las partes involucradas en el proceso, docentes y estudiantes, y se hacen las recomendaciones pertinentes.

Capítulo 1

TÍTULO

Uso de GeoGebra para afrontar obstáculos epistemológicos en el aprendizaje del concepto de límite de una función en el curso de Matemáticas 1 en la Universidad Tecnológica de Pereira.

Capítulo 2

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1. SITUACIÓN DEL PROBLEMA

El cálculo diferencial constituye uno de los fundamentos matemáticos para cualquier persona que curse estudios superiores y que pretenda participar en la sociedad como profesional en las áreas de ingeniería, producción, ciencia y hasta educación. Todos los programas de ingeniería, ciencias naturales y ciencias exactas incluyen este curso en sus planes de estudio.

Dada la relevancia de las matemáticas, su estudio se ha relacionado con muchas características, algunas de las cuales no son tan positivas. En cualquier nivel, éstas se han asociado a una alta dificultad en su aprendizaje; lo cual se debe a variadas razones, como que no se tienen los conocimientos previos necesarios para determinados contenidos o que no hay suficientes personas capacitadas para su enseñanza o que los medios y recursos que facilitan el aprendizaje no están disponibles o no se usan, etcétera. Son algunos de estos temas, especialmente los pedagógicos, los que deben enfrentar los educadores actuales.

De manera particular, se encuentra un capítulo fundamental en el contenido del cálculo diferencial que se caracteriza por su formalismo, su relevancia para los siguientes contenidos teóricos y su uso en diversos contextos de la ciencia; éste es el de *límite*. La importancia del concepto radica en que es base para otros temas en el cálculo; como lo es la continuidad de funciones, la derivada y la integral. Estos contenidos posteriores son necesarios para el estudio y aplicación teórica y práctica de cursos más avanzados del cálculo y otras disciplinas.

Sin embargo, al tiempo que se estudian los conceptos relacionados al límite de una función, se identifican algunos errores que comenten los estudiantes y que impiden la adecuada apreciación al concepto. En didáctica, estos errores se reconocen como *obstáculos epistemológicos*. Comúnmente, los estudiantes realizan algunos procedimientos erróneos que, de no ser identificados ni afrontados, serán un impedimento (y un tedio) para el aprendizaje de los siguientes conceptos.

En la UTP es común escuchar cada semestre comentarios, de docentes y estudiantes de los cursos de matemáticas 1, sobre los errores y lo complicado que suele ser esta sección durante el curso y de su importancia para el estudio y comprensión de la matemática. Históricamente, la construcción y definición formal del concepto de límite tampoco fue simple, y de cierta forma este hecho se repite en las aulas de clase; allí se evidencian los grandes retos que trae consigo el concepto durante su enseñanza y aprendizaje, en los aspectos gráficos, simbólicos y numéricos.

Estos cursos son orientados por personas con diferentes cualidades profesionales: ingenieros y licenciados, con maestrías y doctorados. Sin embargo, las dificultades continúan, de lo que se puede pensar que la actividad docente en este espacio requiere de otros recursos para enfrentar dichas problemáticas. Entre otras, una solución que ha tenido gran acogida e impacto positivo es el uso de material tecnológico dentro del aula, acompañando y complementando la enseñanza y aprendizaje de los contenidos.

Esta investigación busca implementar de manera activa un recurso tecnológico en el aula de clase considerándolo potente, útil y apropiado para este espacio académico, enfocado al estudio del concepto de límite y acompañando el proceso educativo usual de la UTP.

2.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Ya se reconoce el uso de recursos tecnológicos en los cursos de matemáticas en diferentes niveles educativos. Pero, pese a la variedad de software matemático, la implementación de la tecnología en las aulas de clase ha sido "lenta y compleja" [1], y es posible reconocer que esta inclusión es mucho más compleja en los niveles universitarios.

Teniendo en cuenta lo anterior, se plantea la siguiente pregunta para orientar la investigación: ¿Cuál es la efectividad del uso del software matemático GeoGebra para afrontar obstáculos epistemológicos en el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de límite de estudiantes del curso de matemáticas 1 en la Universidad Tecnológica de Pereira?

Capítulo 3

JUSTIFICACIÓN

Esta investigación está direccionada a enfrentar errores cometidos durante el aprendizaje del concepto de límite de una función que se reconocen como *obstáculos epistemológicos* e impiden un aprendizaje adecuado de este concepto y de futuros conceptos en el estudio del cálculo diferencial e integral. Pese a que la problemática se reconoce en muchos y diferentes espacios académicos, se han hecho pocas cosas para solucionarla.

Lo que se propone en esta investigación es nuevo para el contexto de la UTP. Aunque se reconoce la labor de algunos docentes que de manera individual han buscado llevar las nuevas tecnologías a las aulas de clase, esta investigación pretende ser relevante y generar conclusiones para el proceso educativo en general.

Enfrentando estos errores durante el aprendizaje del concepto se espera que los estudiantes no tengan mayores problemas en el aprendizaje de los siguientes contenidos. Además, se busca que tengan las suficientes herramientas conceptuales para fortalecer el proceso académico individual. En cierta medida, se busca la apropiación de los contenidos necesarios y fortalecimiento de la **ZONA DE DESARROLLO REAL** para la continuación de formación académica.

Se propone el uso de GeoGebra para acompañar el proceso de enseñanza aprendizaje, pues éste tiene la ventaja de combinar los aspectos gráfico, numérico y algebraico en un solo lugar y de manera dinámica. Además, facilita el uso de hoja de cálculo y de construcciones dinámicas con las cuales se puede interactuar de manera constante, marcando una diferencia significativa en cuanto la presentación usual de estos aspectos en un tablero. Además, se hace una propuesta al uso de recursos de este tipo en los cursos del programa de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la UTP.

Finalmente, hay tres puntos centrales: primero, la comprensión del concepto de límite más allá de las dificultades formales que éste trae consigo; segundo, el reconocimiento de la pertinencia de implementar recursos tecnológicos en el aula de clase y tercero, el desarrollo e implementación de diferentes proyectos enfocados a la mejora del contexto pedagógico en la UTP.

Capítulo 4

HIPÓTESIS

El proyecto tiene dos finalidades pedagógicas: una es que los estudiantes del grupo de experimento puedan resolver de manera correcta ejercicios del tema de límites, sin cometer los errores epistemológicos que se han identificado, la segunda es que también se sientan cómodos con los recursos usados en clase y que consideren desde ya el uso de estos y otros similares como herramientas para su proceso formativo.

Se busca, haciendo uso de una prueba inicial, una caracterización de los grupos de experimento y de control, con el fin de determinar posibles diferencias estadísticamente significativas en los resultados promedios de cada grupo respecto al contenido de precálculo. En este punto se establece una primera hipótesis de la siguiente forma:

H_{10}: Las medias en los resultados de la primera prueba en ambos grupos no muestran diferencias estadísticamente significativas.

H_{1A}: Se encuentran diferencias estadísticamente significativas en las medias de los resultados de la primera prueba en los grupos.

Después de esta prueba se presentará al grupo de experimento unas construcciones, como se describe en el capítulo de Metodología 7. Luego, se realiza una prueba final sobre la cual se establece una segunda hipótesis similar a la anterior, respecto al contenido de límites, de la siguiente forma

H_{20}: Las medias en los resultados de la segunda prueba en ambos grupos no muestran diferencias estadísticamente significativas.

H_{2A}: Se encuentran diferencias estadísticamente significativas en las medias de los resultados de la segunda prueba en los grupos.

Para llegar a la verificación de tales hipótesis se hará uso de Pruebas t,como se menciona en el capítulo de Análisis 8.

Capítulo 5

OBJETIVOS

5.1. OBJETIVO GENERAL

Usar el software matemático GeoGebra para afrontar obstáculos epistemológicos en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de límite de una función, con estudiantes del curso de matemáticas 1 de la Universidad Tecnológica de Pereira.

5.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Considerar las diferencias en el aprendizaje de los principales conceptos del precálculo que anteceden el contenido de límite en ambos grupos.

- Permitir que los estudiantes fortalezcan y enriquezcan sus argumentos cuando se estudian los contenidos sobre límites y cuando se enfrentan a ejercicios prácticos.

- Determinar la efectividad del uso de GeoGebra como recurso para enfrentar obstáculos epistemológicos en el aprendizaje del contenido de límite.

Capítulo 6

MARCO DE REFERENCIA

6.1. MARCO DE ANTECEDENTES

En los últimos años se han desarrollado trabajos e investigaciones educativas sobre la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite. Dichos trabajos se han hecho en niveles de educación media y superior. Entre estos, se resaltan aquellos que implementan en el aula de clase recursos tecnológicos y software matemático como supuestos que mejoran el proceso de enseñanza aprendizaje de este contenido.

Vrancken *et al* [2], identifican algunos de los inconvenientes que tienen los estudiantes de "carreras universitarias no matemáticas" durante el aprendizaje del concepto de límite. El trabajo desarrollado por Blázquez y Ortega [3] incluye una lista de dificultades identificadas en estudiantes de segundo grado de bachillerato (17 y 18 años) al ejecutar su propuesta en España. En estos dos trabajos, se reconoce y evidencia la dificultad de aprendizaje del concepto.

Esto no se aleja del proceso histórico relacionado al concepto. La interpretación y aplicación del concepto de límite fue históricamente compleja y pasaron 150 años a las apreciaciones respectivas al cálculo de Isaac Newton y Gottfried Leibniz antes de que se introdujeran “definiciones irrebatibles y formales” [4] al respecto.

Sin embargo, una tendencia interesante que se ha tomado, en todo el mundo, para afrontar esta problemática pedagógica es la inclusión de recursos tecnológicos y de software especializado en las aulas de clase. El alcance de este objetivo ha tenido buenos resultados en diferentes áreas del conocimiento, y es preciso que se busquen iguales resultados en el campo de las matemáticas.

En Colombia y países hispanohablantes se destaca el proceso que ha realizado Julio Ríos [5], quien hace uso de medios y redes de comunicación (como YouTube y Facebook) para explicar en vídeo ejercicios de límites (y muchos otros temas). De manera similar se encuentran diferentes canales, blogs y perfiles en los que se especializan en la enseñanza y solución de ejercicios. Un caso más local, en la UTP, es el trabajo hecho por el profesor Fabio Valencia M. [6], quien ha creado y puesto en su blog una serie de vídeo-tutoriales en los que explica y soluciona algunos límites.

Sobre software especializado hay uno sobresaliente: GeoGebra. Sobresale por diversas razones, entre ellas, que es un software gratuito enfocado a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. José Fernández [7], sobre el concepto de función y límite para estudiantes de primer grado de bachillerato en España, sugiere el uso de los recursos visuales de GeoGebra para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de función y límite. En un documento sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo, publicado para el International Congress on Mathematical Education 2008 [1], se describen algunas experiencias positivas sobre el uso de GeoGebra en el aula.

Así, resulta pertinente realizar una integración de GeoGebra y el concepto de límite en el aula de clase, ésta representa una experiencia muy interesante y positiva para el proceso educativo del curso de cálculo. Además; teniendo en cuenta experiencias, conclusiones y sugerencias de otros grupos de investigación y aplicaciones realizadas por ellos, el proceso que se propone resulta llamativo e innovador para los estudiantes.

6.2. MARCO CONCEPTUAL

Los siguientes son los conceptos matemáticos más relevantes de este proyecto.

Cálculo diferencial en una variable: Parte del análisis matemático que estudia la relación y razón de cambio de una variable en función de otra.

Función: Una función f es una relación de elementos (numéricos) que asigna uno y solo un elemento del codominio a cada uno de los elementos del dominio.

Dominio de una función: Es el conjunto de elementos (numéricos) x a los que una función f puede asignar un elemento del codominio. Son considerados como los elementos de entrada en una función.

Codominio de una función: Es el conjunto de elementos (numéricos) $f(x)$ asignados a los elementos x del dominio. Son considerados como los elementos de salida en una función.

Límite L de una función $f(x)$ en un punto c: Se dice que L es el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$ si se cumplen las dos siguientes condiciones:

1. $f(x)$ no necesita estar definida en $x = c$, pero debe estar definida sobre todos los otros x de un intervalo que contenga c.
2. Para todo $\epsilon > 0$ se puede encontrar un $\delta > 0$ tal que para todos los x en el dominio de f se cumpla

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Esto se nota como

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

En este proyecto se propone el uso de unas construcciones específicas realizadas en GeoGebra como propuesta didáctica a las dificultades identificadas durante el aprendizaje del contenido de límites. Estas dificultades se identifican como obstáculos epistemológicos, concepto estudiado principalmente por Gastón Bachelard y Guy Brousseau.

Se identifican tres obstáculos didácticos según su origen [8]: de origen ontogenético, de origen didáctico y *de origen epistemológico*. De estos últimos se ocupa el presente proyecto.

Se menciona ahora el concepto central en el que se basará el trabajo pedagógico propuesto.

Obstáculos Epistemológicos Se definen como elementos psicológicos, relacionados con el objeto de estudio, que no permiten un correcto aprendizaje de un concepto específico. Los obstáculos epistemológicos se manifiestan mediante los errores visibles cometidos por los estudiantes [8].

6.3. MARCO TEÓRICO

Para el desarrollo de este trabajo, se acude a las apreciaciones hechas sobre la manera en que se genera el aprendizaje según la corriente pedagógica constructivista, sumada a las apreciaciones hechas por G. Bachelard y G. Brousseau sobre el mismo aspecto. Dicha corriente considera que el conocimiento se genera a partir de las interacciones que una persona tenga con la realidad. A medida que se generan las relaciones con el medio, se van adquiriendo experiencias que permiten modificar la estructura cognitiva y la forma de interactuar de la persona con dicho medio. Es de resaltar en esta corriente la importancia que tienen los conocimientos previos, pues son estos los que permiten la modificación cognitiva y por lo tanto el éxito del aprendizaje.

En el contexto educativo, se considera que el aprendizaje surge a partir de espacios estimulantes generados por los docentes que permite a los estudiantes el desarrollo del propio pensamiento y la reflexión del contexto vivido. Permitiendo estos aspectos, en la línea constructivista se encuentran el Aprendizaje Significativo y el Aprendizaje por Descubrimiento, cuyos representantes principales son David P. Ausubel y Jerome S. Bruner. Además, en este espacio educativo, el constructivismo reconoce el aprendizaje como un suceso social, así que el trabajo colectivo es también fundamental para los estudiantes. Sobre este último aspecto, las metodologías implementadas en este proyecto consideran las ideas de Lev S. Vygotsky en relación al aprendizaje social y los procesos de aprendizaje.

Actualmente, existen diversas aplicaciones que se pueden usar en el contexto educativo y para fines similares a los que se proponen en el proyecto. En general, existe diversidad de aplicaciones a diferentes contenidos de las matemáticas, algunas de éstas y sus principales características son:

Nombre	**Características**
Kalcul	Para cálculo mental simple
KBruch	Aplicación interactiva para aprender fracciones
TuxMath	Juegos lúdicos de matemáticas
CarMetal	Geometría interactiva
KalGebra	Solución de expresiones y graficador
Scilab	Aplicación para ingeniería de cálculo numérico
Mathematica	Visualización, estructuras matemáticas
MatLab	Representación de funciones y GUI
GeoGebra	Aplicación dinámica de geometría, álgebra, gráficas, estadísticas

Entre estas aplicaciones, se optó por hacer uso de GeoGebra por su potencial dinámico y conexión entre las diferentes vistas que ofrece, además por ser un software libre y de uso masivo en ámbitos académicos internacionales.

6.4. MARCO DEMOGRÁFICO

El proyecto se ejecuta con dos grupos del curso de matemáticas 1 de la UTP. El curso pertenece a los programas de Tecnologías, Ingenierías y de Ciencias Básicas y es de los primeros que se deben tomar en el pregrado, por lo cual en general los estudiantes, hombres y mujeres, tienen edades alrededor de los 18 años.

El grupo de control se compone de veintidós estudiantes y participan de este proyecto solo como referente para la prueba inicial y el análisis de resultados. El contenido de límites para este grupo es presentado de la forma en la UTP: el docente presenta una teoría, realiza explicaciones y ejercicios, propone actividades y sugiere una referencia bibliográfica.

El grupo de experimento se compone con catorce estudiantes. Uno de los estudiantes es Sordo y cuenta con una persona interprete para sus clases por lo que la comunicación era favorable en ambas direcciones. Además, otro estudiante había realizado un curso inicial de matemáticas en otra universidad, por lo que tiene un bagaje en el área de matemáticas.

En general, los estudiantes de la UTP viven en zonas cercanas a la ciudad de Pereira, aunque a la universidad pertenecen estudiantes de muchas zonas del país. En general, no existen graves situaciones que dificulten los procesos de comunicación en el contexto académico.

6.5. MARCO GEOGRÁFICO

La UTP está ubicada en el barrio Álamos de la ciudad de Pereira, en el departamento de Risaralda, en la región Andina de Colombia. Es la única universidad de carácter público en el departamento. El campus cuenta con diferentes edificios en donde se ubican las diferentes facultades, direcciones y aulas de clase. Para mayor información, sobre la ubicación y contacto con la universidad se puede consultar su página web `utp.edu.co`.

La ciudad de Pereira se encuentra a una altitud media de 1411 m s.n.m. y limita al Norte con los municipios de Dosquebradas, Santa Rosa de Cabal y Marsella (Departamento de Risaralda). Al Sur, con los municipios de Ulloa (Departamento del Valle), Filandia y Salento (Departamento del Quindío). Al Oriente, con el Departamento del Tolima, con Anzoátegui, Santa Isabel, Ibagué y zona de los nevados. Al Occidente, con los municipios de Cartago, Anserma Nuevo (Departamento del Valle), Balboa, La Virginia (Departamento de Risaralda).

Capítulo 7

METODOLOGÍA

La metodología implementada en el proyecto se describirá según las etapas que conformaron todo el proceso.

7.1. OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

En algunos trabajos llevados a cabo por diferentes grupos de investigación en diferentes partes del mundo se han identificado algunos obstáculos epistemológicos durante el aprendizaje del concepto de límite y que, como se mencionó antes, se representan como errores cometidos durante el proceso de aprendizaje.

En el trabajo realizado por Blazquez y Ortega [3] se estructuran algunas tareas para comprender el proceso de aprendizaje de los estudiantes durante el estudio de límites. Entre éstas se reconocen algunas tareas que deben cumplir los estudiantes durante el curso del Matemáticas 1 en la UTP, como son

- Representaciones de forma gráfica del límite de una función (IGIL[1])

[1]Estas abreviaciones son usadas en el trabajo original

- Existencia de límite algebraico (ELA)
- Existencia de límite gráfico (ELG)
- Análisis de la tendencia lateral numérica (ATLN)
- Existencia de límite a través de los límites laterales en forma gráfica (CLLG)
- Idea gráfica de límite de una función en un punto (INPL)

Y se suman

- Comprensión de los valores de ϵ y δ en la definición formal
- Existencia de límites trigonométricos
- Continuidad de funciones en forma gráfica y analítica

En las conclusiones del mismo trabajo se enuncia una lista de las dificultades que se encuentran durante el cumplimiento adecuado de estas tareas. Entre estas dificultades, que representan obstáculos epistemológicos, se consideran las siguientes para este proyecto

- Asocian «todas» las gráficas con funciones conocidas
- No entienden la idea gráfica de límite
- Consideran que son puntos distintos p^+ y p^-
- Comprenden la no existencia de límite de una función
- Interpretan indeterminaciones como la no existencia del límite

Estas dificultades se han considerado porque los recursos que se proponen en este proyecto pueden ayudar a evitar y corregir las mismas. De esta forma, las construcciones realizadas en GeoGebra buscan justificar la manera adecuada en que se deben solucionar las diferentes tareas alrededor del concepto de límite.

A estos obstáculos epistemológicos se le suman los siguientes:

- Se puede hallar el valor del límite de cualquier función calculando las imágenes valores cercanos a x

- La existencia del límite se considera como el valor de la función; es decir, se suele pensar que

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

  Lo cual no es cierto siempre. Este aspecto adquiere relevancia en el estudio de continuidad de una función en el cálculo.

Para cada uno de estos obstáculos se propone una forma para enfrentarlo haciendo uso de GeoGebra, como recurso implementado en el aula de clase. Cada una de las construcciones tiene características con las que se pueden evitar o corregir estas dificultades.

7.2. PRUEBA INICIAL

En ambos grupos, de control y de experimento, se realiza una prueba inicial (Ver Apéndice A) que busca evaluar el aprendizaje de los estudiantes con relación a conceptos del precálculo, especialmente para aquellos que son relevantes para el estudio de límites. Del grupo de control participan veintidós estudiantes y del grupo de experimento catorce estudiantes.

En el grupo de control se hizo la prueba de forma anónima, considerando la misma como parte del control de contenido del curso de matemáticas 1 en la UTP. En el grupo de experimento se hizo con los datos de los estudiantes, aunque sin fines evaluativos en su curso. Para la solución de la prueba se considera una hora.

Estos contenidos de precálculo son los siguientes

- Intérvalo solución de una inecuación
- Evaluación de un valor en una función
- Simplificación de expresiones algebraicas
- Dominio de una función
- Gráfica de funciones
- Representaciones de funciones a trozos

La prueba fue revisada por el docente que dirigía la cátedra académica en ambos grupos y estuvo de acuerdo en la conveniencia para incluir estos temas en la misma.

Con esta prueba se quiere determinar el conocimiento de los conceptos que son base para el contenido de límite y con los que se da lugar al aprendizaje del cálculo. Estos temas y ejercicios incluidos están basados en el material bibliográfico que corresponde a estos contenidos. Los resultados de esta prueba argumentaran los análisis correspondientes a la primera hipótesis propuesta.

7.3. CONSTRUCCIONES EN GEOGEBRA

Una vez reconocidos y seleccionados los obstáculos epistemológicos para este proyecto, se inicia el proceso de enseñanza aprendizaje alrededor del concepto de límite.

El contenido de límites implementado contaba con las siguientes secciones

- Concepto Intuitivo
- Definición Formal
- Límites Laterales
- No Existencia del Límite
- Límites al Infinito
- Límites Infinitos
- Límites Trigonométricos
- Propiedades de Límites
- Continuidad
- Teorema de Valor Intermedio

Atendiendo a los obstáculos se realizan algunas construcciones en GeoGebra para ser presentadas al grupo de experimento como recurso complementario al proceso, atendiendo a las necesidades de contenido y del curso.

Ambos grupos tienen llevan su proceso de formación con el mismo docente, quien es egresado del programa de la Licenciatura en Matemáticas y Física. La referencias bibliográficas usadas en el curso (ver [9], [10] y [11]) son más o menos las mismas para ambos grupos y en general que se suele usar en todos los cursos de Matemáticas 1 en la UTP. Ambos grupos cuentan con horarios de asesoría diferentes a los horarios de clases, el docente ofrecía las asesorías al grupo de control y los encargados de este proyecto ofrecían las asesorías en el grupo de experimento.

A continuación se muestran algunas de las vistas de las construcciones realizadas en GeoGebra e implementadas en el curso.

7.3.1. Características de GeoGebra

GeoGebra, como se ha mencionado, es un software libre enfocado a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que cuenta con diferentes aspectos; como las vistas gráficas, algebraica, de cálculo simbólico (CAS) y hoja de cálculo, que se integran de manera dinámica en la interfaz inicial de la aplicación.

Inicialmente, GeoGebra cuenta con una barra de entrada, que se muestra en la figura 7.1, en la cual se pueden ingresar de cualquier elemento que acepte la aplicación (desde puntos hasta funciones establecidas). Todos los elementos que se ingresan a esta barra aparecen inmediatamente en la vista algebraica, que se muestra en la figura 7.2, y también cualquier otro elementos que se ingrese directamente en alguna de las otras vistas.

En la vista gráfica, que se muestra en la figura 7.3, aparece una representación geométrica de los objetos ingresados, como puntos, funciones, segmentos de recta, polígonos, etcétera, y sobre esta también aparecen elementos que se pueden programar para ser usados en la interfaz; como botones, deslizadores, cuadros de texto, etcétera.

En la figura 7.4 se muestra la hoja de cálculo, en esta se pueden programar elementos que se relacionen con los que están en otras vistas. Por ejemplo, se pueden crear un punto que tome las coordenadas definidas sobre un par de casillas en la hoja de cálculo, y éste se mostrará en las vistas algebraica y gráfica.

Finalmente, en la figura 7.5 se muestra la hoja de cálculo simbólico en donde se GeoGebra ofrece la opción de realizar algunos procedimientos matemáticos como la factorización de expresiones, el cálculo de raíces de ecuaciones y la simplificación de expresiones.

En realidad, hay una amplia lista de características en GeoGebra que favorecen mucho procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, se consideran

Figura 7.1: Barra de Entrada de GeoGebra

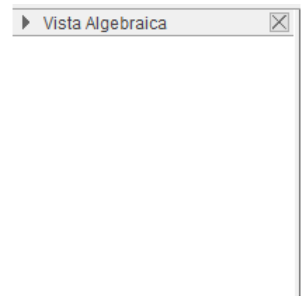


Figura 7.2: Vista Algebraica de GeoGebra

estas como las más potentes para implementar y acompañar en el contenido de límites.

7.3.2. Concepto Intuitivo

Se inicia dando la definición intuitiva de límite se busca apoyar los estudios iniciales con la vista gráfica y la hoja de cálculo en GeoGebra. Se considera el siguiente enunciado

$$\text{¿Qué sucede con } f(x) = x + 2 \text{ cuando } x \text{ toma valores cercanos a } 1$$

Y para ello se incluye la construcción que se ve en las figuras 7.6 y 7.7

Y para un segundo ejercicio se considera una expresión racional; incluyendo la vista gráfica, la hoja de cálculo y el CAS que se muestran en las figuras 7.8, 7.9 y7.10, así

$$\text{¿Qué sucede con } f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \text{ cuando } x \text{ toma valores cercanos a } 1$$

Finalmente, se presenta otro ejemplo en el que se requiere hacer uso del zoom en la vista gráfica y usar dos tablas de datos, como se muestra en las figuras 7.11, 7.12 y 7.13, así

$$\text{Haciendo uso de una tabla de datos determine } \lim_{x \to 0} \frac{101000x}{100000x + 1}$$

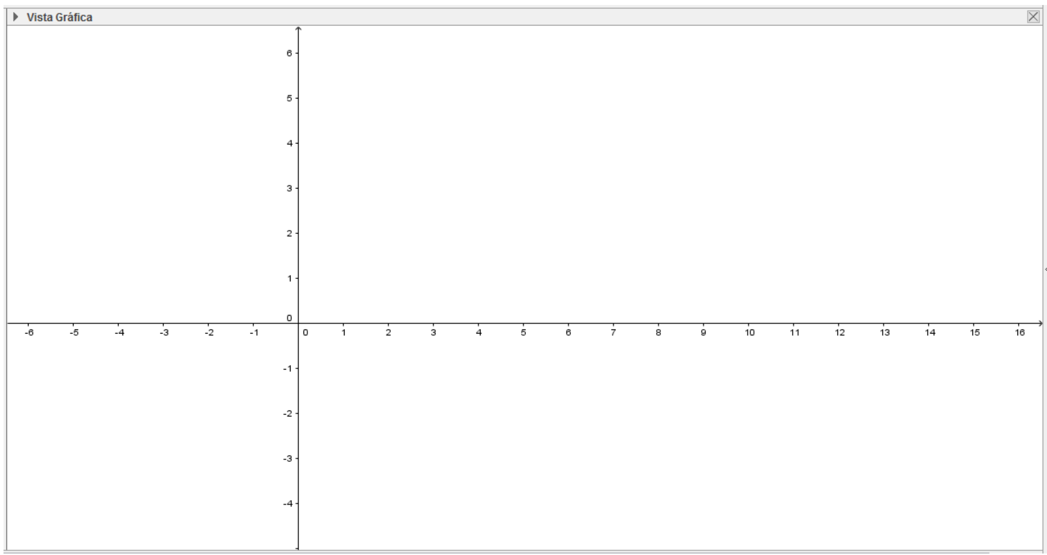


Figura 7.3: Vista Gráfica de GeoGebra

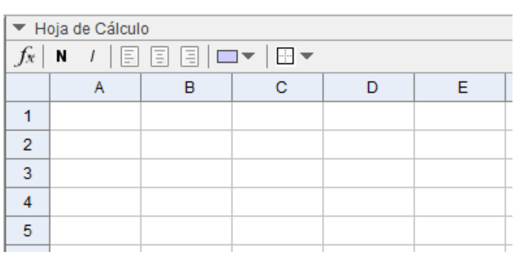


Figura 7.4: Hoja de Cálculo de GeoGebra

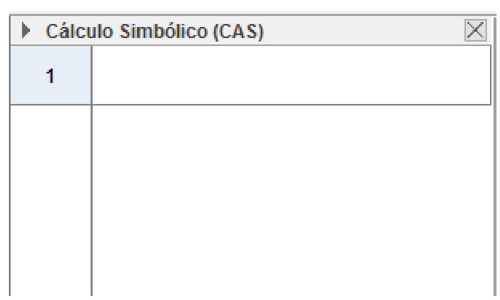


Figura 7.5: CAS en GeoGebra

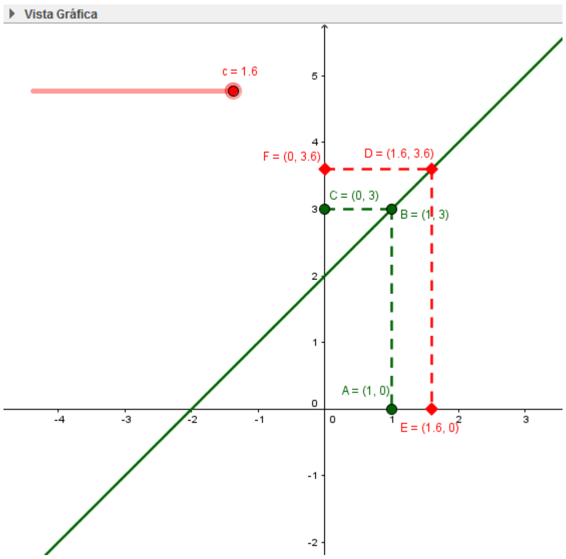


Figura 7.6: Vista Gráfica Ejercicio 1 Definición Intuitiva

Hoja de Cálculo

	A	B	C	D
1				
2		X	Y	
3		0.5	2.5	
4		0.9	2.9	
5		0.99	2.99	
6		1.01	3.01	
7		1.1	3.1	
8		1.5	3.5	
9				
10		1.6	3.6	
11				

Figura 7.7: Hoja de Cálculo Ejercicio 1 Definición Intuitiva

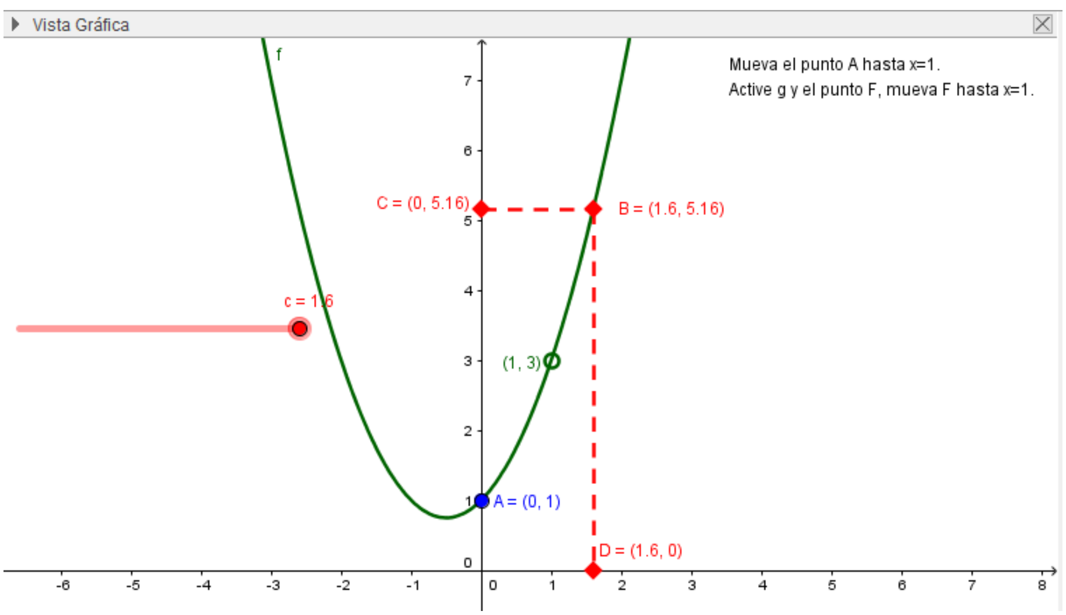
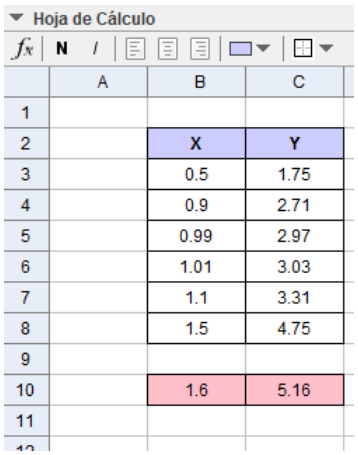


Figura 7.8: Vista Gráfica Ejercicio 2 Definición Intuitiva


Hoja de Cálculo

	A	B	C
1			
2		X	Y
3		0.5	1.75
4		0.9	2.71
5		0.99	2.97
6		1.01	3.03
7		1.1	3.31
8		1.5	4.75
9			
10		1.6	5.16
11			

Figura 7.9: Hoja de Cálculo Ejercicio 2 Definición Intuitiva

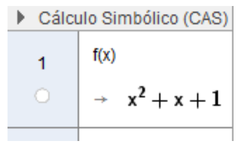


Figura 7.10: CAS Ejercicio 2 Definición Intuitiva

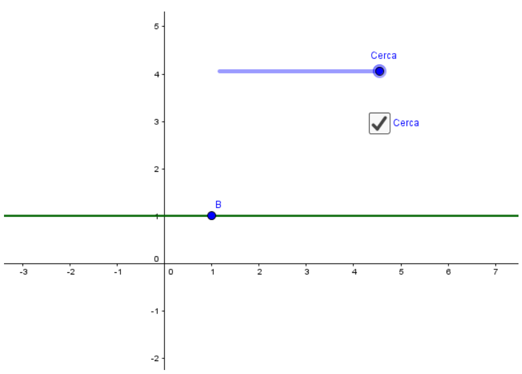
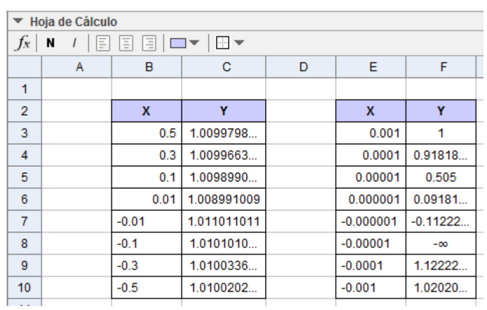


Figura 7.11: Vista Gráfica Ejercicio 3 Definición Intuitiva


Hoja de Cálculo

	A	B	C	D	E	F
1						
2		X	Y		X	Y
3		0.5	1.0099798...		0.001	1
4		0.3	1.0099663...		0.0001	0.91818...
5		0.1	1.0098990...		0.00001	0.505
6		0.01	1.008991009		0.000001	0.09181...
7		-0.01	1.011011011		-0.000001	-0.11222...
8		-0.1	1.0101010...		-0.00001	-∞
9		-0.3	1.0100336...		-0.0001	1.12222...
10		-0.5	1.0100202...		-0.001	1.02020...

Figura 7.12: Hoja de Cálculo Ejercicio 3 Definición Intuitiva

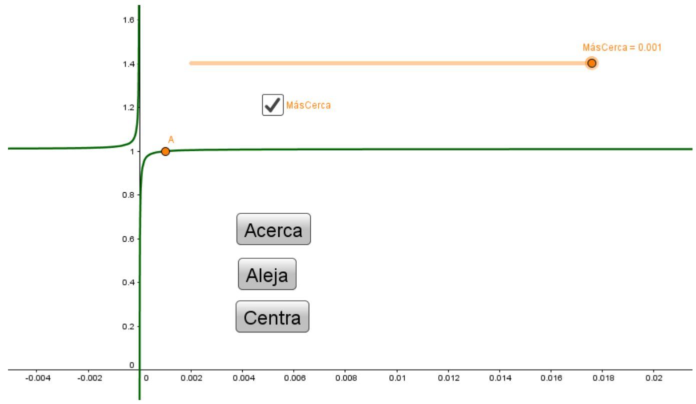


Figura 7.13: Vista Gráfica Zoom Ejercicio 3 Definición Intuitiva

7.3.3. Definición Formal

Para la definición formal se hace uso de diferentes construcciones, una de las cuáles se muestra en las figuras 7.14 y 7.15 en su vista gráfica y la hoja de cálculo, para el siguiente enunciado

$$\text{Pruebe que } \lim_{x\to 4}(3x-7)=5$$

7.3.4. Límites Laterales

Para el contenido de límites laterales se hace uso de diferentes construcciones, en especial de la siguiente en su vista gráfica, que se muestra en la figura 7.16 para el siguiente enunciado

$$\text{Determine la existencia del límite para los valores de } x=\{-5,-4,0,1,5\}$$

7.3.5. No Existencia del Límite de una Función

Además de las consideraciones hechas en la sección de límites laterales 7.3.4, se hace uso de la vista gráfica de la construcción que se muestra en la figura 7.17

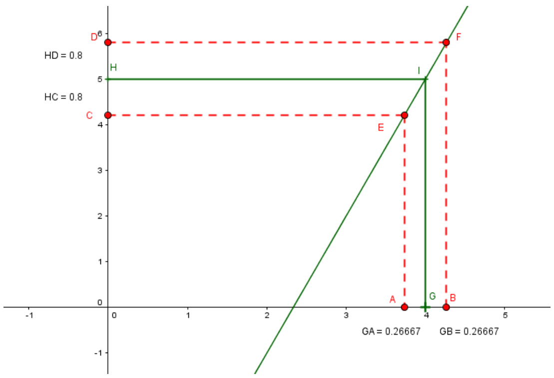
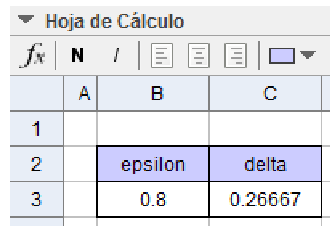


Figura 7.14: Vista Gráfica Ejercicio 1 Definición Formal



	A	B	C
1			
2		epsilon	delta
3		0.8	0.26667

Figura 7.15: Hoja de Cálculo Ejercicio 3 Definición Formal

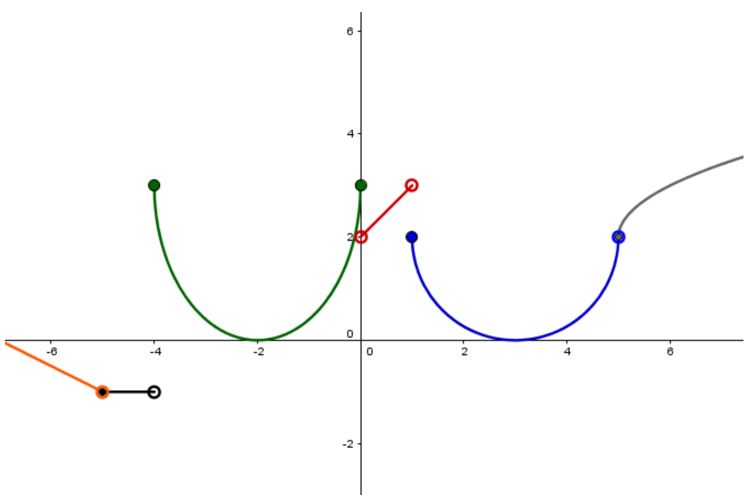


Figura 7.16: Vista Gráfica Ejercicio 1 Límites Laterales

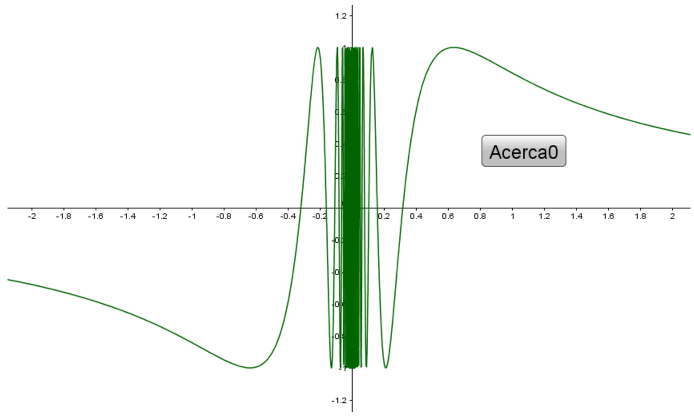


Figura 7.17: Vista Gráfica Ejercicio 1 No Existencia de Límite

7.3.6. Límites al Infinito y Límites Infinitos

Para esta sección se hace uso de las vistas gráficas y de la hoja de cálculo que se muestran en las figuras 7.18, 7.19 y 7.20, para los siguientes enunciados

$$\text{Determine, si existe, el valor para } \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+3}{5x^2+7x-39} \text{ Ver figura 7.18}$$

$$\text{Determine, si existe, } \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-2x+1} \text{ Ver figuras 7.19 y 7.20}$$

7.3.7. Límites Trigonométricos

Para esta sección se hace uso de dos construcciones, en su vista gráfica, que se muestran en las imágenes 7.21 y 7.22, para los dos límites trigonométricos fundamentales que se enuncian a continuación

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ Ver 7.21}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \text{ Ver 7.22}$$

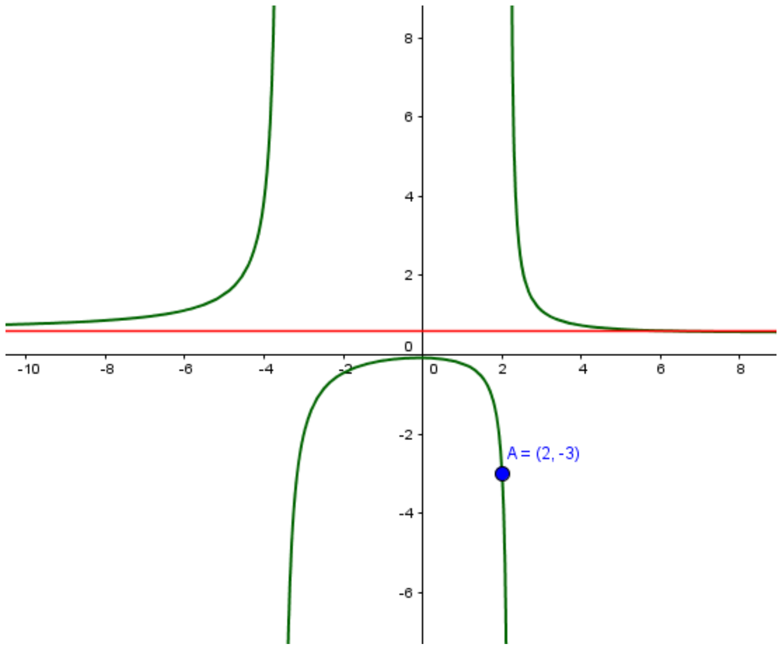


Figura 7.18: Vista Gráfica Ejercicio 1 Límites al Infinito y Límites Infinitos

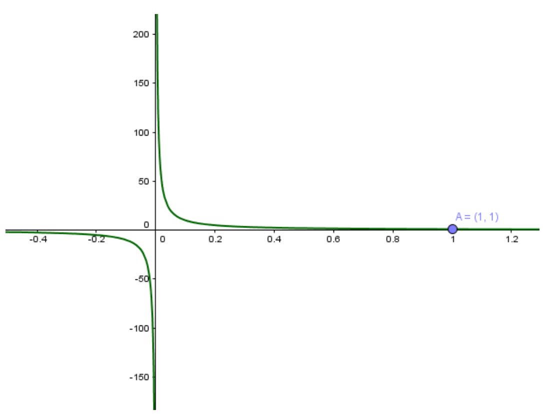
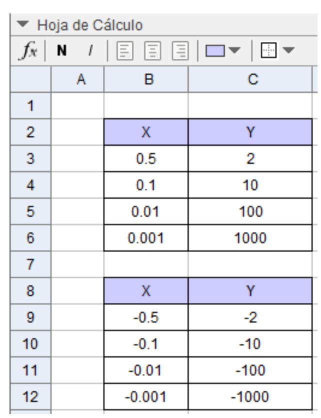


Figura 7.19: Vista Gráfica Ejercicio 2 Límites al Infinito y Límites Infinitos



Hoja de Cálculo

	A	B	C
1			
2		X	Y
3		0.5	2
4		0.1	10
5		0.01	100
6		0.001	1000
7			
8		X	Y
9		-0.5	-2
10		-0.1	-10
11		-0.01	-100
12		-0.001	-1000

Figura 7.20: Hoja de Cálculo Ejercicio 2 Límites al Infinito y Límites Infinitos

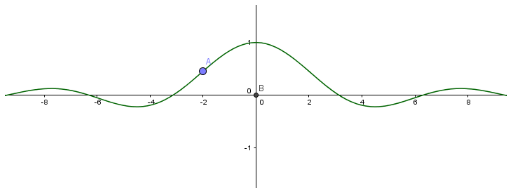


Figura 7.21: Vista Gráfica Ejercicio 1 Límites Trigonométricos

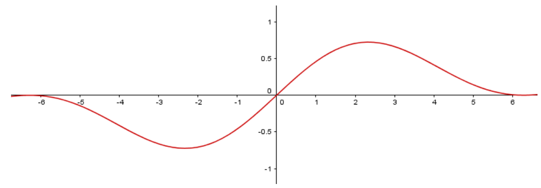


Figura 7.22: Vista Gráfica Ejercicio 2 Límites Trigonométricos

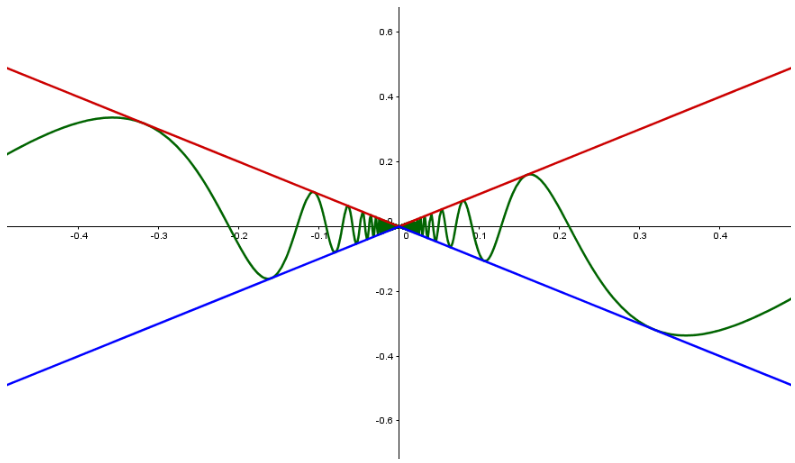


Figura 7.23: Vista Gráfica Ejercicio 1 Teorema del Sándwich

7.3.8. Propiedades de Límites

Entre las diferentes propiedades de los límites, se menciona el Teorema del Sándwich, para lo cual se usa la vista gráfica de una construcción, que se muestra en la figura 7.23, con relación al siguiente enunciado

Considere el valor del límite para $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$ teniendo en cuenta que $-|x| \leq f(x) \leq |x|$

7.3.9. Continuidad

Para este contenido, se consideran los tipos de discontinuidad (ver 7.24), un ejercicio para comprender la continuidad en un punto (ver 7.25, 7.26, 7.27 y 7.28) y la continuidad sobre un intervalo (ver 7.29), para los siguientes enunciados

Determine los tipos de discontinuidad en (ver 7.24)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x < 1 \\ 2, & \text{si } x = 1 \\ 1, & \text{si } 1 < x < 4 \\ (x-4)^2, & \text{si } 4 < x \end{cases}$$

Determine el valor de c para el que $f(x)$ sea continua en todos los valores x de su dominio (ver 7.25, 7.26, 7.27 y 7.28)

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x, & \text{si } x \leq 2 \\ x^3 - cx, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determine los intervalos sobre los que $f(x)$ es continua (ver 7.29)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{(x-2)(x+3)^2}, & \text{si } x < -1 \\ 2 + \sqrt{1-x^2}, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{2}(x-1)^2, & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

7.3.10. Teorema de Valor Intermedio

Finalmente, se hace uso de la vista gráfica y hoja de cálculo de la construcción que se muestra en las figura 7.30 y 7.31 para la función

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$$

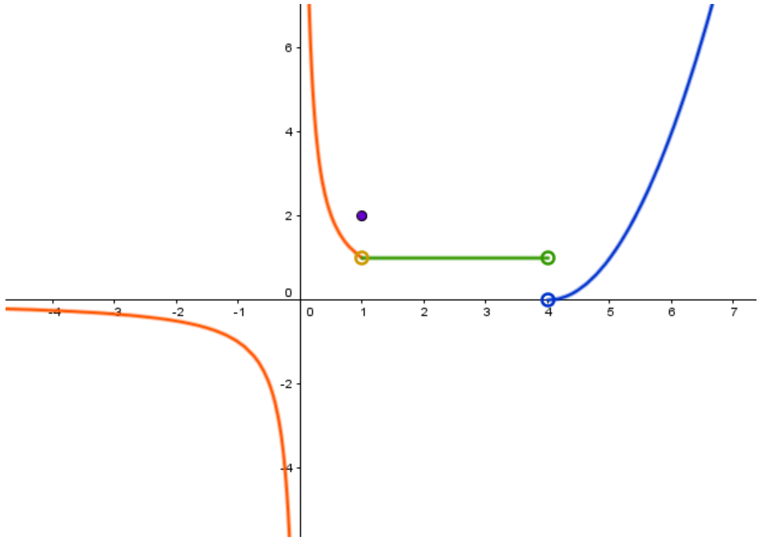


Figura 7.24: Vista Gráfica Ejercicio 1 Continuidad

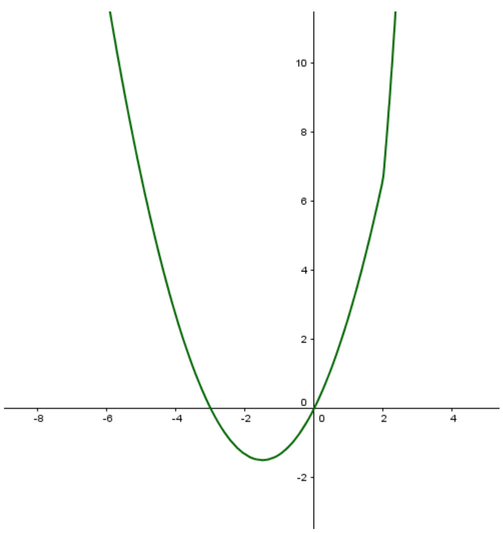


Figura 7.25: Vista Gráfica 1 Ejercicio 2 Continuidad

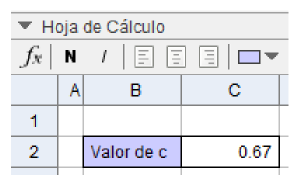


Figura 7.26: Hoja de Cálculo 1 Ejercicio 2 Continuidad

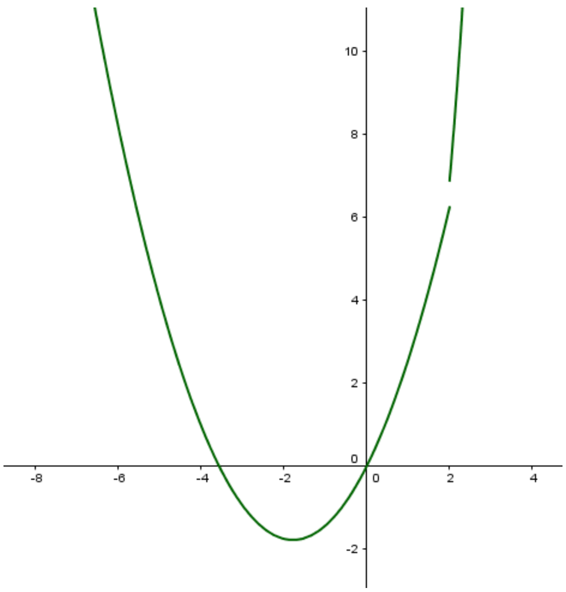


Figura 7.27: Vista Gráfica 2 Ejercicio 2 Continuidad

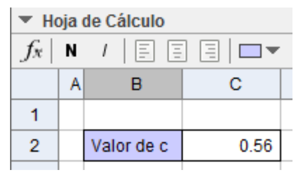


Figura 7.28: Hoja de Cálculo 2 Ejercicio 2 Continuidad

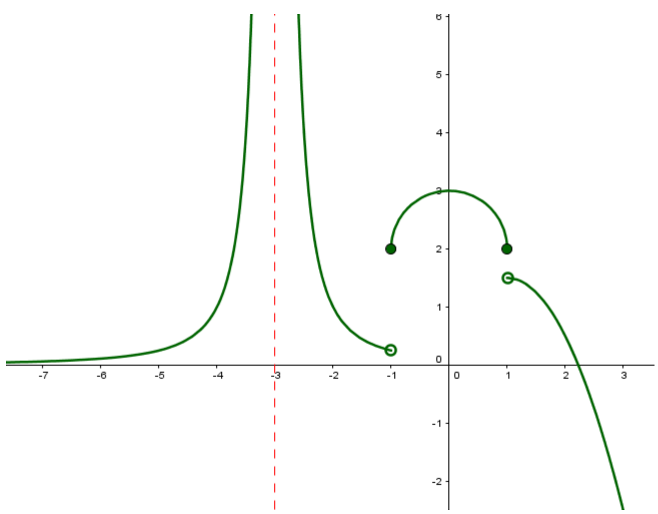


Figura 7.29: Vista Gráfica Ejercicio 3 Continuidad

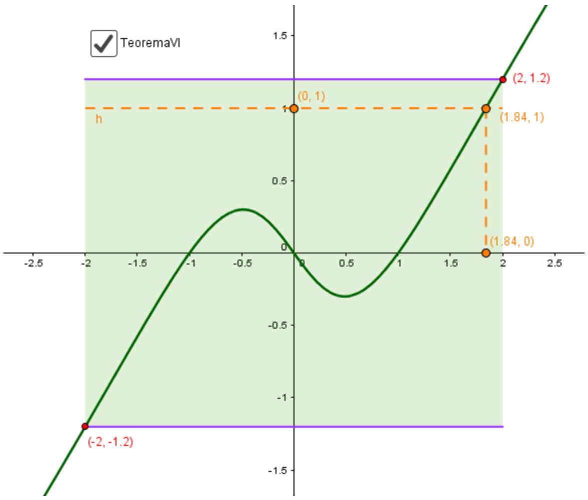
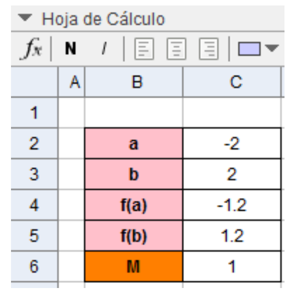


Figura 7.30: Vista Gráfica Ejercicio 1 Teorema de Valor Intermedio


Hoja de Cálculo

	A	B	C
1			
2		a	-2
3		b	2
4		f(a)	-1.2
5		f(b)	1.2
6		M	1

Figura 7.31: Hoja de Cálculo Ejercicio 1 Teorema de Valor Intermedio

7.4. PRÁCTICA DE AULA

En esta sección se describen dos cosas: la relación de las construcciones hechas y presentadas en la sección anterior 7.3 y la metodología implementada en el aula de clase.

7.4.1. Obstáculos y Construcciones

Se mencionaron algunas de las tareas que deben cumplir los estudiantes del curso de matemáticas en la sección 7.1, así como un conjunto de obstáculos epistemológicos. Basado en estos se diseñaron las construcciones en GeoGebra, como recursos didácticos para enfrentar dichos obstáculos y dar cumplimiento de tales tareas.

Asocian todas las gráficas con funciones conocidas: Esto se debe, posiblemente, a que recién han considerado las gráficas de algunas funciones, como son las polinómicas, racionales y trigonométricas. Entonces, se considera que a esta terna de funciones pertenecen todas las que se puedan estudiar, lo cual no es cierto totalmente.

En este sentido, la vista algebraica y gráfica en GeoGebra favorece la comprensión de que muchas funciones no son tan fáciles de graficar, y los estudiantes lo pudieron comprobar al intentar graficar unas funciones algebraicas, trigonométricas e irracionales con características particulares. Las construcciones que ayudan a evitar y afrontar esta dificultad fueron implementadas en el contenido de la Definición Intuitiva, No Existencia de Límite, Límites al Infinito, Límites Infinitos y Propiedades, que se muestran en las figuras 7.11, 7.13, 7.17, 7.18, 7.19 y 7.23.

Estas funciones, y muchas otras, son difíciles de graficar y algunas requieren un análisis particular para comprender el comportamiento que tienen alrededor de ciertos puntos de su dominio, por lo que las construcciones hechas en GeoGebra favorecen la comprensión de tales comportamientos y por lo tanto de los resultados obtenidos en el estudio del límite.

Durante la práctica de aula algunos estudiantes se mostraron sorprendidos por el comportamiento de estas funciones, como la representada en la figura 7.23, pues evidentemente se requiere un análisis particular para comprender el comportamiento que muestran.

No entienden la idea gráfica de límite: La dificultad en esta parte se debe a la lectura misma que se hace de una gráfica, de cualquier función. No sucede que la idea gráfica de límite sea algo complicado sino que en la gráfica misma de la función resulta difícil relacionar los valores que corresponden al dominio y los que corresponden al codominio

En este sentido, en GeoGebra resulta muy oportuno hacer uso de la vista gráfica y de la hoja de cálculo al mismo tiempo, pues de esta forma se puede hacer una relación entre el valor que toma la variable x de la función y la imagen que resulta, si existe, y comparar en el aspecto numérico y el visual.

Las principales construcciones que se enfocaban sobre esta dificultad se estudiaron en el contenido de Definición Intuitiva y Límites Infinitos, que se muestran en las figuras 7.6 con 7.7, 7.12 con fig:I3VG2 y 7.19 con 7.20.

En la vista gráfica de algunas de estas construcciones se hace uso de un punto sobre la gráfica que se puede mover de manera directa o con la ayuda de un deslizador, de forma tal que de manera dinámica se muestra el valor del dominio sobre el que se ubica el punto y el correspondiente valor en el codominio.

De esta forma, los estudiantes tienen una herramienta más para comprender porqué el límite de una función tiende a un valor L cuando $x \to c$.

Consideran que son puntos distintos p^+ y p^-: Esta dificultad se relaciona con la anterior, pues no existe un reconocimiento a los valores del dominio y a los valores del codiminio y en algunas funciones, especialmente las que son a trozos o en general con discontinuidades, se generan problemas al reconocer el límite lateral.

Para esto, se hizo uso de la vista gráfica para varias construcciones de diferentes funciones sobre las cuáles se pudiera determinar el límite lateral de la función. Esta adquirió relevancia en los contenidos de la Definición Intuitiva, Límites Laterales, Límites al Infinito, Límites Infinitos y Continuidad. Éstas se muestran en las figuras 7.13, 7.16, 7.18, 7.19, 7.24, 7.27 y 7.29.

Para algunas de estas construcciones también se hizo uso de puntos y deslizadores sobre las gráficas, de manera que se pudiera observar la relación directa entre los valores alrededor de un punto p del dominio y las imágenes que resultan en el codominio.

Interpretan indeterminaciones como la no existencia del límite: La dificultad se debe a que los estudiantes no tienen claros los argumentos por los cuales se pueden hacer simplificaciones; en donde no se realiza una división entre cero, por ejemplo, sino que éstas simplificaciones en el contenido de límites tiene sentido. Las construcciones usadas para este obstáculo, y en los contenidos de la Definición Intuitiva y Límites Trigonométricos, se muestran en las figuras 7.8, 7.8 y 7.22.

Una ventaja que se tiene con GeoGebra es la simplificación de expresiones con uso del CAS. Este aspecto se presentó a los estudiantes para la función racionar y algunos reaccionaron sorprendidos por el resultado que generaba el programa y cuando se les preguntó por qué se tenía ese resultado, algunos respondieron el procedimiento que implicaba una simplificación entre el numerador y el denominador. Este aspecto dio lugar a remarcar el hecho de que en vista de la definición de límite de una función, al menos de manera intuitiva, estaba permitido realizar dicha simplificación sin que con ello se realizará un error matemático.

Luego de esto, muchos estudiantes justificaban los procedimientos de este tipo haciendo uso de los argumentos correctos, de forma tal que en general no se generaba una dificultad al encontrar indeterminaciones en un ejercicio.

Comprender la no existencia del límite de una función: Conociendo que existen procedimientos para simplificar expresiones y calcular el límite de una función, se presenta una dificultad al pensar que para toda función, por particular que sea, existe el límite en algún punto que pertenezca al dominio, lo cual no es cierto. Esto se enfrentó haciendo uso de la vista gráfica para límites laterales de funciones a trozos y límites de funciones trigonométricas, especialmente en las secciones de

Límites Laterales, No Existencia de Límites, Límites al Infinito, Límites Infinitos y Continuidad.

Las construcciones que enfrentan y evitan este obstáculo se muestran en las figuras 7.16, 7.17, 7.18, 7.19 con 7.20, 7.24, 7.27 y 7.29. Todas estas construcciones fueron usadas para todas las secciones en el contenido de límites, pues es una dificultad que no debe existir cuando se estudia la continuidad de funciones.

Valor del límite de una función con el cálculo numérico: Este aspecto surge debido a que muchas de las funciones que se suelen estudiar son en su mayoría conocidas y no presentan características particulares muy relevantes. Por lo tanto, se piensa que evaluando una función en valores cercanos a un c que pertenece al dominio, se obtienen argumentos suficientes para determinar el valor del límite de esa función, lo cual no es siempre cierto.

Para esta dificultad se hizo uso de las construcciones de el contenido en la Definición Intuitiva, y que se muestra en las figuras 7.11, 7.12 y 7.13. Este fue un ejercicio muy interesante y mostraron sorpresa por el resultado del límite.

Inicialmente se les solicitó que realizaran una tabla de datos con valores que consideraran adecuados para determinar el límite de la función cuando $x \to 0$, con la cual todos concluyeron que el límite era 1. Luego se presentó la vista gráfica inicial (ver figura 7.11), la cual sirvió de argumento para la misma conclusión. Sin embargo, se desplazó un punto sobre la gráfica y ellos notaron un comportamiento extraño cuando el punto toma valores cercanos a $x = 0$. Se hizo uso de un botón de acercamiento, con el cual la vista gráfica se iba acercando hasta mostrar la segunda (ver figura 7.13) y en ese momento los estudiantes expresaron sorpresa y comprendieron el comportamiento de las imágenes cuando $x \to 0$. Finalmente, se realizó la segunda tabla de datos que tomaba valores mucho más pequeños para

x y se encontró que el límite no era realmente 1 sino 0.

El límite en un punto es el valor de la función en ese punto: De manera particular, esta dificultad es muy común y tiene gran relevancia debido a que es prueba de que no se comprende el significado del límite de una función. Para el contenido de Límites Laterales y Continuidad se usaron las construcciones que se muestran en las figuras 7.16 y 7.24.

Estas construcciones permiten remarcar la diferencia entre la imagen en un punto y el límite de la misma, especialmente para el contenido de continuidad de funciones.

7.4.2. Definición Formal

Considerando que el grupo de experimento pertenece al programa de Licenciatura en Matemáticas y Física en la UTP, se decidió incluir en el contenido la definición formal de límite, que se enunció en el Marco Conceptual (ver 6.2). Este contenido no fue presentado por el docente en el grupo de control; pues, considerando que el grupo pertenece a un programa de ingeniería, no se hace necesario el conocimiento y manejo de la definición formal de límite.

Es sabido que dicha definición es un poco complicada de comprender, especialmente para aquellos que apenas inician un proceso de formación formal en matemáticas. Por esto, se realizaron algunas construcciones que ayudan a entender las características de la definición en ejemplos puntuales.

En las figuras 7.14 y 7.15 se muestra una de las construcciones hechas. En estas imágenes se puede apreciar que sobre el eje X y sobre el eje Y aparecen las distancias que existen entre los puntos límites del intervalo y el punto sobre el que se calculo el límite. Estas distancias corresponden a las mencionadas en la definición para ϵ y δ.

También, en la hoja de cálculo, se puede variar el valor de δ y comprobar el valor de ϵ tales que cumplan las condiciones requeridas en la definición.

También se hace uso de la construcción que se muestra en las figuras 7.32, 7.33 y 7.34. Para ésta se considera el siguiente enunciado

$$\text{Pruebe que } \lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$$

En la vista gráfica se observa una línea continua en verde que corresponde a la gráfica de la función, también el intervalo que se crea alrededor del valor $x = 2$ y del valor $f(x) = 5$. Estas distancias varían de manera dinámica según se cambie el valor para ϵ en el deslizador que se muestra. Los valores determinados para ϵ y δ se muestran en la hoja de cálculo y además aparece una tabla en amarillo con la cual se puede verificar el cumplimiento de la definición: que para cualquier valor en el dominio d tal que $|d-2| < \delta$ siempre se tiene una imagen en el codominio $f(d)$ tal que $|f(d)-5| < \epsilon$, y se puede observar el punto en amarillo sobre la función cumplimiento tales condiciones.

De esta manera, se logra dar una interpretación geométrica y una representación visual y numérica a la definición en un par de casos específicos. De esta forma, los estudiantes entienden que las ambigüedades debidas al *suficientemente cerca* en la definición intuitiva del límite, se evitan en el formalismo de esta definición y, más allá de lo difícil que sea la aplicación de la definición para otro tipo de funciones, se obtiene una idea gráfica de lo que representan los resultados obtenidos en todo el contenido de límites.

7.5. PRUEBA FINAL

En ambos grupos se realiza una prueba final (Ver Apéndice B) en la que se evalúa el aprendizaje de los estudiantes del contenido de límites y continuidad. Esta prueba

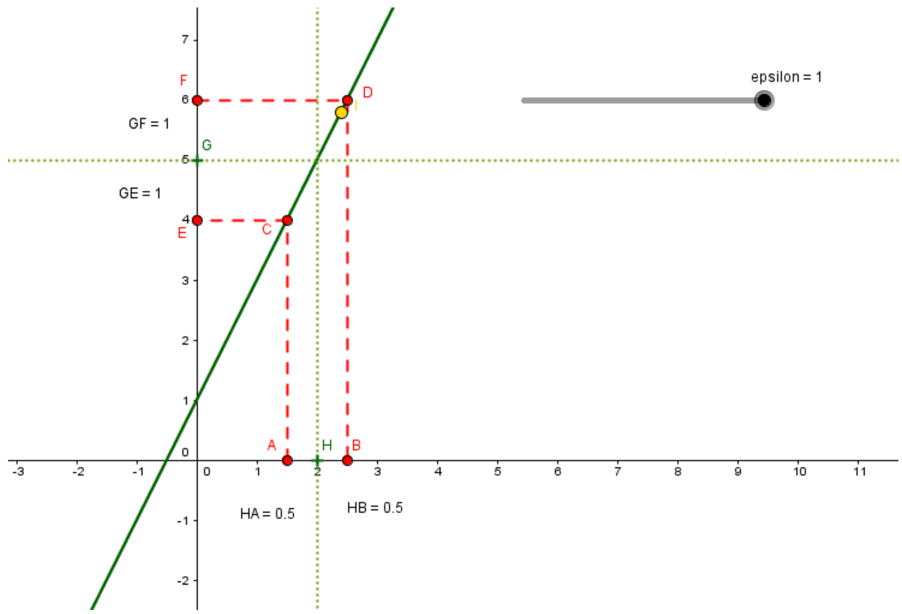


Figura 7.32: Vista Gráfica Ejercicio 2 Definición Formal

corresponde a una evaluación parcial para ambos grupos y en general todos los grupos de matemáticas 1 de la UTP deben presentar una prueba similar.

Del grupo de control participan veintiún estudiantes y del grupo de experimento participan nueve. Se contaba con un plazo de dos horas para realizar la totalidad de la prueba.

El contenido que se evalúa es

- Concepto Intuitivo
- Límites Laterales
- No Existencia de Límites
- Límites al Infinito
- Límites Trigonométricos

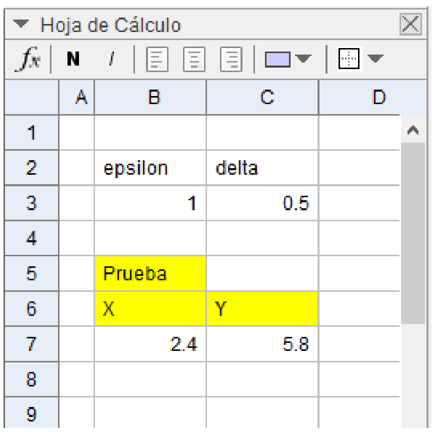


Figura 7.33: Hoja de Cálculo Ejercicio 2 Definición Formal

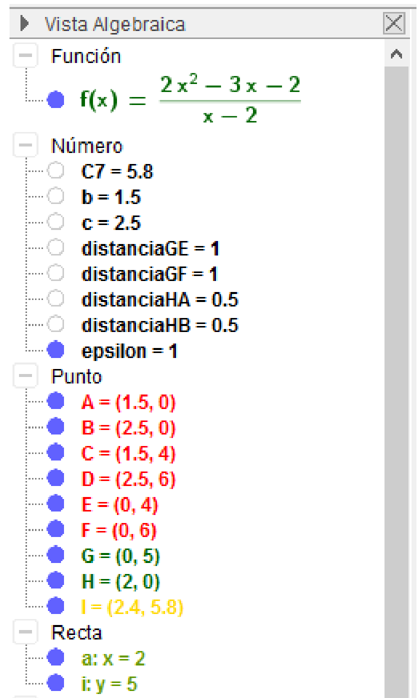


Figura 7.34: Vista Algebraica Ejercicio 2 Definición Formal

- Propiedades de Límites
- Continuidad

La prueba fue realizada con asesoría del docente y revisión del Departamento de Matemáticas de la UTP.

En esta prueba se pretende tomar evidencia del aprendizaje del contenido de límite de los estudiantes, de forma tal que con los resultados se puedan hacer las consideraciones pertinentes a la segunda hipótesis propuesta.

7.6. ENCUESTA

Finalmente, se realiza una encuesta (Ver Apéndice C) al grupo de experimento para conocer los aspectos que consideran más relevantes durante el proceso de enseñanza y aprendizaje del contenido de límites. Se realizaron cinco preguntas de selección múltiple y una pregunta abierta. La encuesta se realiza con dos objetivos: el primero conocer las apreciaciones que como estudiantes tienen en el proceso realizado y el segundo para dar lugar a ideas sobre el proceso educativo y el papel que ellos, como licenciados en matemáticas y física, tengan al respecto.

En las preguntas se considera la interacción previa que hayan tenido los estudiantes con software como recurso para acompañar su proceso de educación, las consideraciones sobre el uso de GeoGebra en este espacio, las características más relevantes que pudieran resaltar de GeoGebra como recurso para el aprendizaje y la enseñanza del contenido de límites y observaciones respecto al proyecto llevado a cabo, si las tuvieran.

Esta encuesta ayudará a considerar resultados cualitativos que argumenten los resultados, conclusiones y recomendaciones al respecto.

La encuesta se divide en cuatro secciones, así: la primera corresponde al uso previo de GeoGebra y la relevancia para el uso de éste en el contenido de precálculo y límites, la segunda se refiere a las características que consideran más relevantes de GeoGebra, la tercera corresponde a las consideraciones sobre el oportuno uso de GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje del contenido de límites y la cuarta corresponde a una pregunta abierta en la que se consideran las opiniones sobre el proyecto que puedan tener los estudiantes.

Dos preguntas muy importantes se plantean en los ítem 4 y 5, pues se cuestiona sobre las ideas que tiene cada uno sobre el uso de este tipo de herramientas desde una posición de la enseñanza y el aprendizaje, aspectos relevantes para la Licenciatura.

Capítulo 8

ANÁLISIS

A continuación se hace presentan los resultados cuantitativos y cualitativos del proyecto realizado y se realizan los análisis estadísticos pertinentes. Todos los análisis estadísticos se realizan con EXCEL®, del paquete de Microsoft Office.

8.1. RESULTADOS

En las figuras 8.1 y 8.2 se presentan los resultados de los estudiantes en las prueba inicial y final.

Estudiante	Prueba Inicial	
	Grupo	
	Control	Experimento
1	3	2,6
2	2,9	2,7
3	1,7	2,4
4	1,7	3,8
5	3,1	2,6
6	3	2,8
7	2	0,2
8	1,6	1,2
9	1,7	1,4
10	2,4	2,5
11	1,5	2,9
12	2,3	3,5
13	2,8	2,4
14	1,7	2,5
15	0,9	
16	1,7	
17	0,9	
18	2,3	
19	2,3	
20	2,3	
21	0,4	
22	2	

Figura 8.1: Resultados Prueba Inicial

Estudiante	Prueba Final	
	Grupo	
	Control	Experimento
1	1,6	1,9
2	2,6	2,8
3	2,3	0,9
4	4,2	3,6
5	1,5	3,6
6	1,7	0,8
7	1,2	2,8
8	2,3	0,0
9	2,0	4,3
10	2,8	
11	4,6	
12	3,8	
13	3,2	
14	1,5	
15	1,4	
16	3,2	
17	0,5	
18	1,5	
19	3,9	
20	0,5	
21	1,1	

Figura 8.2: Resultados Prueba Final

Así mismo, se incluye una descripción estadística para cada grupo en cada prueba en las imágenes 8.3 y 8.4 para la prueba inicial y en las imágenes 8.5 y 8.6 para la prueba final.

Estadística Descriptiva Prueba Inicial Grupo Control	
Media	2,009090909
Error típico	0,154430821
Mediana	2
Moda	1,7
Desviación estándar	0,724344755
Varianza de la muestra	0,524675325
Curtosis	-0,190346754
Coeficiente de asimetría	-0,363660867
Rango	2,7
Mínimo	0,4
Máximo	3,1
Suma	44,2
Cuenta	22
Nivel de confianza(90,0%)	0,265735739

Figura 8.3: Estadística Descriptiva Prueba Inicial Grupo de Control

Estadística Descriptiva Prueba Inicial Grupo Experimental	
Media	2,392857143
Error típico	0,246394726
Mediana	2,55
Moda	2,6
Desviación estándar	0,921924647
Varianza de la muestra	0,849945055
Curtosis	1,52048714
Coeficiente de asimetría	-1,011320719
Rango	3,6
Mínimo	0,2
Máximo	3,8
Suma	33,5
Cuenta	14
Nivel de confianza(90,0%)	0,436348649

Figura 8.4: Estadística Descriptiva Prueba Inicial Grupo de Experimento

Estadística Descriptiva Prueba Final Grupo Control	
Media	2,239285714
Error típico	0,262221062
Mediana	2,025
Moda	1,4625
Desviación estándar	1,201647864
Varianza de la muestra	1,443957589
Curtosis	-0,703506801
Coeficiente de asimetría	0,467539971
Rango	4,1625
Mínimo	0,45
Máximo	4,6125
Suma	47,025
Cuenta	21
Nivel de confianza(90,0%)	0,452257449

Figura 8.5: Estadística Descriptiva Prueba Final Grupo de Control

Estadística Descriptiva Prueba Final Grupo Experimental	
Media	2,3
Error típico	0,492918604
Mediana	2,8125
Moda	2,8125
Desviación estándar	1,478755811
Varianza de la muestra	2,18671875
Curtosis	-1,314245097
Coeficiente de asimetría	-0,301302773
Rango	4,275
Mínimo	0
Máximo	4,275
Suma	20,7
Cuenta	9
Nivel de confianza(90,0%)	0,916605822

Figura 8.6: Estadística Descriptiva Prueba Final Grupo de Experimento

8.2. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En este sección se muestra un análisis con la pruebas t para muestras seleccionadas aleatoriamente del grupo de control. La selección de muestras es necesaria debido a que el número de estudiantes por grupo es diferente.

8.2.1. Prueba Inicial

La primera prueba corresponde al contenido de precálculo. Para esta prueba se busca responder a la siguiente pregunta

¿Existen diferencias estadísticamente significativas entre las medias de los resultados en la prueba inicial en los grupos de control y de experimento?

Para lo cual se plantean las siguientes hipótesis

H_0: No existen diferencias estadísticamente significativas en las medias de los resultados de la primera prueba en ambos grupos.

H_A: Sí existen diferencias estadísticamente significativas en las medias de los resultados de la primera prueba en los grupos.

Se considera la muestra que se presenta en la figura 8.7, para realizar la prueba t correspondiente para un nivel de significancia de $\alpha = 0.1$. Inicialmente se considera una prueba F entre los grupos, como se muestra en la figura 8.8, en donde se encuentra que las varianzas son estadísticamente iguales, también para $\alpha = 0.1$.

Grupo		
Control		Experimento
Estudiante	Resultado	Resultado
2	2,9	2,6
3	1,7	2,7
4	1,7	2,4
5	3,1	3,8
6	3	2,6
7	2	2,8
9	1,7	0,2
11	1,5	1,2
12	2,3	1,4
13	2,8	2,5
15	0,9	2,9
19	2,3	3,5
20	2,3	2,4
22	2	2,5

Figura 8.7: Muestra Aleatoria 1 Prueba Inicial

Prueba F para Varianzas		
0,200294623	>	0,1
Varianzas Iguales		

Figura 8.8: Prueba F Muestra 1 Prueba Inicial

Luego, se realiza una prueba t con las características mencionadas, como se muestra en la figura 8.9

Prueba t para dos muestras suponiendo varianzas iguales		
	Grupo Control	*Grupo Experimental*
Media	2,157142857	2,392857143
Varianza	0,408791209	0,849945055
Observaciones	14	14
Varianza agrupada	0,629368132	
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	26	
Estadístico t	-0,786108604	
P(T<=t) una cola	0,219455035	
Valor crítico de t (una cola)	1,314971864	
P(T<=t) dos colas	0,438910071	
Valor crítico de t (dos colas)	1,70561792	

Figura 8.9: Prueba t Muestra 1 Prueba Inicial

De este análisis, para $\alpha = 0.1$, se tiene la conclusión que se muestra en la figura 8.10, con información estadísticamente relevante para aceptar H_0: *No existen diferencias estadísticamente significativas entre las medias de los resultados en la prueba inicial.*

Prueba t para Diferencias Significativas		
0,438910071	>	0,1
No hay diferencias significativas		

Figura 8.10: Análisis Prueba t Muestra 1 Prueba Inicial

Para complementar este análisis, se repite el procedimiento para una segunda muestra y para $\alpha = 0.1$ en ambas pruebas. La muestra seleccionada se presenta en la figura 8.11. Se realiza una prueba F, que se muestra en la figura 8.12 y en donde se concluye que las varianzas son estadísticamente iguales.

Grupo		
Control		Experimento
Estudiante	Resultado	Resultado
1	3	2,6
2	2,9	2,7
3	1,7	2,4
4	1,7	3,8
6	3	2,6
7	2	2,8
8	1,6	0,2
10	2,4	1,2
14	1,7	1,4
15	0,9	2,5
16	1,7	2,9
18	2,3	3,5
19	2,3	2,4
20	2,3	2,5

Figura 8.11: Muestra Aleatoria 2 Prueba Inicial

Prueba F para Varianzas		
0,146770827	>	0,1
Varianzas Iguales		

Figura 8.12: Prueba F Muestra 2 Prueba Inicial

Se realiza la prueba t que se muestra en la figura 8.13, con la conclusión que se muestra en la figura 8.14.

Prueba t para dos muestras suponiendo varianzas iguales		
	Grupo Control	*Grupo Experimental*
Media	2,107142857	2,392857143
Varianza	0,369945055	0,849945055
Observaciones	14	14
Varianza agrupada	0,609945055	
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	26	
Estadístico t	-0,96791143	
P(T<=t) una cola	0,171003348	
Valor crítico de t (una cola)	1,314971864	
P(T<=t) dos colas	0,342006697	
Valor crítico de t (dos colas)	1,70561792	

Figura 8.13: Prueba t Muestra 2 Prueba Inicial

Prueba t para Diferencias Significativas		
0,342006697	>	0,1
No hay diferencias significativas		

Figura 8.14: Análisis Prueba t Muestra 2 Prueba Inicial

De este análisis para la segunda muestra se tiene información estadísticamente relevante para aceptar H_0: *No existen diferencias estadísticamente significativas entre las medias de los resultados en la prueba inicial.*

8.2.2. Prueba Final

La segunda prueba correponde al contenido de límite. Se busca dar respuesta a la siguiente pregunta

¿Existen diferencias estadísticamente significativas entre las medias de los resultados en la prueba final en los grupos de control y de experimento?

Y se consideran las hipótesis correspondientes para responder a la misma

H_0: No existen diferencias estadísticamente significativas en las medias de los resultados de la segunda prueba en ambos grupos.

H_A: Sí existen diferencias estadísticamente significativas en las medias de los resultados de la segunda prueba en los grupos.

En la figura 8.15 se presenta una muestra con la cual se va a realizar una prueba t para un nivel de significancia $\alpha = 0.1$. Antes se realiza una prueba F, también para $\alpha = 0.1$, que se presenta en la figura 8.16, donde se concluye que las varianzas son estadísticamente iguales.

Grupo		
Control		Experimento
Estudiante	Resultado	Resultado
2	2,6	1,9
5	1,5	2,8
7	1,2	0,9
10	2,8	3,6
13	3,2	3,6
15	1,4	0,8
17	0,5	2,8
20	0,5	0,0
21	1,1	4,3

Figura 8.15: Muestra Aleatoria 1 Prueba Final

Prueba F para Varianzas		
0,283681705	>	0,1
Varianzas Iguales		

Figura 8.16: Prueba F Muestra 1 Prueba Final

La prueba t, con las características mencionadas, se presenta en la figura 8.17, con la conclusión que se muestra en la figura 8.18.

Prueba t para dos muestras suponiendo varianzas iguales		
	Grupo Control	*Grupo Experimental*
Media	1,625	2,3
Varianza	0,990703125	2,18671875
Observaciones	9	9
Varianza agrupada	1,588710938	
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	16	
Estadístico t	-1,136024211	
P(T<=t) una cola	0,136338359	
Valor crítico de t (una cola)	1,336757167	
P(T<=t) dos colas	0,272676718	
Valor crítico de t (dos colas)	1,745883676	

Figura 8.17: Prueba t Muestra 1 Prueba Final

Prueba t para Diferencias Significativas		
0,272676718	>	0,1
No hay diferencias significativas		

Figura 8.18: Análisis Prueba t Muestra 1 Prueba Final

La prueba t presenta una media superior para el grupo experimental, sin embargo, de este análisis se tiene información estadísticamente relevante para aceptar H_0: *No existen diferencias estadísticamente significativas entre las medias de los resultados en la prueba final.*

Para complementar este resultado, se selecciona una segunda muestra y se realizan las respectivas pruebas t y F, ambas con un nivel de significancia de $\alpha = 0.1$. La muestra se presenta en la figura 8.19 y la prueba F respectiva se presenta en la figura 8.20, en donde se concluye que las varianzas son estadísticamente diferentes.

Grupo		
Control		Experimento
Estudiante	Resultado	Resultado
1	1,6	1,9
2	2,6	2,8
3	1,7	0,9
8	1,2	3,6
9	2,0	3,6
13	2,8	0,8
14	1,5	2,8
15	1,4	0,0
19	1,5	4,3

Figura 8.19: Muestra Aleatoria 2 Prueba Final

Prueba F para Varianzas		
0,012587693	<	0,1
Varianzas Desiguales		

Figura 8.20: Prueba F Muestra 2 Prueba Final

La prueba t y la conclusión correspondiente aparecen en las figuras 8.21 y 8.22.

Prueba t para dos muestras suponiendo varianzas desiguales		
	Grupo Control	*Grupo Experimental*
Media	1,8	2,3
Varianza	0,313242188	2,18671875
Observaciones	9	9
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	10	
Estadístico t	-0,94869071	
P(T<=t) una cola	0,182570319	
Valor crítico de t (una cola)	1,372183641	
P(T<=t) dos colas	0,365140637	
Valor crítico de t (dos colas)	1,812461123	

Figura 8.21: Prueba t Muestra 2 Prueba Final

Prueba t para Diferencias Significativas		
0,365140637	>	0,1
No hay diferencias significativas		

Figura 8.22: Análisis Prueba t Muestra 2 Prueba Final

Igualmente, la prueba presenta una media superior en el grupo de experimento, sin embargo, del análisis a la segunda muestra se tiene información estadísticamente relevante para aceptar H_0: *No existen diferencias estadísticamente significativas entre las medias de los resultados en la prueba final.*

8.3. ENCUESTA

Los resultados de la encuesta realizada en el grupo control se presentan en la figura 8.23.

<table>
<tr><td>Preguntas</td><td colspan="14">Respuestas</td><td>Total Formularios</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(S1)</td><td colspan="14">Opción</td><td>9</td></tr>
<tr><td colspan="8">Sí</td><td colspan="6">No</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td colspan="8">7</td><td colspan="6" rowspan="3">2</td></tr>
<tr><td colspan="4">GeoGebra</td><td colspan="4">Mathematics</td></tr>
<tr><td colspan="4">6</td><td colspan="4">2</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="8">9</td><td colspan="6">0</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="8">9</td><td colspan="6">0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(S2)</td><td colspan="14">Opción</td></tr>
<tr><td colspan="3">VG</td><td colspan="3">CAS</td><td colspan="3">HC</td><td colspan="2">Otra</td><td colspan="3">Ninguna</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="3">9</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">6</td><td colspan="2">0</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(S3)</td><td colspan="14">Opción</td></tr>
<tr><td colspan="2">DI</td><td colspan="2">DF</td><td colspan="2">LL</td><td colspan="2">LT</td><td colspan="2">C</td><td colspan="2">Otra</td><td colspan="2">Ninguna</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">9</td><td colspan="2">8</td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>(S4)</td><td colspan="14">Opiniones</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6</td><td colspan="14">¡Buen trabajo! ¡Éxitos!</td></tr>
<tr><td colspan="14">¡Muchos éxitos!</td></tr>
</table>

Figura 8.23: Encuesta Grupo de Experimento

Las siguientes son las abreviaciones usadas:

- VG: Vista Gráfica
- CAS: Cálculo Simbólico
- HC: Hoja de Cálculo
- DI: Definición Intuitiva
- DF: Definición Formal
- LL: Límites Laterales

- LT: Límites Trigonométricos
- C: Continuidad

De la pregunta 1 se observa que algunos de los estudiantes ya habían tenido interacción con software, específicamente expresaron el uso de GeoGebra y de Mathematics. De las preguntas 2 y 3 se observa la aceptación de los estudiantes para el uso de este tipo de recursos dentro del aula de clase, específicamente para los contenidos del precálculo y de límites.

Se presenta un diagrama circular para la pregunta 4 en la figura 8.24 y otro para la pregunta 5 en la figura 8.25

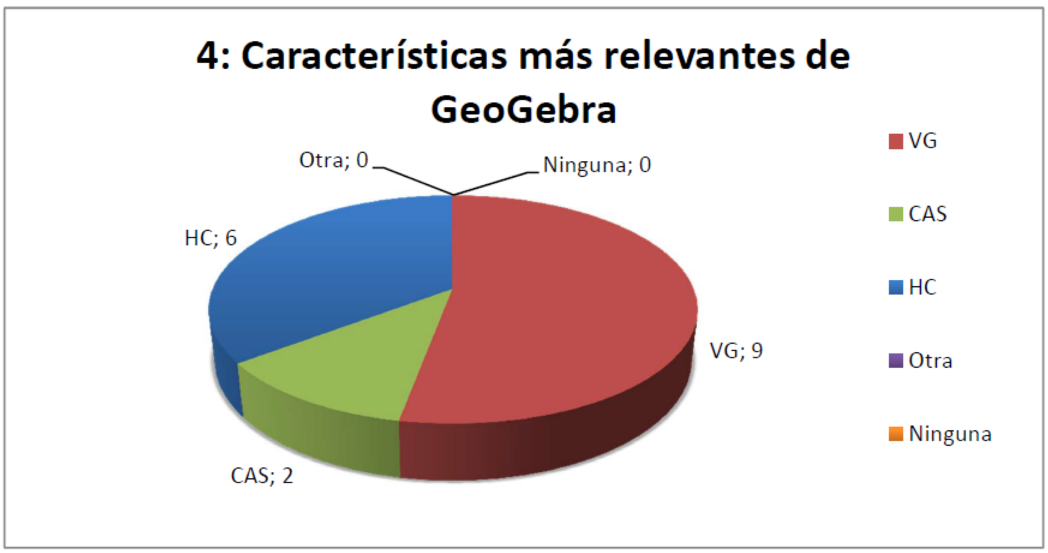


Figura 8.24: Diagrama Circular Pregunta 4

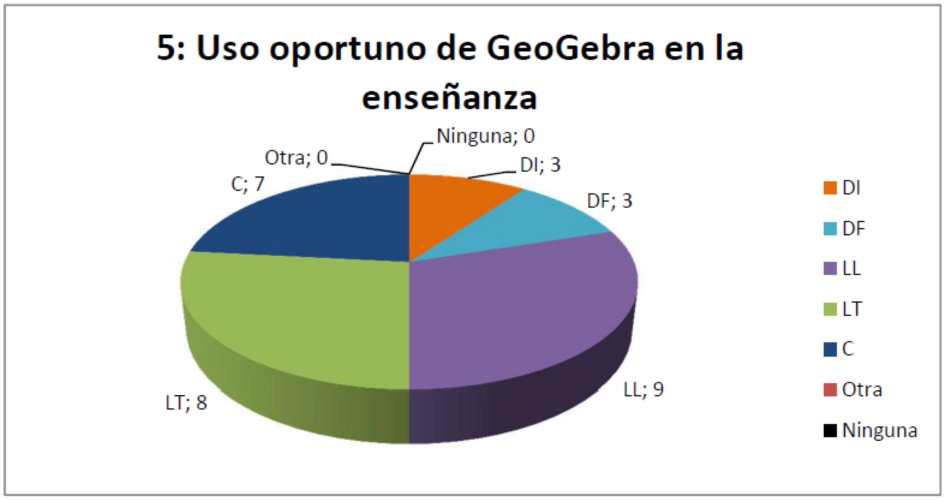


Figura 8.25: Diagrama Circular Pregunta 5

En estos se observa que los aspectos mejor considerados por los estudiantes fue la Vista Gráfica y la Hoja de Cálculo, aunque también se valoró positivamente el CAS. Y entre los contenidos que consideran más adecuados para ser estudiados y enseñados con este tipo de recursos se valoraron: Límites Laterales, Límites Trigonométricos y Continuidad. Aunque también se valoró positivamente la Definición Formal y la Definición Intuitiva.

Capítulo 9

CONCLUSIONES

En este capítulo se describen las diferentes conclusiones que determinan los resultados estadísticos del capítulo anterior (Ver Análisis 8). Se destacan las conclusiones del análisis a las pruebas inicial y final y de la encuesta realizada. Así, el proyecto concluye que

- No existen diferencias estadísticamente significativas en las medias de los resultados de la prueba inicial en ambos grupos. Ésta conclusión se argumenta con los análisis a las muestras seleccionadas.

  Basado en tales análisis se concluye que el aprendizaje del contenido de precálculo es similar en ambos grupos. Esto es de esperarse, considerando que ambos grupos tienen el mismo docente y el mismo material bibliográfico.

- No existen diferencias estadísticamente significativas en las medias de los resultados de la prueba sobre el contenido de límites en los grupos para las muestras seleccionadas.

  Según estos análisis se concluye que el aprendizaje del contenido de límites se dio de manera similar en ambos grupos. Sin embargo, las conclusiones de los análisis están basados en muestras muy pequeñas, razón por la que los resultados no puedan representar adecuadamente a los grupos.

- Los estudiantes del grupo experimental, en su totalidad, consideran significativa la realización del proyecto por las características didácticas y pedagógicas. Esto se concluye de las opiniones expresadas por los estudiantes y de las respuestas en la encuesta realizada.

  El uso del software en la clase como recurso para apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje resulta ser un atractivo para los estudiantes. Con el uso de GeoGebra se pueden verificar diferentes hipótesis sobre algunos ejercicios del contenido de límites de manera dinámica, considerando los diferentes aspectos de los mismos (el numérico, algebraico y gráfico).

  Los estudiantes expresan confianza al momento de proponer y verificar hipótesis sobre diferentes ejercicios del contenido de límites, resueltos de manera grupal y propuestos de manera individual.

Capítulo 10

RECOMENDACIONES

Basados en la experiencia que se tuvo en este proyecto, se consideran pertinentes las siguientes recomendaciones para potenciar los recursos e ideas involucrados

- Basados en las encuestas y comentarios de los estudiantes, es pertinente realizar una introducción al manejo de GeoGebra, y en general de cualquier software que se pudiera usar, a todos los estudiantes del curso. Se sugiere involucrar los diferentes aspectos del software durante el contenido de precálculo, con el fin de que los estudiantes tengan un conocimiento básico del manejo del software.

- Complementando la recomendación anterior, se sugiere la habilitación de un ordenador por cada estudiante durante el tiempo que se esté usando el software. De esta manera cada estudiante puede poner a prueba constantemente los conocimientos adquiridos, tanto del contenido teórico como del uso del software.

- Proponer actividades (desde el contenido de precálculo) en las que los estudiantes puedan poner a prueba hipótesis sobre ejercicios prácticos, con el fin de que se reconozcan las características más útiles de GeoGebra para este espacio académico. De esta forma los estudiantes tendrán recursos para verificar propiedades en el contenido de límites.

- En el caso de la Licenciatura en Matemáticas y Física, fortalecer el uso de diferentes recursos que puedan complementar positivamente los cursos de matemáticas, favoreciendo espacios en los que se considere la pertinencia de tales recursos en los diferentes cursos y contextos académicos.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Markus Hohenwarter, Judith Hohenwarter, Yves Kreis, and Zsolt Lavicza. Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software geogebra. In *11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, Nuevo Leon, Mexico*, 2008.

[2] Silvia Vrancken, María Inés Gregorini, Adriana Engler, Daniela Muller, and Marcela Hecklein. Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA*, 8(29):9–19, 2006.

[3] Sonsoles Blázquez and Tomás Ortega. El concepto de límite en la educación secundaria. *El futuro del cálculo infinitesimal*, pages 331–354, 2000.

[4] Franklin D. Demana, Franklin D. Demana, et al. *Precálculo: gráfico, numérico, algebraico*. Pearson Educación, 2007.

[5] Julio Ríos. Canal julioprofe. https://www.youtube.com/user/julioprofe. Accedido 05-01-2015.

[6] Fabio Valencia M. Blog fabio v. http://claseaparte-faval.blogspot.com.co/2011/12/tutoriales-de-limites.html. Accedido 06-01-2015.

[7] José Antonio Fernández Plaza. Unidad didáctica: Límite y continuidad de funciones. Master's thesis, Universidad de Granada, 2010.

[8] Guy Brousseau. Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas (trad. departamento de matemática educativa). *México: Cinvestav.(Original en francés, 1976)*, 1981.

[9] James Stewart. *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas, México*. Cengage Learning, 2008. Sexta edición.

[10] Edwin J. Purcell. *Cálculo diferencial e integral*. Pearson Educación, 2007.

[11] Sigurd Angenent. Math 221, first semester calculus, 2.0. Technical report, University of Wisconsin-Madison, 2009. https://www.math.wisc.edu/~angenent/Free-Lecture-Notes/free221.pdf.

[12] Héctor Daniel Lerma. *Metodología de la investigación: Propuesta, Anteproyecto y Proyecto*. Ecoe Ediciones, 2009.

[13] David M Diez, Christopher D Barr, and Mine Cetinkaya-Rundel. *OpenIntro statistics*. CreateSpace Independent Publishing Platform, openintro.org, 2016.

[14] David R Anderson, Dennis J Sweeney, and Thomas A Williams. *Estadística para Administración y Economía*. Cengage Learning, 2008.

[15] Luis Eduardo Villamil Mendoza. La noción de obstáculo epistemológico en gastón bachelard. *Espéculo: Revista de Estudios Literarios*, 2008.

[16] Nivia Marina Castro, Miryan Trujillo Cedeño, and Juan de Jesús Guerrero. Obstaculos cognitivos asociados al aprendizaje del concepto de funcion real. *Revista de Investigación Universidad La Salle, Vol 1, No. 2, 2006:29-32*, 2006.

APÉNDICES

APÉNDICE A

PRUEBA INICIAL

Responda las siguientes preguntas relacionadas al contenido de precálculo.

1. Represente gráficamente el intervalo solución para

   a) $|f(x)| \leq 2$ si $f(x) = \frac{3}{4}x - 1$

   b) $|8x - 3| < 13$

2. Sea $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Determine

   a) $f(-1)$

   b) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y simplifique.

3. *a*) Escriba la definición del *dominio de una función.*

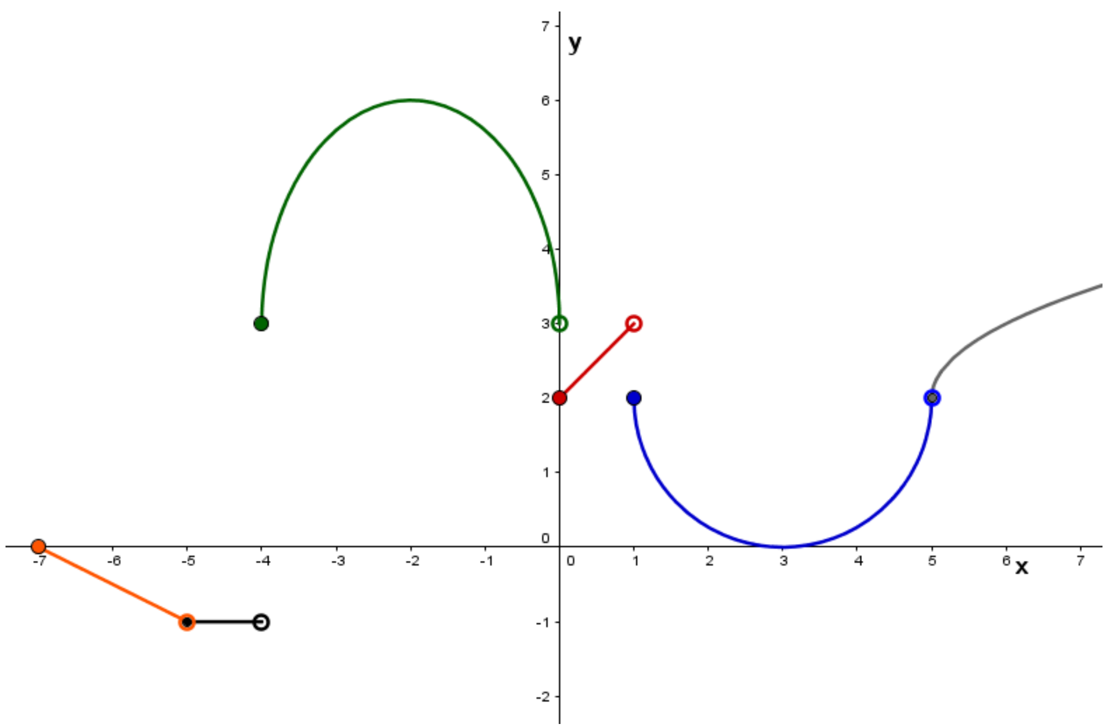
   b) Describa el dominio de
   $$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2}$$

4. Considere la siguiente función a trozos (una semirecta, dos segmentos de recta,

una semicírculo, una semielipse y una sección de parábola)

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x+7), & \text{si } x < -5 \\ -1, & \text{si } -5 \leq x < -4 \\ 3 - \frac{3\sqrt{-x^2-4x}}{2}, & \text{si } -4 \leq x \leq 0 \\ x+2, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 - \sqrt{6x - x^2 - 5}, & \text{si } 1 \leq x < 5 \\ \sqrt{x-5} + 2, & \text{si } 5 \leq x \end{cases}$$

Un estudiante afirma que la siguiente es la gráfica de esta función. Sin embargo, ésta presenta tres errores. Describa cuáles son.



APÉNDICE B

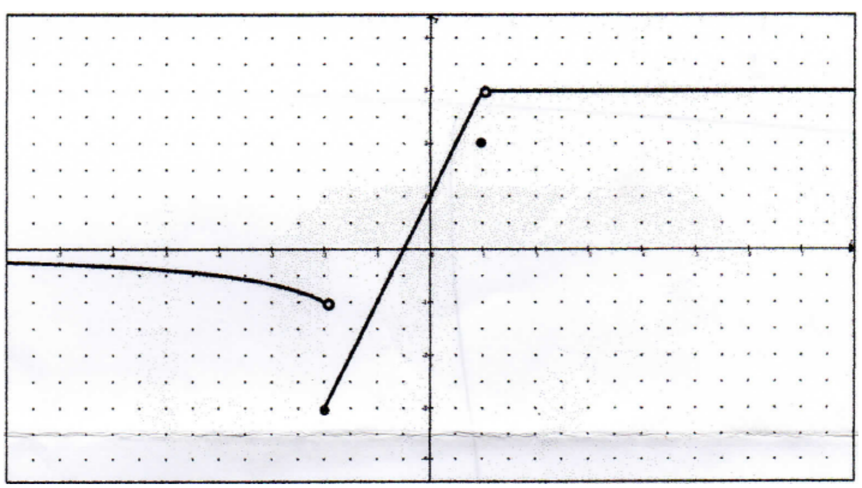
PRUEBA FINAL

Mostrando todo el procedimiento, resuelva cada uno de los siguientes ejercicios.

1. Sean

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq -2 \\ -6, & \text{si } -2 < x < 1 \\ x+2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

y $g(x)$ representada en la siguiente gráfica.



Determine cada uno de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -\infty} (f(x)+g(x))$

b) $\lim_{x\to -2} \frac{f(x)}{g(x)}$

c) $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{f(x)g(x)}$

2. Pruebe que para $x=1$ y $x=2$ la siguiente función $f(x)$ es discontinua e indique que tipo de discontinuidad es.

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{si } x\leq 1\\ 2-x, & \text{si } 1<x<2\\ 1, & \text{si } x=2\\ (x-2)^2, & \text{si } x>2\end{cases}$$

3. Determine el valor de cada uno de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$

b) $\lim_{x\to 2} (\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor)$

c) $\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{x-\pi}$

APÉNDICE C

ENCUESTA

Objetivo: Considerar la pertinencia del uso de software especializado en el estudio de las matemáticas.
Dirigido a estudiantes del curso de Matemáticas 1.

1. ¿Ha utilizado algún software o recurso para acompañar y fortalecer su proceso de aprendizaje?

   Sí ☐ No ☐

   En caso de que su respuesta haya sido sí, indique cuál o cuáles:

   ____

   ____

2. ¿Considera que el uso de GeoGebra® es útil para el estudio de los contenidos de precálculo y cálculo?

   Sí ☐ No ☐

3. ¿Considera favorable el uso de GeoGebra® para el estudio de límites?

   Sí ☐ No ☐

4. Señale las características de GeoGebra® que considere más relevantes para el estudio de límites

   ☐ Vista Gráfica ☐ Hoja de Cálculo
   ☐ Algebraica (CAS) ☐ Ninguna
   ☐ Otro ____________________

5. Indique los contenidos de límites para los que considera oportuno el uso de GeoGebra® como recurso para la enseñanza

   ☐ Definición Intuitiva ☐ Definición Formal
   ☐ Límites Laterales ☐ Límites Trigonométricos
   ☐ Continuidad ☐ Ninguna
   ☐ Otro ____________________

6. Indique a continuación las observaciones que considere pertinentes.

   ____

   ____

   ____

   ____