Universidad Tecnológica de pereira

Facultad de Ciencias Básicas

MÉTODOS DE ALGUNAS TRANSFORMADAS INTEGRALES PARA DETERMINAR LAS SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS Y PARCIALES

Monografía como trabajo de grado presentada por:
jhon fredy gonzález
para optar al grado de:
licenciado en matemáticas y física

Trabajo de grado dirigido por:
Fernando Mesa Ms.C
Profesor títular, Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira

Pereira 9 de diciembre de 2015

Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

1

Introducción

Este problema se origino inicialmente en el campo de la astronomía, de hecho Neugebauer (1952) descubrió que en Babilonia se utilizaba una forma primitiva de las series de Fourier en la predicción de ciertos eventos celestiales. En nuestra historia moderna sobre el uso de las series de Fourier se originó con D$'$alembert en (1774) con su trabajo sobre las oscilaciones en las cuerdas del violín. El desplazamiento $u = u(t, x)$ de una cuerda de violín, como una función del parámetro temporal t y de la posición x, es la solución de la ecuación diferencial parcial unidimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t > 0,\ 0 < x < l,$$

utilizando las condiciones iniciales $u(t, 0) = u(t, l) = 0$ para $t \geq 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0$ para $0 < x < l$. Este problema tiene como solución la superposición de dos ondas viajando en direcciones opuestas a velocidad c, como lo expresa la formula de D$'$alembert:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} f(x + ct) + \frac{1}{2} f(x - ct),$$

con lo cual f es una función impar de periodo l que se anula en los puntos $x = \frac{n\pi}{l}$, donde n es un número natural.
Euler en (1748) postuló que tal solución podría ser identificada como una serie de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) \sin(\tfrac{n\pi x}{l}),$$

y como consecuencia:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) \cos(\tfrac{n\pi t}{l}) \sin(\tfrac{n\pi x}{l}).$$

Esta manera de interpretar estos fenómenos fueron también adoptadas por D.Bernoulli (1753) y Lagrange(1759).
La expresión:

$$\hat{f}(n) = \tfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\tfrac{n\pi x}{l})dx,$$

para calcular los coeficientes de la serie fue descrita por primera vez en un artículo escrito por Euler en (1777).
El aporte realizado por Fourier empezó en (1807) con sus estudios del problema del flujo de calor donde:

$$\tfrac{\partial u}{\partial t} = \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

sustentado ante la *Academie Des Sciences* en (1811) y publicado en gran parte como *Theorie Analytique de la Chaleur* en (1822). Fourier realizó intentos muy serios para concluir la demostración, que cualquier función que posea derivada puede ser expresada en una serie trigonométrica.

Un ensayo positivo de esta teoría fue dada por Dirichlet en (1829). Riemann por su parte también hizo grandes aportes para solucionar este problema.
Actualmente el análisis de Fourier ha sido catapultado por matemáticos de la talla de Lebesgue, Hardy, Littlewood, Wiener, Frobenius, Selberg, Weil y Weyl entre otros.

Por otro lado para estudiar la transformada de Laplace se tienen en cuenta algunos apartes de su historia; la transformada de Laplace posee su nombre en mención a Pierre Simón Laplace (1749-1827) astrónomo y matemático francés popular en su tiempo y se le conocía como el Newton de Francia. Las principales materias de su interés fueron la mecánica celeste o movimiento planetario, la teoría de probabilidades. Algunos de sus aportes son:

- *Mécanique Céleste* gran tratado sobre cuestiones de gravitación publicado en cinco volúmenes entre los años de (1799) y (1825). La principal herencia de esta publicación se resume en el desarrollo de la teoría de potencial, con implicaciones de largo alcance en ramas derivadas de la física que van desde la gravitación, la mecánica de fluídos, el magnetismo y la física atómica.

- *Théorie Analytique des Probabilités* que se considera el mayor aporte a esa parte de las matemáticas.

Despúes de la revolución Francesa, la ambición y el poder político alcanzaron su gloría; Laplace se adaptaba muy fácil cambiando sus principios. El principal defecto que se le han atribuido en contra de su buena reputación es la omisión de toda referencia a los descubrimientos de sus predecesores y contemporáneos, dejando ver que las ideas eran suyas del todo.

La Transformada de Laplace es una herramienta Matemática que hace parte de algunas transformadas integrales como la transformada de Fourier, la transformada de Hilbert y la transformada de Mellin, entre otras. Estas transformadas están definidas por medio de una integral impropia y cambian una función que posee una variable de entrada, en otra función en otra variable distinta.
La transformada de Laplace puede ser usada para resolver ecuaciones diferenciales lineales y ecuaciones integrales; aunque también se puede utilizar para resolver algunos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes variables; en general se aplica en la solución de problemas con coeficientes constantes y como requisito fundamental se deben conocer las condiciones iniciales de la misma ecuación diferencial para encontrar la solución.
Su mayor ventaja sale a la luz cuando la función en la variable independiente que aparece en la ecuación diferencial es una función seccionada. Al solucionar, se resuelven ecuaciones diferenciales usando la técnica de la transformada, se cambia una ecuación diferencial por un problema algebraico. La metodología consiste en aplicar la transformada a la ecuación diferencial y después usar las propiedades de la transformada.
El problema desde ahora, consiste en encontrar una función en la variable independiente que posea una cierta expresión como transformada.
La idea base de las series de Fourier es que cualquier función periódica de periodo T se puede expresar utilizando la súma trigonométrica de senos y cosenos del mismo periodo T.

2

Objetivos

2.1. Objetivo General

Utilizar algunas transformadas integrales para solucionar algunas ecuaciones diferenciales ordinarias con problemas de *Cauchy Schwarz* y en la frontera.

2.2. Objetivos específicos

1. Describir el proceso de obtención de la transformada de Fourier a partir de la serie de Fourier.

2. Descripción de las diferentes transformadas de Fourier y sus utilidades.

3. Obtener la transformada de Laplace a partir de un caso especifico de aplicación de la transformada de Fourier y su aplicación para resolver algunas ecuaciones en derivadas.

4. Descripción detallada de la utilización de la transformada de Fourier para solucionar problemas con dominios infinitos.

5. Aplicaciones de la transformada de Fourier para resolver algunas ecuaciones en derivadas.

3

La transformada de Fourier

3.1. Serie de Fourier

Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo finito $-L \leq x \leq L$; y suponiendo por ahora que $\int_{-L}^{L} f(x)dx$ existe. Se desea encontrar la posibilidad de elegir números $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right], \tag{3.1}$$

para $-L \leq x \leq L$. En algunas ocasiones es complicado cumplir con éstas condiciones, pero no es imposible ya que esto puede suceder bajo ciertas restricciones; la primera de ellas es asumir que la ecuación (3.1) es cierta; y para conocer los coeficientes que aparecen en la ecuación (3.1), Fourier conocía un ingenioso método para su obtención, para lo cual tomaremos el siguiente lema.

Lema: Sean m y n números enteros no negativos, entonces:

1. $$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

2. Si $m \neq n$, entonces:

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

3. Si $n \neq 0$, entonces:

$$\int_{-L}^{L} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = L,$$

el lema se puede comprobar integrando directamente las expresiones anteriores. Para encontrar a_0, se integra la serie de Fourier término a término, tomando como suposición que se puede integrar (esto es posible de la convergencia) obteniendo:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\right].$$

Resolviendo las integrales de la derecha las cuales se anulan, queda por resolver la primera integral la cual se reduce a:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = a_0 L.$$

De aquí:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx.$$

Ahora el trabajo consiste en determinar a_k para cualquier entero positivo k, multiplicando la ecuación (3.1) por $\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ e integrando cada termino de la serie se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx &= \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\right].\end{aligned}$$

En este caso casi todas las integrales de la derecha son iguales a cero, excepto la $\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx$, que resulta cuando $n = k$ y el resultado de esta integral es igual a L; el lado derecho de esta ecuación se reduce a un solo término y la expresión se convierte en:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = a_k L,$$

de donde:

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx.$$

Para encontrar b_k para cualquier entero positivo k, multiplicando la ecuación (3.1) por $\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ e integrando cada termino de la serie se obtiene:

$$\int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\right].$$

De nuevo se nota que las integrales de la derecha son iguales a cero, excepto la expresión $\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx$, que resulta cuando $n = k$ y el resultado de esta integral es igual a L; el lado derecho de esta ecuación se reduce a un solo término y la expresión se convierte en:

$$\int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = b_k L,$$

de donde:

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx.$$

Con lo visto anteriormente, se encontrarón los coeficientes de la serie trigonométrica (3.1), este argumento se utiliza para elegir los coeficientes, al menos bajo ciertas condiciones. Es de notar que en el documento siguiente se abordara la serie compleja y se evidenciara el aporte de la serie compleja de Fourier para la construcción de la transformada de Fourier.

3.1.1. Serie compleja

Antes de abordar la serie compleja, se debe hacer énfasis en el manejo de los números complejos, y las grandes aplicaciones que se han realizado utilizando la transformada de Fourier, para modelar algunos fenómenos físicos presentados en distintas áreas del conocimiento, como se puede evidenciar en la medicina, al realizar diagnósticos utilizando ecografías en las cuales se pueden analizar las vibraciones de cada una de las membranas del corazón por medio de curvas sinusoidales; adicional a esto, presenta también muchas aplicaciones en el el estudio de señales. Para entrar en materia se revisan algunos de los mas importantes conceptos requeridos para trabajar con números complejos.

- Dada una pareja ordenada que representa un número complejo $a + bi$, donde su conjugado es $\overline{a + bi} = a - bi$ e identificando a $a + bi$ como una pareja ordenada en el plano, se puede afirmar que $a - bi = (a, -b)$; a este hecho se le denomina reflexión de (a,b) a lo largo del eje horizontal real.

- El conjugado de un producto es igual al producto de los conjugados:

$$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w},$$

para cualquier número complejo z y w.

- Para representar la magnitud o modulo de cualquier número complejo de la forma $a + bi$ es $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$, que es la distancia desde el origen (0,0) hasta el punto de coordenadas (a,b); es interesante realizar el siguiente análisis

$$(a + bi)\overline{(a + bi)} = a^2 + b^2 = |a + bi|^2 .$$

Si escribimos el número complejo por medio de la letra z, se obtiene la ecuación:

$$z\overline{z} = |z|^2 .$$

- Ahora se verifica la ecuación anterior utilizando coordenadas $x = r\cos(\theta), y = r\operatorname{sen}(\theta)$ para que la expresión se convierta en:

$$z = x + iy = r\cos(\theta) + ir\operatorname{sen}(\theta) = r\left[\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)\right] = re^{i\theta},$$

el cual se conoce como la formula de Euler. La magnitud de r, se escribe como $r = |z|$ y θ se denomina argumento principal de z, lo que significa que θ es el ángulo medido en sentido antihorario desde la parte positiva del eje horizontal real x y el punto (x, y) o $(x + iy)$ en el plano complejo; donde $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

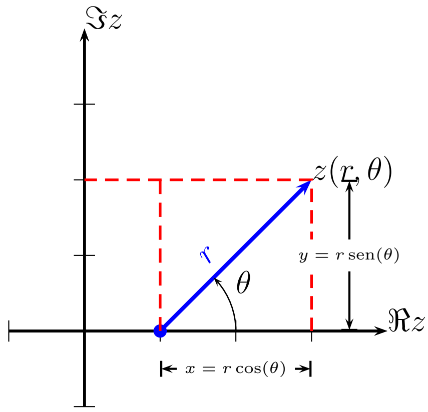


Figura 3.1: Representación trigonométrica de número complejo.

La formula de Euler, permite representar las funciones seno y coseno por medio de solo variaciones de la función exponencial, simplemente resolviendo las siguientes formulas:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x);\;\; e^{-ix} = \cos(x) - i\,\mathrm{sen}(x),$$

para obtener así la formula de Euler para el seno y coseno:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};\;\; \mathrm{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{3.2}$$

Para construir la serie compleja de Fourier se tiene en cuenta lo siguiente:
Sea una función f de variable real, periódica, con periodo p. Suponiendo que es integrable en el intervalo $[-p/2, p/2]$.
Escribiendo la serie de Fourier de $f(x)$ para dicho intervalo se obtiene:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \,\mathrm{sen}(n\omega_0 x)\right],$$

con $\omega_0 = 2\pi/p$, y utilizando las formulas de Euler (3.2), se obtiene:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{1}{2}(e^{in\omega_0 x} + e^{-in\omega_0 x}) + b_n \frac{1}{2i}(e^{in\omega_0 x} - e^{-in\omega_0 x})\right].$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\omega_0 x} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\omega_0 x}\right]. \tag{3.3}$$

Observando la serie (3.3), se toma

$$d_0 = \frac{1}{2}a_0;$$

y utilizando para cada número entero positivo n

$$d_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n).$$

Reemplazando en la serie (3.3) se obtiene:

$$d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[d_n e^{in\omega_0 x} + \overline{d_n} e^{-in\omega_0 x} \right] = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{in\omega_0 x} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{d_n} e^{-in\omega_0 x}. \tag{3.4}$$

Para continuar con el desarrollo de la serie, se obtienen los coeficientes por medio de

$$d_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(t)dt.$$

Luego, se utiliza para cada número entero positivo n

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt - \frac{i}{2}\frac{2}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)dt \\ &= \frac{1}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(t)\left[\cos(n\omega_0 t) - i\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\right]dt \\ &= \frac{1}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(t)e^{-in\omega_0 t}dt. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\overline{d_n} = \frac{1}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(t)\overline{e^{-in\omega_0 t}}dt = \frac{1}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(t)e^{-in\omega_0 t}dt = d_{-n}.$$

Lo siguiente en este desarrollo es aplicar este resultado en la ecuación (3.4), reemplazando se obtiene

$$\begin{aligned}
&d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{in\omega_0 x} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{d_n} e^{-in\omega_0 x} \\
&= \frac{1}{2} d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{in\omega_0 x} + \sum_{n=1}^{\infty} d_{-n} e^{-in\omega_0 x} \\
&= d_0 + \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} d_n e^{in\omega_0 x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\omega_0 x}.
\end{aligned}$$

Para concluir todo este desarrollo, se evidencia la definición de la serie compleja de Fourier, de la siguiente manera:
Sea f una función periódica con periodo p. Con $\omega_0 = 2\pi/p$ la serie de Fourier compleja está determinada por:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\omega_0 x},$$

donde:

$$d_n = \frac{1}{p} \int_{-p/2}^{p/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt,$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Los números d_n son los coeficientes de Fourier complejos de f.
Ahora si se supone que $p = 2L$, con $\omega_0 = 2\pi/2L = \pi/L$, la serie de Fourier compleja viene dada por la expresión:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\omega_0 x},$$

donde:

$$d_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt.$$

Cabe aclarar que en la formula d_n se puede integrar en cualquier intervalo de longitud p, debido a que f es periódica, continua o continua a trozos en el intervalo dado. Después de obtener la serie de Fourier compleja, ésta se define formalmente a continuación.

Definición 3.1.1. ***Serie de Fourier compleja***
Se define la serie de Fourier compleja como una función $f : [-L, L] \longrightarrow \mathbb{C}$, donde

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\omega_0 x} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} d_n e^{in\omega_0 x},$$

con los coeficientes de Euler para la serie de Fourier compleja dados por:

$$d_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-in\omega_0 t}dt.$$

Teorema 3.1.1. ***Completitud media***
Los sistemas exponencial y trigonométrico en $[-L, L]$ *son completos en el espacio* $V = L^2$ *de funciones* $f : [-L, L] \longrightarrow \mathbb{C}$ *con*

$$\int_{-L}^{L} |f(t)|^2 \, dt < \infty.$$

Una función f tiene $|f(t)|^2$ integrable, es decir, la función f es cuadrado integrable, entonces f es igual a la suma de su serie de Fourier en el sentido de convergencia en media. Una representación gráfica de una función f trigonométrica, donde S_n es la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier trigonométrica.
Cada S_n es una función suave, cuando $n \to \infty$, S_n puede converger a algo discontinuo. Si f es discontinua, se obtiene convergencia en media, pero no convergencia uniforme.

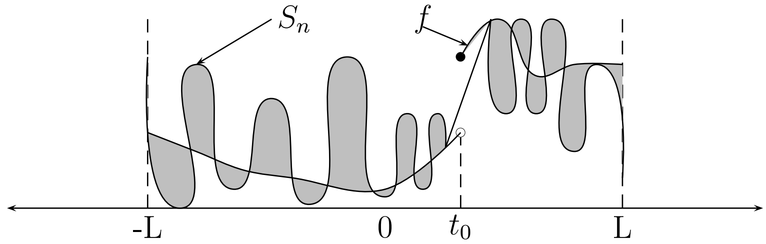


Figura 3.2: Significado geométrico de la convergencia en media.

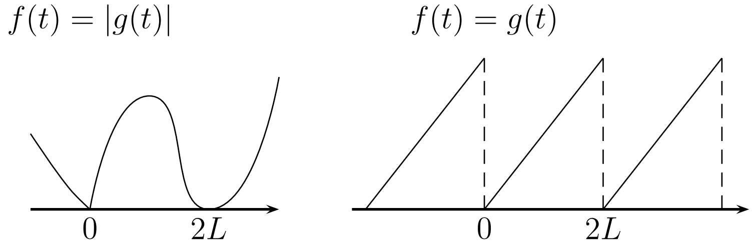
El área sombreada tiende a cero, es decir:

$$\int_{-L}^{L} |f(t) - S_n(t)|^2 \, dt \to 0,$$

suponiendo que

$$f : [0, 2L] \longrightarrow \mathbb{R}' o f : [-L, L] \longrightarrow \mathbb{R},$$

tenga una posible discontinuidad en t_0 pertenece a $[0, 2L]$ ó $[-L, L]$, siendo $t_0 = 0$ ó $2L$, entonces f es extendida periódicamente, es decir, siendo $f(t + 2L) = f(t)$, ésta extensión periódica se muestra en la figura (3.3), para los dos casos.



(a) Continua en 0 (b) Discontinua en 0

Figura 3.3: Discontinuidad de la convergencia en media.

3.2. Integral de Fourier

Si una función $f(t)$ está definida en un intervalo $[-L, L]$, se puede representar en la mayoría de los puntos que pertenecen a este intervalo por medio de una serie de Fourier. Sí f es periódica, se puede representar por su serie de Fourier en intervalos pertenecientes a la recta real.
Lo siguiente es suponer que $f(t)$ está definida para cualquier t sin ser periódica. Es claro que es imposible representar a $f(t)$ utilizando la serie de Fourier sobre todos los puntos de la recta real. Es de notar que si se puede realizar una representación en términos de senos y cosenos, para esto se recurre a cambiar la sumatoria por una integral. Para lograr este cambio se supone que f es totalmente integrable, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ converge y que f es suave a trozos en en intervalo $[-L, L]$. Ahora se escribe la serie de Fourier de f en un intervalo arbitrario $[-L, L]$, incluyendo las formulas integrales de los coeficientes:

$$\frac{1}{2}\int_{-L}^{L} f(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)d\xi\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)d\xi\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right].$$

Con lo anterior se pretende que $L \to \infty$ y así poder representar $f(t)$ sobre toda la recta real. Ahora bien se verifica el límite al que tiende esta serie de Fourier, si es que existe, es decir:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L};$$

y

$$\omega_n - \omega_{n-1} = \frac{\pi}{L} = \Delta\omega.$$

Entonces la serie de Fourier en $[-L, L]$ toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-L}^{L} f(\xi)d\xi\right)\Delta\omega + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\cos(\omega_n\xi)d\xi\right)\cos(\omega_n t)\right. \\ &\left.+\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\,\mathrm{sen}(\omega_n\xi)d\xi\right)\mathrm{sen}(\omega_n t)\right]\Delta\omega. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Lo siguiente es considerar que cuando $L \to \infty$, entonces, $\Delta\omega \to 0$. En la expresión anterior

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-L}^{L} f(\xi)d\xi\right)\Delta\omega \to 0,$$

esta conclusión se debe a que, por hipótesis, $\int_{-L}^{L} f(\xi)d\xi$ converge. Para analizar los otros términos en la expresión (3.5), se evidencia una similitud con la suma de Riemann para una integral definida, la cual asegurara que cuando $L \to \infty$ y $\Delta\omega \to 0$, esta expresión tiende al límite

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\omega\xi)d\xi\right)\cos(\omega t)\right. \\ &\left.+\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\mathrm{sen}(\omega\xi)d\xi\right)\mathrm{sen}(\omega t)\right]d\omega. \end{aligned}$$

Finalmente se ha llegado a la *integral de Fourier* de f en la recta real. Teniendo en cuenta las hipótesis hechas sobre f la integral de Fourier converge a

$$\frac{1}{2}\left(f(t-) + f(t+)\right),$$

para cada uno de los valores de t. Para este caso si f es continua en t, entonces esta integral converge a $f(t)$.
Regularmente esta integral de Fourier se escribe

$$\int_{0}^{\infty}[A_\omega\cos(\omega t) + B_\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)]d\omega. \tag{3.6}$$

Los coeficientes de la integral de Fourier de f vienen dados por:

$$A_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\omega\xi)d\xi;$$

y

$$B_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\mathrm{sen}(\omega\xi)d\xi.$$

3.3. Integral de Fourier compleja

Continuando con el estudio de la integral de Fourier, se puede establecer la relación que posee con la serie de Fourier compleja, es decir también se puede obtener la integral de Fourier compleja, la cual abre una vía para encontrar la transformada de Fourier. Si se supone una función f suave a trozos en cada intervalo $[-L, L]$, y que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$ es convergente. Entonces para cualquier t,

$$\frac{1}{2}\left(f(t-)+f(t+)\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\omega(\xi-t))d\xi d\omega,$$

luego se escribe la integral de Fourier en su forma compleja de la función coseno, obteniendo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(f(t-)+f(t+)\right) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\frac{1}{2}\Big(e^{i\omega(\xi-t)}+e^{-i\omega(\xi-t)}\Big)d\xi d\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i\omega(\xi-t)}d\xi d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega(\xi-t)}d\xi d\omega.\end{aligned}$$

En la primera integral de la segunda línea se reemplaza $\omega = -w$, entonces la expresión se escribe

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(f(t-)+f(t+)\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-iw(\xi-t)}d\xi dw + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega(\xi-t)}d\xi d\omega.\end{aligned}$$

Lo siguiente es escribir la variable de integración ω en la ultima integral y se combinan para obtener:

$$\frac{1}{2}\left(f(t-)+f(t+)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega(\xi-t)}d\xi d\omega. \tag{3.7}$$

Finalmente se obtiene la representación de la *integral de Fourier compleja* de f en toda la recta real. Ahora si se toma $C_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$, entonces ésta integral es:

$$\frac{1}{2}\left(f(t-) + f(t+)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_\omega e^{i\omega t}d\omega,$$

donde C_ω es el coeficiente de la integral de Fourier compleja de f.

Ahora bien, la expresión de la derecha de la ecuación (3.7) permite obtener la transformada de Fourier en su básica expresión. Para lograr esto se escribe la ecuación (3.7) así:

$$\frac{1}{2}\left(f(t-) + f(t+)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi\right]e^{i\omega t}d\omega. \tag{3.8}$$

La expresión que aparece dentro del corchete es la *transformada de Fourier* de f.

3.4. Transformada de Fourier

Definición 3.4.1. ***Transformada de Fourier***
Suponiendo que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ es convergente. Entonces la transformada de Fourier de f es la función:

$$\mathfrak{F}\left[f\right](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Por consiguiente, la transformada de Fourier de f es el coeficiente C_ω de la expresión que representa la integral de Fourier compleja de f. Es decir, $\mathfrak{F}$ transforma una función f en otra nueva función y se escribe $\mathfrak{F}\left[f\right]$. Es de notar que desde el inicio, para la función f se ha tomado la variable t, la cual representa el parámetro temporal, por ende posee gran utilidad en el campo del análisis de señales; por otro lado ω es la variable de la función transformada $\mathfrak{F}\left[f\right]$, por esto, $\mathfrak{F}\left[f\right](\omega)$ es el valor que toma la función transformada evaluada en ω, el cual se puede obtener calculando para una ω dada en las condiciones iniciales y evaluando en la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$. De tal manera que cuando sea necesario en el documento, para hacer referencia a la variable temporal t se escibirá la transformada de Fourier $\mathfrak{F}\left[f(t)\right]$ por medio de $\mathfrak{F}\left[f\right]$.
Es claro que, cuando se calculan algunas transformadas en lugar del símbolo $\mathfrak{F}\left[f(t)\right]$, se escribe $\widehat{f}$; con esta notación toma la forma siguiente:

$$\mathfrak{F}\left[f\right](\omega) = \widehat{f}(\omega).$$

Continuando con este razonamiento, se evidencia el excelente trabajo realizado por Fourier para encontrar la transformada que lleva su nombre; es por esto que se desarrollarán algunos ejercicios como ejemplo para hacer claridad al concepto y aplicarlo en su solución.

Ejemplo 3.4.1. *Suponiendo a y k ambos números positivos, y sea*

$$f(t) = \begin{cases} k, & para\ -a \leq t < a, \\ 0, & para\ t < -a\ y\ para\ t \geq a. \end{cases}$$

De la función anterior, se observa que es una función pulso la cual puede escribirse en términos de la función de Heaviside por medio de la expresión:

$$f(t) = k\left[H(t+a) - H(t-a)\right],$$

La transformada de Fourier de f está dada por:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-a}^{a} ke^{-i\omega t}dt = \left[\frac{-k}{i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{-a}^{a} \\ &= -\frac{k}{i\omega}\left[e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}\right] = \frac{2k}{\omega}\,\mathrm{sen}(a\omega). \end{aligned}$$

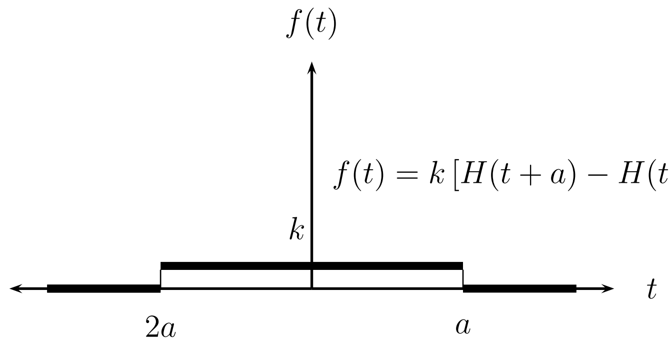


Figura 3.4: Función pulso.

Así:

$$\mathfrak{F}[f](\omega) = \frac{2k}{\omega}\,\mathrm{sen}(a\omega).$$

De la expresión (3.8), la integral de Fourier para f se puede escribir por medio de:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Por lo anterior, si f es continua; puede ser a trozos en todo el intervalo $[-L, L]$, la integral de Fourier para f está dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \tag{3.9}$$

En síntesis, se puede utilizar la expresión (3.9) como la función transformada inversa de Fourier; con el objetivo de obtener la función f por medio de $\hat{f}$. Es de notar la importancia de ésta característica, ya que en las aplicaciones se hace uso de esta valiosa herramienta para pasar a un problema mas sencillo. De tal forma que, la expresión (3.9) permita obtener nuevamente a f, cuando se resuelve para $\hat{f}(\omega)$. Es decir:

$$\mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}] = f \text{ si } \mathfrak{F}[f] = \hat{f}.$$

Definición 3.4.2. ***Linealidad***
Se comprueba que la transformada integral es lineal:

$$\mathfrak{F}\left[\alpha f + \beta g\right] = \alpha\mathfrak{F}[f] + \beta\mathfrak{F}[g].$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}\left[\alpha f + \beta g\right] &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right)e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\alpha f(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{-\infty}^{\infty}\beta g(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt + \beta\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \alpha\mathfrak{F}[f] + \beta\mathfrak{F}[g].
\end{aligned}$$

□

Generalmente la integral (3.9) y su inversa correspondiente, conforman dos transformadas de Fourier, siempre y cuando f cumpla las siguientes condiciones:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \;\; \text{y} \;\; f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}dt.$$

Ejemplo 3.4.2. *Dada la función*

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \textit{para } -1 \leq t \leq 1, \\ 0, & \textit{para } t > 1 \textit{ y para } t < -1. \end{cases}$$

Como f es continua e integrable y f' es continua a trozos. Se puede calcular $\hat{f}(\omega)$, sean

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-1}^{1} (1 - |t|)e^{-i\omega t}dt = \frac{2(1 - \cos(\omega))}{\omega^2}. \end{aligned}$$

La última expresión representa el coeficiente de Fourier C_ω cuando se realiza el desarrollo de Fourier en forma compleja para $f(t)$. Ahora para invertir y obtener la expresión original, se utiliza (3.9),

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos(\omega))}{\omega^2}e^{i\omega t}d\omega. \end{aligned}$$

Después de integrar se obtiene:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\ &= \pi t \text{ signo } (t+1) + \pi \text{ signo } (t+1) + \pi t \text{ signo } (t-1) \\ &- \pi \text{ signo } (t-1) - 2 \text{ signo } (t), \end{aligned}$$

de donde:

$$\text{signo } (\omega) = \begin{cases} 1 & \text{para } \omega > 0 \\ 0 & \text{para } \omega = 0 \\ -1 & \text{para } \omega < 0. \end{cases}$$

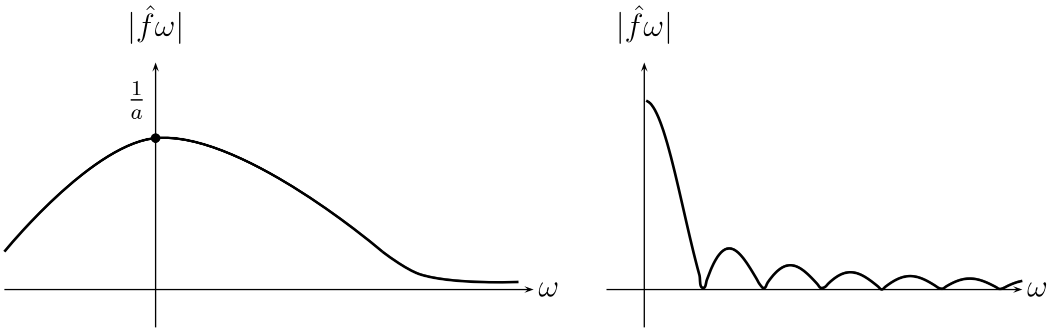
Es decir, su resultado es $1 - |t|$ para $-1 \leq t \leq 1$ y 0 para $t > 1$ y para $t < -1$, por lo tanto se comprueba.

Ahora bien, si se tiene en cuenta el entorno de la transformada de Fourier, se observa que generalmente el *espectro de amplitud* se representa por medio de la gráfica de $|\hat{f}(\omega)|$.

Ejemplo 3.4.3. *Dada la función* $f(t) = H(t)e^{-at}$, *en consecuencia se tiene que* $\hat{f}(\omega) = 1/(a + i\omega)$, *de donde*

$$|\hat{f}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}.$$

En la figura (3.5), se observa el espectro de amplitud de f representado por medio de la gráfica de $|\hat{f}(\omega)|$.



(a) Gráfica de $|\hat{f}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$, con $f(t) = H(t)e^{-at}$

(b) Gráfica de $\hat{f}(\omega) = \left|\frac{2k\,\mathrm{sen}(a\omega)}{\omega}\right|$

Figura 3.5: Espectro de amplitud de f.

Ejemplo 3.4.4. *Con lo anterior, el espectro de amplitud de la función* f *del ejemplo (3.4.1) viene dado por*

$$|\hat{f}(\omega)| = 2k\left|\frac{\mathrm{sen}(a\omega)}{\omega}\right|,$$

la cual se puede observar en la figura (3.5).

Teorema 3.4.1. ***Corrimiento del tiempo***
Sea t_0 *un número real, entonces:*

$$\mathfrak{F}[f(t - t_0)](\omega) = e^{-i\omega t_0}\hat{f}(\omega).$$

Este teorema se aplica, si se corre hacia atrás t_0 *unidades, ademas reemplazando* $f(t)$ *por* $f(t - t_0)$, *la transformada de Fourier de* $f(t - t_0)$ *recorrida es la transformada de Fourier de* f, *multiplicada por* $e^{-i\omega t_0}$.

La comprobación es sencilla

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f(t-t_0)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-i\omega t}dt \\ &= e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-i\omega(t-t_0)}dt.\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = t - t_0$ y reemplazando se obtiene:

$$\mathfrak{F}[f(t-t_0)](\omega) = e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}du = e^{-i\omega t_0}\hat{f}(\omega).$$

Ejemplo 3.4.5. *Aplicando el teorema anterior para conocer la transformada de Fourier del pulso de amplitud 6 encendiendo en $t = 3$ y apagando en $t = 7$, es decir:*

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \textit{para } t < 3 \textit{ y para } t \geq 7 \\ 6, & \textit{para } 3 \leq t < 7, \end{cases}$$

la cual se puede observar en la figura (3.6.a). Es claro que se puede calcular $\hat{g}(\omega)$ integrando; pero el punto medio del pulso se obtiene cuando $t = 5$. Ahora si se traslada la gráfica 5 unidades a la izquierda está quedará ubicada en cero (ver figura (3.6.b)). Nombrando f a este pulso se obtiene que $f(t) = g(t + 5)$ y al trasladar f, 5 unidades a la derecha regresa a g:

$$g(t) = f(t-5).$$

Este resultado es la consecuencia del ejemplo (3.4.1) en el que se obtiene la transformada de Fourier de f

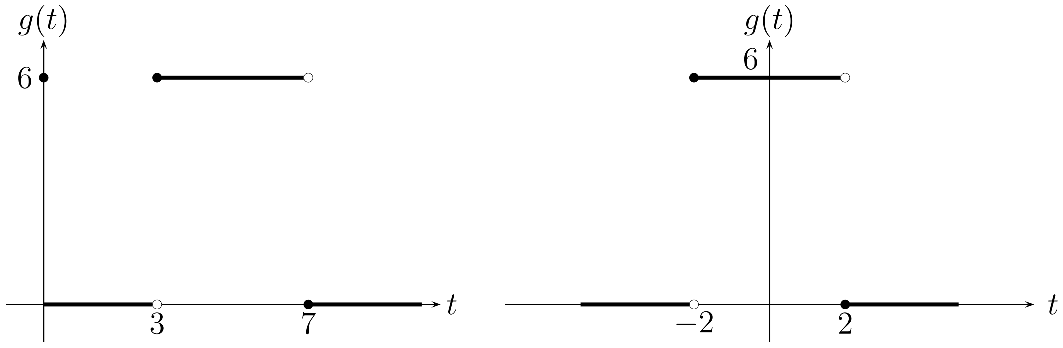
$$\mathfrak{F}[f(t)](\omega) = 12\frac{\operatorname{sen}(2\omega)}{\omega}.$$

Aplicando el teorema de corrimiento del tiempo, se observa que:

$$\mathfrak{F}[g(t)](\omega) = \mathfrak{F}[f(t-5)](\omega) = 12e^{-5i\omega}\frac{\operatorname{sen}(2\omega)}{\omega}.$$

Por ende la función inversa del teorema de corrimiento del tiempo es:

$$\mathfrak{F}^{-1}[e^{-i\omega t_0}\mathbf{F}(\omega)](t) = f(t-t_0). \tag{3.10}$$



(a) Grafica de $g(t)$

(b) La función de la figura (3.6.a) corre 5 unidades a la izquierda

Figura 3.6: Representación gráfica corrimiento del tiempo.

Teorema 3.4.2. ***Corrimiento de la frecuencia***
Dado ω_0 cualquier numero real, entonces

$$\mathfrak{F}[e^{i\omega t}f(t)] = \hat{f}(\omega - \omega_0).$$

Prueba

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[e^{i\omega t}f(t)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t}f(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t}dt = \hat{f}(\omega - \omega_0).\end{aligned}$$

Siendo la inversa del teorema del corrimiento de la frecuencia:

$$\mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}(\omega - \omega_0)](t) = e^{i\omega_0 t}f(t).$$

Teorema 3.4.3. ***Escala***
Si se utiliza un numero real a diferente de cero, se obtiene:

$$\mathfrak{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Este resultado se obtiene aplicando la definición. La transformada inversa de la expresión anterior es:

$$\mathfrak{F}^{-1}\left[\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)\right](t) = |a|f(at).$$

Ejemplo 3.4.6. *Retomando el ejemplo (3.4.2), si $f(t)$ viene dada por:*

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{para } -1 \le t \le 1, \\ 0, & \text{para } t > 1 \text{ y para } t < -1, \end{cases}$$

entonces

$$\hat{f}(\omega) = 2\frac{1-\cos(\omega)}{\omega^2}.$$

Si

$$g(t) = f(7t) = \begin{cases} 1 - |7t|, & \text{para } -\frac{1}{7} \le t \le \frac{1}{7}, \\ 0, & \text{para } t > \frac{1}{7} \text{ y para } t < -\frac{1}{7}, \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) = \mathfrak{F}[f(7t)](\omega) &= \frac{1}{7}\hat{f}\left(\frac{\omega}{7}\right) \\ &= \frac{2}{7}\,\frac{1-\cos(\omega/7)}{(\omega/7)^2} = 14\,\frac{1-\cos(\omega/7)}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Teorema 3.4.4. ***Inversión del tiempo***

$$\mathfrak{F}[f(-t)](\omega) = \hat{f}(-\omega).$$

La expresión anterior se denomina inversión del tiempo ya que reemplaza t por $-t$ en la función $f(t)$ y se obtiene $f(-t)$. La transformada de esta función se obtiene reemplazando ω por $-\omega$ en la transformada de $f(t)$. La inversa de la inversión del tiempo es:

$$\mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}(-\omega)](t) = f(-t).$$

Teorema 3.4.5. ***Simetría***

$$\mathfrak{F}[\hat{f}(t)](\omega) = 2\pi f(-\omega).$$

Este resultado es fácil de entender, si se toma a $f(t)$, escribiendo su transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$. Lo siguiente es reemplazar ω por t y se toma la transformada de Fourier de la función $\hat{f}(t)$. Esta propiedad de la transformada de Fourier concluye que la transformada de $\hat{f}(t)$ simplemente es la función $f(t)$ con $-t$ en lugar de t, todo multiplicado por 2π.

Ejemplo 3.4.7. *Sea*

$$f(t) = \begin{cases} 4 - t^2 & para \ -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & para \ t > 2 \ y \ para \ t < -2 \end{cases}$$

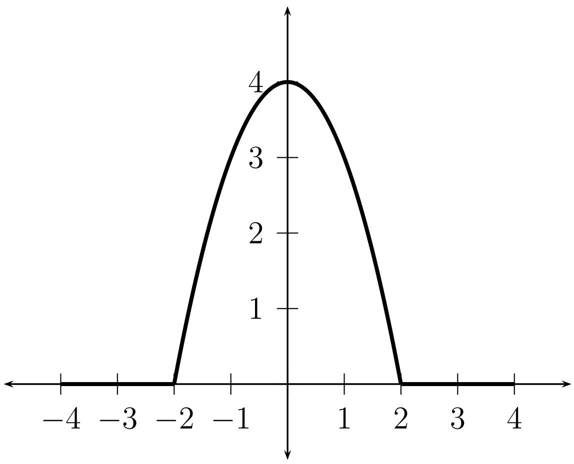


Figura 3.7: Gráfica de $f(t)$ ejemplo (3.4.7).

En la figura (3.7) se muestra la gráfica de f. La transformada de Fourier de f es

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}d\omega = \int_{-2}^{2}(4-t^2)e^{-i\omega t}dt \\ &= 4\frac{\operatorname{sen}(2\omega) - 2\omega\cos(2\omega)}{\omega^3}. \end{aligned}$$

Observando el ejemplo anterior, se puede apreciar que $f(-t) = f(t)$, por lo tanto si se cambia $-\omega$ por ω la función $\hat{f}(\omega)$ no se ve afectada, así se puede ver que este es el caso.

Teorema 3.4.6. *Modulación*
Suponiendo que ω_0 es un número real, se tiene que

$$\mathfrak{F}[f(t)\cos(\omega_0 t)](\omega) = \frac{1}{2}[\hat{f}(\omega+\omega_0) + \hat{f}(\omega-\omega_0)]$$

y

$$\mathfrak{F}[f(t)\operatorname{sen}(\omega_0 t)](\omega) = \frac{1}{2}i[\hat{f}(\omega+\omega_0) - \hat{f}(\omega-\omega_0)].$$

Prueba: Reemplazando $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$; utilizando el teorema del corrimiento del tiempo y la linealidad de $\mathfrak{F}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}[f(t)\cos(\omega_0 t)](\omega) &= \mathfrak{F}\left[\frac{1}{2}e^{i\omega_0 t}f(t) + \frac{1}{2}e^{-i\omega_0 t}f(t)\right](\omega) \\
&= \frac{1}{2}\mathfrak{F}\left[e^{i\omega_0 t}f(t)\right](\omega) + \frac{1}{2}\mathfrak{F}\left[e^{-i\omega_0 t}f(t)\right](\omega) \\
&= \frac{1}{2}\hat{f}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\hat{f}(\omega + \omega_0).
\end{aligned}$$

La segunda conclución se obtiene de manera similar, utilizando
$\operatorname{sen}(\omega_0 t) = (1/2i)(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t})$.

3.5. Propiedades y aplicaciones de la transformada de Fourier

3.5.1. Transformada de Fourier de una derivada

Teniendo en cuenta que para aplicar la transformada de Fourier en la solución de ecuaciones diferenciales se necesita relacionar la transformada de f' con la de f. Para este propósito se tiene el siguiente teorema denominado como *la regla operacional* el cual relaciona la transformada de una derivada de cualquier orden. De la misma manera sucede con la transformada de una integral si se requiere relacionarla con ecuaciones diferenciales.

Teorema 3.5.1. ***Diferenciación respecto a la variable tiempo***
Sea n un número entero positivo y suponiendo que $f^{(n-1)}$ es una función continua a trozos en el intervalo $[-L, L]$ con $\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(n-1)}(t)|dt < \infty$. Teniendo en cuenta lo anterior se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} f^{(k)}(t) = \lim_{t\to-\infty} f^{(k)}(t) = 0,$$

con $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Se tiene que

$$\mathfrak{F}[f^{(n)}(t)](\omega) = (i\omega)^n\hat{f}(\omega).$$

Comprobación. Primero se obtiene la primera derivada utilizando la integración por partes:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f'](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \left[f(t)e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-i\omega)e^{-i\omega t}dt.\end{aligned}$$

Lo siguiente es considerar que $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\,\mathrm{sen}(\omega t)$ es de magnitud 1 y por la hipotesis,

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0.$$

Obteniendo,

$$\mathfrak{F}[f^{(n)}(t)](\omega) = (i\omega)^{(n)} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = (i\omega)^{(n)}\hat{f}(\omega).$$

Para ampliar la aplicación de esta propiedad a la solución cuando se tienen derivadas de orden superior se aplica el método de inducción sobre n, entonces

$$f'(t) = \frac{d}{dt}f^{(n-1)}(t).$$

3.5.2. Diferenciación respecto a la variable de frecuencia

En la transformada de Fourier se utiliza la variable ω para representar la frecuencia de $f(t)$, debido a que aparece en la exponencial compleja $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\,\mathrm{sen}(\omega t)$. Por lo anterior, la derivada de $\hat{f}(\omega)$ respecto a la variable de frecuencia ω es denominada *diferenciación respecto a la variable de frecuencia*; teniendo esto en cuenta, a continuación se relacionaran las derivadas de $\hat{f}$ y $f(t)$.

Teorema 3.5.2. ***Diferenciación respecto a la variable de frecuencia***
Dado n un número entero positivo; sea f una función continua a trozos en el intervalo $[-L, L]$ para cualquier número positivo L y $\int_{-\infty}^{\infty} |t^n f(t)|dt$ convergente, se tiene que:

$$\mathfrak{F}[t^n f(t)](\omega) = i^n \frac{d^n}{d\omega^n}\hat{f}(\omega).$$

Es de notar que bajo las condiciones que establece el teorema

$$\mathfrak{F}[t\, f(t)](\omega) = i\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) \text{ y } \mathfrak{F}[t^2 f(t)](\omega) = -\frac{d^2}{d\omega^2}\hat{f}(\omega).$$

Comprobación. Primero se aplica el teorema para un valor de n, en este caso para $n = 1$; si se requiere usar un valor mayor para n el procedimiento es similar. Posteriormente se utiliza la regla de Leibniz para la integración con derivadas y se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) &= \frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[f(t)e^{-i\omega t}\right]dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-it)e^{-i\omega t}dt = -i\int_{-\infty}^{\infty}[t\ f(t)]e^{-i\omega t}dt \\ &= -i\mathfrak{F}[t\ f(t)](\omega).\end{aligned}$$

Ejemplo 3.5.1. *Aplicando la definición de la transformada de Fourier y el teorema de la diferenciación respecto a la variable frecuencia, calcular* $\mathfrak{F}[t^2e^{-5|t|}]$.

Primero se tiene en cuenta que:

$$e^{-a|t|} = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^2+\omega^2}e^{i\omega t}d\omega.$$

Entonces

$$\mathfrak{F}\left[e^{-a|t|}\right](\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}.$$

Aplicando lo anterior se obtiene que:

$$\mathfrak{F}\left[e^{-5|t|}\right](\omega) = \frac{10}{25+\omega^2}.$$

Lo siguiente es aplicar el teorema de diferenciación respecto a la variable de frecuencia para obtener:

$$\mathfrak{F}[t^2e^{-5|t|}](\omega) = i^2\frac{d^2}{d\omega^2}\left[\frac{10}{25+\omega^2}\right] = 20\frac{25-3\omega^2}{(25+\omega^2)^3}.$$

3.5.3. La transformada de Fourier de una integral

A continuación se abordara un teorema que permite calcular la transformada de Fourier de una función definida por medio de una integral.

Teorema 3.5.3. ***La transformada de Fourier de una integral***
Dada una función f continua a trozos sobre el intervalo $[-L, L]$. Suponiendo que $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt$ es convergente con $\hat{f}(0) = 0$. Entonces

$$\mathfrak{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right](\omega) = \frac{1}{i\omega}\hat{f}(\omega).$$

Prueba: Sea $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$. La consecuencia es que $g'(t) = f(t)$ para todo t con f continua; en donde $g(t) \to 0$ a medida que $t \to -\infty$. Ademas,

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = \hat{f}(0) = 0.$$

Lo siguiente es aplicar el teorema de diferenciación respecto al tiempo a la función g obteniendo

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \mathfrak{F}[f(t)](\omega) = \mathfrak{F}[g'(t)](\omega) \\ &= i\omega\mathfrak{F}[g(t)](\omega) = i\omega\mathfrak{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right](\omega).\end{aligned}$$

3.5.4. Convolución

Existen innumerables transformadas en donde aparecen integrales que regularmente poseen una operación de convolución para la misma; es así que a continuación se estudiara la convolución para este tipo de transformadas de Fourier.

Definición 3.5.1. ***Convolución***
Dadas dos funciones f y g sobre toda la recta real, se concluye que f posee una convolución con g si:

1. $\int_a^b f(t)dt$ *y* $\int_a^b g(t)$ *existen en todo intervalo* $[a, b]$.
2. *Para todo número real t,*
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t-\tau)g(\tau)|\, d\tau$$
es convergente. Se observa que para este caso, la convolución $f * g$ de f con g es la función representada por
$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

En la definición anterior la convolución se denota por medio de $f * g$, pero se puede escribir $f * g(t)$ para expresar $f * g$ evaluada para todo t.

Teorema 3.5.4. *Suponiendo que f posee una convolución con g. Entonces satisface las siguientes propiedades:*

1. *Conmutatividad. g posee una convolución con f y $f * g = g * f$.*

2. *Linealidad. Para α y β ambos números reales; si f y g poseen convoluciones con h, se cumple $\alpha f + \beta g$ también poseen convolución con h, por lo tanto se tiene que*

$$(\alpha f + \beta g) * h = \alpha(f * h) + \beta(g * h).$$

Prueba:

1. Suponiendo $z = t - \tau$, reemplazando se escribe

$$\begin{aligned} f * g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \\ &= \int_{\infty}^{-\infty} f(z)g(t-z)(-1)dz = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-z)f(z)dz = g * f(t). \end{aligned}$$

2. Para probar la linealidad, se utilizan las propiedades básicas de la integración ya que las integrales que aparecen en estos cálculos son convergentes.

Después de comprobar la linealidad y la conmutatividad de la convolución se pueden escribir los principales resultados.

Teorema 3.5.5. *Dadas dos funciones f y g, suponiendo que son acotadas, continuas sobre la recta real y ademas que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$ y $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt < \infty$. Entonces,*

1.
$$\int_{-\infty}^{\infty} f * g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt.$$

2. *Convolución en el tiempo*

$$\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

3. *Convolución en la frecuencia*

$$\widehat{f(t)g(t)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\omega)$$

El primer resultado muestra que la integral sobre toda la recta real de la convolución de f con g, equivalen al producto de las integrales de f y de g sobre toda la recta real.

El segundo resultado concluye que la transformada de Fourier de una convolución equivale a multiplicar las transformadas de Fourier de las funciones, es decir:

$$\mathfrak{F}[f * g](\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

Es de notar que la función anterior posee inversa, la cual se escribe como

$$\mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)](t) = f * g(t).$$

La expresión para la convolución en la frecuencia se puede escribir como

$$\mathfrak{F}[f(t)g(t)](\omega) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\omega).$$

Es decir, la transformada de Fourier para el producto de dos funciones, es equivalente a $(\frac{1}{2\pi})$ veces la convolución de la transformada de estas funciones.
Es de notar que la convolución en la frecuencia posee inversa, la cual se escribe como

$$\mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega)](t) = 2\pi f(t)g(t).$$

Prueba: Para el primer punto del teorema, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f * g(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right)dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)dt\right)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)dt\right)g(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

la expresión anterior se obtiene intercambiando el orden de integración; y utilizando

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt,$$

en donde τ pertenece al conjunto de los números reales. Se concluye que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f * g(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\right)g(\tau)d\tau\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt.\end{aligned}$$

Para el segundo punto del teorema, se hace un cambio de variable en donde $F(t) =$

$e^{-i\omega t}f(t)$ y $G(t) = e^{-i\omega t}g(t)$; siendo t y ω números reales, para obtener

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f*g(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)}f(t-\tau)e^{-i\omega\tau}g(\tau)d\tau\right)dt.\end{aligned}$$

Observando en la ultima linea de la expresión anterior, la integral que aparece dentro del paréntesis grande es la convolución de F con G y aplicando el resultado del primer punto del teorema a F y G, se obtiene

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F*G(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt\int_{-\infty}^{\infty} G(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).\end{aligned}$$

3.5.5. La transformada de Fourier ventaneada

Suponiendo una función f representa una señal, es decir f esta definida para toda la recta real con energía finita $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt$.
Teniendo en cuenta la posible necesidad de calcular su contenido de frecuencia respecto a la variable temporal, se debe recordar que $\hat{f}(\omega)$ contiene la información relacionada con las frecuencias de dicha señal; sin embargo, $\hat{f}(\omega)$ no especifica esta información para intervalos temporales explícitos, debido a que

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt,$$

en donde la integral está definida para todo t, es decir, permite obtener el espectro de amplitud total $|\hat{f}(\omega)|$. La solución a esta necesidad radica en que se puede obtener el contenido de la frecuencia de $f(t)$ para intervalos temporales dados ventaneando la función antes de calcular la transformada de Fourier.
Para lograr obtener esta transformada, se requiere una *función ventana* g, la cual toma valores diferentes de cero en algún intervalo cerrado, generalmente en $[0,T]$ o en $[-T,T]$. Estos intervalos tienen el nombre de *soporte de* g y debido a que en este caso son

intervalos cerrados se trata de *soporte compacto*, es de aclarar que la función g es igual a cero fuera de dicho intervalo de soporte.

3.6. Tabla de transformadas de Fourier

En resumen se tienen las propiedades de la transformada dadas en forma de tabla. A continuación se presenta una tabla de transformadas:

FUNCIÓN	TRANSFORMADA $\mathfrak{F}[f](\omega) =$	PARÁMETROS
$f(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$	
$e^{-\lvert t\rvert}$	$\frac{2}{1+\omega^2}$	
$\frac{1}{1+t^2}$	$\pi e^{-\lvert\omega\rvert}$	
e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\omega^2/4a}$	$a > 0$
$e^{iat}f(t)$	$\hat{f}(\omega - a)$	$a \in \mathbb{R}$
$f(t+a)$	$e^{ia\omega}\hat{f}(\omega)$	$a \in \mathbb{R}$
$f(at+b)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}e^{\frac{ib\omega}{a}}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$	$a \neq 0,\, b \in \mathbb{R}$
$t^n f(t)$	$i^n \hat{f}^{(n)}(\omega)$	$n \in \mathbb{N}$
$f^{(n)}$	$(i\omega)^n \hat{f}(\omega)$	$n \in \mathbb{N}$
$f(t)\,\mathrm{sen}(at)$	$\frac{\hat{f}(\omega-a)-\hat{f}(\omega+a)}{2i}$	$a \in \mathbb{R}$
$f(t)\cos(at)$	$\frac{\hat{f}(\omega-a)+\hat{f}(\omega+a)}{2i}$	$a \in \mathbb{R}$
$\begin{cases} 1, & \lvert t\rvert \leq 1 \\ 0, & \lvert t\rvert > 1. \end{cases}$	$2\frac{\mathrm{sen}(\omega)}{\omega}$	
Identidad de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert\hat{f}(t)\rvert^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt$	

Cuadro 3.1: Tabla de Transformadas de Fourier.

4

La transformada de Laplace

4.1. Transformada de Laplace y su relación con la transformada de Fourier

Definición 4.1.1. ***Transformada de Laplace***
La transformada de Laplace $\mathfrak{L}[f]$ de f es una función definida por

$$\mathfrak{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt,$$

para todo s con el cual la integral converja.

La transformada de Laplace transforma una función f en otra función denominada $\mathfrak{L}$; cuya frecuencia t representa la variable independiente en f y s representa la variable independiente en $\mathfrak{L}$, es decir:

$$F = \mathfrak{L}[f], \ \ F = \mathfrak{L}[g], \ \ H = \mathfrak{L}[h], \ \ \ldots$$

Para obtener la transformada de Laplace, se puede hacer uso de la transformada de Fourier ya que si se observa detalladamente, se evidencia una diferencia y es que la transformada de Fourier analiza funciones por medio de una parte del plano complejo y la transformada de Laplace analiza las funciones a través de todo el plano complejo. Con lo anterior se cuenta con todo el trabajo mátematico estudiado en el capitulo anterior para escribir la transformada de Laplace por medio de:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{s=\sigma+\jmath\omega}^{\sigma+\jmath\infty} \left(e^{st}\frac{a_n - \jmath b_n}{2} + e^{-st}\frac{a_n + \jmath b_n}{2} \right) \\ &= a_0 + \sum_{s=\sigma+\jmath\omega}^{\sigma+\jmath\infty} \left(a_n \cos(\omega t) + b_n \operatorname{sen}(\omega t) \right) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Definiendo los coeficientes complejos para $f(t)$

$$c_n = \frac{a_n - \jmath b_n}{2} \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

El valor de a_n y de b_n dependerán de n y de $f(t)$; reemplazando $n = (-n)$, se obtiene

$$a_{-n} = a_n$$

pero

$$b_{-n} \neq b_n$$

o

$$b_{-n} = -b_n$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + \jmath b_n}{2}$$

en donde

$$c_n = (c_{-n})$$

y

$$c_0 = a_0$$

De tal manera que se puede representar a $f(t)$ por medio de:

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{s=\sigma+\jmath\omega}^{\sigma+\jmath\infty} (c_n e^{st}) + \sum_{s=\sigma+\jmath\omega}^{\sigma+\jmath\infty} (c_{-n} e^{-st}) \\ &= \sum_{s=\sigma+\jmath\omega}^{\sigma+\jmath\infty} (c_n e^{st}) + \sum_{s=\sigma+\jmath\omega}^{\sigma+\jmath\infty} (c_{-n} e^{-st}) \\ &= \sum_{s=\sigma+\jmath\omega}^{\sigma+\jmath\infty} (c_n e^{st}) + \sum_{s=\sigma-\jmath\omega}^{\sigma-\jmath\infty} (c_n e^{st}). \end{aligned}$$

Para concluir este desarrollo mátematico, en la segunda serie respecto de los enteros complejos negativos desde $\sigma - \jmath\omega$, hasta $\sigma - \jmath\infty$ se suman respecto de los enteros negativos desde $s = \sigma - \jmath\infty$ hasta $\sigma + \jmath\infty$, para cubrir todo el plano complejo, es decir:

$$f(t) = \sum_{s=\sigma-\jmath\infty}^{\sigma+\jmath\infty} (c_n e^{st})$$

La expresión anterior permite evaluar los coeficientes complejos por medio de:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{a_n - \jmath b_n}{2} \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[f(t)\left(\frac{e^{st}+e^{-st}}{2}\right)\right] dt \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[f(t)\left(\frac{e^{st}-e^{-st}}{\jmath 2}\right)\right] dt \\
c_n &= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)(e^{st}+e^{-st})]dt\right] - \jmath\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)\frac{(e^{st}-e^{-st})}{\jmath}]dt\right]\right\} \\
c_n &= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{T}f(t)[e^{st}+e^{-st}-e^{st}+e^{-st}]dt\right]\right\} \\
c_n &= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)[2e^{-st}]dt\right]\right\} \\
c_n &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)(e^{-st})dt.
\end{aligned}$$

Definición 4.1.2. ***Transformada bilateral de Laplace***
Haciendo uso de la definición de transformada de Laplace, si:

$$f(t) = \sum_{s=\sigma-\jmath\infty}^{\sigma+\jmath\infty} (c_n e^{st}), \tag{4.2}$$

con $s = \jmath\omega = \frac{\jmath 2\pi}{T}$.

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[f(t)(e^{-st})\right] dt,$$

cuando

$$T \to \infty$$

$$s \to ds.$$

Así que:

$$\frac{1}{T} = \frac{ds}{\jmath 2\pi}.$$

Aplicando los limites a las expresiones anteriores.

$$c_n T \to \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

el lado derecho de la expresión anterior está en función de $s = \sigma - \jmath\omega$ y no de t, entonces:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \text{ la cual se denomina transformada bilateral de Laplace}$$

Para obtener la función inversa de la transformada de Laplace, se multiplica y se divide por T en la expresión (4.2) para obtener:

$$f(t) = \sum_{s=\sigma-\jmath\omega}^{\sigma+\jmath\infty} \left(c_n T e^{st} \frac{1}{T} \right).$$

Reemplazando $c_n T = F(s)$ se obtiene:

$$f(t) = \frac{1}{\jmath 2\pi} \int_{\sigma-\jmath\infty}^{\sigma+\jmath\infty} F(s)e^{st}ds, \text{ la cual es la transformada inversa de Laplace}$$

Lo anterior permitió la obtención de la transformada de Laplace y la transformada inversa de Laplace. Es evidente que esta transformada es un caso especial de la transformada de Fourier, en el cual solo se cambian los parámetros de la integral; Laplace maneja el plano complejo y Fourier maneja el plano imaginario, las propiedades de la transformada de Laplace son similares a las propiedades de la transformada de Fourier y su verificación es casi idéntica, es por esto que solo se enumeraran.

4.2. Propiedades de la transformada de Laplace

1. **Linealidad de la transformada de Laplace**
   Suponiendo que $\mathfrak{L}[f](s)$ y $\mathfrak{L}[g](s)$, con $s > a$, y α, β cualquier número real; se tiene que:
   $$\mathfrak{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

2. **Transformada inversa de Laplace**
   Una función g tal que $\mathfrak{L}[g] = G$ se denomina como la transformada inversa de Laplace de G, es decir:
   $$g = \mathfrak{L}^{-1}[G].$$

3. **Transformada de Laplace de una derivada**
   Dada una función f continua sobre el intervalo $[0, \infty]$, suponiendo que f' continua a trozos sobre el intervalo $[0, k]$ para k positivo y que $\lim_{k\to\infty} e^{-sk} f(k) = 0$ si $s > 0$, se tiene que:
   $$\mathfrak{L}[f'](s) = sF(s) - f(0).$$

4. **Transformada de Laplace de una derivada superior**
   Dadas las funciones $f, f', \cdots, f^{n-1}$ continuas para $[0, 1]$, con $f^{(n)}$ continua a trozos sobre $[0, k]$ para k positivo y que $\lim_{k\to\infty} e^{-sk} f^{(j)}(k) = 0$ si $s > 0$ y $j = 1, 2, 3, \ldots, n-1$, se tiene que:
   $$\mathfrak{L}[f^{(n)}](s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

   De lo anterior, se escribe la segunda derivada ($n = 2$), ya que es la derivada mas utilizada en la mayoría de ejercicios, cuya forma es:
   $$\mathfrak{L}[f''](s) = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0).$$

5

Aplicación de las transformadas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales

5.1. Ecuación de calor en un dominio infinito

A modo de aplicación se obtendrá la solución del problema:

Problema 5.1.1.

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & \textit{para } -\infty < x < \infty \qquad (5.1) \\ u(x,0) = f(x), & \textit{donde } f(x) \textit{ es la temperatura inicial.} \qquad (5.2) \end{cases}$$

Una barra metálica de longitud infinita bajo la acción del calor

Figura 5.1: Barra metálica de longitud infinita.

Sí $u(x,t)$ *es la temperatura en cualquier momento* t *y posicíon* x*; el modelo matemático que describe éste problema viene dado por:*

$$u_t = ku_{xx} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0,$$

donde k es la difusión térmica del material que constituye la barra.
El modelo $u_t = ku_{xx} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$ describe un problema homogéneo. Si además se considera que en el momento inicial para $t = 0$ la temperatura es una función de x, es decir, $u(x,0) = f(x)$, se necesita hallar la función $u(x,t)$ que sea solución del problema homogéneo y que cumpla con la condición anterior.
Este tipo de problemas con dominios infinitos generalmente se pueden resolver mediante transformadas. Aparte de resolver el problema homogéneo, también se abordará la solución del problema no-homogéneo.

Solución:
Separando variables $u(x,t) = X(x)\,T(t)$; reemplazando en (5.1) se tiene:

$$\begin{aligned} X\dot{T} &= kTX'' \\ \dot{T} &= \tfrac{dT}{dt} \\ X' &= \tfrac{dX}{dx} \\ X'' &= \tfrac{d^2X}{x^2} \\ \tfrac{X''}{X} &= \tfrac{\dot{T}}{kT} = \text{ constante } = -\lambda. \end{aligned}$$

De aquí:

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = -\lambda \\ \frac{\dot{T}}{T} = -\lambda k, \end{cases}$$

teniendo en cuenta que $\lambda > 0$

$$X'' + \lambda X = 0;\ \dot{T} + \lambda kT = 0.$$

Usando los coeficientes complejos en (5.2) se elimina $\lambda < 0$ y $\lambda = 0$, debido a que la solución es trivial. Espectro continuo (para un dominio finito se tiene un espectro discreto).
Utilizando superposición se observa que:

$$\begin{aligned} X(x) &= A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x);\ T(t) = e^{-\lambda kt}. \\ u^*(x,t) &= \left(A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x)\right)e^{-\lambda kt};\ \text{usando superposición} \\ u(x,t) &= \int_0^\infty \left[C(\lambda)\cos(\sqrt{\lambda}x) + D(\lambda)\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x)\right]e^{-\lambda kt}d\lambda. \end{aligned}$$

Si $\lambda = \omega^2$;

$$u(x,t) = \int_0^\infty \left[A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\,\mathrm{sen}(\omega x)\right] e^{-\omega^2 kt} d\omega;\ d\lambda = 2\omega d\omega.$$

Ahora de las condiciones iniciales ($u(x,0) = f(x)$):

$$u(x,0) = \int_0^\infty \left[A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\,\mathrm{sen}(\omega x)\right] d\omega = f(x).$$

De aquí:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^\infty k(\omega) e^{\imath\omega x} e^{-k\omega^2 t} d\omega \\ &= k(\omega)[\cos(\omega t) + \imath\,\mathrm{sen}(\omega x)]e^{-k\omega^2 t} \\ &= A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\,\mathrm{sen}(\omega t)e^{-k\omega^2 t}. \\ f(x) &= \int_{-\infty}^\infty k(\omega) e^{\imath\omega x} d\omega. \end{aligned}$$

Sea la transformada de Fourier de la función $f(x)$:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-\imath\omega x} dx,$$

definiendo su inversa como:

$$F^{-1}(\omega) = f(x) = \int_{-\infty}^\infty F(\omega) e^{\imath\omega x} d\omega.$$

Sea $G(\omega) = e^{-\alpha\omega^2}$; escribiendo la transformada inversa de Fourier de $G(\omega)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^\infty G(\omega) e^{\imath\omega x} d\omega = \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha\omega^2} e^{-\imath\omega x} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha(\omega^2 - \imath\frac{x}{\alpha}\omega)} d\omega = \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha(\omega - \imath\frac{x}{2\alpha})^2 - \frac{x^2}{4\alpha}} d\omega \\ &= e^{\frac{-x^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha(\omega - \imath\frac{x}{2\alpha})^2} d\omega = e^{\frac{-x^2}{4\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} dz. \end{aligned}$$

En donde:

$$
\begin{aligned}
z^2 &= \alpha(\omega - \imath\frac{x}{2\alpha})^2 \\
z &= \sqrt{\alpha}(\omega - \imath\frac{x}{2\alpha}) \\
dz &= \sqrt{\alpha}d\omega.
\end{aligned}
$$

Evaluando $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz = I$.

$$
\begin{aligned}
I^2 = T \cdot I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dx\, dy \\
= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta &= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}d(-r^2)\, d\theta \\
= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (e^{-r^2})\Big|_0^{\infty} d\theta &= -\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2}(2\pi) = \pi.
\end{aligned}
$$

Así:

$$
g(x) = e^{-x^2/4\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{-x^2/4\alpha}\sqrt{\pi}.
$$

Del problema (5.1.1) se sabe que su solución es de la forma:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)e^{\imath\omega x - k\omega^2 t}d\omega \\
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)e^{\imath\omega x}d\omega;
\end{aligned}
$$

donde $C(\omega)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$, es decir:

$$
C(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\imath\omega x}dx;
$$

de ésta forma, la solución toma el aspecto:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-\imath\omega\xi}d\xi\right]e^{\imath\omega x - k\omega^2 t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\omega^2 t + \imath\omega(x-\xi)}d\omega\right]d\xi.
\end{aligned}
$$

Si

$$
g(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\omega^2 t + \imath\omega x}d\omega,
$$

entonces:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi,t)d\xi$$
$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{kt}}e^{-x^2/4kt}\sqrt{\pi}.$$

Donde $kt = \alpha$.
De ésta manera:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{kt}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4kt}}d\xi = \frac{1}{\sqrt{4kt\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4kt}}d\xi.$$

La función:

$$G(x,t,\xi,0) = \frac{1}{\sqrt{4kt\pi}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4kt}} \text{ es la función de influencia.}$$

Teorema 5.1.1. *Sea $\varphi(x)$ una función continua, puede ser a trozos y acotada. Entonces:*

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4kt\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4kt}}\varphi(\xi)d\xi \tag{5.3}$$

define una función infinitamente diferenciable que es solución de la expresión (5.1) $[u_t - ku_{xx} = 0]$ donde $(x,t) \in \Re \times (0,T)$ y $\lim_{t\to 0} u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+0) + \varphi(x-0)\right].$

solución: Suponiendo que $\varphi(x)$ presenta una discontinuidad en el punto $x = x_0$, asumiendo que es un salto.
Se tiene que:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-\rho^2/4}\varphi(x_0 - \rho\sqrt{kt})d\rho \to \frac{1}{2}\varphi(x_0 - 0). \tag{5.4}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\rho^2/4}\varphi(x_0 - \rho\sqrt{kt})d\rho \to \frac{1}{2}\varphi(x_0 + 0). \tag{5.5}$$

Cuando $t \to 0$ $(t > 0)$.
En (5.3) para $\xi = x - \rho\sqrt{kt}$; $d\xi = -\sqrt{kt}\, d\rho$.

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}}(-\sqrt{kt})\int_0^{\infty} e^{-\rho^2 kt/4kt}\varphi(x_0-\rho\sqrt{kt})d\rho \\
&\text{donde } x-\xi=\rho\sqrt{kt}; \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\rho^2/4}\varphi(x_0-\rho\sqrt{kt})d\rho \\
u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2/4}\varphi(x-\rho\sqrt{kt})d\rho.
\end{aligned}
$$

Como $\varphi(x)$ está acotada, entonces:
$|\varphi(x)| \leq M$; $M \in \Re^+$ y como además $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2/4}d\rho = 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\rho/2)^2}d(\rho/2) = 2\sqrt{\pi}.$$

Se observa que $|u(x,t)| \leq \frac{2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}}\cdot M = M$; se evidencia que (5.4) se cumple.
Sea $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ tales que:

$$|\varphi(x_0-\rho\sqrt{kt})-\varphi(x_0-0)| < \epsilon, \text{ si } 0<\rho<\frac{\delta}{\sqrt{kt}}. \text{ Como } \int_0^{\infty} e^{-p^2/4}d\rho = \sqrt{\pi}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dy\;dx \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}r\;dr\;d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left|e^{-r^2}\right|_0^{\infty}d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(e^{-\infty}-e^0\right)d\theta \\
&= +\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi; \text{ así } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}.
\end{aligned}
$$

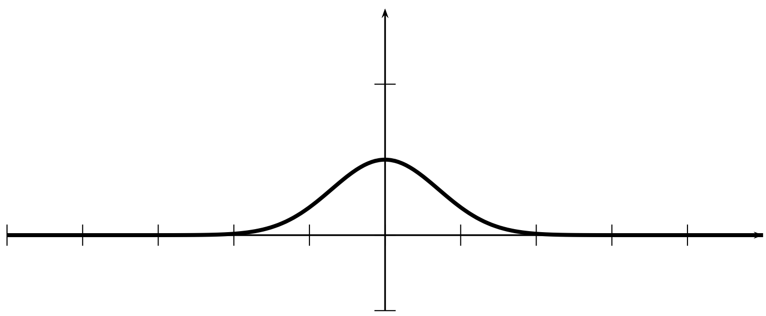


Figura 5.2: Gráfica de $f(x)=e^{-x^2}$.

Como $\int_0^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{4}}d\rho = \sqrt{\pi}$. Entonces existe un $t_0>0$, tal que $\int_0^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{4}}d\rho < \frac{\epsilon\sqrt{\pi}}{2M}$;

$0 < t < t_0$, para $|\varphi(x)| \leq M$, $\rho > \frac{\delta}{\sqrt{kt}}$.
Entonces:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\rho^2/4} \varphi(x_0 - \rho\sqrt{kt}) d\rho - \frac{1}{2}\varphi(x_0 - 0) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\rho^2/4} \left(\varphi(x_0 - \rho\sqrt{kt}) - \varphi(x_0 - 0) \right) d\rho \right| \\
&\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\rho^2/4} \left(\left| \varphi(x_0 - \rho\sqrt{kt}) \right| - |\varphi(x_0 - 0)| \right) d\rho \\
&< \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\epsilon\sqrt{\pi} + 2M \frac{\epsilon\sqrt{\pi}}{2M} \right) = \frac{2\epsilon\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}} = \epsilon.
\end{aligned}$$

De igual modo para comprobar (5.5)

Definición 5.1.1. ***La función error***
La función error se define como:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Se observa que:

$$\int_a^b e^{-x^2} dx = \int_a^b \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot [erf(x)]' dx = [erf(x)]' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[erf(b) - erf(a) \right].$$

En donde

$$erf(0) = 0 \ \text{ y } \lim_{x\to\infty} erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1,$$

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\rho^2} d\rho &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(erf(x) - erf(0) \right), \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(erf(0) - erf(x) \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^0 e^{-\rho^2} d\rho.
\end{aligned}$$

Se nota que:

$$1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt,$$

ademas si z es una variable compleja, se tiene:

$$\begin{aligned}
erf(-z) &= -erf(z) \\
erf(\bar{z}) &= erf(z).
\end{aligned}$$

Aqui $\bar{z}$ es la conjugada de z.

5.2. La ecuación de difusión no-homogénea

Problema 5.2.1. *Sea el problema:*

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + Q(x,t), \quad 0 < x < l, \tag{5.6}$$

donde $Q(x,t)$ es la función que hace al problema (5.6) no-homogéneo.

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \\ u(0,t) &= u(l,t) = 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Para el problema homogéneo (5.1.1), al separar variables se obtuvo que:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right) e^{-(\frac{\alpha k\pi}{l})^2 t} \ , \text{con} \quad \alpha = 1,$$

$$\beta_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(s) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{l}\right) ds.$$

De ésta forma:

$$u(x,t) = \int_0^l f(s)\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-(\frac{\alpha n\pi}{l})^2 t}\right] ds,$$

con $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$.

La función de influencia por las condiciones iniciales.
Para obtener la función de influencia por las condiciones iniciales para el problema no-homogéneo se procede de la siguiente manera:
Se expande $u(x,t)$ y $Q(x,t)$ con $k = \alpha^2$ en funciones propias $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$.
Teniendo en cuenta que para el problema homogéneo $Q(x,t) \equiv 0$,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{k\lambda_n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

para $Q(x,t) \neq 0$ se busca la solución de la forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n t \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Para hacer ésto, primero se debe obtener $q_n(t)$ tal que:

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}\right) x; \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Donde:

$$q_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l Q(x,t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx; \quad C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx.$$

Teniendo todo esto en cuenta, en (5.6) $u_t = ku_{xx} + Q$, se tiene:

$$u_t = \sum_{\jmath} u_y(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right); \quad u_{xx} = -\sum_{\jmath} \lambda_y(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right); \quad Q = \sum_{\jmath} q_y(t) \operatorname{sen}\left(y\frac{n\pi}{l}x\right).$$

$$\sum_{\jmath=1}^{\infty} \left[\frac{d}{dy}u_\jmath(t) + k\lambda_\jmath u_\jmath(t) - q_\jmath(t)\right] \operatorname{sen}\left(\jmath\frac{\pi}{l}x\right) = 0. \tag{5.8}$$

Para $t = 0$,

$$u(x,0) = \sum_{\jmath=1}^{\infty} u_\jmath(0) \operatorname{sen}\left(\jmath\frac{\pi}{l}x\right) = f(x) = \sum_{\jmath=1}^{\infty} C_y \operatorname{sen}\left(\jmath\frac{\pi}{l}x\right); \quad C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \operatorname{sen}\left(\jmath\frac{\pi}{l}x\right) dx.$$

$$\sum_{\jmath=1}^{\infty} [u_\jmath(0) - C_\jmath] \operatorname{sen}\left(\jmath\frac{\pi}{l}x\right) = 0. \tag{5.9}$$

De la ortogonalidad, multiplicando por $\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{l}x\right)$ e integrando desde $[0,l]$, se obtiene un sistema de valor inicial para ecuaciones diferenciales ordinarias. De (5.8) y (5.9):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u_n(t) - k\lambda_n u_n(t) = q_n(t) \\ u_n(0) = C_n. \text{ para } n = 1,2,3,\ldots \end{cases} \tag{5.10}$$

La primera ecuación de (5.10) es lineal de primer orden, multiplicando por $e^{-k\lambda_n t}$

se tiene:

$$\frac{d}{dt}u_n(t)e^{-k\lambda_n t} - k\lambda_n u_n(t)e^{-k\lambda_n t} = q_n e^{-k\lambda_n t}\frac{d}{dt}\left[u_n(t)e^{-k\lambda_n t}\right] = e^{-k\lambda_n t}q_n(t),$$

integrando desde $[0, t]$:

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{d}{dt}\left[u_n(t)e^{-k\lambda_n t}\right]dt &= \int_0^t e^{-k\lambda_n t}q_n(t)dt \\ u_n(t)e^{-k\lambda_n t} &= u_n(0)e^{-k\lambda_n 0} + \int_0^t e^{-k\lambda_n t}q_n(t)dt.\end{aligned}$$

De la segunda ecuación de (5.10), se obtiene:

$$u_n(t)e^{-k\lambda_n t} = C_n + \int_0^t e^{-k\lambda_n t}q_n(t)dt,$$

de aquí

$$u_n(t) = C_n e^{k\lambda_n t} + \int_0^t e^{k\lambda_n (t-s)}q_n(s)ds. \tag{5.11}$$

Finalmente, la solución para $u(x, t)$, viene dada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{k\lambda_n t}\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{l}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t e^{k\lambda_n(t-s)}q_n(s)ds\right)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{l}x\right). \tag{5.12}$$

Como

$$\begin{aligned}q_n(s) &= \frac{2}{l}\int_0^l Q(x,t)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{l}x\right)dx; \\ C_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{l}x\right)dx.\end{aligned}$$

La ecuación (5.12) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}u(x,t) = {} & \int_0^l f(s)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{l}s\right)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{l}x\right)e^{-\alpha^2\left(n\frac{\pi}{l}\right)^2 t}\right]ds \\ & + \int_0^l\int_0^t Q(s,\tau)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{l}s\right)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{l}x\right)e^{-\alpha^2\left(n\frac{\pi}{l}\right)^2(t-\tau)}\right]d\tau\, ds.\end{aligned}$$

Llamando $G(x,s,t)$ a la función de Green para el problema (5.2.1):

$$G(x,s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{l}s\right) \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{l}x\right) e^{\alpha^2\left(n\frac{\pi}{l}\right)^2 t}.$$

Se obtiene la solución dada por:

$$u(x,t) = \int_0^l f(s)G(x,s,t)ds + \int_0^l \int_0^t Q(s,\tau)G(x,s,t-\tau)d\tau\, ds. \tag{5.13}$$

Aquí se ve claramente que la primera integral corresponde a la solución homogénea y la segunda integral doble a la contribución de la solución para el problema no-homogéneo.

5.3. Problemas en la frontera

$$\text{Analizando el problema:} \begin{cases} u_t = u_{xx} + h(x) & \\ u(x,0) = 0 & ;\ 0 < x < 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & ;\ t > 0 \end{cases}$$

Considerando que la función no-homogénea esta dada por $h(x)$, con temperatura inicial nula y en los extremos 0 y l es cero su temperatura:

Figura 5.3: Barra metálica de longitud finita.

La solución (5.12) en éste caso viene dada por:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \operatorname{sen}(n\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{n\pi(t-s)} q_n(s)ds\right] \operatorname{sen}(n\pi x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{n\pi(t-s)} q_n(s)ds\right] \operatorname{sen}(n\pi x), \end{aligned}$$

con

$$q_n(s) = 2\int_0^l Q(x,s)\operatorname{sen}(n\pi x)dx = 2\int_0^l h(x)\operatorname{sen}(n\pi x)dx.$$

Se observa que $q_n(s)$ es independiente de s, y q_n es el coeficiente de Fourier para $h(x)$. Así que $q_n \equiv q_n(s)$, obteniendo:

$$\int_0^l e^{kn\pi(t-s)} q_n ds = \frac{q_n}{kn\pi}\left[e^{kn\pi t} - 1\right].$$

$$u(x,t) = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n(1-e^{kn\pi t})}{(n\pi)^2}\operatorname{sen}(n\pi x).$$

Notando la solución del estado por:

$$\Psi(x) = \lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{(n\pi)^2}\operatorname{sen}(n\pi x).$$

Es claro que $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$, diferenciando dos veces, se tiene:

$$k\Psi''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} q_n \operatorname{sen}(n\pi x) = -f(x),$$

de aquí

$$k\Psi''(x) + f(x) = 0,$$

que es una solución de estado.
Sí se considera que $l = 1, \quad f(x) = 0$,
con $Q(x,t) = h(x)\operatorname{sen}(t)$, se obtiene la solución para $u(x,t)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{k\lambda_n(t-s)} q_n(s) ds\right]\operatorname{sen}(n\pi x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\cos(t) - k\lambda_n \operatorname{sen}(t) + e^{k\lambda_n t}}{1+(k\lambda_n)^2}\right) q_n \operatorname{sen}(n\pi x). \end{aligned}$$

Éste caso de estado no es independiente del tiempo.

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\cos(t) - k\lambda_n\operatorname{sen}(t)}{1+(k\lambda_n)^2}\right) q_n \operatorname{sen}(n\pi x), \text{ con } \lambda_n = -(n\pi)^2$$

y cuando $t\to\infty$, $v(x,t)$ es una función periódica de periodo 2π.

5.4. Aplicación a problemas de difusión

Como se ha visto anteriormente, para una función $g(x)$ en el dominio finito de longitud L, la transformada de Fourier de cosenos viene dada por:

$$\mathfrak{F}_c[g(x)] = \bar{g}(n) = \int_0^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \; 0 \leq x \leq L; \tag{5.14}$$

n toma todos los valores $1, 2, 3, \ldots$ El nucleo de ésta transformación es $\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$. Además de las propiedades, se tiene:

$$\mathfrak{F}_c\left[\frac{d^2g(x)}{dx^2}\right] = (-1)^n \frac{dg}{dx}\bigg|_{x=L} - \frac{dg}{dx}\bigg|_{x=0} - \frac{n^2\pi^2}{L^2} \cdot \bar{g}, \tag{5.15}$$

con $\bar{g}(n) = \mathfrak{F}_c[g(x)]$. Es decir, sí el problema de valor inicial envuelve la segunda derivada en el dominio $0 \leq x \leq L$, y posee condiciones de segundo tipo en sus extremos, la transformación de Fourier de coseno se puede utilizar para transformar la derivada de orden dos.

La transformación inversa de Fourier $\mathfrak{F}^{-1}[g(x)]$, está dada por:

$$\mathfrak{F}^{-1}[g(x)] = g(x) = \frac{\bar{g}(n)}{L}\bigg|_{n=0} + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \bar{g}(n) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{5.16}$$

Aquí $\bar{g}(n)$ son equivalentes a los coeficientes de Fourier de la expresión de $g(x)$.

Problema 5.4.1. *La difusión unídimensional en una columna finita. El problema transitorio de difusión.*

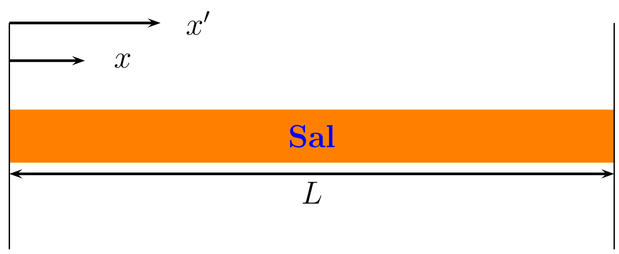


Figura 5.4: Difusión unídimensional en una columna finita.

La ecuación correspondiente a esta modelo viene dada por:

$$\begin{aligned} &c = c(x,t) \\ &\frac{\partial c}{\partial t} - D^* \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \le x \le L. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Con condiciones en la frontera:

$$\frac{\partial c}{\partial x}(0,t) = 0 \tag{5.18}$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(L,t) = 0. \tag{5.19}$$

Condiciones iniciales:

$$c(x,0) = C_0 \delta(x - x'), \tag{5.20}$$

donde δ es la función delta de Dirac en $x = x'$.

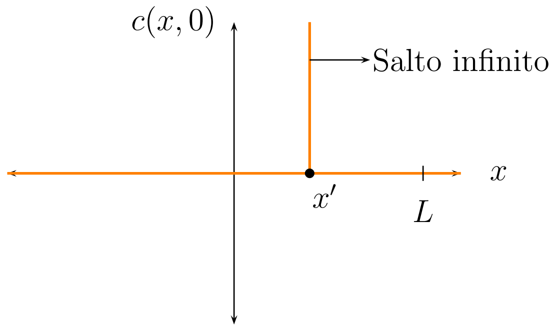


Figura 5.5: Grafica de $c(x,t)$ sobre un intervalo infinitamente pequeño.

Aplicando la transformada de Fourier en cada término, se obtiene:

$$\mathfrak{F}_c\left[\frac{\partial c}{\partial t}\right] = \int_0^L \frac{\partial c}{\partial t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_0^L c \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx}_{\bar{c}(n,t)} = \frac{\partial \bar{c}}{\partial t}$$

$$\mathfrak{F}_c\left[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right] = (-1)^n \frac{\partial c}{\partial x}(L,t) - \frac{\partial}{\partial x}(0,t) - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\bar{c}.$$

De acuerdo con (5.17) $\mathfrak{F}_c\left[\frac{\partial c}{\partial t}\right] - \mathfrak{F}_c\left[D^* \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right] = \mathfrak{F}_c[0]$, la cual se reduce a:

$$\frac{d\bar{c}}{dt} + \frac{n^2\pi^2 D^*}{L^2}\bar{c} = 0; \tag{5.21}$$

$$\mathfrak{F}_c[c(x,0)] = \bar{c}(n,0) = C_0 \int_0^L \delta(x - x') \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx,$$

utilizando la propiedad de la función delta cuando se integra,

$$\bar{c}(n,0) = C_0 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{5.22}$$

La ecuación (5.21) es una ecuación diferencial ordinaria, homogénea, la cual se soluciona separando variables e integrando:

$$\frac{d\bar{c}}{\bar{c}} = -\frac{n^2\pi^2 D^*}{L^2}dt, \quad \int \frac{d\bar{c}}{\bar{c}} = -\int \frac{n^2\pi^2 D^*}{L^2}dt$$

por lo tanto

$$\bar{c} = ke^{-\frac{n^2\pi^2 D^*}{L^2}t}.$$

Satisfaciendo las condiciones iniciales $k = C_0 \cos\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)$, de aquí:

$$\bar{c}(n,t) = C_0 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x'\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 D^*}{L^2}t}; \tag{5.23}$$

lo siguiente es obtener c, a partir de $\bar{c}$, de la siguiente manera:

$$c = \mathfrak{F}_c^{-1}[\bar{c}(n)] = \left.\frac{\bar{c}(n)}{L}\right|_{n=0} + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}(n) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

La solución final de (5.17) teniendo en cuenta las condiciones en la frontera e iniciales viene dada por:

$$c(x,t) = \frac{C_0}{L} + \frac{2}{L}C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x'\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 D^*}{L^2}t}. \tag{5.24}$$

El problema anterior se realizo utilizando la transformación $\mathfrak{F}_c$, lo cual arrojó una ecuación diferencial ordinaria para $\bar{c}$ (5.21). De igual forma se puede aplicar la transformada de Laplace a (5.21) y resolviendo de igual forma la ecuación diferencial ordinaria para c^*.

De (5.21) $\frac{d\bar{c}}{dt} + \frac{n^2\pi^2}{L^2}D^*\bar{c} = 0$, con $\bar{c}(n,0) = C_0 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x'\right)$.

Aplicando la transformada de Laplace, se tiene:

$$
\begin{aligned}
&\rho c^* - \bar{c}(n,0) + \frac{n^2\pi^2}{L^2} D^* c^* = 0; \quad c^* = c^*(n,\rho),\\
&\rho c^* - C_0 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x'\right) + \frac{n^2\pi^2}{L^2} D^* c^* = 0,\\
&c^* = \frac{C_0\cos\left(\frac{n\pi}{L}x'\right)}{\rho + \frac{n^2\pi^2}{L^2}D^*}.
\end{aligned}
$$

Aplicando $\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$.

$$
\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{\rho + \frac{n^2\pi^2}{L^2}D^*}\right] = e^{-\frac{n^2\pi^2 D^*}{L^2}t},
$$

de aquí:

$$
\mathfrak{L}^{-1}[c^*(n,\rho)] = \bar{c}(n,t) = C_0 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x'\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 D^*}{L^2}t},
$$

aplicando $\mathfrak{F}_c^{-1}$,

$$
\begin{aligned}
c(x,t) = \mathfrak{F}_c^{-1}[\bar{c}(n)] &= \left.\frac{\bar{c}(n)}{L}\right|_{n=0} + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}(n)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\\
&= \frac{C_0}{L} + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x'\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 D^*}{L^2}t}.
\end{aligned}
$$

Problema 5.4.2. *Sea el problema de difusión a lo largo de una columna finita:*

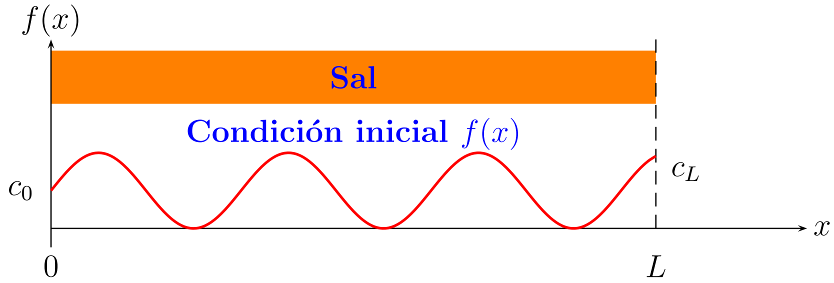


Figura 5.6: Difusión a lo largo de una columna finita.

$$
\begin{aligned}
c(x,0) &= c_0\\
c(L,t) &= c_L
\end{aligned}
$$

La ecuación que gobierna éste modelo viene dada por:

$$\theta\frac{\partial c}{\partial t}=\theta D^{*}\frac{\partial^{2}c}{\partial x^{2}};\quad 0\leq x\leq L. \tag{5.25}$$

La cual se simplifica como:

$$\frac{\partial c}{\partial t}-D^{*}\frac{\partial^{2}c}{\partial x^{2}};\quad 0\leq x\leq L. \tag{5.26}$$

Las condiciones iniciales vienen dadas por:

$$c(0,t)=c_0,\quad c(L,t)=c_L,\quad c(x,0)=f(x). \tag{5.27}$$

Aplicando la transformación del seno:

$$\begin{aligned}
\bar{c}(n,t) &= \int_0^L c(x,t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx.\\
\mathfrak{F}_s\left[\frac{\partial c}{\partial t}\right] &= \frac{\partial \bar{c}}{\partial t}\equiv\frac{dc}{dt};\\
\mathfrak{F}_s\left[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right] &= \frac{n\pi}{L}\left[\frac{c_0}{c(x)}\Big|_{x=0}-(-1)^n\frac{c_L}{c(x)}\Big|_{x=L}\right]-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\bar{c}.\\
\text{De (5.26)}\ \ \frac{d\bar{c}}{dt}-D^{*}\left[\frac{n\pi}{L}\left(c_0-(-1)^n c_L\right)-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\bar{c}\right] &= 0\\
\text{De aquí}\ \ \frac{d\bar{c}}{dt}-\frac{n\pi}{L}D^{*}\left[c_0-(-1)^n c_L\right]+\frac{n^2\pi^2}{L^2}D^{*}\bar{c} &= 0. \qquad (5.28)
\end{aligned}$$

Para las condiciones iniciales:

$$\mathfrak{F}_s\left[c(x,0)\right]=\bar{c}(n,0)=\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx.$$

La expresión (5.28) es una ecuación diferencial ordinaria no-homogénea, la cual posee un factor integrante dado por $e^{\frac{n^2\pi^2}{L^2}D^{*}t}$.

$$\begin{aligned}
\bar{c}(n,t) &= Ae^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}D^{*}t}+\frac{n\pi}{L}D^{*}\left(c_0-(-1)^n c_L\right)e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}D^{*}t}\int_0^t e^{\frac{n^2\pi^2}{L^2}D^{*}\tau}d\tau,\\
&= Ae^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}D^{*}t}+\frac{L}{n\pi}\left(c_0-(-1)^n c_L\right)\left[1-e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}D^{*}t}\right];
\end{aligned}$$

si se aplican las condiciones iniciales se obtiene:

$$A = \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

$$\bar{c}(n,t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}D^*t} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + \frac{L}{n\pi}\left(c_0 - (-1)^n c_L\right)\left[1 - e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}D^*t}\right];$$

Finalmente se obtiene que la solución $c(x,t)$ está dada así:

$$c(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}D^*t} \int_0^L \left[f(x') \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x'\right) dx'\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$
$$+ \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{L}{n\pi}\left(C_0 - (-1)^n c_L\right)\left(1 - e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}D^*t}\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Problema 5.4.3. *Sea el problema bidimensional:*

$$S\frac{\partial h}{\partial t} = T\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + T\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - Q\delta(x - x')\delta(y - y') \tag{5.29}$$
$$0 \le x \le L$$
$$0 \le y \le L$$

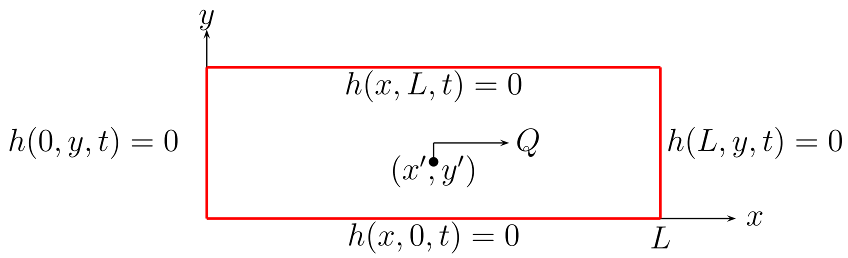


Figura 5.7: Gráfica del problema (5.4.3).

La ecuación (5.29) se puede escribir como:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{T}{S}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{T}{S}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{Q}{S}\delta(x - x')\delta(y - y') = 0 \tag{5.30}$$

Las condiciones de frontera e iniciales vienen dadas por:

$$h(0,y,t) = 0; \quad h(L,y,t) = 0; \quad h(x,0,t) = 0; \quad h(x,L,t) = 0; \quad h(x,y,0) = 0.$$

Se puede obtener la solución a éste problema aplicando la transformada de Fourier del seno:

Primero se aplica la transformada $\mathfrak{F}_s$ en x:

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{n^2\pi^2}{L^2}T\bar{h} - \frac{n\pi}{SL}T\left[h(0,y,t) - (-1)^n h(L,y,t)\right] - \frac{T}{S}\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial y^2}$$
$$+ \frac{Q}{S}\delta(y-y')\int_0^L \delta(x-x')\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = 0;$$
$$\text{donde } \; \bar{h}(n,y,t) = \int_0^L h(x,y,t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx.$$

Lo que conduce a:

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{n^2\pi^2}{SL^2} + \frac{n^2\pi^2}{SL^2}T\bar{h} - \frac{T}{S}\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial y^2} + \frac{Q}{S}\delta(y-y')\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x'\right) = 0.$$

De las condiciones en la frontera e iniciales se tiene:

$$\mathfrak{F}_s[h(x,0,t)] = \bar{h}(n,0,t) = 0,$$
$$\mathfrak{F}_s[h(x,L,t)] = \bar{h}(n,L,t) = 0,$$
$$\mathfrak{F}_s[h(x,y,0)] = \bar{h}(n,y,0) = 0.$$

Aplicando ahora $\mathfrak{F}_s$ para y:

$$\frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{n^2\pi^2}{SL^2}h^* + \frac{m^2\pi^2}{SL^2}Th^* - \frac{m\pi}{SL}T\left[\bar{h}(n,0,t) - (-1)^n\bar{h}(n,L,t)\right] +$$
$$+ \frac{Q}{S}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x'\right)\int_0^L \delta(y-y')\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy = 0.$$

Al simplificar:

$$\frac{dh^*}{dt} + \frac{n^2\pi^2}{SL^2}Th^* + \frac{m^2\pi^2}{SL^2}Th^* + \frac{Q}{S}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x'\right)\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x'\right) = 0; \tag{5.31}$$

donde

$$h^*(n,m,t) = \int_0^L \bar{h}(n,y,t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{L}y\right)dy.$$

Aplicando $\mathfrak{F}_s$ a la condición $\bar{h}(n,y,0)$, se obtiene: $h^*(n,m,0) = 0$.

La ecuación (5.31) es lineal, de primer orden no-homogénea, la cual se resuelve utilizando un factor integrante definido por $\varphi_m = \frac{m^2\pi^2}{SL^2}T$; $\varphi_n = \frac{n^2\pi^2}{SL^2}T$, (5.31) se transforma en:

$$\frac{dh^*}{dt} + (\varphi_m + \varphi_n)h^* = -\frac{Q}{S}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x'\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}y'\right).$$

Si $a_1(t) = \varphi_m + \varphi_n$; $h(t) = -\frac{Q}{S}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x'\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}y'\right)$ se tiene para $h^*(t)$:

$$h^*(t) = \frac{1}{e^{\int a_1(\alpha)d\alpha}}\int_0^t h(\alpha)e^{\int a_1(\xi)d\xi}d\alpha.$$

Ahora si se tiene en cuenta que $\int a_1(\alpha)d\alpha = (\varphi_m + \varphi_n)t$, reemplazando se tiene:

$$h^*(t) = \frac{1}{e^{(\varphi_m+\varphi_n)t}}\int_0^t \left[-\frac{Q}{S}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x'\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}y'\right)\right]e^{(\varphi_m+\varphi_n)\alpha}d\alpha$$

$$h^*(t) = -\frac{Q}{S}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x'\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}y'\right)e^{-\varphi_{m,n}t}\int_0^t e^{\varphi_{m,n}\tau}d\tau;$$

donde

$$\varphi_{n,m} = \varphi_m + \varphi_n = \frac{\pi^2}{SL^2}T(n^2+m^2).$$

Ahora

$$\int_0^t e^{\varphi_{m,n}\tau}d\tau = \frac{1}{\varphi_{m,n}}\left[e^{\varphi_{m,n}} - 1\right].$$

Por lo tanto

$$h^*(t) = -\frac{Q}{S}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x'\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}y'\right)e^{-\varphi_{m,n}t}\frac{1}{\varphi_{m,n}}\left[e^{\varphi_{m,n}} - 1\right].$$

De aquí:

$$h^*(t) = -\frac{Q}{S}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x'\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}y'\right)\frac{1}{\varphi_{m,n}}\left[1 - e^{-\varphi_{m,n}t}\right].$$

Aplicando la inversa dos veces, primero para obtener $\bar{h}$ y después h, se obtiene:

$$\bar{h}(n,y,t) = -\frac{2}{L}\frac{Q}{S}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x'\right)\sum_{m=1}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}y'\right)\frac{1}{\varphi_{m,n}}\left[1 - e^{\varphi_{m,n}t}\right]\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}y\right).$$

$$h(x,y,t) = -\frac{4}{L^2}\frac{Q}{S}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x'\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}y'\right)\frac{1}{\varphi_{m,n}}\left[1 - e^{-\varphi_{m,n}t}\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}y\right).$$

Al sustituir el valor de $\varphi_{m,n}$, finalmente se obtiene:

$$
\begin{aligned}
h(x,y,t) = -\frac{4}{\pi^2}\frac{Q}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} & \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x'\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}y'\right) \\
& \cdot \frac{1}{m^2+n^2}\left[1 - e^{-\frac{\pi^2}{SL^2}T(m^2+n^2)t}\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}y\right).
\end{aligned}
$$

6

Conclusiones

1. La transformada de Fourier y Laplace son una herramienta de mucha utilidad para resolver problemas en dominios infinitos con condiciones iniciales y en la frontera.

2. Cuando se tienen funciones periódicas en un intervalo continuo puede ser a trozos, es aconsejable resolver éste tipo de problemas utilizando series de Fourier.

3. La transformada de Laplace es aconsejable utilizar para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y algunas ecuaciones diferenciales parciales lineales.

4. La transformada de Fourier se puede ver como una extensión lógica de las series de Fourier.

5. Las transformadas de Fourier y Laplace son similares y la diferencia radica en su utilización ya que una esta definida en los imaginarios y la otra en los complejos.

6. Debido a la propiedad de completitud media, la clase de funciones que se pueden representar por medio de las transformadas de Fourier y Laplace es muy grande y se pueden utilizar para resolver una gran gama de problemas tales como señales, recuperación de información (fotografías), etc.

7. Cuando se tienen condiciones en la frontera homogénea se aplica la transformada de Fourier del seno.

   Si se tienen condiciones en la frontera no-homogénea se sugiere utilizar la transformada de Fourier del seno modificada, es decir:

$$\mathfrak{F}_s'[g(s)] = \bar{g}(m) = \int_0^L g(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Ésta transformada posee la siguiente propiedad:

$$\mathfrak{F}_s^*\left[\frac{d^2g}{dx^2}\right] = -\frac{m^2\pi^2}{L^2}\bar{g} + \frac{m\pi}{L}g\Big|_{x=0} - (-1)^n\frac{dg}{dx}\Big|_{x=L},$$

con $m = n - \frac{1}{2}$.

$$\mathfrak{F}_s^{*-1}[\bar{g}(m)] = \bar{g}(x) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{g}(m)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

Forma generalizada de las transformadas de Fourier para problemas en la frontera.

7

Bibliografía

- De Castro Korgi Rodrigo; *El Universo LaTeX*, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, 2003.
- Kreider, Kuller y Ostberg; *Ecuaciones Diferenciales*, Fondo Educativo Interamericano, 1973.
- Spiegel Murray Ralph; *Transformada de Laplace, serie Schaum*, MacGraw-Hill, 1971.
- Zill Dennis G; *A firts course in differential equations whith applications*, segunda edición PWS. , Wadsworth, 1982.
- Mesa Fernando, Martínez Acosta Alejandro y González Granada José Rodrigo; *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias una introducción*, Ecoe Ediciones, Bogotá, 2012.
- Cornejo Serrano María del Carmen, Villalobos Oliver Eloísa Bernardett y Quintana Hernández Pedro Alberto; *Métodos de solución de Ecuaciones Diferenciales y aplicaciones*, primera edición, Reverté-Aguilar, S.L., México, DF, 2008.
- Dym Harry, McKean Henry; *Fourier series and integrals* Academic Press, New York, 1972.
- Rudin Walter; *Análisis real y Complejo*, tercera edición, Mac Graw-Hill, Madrid 1988.