LAS RELACIONES INTRAFIGURALES E INTERFIGURALES DE LOS CUADRILÁTEROS: RECTÁNGULO, PARALELOGRAMO Y ROMBO

Olga Lucía Mazo Mejía

Víctor Mario Suárez Salazar

Trabajo investigativo para optar el título de

Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemática

John Jairo Múnera Córdoba

Asesor

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Medellín, Colombia

2009

AGRADECIMIENTOS

A Valentina, María Paula y Juan Manuel quienes participaron en nuestra investigación.

A la Institución Educativa María Auxiliadora por abrirnos sus puertas

A John Jairo Múnera, nuestro asesor, por sus orientaciones y apoyo incondicional durante este proceso.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

En el contexto colombiano, la enseñanza de la geometría, en la educación básica primaria se ha reducido a un listado de contenidos, centrados en definiciones y propiedades, carentes de toda articulación con las actividades planteadas.

Centrar la mirada en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, implica estudiar la manera como los estudiantes construyen y validan sus conocimientos a través de procesos que vinculan la visualización y la validación de sus hallazgos.

Por lo tanto, el propósito que nos planteamos en esta investigación es identificar la forma como los estudiantes construyen relaciones entre las propiedades estructurales de los rectángulos, rombos y paralelogramos.

Este trabajo fue realizado en la Institución Educativa María Auxiliadora de Caldas, con 38 estudiantes del grado 5°. El estudio fue orientado desde la investigación cualitativa, a través de un estudio de casos; por lo tanto, el análisis de los resultados se centró en tres estudiantes: Valentina Castaño, María Paula López y Juan Manuel Cano.

El desarrollo del presente trabajo está estructurado en cinco capítulos a saber:

En el primer capítulo, planteamiento del problema, describimos el objeto de la investigación, la pertinencia e importancia del estudio planteado.

En el segundo capítulo, se presentan los referentes teóricos que respaldan la investigación, los cuales son desarrollados desde las siguientes temáticas: la teoría de conceptos figurales de Fischbein, la teoría de las representaciones semióticas de Raymond Duval, y los Prototipos y Estereotipos en geometría de Sara Scaglia y Susana Moriena. Además, se hace una presentación de las relaciones intrafigurales e interfigurales de los cuadriláteros sobre la forma como se han concebido para efectos de este trabajo.

El tercer capítulo corresponde a la metodología de la investigación donde se hace explicita la caracterización de los participantes, así como una breve descripción de los instrumentos de recolección de la información.

En el cuarto capítulo, aparecen los resultados obtenidos a partir de las categorías emergentes de la información recolectada, la cual fue analizada desde las interrelaciones entre las voces de los participantes, el marco teórico y las voces de los autores del trabajo.

Finalmente, en el quinto capítulo, presentamos las conclusiones de la investigación y algunas recomendaciones que pueden servir de apoyo para la realización de trabajos en la misma dirección.

Pensamos que este trabajo investigativo puede seguirse ampliando desde otras miradas tales como la construcción de relaciones entre otras figuras tanto a nivel bidimensional como tridimensional. Otra manera sería el uso de las TICs como una herramienta que facilita la construcción de relaciones en el campo de la geometría.

Dichas miradas ayudarán a fortalecer los análisis que pueden presentarse en torno a él, e invitamos a la comunidad educativa a darle continuidad a dicho proceso de investigación.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La geometría escolar en Colombia es, como probablemente sucede en muchas partes del mundo, una de las áreas que presenta mayores dificultades para su enseñanza-aprendizaje, sobre todo en los niveles de la básica primaria.

Varias investigaciones realizadas en este ámbito revelan que las estrategias se limitan a realizar clasificaciones formales de figuras, donde sólo prima la memorización de propiedades y el cálculo algorítmico de áreas y perímetros. Además, no se realiza una debida articulación de las relaciones entre las propiedades estructurales de las figuras geométricas, tanto a nivel intrafigural como interfigural.

Teniendo en cuenta este panorama se realizó una revisión bibliográfica donde se evidenciara algunas estrategias para la enseñanza de la geometría que contribuyeran a subsanar las cuestiones señaladas.

A continuación se mencionará algunas revisiones realizadas tanto a nivel nacional como internacional:

En el ámbito nacional fueron consultados dos trabajos, uno de maestría y otro de pregrado.

El primero, corresponde al trabajo titulado *"Una estrategia para la enseñanza de la geometría en educación básica secundaria"* del profesor Jaime Acosta (1996) en el cual se ofrecen una serie de actividades de geometría que tienen como propósito construir conceptos y analizar propiedades prescindiendo al máximo de las definiciones y la memorización, haciendo énfasis en la comprensión.

En relación con los cuadriláteros sugiere que deben presentarse en varias posiciones y no solamente con un vértice inferior, puesto que esta dinámica en las figuras posibilita su análisis de acuerdo a los invariantes, a la luz de éstos, se realiza la clasificación y caracterización, además, permite el esclarecimiento de las posibles dudas que aun persistan en el estudiante.

También plantea que el estudio comparativo de las figuras, hace posible que el estudiante descubra por si mismo las características que hacen que cada figura sea esa y no otra, que pertenezca a un determinado grupo o que tenga semejanzas o diferencias con otras. Por tanto, es el estudiante quien debe observar las particularidades que deben cumplir las figuras decidiendo cuáles no son necesarias y cuáles son suficientes para su clasificación.

El segundo trabajo consultado, es la sistematización de la práctica pedagógica de Bedoya, J. et al (2008) de la facultad de Educación de la Universidad de Antioquia asesorada por la profesora Denis Vanegas Vasco que lleva por título *"Situaciones problema para la enseñanza y el aprendizaje de las relaciones intra e interfigurales en los triángulos, proyecto de práctica profesional".*

Éste aporta elementos metodológicos y didácticos para la enseñanza de los procesos que están implícitos en el desarrollo del pensamiento espacial en los alumnos del grado 6° y 7° enfocándose de manera especial en las relaciones intrafigurales e interfigurales en los triángulos, partiendo de lo tridimensional a lo bidimensional.

Dicho trabajo, sirvió como referente para abordar el tema de investigación, puesto que éste también se ocupa de la construcción de las relaciones estructurales en los polígonos, que en este caso son los triángulos.

En el ámbito internacional se abordaron los siguientes trabajos:

- ***Coordinación de procesos cognitivos en geometría:*** trabajo investigativo realizado por Torregrosa y Quesada (2007) que tiene la finalidad de encontrar cuáles son los procesos cognitivos que se hacen presentes en el estudiante a la hora de resolver problemas que vinculan conceptos y relaciones geométricas con el fin de crear un marco teórico que ayude a interpretar las interacciones en dichos procesos. Éste toma referencia el trabajo realizado por Duval (1993, 1995, 1998, 1999) quien manifiesta que los procesos cognitivos que intervienen en el aprendizaje de la geometría no pueden ser jerarquizados como lo proponen otras teorías.
- ***Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización:*** es una ponencia realizada por Ángel Gutiérrez (1998) en un seminario del TIEM (Intensive Winter Term on Mathematical Education) acerca de

los resultados de la investigaciones en didáctica de la geometría publicadas en los últimos años, centrándose básicamente en las actas de los congresos del Grupo Internacional PME (Psychology of Mathematics Education).

Él divide las publicaciones en torno a la didáctica de la geometría en dos grandes grupos: los que se refieren a la geometría espacial y los dedicados a la geometría plana, los que son la mayoría. Las publicaciones del primer grupo abordan el análisis de temas relacionados con los poliedros y sus elementos, mientras que las del segundo grupo, incluyen polígonos y sus elementos, proporcionalidad geométrica, isometrías, medida de longitudes y superficies.

En este trabajo se resalta la importancia no sólo de los contenidos matemáticos sino también en la forma como son transversalizados con procesos de razonamiento, estrategias de demostración, uso de entornos informáticos, visualización espacial, desarrollo curricular y resolución de problemas.

En la temática de la visualización, Ángel Gutiérrez afirma que existe un estrecho vínculo entre ésta y la geometría espacial, pero sin negar la posibilidad de aplicar este concepto a la geometría plana e incluso a otras áreas de las matemáticas.

También menciona que aunque casi todos los estudios sobre visualización se refieren a la geometría espacial, hay otros que han analizado su influencia en el aprendizaje de conceptos de geometría plana.

> ***Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B***[1]: Este artículo es trabajado por Adela Jaime, Fernando Chapa y Ángel Gutiérrez, pertenecientes al Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia en España. Su propósito principal es mostrar los resultados de un estudio realizado en relación a errores y contradicciones que aparecen frecuentemente en los libros de texto utilizados tanto por profesores como por estudiantes y que traen con sigo el entorpecimiento de los procesos de razonamiento o que como mínimo crea confusiones en torno a una idea o imagen mental que el estudiante ha construido.

Para llevar a cabo esta investigación se hizo la revisión de tres libros de texto que son conocidos y trabajados por maestros españoles, en ellos se identificaron cinco tipos de errores comunes frente a la definición de triángulos y cuadriláteros y sus implicaciones en el aprendizaje:

I. **Errores ocasionados por la presentación visual:** Al presentar la gráfica de un triángulo, muchos libros de texto lo muestran de una forma "estándar",

[1] Enseñanza General Básica. Como es denominada en España.

esto es, que uno de sus lados sea paralelo a alguna de las márgenes del libro, haciendo creer al estudiante que una de las condiciones para que una figura plana sea considerada como triángulo es que uno de sus lados esté dispuesto de una forma horizontal.

II. **Definiciones diferentes:** a medida que se van desarrollando las temáticas a en el libro, en muchas ocasiones, van cambiando las definiciones de los mismos conceptos.

III. **Interpretación incorrecta de la definición:** Este error aparece cuando, dada una definición, se indican o se utilizan como propiedades del concepto en cuestión algunas que no se puedan deducir lógicamente de la definición enunciada (Jaime, A, et al, p. 53). Por ejemplo, al decir que un cuadrado es aquél que tiene sus cuatro lados iguales, no se puede deducir que sus cuatro ángulos sean iguales ni mucho menos que sean rectos.

IV. **Diversas interpretaciones de la misma expresión gramatical:** este error consiste en que a una oración determinada se le hagan distintas interpretaciones, donde una de ellas es correcta desde el punto de vista matemático y la otra no, siendo precisamente esta última la que coincide con el significado usual en la vida diaria. Por ejemplo, al abordar el concepto de cuadrado, se acude a mencionar el paralelismo de sus lados, que en muchas ocasiones no ha sido tratado en el aula escolar.

V. **Omisión de conocimientos básicos:** Éste es un error de carácter didáctico en el cual para la explicación de un concepto se recurre a otro u otros que no han sido discutidos, dejando sin bases al nuevo concepto.

Dicho recorrido bibliográfico aportó elementos que permitieron estructurar y encauzar la investigación. Además, sirvió como base para el diseño de una estrategia en el análisis de las interpretaciones que realizan los estudiantes de los cuadriláteros objeto de este estudio y cómo han influido sus saberes previos en las relaciones que construyen.

Con relación a lo anterior, este trabajo está encaminado a responder la siguiente pregunta: **¿Cómo construyen los estudiantes de 5° de la Institución Educativa María Auxiliadora las relaciones intrafigurales e interfigurales de los cuadriláteros: rectángulo, paralelogramo y rombo?**

Este interrogante surge a partir de nuestra intervención en el aula en el área de geometría, en donde los alumnos enunciaban las definiciones de conceptos relacionados con las figuras geométricas planas; pero, desconocíamos la manera como ellos asociaban la definición con la figura. Cuestión que se convirtió en el centro de nuestra investigación.

Para dar respuesta a la pregunta formulada se planteó el siguiente objetivo: **Identificar características de la forma como estudiantes de 5°, establecen relaciones, en los cuadriláteros: rectángulo, paralelogramo y rombo a partir de sus propiedades estructurales.** En este sentido, se diseñaron y efectuaron seis actividades en las cuales los participantes pusieron en juego sus estructuras cognitivas a partir de la visualización de las representaciones geométricas de dichas figuras.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

Desde una perspectiva cognitiva, las representaciones se definen como cualquier noción, signo o conjunto de símbolos que significan algo del mundo exterior o de nuestro mundo interior, por tanto, se puede representar en nuestra mente algo que percibimos con los sentidos como también lo que nos imaginamos.

Al respecto, Duval (1999, p. 25) afirma que no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación, por tanto, no es sorprendente que se haya impuesto la noción de representación en los estudios psicológicos sobre la adquisición de los conocimientos o las transformaciones.

Este autor explica tres tipos de representaciones relativas al conocimiento: las representaciones semióticas, las representaciones mentales y las representaciones computacionales:

Las Representaciones Semióticas: son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos con las cuales el individuo puede exteriorizar sus representaciones mentales, en otras palabras, las representaciones semióticas permiten que los demás sujetos también puedan visualizar o acceder a lo que pasa por la mente del otro. Existe gran variedad de representaciones semióticas como por ejemplo figuras, esquemas, gráficos, expresiones simbólicas, entre otras.

Las Representaciones Mentales: Se entienden como todo aquel conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que le está asociado en ausencia total del significante perceptible, es decir, sin la presencia de un referente concreto o físico.

Las Representaciones Computacionales: Son las encargadas de direccionar la información externa que la hacen direccionable, recuperable y combinable en el interior de un sistema, en otras palabras, se trata de una codificación de la información haciendo referencia a la forma como ésta puede describirse y tomarse en cuenta en un sistema de tratamiento.

Dichos tipos de representaciones están dados por dos tipos de oposiciones: la oposición interno/externo y la oposición consciente/no-consciente.

La oposición consciente/no-consciente consiste en lo que aparece al individuo y él observa y lo que a él se le escapa y no puede observar, mientras que la oposición interno/externo consiste en lo que de un organismo, individuo o sistema es directamente visible y observable y lo que al contrario, no lo es.

Una representación interna puede ser consciente o no consciente, mientras que una representación consciente puede ser exteriorizada o no.

En el siguiente cuadro Duval (1999) muestra los tipos y funciones de representaciones.

OPOSICIONES	INTERNA	EXTERNA
CONSCIENTE	Mental	Semiótica
NO-CONSCIENTE	Computacional	

En el proceso de construcción y transformación de representaciones intervienen tres clases de actividades, entre las que se destaca:

Actividades de formación: Son aquellas representaciones de algo a partir de un conjunto de caracteres y de intencionalidades. Son utilizadas para expresar una representación mental o para evocar un objeto real. Para conseguir la formación de una representación identificable, se debe realizar una selección de rasgos y de datos en el contenido por representar; tal selección depende de unidades y reglas de formación que son propias del registro semiótico en el cual se produce la representación.

Actividades de tratamiento: Se da cuando una transformación produce otra al interior del mismo registro respecto a una cuestión, a un problema o a una necesidad. Un ejemplo, es cuando se presenta a un estudiante una expresión algebraica tal como un binomio elevado al cuadrado donde la expresión es el registro, éste puede expresarse como el producto de dos binomios, el registro sigue siendo el mismo pero el tratamiento es diferente.

Actividades de conversión: Se da cuando se transforma una representación de un registro a otro distinto al inicial. Un ejemplo de ello es lo que ocurre con el lenguaje gráfico, consideremos el caso de la función, $y=x^2$ vemos que es una expresión algebraica que al ser *transformada* a otro registro puede representar una Parábola en los ejes de coordenadas, o bien, podemos transformarla a un registro de tabulación.

Así, notamos que a pesar de que los registros de representación sean diferentes, la idea de función no se abandona.

FIGURAS GEOMÉTRICAS Y DISCURSO MATEMÁTICO

Para que la actividad cognitiva que requiere el sujeto al abordar la geometría sea óptima, es necesario que haya un tratamiento de manera simultánea e interactiva entre dos tipos de registros: el de las figuras geométricas y el discurso matemático.

En este sentido, es necesario que haya una coordinación entre la figura geométrica y el concepto asociado a ella, pero dado que la naturaleza de estos registros no es exclusiva de las matemáticas puede desencadenar errores entre estos dos sistemas de representación.

Dicha situación se presenta debido a que las figuras se confrontan a partir de la percepción visual y el discurso proviene de la lengua utilizada para comunicar. Al respecto Duval (1999) afirma que:

> Es necesario tomar en consideración que una aproximación exclusivamente psicológica de la percepción de figuras, así como una aproximación inmediatamente matemática de la lectura de las figuras, no pueden más que desconocer la diversidad de los tratamientos propios al registro de las figuras geométricas. La condición previa para la descripción precisa de los diferentes tratamientos matemáticos pertinentes en el registro de las figuras geométricas es un análisis semiótico relativo a la determinación de base constitutiva de este registro, a las posibilidades de su articulación en figuras y a la modificación de las figuras obtenidas".

La anterior cita denota la importancia de los tratamientos propios al registro de las figuras puesto que su ejecución, en parte no consciente, es lo que permite a las figuras su función heurística. A continuación se describirán esos tratamientos que son importantes para la enseñanza y aprendizaje de la geometría:

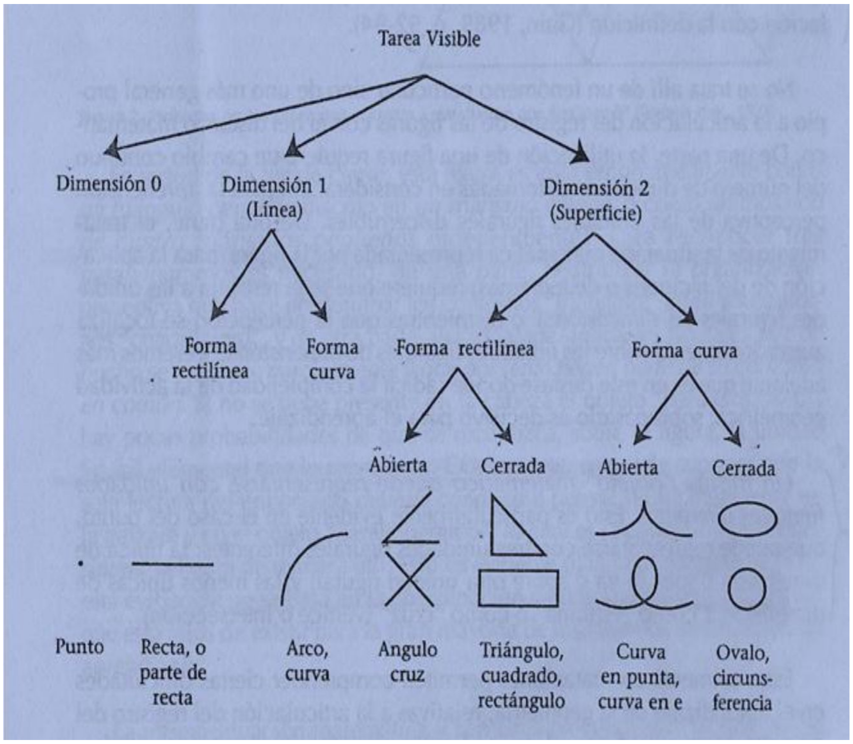
- **Las unidades constitutivas de una figura geométrica:** Toda figura aparece como la combinación de las *variaciones visuales* las cuales son de dos tipos: dimensional y cualitativo. El dimensional está ligado al número de dimensiones. Las de dimensión cero son puntos, las de dimensión uno son líneas, mientras que las de dimensión dos son superficies.

La variación cualitativa corresponde a la forma (línea recta o línea curva, contorno abierto o contorno cerrado de un área), variaciones de tamaño, de orientación, de color etc.

Hay que tener en cuenta que "no todas las variables visuales son pertinentes en todos los registros de la figura. Así, en una figura hay menos variables visuales pertinentes para tomar en consideración que en un gráfico" (Duval, 1999). En un gráfico, variables como el color pueden ser de vital importancia para destacar información significativa, mientras que en una figura geométrica el color carece de valor conceptual.

Todas las figuras geométricas combinan dos clases de variación; la visual cualitativa con la dimensional, las cuales permiten definir las unidades figurales elementales para el registro de las representaciones geométricas.

La siguiente gráfica muestra la clasificación de unidades figurales elementales propuestas por Raymond Duval:



- **Los tratamientos propios al registro de las figuras geométricas:** las figuras son un importante soporte intuitivo para las actividades en geometría ya que muestran mucho más de lo que dice un enunciado y permiten explorar, realizar conjeturas, y hacer demostraciones.

  Se debe evitar darle a las figuras sólo un tratamiento matemático, puesto que ellas permiten realizar procesos de abducción los cuales son específicos al registro de las figuras y posibilitan centrar la mirada en aspectos relevantes a la solución del problema que se esté abordando.

Lo anterior se traduce en que los tratamientos figurales[2] son independientes a los tratamientos matemáticos, pero la combinación de ambos permiten que la conducta de abducción pueda lograr el objetivo de encontrar la respuesta al problema que se haya planteado ya que ésta conecta las relaciones figurales con la pregunta matemática.

Para que las figuras permitan la conducta de abducción se han de distinguir dos niveles en la aprehensión de figuras geométricas:

A. **El reconocimiento de las unidades figurales de dimensión 2 en una figura geométrica:** Este nivel corresponde a la percepción de la figura geométrica, en el cual el tiempo de reconocimiento puede ser más o menos rápido si las unidades figurales de dimensión dos se encuentran separadas, esto es, que se presenten figuras geométricas aisladas. El tiempo de reconocimiento no es el mismo cuando esas unidades figurales están integradas en una configuración dado que:

   - Algunas unidades figurales de dimensión 2 predominan más que otras.

[2] los tratamientos figúrales están vinculados con la posibilidad de modificación que surge de la relación de las partes con el todo , como ejemplo tenemos las relaciones ópticas (visuales) o posicionales de una figura; modificaciones que pueden efectuarse física o mentalmente, y ello independientemente de todo conocimiento matemático (Duval 1988, 62-63)

- Por lo general, una figura geométrica está compuesta por más unidades figurales elementales de las que se necesita para su construcción.

B. La aprehensión operatoria de las modificaciones posibles de una figura geométrica: Toda figura geométrica es susceptible de ser modificada :

Puede ser separada en unidades figurales elementales de dimensión 2.

- Puede ser agrandada o achicada.
- Se pueden efectuar movimientos en el plano como el de rotación y traslación.

Dichas modificaciones, las cuales no son de la misma naturaleza, promueven operaciones específicas y constituyen la productividad heurística de las figuras. (Duval, 1988) citado por (Duval, 2004).

COORDINACIÓN ENTRE FIGURA GEOMETRICA Y DISCURSO

Una figura, como representación de un objeto matemático debe estar acompañada desde el inicio de la explicitación de las propiedades que ella cumple, ya que el hecho de percibir visualmente alguna característica no es garantía para afirmar que la figura geométrica cumple con la condición percibida.

En relación con lo anterior el MEN (2004) expresa que la visualización no es una habilidad innata, es un proceso que está presente en la actividad cognitiva del estudiante, quien debe ir evolucionando en la *"forma de mirar"* los objetos, desde percepciones visuales simples hasta aquellas que le permiten explorar el potencial heurístico de la visualización.

2.2 MODELOS ESQUEMÁTICOS UTILIZADOS FRECUENTEMENTE EN LA IDENTIFICACIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Algunos alumnos, identifican las figuras geométricas utilizando como puntos de referencia cognitivos, modelos esquemáticos de imágenes de dichas figuras.

Según Scaglia y Moriena (2005) la utilización frecuente de representaciones gráficas estereotipadas durante la enseñanza de los conceptos geométricos, ocasiona que los alumnos usen estos modelos como referentes cognitivos. Algunos investigadores han denominado a esta situación prototipo o ejemplo prototípico.

Por tanto, una *representación gráfica estereotipada* es aquella que se presenta con mayor frecuencia al abordar un concepto, debido a que es un dibujo estandarizado y aceptado por la sociedad en general. Un ejemplo de ello es la posición en la que comúnmente se dibuja un cuadrado donde los lados de éste son paralelos a la base de la superficie que lo contiene. Otro caso es lo que ocurre con el rombo, donde el dibujo es trazado a partir de las diagonales de la figura, haciendo que ésta quede ubicada en forma de "diamante", o de punta.

En cuanto a los ejemplos prototípicos Scaglia y Moriena (2005) afirman que éstos hacen referencia a un modelo de imagen del alumno, el cual se forma a partir de los sucesivos encuentros con una representación gráfica que posee determinados atributos (Conceptuales o propios del dibujo). Los prototipos constituyen puntos de referencia cognitivos, sin embargo, son el origen de ciertas dificultades que tienen los alumnos durante la identificación de figuras geométricas, puesto que no se asume la presentación gráfica como algo irrelevante al momento de especificar las características que una figura puede tener.

2.3 LA TEORÍA DE LOS CONCEPTOS FIGURALES

Las ideas que sostiene Fischbein (1993) acerca de este tema, consisten en afirmar que las figuras geométricas no pueden ser consideradas como conceptos puros, pero tampoco como meras imágenes comunes, puesto que, éstas constituyen una clase especial de conceptos a los que denomina "conceptos figúrales" dado que poseen una doble naturaleza, la naturaleza conceptual y la naturaleza figural.

La componente conceptual, en el que se expresan las propiedades que caracterizan una cierta clase de objetos, se da a partir del lenguaje escrito o hablado, su grado de formalismo es de acuerdo al nivel de axiomatización. La componente figural corresponde a la imagen mental que asociamos al concepto, y que en el caso de la geometría, puede ser manipulada a través de movimientos como los de traslación, rotación y otros, sin perder de vista las relaciones invariantes

En consecuencia, cuando se dibuja una figura geométrica se hace para verificar alguna de sus propiedades pero ese dibujo no se refiere a un dibujo en particular sino a una cierta forma que puede ser la forma de una infinidad de objetos. Además las propiedades de las figuras que están relacionadas con su naturaleza conceptual, son impuestas o derivadas de definiciones en el dominio de un cierto sistema axiomático. Un ejemplo de ello es el cuadrado, éste no es una imagen en una hoja de papel. Es una forma controlada por una definición aunque esté inspirado en un objeto real.

2.4 CLASIFICACIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

De Villiers (1994) propone dos tipos clasificaciones diferentes para los conceptos

Matemáticos: la clasificación jerárquica y la clasificación particional.

La clasificación jerárquica: corresponde a un conjunto de conceptos de tal manera que los conceptos más particulares forman subconjuntos de los conceptos más generales. Algunas características de esta clasificación son:

- "Conduce a definiciones de conceptos y formulaciones de teoremas más económicas.
- Simplifica la sistematización y derivación deductiva de propiedades de conceptos más especiales.
- A menudo proporciona un esquema conceptual más útil durante la resolución de problemas.

  Algunas veces sugiere definiciones alternativas y nuevas proposiciones.
- Proporciona una perspectiva global útil". (De Villiers 1994, p. 15).

La clasificación por partición: Considera los subconjuntos de conceptos disjuntos unos de otros.

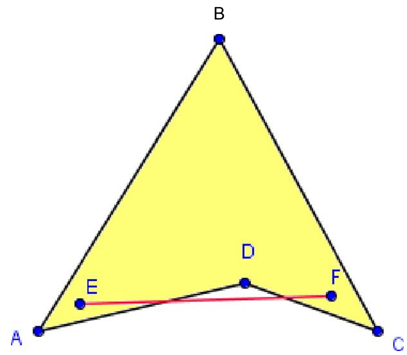
Un ejemplo de estos tipos de clasificación, es el rectángulo, que es considerado dentro de la clasificación jerárquica como paralelogramo con los ángulos congruentes mientras que en la clasificación por partición se define como un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos e iguales dos a dos, donde dos de sus lados son mas largos que los otros dos y con sus cuatro ángulos interiores congruentes.

2.5 EL TRATAMIENTO DE LOS CUADRILÁTEROS

Los cuadriláteros son líneas poligonales cerradas que tienen cuatro lados y por ende cuatro vértices, cuatro ángulos interiores y cuatro ángulos exteriores. La suma de las medidas de los ángulos interiores de todo cuadrilátero es siempre igual a 360° sexagesimales o sea un ángulo de un giro. Existen varios tipos de clasificaciones de los cuadriláteros, pero la que se ha tomado como referencia (JARAMILLO, 1986) los clasifica de la siguiente manera:

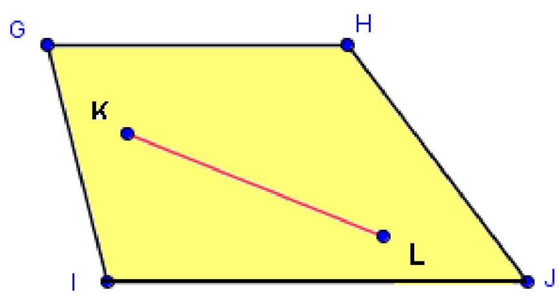
Los cuadriláteros pueden ser de dos clases convexas o no-convexos

Cuadriláteros No-convexos: son aquellos cuadriláteros en los que se pueden encontrar dos puntos interiores E y F del mismo, tales que algunos de los puntos del segmento EF que determinan están fuera del cuadrilátero.



Los puntos E y F son los extremos del segmento EF y ambos puntos pertenecen al cuadrilátero, sin embargo, todos los puntos del segmento **no** pertenecen al cuadrilátero y es por esta razón éste es no convexo o cóncavo.

Cuadriláteros Convexos: Son aquellos cuadriláteros en los que al trazar un segmento de recta cuyos extremos son puntos del cuadrilátero, todos los puntos del segmento pertenecen al mismo tiempo a la figura:

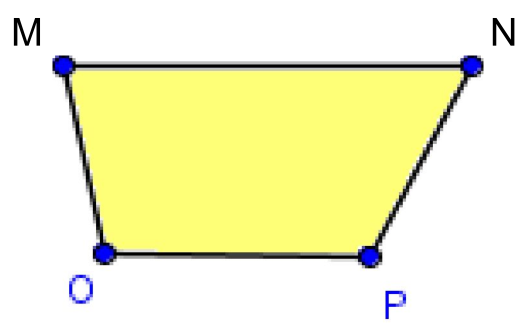


Los puntos K y L son los extremos del segmento KL y al mismo tiempo pertenecen al cuadrilátero además, todos los puntos del segmento pertenecen también al cuadrilátero.

Clasificación de los cuadriláteros convexos:

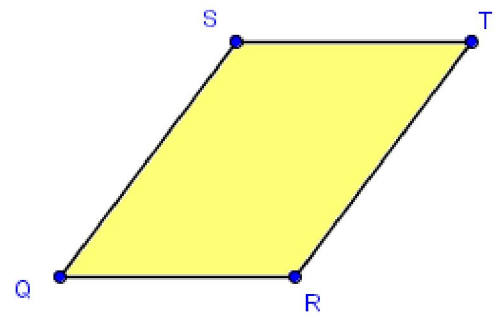
Según la medida de los ángulos o de los lados, o la posición entre un par de lados, los cuadriláteros convexos reciben un nombre específico, lo que crea una clasificación en este grupo de figuras:

Trapecio; Los trapecios son cuadriláteros que tienen un par de lados paralelos los cuales son llamados bases del trapecio. La distancia entre las bases es la altura del trapecio. Cuando el trapecio sólo tiene un par de lados paralelos y sus otros dos lados son iguales se dice que el trapecio es isósceles.

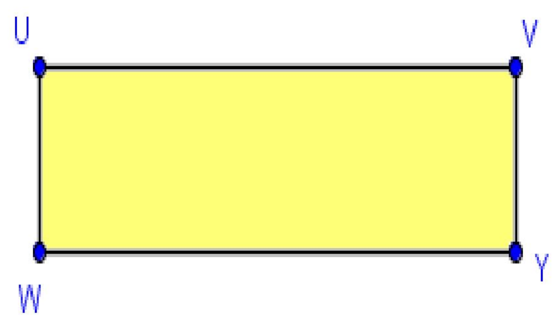


Paralelogramo: es un trapecio donde sus lados opuestos son paralelos e iguales. Además de ello cumple con las siguientes características:

- Todo paralelogramo tiene iguales sus ángulos opuestos.
- Dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.
- En todo paralelogramo las diagonales se dividen mutuamente en partes iguales
- Al trazar una diagonal, ésta convierte al paralelogramo en dos triángulos congruentes.



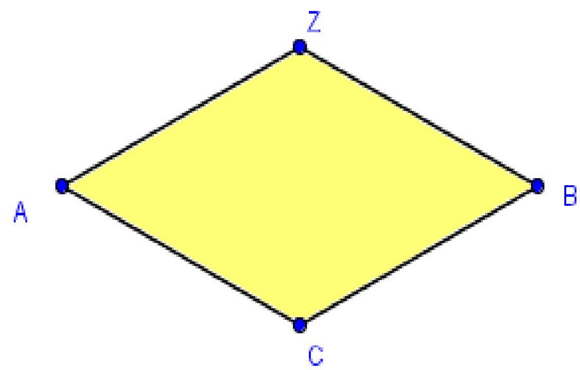
Rectángulo: es un paralelogramo en el que todos sus ángulos interiores son iguales y como en todo cuadrilátero la suma de los ángulos interiores es 360° entonces cada ángulo interior del rectángulo mide 90°, es decir, sus cuatro ángulos interiores son rectos. Como característica adicional, sus diagonales son iguales.



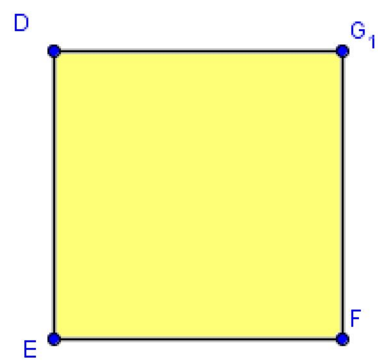
Rombo: es una clase particular de los paralelogramos en el que la medida de sus cuatro lados es la misma. Además posee las siguientes propiedades:

- Las diagonales se cortan perpendicularmente, o sea formando ángulos rectos.

  Las diagonales del rombo son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.



Cuadrado: Este cuadrilátero se caracteriza por tener sus lados y ángulos iguales y por tal motivo es rombo y rectángulo a la vez. Los cuadrados heredan todas las características del paralelogramo, del rectángulo y del rombo.



2.6 LAS RELACIONES INTRAFIGURALES E INTERFIGURALES EN GEOMETRÍA

Una de las precisiones realizadas por el Doctor Carlos Eduardo Vasco (1994) relacionadas con el aprendizaje de la geometría, es la de no fomentar el estudio de las figuras como totalidades separadas, sino establecer relaciones entre sus componentes y en relación con las demás figuras.

De ahí que sea muy importante el trabajo en el aula de una geometría en donde los estudiantes puedan establecer propiedades de tipo estructural la cual tiene en cuenta dos categorías de relaciones con las cuales ellos cualifiquen las representaciones geométricas, las relaciones intrafigurales e interfigurales. De acuerdo a Mesa et al (2000, p. 24), las define de la siguiente manera

- **Las relaciones intrafigurales:** hacen referencia a aquellas que se establecen entre un cuerpo o una figura geométrica y las partes que lo constituyen (secciones, lados, caras, vértices, aristas, ángulos, entre otros). A estas relaciones pueden agregarse aquellas que resultan de una comparación entre las propiedades internas de dos o varias figuras.

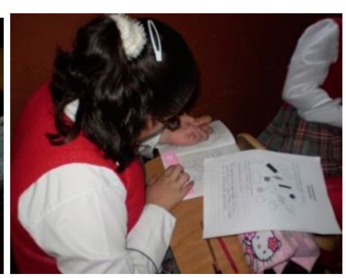
- **Las relaciones interfigurales:** son aquellas que permiten comparar los cuerpos y figuras geométricas entre sí, estableciendo diferencias, semejanzas y analogías, por ejemplo las diferencias y semejanzas de las figuras planas de acuerdo al número de lados.

Para que los estudiantes construyan dichas relaciones el profesor Mesa (2000) sugiere que se ofrezca a los estudiantes un buen número de cuerpos y figuras que pueden ser previamente diseñados o seleccionados del entorno. Al respecto, Climent y Carrillo (s .f, p. 140) mencionan que el estudio de figuras concretas y sus propiedades favorece la búsqueda de conjeturas y sus demostraciones, además puede iniciarse en los niños distintos tipos de verificaciones (visualizaciones y comprobaciones) que si bien no demuestran de manera general, en algunos casos captan el argumento que sustenta la demostración.

3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

El presente trabajo fue orientado desde los parámetros de la investigación cualitativa, desarrollado a partir del estudio de casos, "el cual es una herramienta valiosa de investigación, y su mayor fortaleza radica en que a través del mismo se mide y se registra la conducta de las personas involucradas en el fenómeno estudiado". (Yin, 1993:40) citado por Martínez (2006)

La elección de los participantes fue llevada a cabo en la institución Educativa María Auxiliadora de Caldas (Ant.) donde fue realizada la práctica pedagógica con 38 estudiantes del grado 5°, entre ellos se eligieron dos niñas y un niño: Valentina Castaño Ossa, María Paula López Uribe y Juan Manuel Cano Ramírez.



Valentina María Paula Juan Manuel

La selección de los participantes fue de manera directa, se consideró a los estudiantes más aptos en cuanto al desempeño mostrado durante las clases de geometría en el año anterior en todo lo relacionado con sus capacidades de razonamiento, comunicación y resolución de problemas.

Es importante mencionar que tanto los alumnos como sus padres dieron su consentimiento para realizar la investigación, los cuales firmaron un documento permitiendo hacer público sus nombres, fotos y trabajos realizados con su puño y letra. (Ver anexo 1)

La obtención de la información se realizó mediante la observación participante, la entrevista etnográfica, el registro de los diarios de campo y las actividades de aula. Dichos instrumentos son propios de la investigación cualitativa y facilitan la comprensión del problema de investigación.

A través de la observación, se logró acceder a las acciones de los alumnos tal como ocurrieron en su propio contexto natural de actuación.

Con la entrevista, se pudo confrontar y ampliar lo que los alumnos realizaron en el papel con cada actividad, es decir, qué piensan, qué creen y qué significados utilizan y manejan.

Con la utilización del diario de campo, se consignaron las experiencias vividas en el aula durante esta investigación, pero de una manera reflexiva puesto que, como dice Fontana (2000a, p154) citado por Jaramillo (2003) su "registro no es la mera repetición de lo hecho, él mismo es un *"trabajo" (...) trabajo de* *elaboración, por la palabra, de un tiempo ya trabajado. Trabajo que transforma el pasado, que podría haber desaparecido en el olvido, en presencia en el presente".*

Por lo tanto, a través del diario de campo se logró identificar el problema de investigación, realizar los análisis acerca de cómo los estudiantes adquieren las propiedades estructurales de los cuadriláteros e identificar las categorías para la triangulación de la información.

Para la categorización de la información fueron analizadas las fuentes utilizadas en donde se agrupó cada respuesta obtenida por los estudiantes en las actividades y en las entrevistas, como también cada estrategia o procedimiento evidenciado en tres categorías definidas de la siguiente manera:

- La relevancia de la posición espacial de los cuadriláteros.
- El uso de medidas como referente concreto para comunicar ideas asociadas a las figuras geométricas.
- El cambio de lo perceptivo a lo conceptual.

Las categorías emergieron del conjunto de actividades que desarrollaron los estudiantes en las que pusieron en juego sus procesos cognitivos para establecer las propiedades comunes a todos los cuadriláteros y aquéllas que sólo pertenecen a determinado grupo de cuadriláteros o a una sola figura.

Cada actividad fue desarrollada en sesiones de dos horas y de manera individual para observar y analizar los razonamientos propios de cada estudiante.

A continuación se presentará una tabla donde se halla el objetivo de cada actividad y posteriormente se realizará su respectiva descripción.

	Objetivo
Actividad 1	Identificar las características invariantes de los cuadriláteros.
Actividad 2	Analizar la representación gráfica que hacen los estudiantes de los cuadriláteros asociándolos con el nombre que ellos reciben
Actividad 3	Explorar y analizar cuáles son las características más relevantes dentro de cada uno de los cuadriláteros como tal y con relación a las diferentes clasificaciones que se pueden hacer de ellos a nivel interfigural
Actividad 4	Analizar qué propiedades interfigurales identifican los estudiantes a partir de las representaciones geométricas proporcionadas y de qué se valen para realizar dicha identificación
Actividad 5	Establecer las características interfigurales de los rectángulos, paralelogramos y rombos a partir del análisis de ejemplos y contraejemplos.
Actividad 6	Analizar algunas características intrafigurales de los cuadriláteros objeto de estudio a partir de la observación de sus diagonales

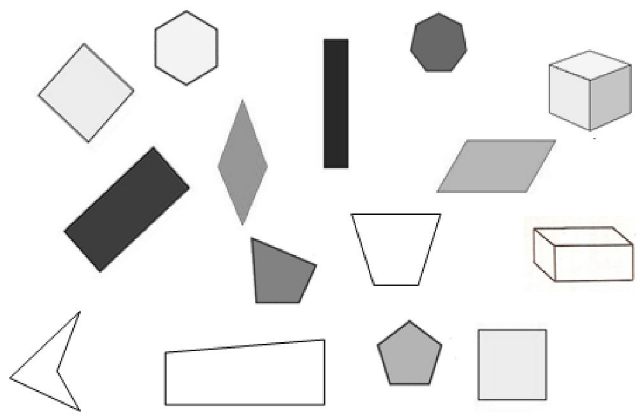
En la actividad #1 los alumnos deben seleccionar los cuadriláteros, que se hallan entre las 15 figuras geométricas presentadas, las cuales están representadas de formas diversas: regulares, irregulares, cóncavos, convexos y tridimensionales; además, están ubicadas en diferentes posiciones.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA

MARÍA AUXILIADORA

ESTUDIANTE: ____

Dadas las siguientes figuras, resuelve las actividades:



1. Escribe los números de aquellos polígonos que son cuadriláteros.

____

____

2. ¿Cómo identificas que un polígono es un cuadrilátero?

____

____

____

____

La actividad #2 consiste en construir un cuadrado, un rombo, un paralelogramo y un rectángulo. Ésta tiene como finalidad observar cómo construyen esos cuadriláteros. Nuestra expectativa gira en torno a la forma como los estudiantes utilizan la regla y el compás, como instrumentos que ayudan a construir representaciones de figuras. Además, porque su uso implica el conocimiento de algunas de las propiedades estructurales de los cuadriláteros.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA

MARÍA AUXILIADORA

Nombre ________________________________ fecha________________

Dibuja un cuadrado, un rombo, un paralelogramo y un rectángulo

Cuadrado	Rombo
Paralelogramo	Rectángulo

Responde:

¿Cómo identificas que una figura es un cuadrado?

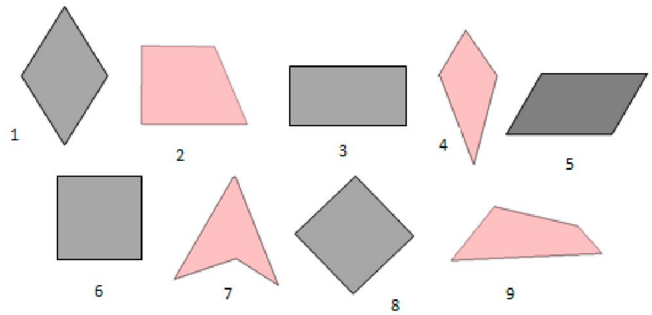
La actividad #3 contiene nueve cuadriláteros distintos donde los estudiantes deben escribir el número de aquellos polígonos que sean paralelogramos, rectángulos y rombos. Además, los participantes deben describir cómo identifican que una figura sea un rectángulo y hacer lo mismo para el rombo.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA

MARÍA AUXILIADORA

ESTUDIANTE: ____

A partir de los siguientes cuadriláteros responde las preguntas:



1. Escribe los números de aquellos polígonos que son paralelogramos

   ____

2. ¿Cuáles de las figuras son rectángulos? Escribe los números de los polígonos que son rectángulos.

   ____

3. Escribe el número de las figuras que son rombos:

   ____

4. ¿Cómo identificas que una figura es un rectángulo?

   ____

   ____

   ____

5. Explica cómo identificas que una figura es un rombo.

   ____

La actividad #4 presenta cuatro grupos de cuadriláteros. En el primer grupo, los estudiantes, deben identificar cuáles figuras son cuadrados, en el segundo, cuáles son rectángulos, en el tercero, cuáles paralelogramos y en el cuarto cuáles son rombos. Además, deben justificar por qué consideran que la figura elegida es cuadrado, rectángulo paralelogramo o rombo.

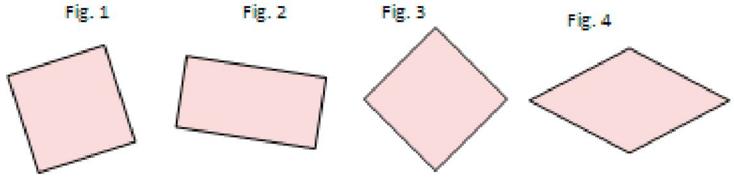
INSTITUCIÓN EDUCATIVA

MARÍA AUXILIADORA

Observa las figuras. Y responde

1. ¿Cuáles de estas figuras son cuadrados?

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4



¿Cuáles de estas figuras son cuadrados?

¿La figura #1 es cuadrado? Si____ no_____ ¿Por qué?________________________________

____

¿La figura #2 es cuadrado? Si____ no_____ ¿Por qué?________________________________

____

¿La figura #3 es cuadrado? Si____ no_____ ¿Por qué?________________________________

____

¿La figura #4 es cuadrado? Si____ no_____ ¿Por qué?________________________________

2. ¿Cuáles de estas figuras son rectángulos?

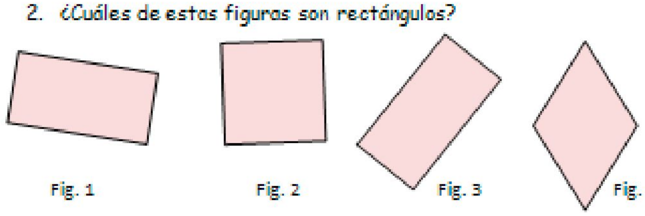


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

¿Cuáles de estas figuras son rectángulos?

¿La figura #1 es rectángulo? Si____ no_____ ¿Por qué?________________________________

____

¿La figura #2 es rectángulo? Si____ no_____ ¿Por qué?________________________________

____

¿La figura #3 es rectángulo? Si____ no_____ ¿Por qué?________________________________

____

¿La figura #4 es rectángulo? Si____ no_____ ¿Por qué?________________________________

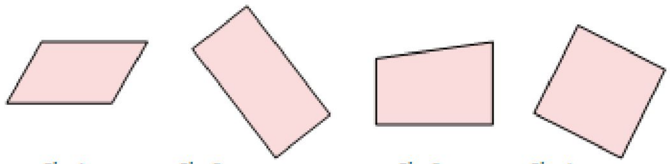


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

¿Cuáles de estas figuras son paralelogramos?

¿La figura #1 es paralelogramo? Si____ no_____ ¿Por qué?____________________________

____

¿La figura #2 es paralelogramo? Si____ no_____ ¿Por qué?____________________________

____

¿La figura #3 es paralelogramo? Si____ no_____ Por qué?____________________________

____

¿La figura #4 es paralelogramo? Si____ no_____ Por qué?____________________________

4. ¿Cuáles de estas figuras son rombos?

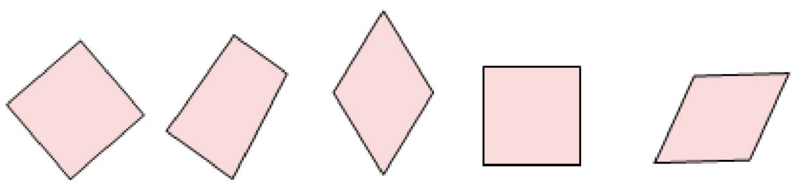


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5

¿Cuáles de estas figuras son rombos?

¿La figura #1 es rombo? Si____ no_____ ¿Por qué?__________________________________

____

¿La figura #2 es rombo? Si____ no_____ ¿Por qué?__________________________________

____

¿La figura #3 es rombo? Si____ no_____ ¿Por qué?__________________________________

____

¿La figura #4 es rombo? Si____ no_____ ¿Por qué?__________________________________

____

¿La figura #5 es rombo? Si____ no_____ ¿Por qué?__________________________________

La actividad #5, consiste en proporcionar a los estudiantes tres bloques de figuras. En el primer bloque, se encuentran los cuadriláteros que son rectángulos. En el segundo se presentan los que son rombos y en el tercero los que son paralelogramos.

Cada bloque está compuesto por dos filas de cinco figuras. En la primera fila se presentan los cuadriláteros que cumplen con las características para pertenecer al grupo, mientras que la segunda, a pesar de tener cuatro lados, no cumple con todas las cualidades para pertenecer a éste.

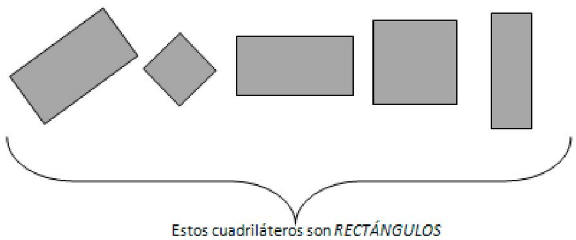
En cada uno de ellos los participantes deben identificar cuáles son las relaciones que hay entre las figuras, por lo tanto se espera que:

En el grupo de las figuras que son rectángulos deben establecer las relaciones angulares, puesto que lo que hace que sean considerados como tal es que la medida de cada uno de sus cuatro ángulos interiores sea 90°, donde al mismo tiempo se establece las relaciones de perpendicularidad y paralelismo.

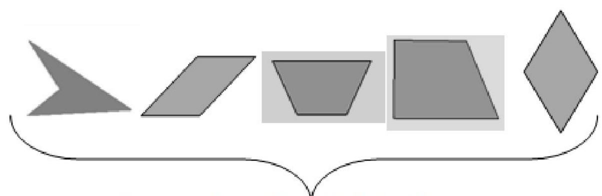
INSTITUCIÓN EDUCATIVA

MARÍA AUXILIADORA

ESTUDIANTE: ____



Estos cuadriláteros son *RECTÁNGULOS*



Estos cuadriláteros ***NO*** son *RECTÁNGULOS*

Observa los dos grupos de figuras y explica qué propiedades debe tener un cuadrilátero para que sea considerado como RECTÁNGULO:

____

____

____

____

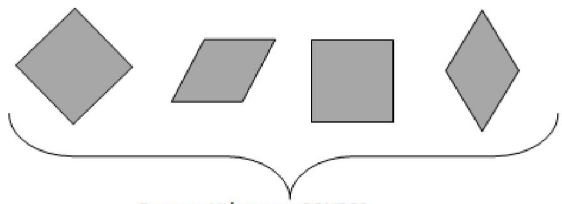
____

Del segundo grupo de figuras, los rombos, se tiene la expectativa que los alumnos establezcan la igualdad de los cuatro lados, la igualdad de sus ángulos opuestos y el paralelismo de sus lados.

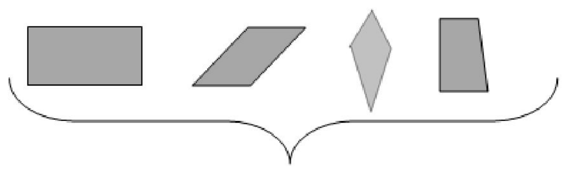
INSTITUCIÓN EDUCATIVA

MARÍA AUXILIADORA

ESTUDIANTE: ____



Estos cuadriláteros son *ROMBOS*



Estos cuadriláteros **NO** son *ROMBOS*

Analiza los dos grupos de figuras y explica qué características debe tener un cuadrilátero para que sea considerado como ROMBO:

____

____

____

____

____

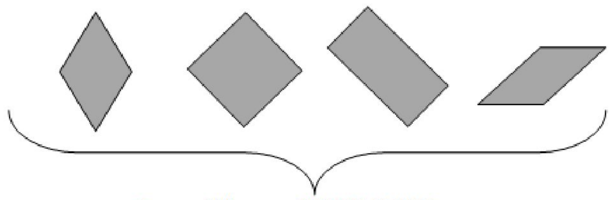
____

En el grupo, correspondiente a los paralelogramos, deben identificar que estos tienen dos pares de lados paralelos y que sus ángulos opuestos son iguales.

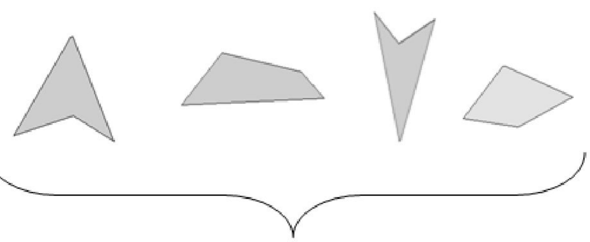
INSTITUCIÓN EDUCATIVA

MARÍA AUXILIADORA

ESTUDIANTE: ____



Estos cuadriláteros son *PARALELOGRAMOS*



Estos cuadriláteros <u>NO</u> son *PARALELOGRAMOS*

Analiza los dos grupos de figuras y explica qué características debe tener un cuadrilátero para que sea considerado como paralelogramo:

____

____

____

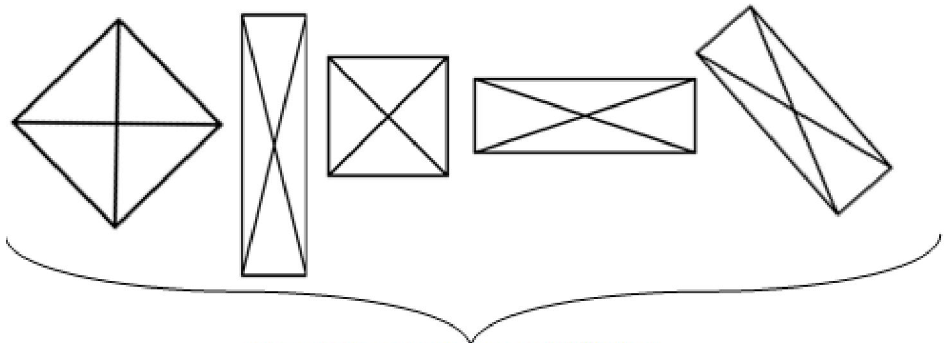
____

En la actividad #6, se presentan, como sigue, 15 figuras dividas en tres grupos. Como puede observarse cada figura tiene trazadas sus diagonales, esto con el propósito que los estudiantes identifiquen cuáles son las características de las diagonales de cada grupo de figuras.

El primer grupo de ellos, corresponde a los rectángulos. Allí, están dibujados dos cuadrados de diferente medida y ubicación espacial, las tres figuras restantes son rectángulos no cuadrados, dos de los cuales están dispuestos de forma estereotipada mientras que el otro no.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARÍA AUXILIADORA

ESTUDIANTE: ____



Observe las diagonales de algunos *RECTÁNGULOS*

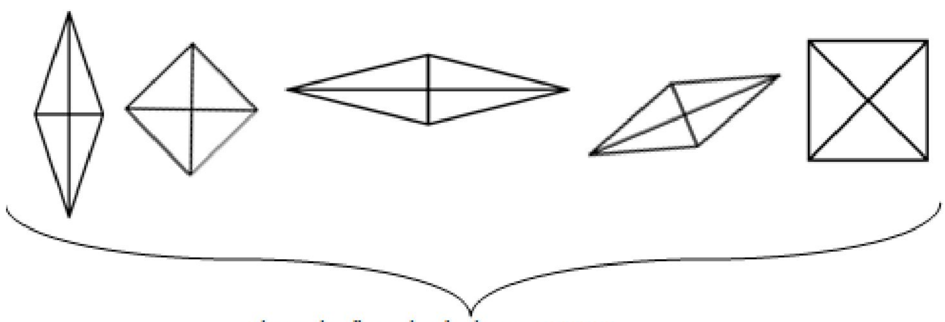
1. ¿Qué características tienen las diagonales de los rectángulos?

____

____

____

____



Observe las diagonales de algunos *ROMBOS*

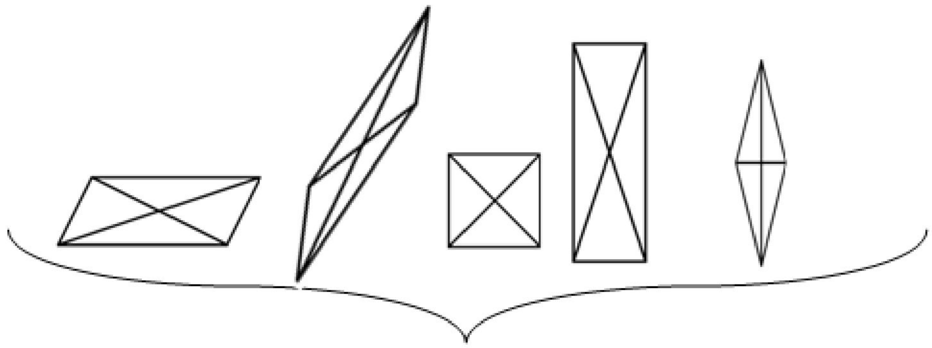
2. ¿Cuáles son las características de las diagonales de los rombos?

____

____

____

____



Observe las diagonales de algunos *PARALELOGRAMOS*

3. ¿Qué características tienen las diagonales de los rectángulos?

Del grupo de rectángulos se espera que los estudiantes manifiesten relaciones asociadas a sus diagonales, tales como:

- Las diagonales se interceptan en su punto medio.
- La longitud de las diagonales Son iguales.
- Las diagonales al interceptarse forman triángulos isósceles.

De acuerdo a las relaciones que identifiquen deben responder la pregunta: **¿Qué características tienen las diagonales de los rectángulos?**

Del segundo grupo de figuras, que corresponde a los rombos con sus diagonales, se pretende que los estudiantes visualicen y comuniquen relaciones asociadas a las diagonales de un rombo en función a:

- Las diagonales de un rombo se bisecan mutuamente.

- Las diagonales del rombo se cortan perpendicularmente.

- Las diagonales se interceptan generando al interior del rombo cuatro triángulos rectángulos.

Luego de que cada participante identifique sus características, debe responder el siguiente interrogante **¿Cuáles son las características de las diagonales de los rombos?**

El tercer grupo de figuras corresponde a las diagonales de cinco paralelogramos entre los que se encuentran: un cuadrado, un rombo y un rectángulo. Dichas figuras tienen la propiedad de ser paralelogramos, en las cuales sus diagonales se bisecan mutuamente.

En este grupo se indaga a los estudiantes acerca de qué características tienen las diagonales de los paralelogramos.

4. CATEGORIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN

En un esfuerzo por sintetizar y organizar el registro de la información obtenida, se han establecido tres categorías que emergieron a medida que se analizaban los datos proporcionados por los participantes en el desarrollo de las actividades y las entrevistas realizadas.

En ellas se presenta la interrelación entre las voces de los participantes, el marco teórico y las voces de los autores del trabajo.

4.1 LA RELEVANCIA DE LA POSICIÓN ESPACIAL DE LOS CUADRILÁTEROS

"Porque un cuadrado en esta posición es un cuadrado, y en ésta es un rombo" (María Paula)

Varias de las características que los participantes perciben en una figura dependen de la posición espacial en la que ésta se encuentra ubicada y por ende, al ser presentada en una posición diferente, ésta pierde algunas de las propiedades que se habían establecido inicialmente.

Tal es el caso de María Paula y Valentina quienes al desarrollar la actividad #4 no evidencian un nivel estructural en las propiedades intrafigurales de los rombos dado que al justificar la figura #1 y #4 que corresponden a un cuadrado, afirman que la primera es un rombo, mientras que en la segunda es solamente un cuadrado (Observar actividad de María Paula y actividad de Valentina).

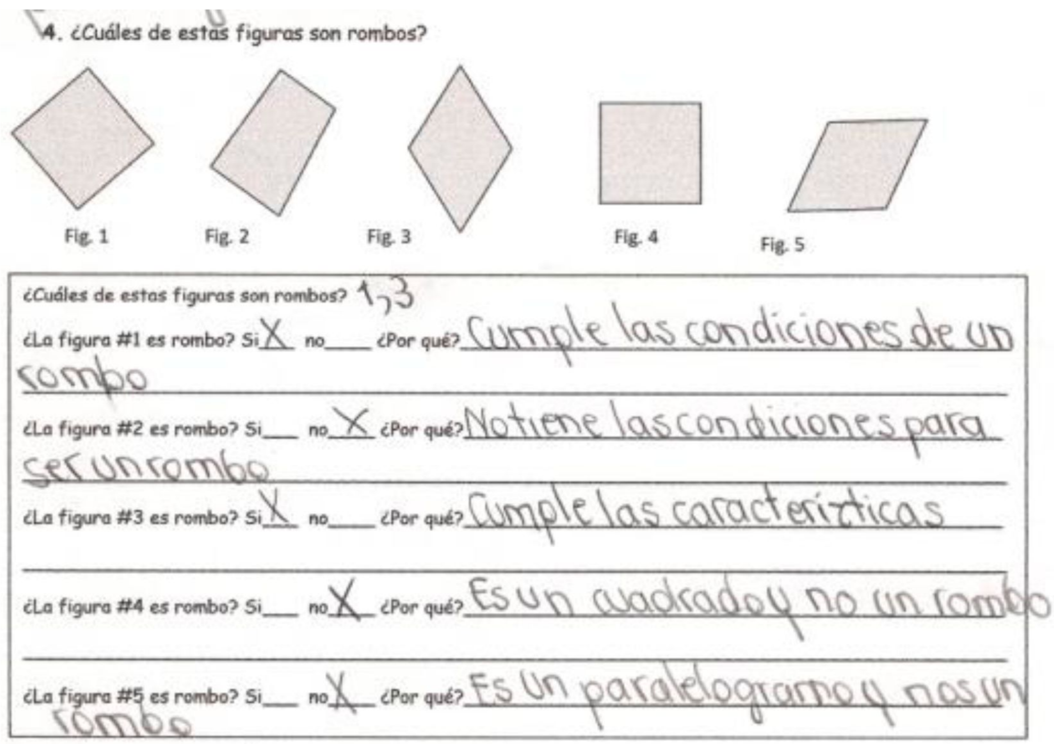

4. ¿Cuáles de estas figuras son rombos?

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5

¿Cuáles de estas figuras son rombos? 1, 3

¿La figura #1 es rombo? Si X no____ ¿Por qué? Cumple las condiciones de un rombo

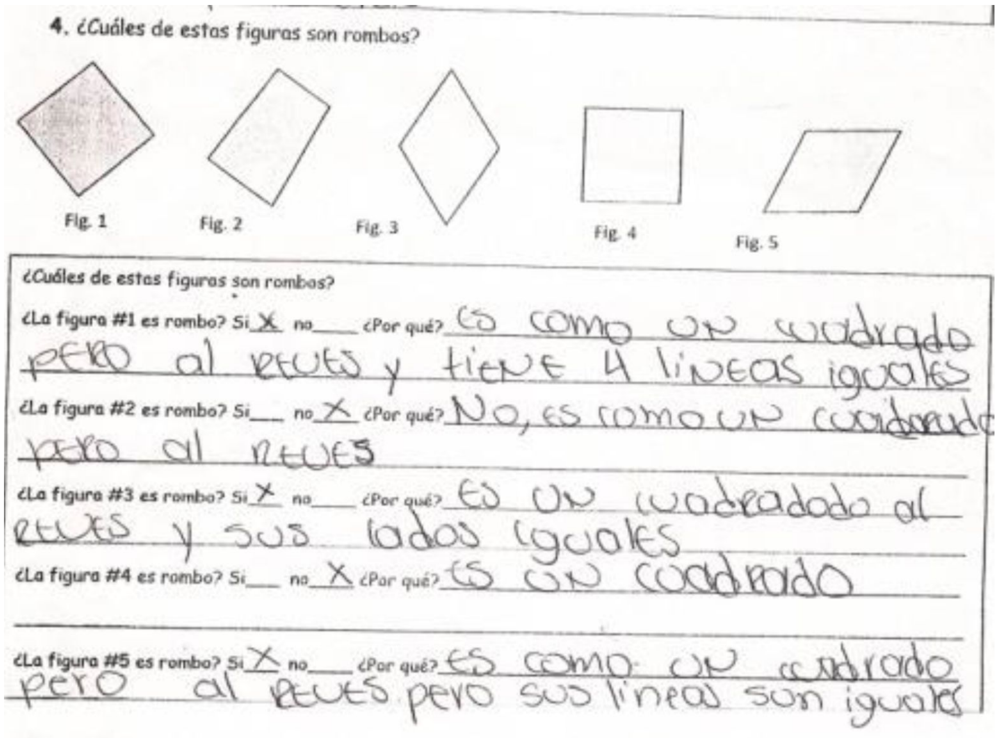
¿La figura #2 es rombo? Si____ no X ¿Por qué? No tiene las condiciones para ser un rombo

¿La figura #3 es rombo? Si X no____ ¿Por qué? Cumple las caracterizticas

¿La figura #4 es rombo? Si____ no X ¿Por qué? Es un cuadrado y no un rombo

¿La figura #5 es rombo? Si____ no X ¿Por qué? Es un paralelogramo y nos un rombo

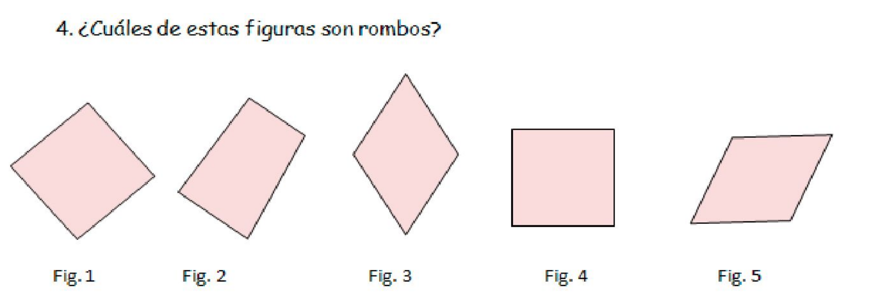
Actividad de María Paula



Actividad de Valentina

María Paula realiza una breve explicación del porqué de su respuesta en la entrevista[3]:

P: ahora vamos a mirar los rombos. ¿Que características debe tener un rombo?



***MP:** un rombo debe tener cuatro lados, cuatro vértices, siempre en esta posición (mostrando la posición en forma de "diamante", figura 1 y 3)*

***P:** ¿esa posición qué es?*

***MP:** porque un cuadrado en esta posición es un cuadrado, y en ésta es un rombo*

[3] La entrevista de Valentina no fue consignada debido a que no ofreció respuestas acerca de esta pregunta

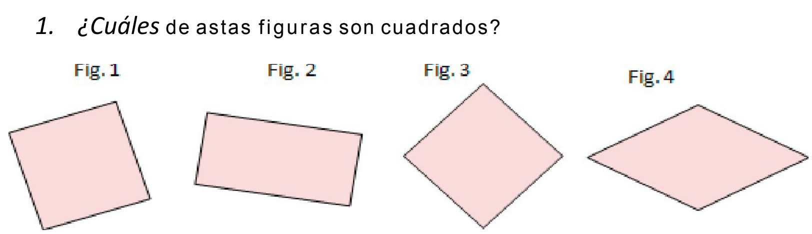
P: *en la posición en la que está la figura número cuatro es un cuadrado y en la figura uno es un rombo. O sea, ¿la figura uno no es un cuadrado?*

MP: *no*

P: *¿es un rombo nada más?*

MP: *si*

De igual manera, Juan Manuel, piensa que el cuadrado cuando no está en su posición clásica debe considerarse como rombo. Él afirma en la actividad #4 donde debe justificar las figuras que son cuadrados, que la figura #3 es rombo debido a la posición que conserva: *"el rombo es un cuadrado un poco torcido o volteado"*



-Juan Manuel considera a la figura #3 como rombo debido a su posición y no por la congruencia de sus cuatro lados-

Respecto a esto, Fischbein (2002) afirma que la representación de la figura geométrica que se tiene en mente está desprovista de cualquier cualidad sensorial (como el color), excepto propiedades espaciales. Pero mientras se opera con una figura geométrica se actúa como si no contara otra cualidad y tal vez es ésta la razón por la cual el estudiante toma la posición espacial como una característica importante.

Cuando el estudiante centra su mirada en características irrelevantes de una figura geométrica, como la posición espacial, dicha situación obedece a la formación de prototipos los cuales

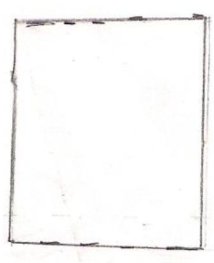
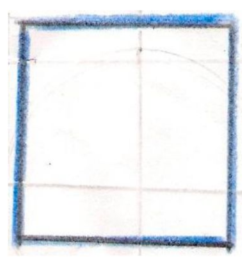
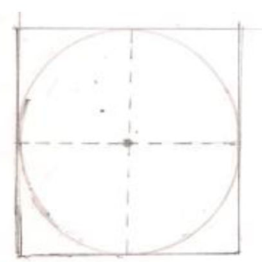
> "se derivan de distintas fuentes relacionadas con características de las representaciones gráficas utilizadas comúnmente. Por un lado, distinguimos los que surgen por la presencia de características conceptuales específicas, que responden a determinado ordenamiento de los contenidos que posiblemente atiendan al desarrollo cognitivo de los alumnos. Por esa razón se presentan figuras sencillas como cuadrados, rectángulos y triángulos acutángulos en los primeros años escolares. Por otro lado, los prototipos pueden surgir por determinadas características del dibujo irrelevantes desde el punto de vista matemático, pero que están instalados en la cultura por economía propia (por ejemplo, es más sencillo dibujar figuras con base horizontal o un rombo a partir de sus diagonales)". (Scaglia y Moriena 2005)

Los prototipos que han construido nuestros estudiantes participantes en la investigación, se hicieron evidentes en el desarrollo de la actividad #2 donde ellos tenían que dibujar cada uno de los cuadriláteros objetos de nuestro estudio, incluso el cuadrado.

Hemos encontrado que los dibujos realizados por los alumnos coinciden con las justificaciones que dieron acerca de cómo distinguir una figura, en otras palabras, la figura geométrica dibujada entra en consonancia con el discurso que se tiene de ella, aunque sea de manera equivocada.

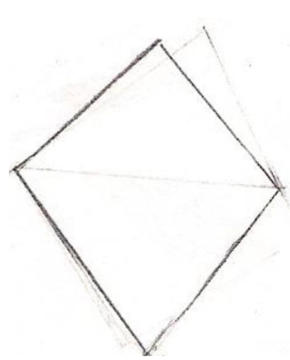
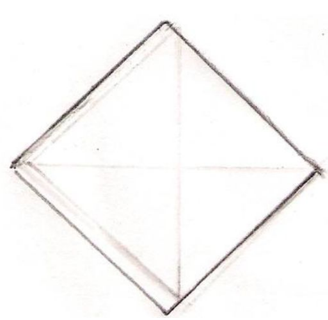
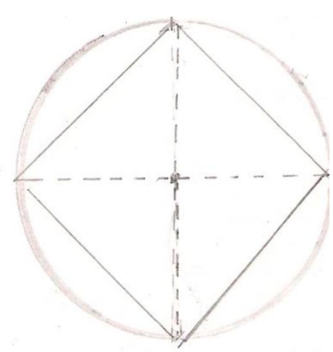
En este sentido, en cada dibujo realizado por los estudiantes predomina la posición prototípica. A continuación vamos a presentar cada una de las figuras dibujadas por los tres participantes.

EL CUADRADO:

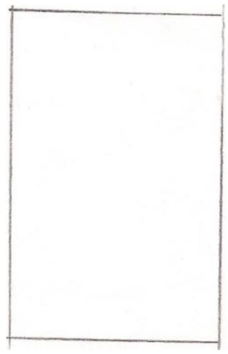
VALENTINA MARIA PAULA JUAN MANUEL

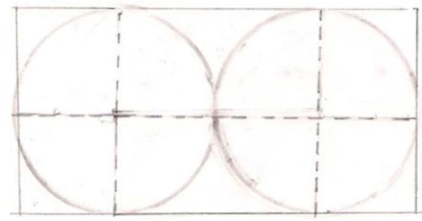
EL ROMBO:

VALENTINA MARIA PAULA JUAN MANUEL

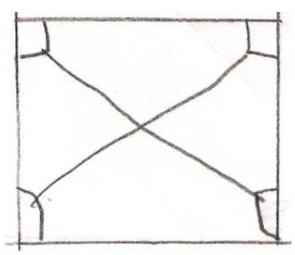
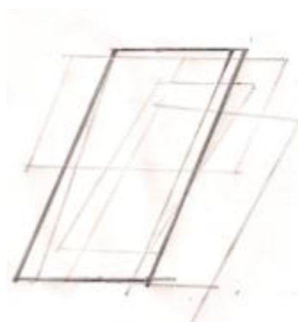
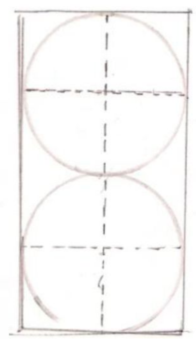
EL RECTÁNGULO:





VALENTINA MARIA PAULA JUAN MANUEL

EL PARALELOGRAMO:

VALENTINA MARIA PAULA JUAN MANUEL

Como puede observarse en los dibujos correspondientes a los cuadrados, rombos y rectángulos realizados por los estudiantes son los que clásicamente se han dado a conocer en las clases de matemáticas y libros de geometría, donde las bases del cuadrado y del rectángulo son horizontales y el rombo se encuentra ubicado de punta, además de ello las bases y alturas de los rectángulos guardan una relación de 2 a 1 (la medida de la base es el doble de la medida de la altura o viceversa).

En cuanto al paralelogramo dibujado por los participantes no hay evidencias de un prototipo, sin embargo, se puede observar que las bases de dichas figuras son horizontales. En este caso no hay evidencia de un dibujo en común debido a que los estudiantes presentaron dificultades al realizar esta figura dado que no estaban familiarizados con ella.

En La siguiente tabla se evidencian las justificaciones dadas en la entrevista por los alumnos durante el desarrollo de la actividad #2, las cuales están relacionadas con esta categoría:

VALENTINA	MARIA PAULA	JUAN MANUEL
P: en tu opinión ¿que diferencia existe entre el cuadrado y el rombo? **V:** que están de diferente manera… el rombo puede ser un cuadrado pero al revés **P:** ¿que diferencias encuentras entre los dos? **V:** que están de diferente forma… pues, de diferente posición	**P:** en tu opinión ¿qué diferencias existen entre el cuadrado y el rombo? **MP:** el rombo tiene forma de diamante, el cuadrado que es un cuadrilátero. **P:** en este caso ¿las figuras que hiciste son diferentes? (cuadrado y rombo) **MP:** si. **P:** ¿Cuál es la diferencia? **MP:** la diferencia es que ésta (rombo) tiene una posición y ésta (cuadrado) tiene otra posición. **P:** ¿Qué tuviste en cuenta para dibujar el rombo? **MP**: para dibujar el rombo yo tuve en cuenta que los lados fueran iguales y que tuviera una posición derecha **P:** ¿por qué hay tantos borrones en el espacio donde dibujaste el paralelogramo? **MP:** porque yo lo hacía muy pequeño o muy grande o en otra posición…y creía que no era **P:** el paralelogramo si lo cambio de posición ¿deja de ser paralelogramo? **MP:** no, sigue siendo paralelogramo **P:** y el cuadrado ¿si lo cambio de posición sigue siendo cuadrado? **MP:** no, pero si está en la posición del rombo, cambia. **P:** o sea ¿que ya no se llamaría cuadrado? **MP:** no, sino rombo	**P:** en tu opinión ¿Qué diferencias existen entre el cuadrado y el rombo? **JM**: ahí si no sé... porque yo los veo casi iguales, excepto que el rombo es como el cuadrado, pero torcido, como en forma de cometa

Las características espaciales evidenciadas en los alumnos con respecto a las figuras geométricas son tomadas como puntos de referencia cognitivos a la hora de identificar dichas figuras, pero éstas son el producto de la observación directa de figuras ubicadas siempre en la misma posición cuestión que entra en consonancia con la afirmación de Gutiérrez y Jaime (1996) citados por Scaglia y Moriena (2005):

> En la formación de la imagen de un concepto que tiene una persona, desempeñan un papel básico la propia experiencia y los ejemplos que se han

> visto o utilizado tanto en el contexto escolar como en el extraescolar. Con frecuencia, estos ejemplos son pocos y con alguna característica visual peculiar y se convierten en prototipos y en los únicos casos de referencia con los que el estudiante puede comparar casos nuevos.

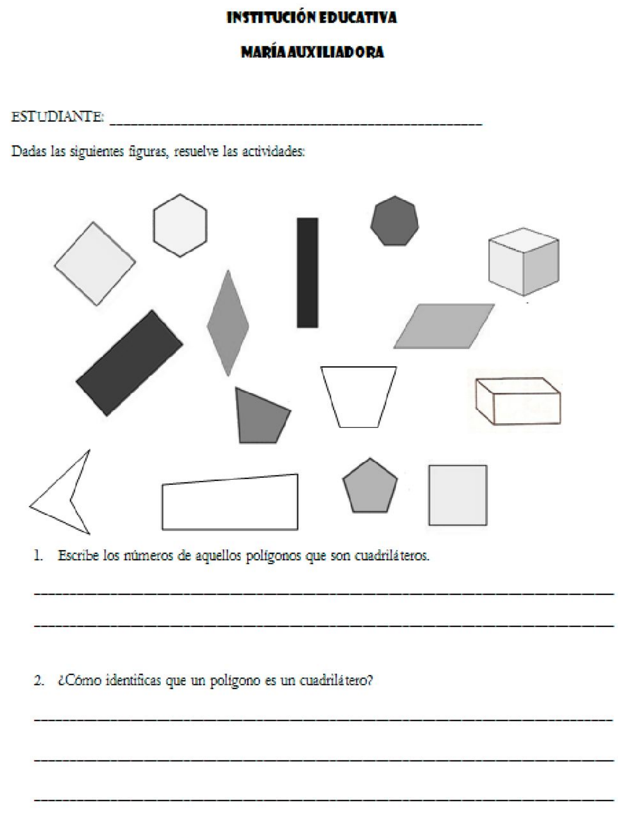
En consecuencia, la posición espacial de las figuras geométricas impide la aprehensión de las características reales que ellas tienen, pues muestran ciertos rasgos aparentes que se derivan de la percepción visual ocasionando una reducción conceptual con relación a las propiedades que las figuras poseen, por lo tanto el proceso de interpretación se encuentra viciado.

4.2 EL USO DE MEDIDAS COMO REFERENTE CONCRETO PARA COMUNICAR IDEAS ASOCIADAS A LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS.

En la transición del nivel perceptivo, en el cual se tenían en cuenta las características irrelevantes de las figuras geométricas, hacia la aprehensión discursiva, el uso de los instrumentos de medición y la estimación de las medidas favoreció en los participantes de la investigación la identificación, la comparación y la validación de algunas de las propiedades estructurales presentes en los cuadriláteros abordados.

En este sentido, los participantes hicieron uso de instrumentos de medida como la regla y el transportador para hacer mediciones y a través de ellas realizar conjeturas sobre lo que observaron.

A continuación vamos a hacer un recorrido por las diferentes actividades realizadas donde se manifiesta en los estudiantes el uso del referente métrico para ayudarse en la construcción de las relaciones intrafigurales e interfigurales de los cuadriláteros.



INSTITUCIÓN EDUCATIVA

MARÍA AUXILIADORA

ESTUDIANTE: ________________________________

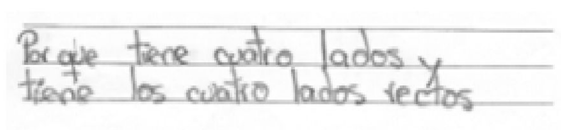
Dadas las siguientes figuras, resuelve las actividades:

1. Escribe los números de aquellos polígonos que son cuadriláteros.

2. ¿Cómo identificas que un polígono es un cuadrilátero?

Actividad #1

En la actividad #1, la cual consistía en el reconocimiento de las principales características de los cuadriláteros. Los tres alumnos resolvieron la actividad sin ningún contratiempo, con relación a ésta, cada uno de los estudiantes, justificó la forma como distinguen los cuadriláteros dentro de un grupo de figuras:



Porque tiene cuatro lados y tiene los cuatro lados rectos

Valentina

la caracteristica principal de los cuadrilateros es que tienen 4 lados asi se identifican facilmente.

María Paula

Yo identifico cuando un polígono es un cuadrilá-tero, cuando veo que el polígono tienen cuatro lados

Juan Manuel

Como se puede observar, cada uno de los participantes en primera instancia hizo alusión al número de lados de los cuadriláteros, Valentina agrega que todos los lados deben ser rectos, mientras que Juan Manuel hace referencia a los polígonos.

Pero dado que en esta actividad no encontramos información relevante, se les realizó a los estudiantes una entrevista para indagar por las relaciones interfigurales, en la cual establecieron diferencias entre los cuadriláteros presentados, sobre todo en la medida de sus lados, utilizando como herramienta principal la percepción de las medidas de las figuras.

Valentina analizando dos cuadriláteros dice lo siguiente:

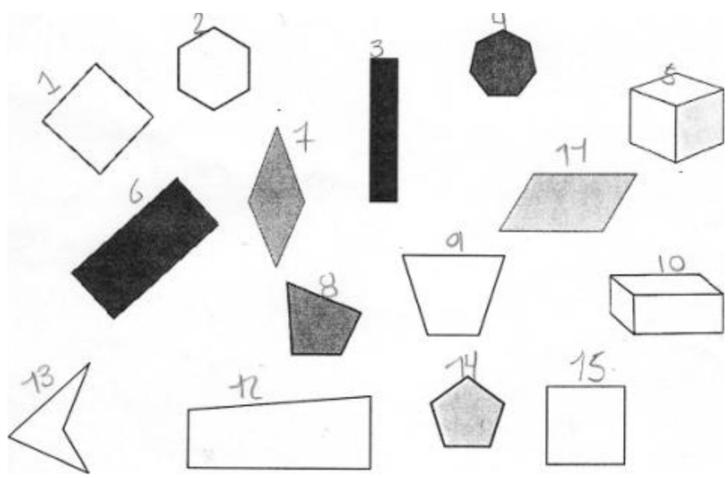
> ***P:*** *¿y todos los cuadriláteros son iguales o tienen diferencias entre sí?*
>
> ***V:*** *Son diferentes.*

__P:__ y ¿ Qué diferencias pueden tener? Por ejemplo, entre los cuadriláteros que tienes en el taller, ¿ Qué diferencias pueden tener uno del otro?

__V:__ Son de diferente forma.

__P:__ ¿En qué sentido? Explica mejor, por ejemplo, ¿qué tienen de diferente la figura 1 Y la figura 9? (Observar actividad realizada por Valentina)

__V:__ En la figura 1, los lados son iguales y en la figura 9 los lados no son iguales.



-Actividad realizada por Valentina

María Paula también tiene en cuenta la diferencia entre la medida de los lados de los cuadriláteros:

__P:__ ¿ Todos los cuadriláteros son iguales?

__MP:__ No

__P:__ ¿Por qué?

__MP:__ Porque los cuadriláteros, hay unos cuadriláteros que tienen líneas más grandes que otras y otras tienen las líneas iguales o diferentes posiciones.

Simultáneamente, Juan Manuel también da cuenta de esta característica:

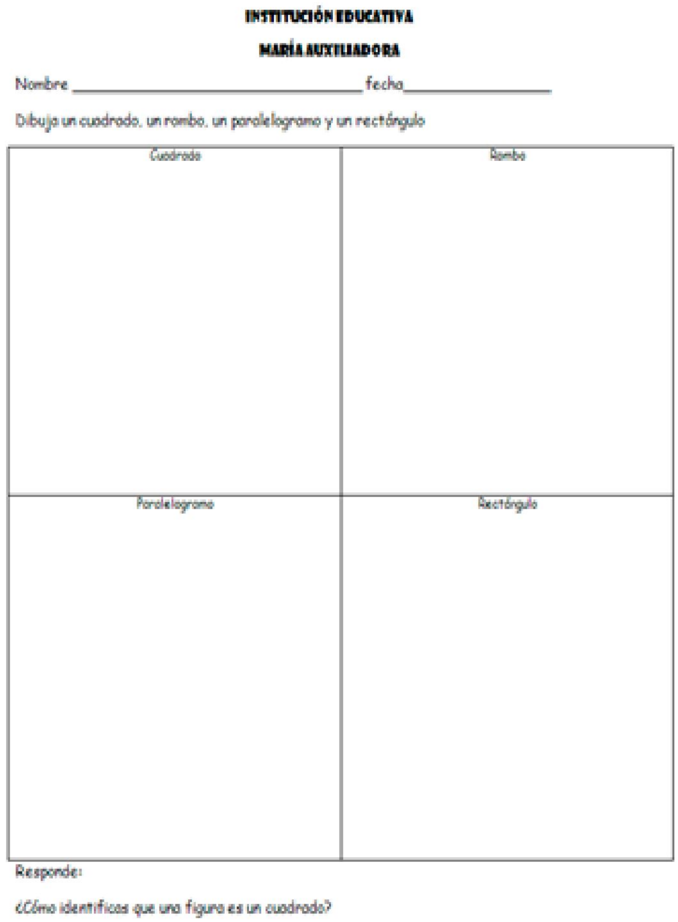
> ***P:*** *Para ti ¿ Qué son los cuadriláteros?*
>
> ***JM:*** *Los cuadriláteros son las figuras que tienen cuatro lados. Pero no importa si los lados son diferentes.*

Por tanto de acuerdo a la actividad #1 y a la entrevista se evidencia que los tres participantes extraen de las figuras los dos tipos de variaciones visuales que conforman los elementos constitutivos de los cuadriláteros, haciendo énfasis en la forma de los lados (forma rectilínea) y la medida de ellos.

En la actividad #2, la cual consistió en dibujar un cuadrado, un rectángulo, un rombo y un paralelogramo, en unos espacios predeterminados, con el objetivo de analizar la representación gráfica que hacen los estudiantes de los cuadriláteros asociándolos con el nombre que ellos reciben.

Para ello se les dio libertad de usar instrumentos sin aclarar cuál utilizar para cada figura.

Valentina se ayudó de la escuadra para la realización del cuadrado, pero el uso de esta herramienta fue similar al de los griegos en la antigüedad, quienes se valían de una regla no graduada para que las líneas de una figura quedaran rectas; por tanto, no se percató de las propiedades al interior de la figura, valiéndose de su percepción visual para concluir que el dibujo correspondía a un cuadrado, el cual fue dibujado de la siguiente forma:


INSTITUCIÓN EDUCATIVA

MARÍA AUXILIADORA

Nombre ____________________ fecha____________

Dibuja un cuadrado, un rombo, un paralelogramo y un rectángulo

Cuadrado	Rombo
Paralelogramo	Rectángulo

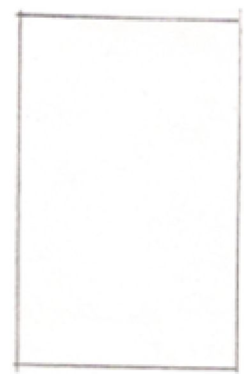
Responde:

¿Cómo identificas que una figura es un cuadrado?

Actividad #2

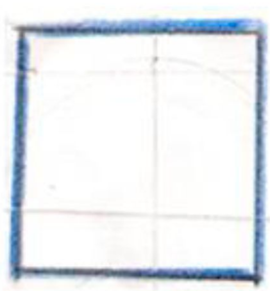
Valentina dibujando el cuadrado

Cuadrado dibujado por valentina



Rectángulo dibujado por Valentina

El rectángulo dibujado por Valentina fue realizado con acierto, ya que en esta ocasión sí trazó ángulos de 90°, cuestión que nos permite inferir que ésta es una figura que se torna familiar para ella. Es importante anotar que el trazado de los ángulos no obedece a la utilización de un instrumento geométrico, sino a la manera como ella lo percibe.



Cuadrado dibujado por María Paula

En la elaboración del cuadrado, María Paula, utilizó la regla y el compás. Este último fue utilizado como unidad de medida para cerciorarse de que los lados fueran ¡guales, pero no se percató de medir los ángulos para garantizar la perpendicularidad entre los lados, sin embargo, el dibujo denota una precisión en la medida de sus ángulos.

Durante la entrevista, María Paula resalta la importancia de la utilización de los instrumentos de medida en la construcción de figuras geométricas:

P: *¿qué instrumentos utilizaste para realizarlos?*

MP: *la regla y el compás*

P: *y ¿para qué utilizaste el compás?*

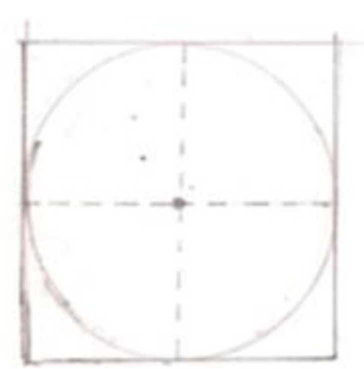
MP: *porque el compás es más preciso para trazar los lados iguales*

P: *¿la regla solamente la utilizaste para trazar las líneas o también tenía otras funciones?*

MP: *no, para trazar las líneas.*

En cuanto a las construcciones creadas por Juan Manuel tienen la particularidad de ser realizadas con regla, transportador y compás, utilizando la circunferencia completa como referencia, además, verificando la medida de los ángulos.

Para el cuadrado dibujó una circunferencia, trazó dos diámetros perpendiculares y por último circunscribió el cuadrado trazando tangentes a los extremos de los diámetros perpendiculares; razón que evidencia la construcción de una estrategia para garantizar algunas propiedades estructurales.



Cuadrado dibujado por Juan Manuel

Durante la entrevista realiza la explicación acerca de su construcción:

P: *Juan Manuel, ¿por qué crees que el dibujo que hiciste es un cuadrado?*

JM: *porque los cuatro lados miden igual, al igual que los ángulos*

P: *¿que instrumentos utilizaste para realizar los dibujos?*

JM: *el compás y el lado recto del transportador porque no tenía regla*

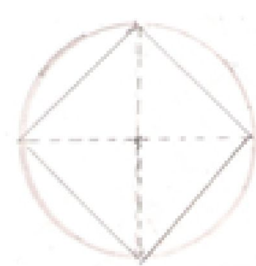
P: *¿tú mediste con el transportador los ángulos del cuadrado?*

JM: *si*

P: *¿Cuánto miden los ángulos del cuadrado?*

JM: *90°*

En la construcción del rombo, Juan Manuel trazó una circunferencia con sus diámetros perpendiculares y unió uno a uno los extremos de estos, formando un cuadrado en posición no estereotipada, pero el gráfico pretende mostrar un rombo y para este caso, es una gráfica estereotipada.



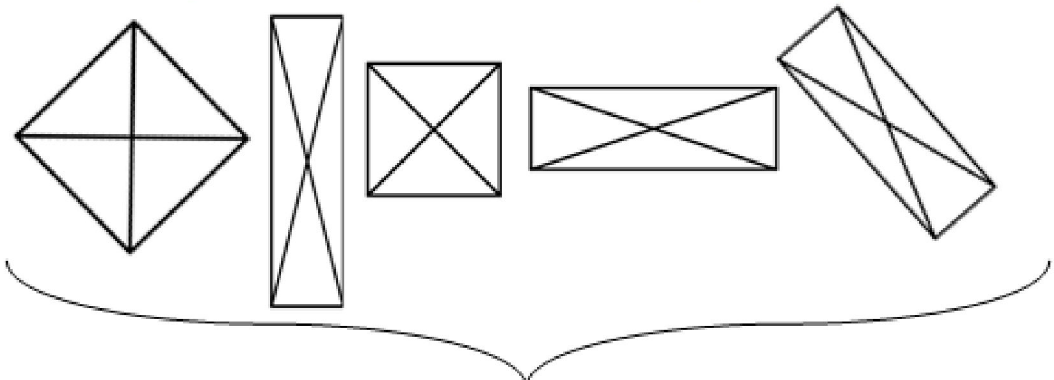
Rombo dibujado por Juan Manuel

De acuerdo al trabajo realizado por los estudiantes frente a estas construcciones, se pone en evidencia que los instrumentos de medir, regla y transportador, se constituyeron en mediadores de propiedades conceptuales intrafigurales. Por consiguiente, dichos instrumentos son referentes concretos para una primera aproximación hacia las relaciones estructurales en las figuras geométricas.

En la actividad #6 se abordaron las diagonales de estos tres tipos de figuras con el fin de observar la construcción de algunas relaciones intrafigurales que giran en torno a ellas. En ésta el predominio de lo métrico fue evidente puesto que los estudiantes, para establecer relaciones intrafigurales en los tres tipos de cuadriláteros, utilizaron la regla y el transportador para medir las longitudes de las diagonales y los ángulos que se formaban en la intersección de éstas.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARÍA AUXILIADORA

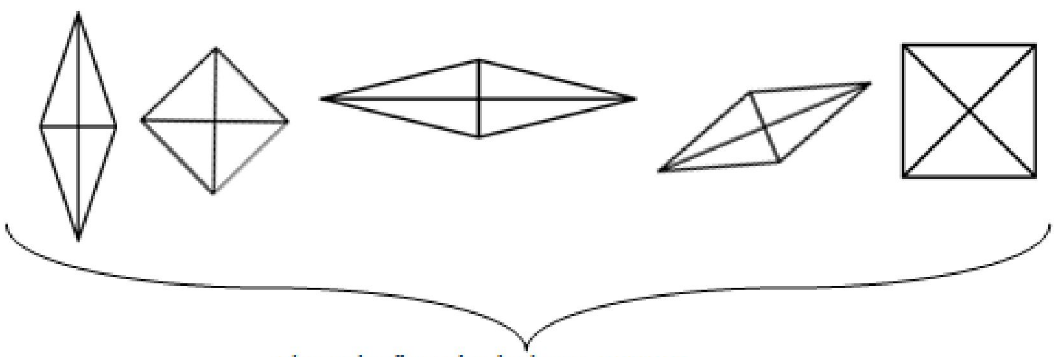
ESTUDIANTE: ____



Observe las diagonales de algunos *RECTÁNGULOS*

1. ¿Qué características tienen las diagonales de los rectángulos?

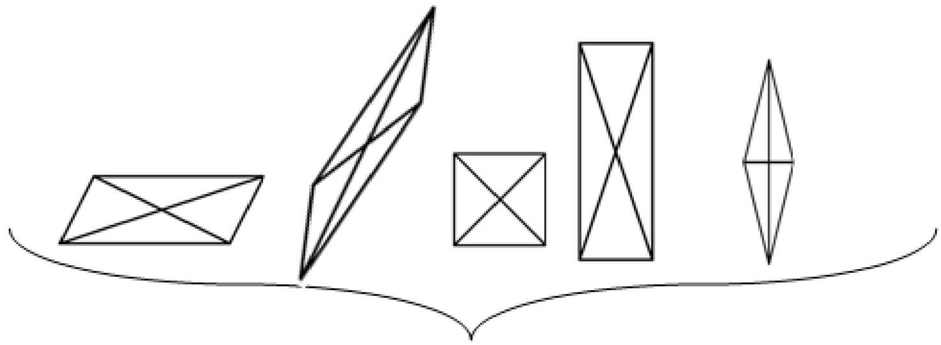
____
____
____
____



Observe las diagonales de algunos *ROMBOS*

2. ¿Cuáles son las características de las diagonales de los rombos?

____
____
____
____



Observe las diagonales de algunos ***PARALELOGRAMOS***

3. ¿Qué características tienen las diagonales de los rectángulos?

____
____
____
____
____

-Actividad #6-

La siguiente tabla muestra las características de las diagonales que los estudiantes determinaron para los rectángulos

	VALENTINA	**MARÍA PAULA**	**JUAN MANUEL**
características de las diagonales de los **RECTÁNGULOS**	"Que todas sus diagonales midan igual. Que se formen triángulos por dentro de las diagonales. Forman 12 ángulos y 12 vértices y se cruzan por la mitad"	"Que las diagonales miden igual. Se forman 4 triángulos. Se forman 12 ángulos. Se cruzan sus líneas. Desde el centro hasta donde sale la diagonal mide lo mismo."	"No son diagonales paralelas. Todas las diagonales miden igual. Al cruzarse las líneas se forman cuatro triángulos. Las diagonales siempre se juntan en un mismo punto."

-Características de las diagonales de los rectángulos-

Como se puede observar en la tabla anterior, los tres participantes afirman que las diagonales de un rectángulo son iguales, la cual es una de las caractéristicas principales de ellas.

Otra de las caracteríticas que capataron es la de bisección de cada una de las diagonales, aunque todos lo expresaron de una forma distinta:

Valentina: "se cruzan por la mitad".

María Paula: "Desde el centro hasta donde sale la diagonal mide lo mismo."

Juan Manuel: "Las diagonales siempre se juntan en un mismo punto."

La forma como expresa Juan Manuel es la menos clara y tuvimos que pedirle que explicara de nuevo a lo que respondió: *Aporque siempre se encuentran o se chocan en la mitad de las diagonales".*

Los estudiantes, al abordar las particularidades de las diagonales de los rombos, rescataron las siguientes:

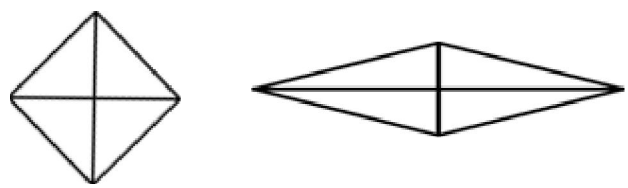
	VALENTINA	MARÍA PAULA	JUAN MANUEL
Características de las diagonales de los **ROMBOS**	"Que una de sus diagonales midan igual o que todas sus diagonales midan igual. Que tenga 12 ángulos, 12 vértices	"Donde se cruzan las diagonales sus ángulos miden 90°. Su distancia desde el punto de encuentro hasta el ángulo de donde sale mide igual de la misma diagonal.	"en algunos rombos, una diagonal es más pequeña que la otra. Al cruzarse las diagonales se forman triángulos. Las diagonales siempre parten de un vértice y se juntan en el vértice opuesto."

-Características de las diagonales de los rombo

Valentina no establece una relación generalizada para las diagonales de los rombos puesto que habla de la igualdad de las diagonales cuando ésta se trata de un cuadrado y de que una sola de ellas mida igual cuando se trata del rombo como tal. Es importante aclarar que cuando hace alusión a que las "diagonales midan igual" se refiere a la bisección de cada una de sus diagonales cuestión que podemos observar a través de la entrevista:

> ***P:*** *Explícame qué quieres decir con "que hay unas diagonales que miden igual y otras que miden diferente".*

> ***V:*** *ehhh... porque aquí en esta figura (señalando la figura número 2 de los rombos), yo medí con la regla y aquí me dio lo mismo. Y aquí podemos ver en esta figura (señalando el rombo número 3) una me dio 1.5 cm. Y aquí en esta otra me dio 5.5 cm.*



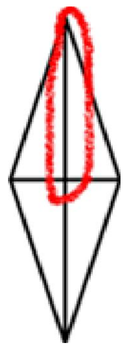
Rorribo#2 Rombo#3

Dicha característica mencionada por nuestra participante es necesaria más no suficiente, puesto que ésta es común para todas las figuras analizadas. Por lo tanto, Valentina no logra identificar la perpendicularidad que existe entre las diagonales del rombo.

Juan Manuel tampoco logra establecer las relaciones que son propias de las diagonales de un rombo, puesto que las características que menciona, son comunes a las diagonales de cualquier polígono.

La única participante que identifica la perpendicularidad de las diagonales del rombo es María Paula, además establece la bisección de estas; característica que hereda de los paralelogramos. Ella lo expresa de una manera muy particular, *"Su distancia desde el punto de encuentro hasta el ángulo de donde sale mide igual de la misma diagonal'.* Durante la sesión de profundidad realiza la aclaración acerca de lo que quiso decir con la oración antes citada:

> ***P:*** *Explica cuando dices que una de las características de las diagonales del rombo es que la "distancia desde el punto de encuentro hasta el ángulo de donde sale, mide igual de la misma diagonal"*
>
> ***MP:*** *Porque aquí vemos (señalando el rombo #1) que desde el centro de la figura hasta acá mide lo mismo (observar rombo #1) y si hacemos el mismo proceso midiéndolo (señalando la otra diagonal), vamos que todos miden igual.*



María Paula seríala el punto medio de la diagonal mayor hasta ell vértice

-Rombo

P: *¿Puedes explicarlo más claramente?*

MP: *Desde el centro del rombo hasta el lado opuesto de él, viendo sólo una diagonal, mide lo mismo, y lo mismo ocurre con la otra.*

Sólo nos resta decir que lo métrico se halla íntimamente ligado a lo espacial y por ende no es extraño que los participantes hayan acudido a la medición como una estrategia para determinar nuevas propiedades estructurales. En este sentido, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN 2003), afirman que cuando las propiedades de los objetos ya se deben no sólo a sus relaciones con los demás, sino también a sus medidas y a las relaciones entre ellas la percepción geométrica se complejiza.

Los hallazgos realizados por los estudiantes a partir de la medición fueron posibles gracias a la doble naturaleza de las figuras geométricas: conceptual y figural, es decir, cada figura está controlada por una definición que es impuesta por o derivada de un cierto sistema axiomático (Fischbein 2002, trad.), de allí que la definición que los participantes dieron de los rectángulos, paralelogramos y rombos está asociada con el constructo matemático correspondiente.

Sin embargo es preciso señalar, que la medición siempre implica la presencia de errores bien sea del instrumento o de quien lo manipula, por tanto, cualquier argumento basado en mediciones tendrá una componente de aproximación. (Chamorro, 2006).

De acuerdo a lo anterior, se debe tener claro que las mediciones no constituyen demostraciones de una propiedad general, pero sí pueden ser un punto de partida para la elaboración de una afirmación.

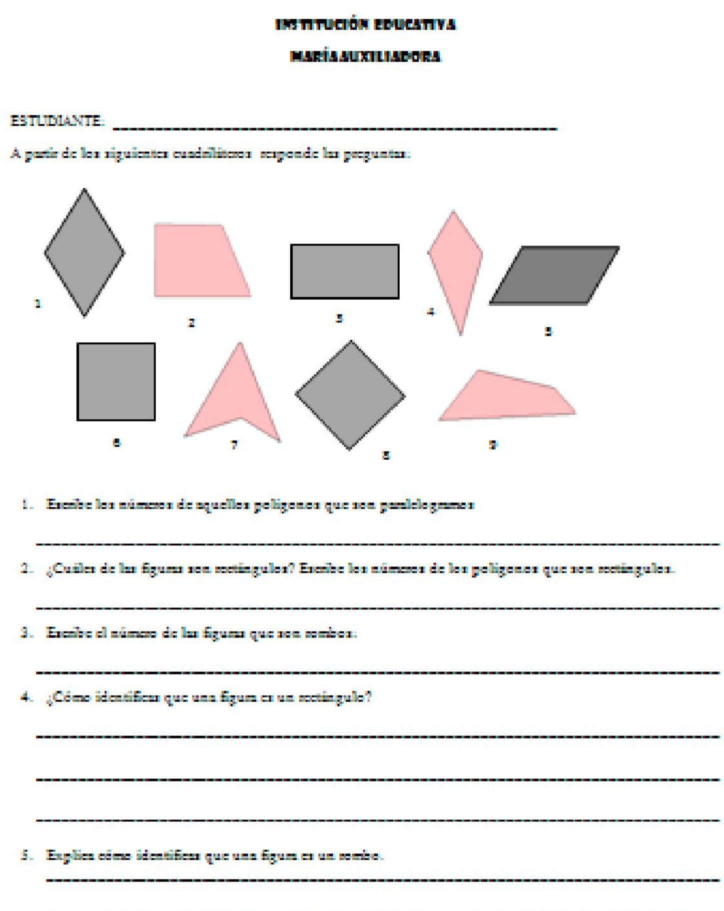
4.3 DE LO PERCEPTIVO A LO CONCEPTUAL

> *"Adquirir un concepto significa, adquirir un mecanismo de construcción e identificación mediante el cual sería posible identificar o construir todos los ejemplos del concepto, tal como éste está concebido por la comunidad matemática*." (Vinner y Hershkowitz, 1991)

La conceptualización en la geometría desde un punto de vista escolar tradicionalmente se ha entendido como el establecimiento de una correspondencia entre definiciones formales o nombres y representaciones gráficas.

Sin embargo, conceptualizar va mucho más allá, puesto que, ello implica un proceso en el que la visualización y la exploración de propiedades juegan un papel esencial a la hora de identificar aquello que realmente está relacionado con el objeto matemático en sí.

Durante el proceso de desarrollo de las actividades se constató que los participantes, fueron desarrollando gradualmente la coordinación entre las figuras geométricas y sus propiedades estructurales. Se hizo evidente cómo fueron cambiando diferentes concepciones que poseían como definiciones personales para el reconocimiento de los cuadrilateros: rectángulo, rombo y paralelogramo.



INSTITUCIÓN EDUCATIVA

MARÍA AUXILIADORA

ESTUDIANTE: ____________________

A partir de los siguientes cuadriláteros responde las preguntas:

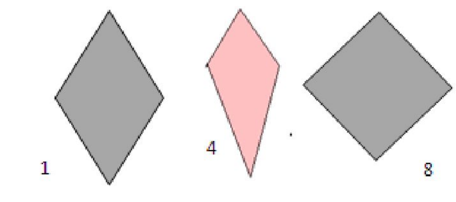
1. Escribe los números de aquellos polígonos que son paralelogramos
____
2. ¿Cuáles de las figuras son rectángulos? Escribe los números de los polígonos que son rectángulos.
____
3. Escribe el número de las figuras que son rombos:
____
4. ¿Cómo identificas que una figura es un rectángulo?
____
5. Explica cómo identificas que una figura es un rombo.
____

Actividad #3

Los cambios comenzaron a darse a partir la actividad

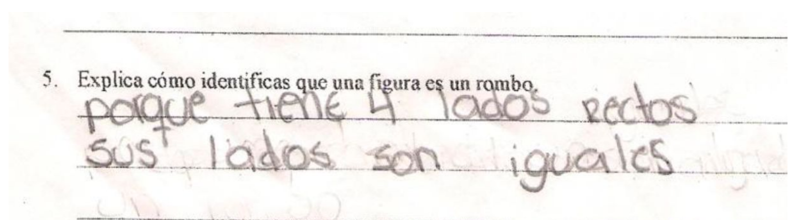
#3, la cual estaba conformada por nueve cuadriláteros distintos y los estudiantes debían escribir el número de aquellos polígonos que eran paralelogramos, rectángulos y rombos. Además, debían dar cuenta de la forma cómo identificaban que una figura era paralelogramo, rectángulo y rombo.

En esta actividad, Valentina, Maria Paula y Juan Manuel, al referirsen a los rombos todos ellos coincidieron en indicar la figura número uno, cuatro y ocho.



Como se puede ver, dichas figuras se encuentran en "posición de diamante", la que generalmente es presentada a los estudiantes, bien sea por parte de los docentes o en los libros de texto.. Es evidente cómo al responder la pregunta no tuvieron en cuenta su caracteristica conceptual más importante, la que hace referencia a la igualdad de sus lados, dejando de lado otras figuras, como la número seis, que corresponde a un cuadrado, que lógicamente es un rombo.

En otra de las preguntas, donde se solicitaba que explicaran las características que permiten identificar a una figura como rombo, se encontró que Valentina identifica a los rombos desde la congruencia de sus cuatro lados, pero esto no se evidencia al señalar la figura número cuatro, ya que ésta no tiene los lados


5. Explica cómo identificas que una figura es un rombo.
porque tiene 4 lados rectos
sus lados son iguales

iguales. Sin embargo, durante la entrevista, aclara que el cuadrilátero número cuatro no es rombo:

> ***P:*** *¿Por qué señalaste la figura número cuatro como rombo? ¿Qué características deben tener los rombos?*
>
> ***V:*** *que tengan cuatro lados iguales y rectos*
>
> ***P:*** *y ¿esta figura cumple con esas características?*
>
> ***V:*** *no*
>
> ***P:*** *entonces ¿la figura cuatro es un rombo?*
>
> ***V:*** *no*

Con María Paula ocurrió algo similar, ella dio una definición, bastante personal, de rombo, que no es correcta desde un punto de vista matemático, pero, tiene estrecha relación con los polígonos señalados, ya que expresa que debe tener *"cuatros lados rectos y que tenga la forma de un diamante"* y, es por ello, que tal vez no señaló la figura número seis, que es un cuadrado, ya que no cumple con la segunda parte de la definición planteada por ella.

Durante la entrevista, María Paula hace un cambio en la concepción que tiene de las características de los rombos, ya que desliga completamente la posición espacial que ellos puedan tener; para centrar la atención en sus lados y así explicar la principal característica de un rombo, que tenga sus cuatro lados iguales:

> ***P:*** *¿por qué señalaste la figura número cuatro como rombo?*

MP: *porque yo pensaba que un rombo tenía que tener forma de diamante*

P: *¿La figura número cuatro es un rombo?*

MP: *no, no es un rombo, porque sus lados no miden igual.*

Cuando se da al estudiante la oportunidad de reorganizar sus ideas, ellos mismos toman conciencia de sus errores y en este sentido el docente juega un papel muy importante puesto que debe lograr que las respuestas de los estudiantes sean confrontadas con las soluciones, sobre todo en aquellos casos donde no es posible aceptar, razonablemente, las respuestas como soluciones. (MEN, 1998)

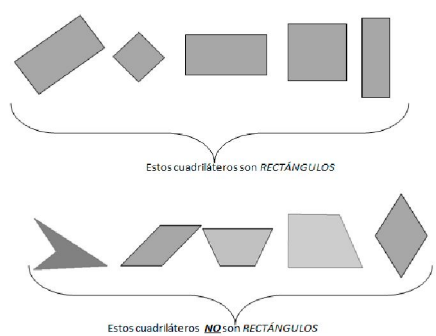
Durante la actividad #5[4], los participantes establecieron las relaciones más importantes respecto a las figuras objeto de estudio, en la cual se muestra la evolución de las definiciones brindadas por los estudiantes en relación a los cuadriláteros abordados en este trabajo.

Para cada uno de los cuadriláteros se presentará una tabla que recopila las definiciones dadas por los niños en las primeras actividades y la manera como los definen en la actividad #5.

[4] Consistió en proporcionarles a los estudiantes tres bloques de figuras. En el primer bloque, se encontraban los cuadriláteros que son rectángulos. En el segundo los que son rombos y en el tercero los que son paralelogramos.

Cada bloque estaba compuesto por dos filas de cinco figuras. En la primera fila se mostraban los cuadriláteros que cumplen con las características para pertenecer al grupo, mientras que la segunda, a pesar de tener cuatro lados, no cumplían con todas las cualidades para pertenecer a éste.

RECTANGULO		
Estudiante	**Características de la figura establecidas por los estudiantes al *INICIO* de la investigación**	**Características de la figura establecidas por los estudiantes durante la actividad #5**
VALENTINA	Tiene dos lados iguales y los otros dos no	Los rectángulos tienen las mismas características de un cuadrado, o sea. que pueden medir igual o que dos de sus lados midan igual
MARÍA PALLA	Debe tener cuatro lados, cuatro vértices, cuatro ángulos, pero dos de sus lados deben ser de diferente medida que los otros dos.	Deben tener cuatro lados rectos, deben tener cuatro vértices, cuatro ángulos, deben medir 90°
JUAN MANUEL	Que dos lados sean iguales y los otros dos de distinta medida. Sus ángulos deben ser iguales.	Que tengan cuatro lados, que sus ángulos opuestos sean iguales, que sus ángulos midan 90* y que sus lineas sean rectas.



Como se puede observar, los tres estudiantes tenían la idea de que los rectángulos debían tener los lados iguales dos a dos, pero no todos sus lados iguales, sin embargo, al momento de presentarles la actividad #5, donde el cuadrado se incorpora en el de los rectángulos, María Paula se asombró al observar que el cuadrado estaba dentro de éste, a partir de ahí, ella establece la principal propiedad de los rectángulos la cual revela durante la entrevista:

P: ¿cuál crees que es la principal característica de los rectángulos?

MP: que sus ángulos tienen que medir noventa grados

Valentina, al observar esta particularidad explica la relación que existe entre el cuadrado y el rectángulo aludiendo a este último como una figura con sus cuatro lados congruentes o iguales dos a dos. Aunque se le olvidó mencionar cuál es la medida de los ángulos, ella lo tuvo presente al momento de la entrevista:

> ***P:*** *ahora en los rectángulos tú respondiste que tienen las mismas características de un cuadrado, ¿cuales son las características que tienen los cuadrados?*
>
> ***V:*** *que los lados sean iguales, que midan noventa grados*
>
> ***P:*** *¿quien tiene que medir noventa grados?*
>
> ***V:*** *los ángulos del cuadrado.*

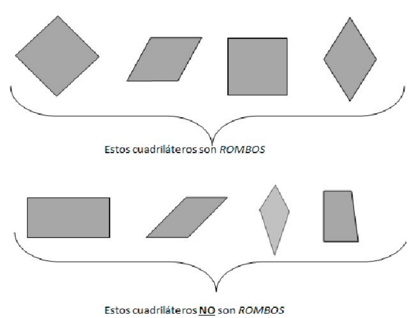
Juan Manuel, tiene en cuenta la medida de los ángulos del rectángulo, agregando, que sus lados opuestos deben ser iguales, cuestión que no desvirtúa que también pueda tener sus cuatro lados iguales como ocurre con el cuadrado. En la entrevista, ratifica que la principal característica de esta figura geométrica radica en la congruencia de sus ángulos:

> ***P:*** *¿cuál crees que es la principal característica que tienen los rectángulos?*
>
> ***JM:*** *que todos sus ángulos midan noventa grados.*

En el grupo de los rombos, todos nuestros participantes lo reconocían por su posición espacial: *"cuadrado pero al revés", "en forma de diamante", "un poco torcido o volteado".*

ROMBO		
Estudiante	**Características de la figura establecidas por los estudiantes al *INICIO* de la investigación**	**Características de la figura establecidas por los estudiantes durante la actividad #5**
VALENTINA	Es como un cuadrado pero al revés y tiene cuatro líneas iguales.	Que tengan sus lados rectos, que sus lados midan igual, que se pueden colocar de diferente forma y la figura (rombo) no cambia. Que tenga cuatro lados.
MARÍA PAULA	Un rombo debe tener cuatro lados, cuatro vértices y siempre está en posición de diamante	Que sus lados midan igual, que sus lados sean rectos, que sus líneas sean paralelas.
JUANI MANUEL	Es un cuadrado un poco torcido o volteado y tiene sus cuatro lados iguales.	Que tengan cuatro lados, que el ángulo opuesto de todos los lados sea igual, que sus lados sean iguales, que sus líneas sean rectas.

Durante la actividad #5 Valentina, María Paula y Juan Manuel se desprendieron fácilmente de la posición espacial como característica definitoria de un rombo, para referirse a él desde su propiedad principal: *"los rombos tienen sus lados iguales".*



Es así como María Paula manifiesta durante la entrevista un cambio en la manera como distingue el rombo:

P: *en las entrevistas anteriores decías que un rombo se distingue por tener forma de diamante ¿ahora qué piensas cuando miras en la actividad de rombos que un cuadrado también puede ser un rombo?*

MP: *aquí... yo decía que los rombos tenían forma de diamante. Pero ya me di cuenta que los rombos tienen que tener dos pares de líneas paralelas y sus lados tienen que medir igual.*

Juan Manuel establece una característica adicional a los rombos, la cual es heredada de los paralelogramos, "los ángulos opuestos son iguales", además, de tener sus lados iguales.

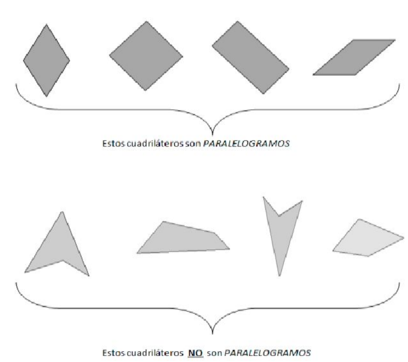
Al construir esta nueva relación, indica que su capacidad de abstraer características de una figura geométrica está aumentando lo que conduce a considerar la figura como un ente matemático.

Con respecto a los paralelogramos Valentina y María Paula en las primeras actividades de la investigación hicieron referencia al paralelismo de sus lados, pero sin especificar cuantos pares de lados deben ser paralelos, asunto que permitiría afirmar que todo trapecio es paralelogramo. Mientras que, Juan Manuel, sólo manifestó que esta figura debe tener sus lados y ángulos iguales, cuestión que sólo cumplen los cuadrados.

P A R A L E L O G R A M O		
Estudiante	**Características de la figura establecidas per les estudiantes al *INICIO* de la investigación**	**Características de la figura establecidas por los estudiantes durante la actividad #5**
VALENTINA	Está hecho con líneas paralelas	Que esté hecho con líneas paralelas, que dos de sus lados midan igual
MARÍA PAULA	Que tengan cuatro lados, cuatro vértices y que tengan dos líneas paralelas.	Que sus líneas sean paralelas, que tengan cuatro lados, que sus lados sean rectos.
JUANI MANUEL	Sus lados son iguales y lo mismo digo de sus ángulos.	Que tengan cuatro lados, que sus líneas sean rectas, que sus ángulos opuestos de todos los lados sean iguales, que sus lados opuestos sean iguales

Como Valentina expresó durante la actividad #5 que dos de los lados de los paralelogramos miden igual, en la entrevista se indagó por este aspecto, realizando la comparación con aquellas figuras que no eran paralelogramos y este fue el resultado:

P: *en la actividad de paralelogramos ¿por qué crees que estas figuras no son paralelogramos?*



V: *porque... los lados no miden igual*

P: *¿por qué otra razón no son*

paralelogramos? ...En los paralelogramos que tienes acá ¿los lados miden igual?

V: *este no (señalando el paralelogramo más general)*

P: *¿entonces es importante que en los paralelogramos todos lados midan igual?*

V: *no*

P: *¿Cuál es la diferencia entre los paralelogramos y aquellos que no lo son?*

V: *ehhh. Porque tienen líneas paralelas.*

Respecto a María Paula, ella enuncia algunos de los cuadriláteros que son paralelogramos y con esto da indicios de la construcción de algunas relaciones interfigurales:

P: *¿cuales de estas figuras están dentro de los paralelogramos?*

MP: *los cuadrados, los rectángulos, los rombos*

Por consiguiente, nuestra participante clasifica las figuras según el paralelismo donde identifica que las tres figuras mencionadas se encuentran dentro del grupo de paralelogramos.

Juan Manuel, quien consideraba que los lados y los ángulos del paralelogramo eran iguales, teoría que sólo es válida para los cuadrados, al momento de realizar la actividad #5, ofrece una definición del paralelogramo en la cual no hace mención al paralelismo de sus lados, pero, la idea que expresa es suficiente para definirlo como tal: "Que tengan cuatro lados, que sus líneas sean rectas, que sus ángulos opuestos de todos los lados sean iguales, que sus lados opuestos sean iguales".

Dicha definición entra en concordancia con un teorema[5] y un corolario[6] clásicos de la geometría relacionados con el paralelogramo.

La manera como los sujetos de la investigación fueron formalizando sus conocimiento acerca de los cuadriláteros no ocurrió de manera inmediata, sino que se fue dando a través de las distintas formas de representación de las figuras geométricas presentadas en las actividades planteadas y la interacción de éstas, con los saberes previos de los estudiantes, en particular, con las representaciones subjetivas de ellos.

Esto permitió, que la construcción de relaciones intrafigurales e interfigurales en los cuadriláteros se configuraran, dejando de lado las características irrelevantes propias de meros referentes perceptivos, para dar paso a la acción cognitiva que generó la asociación entre la figura geométrica como tal y sus relaciones estructurales, que en palabras de Duval (1999) es denominada como la coordinación entre la figura geométrica y el discurso matemático.

[5] El teorema dice así: si un cuadrilátero tiene sus lados opuestos iguales, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
[6] El corolario dice así: Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- En un primer momento, se evidenció en los alumnos que las características espaciales, con respecto a las figuras geométricas rectángulo, rombo y paralelogramo, fueron tomadas como puntos de referencia cognitivos a la hora de identificar sus propiedades estructurales.
- En la transición del nivel perceptivo, en el cual se tenían en cuenta las características irrelevantes de las figuras geométricas, hacia la aprehensión discursiva, el uso de los instrumentos de medida favoreció en los participantes la identificación, la comparación y la validación de algunas de las propiedades estructurales presentes en los cuadriláteros abordados.
- En la transición de lo subjetivo a una aproximación más formal desde el punto de vista matemático de los cuadriláteros en los sujetos, se dio a través de las distintas formas de representación de las figuras geométricas asociadas a las actividades planteadas y la comparación con sus saberes previos.

  Esto permitió que los estudiantes dejaran de lado las caracteristicas irrelevantes de las figuras para dar paso a la acción cognitiva que generó la asociación entre la figura geométrica como tal y sus relaciones estructurales.

- Esta investigación establece algunos criterios que ayudarán a los docentes de matemáticas a repensar las actividades que proponen a sus alumnos puesto que, en ésta se evidencia la manera como los estudiantes construyen relaciones en las figuras geométricas.

En este sentido, se hace necesario que las definiciones de los conceptos geométricos surjan a partir de las experiencias de los estudiantes, en donde la visualización, el razonamiento y el tratamiento de las figuras, contribuyan a la construcción, comparación y clasificación de las figuras acuerdo a sus propiedades relevantes.

REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS

ACOSTA, J. (1996). Una estrategia para la enseñanza de la geometría en educación básica secundaria. Tesis de maestría. Universidad de Antioquia, Medellín Colombia

BEDOYA J. et al (2008). Situaciones problema para la enseñanza y el aprendizaje de las relaciones intra e inter figurales en los triángulos. Tesis de Pregrado. Universidad de Antioquia, Medellín Colombia.

DE VILLIERS, M. (1994), The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. For the Learning of Mathematics, *Vol.* 14, No.1, p.11- 18.

CHAMORRO, M. C. (2006). Didáctica de las Matemáticas para Primaria. Madrid: Pearson Prentice Hall.

CLIMENT, N. & CARRILLO, J. (s. f.). Proyecto "mete" (mathematics education traditions of Europe): polígonos en primaria. [Versión electrónica] Universidad de Huelva.

DUVAL, R. (1999). Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Bogotá: PeterLang S. A. Editions,

FISCHBEIN, E. (2002, trad.). La teoría de los conceptos figurales. [Versión Electrónica] en: http://www.uaq.mx/matematicas/vlarios/cursos/tem-txt31.pdf.

GUTIÉRREZ, A. (1998). Tendencias actuales en geometría y visualización. [Versión Electrónica]

JAIME, A., CHAPA, F., & GUTIÉRREZ, A. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. [Versión Electrónica] Valencia: Universidad de Valencia.

JARAMILLO, D. (2003). (Re) Constituigáo do ideário de futuros professores de matemática num contexto de investigagáo sobre a prática pedagógica. Tesis de doctorado. Universidade Estadual de Campinas. Facultade de educagáo. Sáo Paulo.

JARAMILLO, V. (1986). Elementos de Geometría Plana. Medellín. Fondo Editorial Universidad Eafit.

MARTÍNEZ, C. (julio 2006). El método estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. En pensamiento y gestión (Barranquilla).No 20. P. 165-193

MEN. (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Bogotá: Magisterio.

MEN. (2003). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá: Magisterio.

MESA, O. (2000). Estrategias de intervención en la iniciación de la geometría en los primeros tres grados de la educación básica primaria. Trabajo de investigación. Universidad de Antioquia. Facultad de educación. Centro de investigaciones, Medellín

SCAGLIA, S. & MORIENA, S. (2005). Prototipos y Estereotipos en Geometría. [Versión Electrónica] México: Santillana.

SCAGLIA, S. y RENZULLI F. (2006). Clasificación de cuadriláteros en estudiantes de egb3 **y** futuros profesores de nivel inicial [Versión Electrónica]

TORREGROSA, G., QUESADA, H. (2007). Coordinación de Procesos Cognitivos en Geometría. [Versión Electrónica] Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10(2), 275-300.

VASCO, C. (1994).Un Nuevo Enfoque para la enseñanza de la Matemática. Serie Pedagogía y Currículo. Volumen II. MEN.

ANEXOS

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES

LICENCIATURA EN EDUCACION BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Caldas, 27 de mayo de 2009

Señores Padres de Familia
De la estudiante Valentina Castaño:

Cordial saludo:

En la clase de matemáticas se está desarrollando el proyecto de investigación denominado "las relaciones intrafigurales e interfigurales en los cuadriláteros: rectángulo, paralelogramo y rombo". Dicho proyecto tiene el aval de las directivas de la Institución Educativa.

Queremos solicitar formalmente su autorización para que VALENTINA CASTAÑO OSSA forme parte de nuestro grupo de Investigación como sujeto de la misma e igualmente presentar a su hija en la publicación de los resultados. Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos datos de su hija en forma de grabación: fotos, video, guías de clase, entre otras.

Agradecemos su atención y colaboración.

OLGA LUCÍA MAZO MEJÍA	VÍCTOR MARIO SUÁREZ	JOHN JAIRO MÚNERA
Estudiante investigadora	Estudiante investigador	Docente Asesor

---

Autorizamos la participación de nuestra hija VALENTINA CASTAÑO OSSA en la investigación "Las relaciones intrafigurales e interfigurales en los cuadriláteros: rectángulo, paralelogramo y rombo"

Diana M. Ossa Cano.
CC 43688393

Otoniel Vargas Obando
CC 18.603-706

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Caldas, 27 de mayo de 2009

Señores Padres de Familia
De la estudiante María Paula López:

Cordial saludo:

En la clase de matemáticas se está desarrollando el proyecto de investigación denominado "las relaciones intrafigurales e interfigurales en los cuadriláteros: rectángulo, paralelogramo y rombo". Dicho proyecto tiene el aval de las directivas de la Institución Educativa.

Queremos solicitar formalmente su autorización para que **MARÍA PAULA LÓPEZ URIBE** forme parte de nuestro grupo de investigación como sujeto de la misma e igualmente presentar a su hija en la publicación de los resultados. Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos datos de su hija en forma de grabación: fotos, video, guías de clase, entre otras.

Agradecemos su atención y colaboración.

OLGA LUCÍA MAZO MEJÍA	VÍCTOR MARIO SUÁREZ	JOHN JAIRO MÚNERA
Estudiante investigadora	Estudiante investigador	Docente Asesor

---

Autorizamos la participación de nuestra hija **MARÍA PAULA LÓPEZ URIBE** en la investigación "Las relaciones intrafigurales e interfigurales en los cuadriláteros: rectángulo, paralelogramo y rombo"

Mónica Uribe M	Alberto López B.
CC 42.685.825	CC 15'328.577
Madre	Padre.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Caldas, 27 de mayo de 2009

Señores Padres de Familia

Del estudiante Juan Manuel Cano:

Cordial saludo:

En la clase de matemáticas se está desarrollando el proyecto de investigación denominado "las relaciones intrafigurales e interfigurales en los cuadriláteros: rectángulo, paralelogramo y rombo". Dicho proyecto tiene el aval de las directivas de la Institución Educativa.

Queremos solicitar formalmente su autorización para que JUAN MANUEL CANO RAMÍREZ forme parte de nuestro grupo de investigación como sujeto de la misma e igualmente presentar a su hija en la publicación de los resultados. Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos datos de su hija en forma de grabación: fotos, video, guías de clase, entre otras.

Agradecemos su atención y colaboración.

OLGA LUCÍA MAZO MEJÍA
Estudiante investigadora

VÍCTOR MARIO SUÁREZ
Estudiante investigador

JOHN JAIRO MÚNERA
Docente Asesor

Autorizamos la participación de nuestro hijo JUAN MANUEL CANO RAMÍREZ en la investigación "Las relaciones intrafigurales e interfigurales en los cuadriláteros: rectángulo, paralelogramo y rombo"

Ima Maria Cano
CC 43 688.789

Miguel Angel C.
CC 71 395 915