

**LAS INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS EN EL AULA:
ACTIVIDAD MEDIADORA EN EL PROCESO DE
APROPIACIÓN DEL CONCEPTO DE POLÍGONO**

**DIEGO ALEJANDRO PÉREZ GALEANO
WALTER HERNANDO GÓMEZ MUÑOZ**

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MEDELLÍN
2009**

**LAS INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS EN EL AULA:
ACTIVIDAD MEDIADORA EN EL PROCESO DE
APROPIACIÓN DEL CONCEPTO DE POLÍGONO**

**DIEGO ALEJANDRO PÉREZ GALEANO
WALTER HERNANDO GÓMEZ MUÑOZ**

**Trabajo de grado para optar el Título de Licenciado en
Educación Básica con Énfasis en Matemáticas**

**Asesora:
Diana Victoria Jaramillo Quiceno
Doctora en Educación**

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MEDELLÍN
2009**

Dedicamos este trabajo a:
Dios, por ser la luz que nos guió durante este proceso.
Nuestras familias, por su apoyo incondicional y constante.
Nuestra asesora, Diana Jaramillo, por su paciencia y apoyo a lo largo de estos dos años.
La maestra Astrid y a los niños del grado quinto de la Institución Educativa
Ramón Múnera Lopera por sus aportes, su participación
y motivación para la realización de este trabajo.

AGRADECIMIENTOS



En primer lugar queremos manifestar nuestro agradecimiento a Daniela, Yamile, Liset, Luz Daniela, María Isabel, Marilyn, Harrison, James, y todos los demás estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera por su colaboración incondicional en las actividades investigativas a lo largo de este año.

También expresamos nuestro agradecimiento a todas las instancias de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera, en cabeza de su rector Álvaro Bolívar Cano y la coordinadora Beatriz, por permitirnos entrar a su contexto educativo y compartir un sinnúmero de experiencias enriquecedoras en nuestro camino investigativo.

A la maestra Astrid Elena Cano Zapata, nuestra maestra Colaboradora, por sus aportes desde lo pedagógico, lo matemático pero, sobre todo, desde lo humano.

A nuestra maestra asesora Diana Jaramillo por el apoyo y motivación que recibimos de ella, aun en los momentos más difíciles. A nuestros compañeros de práctica pedagógica Natalia, Katherine, Jadir y Esteban por sus aportes, comentarios y sugerencias frente a nuestras producciones durante estos cuatro semestres.

A nuestras familias por mantener una actitud de apoyo y comprensión. Y a Dios por darnos la vida y la luz para desarrollar este trabajo.

RESUMEN

TÍTULO: LAS INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS EN EL AULA: ACTIVIDAD MEDIADORA EN EL PROCESO DE APROPIACIÓN DEL CONCEPTO DE POLÍGONO

AUTORES

WALTER HERNANDO GÓMEZ MUÑOZ
DIEGO ALEJANDRO PÉREZ GALEANO¹

PALABRAS-CLAVE:

1. Educación Matemática.
2. Perspectiva Sociocultural.
3. Geometría.
4. Interrelaciones en el aula de clase.
5. Actividad matemática.
6. Diarios de clase.

En el presente trabajo de grado pretendemos responder la pregunta: ¿Cómo las “investigaciones matemáticas en el aula” se constituyen en una actividad mediadora en el proceso de apropiación del concepto de polígono, por parte de los estudiantes de quinto grado de primaria de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera? Y, consecuentemente, el objetivo propuesto es analizar las “investigaciones matemáticas en el aula” como actividad mediadora en la apropiación del concepto de polígono, por parte de los estudiantes de quinto grado de primaria de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera.

El objeto de estudio del este trabajo de grado son las Investigaciones Matemáticas en el Aula como metodología de clase. Dicha metodología está caracterizada, fundamentalmente, por tres fases: la introducción de las tareas, el desarrollo del trabajo y la socialización de los resultados. En nuestro caso, dichas actividades tuvieron como objetivo la apropiación del concepto de polígono por parte de los estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera.

El paradigma metodológico de la investigación es de tipo cualitativo, con un abordaje crítico-dialéctico. La metodología asumida es la investigación participante, de modo que la recolección de datos fue realizada por medio de la observación participante, registros audiovisuales como fotografías, video y grabaciones de audio; los diarios de clase de los niños, la maestra colaboradora y los reportes de socialización como carteleros y trabajos escritos. La metodología de análisis es el estudio de casos, por medio de una triangulación entre las voces de los protagonistas, los referentes teóricos y la mirada nuestra en calidad de investigadores. De esta triangulación resultaron tres categorías emergentes: “Recorriendo el camino de las Investigaciones Matemáticas en el Aula”; “Apropiándonos del concepto de polígono”; y “Las interrelaciones en el aula de clase: una mirada desde las Investigaciones Matemáticas en el Aula”.

Finalmente, después de llevar a cabo el análisis de dichas categorías, concluimos, entre otros aspectos, que las Investigaciones Matemáticas en el Aula se constituyeron en una actividad mediadora para que los estudiantes se apropiaran del concepto de polígono; pues las acciones de exploración, socialización y conceptualización, propias de esta metodología, mostraron diferentes transformaciones al interior del aula —referidas a la maestra, a los niños y a las interrelaciones— que favorecieron los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

¹ Estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Universidad de Antioquia

CONTENIDO

| | Pág. |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| PRESENTACIÓN | 8 |
| CAP. 1 | |
| UN POCO DE LECTURA INSTITUCIONAL | 10 |
| 1.1 NUESTROS NUEVOS INVESTIGADORES | 14 |
| 1.2 LA MAESTRA ASTRID | 18 |
| CAP. 2 | |
| NUESTRO CAMINO DE INVESTIGACIÓN | 20 |
| CAP. 3 | |
| ANALIZANDO LAS CATEGORÍAS | |
| 3.1 RECORRIENDO EL CAMINO DE LAS INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS EN EL AULA | 33 |
| 3.1.1 Las fases de las investigaciones matemáticas en el aula | 41 |
| 3.1.1.1 La introducción de la tareas | 42 |
| 3.1.1.2 El desarrollo del trabajo | 48 |
| 3.1.1.3 La socialización de los resultados | 60 |
| 3.2 APROPIÁNDONOS DEL CONCEPTO DE POLÍGONO | 63 |
| 3.3 LAS INTERRELACIONES EN EL AULA DE CLASE: UNA MIRADA DESDE LAS INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS EN EL AULA | 86 |
| CONCLUSIONES DE NUESTRA EXPERIENCIA DE INVESTIGACIÓN | 100 |
| REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 102 |

PRESENTACIÓN

Los procesos de enseñanza del profesor y los procesos de aprendizaje de los estudiantes han sido elementos de reflexión durante estos últimos dos años en nuestra práctica pedagógica. A partir de estas reflexiones, pensamos en la posibilidad de que dichos procesos estuvieran en dialéctica continua, entendiendo esta como un proceso en el que se da una transformación entre los procesos mencionados. Fue de esta manera que, teniendo presente los principios que rigen nuestra práctica pedagógica, planteamos un proyecto de investigación que analizara la implementación de una metodología de clase llamada *Investigaciones Matemáticas en el Aula*, como una actividad que sirviera como mediadora para la apropiación del concepto de polígono por parte de los estudiantes. Por ende, el presente trabajo tiene como objeto de estudio a las Investigaciones Matemáticas en el Aula, miradas como una metodología de clase.

Luego de un año de interrelaciones en el aula de clase con los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera de la ciudad de Medellín, y su maestra de matemáticas Astrid Cano, planteamos un proyecto de investigación cuya pregunta era: **¿Cómo las Investigaciones Matemáticas en el Aula se constituyen en actividad mediadora para la apropiación del concepto de polígono por parte de los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera?** Así, se constituyó como objetivo de investigación el **analizar las “investigaciones matemáticas en el aula” como actividad mediadora en la apropiación del concepto de polígono, por parte de los estudiantes de quinto grado de primaria de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera.**

Luego de planteado el proyecto, cuyo paradigma metodológico es cualitativo con un abordaje crítico-dialéctico y con una metodología de tipo investigación participante, recolectamos los datos mediante instrumentos como entrevistas semiestructuradas,

observación participante, diarios de clase, carteleras, grabaciones, videos y fotografías. Los datos recogidos se analizaron con base en el estudio de casos por medio de una triangulación entre las voces de los estudiantes, nuestros referentes teóricos y nuestra mirada como investigadores.

Teniendo esto presente, comenzaremos con un recorrido desde la lectura institucional de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera, los estudiantes protagonistas y la maestra Astrid. Seguidamente narraremos camino investigativo, lo cual nos llevará al análisis de tres categorías emergentes producto de la recolección y organización y análisis de los datos. Y, finalmente, mostraremos las conclusiones a las que llegamos, luego de nuestra experiencia investigativa.

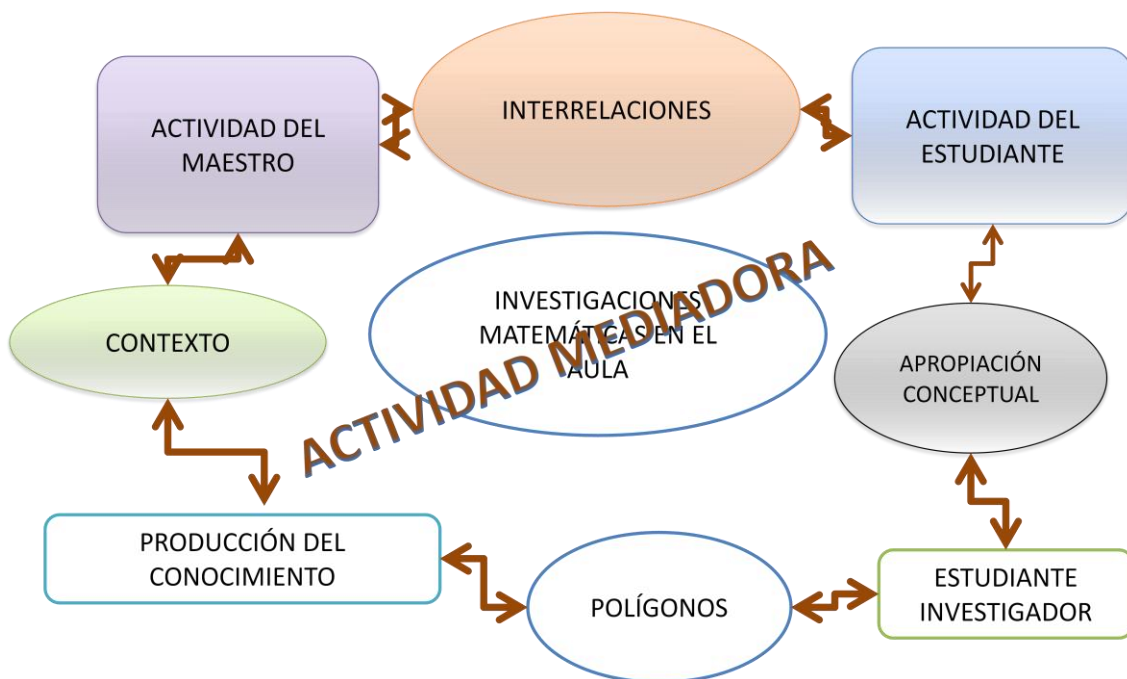


Figura 1. Principales elementos que intervienen en la investigación

UN POCO DE LA LECTURA INSTITUCIONAL

Antes de describir el camino de investigación y el análisis de las categorías que emergieron a lo largo de nuestra investigación, consideramos conveniente narrar lo relacionado con la lectura del contexto institucional que hicimos como estudiantes practicantes a lo largo de nuestro primer año de práctica. Un año caracterizado por la ya mencionada lectura y una fase de asunción del rol de maestros.

UNAS PRIMERAS REFLEXIONES EN TORNO A NUESTRA PRÁCTICA PEDAGÓGICA

Nuestra línea de investigación ha estado enmarcada en las interrelaciones en el aula de clase con una mirada desde el conocimiento matemático, bajo una perspectiva sociocultural. De esta forma, el trabajo realizado con los estudiantes estuvo enfocado en la búsqueda de relaciones entre ellos mismos y entre ellos y la maestra, mediados por la matemática. Nuestro interés en esta práctica fue reconocer el contexto sociocultural mediante las visitas al centro de práctica para observar y reflexionar sobre lo más relevante de cada día. Fue importante para nosotros haber compartido con los estudiantes este tipo de experiencias porque a, nuestro parecer, si hubiésemos llegado desde un comienzo como maestros, tal vez se hubiese generado una distancia abismal entre ellos y nosotros; esto, tal vez, hubiera dificultado el trabajo, y la clase se nos hubiera tornado como clase convencional con un profesor en la cima y los estudiantes viéndolo desde abajo.

En la práctica nos esmeramos porque los estudiantes, la maestra, junto con los personajes de su contexto, y nosotros, entabláramos relaciones dialógicas mediadas por un lenguaje del contexto y del aula. En ese punto de nuestra carrera universitaria, de “la práctica pedagógica”, nos dimos cuenta de que todo lo que aprendimos se aplicaba en la práctica con los estudiantes; la didáctica que implementamos fue producto de todo lo que nos permeó en los años de conceptualización.

Ahora, la teoría de Paulo Freire (2004) que fue estudiada en varias ocasiones, nos marcó profundamente no solo por la forma en la que el autor expresa sus ideas, sino también por los aportes que nos brindó en cuanto a sus ideales de una educación para todos. Como investigadores nuestro punto de vista es, al igual que el de Freire, “el de los condenados del mundo”: no vemos a la educación como un bien que pueden alcanzar algunos, la vemos como un derecho que todos tenemos y al que todos pueden acceder sin ningún tipo de discriminación.

LA COMUNIDAD DE PRÁCTICA: INSTITUCIÓN EDUCATIVA RAMÓN MÚNERA LOPERA

En el Barrio Manrique Oriental se reflejaba el índice de pobreza, algunas de las viviendas eran de madera y lata, la mayoría de ellas construidas improvisadamente por los que la habitaban; esto puso de manifiesto el alto índice de violencia y de problemas sociales que afectaban a toda la comunidad. La mayoría de los habitantes de este barrio eran desplazados por la violencia de las áreas rurales. Se observaba allí a las personas en las puertas de sus casas, en las esquinas se encontraban los jóvenes, ya sea conversando o consumiendo algún tipo de alucinógeno como la marihuana, que a nuestro parecer era el más común; la mayoría de los habitantes de este barrio vivían del diario y en muchos de los estudiantes veíamos reflejado esto ya que algunos de ellos no tenían qué comer, ni siquiera para el refrigerio que valía \$1.000 (mil pesos) y para la leche que costaba \$300 (trescientos pesos). Las mujeres de este lugar laboraban para contribuir en el sustento del hogar, o tenían que trabajar porque eran madres cabeza de

familia. Muchos de los estudiantes iban a estudiar sin desayunar, y luego que salían del colegio tenían que correr porque en su casa se encontraban sus hermanos más pequeños esperándolos para que les dieran el almuerzo y los organizaran para ir a estudiar; luego de llevar a sus hermanitos al colegio tenían que regresar a la casa para organizarla, después hacer las tareas y, finalmente, si les quedaba tiempo, sacar un rato libre para jugar; en otros casos, lo único que les quedaba era acostarse a dormir y esperar el día siguiente para ver si las cosas podrían mejorar. Esta era la historia de muchos de los niños, que a nuestro parecer no deberían estar en la calle trabajando o cuidando los hermanitos más pequeños sino jugando, aprendiendo y con todas las condiciones económicas, sociales y culturales idóneas para su desarrollo físico y mental. Condiciones que, tal vez, propiciaran un ambiente agradable y de convivencia dentro y fuera del aula de clase.

RECONOCIENDO NUESTRO “HOGAR” DE PRÁCTICA

El centro de práctica que nos fue asignado fue la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera, ubicada en la comuna 3, Barrio Manrique Oriental de la ciudad de Medellín que lindaba con los barrios: Villa Hermosa, Las Nieves, Jardín, San Blas, Granizal, San Domingo, Carambolas, Alto de la Cruz y Bello Oriente.

La institución estaba rodeada por zonas muy montañosas; llegar a este centro de práctica era fácil, pero el recorrido en bus era largo y cansino por el hecho de quedar tan arriba de la montaña. Los estudiantes que a esta asistían en la jornada de la mañana oscilaban entre los cinco años (de preescolar) hasta los quince años (algunos de quinto); de este modo, la variedad de edades hacía que las relaciones entre los estudiantes fueran muy diferentes.

De otra parte, dadas las condiciones socioculturales de pobreza, los estudiantes de la institución habían sido altamente vulnerables a la agresión, violencia y drogadicción. La mayoría provenía de familias conformadas por madres solteras, viudas, familias

ampliadas, familias reconstruidas en proceso de desintegración y, en menor medida de familias nucleares. Era notable en la comunidad la cantidad de madres solteras cabezas de hogar.

Aunque las condiciones habían mejorado un poco en cuanto a la violencia y las oportunidades de empleo, la descomposición social generada de tiempo atrás, había influido en la mentalidad y en las acciones de los estudiantes. Sin embargo, en medio de la pobreza, la falta de oportunidades y la crisis de valores, y gracias a diferentes proyectos de convivencia realizados con la comunidad educativa, ya no se miraba tanto la violencia como una alternativa válida para responder a sus necesidades de protagonismo social.

En el marco de una institución como la mencionada, nuestra práctica pedagógica llegó para observar y analizar los procesos de aprendizaje que presentan los estudiantes frente al conocimiento matemático, y las interrelaciones de la maestra con los estudiantes.

EL INTERIOR LA INSTITUCIÓN

La institución era relativamente pequeña: había aproximadamente 21 aulas incluyendo la biblioteca, la sala de computadores, la cafetería, la rectoría, la coordinación, la sala de profesores y las aulas especiales donde se encontraban los materiales didácticos tanto para matemáticas como para otras áreas.

El colegio contaba con una sola entrada, una reja de color azul que dejaba ver lo que ocurría al interior de la institución educativa. Lo primero que encontramos en el plantel fue el patio principal, el cual también fue cancha de básquetbol; en una de sus paredes se ubicaba el escudo y el nombre del colegio. En el patio se observaba en todo momento un comedor para los niños de preescolar, los cuales tomaban el desayuno y

“el algoito”² en este lugar. Las aulas de clase se encontraban organizadas y limpias de rayones de lapicero, estas tenían sus respectivas frases y carteleras pegadas en las paredes para recordar los valores importantes de convivencia o para simplemente informar; sus puertas eran de color azul y sus corredores eran amplios.

1.1 NUESTROS NUEVOS INVESTIGADORES

“Nuestros nuevos investigadores” fue el nombre que escogimos para la descripción que a grandes rasgos haremos de los niños de quinto grado de la Institución al igual que de su maestra como protagonistas, con sus voces y apreciaciones sobre el proceso que se llevó a cabo en la clase.

Las edades de los ocho niños que hicieron parte de la investigación oscilaban entre los 9 y los 11 años de edad. Las características que los identificaron a lo largo del proceso investigativo fueron el respeto, la responsabilidad, el compromiso, el compañerismo, el estar dispuestos a aprender conceptos nuevos y a aceptar sus equivocaciones. Una de las aspectos comunes que notamos de todos los jóvenes era que al asumirse como estudiantes investigadores, comenzaron a encontrar una estrecha relación entre ellos y las matemáticas; comenzaron a compartir su afinidad por las matemáticas, afinidad originada por la metodología “investigaciones matemáticas en el aula” planteada por la maestra Astrid (la maestra afrontó el reto de apostarle a las investigaciones dentro del aula de clase, siempre asesorando a sus estudiantes y utilizando más del tiempo que “normalmente” le había requerido su labor maestra).

A continuación, les mostraremos una pequeña descripción de algunos de los estudiantes que fueron protagonistas de esta investigación; esta narración es realizada a partir de los escritos de los niños en sus diarios de clase y de lo observado por parte de nosotros durante la investigación.

² Nombre popular que se le da la lonchera de la media mañana o media tarde.

DANIELA ÁLVAREZ



Daniela a sus 12 años, era una niña interesada por las actividades que se proponían en la clase. Se caracterizaba además por su compañerismo, su ánimo por hacer sus tareas y mostrarle a sus compañeros lo que aprendía.

LUZ DANIELA BETANCUR

Su edad era de 11 años. Le gustaban las matemáticas, era alegre, recibía recomendaciones, le fascinaba las actividades que la maestra Astrid proponía. Otro aspecto importante que caracterizó a Luz Daniela fue el compañerismo y su interés por ayudar a sus compañeros.



LISET RAMÍREZ



Su edad era de 12 años. La mirada que Liset tenía frente a las matemáticas se caracterizaba por la apatía que sentía hacia estas. Decía “qué pereza matecaspá” antes de que comenzara la clase.

MARÍA ISABEL TORRES

A sus 11 años, María Isabel dijo que su familia era muy unida. Reconoció su capacidad de escucha y además afirmó que le gustaba ser escuchada. Cuando le hacían preguntas y no tenía respuestas, mostraba su responsabilidad afirmando que no sabía y, aparte de esto, demostraba el interés por sus procesos de aprendizaje al consultar inmediatamente lo que no había podido resolver.



MARILYN CHAVARRIAGA

Con sus 11 años, Marilyn era una niña expresiva y muy detallada a la hora de escribir algo sobre lo que pensaba; las materias que más le gustaban eran las matemáticas, las ciencias sociales, artística y tecnología. Ella expresó que era inteligente, pero no se daba a la tarea de demostrarlo.

HARRISON BOTERO

Harrison, un niño de 10 años y de carácter fuerte, destacó que la maestra Astrid desde el principio del año le permitió darse cuenta de la importancia de las matemáticas; esto era importante, considerando que a él “no le importaba aprender”. Dijo que las matemáticas eran muy buenas porque le enseñaron a saber cuánto mide la cancha. Le gustaba la geometría y tenía mucha imaginación.



YAMILE ANDREA MAYA

Una de las características que identificaron a Yamile, quien tenía 11 años, era su capacidad para observar su entorno y expresar todo lo que sentía con respecto a lo que pasaba en el salón de clase

JHON JAMES RAMÍREZ

A sus 11 años, James se caracterizaba por ser un niño muy positivo, interesado por las cosas que lo rodeaban. A James le gustaban los deportes, principalmente el ciclismo y el fútbol; también le gustaban los helados y salir a pasear. Le gustaba el medio ambiente y se consideraba un niño afortunado por tener la posibilidad de confrontar constantemente lo que aprendía.



A los acudientes de cada uno de los ocho niños presentados anteriormente les solicitamos autorización para publicar sus registros de clase como carteleras, diarios de investigación, videos, fotografías, audio, entre otros datos tomados. La siguiente imagen corresponde a una de las autorizaciones, las cuales fueron firmadas por la maestra Astrid, nuestra asesora de práctica, los padres o acudientes de los niños y nosotros en calidad de investigadores. Hay que tener presente de igual manera, que los nombres mencionados anteriormente son reales y que para cada uno de ellos, fue diseñada una carta de autorización.

**LAS INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS EN EL AULA:
ACTIVIDAD MEDIADORA EN EL PROCESO DE APROPIACIÓN DEL CONCEPTO DE POLÍGONO**

| | | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA |  INSTITUCIÓN EDUCATIVA RAMÓN MÚNERA LOPERA. | UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA FACULTAD DE EDUCACIÓN LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS. SEMINARIO INTEGRATIVO Y PRÁCTICA PEDAGÓGICA III |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Medellín, 8 de junio de 2009

Señores:

SANDRA MILENA GÓMEZ OSPINA
JUAN MANUEL ÁLVAREZ

Padres de:

DANIELA ÁLVAREZ GÓMEZ

Reciban un cordial saludo.

En la clase de matemáticas de quinto grado, orientada por la profesora Astrid Elena Cano Zapata, estamos desarrollando un proyecto de investigación llamado "Las Investigaciones Matemáticas en el aula": actividad mediadora en el proceso de apropiación del concepto de polígono". Dicho proyecto fue socializado con los estudiantes y con ustedes en una reunión previa con la maestra del curso en el área de matemáticas

Queremos solicitarle, formalmente, su autorización para que **DANIELA ÁLVAREZ GÓMEZ** forme parte de nuestro equipo de investigación como sujeto de la misma, e igualmente presentar a su hija en la publicación de resultados. Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos datos de su hijo en forma de videos, grabaciones, fotos, informes, entre otros que se han propuesto en la clase de matemáticas.

Agradecemos su atención y colaboración.

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  ASTRID ELENA CANO Profesora del área de matemáticas Institución Educativa Ramón Múnera Lopera |  DIANA VICTORIA JARAMILLO QUICENO Asesora del proyecto de investigación Profesora de la Universidad de Antioquia |
|  WALTER HERNANDO GÓMEZ Estudiante Investigador Universidad de Antioquia |  DIEGO ALEJANDRO PÉREZ Estudiante Investigador Universidad de Antioquia |

Autorizamos la participación de nuestra hija **DANIELA ÁLVAREZ GÓMEZ** en el proyecto "Las Investigaciones Matemáticas en el aula". Actividad mediadora en el proceso de apropiación del concepto de polígono"

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  SANDRA MILENA GÓMEZ OSPINA |  JUAN MANUEL ÁLVAREZ |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Imagen 1. Carta de autorización

1.2 LA MAESTRA ASTRID



Si de algo estamos seguros es de que unos de los sujetos más importantes en cualquier aula de clase es el maestro. En nuestro caso, la maestra que orientaba la clase de matemáticas a los grupos 5-1 y 5-3 era la maestra Astrid Elena Cano, una maestra preocupada por la convivencia y por mantener el buen trato dentro y fuera del aula de clase. Aunque ella afirmaba que no tenía formación profesional propiamente en matemáticas, la metodología que implementó antes y durante las Investigaciones Matemáticas en el Aula dio garantía de que conocía muy bien el campo disciplinar, a sus estudiantes y las diferentes temáticas que día a día compartía con ellos. En nuestro caso, la temática que pasó a importarnos a todos fue los polígonos.

La experiencia profesional que tenía la maestra estuvo marcada por las dificultades sociales que asumió en las instituciones educativas donde trabajó. Astrid antes laboraba en una escuela ubicada mucho más arriba, en medio de conflictos bélicos, donde tanto ella como los estudiantes corrían riesgo de perder la vida. Astrid contaba que el trayecto para llegar hasta allá era muy largo y en medio de un camino lleno de dificultades para la movilización; muchas veces se desconsolaba de ver la situación tan abrumadora en la que se encontraba, pero la esperanza que la ha acompañado siempre le había dado empuje para sobrellevar todos los contratiempos que la formaron como maestra y como persona.

Así, a labor que desempeñaba como maestra de matemáticas era solo una parte de toda la formación que tenía en cuanto a lo pedagógico y lo relacionado con la convivencia. La maestra también dictaba clases en el Semillero Integrado de Matemáticas y Biología en la Universidad de Antioquia, para niños de cuarto grado de primaria; siendo ella una de las pioneras. En el contexto de las clases con la

implementación de la metodología que atañe a este Proyecto, la maestra Astrid mostró una actitud activa, motivadora de las actividades durante el proceso y apoyo constante para cada uno de los grupos de investigación formados.



Imagen 2. Carta de autorización de la maestra

NUESTRO CAMINO DE INVESTIGACIÓN

Antes de narrar nuestro camino de investigación, es conveniente mostrar los fundamentos metodológicos de nuestro proyecto: Este estuvo enmarcado en un proyecto de investigación mayor, titulado “El conocimiento matemático: desencadenador de interrelaciones en el aula de clase”, financiado por la Universidad de Antioquia y Colciencias. La metodología abordada por este proyecto, bajo un abordaje cualitativo, es la Investigación Colaborativa.

Para el caso de esta investigación, la investigación cualitativa se caracteriza por la mirada del investigador de una manera más holística hacia las personas que está investigando, sin tener que amarrarse a unas hipótesis establecidas y atendiendo siempre a comprender a las personas dentro del marco de referencia de ellas mismas. Además de esto, Deslauriers (2004, p. 6) menciona que la investigación cualitativa

procesa los datos difícilmente cuantificables como los informes de las entrevistas, las observaciones, en ocasiones las mismas fotografías, los diarios, los videos; que recurre a un método de análisis más flexible y más inductivo; que se inspira en la experiencia de la vida cotidiana y en el sentido común.

La investigación colaborativa está siendo asumida en dicho proyecto como lo proponen Boavida y Ponte (2003). En ella se sugiere la participación reflexiva de diferentes personas con el fin de realizar un trabajo conjunto. Los autores refieren a la colaboración como un proceso que requiere trabajo reflexivo en cuanto a las metas propuestas, y atiende, claro está, a las personalidades, intereses y expectativas de cada uno de los participantes y; en ese sentido, “la colaboración no es un fin en sí mismo pero sí un medio para alcanzar ciertos objetivos” (ibídem).

Uno de los objetivos específicos del proyecto mayor de investigación es identificar elementos característicos de la actividad de maestros y estudiantes en las interrelaciones entre el proceso de enseñanza, el proceso de aprendizaje y el conocimiento matemático. En este sentido, nuestro proyecto de investigación medió entre dos procesos: en el primero, el proyecto mayor analizaba las actividades propuestas por la maestra Astrid desde su propia práctica, y el segundo consistía en el trabajo directo que la maestra Astrid realizaba con los niños. En este sentido, la metodología que asumió nuestro proyecto como propia era la *investigación participante*.

En la investigación participante lo primero a destacar es la inmersión del investigador en el contexto como participante activo del proceso. En este sentido, asumimos esta metodología de investigación en la medida en que fuimos partícipes desde el primer momento de nuestra práctica pedagógica, ya que hicimos parte de las planeaciones de clase, de las orientaciones de las mismas y de las socializaciones realizadas por estudiantes, entre otras actividades.

Un aspecto que caracteriza a esta mirada metodológica de la participación, mencionado por Fals y Brandão (1987, p. 18), es "el replanteamiento de la relación sujeto-objeto, expresando la relación sujeto-sujeto". De igual manera, y reconociendo que a pesar de nuestra posición como investigadores, mantuvimos una mirada comprometida en cuanto a la participación en las actividades de los estudiantes. Además, esta investigación mira "una sociedad que, rotas las relaciones asimétricas, se convierte en una sociedad simétrica, mucho más igualitaria, mucho más democrática y participante" (ibídem).

Dentro de la metodología de investigación cualitativa destacamos el abordaje crítico-dialéctico, mencionado por Sánchez (1998, p. 80) ya que se le "atribuye un estatus específico y un valor diferenciador a la educación en relación con la sociedad, de tal manera que, dependiendo de la coyuntura, la educación puede ser un agente transformador de la misma".

Este abordaje se caracteriza también por tener en cuenta la historicidad del sujeto y su papel en sociedad como elementos que permiten la transformación que él antes mencionaba, más allá de la comprensión de un fenómeno. En este sentido, "el abordaje crítico-dialéctico coloca el énfasis en las categorías de temporalidad (tiempo) y la historicidad (génesis, evolución, transformación) para explicar y comprender el fenómeno" (ibídem, p. 85).

Por otro lado, si un abordaje crítico-dialéctico pretende realizar una transformación sobre los sujetos de la investigación, debe tener una concepción de hombre que permita tal cambio ya que "presenta entre sus presupuestos filosóficos diversas concepciones de hombre que pueden ser resumidas así: el hombre es considerado en la mayoría de las investigaciones como un ser social, es decir, individuo inserto en el conjunto de las relaciones sociales. [Además,] a pesar de ser histórica y socialmente determinado también es capaz de tomar conciencia de su papel histórico" (ibíd.).

EL PRIMER SEMESTRE DE PRÁCTICA: UNA LECTURA INSTITUCIONAL

El proceso investigativo comenzó en el primer semestre del año 2008 en la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera con los 45 niños del grupo 5-3 de la maestra Astrid. En este semestre de práctica asumimos el papel de observadores y realizamos una lectura institucional resaltando aspectos como el contexto de la institución y las interrelaciones que comenzábamos a evidenciar entre los niños, la maestra y el conocimiento matemático. En este primer semestre de práctica notamos varios aspectos a tener presentes para el resto de nuestro proceso, entre ellos:

- 1 Las clases eran muy reflexivas, lo cual era posible gracias a los acuerdos que los estudiantes realizaban con la maestra Astrid. Estos acuerdos se caracterizaban por la puesta en común de las opiniones, la manifestación de ideas de los niños en lo que se refiere a la forma en la que estaban aprendiendo matemáticas y las lecturas que la maestra les hacía en cuanto a la importancia de las matemáticas

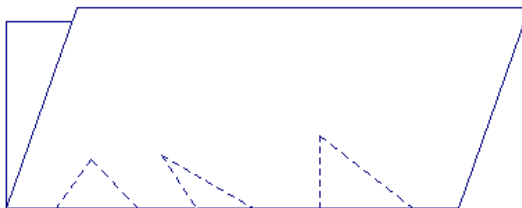
en nuestra vida cotidiana.

- 2 Los niños constantemente mostraban aprecio por la forma en la que la maestra Astrid les comunicaba sus ideas y planteamientos matemáticos, ya que ella lo hacía de manera reflexiva y atendiendo, según ellos, al interés por entender las matemáticas más desde su propio descubrimiento de ideas matemáticas en el entorno.

EL SEGUNDO SEMESTRE DE PRÁCTICA: ASUMIENDO EL PAPEL DE MAESTROS Y UNA NUEVA METODOLOGÍA DE CLASE

Nuestro segundo semestre de práctica estuvo enmarcado en el proyecto “Las interrelaciones en el aula de clase: una mirada desde el conocimiento matemático” financiado por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y que tuvo como plazo de ejecución los meses de octubre y noviembre del 2008. En este semestre de práctica, ya tomamos el rol de maestros con la metodología de clase denominada “Investigaciones Matemáticas en el Aula”, la cual asumimos luego de realizar la lectura del libro “*Investigações matemáticas na sala de aula*” de Ponte, Brocardo y Oliveira (2003). Una de las actividades realizadas con los estudiantes fue la siguiente:

La actividad consistía en explorar las características que los estudiantes descubrían de los cuadriláteros cuando cortaban triángulos sobre el lomo de una hoja que ha sido doblada, un ejemplo se puede apreciar en la figura adjunta:



Los niños empezaron a cortar de diferentes maneras la hoja, obteniendo diversos cuadriláteros. Les propusimos a los estudiantes algunas cuestiones que debían explorar como guía en su trabajo:

- 1 Recordando la clasificación hecha, haz recortes que te permitan obtener
 - a. Un cuadrilátero convexo
 - b. Un cuadrilátero no convexo
 - c. Un triángulo isósceles
 - d. Un triángulo equilátero
- 2 Investiga si es posible hacer cortes que generen un triángulo escaleno.
- 3 Recuerda que todo paso realizado debes consignarlo y/o tabularlo.

Los estudiantes comenzaron a cortar y a dibujar los triángulos cortados junto con su cuadrilátero obtenido. Como solo estaban cortando triángulos obtusángulos y acutángulos estaban obteniendo cuadriláteros no convexos y convexos respectivamente. Los niños llegaron a conjeturar el hecho de que no era posible obtener triángulos, pero a partir de la observación, se dieron cuenta de la simetría existente en las figuras, la cual permitió luego crear triángulos posteriormente, pues al hacer un corte perpendicular al lomo de la hoja doblada, obtenían un triángulo isósceles.

Los niños demostraron que eran muy experimentados en hacer figuras cortando papel por medio de la simetría, pues antes de comenzar la actividad, algunos niños estaban distraídos cortando patrones hasta con cuatro dobleces para obtener figuras llamativas. Este hecho favoreció nuestra labor, pues los estudiantes no mostraban dificultades.

Además, aparte de que recordaban la mayoría de las definiciones, eran muy habilidosos para recortar. Durante el proceso de recorte, los estudiantes reconocieron algunas de las propiedades y constantemente realizaban hipótesis con respecto a la manera de obtener diferentes tipos de triángulos (en la fotografía se aprecia cómo los estudiantes acudían a preguntar sobre la manera de realizar el corte para obtener un triángulo rectángulo).



Imagen 3. Actividad de recortes, 10 de noviembre de 2008

Al final de la sesión, los resultados de esta investigación con los cortes y dobleces fueron:

1. Las figuras obtenidas tenían simetría con respecto al lomo de la hoja. Al principio, los niños pensaban que eran rombos, pero con los conceptos estudiados, concluyeron que solo era posible si se cortaba un triángulo isósceles cuya base esté sobre el lomo de la hoja.
2. El cuadrilátero convexo se obtenía cortando triángulos acutángulos, ya que el ángulo que resultaba sobre el lomo era menor que 180° .
3. El cuadrilátero no convexo se obtuvo cortando triángulos obtusángulos, ya que por la simetría, el ángulo sobre el lomo medía más de 180° , lo cual, según lo estudiado, les dio garantía de que el cuadrilátero tenía una “Entrada”.
4. El análisis del triángulo isósceles no fue tan sencillo. Al principio algunos niños lograron obtenerlo pero no podían explicar qué condición debía cumplir uno de los cortes sobre el lomo para que se formara el triángulo. Al final llegaron a la conclusión de que el triángulo se forma cuando el corte es perpendicular al lomo, esto se da porque por la simetría existente, los ángulos de 90° sumaban 180° , es decir, estaban en línea.

5. No fue fácil para los niños descubrir que para obtener el triángulo equilátero el corte perpendicular tenía que medir la mitad del oblicuo. *¡Claro! Como hay simetría, la mitad de un lado más la mitad del otro sumaban el lado oblicuo formando los tres lados iguales.*
6. No se puede hacer un triángulo escaleno, ya que la simetría hace que el corte forme segmentos congruentes sobre las dos hojas en el lomo.

EL DIARIO: UNA TENTATIVA PARA SER OBJETO DE ESTUDIO

Una de las características de las Investigaciones Matemáticas en el Aula, como metodología de clase, es la utilización de registros escritos, particularmente dichos registros fueron los diarios de clase como herramienta para consignar todas las impresiones respecto al proceso que están llevando a cabo los investigadores.

Los estudiantes estaban realizando la escritura de los diarios a medida que las clases transcurrían; así, viendo nosotros la manera en la que los estudiantes mostraban en los diarios su proceso de aprendizaje con mediación de la metodología de Investigaciones Matemáticas en el Aula, comenzamos a pensar en la propuesta de tener como objeto de estudio la mediación del diario para reconocer los procesos de aprendizaje de los niños.

Sin embargo, luego de realizar varias conversaciones y discusiones con la maestra Astrid y nuestra Asesora, decidimos que era más factible trabajar sobre la metodología de clase que sobre los diarios, ya que los niños mostraban gran afinidad y satisfacción con el camino que estaban recorriendo como *investigadores*. Por ende, en ese momento, la idea de tener al diario como objeto de estudio se dejó de lado, sin obviar, por supuesto, la importancia que este tiene como mediador para el reconocimiento de los procesos de aprendizaje de los niños, en su rol de investigadores.

EL TERCER SEMESTRE DE PRÁCTICA: NUESTRO PAPEL COMO INVESTIGADORES

Luego de realizar el informe final del proyecto y dejar de lado el diario como objeto de estudio, surgieron preguntas relacionadas con los procesos de aprendizaje que los estudiantes estaban teniendo con las investigaciones matemáticas en el aula y con respecto a las clases de matemáticas que normalmente tendrían. Algunas de esas preguntas fueron:

- 1 *¿Qué impacto tiene para los niños la utilización de una metodología que los lleve a investigar y ser protagonistas de sus procesos de aprendizaje?*
- 2 *¿Cómo son las interrelaciones que se tejen entre los estudiantes, la maestra y el conocimiento matemático al interior del aula de clase con mediación de las “Investigaciones Matemáticas en el Aula”?*
- 3 *¿Cómo las “Investigaciones Matemáticas en el Aula”, como metodología de clase, constituyen una actividad que oriente las apropiaciones conceptuales por parte de los niños en los temas que fueron abordados durante el periodo de observación del contexto?*

Fue a partir de esas preguntas planteadas inicialmente, y a partir de las conversaciones y reflexiones alrededor de estas, que vislumbramos como pregunta de la investigación la siguiente: **¿Cómo las “investigaciones matemáticas en el aula” se constituyen en una actividad mediadora en el proceso de apropiación del concepto de polígono, por parte de los estudiantes de quinto grado de primaria de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera?** Y, consecuentemente, el objetivo propuesto fue **analizar las “investigaciones matemáticas en el aula” como actividad mediadora en la apropiación del concepto de polígono, por parte de los estudiantes de quinto grado de primaria de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera.**

De este modo, los tres aspectos principales que debían ser abordados eran: las “Investigaciones Matemáticas en el Aula”; el concepto de polígonos; y los elementos de la actividad, en el marco de la teoría de la actividad.

EL TORNEO DE FÚTBOL: ACTIVIDAD TRANSVERSAL


Una de las características de la planeación curricular que realizaba la maestra Astrid, en el Área de Matemáticas, era plantear una situación del cotidiano con el fin de abordar, con los estudiantes, los cinco pensamientos matemáticos propuestos desde los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) a saber: numérico, espacial, métrico, variacional y aleatorio. Así, en común acuerdo con los niños, se escogió la situación relativa al torneo de fútbol que se realiza año tras año en la institución, con el fin de abordar la metodología que atañe a esta Trabajo alrededor del tema matemático de polígonos.

De este modo, se diseñó el proyecto de investigación caracterizado por los siguientes aspectos:


- Realizar el proyecto con los 50 estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera, a cargo de la maestra Astrid.
- La metodología general sería, como lo mencionamos antes, de tipo cualitativa e investigación participante.
- La metodología de clase sería la de Investigaciones Matemáticas en el Aula.
- El tema matemático a trabajar sería el de polígonos (en el marco del torneo de fútbol).
- Los estudiantes trabajarían en subgrupos conformados con la orientación de la maestra Astrid y nuestra. De esta conformación de grupos escogimos tres aleatoriamente para el análisis. Estos tres subgrupos de investigación fueron conformados por los 8 estudiantes mencionados anteriormente.
- Teniendo presente la metodología de investigación, propusimos como instrumentos de recolección de datos los siguientes:

1. **Entrevista colectiva y semiestructurada a estudiantes:** el propósito de esta entrevista, que se realizó al final de la investigación, era identificar cómo las

actividades de “Investigaciones matemáticas en el aula” se constituyeron en mediadores en la apropiación de los conceptos geométricos en el marco del torneo de fútbol. La entrevista nos arrojó bastantes datos en temas como las interacciones a lo largo de la investigación, la importancia de las investigaciones para la apropiación conceptual de los polígonos, entre otros. El guión de la entrevista fue el siguiente:



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1907



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON
ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS.
SEMINARIO INTEGRATIVO Y PRÁCTICA
PEDAGÓGICA III

INSTITUCIÓN EDUCATIVA RAMÓN
MÚNERA LOPERA.

FORMATO DE ENTREVISTA PARA LOS ESTUDIANTES INVESTIGADORES

El objetivo de la presente entrevista es reconocer en los estudiantes, las impresiones que tienen referidas a la mediación de la actividad de “Investigaciones Matemáticas en el Aula”, referido a la apropiación del concepto de polígono.

Las preguntas son:

1. Después de esta investigación, ¿Qué relaciones crees que existen entre el fútbol y la geometría?
2. ¿Las actividades de investigación te han ayudado a relacionarte con tus compañeros? Cuéntanos cómo lo hiciste.
3. ¿Qué piensas ahora de las matemáticas, luego de realizar las investigaciones?
4. ¿Qué problemas o inconvenientes se presentaron dentro de la investigación?
5. ¿Qué puedes mencionar sobre el trabajo en equipo que se realizó con las investigaciones?
6. ¿Te ha gustado la dinámica de exponerle tus trabajos a tus compañeros? ¿Cómo te has sentido? ¿Por qué?

La entrevista no fue respondida por cada estudiante por separado. Organizados en mesa redonda, les propusimos cada una de las preguntas y a medida que levantaban la mano de manera voluntaria, respondían a las preguntas a partir de las impresiones que tenían de los aspectos cuestionados. Esta metodología de entrevista la utilizamos debido a que no pretendíamos condicionar la participación y la respuesta de los estudiantes; antes bien, esperábamos que ellos, de manera espontánea, expresaran sus impresiones frente a las actividades investigativas que realizaron.

2. Reportes de Investigación de los niños: las investigaciones que cada grupo realizó, debían irse presentando, periódicamente, en una serie de informes. En ellos, los estudiantes presentaban los avances de tipo investigativo y conceptual con respecto a su tema, pregunta y objetivos. Analizamos estos registros con el fin de reconocer los aspectos investigativos sobresalientes en cuanto al rol que desempeñaron y las apropiaciones que, a medida que avanzó el año lectivo, fueron teniendo. Los reportes que dieron los niños fueron: los diarios de investigación, las carteleras y los trabajos escritos que daban cuenta de las consultas que iban realizando.

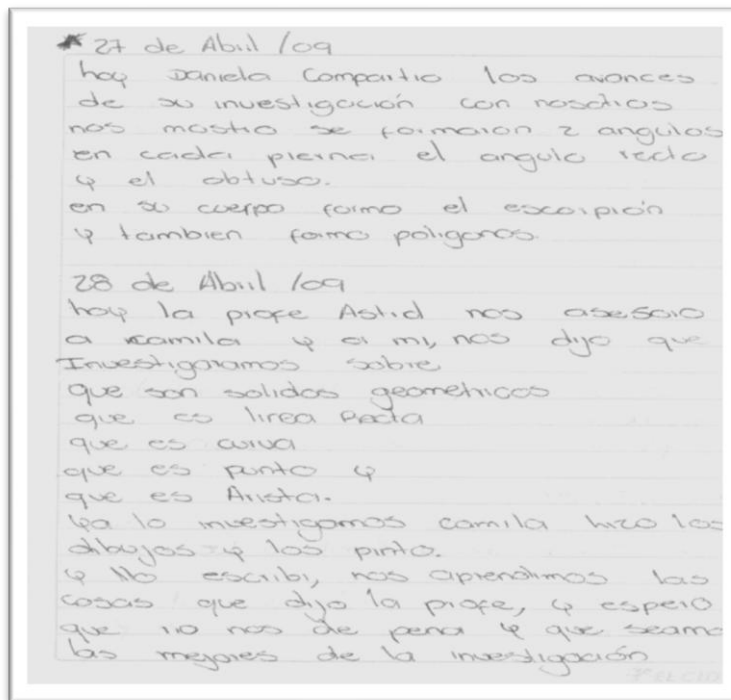


Imagen 4. Página escaneada del diario de Luz Daniela

3. Diarios de clase de los niños: como ya mencionamos antes, el registro escrito, en nuestro caso el diario, constituyó una herramienta fundamental para evidenciar el proceso de apropiación conceptual de los polígonos, por parte de los estudiantes (en la Imagen 4 teníamos un ejemplo). De esta manera, el diario de los niños es uno de los instrumentos de recolección de datos a utilizar con el fin de realizar el análisis.

4. **Videos, fotografías y grabaciones de clase:** los registros audiovisuales como grabaciones, fotografías y videos de las clases fueron importantes para llevar a cabo el análisis que presentaremos en el próximo capítulo. Es por esto que incorporamos la utilización de este tipo de registro, pues mostraron de manera directa lo ocurrido en cada una de las clases. la siguiente fotografía es un ejemplo de este instrumento para análisis:



Imagen 5. Clase de investigación, 8 de mayo de 2009

5. **Cartelera:** las cartelera fueron estrategias utilizadas por los estudiantes para mostrarle a los demás niños del grupo los avances que habían realizado. Estas fueron también registros para análisis, pues las cartelera se constituyeron en otra prueba para la comunicación de los estudiantes del saber que iban adquiriendo. Un ejemplo de este registro se muestra a continuación:

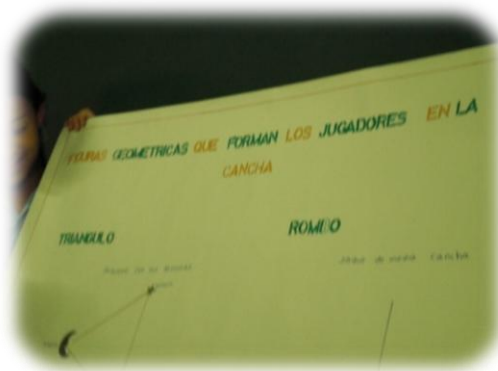


Imagen 6. Cartelera del grupo de Yamile, 8 de mayo de 2009

Teniendo los objetivos, y atendiendo a la metodología de investigación abordada, luego de realizar la recolección de los registros y datos pasamos a la fase de análisis de los datos, teniendo como metodología para tal fin el **estudio de casos**. Para realizar el análisis hicimos una triangulación entre los referentes teóricos, los datos obtenidos del proceso investigativo y nuestra mirada como investigadores, teniendo como resultado unas categorías emergentes de la investigación. Las categorías emergentes son:

1. **RECORRIENDO EL CAMINO DE LAS INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS EN EL AULA:** en esta categoría analizamos las características que tiene las investigaciones matemáticas en el aula como una actividad desde los referentes teóricos, las voces de los estudiantes y los aportes de la maestra Astrid.
2. **APROPIÁNDONOS DEL CONCEPTO DE POLÍGONO:** en esta categoría abordamos el proceso que los estudiantes —con mediación de la metodología de “Investigaciones Matemáticas en el Aula”— tuvieron a lo largo del trabajo en clase. Mostramos cómo el concepto de polígono fue apropiado por parte de ellos como consecuencia del trabajo investigativo en los subgrupos conformados. Los testimonios de los estudiantes, los informes, las carteleras y las exposiciones, realizadas por ellos, dieron cuenta del aprendizaje alcanzado y las expectativas para continuar el proceso en otras temáticas a ser abordadas oportunidades posteriores.
3. **LAS INTERRELACIONES EN EL AULA DE CLASE: UNA MIRADA DESDE LAS INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS EN EL AULA:** las interrelaciones que se presentaron entre los estudiantes, la maestra y el conocimiento matemático fueron consecuencia del proceso investigativo llevado a cabo por los niños. Los tres tópicos analizados son: la importancia del trabajo en equipo, las dificultades del trabajo investigativo grupal y las actividades de la maestra Astrid en el trabajo en grupo. Luego de narrar nuestro camino de investigación, presentaremos el análisis de las categorías.

ANALIZANDO LAS CATEGORÍAS

3.1 RECORRIENDO EL CAMINO DE LAS INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS EN EL AULA

La primera de nuestras categorías de análisis tiene como tema principal al objeto de estudio de esta investigación: la metodología de “Investigaciones Matemáticas en el Aula” (IMA). La estructura de esta primera categoría consiste en mostrar, a través de la caracterización de cada una de las fases de las “Investigaciones Matemáticas en el Aula”, las reflexiones de los niños protagonistas del proceso investigativo junto a los de la maestra Astrid en lo que se refiere al desarrollo de la investigación en el aula de clase –al tiempo que estas reflexiones se irán narrando, se realizarán los análisis correspondientes de nuestra parte, resaltando las características que destacan a las IMA como actividad que medió en el proceso de apropiación del concepto de polígono, por parte de los niños protagonistas de la investigación.

LAS INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS EN EL AULA DE CLASE: UN PRIMER ACERCAMIENTO

Según el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española (incluido en el paquete *Microsoft Student 2008*), investigar (del latín *investigāre*) se puede entender de tres maneras básicas: (1). Hacer diligencias para descubrir algo. (2). Realizar actividades intelectuales y experimentales de modo sistemático con el propósito de aumentar los conocimientos sobre una determinada materia. (3). Aclarar la conducta de ciertas personas sospechosas de actuar ilegalmente.

De otro lado, entendemos que, como lo afirman Ponte, Brocardo y Oliveira (2003, p. 10), la investigación en matemática asume

características muy propias, conduciendo rápidamente a la formulación de conjeturas que se pretende probar si fuera el caso. Las investigaciones matemáticas envuelven, naturalmente, conceptos, procedimientos y representaciones matemáticas, pero lo que más las caracteriza fuertemente es el estilo conjetura- prueba-demostración”.

En países como Portugal y Brasil se vienen desarrollando, desde hace algunos años, estudios que abordan la metodología de IMA, cuya importancia se orienta hacia el aprendizaje y la enseñanza de la matemática. De hecho, Ponte, Brocardo y Oliveira (ibídem, p. 127).mencionan que “en los currículos de numerosos países, surgen, de modo directo o indirecto, referencias a la realización de actividades de investigación por los estudiantes, en la clase de matemáticas”. A través de estos trabajos, los maestros han verificado que para el estudiante “investigar constituye una poderosa forma de construir conocimiento” (op. cit.); es por esto que nos pareció interesante profundizar sobre estas investigaciones matemáticas al momento de plantear nuestra metodología de clase, desde el año 2008.

La actividad de investigar en el aula de clase consiste en la realización de búsquedas que dan origen a conjeturas o hipótesis sobre un concepto, unas pruebas a estas y una demostración final a partir de una problemática que se genera en la clase desde los planteamientos de situaciones, en las cuales no hay respuestas inmediatas y que demandan una búsqueda exhaustiva por parte de los participantes. La idea de no tener respuestas inmediatas es una de las características del proceso investigativo y que vuelve a la investigación una fuente inagotable de búsquedas sobre el saber matemático en el contexto.

La mirada con respecto a las matemáticas cambia cuando los estudiantes asumen esta disciplina como algo que se encuentra en su entorno, que tiende al cambio y que además, con el aporte del hombre, se pone más de cerca al servicio de la humanidad. Los estudiantes abandonan, así, su mirada sobre la matemática como algo estático que hay que memorizar.

Al respecto, el matemático portugués Bento de Jesús Caraça (1984, p. xiii) comenta que:

La ciencia puede ser encarada bajo dos aspectos diferentes. O se mira tal como viene expuesta en los libros de enseñanza, como una cosa creada, y el aspecto es el de un todo armonioso, donde los capítulos se encadenan en orden, sin contradicciones; o se acompaña en un desarrollo progresivo, y se explica como fue siendo elaborada. El aspecto es totalmente diferente: se descubren necesidades, dudas, contradicciones, que solo a lo largo de un trabajo de reflexión y perfeccionamiento se consigue eliminar, para que luego surjan otras preocupaciones, otras dudas, otras contradicciones [...]. Vista de esa manera, nos parece como un organismo vivo, impregnado de condición humana, con sus fuerzas y sus flaquezas y subordinada a las grandes necesidades del hombre en su lucha por el entendimiento y por la liberación; nos parece, en fin, como un gran capítulo de la vida social humana.

De igual manera, y siguiendo la idea de una matemática como una construcción desde la cultura, los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998, p. 29), expresan que “el conocimiento matemático, así como todas las formas de conocimiento, representa las experiencias de personas que interactúan en entornos, culturas y periodos históricos particulares”.

Comúnmente observamos una relación estrecha entre problema e investigación; como dice el matemático Andrew Wiles, “está bien trabajar en cualquier problema con tal de que en el camino se genere matemáticas interesantes, incluso si a la larga uno no lo resuelve” (Singh, citado por Ponte, Brocardo y Oliveira, 2003, p. 17). Agregan los autores Ponte, Brocardo y Oliveira (2003) que cuando trabajamos en un problema, lo principal no es encontrar la solución del mismo, sino observar otros descubrimientos que, en algunas ocasiones, son más importantes que el mismo problema. En otros momentos no es posible llegar a la solución del problema y no por esto el trabajo desarrollado deja de tener valor.

Andrew Wiles, quien se volvió famoso después de demostrar el último Teorema de Fermat, al cual dedicó parte de su vida, cuenta cómo fue ese contacto con las investigaciones cuando era niño:

Desde que lo conocí, de niño, el último teorema de Fermat ha sido mi pasión más grande... Pero tenía un profesor que había hecho investigación en matemáticas y él me dio un libro sobre teoría de números que me proporcionó algunas pistas de cómo empezar a abordarlo. Para comenzar,

supuse que Fermat no sabía mucha más matemáticas que yo (Singh, citado por Ponte, Brocardo y Oliveira, 2003, p. 18).

Son de rescatar en las palabras de Wiles dos aspectos interesantes: el primero, cuando comenta que fue en su infancia el inicio para realizar dicha investigación; y el segundo, cuando se refiere a la persona que le prestó el libro para su inicio en esa investigación... Los estudiantes pueden involucrarse desde temprana edad en las investigaciones matemáticas, ya que es un poderoso proceso de construcción de conocimiento; por otro lado, cuando el profesor de matemáticas le prestó el libro a Wiles, se convirtió en un personaje importante en esa historia, ya que fue una influencia motivadora en ese momento para ese estudiante. También nosotros, desde nuestra experiencia de investigación sobre la propia práctica, le quisimos mostrar a los niños, por medio de la actividad investigativa, la apropiación conceptual que pueden llegar a tener.

Con el ejemplo de investigación matemática en el Último Teorema de Fermat por parte de Wiles se observan algunas de las actividades que se desarrollan durante el proceso de investigaciones matemáticas, según Ponte, Brocardo y Oliveira (2003, p. 22): “La formulación de preguntas, elaboración de conjeturas, cuestionarios, refinamiento de las preguntas y conjeturas anteriores, demostraciones, refinamiento de las demostraciones y comunicación de los resultados”, son posibles procesos que los estudiantes pueden realizar en el salón de clases.

Por otro lado, en una investigación matemática el objetivo, para Fonseca y Ponte (1999, p. 5), es “explorar todos los caminos interesantes que surgen a partir de una situación dada. Es un proceso divergente. Se sabe cuál es el punto de partida, más no se sabe cuál es el punto de llegada”. Esa idea también la sustenta Bishop (1998, p. 149) al decir que un “aspecto importante de las investigaciones es que no tienen un punto final determinado”.

En este momento podemos decir que nos pareció útil implementar dicha metodología en las clases de matemáticas, pues consideramos, a partir de la experiencia que empezamos a vivir en nuestra práctica, que la investigación es una actividad cuyos objetivos y mediadores pueden ser enmarcados en la apropiación conceptual en cuanto proporciona elementos para comprender definiciones desde el contexto, un contexto que, como lo expresan los Lineamientos (MEN, 1998, p. 30): “se reconoce hoy [...] como elemento importante que puede proveer al individuo de aptitudes, competencias y herramientas para resolver problemas y para representar las ideas”.

De este modo, las IMA, al tener unos componentes establecidos (que veremos más adelante) y favorables para el aprendizaje significativo de los estudiantes, no son la única herramienta de la que se puede valer un maestro; antes bien, le corresponde al profesor implementar unas actividades curriculares que involucren tanto problemas y ejercicios plasmados de manera formal y que sean de carácter público, de modo que los estudiantes asuman al interior del aula el rol de “exploradores” de las matemáticas y no apenas de entes pasivos.

LA IMPORTANCIA DEL TRABAJO INVESTIGATIVO EN LA ESCUELA: UNA MIRADA TEÓRICA

Dicha importancia radica en varios aspectos: En primer lugar, el hecho de llevar al aula de clase una actividad investigativa marca una diferencia importante en cuanto a las clases “tradicionales” que normalmente se evidencian en las escuelas.

Las ideas matemáticas pueden ser trabajadas en cualquier nivel de escolaridad por medio de las investigaciones, pues las estructuras de las mismas les ofrecen la posibilidad a los estudiantes de comprender, en un proceso progresivo, la importancia de las matemáticas, aun cuando los conceptos son muy complejos. Al respecto, Bishop (1999, p. 149) afirma que “una investigación capta los enigmas y los retos de las ideas matemáticas abstractas”, y es precisamente el carácter investigativo el que marca un

giro en la mirada de los estudiantes sobre la matemática, cambiando evolutivamente la percepción compleja de lo abstracto.

El trabajo dentro de las clases de matemáticas para algunos estudiantes se puede volver tedioso, en la medida en que no note un cambio en la metodología de ellas. La actividad investigativa puede lograr que el estudiante recree el trabajo de un matemático en el sentido de descubrir y legitimizar por su propia cuenta las ideas matemáticas que en una clase convencional solo vería como teoría pasajera. Bishop (ibídem, p.154) también menciona, en este sentido, que “las investigaciones pueden ayudar a transmitir a los estudiantes emociones encontradas de la fascinación que produce trabajar dentro de las matemáticas”. Esa fascinación consiste en la satisfacción del descubrimiento sin imposición conceptual del maestro tal como lo veremos a lo largo de este análisis.

El trabajo intelectual del estudiante muestra cambios reales en cuanto al nivel de acercamiento y abstracción del concepto matemático. Con un trabajo investigativo, un estudiante puede integrar varias maneras de abordar un concepto y realizar interpretaciones que se sale a veces de la misma rigurosidad matemática y va al contexto como algo ya apropiado. La realización de un trabajo investigativo, en palabras de Bishop (op. cit.), favorece el hecho de que “los participantes no se limitan a practicar una simple técnica: actúan en un nivel intelectual mucho más elevado, e incluso sugiero que realmente hacen matemática creativa”. En nuestra reflexión retomamos el término “creativa” en el sentido de la Creación de una matemática como aporte a la constitución del sujeto en una cultura llena de situaciones concretas que involucran al saber matemático. También Polya (1981 citado por Ponte, Brocardo y Oliveira, 2003, p. 19), menciona en cuanto a la creación matemática mediada por la investigación que:

[Los estudiantes pueden tener] un sabor de las matemáticas en construcción y del trabajo creativo e independiente... [Ellos pueden] generalizar a partir de la observación de casos, [usar] argumentos inductivos, argumentos por analogía, reconocer o extraer un concepto matemático de una situación concreta.

Es a partir de las características y los intereses del sujeto, que éste apropia la actividad investigativa como algo que le aporta a su formación académica y personal. A propósito de este hecho que “las investigaciones, al igual que los proyectos, se pueden adaptar para satisfacer objetivos individuales y personales” (Bishop, 1999, p. 149).

Las necesidades pueden ser de diversa índole: compromiso académico, superación de expectativas mediante un trabajo diferente al comúnmente realizado, búsqueda de otras formas de comprender matemáticas, entre otras. El conocimiento matemático se muestra en este sentido como “una actividad social que debe tener en cuenta los intereses y la afectividad del niño y del joven” (MEN, 1998, p.29), y que por lo tanto debe ofrecer las posibilidades al estudiante desde cualquier nivel de escolaridad, de acercarse y mirarla como una construcción cultural que está presente en todas las actividades que realiza y que no necesariamente se construye de un momento a otro, pues el conocimiento matemático no se genera de modo rápido y acabado, todo proceso de aprendizaje es lento y nunca está totalmente concluido” (ibídem, p. 31).

El mismo interés por comprender el mundo, y actuar de manera crítica en él, es una justificación para mirar a las matemáticas como algo indispensable para la vida. En este sentido, los Lineamientos (ibídem, p. 29) mencionan que “las matemáticas son una herramienta intelectual potente, cuyo dominio proporciona privilegios y ventajas intelectuales”, privilegios que conllevan a una mentalidad abierta al contexto sociocultural en cuanto a las interrelaciones con el saber y las personas.

Incluso, desde el mismo currículo, se puede mirar a la investigación como una apuesta al cambio en la mirada del estudiante y del maestro frente al conocimiento matemático.

Ponte, Brocardo y Oliveira (2003, p. 109) refieren al respecto que:

Las investigaciones se reportan para diversos objetivos curriculares. En primer lugar, se pretende que el estudiante sea capaz de usar conocimientos matemáticos en la resolución de la tarea propuesta. En segundo lugar, se pretende que el estudiante desarrolle la capacidad de realizar investigaciones. Y, en tercer lugar, se pretende promover actitudes tales como la persistencia y el gusto por el trabajo investigativo.

También mencionan estos autores (ibídem, p. 142) que:

La realización de investigaciones matemáticas, por el estudiante, puede contribuir de modo significativo para su aprendizaje de la matemática y para desarrollar el gusto por esa disciplina. También el profesor puede desarrollar una actitud investigativa en relación a la matemática y en relación a su práctica.

Ponte y Matos (1992, p. 17) mencionan, de igual manera, que:

Las investigaciones matemáticas pueden ser importantes actividades educativas. Son muy útiles en el desarrollo y la consolidación de determinados conceptos y las ideas matemáticas. Se refieren a procesos importantes de razonamiento. Pueden permitir una visión más amplia de las matemáticas, mucho más cerca de la verdadera práctica del matemático.

Lo cual, a nuestro parecer, es válido en cuanto a la mirada y las reflexiones que, en compañía de los estudiantes y la maestra Astrid, hicimos frente a los resultados de la actividad investigativa. De este modo, esta última resulta ser un medio para que el conocimiento matemático sea construido por el estudiante, mirando siempre la historia del saber matemático como referente para su adecuada comprensión.

La investigación surge como un poderoso medio de construcción de conocimiento, que no dispensa, sin embargo, el estudio y el reconocimiento de lo que ya fue hecho por otros, la identificación de los recursos que pueden facilitar el trabajo, el aprendizaje de las técnicas, y de los medios de expresión propios de nuestro campo de trabajo y la interacción con los otros en comunidades de discurso y aprendizaje (Ponte, Brocardo y Oliveira, 2003, p. 142).

Braumann (2002 citado por Ponte, Brocardo y Oliveira, 2003, p. 19) sustenta esta idea al decir que:

Aprender matemáticas no es simplemente comprender la matemática ya hecha, sino también ser capaz de hacer investigación de naturaleza matemática (al nivel adecuado para cada grado de enseñanza). Solo así se puede verdaderamente percibir lo que es la matemática y su utilidad en la comprensión del mundo y en la intervención sobre el mundo. Solo así se puede realmente dominar los conocimientos adquiridos.

Además, “el hombre no es un ente adaptativo exclusivamente, sino que cuenta con las capacidades necesarias para transformar su entorno” (Ortiz y Chávez, 2008, p. 4), lo cual da muestra del llamado que tienen los estudiantes de tomar conciencia sobre sus propios procesos de aprendizaje; en nuestro caso, los niños lo hicieron con la mediación de las IMA, metodología que analizaremos a profundidad a continuación.

3.1.1 LAS FASES DE LAS INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS EN EL AULA

Antes de abordar cada una de las fases que comprenden el proceso de investigación en el aula, es importante mostrar la mirada de algunos autores respecto a ellas. Así, las IMA, según Christiansen y Walter (1986, citado por Fonseca y Ponte, 1999, p. 6), están estructuradas en tres fases fundamentales: introducción de las tareas, desarrollo del trabajo (realización de las tareas) y discusiones finales/reflexiones (relatos-escritos). Por su parte, Bishop (1999, p. 149) también da un aporte en cuanto a la estructura de una investigación:

En una investigación hay dos fases distintas: en primer lugar, la fase creativa e inventiva caracterizada por la exploración, el análisis y el desarrollo de ideas matemáticas. La segunda fase se dedica a redactar un informe sobre la actividad realizada durante la primera fase. La primera es el “Experimento”, mientras que la segunda es la reflexión y la comunicación por escrito de ese experimento.

Ponte, Brocardo y Oliveira (2003, p. 20) establecen cuatro momentos básicos en el marco de las “investigaciones matemáticas en el aula de clase”, estos son:

“El arranque o reconocimiento de la situación, la exploración preliminar y la formulación de cuestiones; un segundo momento referido a la formulación de conjeturas. El tercero incluye la realización de pruebas y la eventual refinación de la o las conjeturas. Y finalmente, el último es respecto a la argumentación, la demostración y la evaluación del trabajo realizado”.

Pero normalmente se trabaja en el aula de clase la segunda y tercera fase en una sola, ya que estos procesos se vuelven cíclicos en la medida en que, a partir de la necesidad de demostrar una conjetura o refinar un concepto consultado, el estudiante puede recurrir a la formulación o consulta de un concepto auxiliar. De este modo, los autores antes mencionados refinan esta idea exponiendo finalmente que:

Una actividad de investigación se desarrolla habitualmente en tres fases (en una clase, o conjunto de clases): i) introducción de las tareas, en la que el profesor hace la propuesta al grupo, oralmente o por escrito, ii) realización de la investigación, individualmente, en pares, en pequeños grupos o con todo el grupo, y iii) discusión de los resultados, en el que los estudiantes relatan a sus colegas el trabajo realizado (Ponte, Brocardo y Oliveira, 2003, p. 25).

Ponte, Brocardo y Oliveira (ibídem) aclaran las primeras cuestiones que se pueden presentar en el aula al momento de investigar:

Suponiendo que las investigaciones matemáticas son un tipo de actividades que todos los estudiantes deben experimentar, se plantea la cuestión de cómo se puede aplicar en el aula de matemáticas. ¿Cómo organizar el trabajo? ¿Qué etapas recorrer? ¿Qué se puede esperar del rendimiento de los estudiantes? ¿Cuál podría ser el papel del profesor?

Siempre puede programar cómo iniciar una investigación, pero nunca se sabe cómo va a acabar. La variedad de las rutas que siguen los estudiantes, su progreso y el retroceso, las diferencias que surgen entre ellas, cómo reaccionar en las intervenciones son elementos del maestro que, en un aula de investigación son impredecibles.

Hablaremos ahora en detalle de estas fases:

3.1.1.1 La introducción de la tareas

La primera de las fases en la metodología de “Investigaciones Matemáticas en el Aula”, llamada Introducción de las tareas, se caracteriza por ser el momento en el cual el maestro decide, en compañía de los estudiantes, el camino a recorrer durante las clases. El maestro tiene, junto con los estudiantes, la responsabilidad de escoger una actividad que muestre características de la búsqueda que realiza un matemático. Ponte, Brocardo y Oliveira (2003, p. 29) afirman al respecto que “al proponerse una tarea de investigación, se espera que los estudiantes puedan, de una manera más o menos consciente, utilizar varios de los procesos que caracterizan la actividad investigativa en matemática”, además de la actitud de búsqueda del matemático, el maestro debe tener un conocimiento extenso en cuanto a la manera de trabajar de los estudiantes; en ese sentido “el profesor debe concebir al estudiante como una personalidad plena que con su ayuda construye y reconstruye sus conocimientos, habilidades, hábitos, afectos, actitudes, formas de comportamiento y sus valores, en constante interacción con el medio sociocultural donde se desenvuelve” (Vidal, 2009, p. 1) .

Un primer aspecto que se debe tener en cuenta es que “la interacción que el profesor tiene que establecer con los estudiantes es bien diferente de la que ocurre en otros tipos de clase” (op. cit., p. 47), por lo tanto el ambiente que se forma ha de tener características propias del trabajo investigativo. En este sentido, “su papel [el del

maestro] será el de propiciar una atmosfera cooperativa que conduzca a una mayor autonomía de los estudiantes frente al conocimiento” (MEN, 1998, p. 32).

El éxito de una investigación depende también, tal como cualquier otra propuesta del profesor, del ambiente de aprendizaje que se crea en el aula de clase. Es fundamental que el estudiante se sienta a voluntad y le sea dado tiempo para colocar cuestiones, pensar, explorar sus ideas y explicarlas tanto al profesor como a sus colegas. El estudiante debe sentir que sus ideas son valorizadas y esperar que sus discusiones sean con sus colegas, no siendo necesaria la validación constante por parte del profesor (ibídem, p. 28).

Además, y resumiendo lo dicho en los párrafos precedentes, “el profesor necesita conocer bien a sus estudiantes y establecer con ellos un buen ambiente de aprendizaje para que las investigaciones puedan ser realizadas con éxito” (ibídem, p. 53).

Vamos a hablar específicamente del trabajo realizado con la maestra Astrid y los estudiantes. En una de las reuniones del grupo colaborativo del proyecto “El conocimiento matemático: desencadenador de interrelaciones en el aula de clase”, la maestra Astrid relató el proceso investigativo que realizaba con los estudiantes desde el comienzo.

Cuando me senté con Diana, Walter y Diego, Diana me propuso que trabajara las “Investigaciones Matemáticas en el Aula”; eso fue y seguirá siendo un reto para mí. (Astrid, reunión del grupo colaborativo, 21 de mayo de 2009)

Si bien es cierto que la metodología ya era de alguna forma conocida por la maestra Astrid, ya que la habíamos implementado en nuestro segundo semestre de práctica, las actividades realizadas en ese entonces eran diseñadas por nosotros, es por ello que la maestra, en primera instancia, sintió todo un reto al asumir la metodología de IMA. A pesar de esto, la maestra asumió de manera responsable la metodología y comenzó, junto con nuestra asesora y nosotros, a leer el libro referido a las IMA.

Me senté con Diana, a leer un capítulo del libro de “Investigaciones Matemáticas en el Aula” de Ponte, Walter me mandó la traducción de 4 capítulos y volví a leerlos para tener ideas más generales y más precisas que me permitieran hacer un trabajo con los niños. (Astrid, reunión del grupo colaborativo, 21 de mayo de 2009).

En ese momento, Astrid nos mostró una vez más su compromiso profesional y humano

frente a sus procesos de enseñanza y a los procesos de aprendizaje de los niños, lo cual está en concordancia con Vidal (2009, p. 3) al mencionar que:

Cuando el profesor ama la labor que desempeña, siente la necesidad interna de elevar la efectividad de su proceso de enseñanza [...], de motivar a sus estudiantes por el aprendizaje de la materia que imparte y, al unísono, de contribuir al crecimiento personal de cada uno de ellos.

Una de las primeras características que encontramos en la lectura y las actividades presentadas en Ponte, Brocardo y Oliveira (2003) es que lo realizado en clase era decidido en común acuerdo por todos, sin ningún tipo de imposición por parte del maestro, ya que “si la introducción inicial del profesor fuera demasiado pormenorizada relativamente a los que “hay que hacer” puede condicionar la exploración a realizar por los estudiantes” (ibídem, p. 28). De esa manera, Astrid comenzó la indagación con los estudiantes sobre lo que ellos querían investigar, no sin antes preguntarles sobre lo que es investigar. La idea de reconocer en ellos sus concepciones sobre investigación surgió de la necesidad de llevar al aula de clase conceptos y actividades que estuvieran en concordancia con lo que ellos pensarán.

Existe a veces la idea de que, para que el estudiante pueda, de hecho, investigar, es necesario dejarlo trabajar de forma totalmente autónoma y como tal, el profesor debe tener solamente un papel de regulador de la actividad. Sin embargo, el profesor continúa siendo un elemento clave en esas mismas clases, cabiéndole ayudar al estudiante a comprender lo que significa investigar y aprender a hacerlo (Ponte, Brocardo y Oliveira, 2003, p. 26).

Efectivamente, en el aula de clase se llevó a cabo por parte de Astrid la indagación sobre lo que para los niños era investigar y otros aspectos relacionados con la actividad investigativa. Al respecto, Astrid comentó que:

Hablamos con los niños sobre lo que para ellos es investigar, quiénes investigan, la importancia de la investigación. Uno se da cuenta de que los niños tienen muchos saberes que no distan mucho de lo que es una investigación, allí se establecieron acuerdos y se les propuso otras situaciones como el de las cometas, pero ellos dijeron que no, que más bien siguiéramos con lo del torneo de fútbol y las investigaciones matemáticas en el aula (Astrid, reunión del grupo colaborativo, 21 de mayo de 2009).

Ya era claro lo que ellos querían trabajar: el torneo de fútbol y las IMA, pero *¿cómo surgió la idea del torneo de fútbol?* Algo que tenía claro Astrid es que

en la fase de inicio de la investigación, es fundamental garantizar que los estudiantes se sientan motivados para la actividad a realizar. El profesor tiene aquí un papel muy importante, como vemos, procurando crear un ambiente adecuado al trabajo investigativo. Por otro lado, el profesor debe dar una atención cuidadosa a la propia tarea, escogiendo cuestiones o situaciones iniciales que, potencialmente, constituyan un verdadero desafío para los estudiantes (ibídem, p. 47).

De esa manera, al realizar la planeación de las actividades del periodo, la maestra propuso como tema transversal el torneo de fútbol:

En nuestra institución hay un profesor que año tras año ha trabajado con los niños unos torneos de futbol, yo hablé con él y le dije que si iba a continuar con el torneo de fútbol. Él lo tiene más orientado a la parte de la convivencia, para bajar los niveles de agresión de los niños. Yo empecé a vincularme con ese trabajo, iba a verlos jugar; y articulé todos los contenidos desde el torneo de fútbol (Astrid, reunión del grupo colaborativo, 21 de mayo de 2009).

A partir de esto, los estudiantes reconocieron en el discurso dado por la maestra una invitación para salir de las actividades que regularmente se hacen en clase. Astrid, en esta fase de Introducción de las tareas, les mostró a los niños un camino como “investigadores de las Matemáticas”. En este sentido, Ponte, Brocardo y Oliveira (ibídem, p. 27) afirman que “incentivar a los estudiantes a ser “pequeños exploradores” es una metáfora que transmite el sentido de la investigación y que ayudan a marcar la diferencia en relación a las tareas a los que los niños están más habituados” y, efectivamente, los niños sintieron motivación a comenzar un trabajo de investigación en el área de matemáticas ya que “esa fase inicial del trabajo investigativo es fundamental para crear en los estudiantes un espíritu interrogativo sobre las ideas matemáticas.”

A causa de la inexperiencia de los niños en cuanto a lo que es investigar, la maestra Astrid les mostró de varias maneras lo que significa e implica el trabajo investigativo.

Muchas veces la tarea es propuesta a los estudiantes por escrito, lo que sin duda es ventajoso, pero no dispensa una pequeña introducción oral por parte del profesor. En el caso de los estudiantes nuevos, la lectura conjunta del enunciado puede ser imprescindible para su buena comprensión (ibídem, p. 26).

Además, mencionan los mismos autores que:

Iniciar la investigación, es importante también que el estudiante sepa lo que le es pedido, en términos del producto final. Percibir que aquello que él va a hacer va a ser mostrado a sus colegas, le confiere a su trabajo un carácter público, lo que constituye para él un estímulo y una valoración personal (ibídem, p. 29).

De igual manera, “no debemos olvidar, por eso, que la interpretación de la tarea debe ser uno de los objetivos de esas clases, por lo que, gradualmente, debe esperarse que el estudiante la realice autónomamente o con sus colegas” (ibídem, p. 28). Astrid mostró durante todo el proceso una actitud positiva frente a la comprensión de los estudiantes de lo que era propuesto; lo cual se corresponde con lo mencionado por Díaz (1997 citado por Vidal, 2009, p. 3): “en ese sentido es importante que el profesor mantenga una actitud positiva hacia los estudiantes y la capacidad de comprensión del otro, para lo que debe plantearse una estrategia y una táctica de comunicación en el salón de clases. Así, la última decisión que faltaba tomar era en cuál tema matemático específico se iba a desarrollar la actividad investigativa, lo que nos comenta Astrid al respecto es que:

Los niños me decían, cuando les hice la presentación de todos los pensamientos y lo que íbamos a trabajar en el año, que el año pasado no vieron nada relacionado con la geometría. De ahí surgió la invitación para el trabajo con los niños en este tema (Astrid, reunión del grupo colaborativo, 21 de mayo de 2009).

Hasta ahora, hemos visto en este relato un trabajo extenso por parte de la maestra, el cual, en esta primera fase tiene un papel determinante en cuanto asume, en compañía de los estudiantes el inicio de las actividades investigativas. Una diferencia sustancial entre el trabajo del maestro y el estudiante en esta fase es que, si bien el estudiante propone temas y actividades interesantes para investigar, es el maestro el que conduce todas estas expectativas al cumplimiento de unos objetivos por mediación de todo lo realizado en clase.

Profundizando en este trabajo del profesor, Bishop (1999, p.149) afirma que “gran parte del éxito del trabajo de la investigación depende del enseñante, en primer lugar adaptando la situación a un nivel adecuado para el niño y en segundo lugar trabajando con el niño para desarrollar la investigación con provecho”; lo cual es de destacar en esta primera fase. En actividades de tipo investigativas, el maestro le inculca al

estudiante, por medio de su discurso educativo que

enseñar, hoy día, significa motivar e involucrar a los estudiantes en un proceso de construcción y reconstrucción de sus propios conocimientos, habilidades, actitudes, afectos, formas de comportamiento y valores. Es hacer que vivan y sientan que la ciencia es una actividad humana y no un conjunto de conocimientos que deben aprender de memoria (Vidal, 2009, p. 1).

Es por esto que en la introducción de las tareas vimos a Astrid en un papel de diseñadora de actividades que fueran en busca de un objetivo. Finalmente, Astrid les mostró a los niños la propuesta de trabajo en clase con los siguientes componentes:

- 1 La metodología de IMA como trabajo en el periodo.
- 2 El torneo de fútbol como evento del periodo para realizar las investigaciones. Un tema matemático encaminado al pensamiento espacial.

LA INTRODUCCIÓN DE LAS TAREAS: EL PRIMER COMPONENTE DE LAS INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS EN EL AULA COMO ACTIVIDAD

En el contexto de las IMA como una actividad, tenemos a la introducción de las tareas como un elemento análogo a la comunicación del objetivo de la investigación por parte del maestro a los estudiantes. Si bien es cierto que en cualquier actividad humana, el sujeto actúa sobre el objeto impulsado por sus motivos, por las necesidades, internas y externas, que surgen en él para alcanzar su objetivo, es decir, la representación que ha imaginado del producto a lograr, tenemos a esta primera fase del proceso investigativo como determinante, pues “los objetivos son la parte rectora de este sistema pues ellos relacionan entre sí a los componentes de la actividad y le dan a la misma una dirección determinada hacia el resultado final” (Vidal, 2009, p. 2).

Una ventaja destacada en ese sentido es que los estudiantes llegaron a tener claro, junto con la maestra, que el objetivo de trabajar en clase con IMA era aprender polígonos, pero no solo como una teoría para memorizar, sino como algo que se interioriza, es decir, como un saber que se apropia.

Si en vez de solo hablar de **objetivos**, mencionamos a los **objetivos de aprendizaje** de los niños y **objetivos de enseñanza** del maestro, tenemos a estos dos últimos como elementos que demarcan el camino para dos procesos bien definidos: Por un lado, tenemos a un maestro que tiene como finalidad que su saber sea apropiado por parte de los estudiantes. Y, por otro lado, tenemos al estudiante con la finalidad de apropiarse del saber que, como dijimos anteriormente, no se aprende con dispositivos cognitivos de memorización, sino con nociones que sean apropiados en el ser de cada uno de ellos. Consideramos entonces lógico que estos dos tipos de objetivos vayan en el mismo sentido:

Los objetivos de la enseñanza deben estar en correspondencia con los objetivos de aprendizaje, es decir, con las finalidades que pretenden lograr los estudiantes; así como con la demanda social. Los objetivos llegan a constituir verdaderamente el elemento rector del proceso, cuando tanto los estudiantes como los profesores los asumen conscientemente como suyos (ibíd., p. 4).

En nuestro caso, lo anteriormente mencionado tiene todo que ver en la medida en que, en esta primera fase de la metodología de IMA, los estudiantes y la maestra comprendieron y asimilaron su propio objetivo. Lo que quedaba en ese momento era comenzar a investigar, lo cual sería el tema de la segunda parte de este relato.

3.1.1.2 El desarrollo del trabajo

Luego de realizar la introducción de las tareas, los estudiantes comienzan a formular sus primeras búsquedas en el tema específico que ya fue socializado en compañía del maestro. No obstante, esta fase del trabajo, la cual en su inicio puede ser algo complicada:

La exploración inicial de la situación es una etapa en la cual los estudiantes, muchas veces, necesitan gastar algún tiempo. A los ojos del profesor, por tanto, puede parecer que nada está pasando y que los estudiantes están con dificultades en cuanto a esa actividad. Sin embargo, esa etapa es decisiva para que después los estudiantes comiencen a formular preguntas (Ponte, Brocardo y Oliveira, 2003, p. 30).

Sin embargo, el maestro debe tener presente que “[está llamado a] considerar que el conocimiento matemático (sus conceptos y estructuras), constituyen una herramienta potente para el desarrollo de habilidades del pensamiento” (MEN, 1998, p. 29). Lo que

implica que el maestro debe tener una mirada comprensiva frente al estudiante y mantenga una actitud activa y propositiva en lo que se refiere a la formulación de las preguntas y los temas a consultar.

Ponte y Matos (1992, p. 17) afirman, caracterizando a la actividad investigativa en el aula, que:

El desarrollo de esta actividad parece indicar que dos características son necesarias para trabajar con éxito en la investigación matemática: intuición y flexibilidad. La perspicacia es vital para la formulación de objetivos, de modo que coincidan con las principales características de la situación y sean capaces de tratar de términos matemáticos. La flexibilidad es importante para la selección y evaluación de estrategias, es decir, la capacidad de establecer y modificar los enfoques que no parecen conducir a nuestros objetivos.

Las ideas en cuanto a las tareas a realizar que surja de los estudiantes en el primer momento del desarrollo de las tareas es fundamental para el resto del proceso, teniendo presente, claro está, que el maestro debe mantener su acompañamiento para que lo expresado como necesario para investigar por los estudiantes, vaya en concordancia con lo que él, el maestro, tiene como objetivo de enseñanza, sin quitarle autenticidad a lo expresado por ellos, los estudiantes. En este sentido, Ponte, Brocardo y Oliveira (2003, p. 47) afirman que:

En el acompañamiento que el profesor hace del trabajo de los estudiantes, debe procurar mantener un equilibrio entre dos polos. Por un lado, darles autonomía que es necesaria para no comprometer su autoría de la investigación y, por otro lado, garantizar que el trabajo de los estudiantes vaya fluyendo y sea significativo desde el punto de vista de la disciplina matemática.

La maestra Astrid, luego de la presentación de la actividad investigativa a realizar con los estudiantes, afirmó que

Estructuré toda la propuesta, y al otro día conformaron los equipos de trabajo, ahí los niños empezaron a formular preguntas en relación al torneo de fútbol y surgieron muchísimas. Yo ese día les ayudé a limpiar la pregunta porque había muchas preguntas que estaban repetidas (Astrid, socialización del grupo colaborativo, 21 de mayo de 2009).

Y así dio inicio al desarrollo del trabajo como tal. La maestra Astrid se caracterizó durante el proceso investigativo como una persona abierta al diálogo y a la consolidación de la propuesta. De acuerdo a las interacciones que se iban a dar en el

contexto del trabajo investigativo, caracterizamos a la maestra, siguiendo a Vidal (2009, p. 3), como una persona que

[...] debe estar en constante interacción y comunicación con sus estudiantes, con sus colegas y con el resto de la comunidad de la institución donde labora. [Y que además] se debe concebir como una persona íntegra, relacionada con el contexto social en que se desempeña como tal.

LA CONFORMACIÓN DE GRUPOS: MOMENTO CLAVE PARA EL DESARROLLO DEL TRABAJO

En nuestra tercera categoría de análisis hablaremos en detalle del trabajo en grupo como elemento fundamental para la actividad investigativa, mostrando las interacciones entre el conocimiento matemático, los estudiantes y la maestra Astrid. Sin embargo, nos detendremos a hablar en esta primera categoría de este componente, ya que la conformación de estos grupos de investigación y las interacciones que se empiezan a generar al interior de ellos, constituyen un momento importante en el desarrollo del trabajo. De hecho, “en el caso en que los estudiantes trabajen en grupo, las interacciones que se generan entre ellos son determinantes en el rumbo que la investigación irá a tomar” (op. cit., p. 29). Es por esto que no ahondaremos en análisis pues, como se mencionó antes, dichas reflexiones serán materia prima de nuestra última categoría. Así, el trabajo en grupo dentro del desarrollo de las tareas implicó en el proceso investigativo varias cosas: En primer lugar, llamó a los estudiantes a la interacción con sus compañeros en un contexto en el cual no tenían mucha experiencia, como lo era la investigación matemática en clase. Sin embargo, la maestra Astrid y nosotros teníamos claro que, como afirma Vidal (2009, p. 3):

El aprendizaje es el producto de un proceso de enseñanza que tiene lugar en un contexto social determinado, por lo que el sujeto que aprende está en indisoluble unidad y en constante interacción y comunicación con el sujeto que enseña; en cuya relación pueden producirse entre ellos intercambios de papeles.

Esta construcción del conocimiento significó una primera justificación para el encuentro de reflexiones y opiniones en los grupos de trabajo. En este orden de ideas, “la

situación de trabajo en grupo potencia el surgimiento de varias alternativas para la exploración de la tarea, lo que en una fase inicial puede ser complicado en términos de autogestión del grupo” (op. cit., p. 30). Y, en efecto, esto lo comprobamos, ya que al inicio de la primera fase de este trabajo investigativo, los estudiantes mostraron puntos de vista diferentes sobre lo que querían investigar; con el paso de las clases, fueron refinando sus decisiones frente al tema de los polígonos.

Por otro lado, los estudiantes comenzaron a encontrar en la propuesta de algunos de sus compañeros preguntas análogas a las que ellos tenían, por ejemplo, se notó la inquietud sobre la relación entre la cancha y los polígonos por algunos de los estudiantes, de otro lado se vislumbraron preguntas sobre el balón de fútbol, ya que en éste se veían, según ellos, polígonos que ellos querían investigar. En las elecciones de estas preguntas y en la consolidación de estas en cada grupo de investigación, la maestra Astrid mostró constante acompañamiento, ya que “asumiendo que las investigaciones son, en general, realizadas en pequeños grupos, el profesor procura acompañar lo más posible el trabajo de cada uno de ellos” (ibídem, p. 49), lo cual la maestra no desconocía sino que, por el contrario, lo asumía como parte de su actividad de enseñanza. Además, “[el maestro está llamado a] valorar la importancia que tienen los procesos constructivos y de interacción social en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas” (MEN, 1998, p. 29); esto llama al maestro a incorporar a su quehacer, las actividades de trabajo en equipo de los estudiantes, ya que, como veremos más adelante, proporcionan escenarios favorables para la construcción conjunta de conocimiento.

La maestra Astrid mostró entusiasmo al ver la incorporación de los niños que normalmente no tenían buena disposición para la clase de matemáticas, a los grupos de trabajo de manera activa; de hecho, ella afirmó en la reunión del grupo colaborativo que “*esos niños que tenían dificultades para trabajar con los otros niños establecieron compromisos y se vincularon a otros equipos de trabajo*” (Astrid, reunión del grupo colaborativo, 21 de mayo de 2009). Además, la maestra afirmó que “*el ejercicio de formación de grupos fue muy interesante porque los niños no sólo conformaron los*

grupos, sino que se pusieron nombres como *‘Espías matemáticos’*, *‘Las figuras del balón’*, *‘pequeños investigadores’*”. Vemos, entonces, que el trabajar en equipo fue un llamado para los estudiantes a manifestar sus intereses de investigación y socializarlas con los de sus compañeros.

CARACTERÍSTICAS DEL TRABAJO EN CLASE

Luego de la conformación de los grupos de investigación por parte de los estudiantes, estos comenzaron a cuestionarse sobre los temas que deseaban investigar. El proceso específico que llevaron a cabo los estudiantes en cuanto al trabajo investigativo para la conceptualización del tema de polígonos será abordado en la segunda categoría de análisis. En este apartado hablaremos, en términos generales, de las características de esta fase, resaltando el papel del maestro como coprotagonista de la investigación. Varios aspectos son de considerar para caracterizar este tipo de trabajo en clase.

Comenzamos reiterando que si bien es cierto que en esta metodología el estudiante asume un papel protagónico —en tanto es responsable por las consultas y las conclusiones que determine a partir de ellas—, el maestro también se constituye un personaje fundamental, en la medida en que apoya el proceso investigativo, cuestiona, valida y razona matemáticamente ante las preguntas de los estudiantes. A propósito de estas acciones realizadas por el maestro, Ponte, Brocardo y Oliveira (2003, p. 52) mencionan que: “El apoyo concedido por el profesor asume varias formas: colocar preguntas más o menos directas, reforzar o recordar información relevante, hacer síntesis y promover la reflexión de los estudiantes. [Además], una de las ventajas de presentar una postura investigativa en las clases con investigaciones es el hecho de ayudar a los estudiantes a comprender que el papel principal del profesor es el de apoyar su trabajo y no simplemente validarlo”.

Es precisamente ese apoyo a los estudiantes, el que animó cada vez más a los

estudiantes, protagonistas de este estudio, a continuar investigando, pues ellos mismos, al momento de realizarles la entrevista, manifestaron aportes favorables a las actividades de la maestra Astrid a lo largo del desarrollo de las tareas:

- 1 *Con la maestra Astrid aprendí que las matemáticas son divertidas. A mi primero no me interesaba nada de las matemáticas, llegaba el profesor y yo decía "que pereza toca <<matecaspa>>, pero yo ya con la maestra Astrid aprendí a valorar las matemáticas (Liset, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).*
- 2 *La maestra nos lleva a distintos lugares, nos enseña muchas cosas diferentes a estar copiando en un cuaderno y a oír la explicación solamente. Bueno, ella busca una forma que a todos nos guste divertirnos y poder aprender. Es eso lo que tiene la maestra que yo no había descubierto (Daniela, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).*
- 3 *Cuando yo estaba en cuarto grado a mi no me gustaban las matemáticas, porque a mí me parecían aburridoras y no copiaba. En cambio, cuando pasé a quinto, con la maestra ahí sí progresé, ya sé más. Con la maestra podemos entender cosas, e ir a diferentes partes para conocer más sobre polígonos (Daniela, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).*

Estas diferentes partes, a las que se refiere Daniela, son la cancha y el patio de la escuela. Este aporte muestra que dentro de las actividades normales que realizaban los estudiantes en clase, Astrid implementó elementos del contexto relacionados con el torneo de fútbol, todo esto con el fin de integrar elementos del cotidiano con el saber matemático como tal, en este caso el referido a los polígonos.

A propósito de las estrategias implementadas por la maestra Astrid en el desarrollo de las tareas planteadas, mencionaremos el sistema de asesorías que la maestra Astrid instauró con el fin de orientar las consultas realizadas por los estudiantes. Un ejemplo de este sistema de asesorías lo narró ella como consecuencia de una experiencia que tuvo en clase con uno de los grupos de trabajo:

Inicialmente ellas traían carteleras y se aprendían de memoria lo que tenían los textos, todo lo que sacaban de la Internet, y salían a exponerlo como de memoria. Entonces les empecé a dar asesoría y en ellas les decía que usaran sus propias palabras porque de la entrevista sacaron mucha información; la idea es que muestren qué han consultado, qué han indagado (Astrid, reunión del grupo colaborativo, 21 de mayo de 2009).

Tomando el segundo aspecto resaltado anteriormente, concerniente al cuestionamiento por parte del maestro a los estudiantes, podemos decir que Astrid, constantemente, mostró una actitud interrogativa en el momento en que los estudiantes llegaban a

alguna conclusión, producto de una consulta elaborada por los miembros del grupo.

Así, la pregunta que los estudiantes le realizan al maestro es una muestra de la falta de información o la demanda por la validación de las conclusiones a las que han llegado. Al respecto, Ponte, Brocardo y Oliveira (2003, p. 52) mencionan que “muchas veces, cuando los estudiantes le colocan una cuestión, la mejor estrategia es devolverla, llevándolos a pensar mejor sobre su problema”. De manera que la pregunta del maestro al estudiante lo motiva a clarificar más sus ideas, a fin de que comprenda mejor sus planteamientos y uno de los papeles del investigar: superar la incertidumbre.

El maestro le brinda un ejemplo de búsqueda investigativa cuando le cuestiona sobre sus aportes, pues le ayuda a comprender que dentro del trabajo investigativo, la pregunta, análogo al objetivo, es el que orienta todo el trabajo. Concluimos pues en esta parte, que el estudiante retoma del maestro, elementos que con ayuda del proceso investigativo le ayuda en la construcción del conocimiento. En otras palabras “mediante el modelo del profesor, los estudiantes pueden aprender mucho sobre los aspectos fundamentales del proceso investigativo. Ese constituye pues, un elemento importante a ser utilizado para promover el aprendizaje de esa faceta del trabajo en la disciplina matemática” (ibídem, p. 50).

El tercer aspecto concerniente al trabajo del maestro, constituido por el razonamiento matemático es un punto que, en el caso de la maestra Astrid, fue un logro importante, en tanto ella aprendió a la par con los estudiantes sobre el proceso investigativo y la vinculación del tema de los polígonos con actividades cotidianas como el torneo de fútbol. La actividad investigativa demanda constantemente del profesor una actitud racional, en la medida en que los estudiantes en cualquier momento formulan preguntas que no estaban presupuestadas por él. En este sentido, hay que tener en cuenta que “en una clase en que los estudiantes realizan investigaciones matemáticas, es muy probable, y deseable, que el profesor racione matemáticamente y de modo auténtico” (ibídem, p. 49).

Cuando el maestro razona matemáticamente a lo largo del proceso investigativo, comienza a encontrar recursos en todas las actividades que ocurren al interior del aula y del contexto de su clase; empieza a encontrar también elementos matemáticos que no imaginaba cuando formulaba la pregunta y el tema con los estudiantes; cualquier aporte de parte del contexto y de los estudiantes sobre la exploración referida a los conceptos matemáticos relacionados con su búsqueda, deben ser valorados y utilizados adecuadamente por el maestro, pues “la realización de investigaciones proporciona, muchas veces, el establecimiento de conexiones con otros conceptos matemáticos y hasta extra matemáticos. El profesor necesita estar atento a tales oportunidades y debe estimular a los estudiantes a reflexionar sobre ellas” (ibídem, p. 51). A propósito de este hecho, Astrid comentó una estrategia que tuvo que utilizar a partir de la propuesta extra matemática que le hicieron algunos estudiantes.

De parte de ellos surgió la propuesta de entrevistar a personas que supieran bastante de fútbol, surgió la necesidad de que yo diseñara una actividad para mostrarles a los niños sobre la entrevista, cómo se hacía una entrevista, qué aspectos era importantes para tener en cuenta en la entrevista (Astrid, reunión del grupo colaborativo, 21 de mayo de 2009).

Una razón importante por la cual el maestro debe razonar matemáticamente es que la investigación puede tomar varios caminos cuando los estudiantes comienzan a encontrar distintas conexiones.

Una característica del trabajo de los estudiantes en el desarrollo de las tareas consiste en que algunos de sus aportes no son tenidos en cuenta por parte de sus compañeros de grupo, lo cual puede ser una desventaja para el trabajo en equipo. Sin embargo, con el apoyo que el maestro debe tener, los estudiantes que no dan su aporte pueden sugerir un cambio en la metodología de investigación que al interior del grupo se viene desarrollando, pues “ese trabajo tiende a veces, a quedar confinado al pensamiento del estudiante, no existiendo una formulación explícita [del aporte que tiene para hacer]”. (ibídem, p. 33), lo cual privaría al equipo de trabajo de un cambio que puede favorecer los resultados esperados.

En el caso específico de los estudiantes, decimos que su trabajo se caracteriza

principalmente por la búsqueda apoyada por el maestro, la consulta de los conceptos en torno al tema investigado y la formulación de conclusiones que los lleve a la conceptualización que, en compañía del maestro, se tenía como objetivo. Los estudiantes, al momento de preguntarles en algunas socializaciones y en la entrevista final, mostraron algunas de las características de su propio trabajo, resaltando, como se dijo anteriormente, que todo lo concerniente al proceso de apropiación conceptual se discutirá y analizará en nuestra segunda categoría. Por ejemplo, al preguntarles:

¿Qué diferencia hay entre esta actividad y una clase normal?
(Diego, socialización de avances, 8 de mayo de 2009)

Los estudiantes comenzaron a dar aportes como los siguientes, resaltando en ellos el proceso que llevaban a cabo, es decir, el desarrollo de las tareas:

- 1 *Por medio del torneo de futbol, hemos llevado a cabo muchas cosas, entonces no es solo ir detrás de un balón. Es más que eso, no solo en la matemáticas, sino en ciencias y demás materias, entonces eso sí nos puede ayudar* (Daniela, socialización de avances, 8 de mayo de 2009).
- 2 *En una clase normal no nos explican, no nos ponen a volar la inteligencia, no nos ponen a investigar, sino que solo es a copiar y a copiar y uno así no aprende. En cambio la maestra nos pone a investigar, por eso es que nos pone a volar la inteligencia* (James, socialización de avances, 8 de mayo de 2009).

Estos dos aportes muestran que los niños valoraron el cambio que este tipo de metodología marca con respecto a las clases convencionales, al menos en el área de matemáticas. Por otro lado, vemos como Daniela valora el hecho de que el torneo de fútbol haya favorecido el trabajo en otro contexto con fines al aprendizaje. Por otro lado, los estudiantes destacaron de esta fase el hecho de que las actividades que realizaron los llevaron, a partir de una pregunta, a la búsqueda de conceptos que los llevaba a más preguntas. Veamos cómo lo expresaron:

Nosotros empezamos investigando sobre la cancha de futbol y el balón, y terminamos investigando sobre la geometría: los polígonos, los sólidos platónicos. O sea, lo que tratamos de decir es que íbamos por un camino recto y nos desviamos, pero no fue malo, sino que antes fue mejor, que nos permitió aprender otras cosas e investigar más (María Isabel, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).

Al respecto, veamos lo que James afirma y, posteriormente, lo que manifestó alrededor

del aporte que le brindó esta investigación:

Nosotros comenzamos con las investigaciones a partir del torneo de fútbol que realizó el profesor Freddy, y empezamos a investigar más sobre la cancha. Nos desviamos por el camino mejor, así como dijo mi compañera.

Aprender más de los lados de los polígonos, de las figuras geométricas, cosas que yo no sabía, e investigamos otras cosas. Al fin vamos llegando a un acuerdo: que estamos intentando todo por descubrir qué son los polígonos (James, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).

Este último aporte menciona al “descubrimiento de qué son los polígonos” como un objetivo; en ese sentido, entendemos que lo realizado por los niños, junto con la maestra Astrid constituyeron acciones en el marco de la realización de una Actividad. En este sentido, Ortiz y Chávez (2008, p. 3) mencionan que:

Una acción resulta ser el proceso subordinado a la representación del resultado que debe alcanzarse, o sea el proceso subordinado a un objetivo consciente. Al igual que el concepto del motivo se correlaciona con el de la actividad, el concepto del objetivo se correlaciona con el de la acción.

Ibáñez (2003, p. 4), también se refiere a las acciones al mencionar que: "las actividades se componen de acciones, que son sistemas de coordinación al servicio de fines, que a su vez, representan pasos intermedios de cara a satisfacer el motivo". Esta mirada sobre las acciones dentro de las actividades mantienen una analogía con el trabajo realizado dentro de la metodología de IMA pues, si bien es cierto que, la introducción de las tareas se relacionan con la formulación de los objetivos de la actividad, el desarrollo de las tareas por medios investigativos se constituyen en acciones que llevan al sujeto, en interacción con otros sujetos, a alcanzar el mencionado objetivo.

Así, los recursos que el investigador utiliza a lo largo del proceso se constituyen a su vez como mediadores de la actividad, en la medida en que ayudan al sujeto a realizar las acciones.

Daniela también aportó mencionando que:

Hemos aprendido también que no solamente los polígonos son nuestro propósito; si nuestro propósito hubiera sido los sólidos, solo estaríamos aportando en los sólidos y no es así. Mire que estamos viendo

los polígonos, nos estamos metiendo por otro carril o camino para aprender otras cosas. [...] Yo quiero resaltar la importancia de investigar, pues salieron más preguntas aún. Yo doy el ejemplo de cuando yo estaba respondiendo mi pregunta: la maestra me dijo que investigara aún más y me salieron más y más preguntas de los ángulos, entonces, de acuerdo a cada uno nos puede pasar lo mismo. Con una pregunta podemos concurrir a otra pregunta que nos permita aprender cosas que no hayamos podido aprender. Entonces esta investigación fue lo máximo que se le haya ocurrido [a la maestra], porque esto es genial para nosotros saber más, esto es ideal (Daniela, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).

Vemos entonces la opinión que tenían los niños frente al trabajo investigativo que se llevó a cabo en la clase. El punto a tocar ahora en este análisis es la mención de dos acciones que llevaron a cabo los estudiantes por sugerencia de la maestra Astrid.

EL DIARIO DE LOS NIÑOS: MEDIADOR EN LA ACTIVIDAD INVESTIGATIVA

Ya mencionamos que una de las acciones que realizaron los niños dentro de la actividad investigativa, sugerida por la maestra Astrid, fue la socialización de los avances que los niños iban realizando a medida que las consultas se estaban llevando a cabo. La segunda sugerencia que le realizó la maestra a los estudiantes fue la escritura de un diario de clase que, a su vez, actuase como diario de investigador. En este diario los estudiantes podrían escribir sus impresiones de las clases de investigación que estaban llevando a cabo.

La propuesta de la escritura de un diario demandaba, en principio, saber qué era un diario. Por ese motivo, nosotros realizamos búsquedas en torno a lo que era un diario y a lo que se escribe en él. Zabalza (2004, p. 15), quien ha trabajado con diarios de clase de los maestros, y cuyos aportes adaptaremos a los estudiantes, nos da un primer acercamiento a lo que es un diario al decir que: “Los diarios de clase, al menos en lo que se refiere al sentido que reciben en este trabajo, son los documentos en los que los [estudiantes] recogen sus impresiones sobre lo que va sucediendo en sus clases”. En ese sentido, también podemos decir que, si bien es cierto que, el profesor debe acompañar en todo momento la escritura de los diarios, es el estudiante quien

finalmente decide qué escribir pues

El contenido del diario puede ser cualquier cosa que, en opinión de quien lo escribe, resulte destacable. El contenido de las narraciones puede quedar plenamente abierto (a iniciativa de quien escribe el diario) o venir condicionado por alguna consigna o planificación previa (cuando se delimita qué tipo de asuntos deben ser recogidos en el diario (ibíd., p. 16).

El diario constituyó un registro importante para que la maestra Astrid viera la construcción por parte de los estudiantes a lo largo de la investigación pues “el profesor necesita recoger informaciones sobre el modo cómo se va desarrollando el trabajo de los estudiantes, desde el primer momento de la investigación” (Ponte, Brocardo y Oliveira, 2003, p. 47).

Los estudiantes, ante la propuesta de la maestra Astrid, comenzaron a escribir los diarios, mostrando en primer lugar, y como consecuencia de una sugerencia nuestra, una pequeña autobiografía. Esto con el fin de que cualquier lector que tuviera dicho diario en sus manos, supiera quién era el escritor.

El diario, por lo tanto, se convirtió en un mediador entre la inquietud del maestro por conocer cómo van sus estudiantes y el saber que los niños quieren comunicar de modo que sea comprendido por el lector. Respecto a esto, se debe tener en cuenta que “la escritura de los resultados permite al profesor acceder posteriormente al trabajo de los estudiantes de forma analítica, a su desempeño y a planificar sus clases siguientes”. Y, en cuanto al segundo aspecto, los mismos autores mencionan varios elementos a tener en cuenta: en primer lugar, “la capacidad de los estudiantes de comunicar matemáticamente, cuya importancia es bien conocida, puede ser trabajada de forma espontánea y genuina por los estudiantes, una vez que habla sobre sus propios pensamientos” (ibíd. p. 35-36). Aparte de esto, “la importancia que la maestra le atribuye al registro escrito es bien interiorizada por los estudiantes, que se preocupan en escribir, lo más fielmente posible sus resultados”. Finalmente, en ese orden de ideas:

[Del trabajo investigativo] se sigue la importancia de la realización de un registro escrito del trabajo de investigación. Es solamente cuando se disponen a registrar, que los estudiantes se confrontan con la necesidad de explicar sus ideas y establecer consensos y un entendimiento

común en cuanto a sus realizaciones (op. cit., p. 33).

Ahora, presentaremos la tercera y última fase del camino de las IMA: la socialización de los resultados.

3.1.1.3 La socialización de los resultados

Al terminar la fase del desarrollo del trabajo, el camino investigativo termina con el proceso de socialización final de los resultados de la investigación ya que “al final de la investigación, el balance del trabajo realizado constituye un momento importante de compartir conocimientos” (Ponte, Brocardo y Oliveira, 2003, p. 41). De esta manera, la maestra organizó las exposiciones finales por medio de carteleras y comentarios verbales en cuanto a los resultados obtenidos. Una vez más, el maestro actúa de manera activa, pues “el profesor debe garantizar que sean comunicados los resultados y los procesos más significativos de la investigación realizada y estimular los estudiantes a cuestionarse mutuamente” (ibíd.).

Siguiendo este orden de ideas, los autores mencionan que es importante ayudar a los estudiantes “a hacer una síntesis de la actividad, describiendo sus avances y recursos, los objetivos que tenían en mente y las estrategias que seguirán” (ibídem, p. 53), de modo que el resto del grupo comprenda de una manera general lo que un determinado subgrupo investigó. De esta manera, los estudiantes, en esta fase del trabajo investigativo, comienzan a confrontar sus descubrimientos y conclusiones con sus demás compañeros. En nuestro caso, los estudiantes tenían claro, por cuenta de la maestra Astrid y nuestra, que la discusión de los resultados construidos les ayudaría a comprender, entre otras cosas, las relaciones de la geometría con el fútbol.

La fase de discusión es pues, fundamental para que los estudiantes, por un lado, ganen un entendimiento más rico de lo que significa investigar y, por otro, desarrollen la capacidad de comunicar matemáticamente y de reflexionar sobre su trabajo y su poder de argumentación (ibídem, p. 41).

Ese poder de reflexión y argumentación sobre lo que descubrieron será objeto de nuestra segunda categoría de análisis, pues en ella veremos el lenguaje técnico que comenzaron a utilizar los estudiantes luego del proceso investigativo; además veremos

la importancia que los niños le adjudicaron al proceso investigativo como cambio metodológico para aprender matemáticas.

Por ahora, y teniendo claro que “la investigación que se comunica debe dejar clara para cualquier lector la situación investigada, el proceso seguido y los resultados y las conclusiones que se han hallado” (Bishop, 1999, p. 154), los estudiantes comenzaron a dar su opinión a todo el grupo en cuanto a la valoración que le dieron a la metodología IMA. Por ende,

las investigaciones constituyen un contexto muy favorable para generar buenas clases de discusión entre los estudiantes. Sin embargo, la clase de matemática, habitualmente no es un lugar en que los estudiantes estén habituados a comunicar sus ideas ni a argumentar con sus pares (Ponte, Brocardo y Oliveira, 2003, p. 41).

De hecho, los estudiantes tenían esto claro pues no comprendían cómo una clase de matemáticas serviría para investigar. Sin embargo, y luego de todo el proceso investigativo, le expusieron estas conclusiones finales a los estudiantes. En primer lugar, Daniela hizo una petición en cuanto a la continuidad del trabajo realizado:

Profesores: si ya acabamos una pregunta, ¿por qué no nos ponen otra pregunta?, pues esta nos ha permitido aprender muchas cosas aquí. Entonces, a mi me parece que a los que les parezca la clase aburridora, con esto sí pueden reflexionar y les puede parecer "divertida", para que aprendan y se "diviertan" al mismo tiempo (Daniela, exposición final, 12 de junio de 2009).

Este primer aporte surgió como resultado del proceso investigativo que llevaban a cabo los estudiantes. En este proceso, ellos descubrieron muchas capacidades que no conocían de ellos mismos en cuanto a su actividad de investigar, aprender matemáticas y relacionarse con los demás compañeros. Daniela habló de estos dos primeros aspectos cuando mencionó que:

Yo recuerdo que con la otra maestra de matemáticas yo era una estudiante normal, pero con la maestra Astrid descubrí que hay más métodos para explotar la inteligencia que uno tiene por dentro (Daniela, exposición final, 12 de junio de 2009).

En cuanto al último aspecto, Marilyn afirmó:

"A mí esta actividad me ha permitido conocerme más con los niños del colegio, solidarizarme más con ellos porque he hecho más actividades con ellos" (12 de junio de 2009)

El hecho anotado por Daniela y Marilyn constituye un logro importante de esta metodología. En una clase “convencional” es posible que los estudiantes no se interrelacionen como ocurrió durante el proceso de implementación de las IMA, pues la actividad investigativa, como se comentó antes, conlleva a la puesta en común de las opiniones y reflexiones de los miembros del grupo investigador. El solo hecho de que la maestra cambiara el uso de la tiza y del tablero como único recurso e implementara a la investigación como elemento crucial para el desarrollo de la clase, fue reconocido por Liset, quien afirmó que:

La maestra explica y no nos pone a copiar sino que nos pone a investigar (Liset, exposición final, 12 de junio de 2009).

Por otro lado, y para mencionar solo algunos aspectos en cuanto a los aportes matemáticos de la investigación, los estudiantes afirmaron delante de todo el grupo que:

[La investigación] a mí personalmente me ha ayudado a saber más sobre los polígonos y sobre las distintas figuras geométricas (Yamile, exposición final, 12 de junio de 2009)

Por otro lado, Liset mencionó que:

Las matemáticas están en todo: en la casa y en el colegio. Yo acá aprendí de todo, yo no sabía nada y el doy muchas gracias a la maestra Astrid y a ustedes dos porque me han ayudado a entender y a saber más de la materia (Liset, exposición final, 12 de junio de 2009).

Este reconocimiento de parte de los estudiantes al trabajo de la maestra Astrid y a nosotros como acompañantes se escuchó de otros estudiantes, quienes resaltaron nuestra actividad de la siguiente manera:

Yo no sé si en nombre de todo el grupo, pero yo quiero darles las gracias porque me permitieron aprender algo que no sabíamos; por medio de eso aprendí muchas cosas, muchas gracias, espero que también todo el grupo diga lo mismo (Daniela, exp. final, 12 de junio de 2009).

El proceso de investigación, en síntesis mostró resultados satisfactorios en tanto los estudiantes descubrieron en esta actividad la llegada al cumplimiento del objetivo planteado desde la primera fase: la apropiación del concepto de polígono. A lo largo de las dos categorías restantes, los estudiantes irán mostrando cómo fue posible llegar a tal conceptualización de una manera más específica. Como lo mencionamos al inicio de

esta categoría, esta consistía en caracterizar a la actividad investigativa como elemento determinante para que los estudiantes utilizaran una metodología alterna que les diera a los estudiantes herramientas para aprender matemáticas y encontrar valores en las interrelaciones con sus compañeros. Finalmente, y a propósito de estos elementos que destacamos de la actividad investigativa, Liset finalizó su exposición afirmando que:

La maestra también nos ha ayudado mucho en nuestra investigación porque también nos ha explicado cosas que nosotros no entendemos nos ha enseñado como podemos hacer esto o aquello y nos ha enseñado que lo primero de un trabajo es la amistad (Liset, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).

3.2 APROPIÁNDONOS DEL CONCEPTO DE POLÍGONO

En nuestra primera categoría realizamos una serie de reflexiones en torno a las características de la metodología de IMA, un acercamiento teórico que manifiesta sus ventajas (y también algunas de sus dificultades) y el análisis de su implementación general a la luz de las voces de los niños protagonistas, la maestra Astrid y la teoría que la sustenta.

Durante la utilización de la metodología de aula, notamos dos procesos que transversalizaron las actividades realizadas:

- ∫ La apropiación del concepto de polígono por parte de los estudiantes, cuyo análisis será objeto de la presente categoría.
- ∫ Las interrelaciones entre el conocimiento matemático, los estudiantes y la maestra Astrid a lo largo del proceso, las cuales serán analizadas en la tercera categoría.

Como fue mencionado anteriormente, durante el proceso de las IMA los estudiantes llevaron a cabo la apropiación del concepto de polígono. En esta categoría narraremos como fue esto posible, resaltando las actividades realizadas por los grupos de trabajo investigativos escogidos para el análisis de los datos.

LAS INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS EN EL AULA Y LA GEOMETRÍA: UN ABORDAJE TEÓRICO

En primer lugar, debemos tener en cuenta que, como se mencionó en el capítulo anterior, el planteamiento del tema de polígonos surgió a partir de las decisiones tomadas en clase por parte de la maestra Astrid y todo el grupo de niños. En este sentido podemos preguntarnos *¿por qué investigar en geometría?*

Pues bien, Ponte, Brocardo y Oliveira (2003, p. 71) mencionan que “La geometría es particularmente propicia, desde los primeros años de escolaridad, para una enseñanza fuertemente basada en la exploración de situaciones de naturaleza exploratoria e investigativa” ya que la geometría se constituye en una de las ramas de la matemática que se relaciona más íntimamente con los procesos de apropiación conceptual, por medio de actividades de interacción con los objetos espaciales de una manera más tangible.

Las investigaciones geométricas contribuyen para percibir aspectos esenciales de la actividad matemática, tales como la formulación y pruebas de conjeturas y la búsqueda de demostrar generalizaciones. La exploración de diferentes tipos de investigación geométrica puede también contribuir para concretar la relación entre situaciones de la realidad y las situaciones matemáticas, desarrollar capacidades, tales como la visualización espacial y el uso de diferentes formas de representación, evidenciar conexiones matemáticas e ilustrar aspectos interesantes de la historia y la evolución de las matemáticas (ibídem).

Por otro lado, Abrantes (1999, p. 3) afirma que “la geometría se torna, tal vez más que cualquier otro dominio de la matemática, especialmente propicia para una enseñanza fuertemente basada en la realización de descubrimientos y en la resolución de problemas, desde los niveles escolares más elementales”. De esta manera, comenzamos a vislumbrar que las matemáticas, y específicamente la geometría, se presta para que los estudiantes construyan el conocimiento a partir de las exploraciones, la formulación de conjeturas y la socialización de los resultados obtenidos sin tener la necesidad de una orientación teórica rigurosa.

En la geometría, hay un inmenso campo para la elección de tareas de naturaleza exploratoria e investigativa, que pueden ser desarrolladas en el aula de clase, sin necesidad de un gran número de prerrequisitos y evitando, sin gran dificultad, una visión de la Matemática centrada en la ejecución de algoritmos y en “recetas” para resolver tipos de ejercicios (ibídem, p. 4).

Los currículos actuales convergen en la idea de que la geometría es una de las ramas de la matemática que más se relaciona con la realidad, en la medida en que los objetos de nuestro espacio son análogos con los geométricos; de esta manera encontramos en la geometría y sus conceptos básicos, el material propicio para que los estudiantes investiguen y le den otro significado a la temática que está en el aula de clase de matemáticas. La geometría les permite a los estudiantes comprender la naturaleza de los objetos que los rodean, no por medio de procedimientos memorísticos, sino por medio de la exploración de objetos, los cuales son geométricos.

En este sentido, Ponte, Brocardo y Oliveira (2003, p. 71) mencionan, en cuanto a la geometría, que “su exploración puede contribuir para una comprensión de hechos y relaciones geométricas que van mucho más de simple memorización y utilización de técnicas para resolver ejercicios”. Esto nos lleva a una primera conclusión: la geometría, por su presencia en todos los objetos del cotidiano, justifica su carácter investigativo al permitir la exploración, la formulación de conjeturas y la búsqueda de definiciones que vayan en concordancia con las propiedades de dichos objetos.

De hecho, estos autores mencionan que “las investigaciones geométricas contribuyen para percibir aspectos esenciales de la actividad matemática, tales como la formulación y prueba de conjeturas y la búsqueda y demostración de generalizaciones” (ibídem).

Otro aspecto que resalta la importancia de la geometría en el contexto investigativo, muestra que en el currículo de diferentes países como Portugal y Brasil se sugiere la implementación de actividades de tipo investigativo.

Por todo el mundo se vienen haciendo recomendaciones curriculares para la enseñanza de la geometría. De modo general, viene siendo contestada la visión de la Matemática Moderna que destacaba el papel de la geometría para ilustrar el carácter deductivo y axiomático de la

Matemática y desvalorizaba los aspectos ligados a la observación, la experimentación y la construcción (ibídem, p. 82).

La Matemática Moderna estuvo enmarcada en la utilización de una estructura lógica rígida, en detrimento del componente activo de la geometría. La mirada geométrica de la Matemática Moderna, la cual surgió en los años 60 y 70, se basaba en la memorización de conceptos, la utilización del teorema de Pitágoras, de las fórmulas de área y volumen y algunas aplicaciones en áreas como dibujo. En este tiempo, se retoma la mirada sobre la geometría de una manera más activa.

Las tendencias curriculares actuales convergen al considerar que esa área de la matemática es fundamental para comprender el espacio en que nos movemos y para percibir aspectos esenciales de la actividad matemática. Se resalta por ejemplo, la importancia de estudiar los conceptos y objetos geométricos desde el punto de vista experimental e inductivo, de explorar la aplicación de la Geometría a situaciones de la vida real y de utilizar diagramas y modelos concretos en la construcción conceptual en Geometría (ibídem, p. 3).

La mirada curricular actual le concede al profesor la oportunidad de mirar al estudiante como un ser activo para la apropiación de conceptos por medio de actividades propias de investigación: exploración, demostración y socialización de conceptos apropiados. De esa manera, “el trabajo en torno a tareas de investigación geométricas permite al profesor perseguir una recomendación curricular, hoy largamente aceptada, de que debe ser dado tiempo y oportunidad al estudiante para organizar sus experiencias espaciales” (ibídem, p. 89).

Con estas primeras reflexiones, comenzaremos a narrar el proceso que llevaron a cabo los niños en lo que se refiere a la apropiación del concepto de polígono. Tres fueron los grupos elegidos para el análisis. Los tres temas tratados fueron: (a) El concepto de ángulo. (b) Los polígonos. (c) Los polígonos y los poliedros.

Mi noción de ángulo

Comenzaremos a narrar cómo Daniela acogió el tema de los ángulos para apropiarse del concepto de polígono. A ella le pareció importante exponerles a los estudiantes lo que, según sus apreciaciones, era el concepto más básico de todos: el de ángulo.

Daniela se caracterizó durante todo el proceso por ser líder durante todo el proceso para todos sus compañeros, por mantener relaciones dialógicas constantemente con la maestra Astrid y con nosotros. Ella siempre mostró mucho interés por compartir los conocimientos que adquiriría con la mediación de las IMA.

Así, durante la fase de introducción de las tareas, Daniela nos preguntaba sobre la jugada famosa de René Higuita (El Escorpión). Nosotros le comentamos la historia de esa jugada, dónde había sido y con cuál equipo estaba jugando la selección Colombia. Ante esta respuesta, Daniela fue a consultar y ver la jugada para hallar una relación con la geometría. A la clase siguiente, llegó con su pregunta, referida con la jugada del escorpión de Higuita: *¿cuál es su relación con la geometría?* En una de las socializaciones, Daniela nos hizo una primera aproximación a lo que ella había comprendido de los ángulos y consecuentemente su relación con los polígonos.

Acá [señalando la cartelera que realizó] podemos ver las figuras geométricas que hizo René Higuita con el cuerpo cuando formó la figura del escorpión. Son el ángulo obtuso y el ángulo recto y en su cuerpo formó la curva (Daniela, socialización de avances, 8 de mayo de 2009).

Daniela, luego de hacer exploraciones, nos dio una primera noción, a partir de las lecturas que había realizado y sus reflexiones, de lo que es ángulo:

Llamamos ángulo a la región comprendida entre dos semirrectas que tienen el punto de origen en común. A ese punto se le llama vértice y cada semirrecta se le llama lado como podemos ver en la cartelera que les muestro. Esto es un poco más de la investigación sobre las figuras geométricas y los ángulos (Daniela, socialización de avances, 8 de mayo de 2009).

Esta imagen corresponde a una parte de la cartelera que Daniela le mostró a todo el grupo. En ella resaltamos el dibujo que realizó, emulando la jugada de René Higuita.



Imagen 7. Cartelera expuesta por Daniela. 8 de mayo de 2009

Queremos resaltar en este primer acercamiento que realizó Daniela, y es que el concepto que ella dio no es el que convencionalmente los niños realizan primero; de hecho, muchos estudiantes creen al principio que un ángulo son las dos semirrectas y el vértice, pero no tienen en cuenta que el ángulo es la **región** y no las semirrectas.

Este hecho lo valoramos de Daniela, pues al vincular la forma del cuerpo de René Higueta con su noción de ángulo, no tomó como suya la idea de que un ángulo está determinado por una semirrecta; en cambio, al decir que lo que formaban sus piernas era un ángulo, tuvo en cuenta lo que realmente es: la región comprendida entre los dos segmentos con un punto en común (que en este caso corresponden a las piernas del jugador).

Daniela nos estaba mostrando con sus aportes que el concepto de ángulo que estaba construyendo, con ayuda de las Investigaciones Matemáticas en el Aula, era el que precisamente se utiliza como definición formal, aun en grados estudiantiles más elevados.

En los avances expuestos por primera vez por parte de Daniela, los estudiantes no comprendieron totalmente. Por esto, la maestra Astrid estuvo constantemente asesorando y dando indicaciones a los distintos grupos para que realizaran actividades que permitieran que los demás miembros del grupo comprendieran los avances que se estaban presentando. Una de las indicaciones dadas por la maestra para Daniela fue:

Bueno vamos hacer lo siguiente: nos vamos a idear una actividad. Daniela vamos a pensar en una actividad que permita que todos los compañeros puedan entender y comprender lo que estás diciendo. Si ustedes alcanzaron a entender todos los avances de la investigación de Daniela, ¿qué pasa

entonces? Hagamos recomendaciones al equipo, ¿qué recomendaciones harían ustedes? Bueno, Daniela, entonces esa es la invitación, piense en una actividad que permita que todos y todas podamos escuchar, entender, comprender... (Astrid, socialización de los avances, 8 de mayo de 2009).

En vista de esto, Daniela planeó, junto con la maestra Astrid en las asesorías, una actividad que les ayudara a comprender lo que para ella estaba significando de ángulo. Por medio de varios palillos unidos por uno de sus extremos, formó un “Generador de Ángulos” el cual utilizó para formar, junto con los compañeros del grupo, ángulos de diferente amplitud.

Por medio de esta actividad, los niños lograron comprender la naturaleza de los ángulos y los clasificaron como agudo, obtuso, recto, llano o completo de acuerdo a la amplitud que encontraban. Daniela se mostró satisfecha por el aporte que les dio a los niños en el camino por apropiarse del concepto de polígono.

Ella siempre tuvo presente que las ideas que les diera, ayudaría a los demás grupos de investigación a aprender. Queremos resaltar un aspecto, a propósito del trabajo colaborativo de Daniela: una clase con Investigaciones Matemáticas en el Aula ayuda a que los estudiantes le aporten con sus opiniones y su saber al aprendizaje de los demás compañeros; en este sentido, el papel activo que asumen es apoyado por el maestro quien, aparte de validar el proceso, aporta con sus reflexiones y saberes.

Cuando finalizó esta actividad, Daniela expresó su contento en el diario

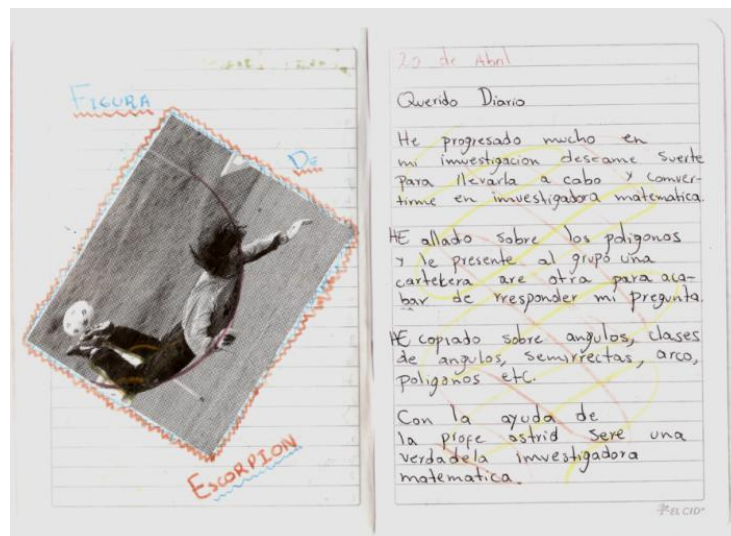


Imagen 8. Diario de Daniela

Yamile también comentó en su diario lo relacionado con la actividad que orientó Daniela.

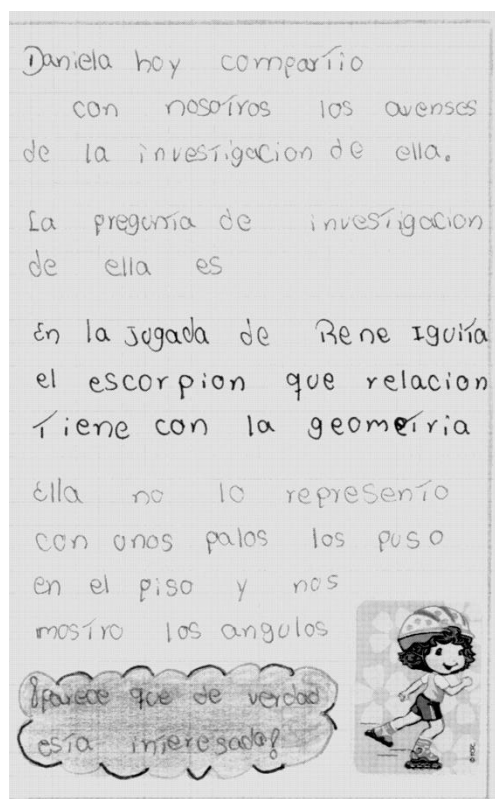


Imagen 9. Diario de Yamile

A lo largo del análisis de las tres categorías, veremos que una de las estudiantes que más aportó en cuanto a reflexiones fue Daniela, pues siempre tuvo actitud investigativa y colaborativa con los estudiantes. Por medio de sus avances y la manera en que se expresaba utilizando conceptos como semirrectas, arcos, vértice, entre otros, de una manera natural, podemos decir que Daniela se apropió de lo que es un ángulo, lo que le sirvió para construir un concepto de polígono por medio de los aportes de sus demás compañeros.

Finalmente, cuando todo el proceso investigativo terminó, nuestra asesora nos acompañó a una socialización de los trabajos realizados. Cuando Daniela realizó la presentación de lo que había realizado, Diana, al ver lo que decía en su cartelera y señalando esta, le preguntó:

–¿Cuál es entonces tu noción de ángulo?

–Mi noción de ángulo no está ahí [Señalando la cartelera], sino aquí [con su mano derecha en su pecho]. Mi noción de ángulo es que un ángulo es la región que se encuentra entre dos semirrectas que tienen en común un punto que se llama vértice.

(Socialización final, 24 de septiembre de 2009)

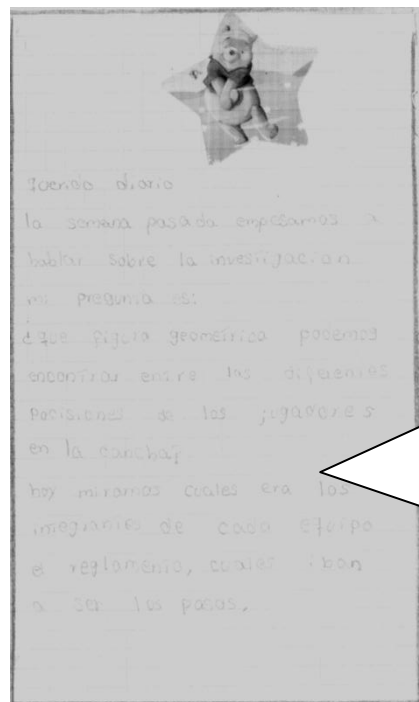
El gesto de Daniela, poniendo su mano en el corazón, indicaba que el concepto fue totalmente apropiado por ella, pues en su manera de expresarse se notaba que no estaba utilizando algo que se supiera de memoria sino unas palabras que salían espontáneas como resultado de un proceso que durante dos meses, la había llevado a ver la clase de matemáticas como un lugar de exploración, investigación, socializaciones y convivencia.

A la par con el proceso que estaba llevando a cabo Daniela, los demás grupos de investigación realizaban sus exposiciones, apoyándose mutuamente y con las ideas de ángulo de Daniela presentes en todas las actividades. El siguiente grupo trabajó conceptualmente sobre los polígonos, veamos cómo fue.

LOS POLÍGONOS Y EL FÚTBOL: UNA CUESTIÓN DE TÁCTICA

Cuando los estudiantes concordaron con la maestra y con nosotros que el proyecto transversal sería el torneo de fútbol, los niños (hombres) se sentían con una ventaja en cuanto a la naturaleza de este deporte. Sin embargo, las niñas mostraron mucho interés por explorar las relaciones entre el fútbol y la geometría. En la fase de la introducción de las tareas, Yamile, Liset y Marilyn se reunieron y nos comentaron que una de ellas había visto un partido de fútbol, y que en ese partido, los comentaristas mostraban las

jugadas polémicas por “fuera de lugar” y notaron que cuando congelaban la imagen, los jugadores estaban casi siempre en la misma posición formando figuras...La pregunta que surgió entonces fue *¿esas figuras mostradas eran polígonos?* De ahí surgió su pregunta de su investigación y sobre la cual realizaron las actividades exploratorias: *¿Qué figuras geométricas podemos encontrar en las diferentes posiciones de los jugadores en la cancha?* En su diario, Yamile expresó este comienzo:



Querido diario

La semana pasada empezamos a hablar sobre la investigación. Mi pregunta es: ¿Qué figuras geométricas podemos encontrar entre las diferentes posiciones de los jugadores en la cancha?

Hoy miramos cuales eran los integrantes de cada equipo, y cuales iban a ser los pasos.

Imagen 10. Diario de Yamile.

La pregunta que se formularon las estudiantes implicaba explorar directamente sobre lo que es un polígono. Ya contaban, por fortuna, con los aportes que Daniela les había hecho sobre lo que eran los ángulos; lo que quedaba ahora era investigar sobre las condiciones que debía cumplir una línea quebrada para ser un polígono.

En una de las socializaciones, las niñas mostraron la siguiente cartelera (ver siguiente Imagen), en la cual se notó el avance referido a la exploración sobre la definición de

polígono. En la cartelera podemos apreciar el triángulo que forman las defensas con el arquero, y el rombo cuando se hace el saque inicial.

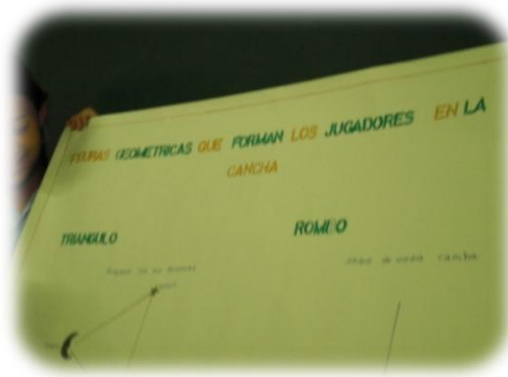


Imagen 11. Cartelera de Yamile, Liset y Marilyn. 8 de mayo de 2009

Nuestra investigación es si las posiciones de los jugadores forman figuras geométricas. El arquero con sus defensas, por ejemplo, forman un triángulo; después de un gol o cuando comienza el segundo tiempo siempre ponen el balón en la mitad y a los dos que les toque sacar se hacen a un lado y los otros al otro lado y ahí forman el rombo (Yamile, socialización de avances, 8 de mayo de 2009)

A la maestra Astrid le pareció muy pertinente la ejemplificación que realizaron:

Miren que interesante lo que nos cuenta este grupo ¿será que resultarán mas figuras geométricas en esas jugadas dentro de un partido de futbol? hay que seguir investigando entonces (Astrid, socialización de los avances, 8 de mayo de 2009)

Además de esta cartelera, ellas llevaron otra en la que expresaban el concepto de polígono; concepto que habían ido construyendo mientras realizaban las exploraciones al interior de las acciones investigativas.

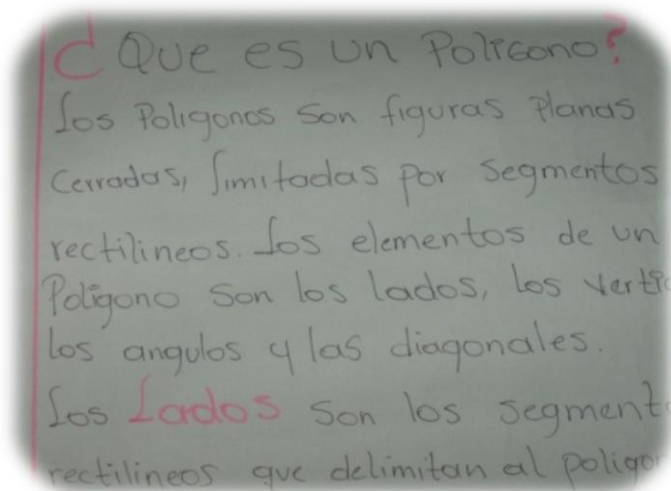


Imagen 12. Cartelera de Yamile, Liset y Marilyn. 8 de mayo de 2009

En el primer párrafo de la cartelera apreciamos lo que para ellas era un polígono y se lo explicaron a todos los niños del grupo. En el segundo párrafo, teniendo en cuenta las preguntas que se podrían suscitar, definieron el concepto de lado, como delimitador de polígono. Este concepto tendría mucho que ver para la investigación del tercer grupo analizado en este trabajo.

Ya teniendo un poco más claro lo que era un polígono, los estudiantes podrían comprender en qué sentido uno de los polígonos que se formaban eran triángulos. Una de las carteleras que expusieron después tiene un abordaje conceptual frente a lo que era un triángulo y cómo se clasificaban. Además, en esta clase quedó claro que un triángulo no tiene diagonales. La cartelera expuesta por este grupo de estudiantes fue la siguiente:

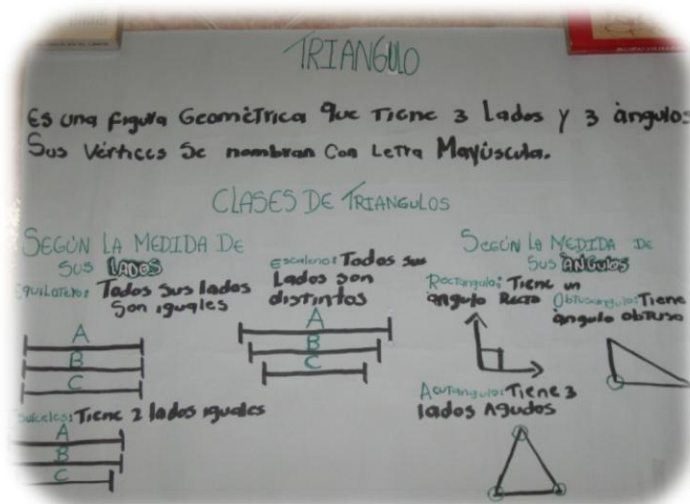


Imagen 13. Cartelera de Yamile, Liset y Marilyn. 22 de mayo de 2009.

De hecho, este grupo se dio a la tarea de llevar ejemplos de diversos tipos de polígonos diseñados por ellas mismas, lo cual es muestra de sus procesos de apropiación. La cartelera expuesta por ellas fue la siguiente:

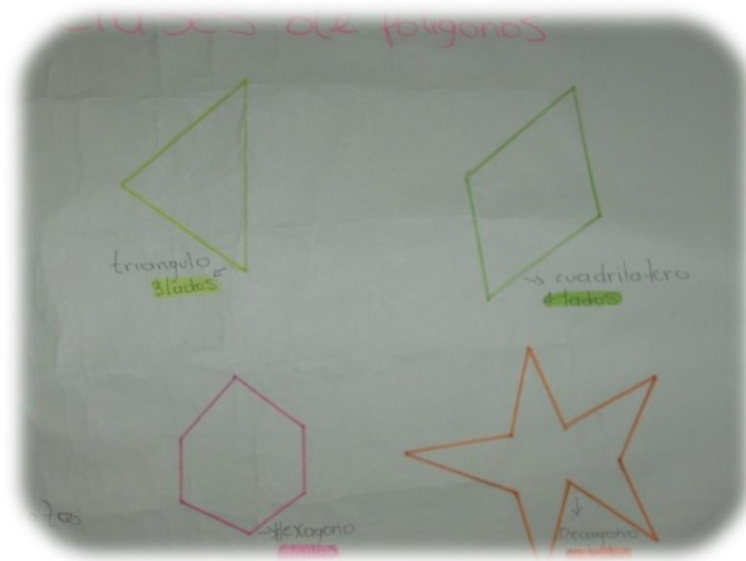


Imagen 14. Cartelera de Yamile, Liset y Marilyn. 12 de junio de 2009

La exploración, las socializaciones con los demás grupos, y las demás actitudes investigativas les permitieron, a ellas y a todo el grupo, comprender lo que es un polígono sin necesidad de recurrir a clases convencionales, en las que el maestro asume todo el protagonismo y los niños solo lo escuchan y, en el mejor de los casos, lo memorizan.

El entusiasmo por los niños en el aula de clase se notó a lo largo del proceso investigativo; un ejemplo de este hecho se dio en la clase de socialización cuando expusieron Yamile, Liset y Marilyn. Luego de que ellas socializaron, a algunos niños les

surgió la pregunta: *¿Qué relación tiene entonces el fútbol con la geometría?* A lo que otros niños comenzaron a responder:

Después de haber hecho este trabajo encontré ángulos, cosas espaciales, encontré un sistema solar, encontré varias cosas. También me metí a varias materias, me metí en la materia de sociales, ciencias, español. También podemos ver que en la cancha se ven diferentes figuras, hay trazas de diagonales, hay figuras planas, hay rectas, figuras curvas que podrían ser el balón de fútbol y también hay diferentes clases de ángulos, los ángulos casi todos se hicieron con las manecillas del reloj. (James, socialización final, 12 de junio de 2009).

Al igual que James, otros de los estudiantes se animaron a darle respuesta a esta pregunta, y respondieron a partir de sus experiencias de clase y del entorno en que se desenvuelven:

Me parece que sin la geometría el fútbol no estaría bien, porque para poder medir bien y todo lo del fútbol se necesita la geometría, las figuras y las expresiones de los jugadores. También nos la pasábamos leyendo porque la maestra todos los lunes nos daba un periódico y ahí encontrábamos cosas de fútbol y a veces asuntos tecnológicos, pues la tecnología también tiene que ver con las matemáticas (Yamile, socialización final, 12 de junio de 2009).

Marilyn no solo tuvo presente su proyecto para responder a esta pregunta, sino que recurrió a lo que había expuesto Daniela, al decir que:

Por ejemplo, también en la cancha de fútbol, cuando el arquero tapa el gol, como René Higuera lo tapó; ahí también se podrían formar figuras (Marilyn, socialización final, 12 de junio de 2009).

Yamile encontró una analogía entre la respuesta y lo que había apropiado en su proyecto de investigación:

También en la cancha de fútbol se ve el sistema solar, la bola que hay en la mitad de la cancha es el sol y las posiciones de los otros jugadores son los otros planetas y de ahí usted los mide y saca las figuras geométricas (Yamile, socialización final, 12 de junio de 2009).

Liset reiteró su satisfacción al encontrar, por medio de la actividad investigativa, una razón plausible para ver las matemáticas como algo presente en el cotidiano:

Los números son todo en la vida, por ejemplo el teléfono de su casa tiene un número, la dirección, la ropa, la talla de los zapatos. La matemática no es solamente

copiar, es entender lo que la maestra está explicando; ella nos ha llevado a la cancha a medir y la pasamos súper bien (Liset, socialización final, 12 de junio de 2009).

Las reflexiones que se dieron en estas clases dieron cuenta de la apropiación que todo el grupo iba adquiriendo. Desde nuestra mirada, considerábamos que los niños ya comprendían lo que era un ángulo, tenían presente las características de los polígonos y los encontraban en todas las cosas y actividades que se daban en su cotidiano.

En cuanto a este último aspecto, la experiencia nos ha mostrado que en casi todos los entornos sociales, los estudiantes no encuentran una justificación totalmente válida para aprender los conceptos matemáticos; creemos que una posible causa es que no se le inculca desde el principio al estudiante la existencia del saber matemático en cada uno de los aspectos de nuestra vida. Los niños miraban ya a las matemática al servicio de la vida social, no al contrario, como suele suceder.

Al respecto, Lizcano (2006, p. 1) se pregunta *¿qué vemos si, en lugar de mirar las prácticas populares desde 'la matemática', miramos la matemática desde las prácticas populares?* y lo que encontramos, o mejor, lo que encontraron los niños fue a unas matemáticas que responden a todas las experiencias del sujeto que interactúa con los demás, que construyen saber y que lo comunican a los demás.

Un ejemplo de esta puesta de las matemáticas al servicio de las prácticas populares la encontramos en el planteamiento de la pregunta de Yamile, Liset y Marilyn: las tácticas realizadas en el fútbol y otros deportes más sugieren la disposición planificada de los jugadores en el lugar de juego. De esta manera, y como lo expresa el subtítulo de este apartado, la relación entre el fútbol y los polígonos es cuestión de táctica. Yamile, luego de las presentaciones realizadas por su equipo y al tener conocimiento de su participación como protagonista de esta investigación copió lo siguiente en su diario:

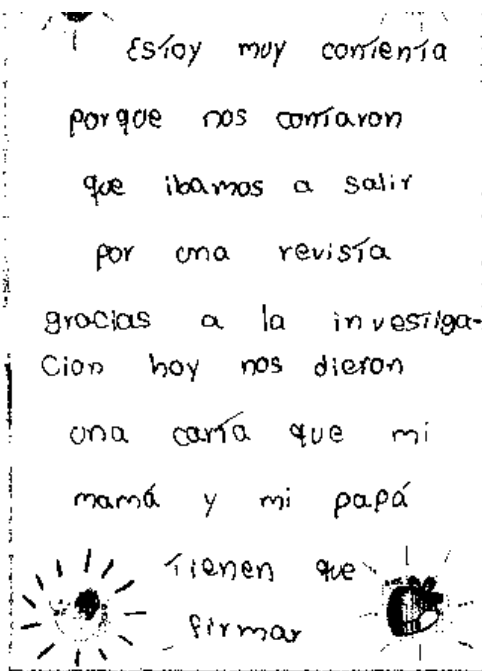


Imagen 15. Diario de Yamile

POLÍGONOS Y POLIEDROS: VINCULANDO EL PLANO CON EL ESPACIO

¿Qué sería del fútbol sin un balón? Fue una pregunta que nos realizamos con frecuencia. La misma pregunta se realizaron María Isabel, Luz Daniela, Harrison y James durante la fase de introducción de las tareas. Si bien es cierto que el balón es un objeto de nuestro cotidiano, el estudio sobre este fue una buena excusa para realizar actividades investigativas. Los pentágonos y hexágonos que se aprecian en el diseño de algunos balones (que corresponden a icosaedros truncados), o los triángulos que vemos en el diseño de algunos otros (correspondientes a icosidodecaedros), sugieren que debe haber alguna relación entre los polígonos (concepto que estaban apropiando) y el balón de fútbol. Fue de esta manera que surgió la necesidad de entender qué diferencia a una figura plana como el polígono, de un cuerpo como el balón de fútbol; consecuentemente con esta inquietud surgió la pregunta del grupo de María Isabel *¿Qué nombre se le puede dar al balón de fútbol como cuerpo geométrico?*

Es importante tener en cuenta lo siguiente: para un profesor puede ser relativamente fácil decirle a un estudiante la definición de esfera y comentarle que un ejemplo de esta es el balón de fútbol, pero *¿qué hay detrás de la interpretación que un estudiante le pueda dar al balón como cuerpo?, ¿qué puede diferenciar entonces a una esfera de un círculo o una circunferencia?* Estas son el tipo de preguntas que es probable que quede en la mente del profesor, pero, por diferentes motivos, tal vez referidos al tiempo, estas inquietudes son dejadas de lado.

Pasar del concepto de figura al concepto de cuerpo, por medio de actividades como las IMA, favorece la comprensión y diferenciación entre ambos conceptos. En este sentido, los Lineamientos (1998, p. 33) afirman que “[el estudiante y el profesor están llamados a enfatizar en] el desarrollo de la percepción espacial y de las intuiciones sobre las figuras bi y tridimensionales, la comprensión y uso de las propiedades de las figuras y las interrelaciones entre ellas”.

Además, según Abrantes (1999, p. 4) “en geometría, el estudiante se contacta con una gran variedad de objetos y situaciones. Se trabaja en el plano o en el espacio, con figuras planas o con poliedros, por ejemplo, pudiéndose descubrir y explorar un gran número de propiedades y conexiones. La relación entre situaciones de realidad concreta y situaciones matemáticas encuentra en la geometría innumerables ejemplos y concretizaciones”.

En vista de este hecho, explorar cuerpos geométricos como la esfera para diferenciarla de figuras como el círculo fue considerado por nosotros como una actividad pertinente para comprender de una manera más efectiva, pero sin perder rigor teórico, lo que es un polígono.

Cuando los estudiantes de este grupo de investigación comenzaron a explorar y a hacer consultas, se encontraron con que el balón es un sólido geométrico, lo cual los llevó por un camino insospechado para ellos: el de los poliedros. Veamos cómo exploraron estos conceptos:

En una de las socializaciones, los estudiantes le comentaron al grupo los avances de la investigación que tenían. Los integrantes del grupo comenzaron a explicarle a los estudiantes qué era un poliedro afirmando que son cuerpos (lo que implica que tienen 3 dimensiones), cuyas caras son polígonos regulares. Es de pensar que abordar esta exposición por parte de los estudiantes no tuvo mayor complejidad, ya que todos los niños del grupo reconocían bien lo que eran polígonos. Lo único nuevo sobre los polígonos que expusieron los integrantes de este grupo de investigación es que un polígono regular tiene lados y ángulos iguales. Los demás niños se organizaron en subgrupos con una cantidad considerable de poliedros de distinto tipo: pirámides, prismas, cuerpos redondos y poliedros regulares. Se les pidió en primer lugar a los niños, que sacaran aparte los poliedros que ellos consideraban regulares, con el fin de notar en estos la forma de sus caras, el número de vértices, caras y aristas con el fin de escribir los hallazgos en el diario y realizar socializaciones al final. Las siguientes fotografías muestran el proceso:



Imagen 17. Trabajo con los sólidos platónicos.

8 de mayo de 2009

En ambas imágenes se aprecia cómo los niños realizaban procesos de observación y manipulación de los sólidos. Es probable que en todas las clases de matemáticas sea la primera de estas dos acciones la más utilizada, pues la segunda se ha dejado de lado, quitándole un poco del componente del descubrimiento de patrones y generalización al aprendizaje de la geometría. Los niños

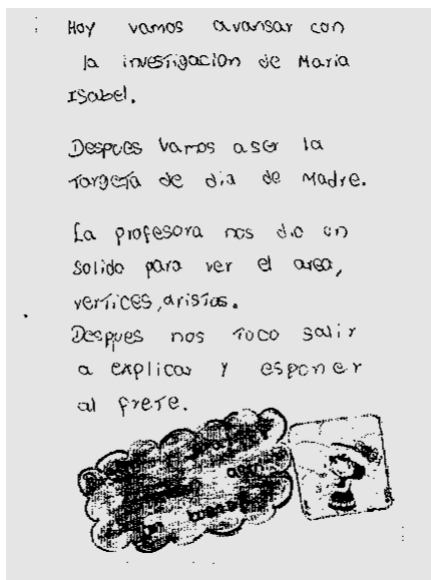
Imagen 16. Trabajo con los sólidos platónicos. 8 de mayo de 2009



percibieron en los sólidos, especialmente en el cubo, las tres dimensiones que caracterizan a los cuerpos geométricos: mirando un vértice y las tres aristas que concurrían a él.

- Hemos visto que el hexaedro tiene 6 caras, aristas tiene 12 y vértices tiene 8. El polígono que se forma es el cuadrado, en cada vértice se encuentran tres caras. (Yamile)
- ¿Y qué es eso de polígonos regulares que aparece allí? (Astrid)
- O sea que son iguales las caras. (Yamile)
- ¿que por que tiene profundidad? (Astrid)
- Porque es un polígono, porque es un sólido y todos los sólidos tienen profundidad. (Yamile)
- ¿en ese hexaedro se puede ver otro polígono que no sea el cuadrado? (Daniela)
- Si. (Yamile)
- ¿Y cuál sería? (Daniela)
- El rombo (Yamile)
- ¿Esta figura que le estamos mostrando es un cuadrado o un cubo? (Diego)
- Es un cubo y está formado por cuadrados porque el cuadrado es un polígono (Daniela)
- ¿Cuál es la diferencia entre cuadrado y cubo? (Astrid)
- Que el cubo es tridimensional y es sólido, ¿cierto?, ya que los sólidos están formados por polígonos, en este cubo si tendría cuadrados pero no es completamente un cuadrado, sino, que cada cara es un cuadrado. (Daniela)
- ¿a ver quienes dicen que un cuadrado tiene profundidad? (Astrid)
- No, porque un cuadrado tendría que ser un sólido para tener profundidad, en cambio un cuadrado tiene dos dimensiones que son alto y ancho (Luz Daniela)
- No porque un cubo tiene alto, ancho y profundidad y el cuadrado no tiene profundidad o sea que es bidimensional
- No porque el cuadrado es plano y el cubo tiene profundidad, o sea no es completamente plano, sino, que tiene partes planas, pero no es completamente plano. (María Isabel)
- Astrid: muy bien, vamos a continuar con otro grupo.
- ahora vamos hablar del octaedro, el octaedro tiene 8 caras, tiene 12 aristas, tiene 6 vértices y el polígono que lo forma son triángulos equiláteros y caras concurrentes en cada vértice hay 4. (Sara)
- ¿Cuál es entonces la diferencia entre polígonos y poliedros? (Walter)
- uno es para las figuras planas y el otro para cuerpos.
- ¿Cómo se llama el sólido? (Diego)
- Se llama dodecaedro, tiene 12 caras, tiene 30 aristas, tiene 20 vértices. (James)
- ¿Cómo se llama el polígono que tiene cinco lados, para poder responder “¿de qué polígono está formada una cara del dodecaedro?”. (Diego)

La parte de los estudiantes realizaron a lo que habían realizado Yamile comentó en su



socializaciones concluyó, y algunas reflexiones en torno en las socializaciones; diario que:

Imagen 18. Diario de Yamile

Como lo mencionamos anteriormente, el balón de fútbol y el tema de poliedros fue una excusa para vincular el tema de polígonos con el de poliedros. Con el paso de las asesorías y las exploraciones las clases, los estudiantes del grupo efectivamente se dieron cuenta de que el balón de fútbol es una esfera, pero en vez de simplemente apropiarse del concepto, notaron la relación que tiene con los polígonos.

¿Qué nombre se le puede dar al balón de futbol como figura geométrica?, esta es la pregunta que ellas están investigando y nos van a presentar (Astrid, socialización final, 12 de junio de 2009)

El balón de fútbol es una esfera, el cual es un cuerpo sólido delimitado por unos puntos cuyas curvas equidistan de otro interior llamado centro de la esfera (Luz Daniela, socialización final, 12 de junio de 2009)

Luz Daniela, junto con María Isabel, James y Harrison realizaron dibujos, muestra de una apropiación del concepto de poliedro, como consecuencia de otra apropiación, la de polígono. El diario de Luz Daniela muestra la exploración y la construcción conceptual que hizo ella:

¿Qué es una esfera?

Una esfera en geometría, es un cuerpo sólido limitado por una superficie curva cuyos puntos equidistan de otro interior llamado centro de la esfera. La esfera proviene de un término griego, que significa **pelota**. (Para jugar)

Elemento de la esfera

- centro: el centro de la esfera es el centro del círculo
- Radio: cualquier segmento que une el centro con cualquier punto de la superficie se denomina Radio

Conclusión: Dibuja la esfera y señala cada uno de sus elementos

Definición: Cualquier cuerda que pasa por el centro.
 Los segmentos que unen 2 puntos de la superficie esférica.
 Los polos son los puntos de intersección del eje de giro con la superficie esférica.

me viene a explicar las veces que sean necesarias para que hagamos todo en orden.

Y estoy muy contento porque vamos a investigar los polígonos es muy espectacular trabajar y investigar los polígonos que vamos a ver con: matemáticas y la profesora Astrid.

En la Daniela Betancur Bengito
 2 de Abril

Tenemos de fútbol con el torneo de fútbol hemos aprendido diagrama en líneas, matemáticas decimales, perímetro, área etc.

Estoy muy contento por que mi grupo y yo fuimos el que ganó, todos nos pusimos muy felices aunque el profesor Astrid se fue muy decepcionado por que su grupo 5-2 fue el que perdió.

también en la cancha vamos a investigar los polígonos no se cuando empezamos pero cuando empiece voy a tener muchas ganas de estudiar y trabajar con la profesora Astrid Astrid y Diego y todos nosotros y trabajaremos en mucho convivencia.

esta es la pregunta que me gustaría investigar pregunta
 ¿que nombre se le puede dar al balón como figura geométrica?

la semana pasada consultamos que es la investigación pero antes de eso nos hicieron una encuesta que 5 preguntas y en una de ellas preguntaba que te gustaría investigar y acuerdo a eso, la profesora Astrid sacó 9 preguntas y yo y mi grupo escogimos la

Imágenes 19 y 20. Diario de Luz Daniela

Yamile, como en las otras oportunidades, escribió en su diario la conclusión a la que llegó el grupo:

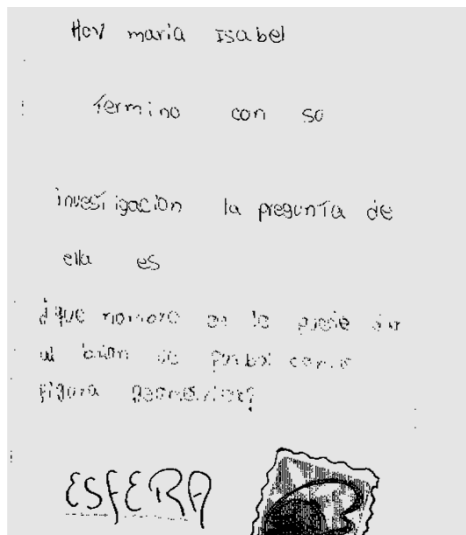


Imagen 21. Diario de Yamile

En las últimas reflexiones que realizaron los estudiantes en compañía de la maestra Astrid, los niños comentaron que:

Me pude dar cuenta que nosotros vivimos en un mundo de sólidos, un mundo geométrico. Hicimos un trabajo donde estaban las figuras, y eso parecía la ciudad de nosotros. Me di cuenta que nosotros vivimos en medio de los sólidos (James, socialización final, 12 de junio de 2009)

La profe me ha enseñado que nosotros vivimos en un mundo de sólidos y polígonos. Uno mira una ventana y tiene forma de cuadrado. A mí antes no me gustaban las matemáticas y ya me encantan, es la materia que más me gusta (María Isabel, socialización final, 12 de junio de 2009).

Reflexiones como estas y como las que hemos relatado a lo largo de esta categoría de análisis son una muestra del nivel de construcción conceptual a la que es posible llegar por medio de las IMA. En este sentido nos queda por decir que la apropiación del concepto de polígono se hizo posible en la medida en que todos los niños asumieron actitudes de investigador y se comprometieron, junto con la maestra Astrid, a comprender las matemáticas como elemento esencial en nuestro contexto pues, como

lo mencionaron la mayoría de los estudiantes, nuestro mundo está lleno de poliedros y polígonos.

Las voces de los niños y de la maestra Astrid sirvieron de motivación para comprender que se puede aprender matemáticas “haciendo”, es decir, asumiendo actitudes más activas y que vayan encaminadas a construir conocimiento antes que a recibirlo como ya establecido. Es decir, los niños descubrieron mediante las IMA que el saber matemático, en este caso los polígonos, se constituye culturalmente en la interacción de los sujetos.

LA MEDIACIÓN DE LAS INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS EN EL AULA

Como lo mencionamos anteriormente, el objetivo de la actividad direcciona las acciones del sujeto en interacción con los sujetos. Ahora, para llegar a la consecución del objetivo que se construye el sujeto, aparecen una serie de instrumentos que le permiten llevar a cabo las acciones necesarias para tal fin.

Es aquí donde aparecen los mediadores: en la construcción que las personas realizan para lograr sus objetivos. En nuestro caso, teniendo claro el objetivo de nuestra actividad, las IMA aparecieron como una actividad que medió para que los niños, por medio de las recomendaciones de la maestra Astrid y nuestras, construyeran y legitimaran en el aula, el concepto de polígono. Por esto es que ahora podemos afirmar, luego del análisis de estas dos primeras categorías, que las IMA mediaron para que los niños aprendieran geometría pues encontraron en la investigación una herramienta que les posibilitara la construcción conceptual; lo que sigue ahora es mostrar cómo fueron las interrelaciones que se dieron entre el conocimiento matemático, los estudiantes y la maestra Astrid con esta **mediación** de las IMA.

3.3 LAS INTERRELACIONES EN EL AULA DE CLASE: UNA MIRADA DESDE LAS “INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS EN EL AULA”

En esta categoría abordamos un aspecto importante que surgió como consecuencia de la actividad realizada a lo largo de las investigaciones con la mediación de la metodología implementada: las interrelaciones que se dieron entre el conocimiento matemático, la maestra y los estudiantes. Este último componente referido a los estudiantes adquiere relevancia en la medida en que se vislumbró en el trabajo en equipo, las dificultades que se pueden presentar en el marco de un trabajo grupal y la intervención de la maestra en las interrelaciones que se presentan entre el conocimiento matemático y los estudiantes.

Con el pasar de las clases, los grupos de investigación formados empezaron a experimentar algo que tal vez nunca habían sentido: el haber trabajado en equipo en labores investigativas, la confrontación de teorías y, sobretodo, el hecho de saber que el aporte que hacían favorecía los resultados de los demás. Era de esperarse que se presentaran inconvenientes, pero con la socialización oportuna de opiniones y la puesta en común del objetivo de la actividad, los estudiantes que presentaban dificultades en cuanto al trabajo en grupo, pudieron superarlas y mostrar algunos resultados de investigación, a nuestro parecer satisfactorios. En este relato, mostraremos algunos apartes de lo que expresaban los estudiantes y la maestra en relación a las interrelaciones que, con mediación de la actividad del torneo de fútbol, se presentaron en el aula.

Comentaremos varios aspectos relacionados con las interrelaciones en el aula de clase entre los estudiantes y la maestra Astrid y con el conocimiento matemático. Estos aspectos a mencionar son:

- ∫ La importancia del trabajo en grupo: el trabajar en grupo fue una de las características más importantes de la metodología de clase. Vamos a realizar varios comentarios respecto a este aspecto, pues nos dio elementos muy importantes para el análisis en lo que se refiere a la vinculación del trabajo matemático con los valores del trabajo en equipo.
- ∫ Las dificultades que se pueden presentar en el trabajo investigativo grupal: en este apartado reconoceremos algunos conflictos que se presentaron al interior de los grupos de investigación; cada uno de ellos caracterizado por una falta de aceptación y tolerancia frente a la opinión y las reflexiones de algunos compañeros con relación a los otros.
- ∫ Las actividades de la maestra Astrid en el trabajo en grupo: la maestra fue gran protagonista también del proceso investigativo, por ello queremos mostrar, cómo desde sus aportes hacia los grupos, mantuvo un ambiente de trabajo agradable para la consecución de la investigación.
- ∫ **La importancia del trabajo en equipo:** Trabajar en equipo fue la apuesta que hicimos al momento de plantear la metodología de clase. El proponer el trabajo en grupo tuvo dos razones: en primer lugar, los estudiantes podían comprender la complejidad de afrontar la opinión de los demás; en segundo lugar, llegarían a acuerdos por medio de discusiones mediadas por las conjeturas o las consultas que hacían al interior de la investigación. Tudella et al. (1998, p. 7) mencionan un primer acercamiento a estas razones: “En materia de educación, [la investigación] es esencial para permitir que los estudiantes interactúen unos con otros, aprendiendo a discutir y argumentar en defensa de sus puntos de vista.

Al momento de hacerles la entrevista a los estudiantes, uno de los puntos que tomó más relevancia fue la consideración del trabajo en equipo como un componente determinante para los buenos resultados obtenidos en la investigación. En ese sentido, hicimos la siguiente indagación:

Vamos a hablar más específicamente del trabajo en equipo. Con las tareas de investigación, ¿qué pueden mencionar sobre el trabajo en equipo? (Diego, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).

Esta pregunta era prácticamente obligatoria, pues a lo largo de todo el proceso de investigación descubrimos algunas habilidades e inconvenientes que tuvieron los niños al momento de trabajar en equipo. Algunos grupos se fueron disolviendo con el transcurso del tiempo.

Por otro lado, los niños que más dificultades presentaban frente a la convivencia no eran capaces de asumir que las ideas de los demás eran acertadas; sin embargo, con el paso de las clases, las diferencias se fueron disipando, hasta que al final los grupos permanecieron fuertes y llegaron a resultados satisfactorios. Los niños lograron evidenciar que con un buen trabajo en equipo podrían llegar a conclusiones muy valiosas para ellos y para todo el grupo.

Ante la pregunta que les realizamos en la entrevista, algunas respuestas fueron:

El trabajo en equipo a mi me ha enseñado valores como la amistad, el respeto, la tolerancia, y muchos más. Además, también fue importante porque nosotros éramos muy desorganizadas con las carteleras que hacíamos (Yamile, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009)

Hay varias cosas a resaltar en la respuesta de Yamile: en primer lugar, la actividad investigativa no solo fue abordada para realizar apropiaciones en torno a un tema matemático como los polígonos, también aportó para que los valores que ella mencionó, como la amistad, el respeto y la tolerancia, tomaran protagonismo en las relaciones sociales, aun en un contexto de clase de matemáticas.

Es este el momento en el cual nos damos cuenta de que las actividades humanas, aunque tengan un objetivo definido, conllevan una serie de acciones que nos permiten conocer las características del ser social. Una clase de matemáticas “tradicional” demoraría menos tiempo en dictar el tema de polígonos, pero podría dejar de lado

aspectos humanos tan importantes como los valores, la confrontación de las ideas y el trabajo en equipo. Leontiev, citado por Ibáñez (2003, p. 4), menciona al respecto que

Si retiráramos la actividad humana del sistema de relaciones sociales y de la vida social, no existiría ni tendría estructura alguna. Con sus diversas formas, la actividad individual humana es un sistema en el sistema de relaciones sociales. No existe sin tales relaciones. La forma específica en la que existe está determinada por las formas y los medios de interacción social material y mental creados por el desarrollo de la producción.

Las interrelaciones, generadas por la actividad toman mucha importancia en la medida en que asume al ser humano individual, como alguien que puede cambiar su entorno mientras interactúa en sociedad. Carvalho (2005, p. 15) menciona al respecto de estas interacciones que:

La construcción de conocimiento y los mecanismos que están subyacentes no son socialmente neutros o simples, y cuando los diferentes compañeros se envuelven en un esfuerzo conjunto para resolver una tarea, obtienen beneficios propios, pues construyen soluciones para la tarea que individualmente no conseguirían.

Otro punto interesante a mencionar en la respuesta de Yamile es que el orden en la presentación de los resultados, es una consecuencia de los acuerdos que se van haciendo a lo largo del trabajo en equipo. El grupo de Yamile tenía problemas en cuanto a la toma de decisiones para la presentación de los avances a los demás niños del grupo. Muchas veces le delegaban la responsabilidad de diseñar las carteleras a cualquiera de las compañeras, sin embargo, lograron terminar la labor investigativa en comunión. En el aporte siguiente, Yamile mostró lo expuesto anteriormente:

Al otro día nos reunimos por la noche y mi mamá y la de Liset [para terminar las carteleras] (Yamile, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).

Otro ejemplo de esta situación fue la siguiente:

También en el grupo que yo estaba con Yamile había muchos inconvenientes porque estábamos peleando; a veces no nos reuníamos, teníamos otras cosas y no nos importaba esto casi. Ahora ya hemos aprendido que sí tenemos que pensar lo que vamos a hacer, por ejemplo, hablar en grupo, a veces cada uno tomaba una decisión y así no es (Liset, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).

Lo anterior es muestra de lo dicho arriba. El equipo se consolida en la medida en que todos asumen las responsabilidades en común y no deleguen todo a un solo integrante. Insistimos que es igualmente válido pensar en que en una clase “tradicional”, el tema se pudo haber abordado con resultados satisfactorios a los ojos del profesor, pero es en este sentido en que notamos una gran diferencia con lo que hemos visto siempre: la actividad investigativa favorece la comprensión y apropiación de los conceptos matemáticos y aportan a la consolidación de valores. El ser humano, en esta perspectiva, se muestra como alguien que tiene a su disposición las herramientas para cambiar su entorno, al decir de Ortiz y Chávez (2008, p. 3):

Es así que podemos observar que la actividad se caracteriza por la utilización de instrumentos de carácter socializado; esto es, el hombre orienta su actividad no sólo por la mediatización del instrumento, sino por la actividad de otras personas con las que se relaciona .

Otras respuestas a la pregunta que les formulamos en la entrevista fueron las siguientes:

El trabajo en equipo no es fácil pero hay que lucharla para poder hacer algo (María Isabel, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).

En el trabajo en equipo siempre uno tiene que ser responsable y luchar para poder lograr lo que se quiere (Harrison, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).

Vale la pena retomar las palabras de María Isabel cuando menciona que no es fácil trabajar en equipo; esta impresión se debe, según lo que vimos en la clase, a que no había costumbre por parte de los estudiantes de confrontar las opiniones que tenían los demás niños cuando realizaban las consultas o las presentaciones de los avances. La “lucha” que menciona María Isabel se mantuvo siempre entre cada uno de ellos y las pretensiones de que los aportes que dieran fueran determinantes para los resultados a mostrarle al resto del grupo; esta lucha, caracterizada también por la entrega hacia el trabajo a realizar, la evidenciamos en las discusiones que los estudiantes llevaban a cabo cuando formulaban conjeturas frente a un tema planteado en la clase.

Sin embargo, en esos casos, la maestra intervino como mediadora para el alcance de los objetivos propuestos. Harrison cerró esta parte del relato con una última impresión respecto a lo que para él significó la actividad investigativa y el trabajo en equipo:

Eso [la investigación] nos ayudó a trabajar en equipo, a aprender más, a ser capaces nosotros mismos de una investigación y a aprender mucho más. (Harrison, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009)

LAS DIFICULTADES EN EL TRABAJO INVESTIGATIVO GRUPAL

Cuando realizamos investigaciones de manera individual es normal tener muchas dificultades en algunos aspectos como el tiempo, los recursos, la falta de ideas y la demora para que los objetivos se puedan alcanzar. Aun si las investigaciones fueron en grupo, notamos que este tipo de dificultades tienden a permanecer. Vamos a relatar ciertos aportes que los estudiantes dieron en la entrevista realizada al final del proceso, en el que se destacan algunas impresiones sobre las dificultades que como grupo tuvieron, pero que de igual manera pudieron superar satisfactoriamente.

En primer lugar, el tener los estudiantes que confrontar las ideas, era un verdadero reto para los estudiantes, y el tener que mediar en todo ese proceso también era una prueba para la maestra y para nosotros como investigadores dentro del proceso de IMA. Para comenzar, vale la pena mencionar lo expuesto por Carvalho (2005, p. 17) referente a esta confrontación de ideas de los estudiantes:

Cuando dos estudiantes se empeñan activamente en un confrontar sociocognitivo con el objetivo de resolver una tarea en el salón de clases, están presentes diferentes argumentos y puntos de vista, es decir, el trazo cognitivo del conflicto. De este proceso resulta un doble desequilibrio: por un lado, interindividual, esto es, entre los dos compañeros; por otro intraindividual, cuando el sujeto se cuestiona acerca de su respuesta cuando compara la suya con la respuesta del otro. Resolver un conflicto sociocognitivo obliga al sujeto a traspasar una situación de conflicto cognitivo, al mismo tiempo que tiene que gestionar una relación social con un compañero con el cual tendrá que compartir puntos de vista para llegar a un consenso y, así mismo, resolver la tarea.

Ciertos estudiantes, al momento de cuestionarlos sobre las dificultades que tuvieron en el proceso de investigación al interior de los grupos, respondieron mencionando aspectos como la falta de concordancia, de tiempo y disposición de algunos de sus miembros.

En mi grupo se presentaron muchos inconvenientes, a lo último lo pudimos resolver y trabajar en equipo... Hay veces que no contamos con los demás. Pensamos que la única palabra que vale es la de nosotros y la de los demás compañeros no, y eso no es así (Yamile, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).

Ante esta respuesta, Liset también dio su reflexión:

Pensamos que nosotros somos más que la otra gente y mentiras, todos somos iguales (Liset, entrevista a los niños, 12 de junio).

Carvalho (ibídem, p. 4) también menciona algo relacionado con ese trabajo cognitivo de convivir con la opinión y los procesos de aprendizaje de los demás:

Cuando un estudiante tiene que formular una respuesta a una tarea cognitiva comienza por la construcción de una representación de la tarea, los conocimientos que posea son necesarios para su propósito. Del mismo modo, si está trabajando con otros es posible que esa situación esté siendo experimentada por ese otro de una forma u otra, y a partir de ahora el nuevo conocimiento es un juego social complejo en el que la negociación de significado tendrá un papel crucial.

Estas reflexiones son consecuencia de lo que se estaba presentando al interior de los grupos de investigación: La respuesta de Yamile, por ejemplo, es una muestra de que los estudiantes no aceptaban la opinión de los otros, esto lo notamos cuando discutían de manera brusca ante la propuesta de algunos de los integrantes de una conjetura o una manera de solucionar un ejercicio. Ante este tipo de dificultades, Ponte y Matos (1992, p. 17) nos dan un aporte teórico que describe en cierta medida lo que acabamos de mencionar:

[...] Estas dificultades tienen un aspecto positivo. Proporcionan buenas oportunidades para el debate y la reflexión, muestran algunos errores y promueven el conocimiento de cuestiones más generales que pueden llegar a ser importantes para el adelanto de la investigación .

Esas dificultades, presentes a lo largo de cualquier trabajo grupal, fomentan la escucha, la tolerancia, el respeto y el sentido de pertenencia por lo que se hace en conjunto. Valores estos que la maestra Astrid ha llevado a la actividad regular de clase por medio de sus aportes y reflexiones a lo largo de las sesiones de investigación.

Carvalho (2005, p. 18) da también una descripción de este tipo de eventualidades, mostrando su carácter común a todos los trabajos que se hacen en conjunto:

No basta con que los sujetos produzcan diferentes respuestas; es necesario que se confronten con ellas de un modo interactivo y dinámico, es preciso que los pares resuelvan el desacuerdo, reconstruyendo argumentos, estrategias y significados.

Si en un trabajo grupal no hay espacio para la puesta en común de opiniones, el objetivo no se va a alcanzar, pues habrá respuestas incluso contradictorias. La metodología del trabajo en grupo que propusimos para la investigación se fundamentaba en que todos aportaran con su participación para que juntos llegaran a resultados satisfactorios. La dificultad siempre radicó en el hecho de que a nadie, y más con poca experiencia de trabajo en equipo, le parece cómodo que de entrada otra persona le refute lo que defiende. Otra respuesta frente a la pregunta de las dificultades para trabajar en grupo fue:

Pues nosotros en la Semana Santa no nos pudimos reunir porque algunos no pudieron, entonces se nos presentó ese inconveniente para poder avanzar en el marco de la investigación. Pero entonces tomamos decisiones, investigamos en internet, fuimos a la biblioteca e investigamos (James, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).

El tiempo también es un factor importante en lo que se refiere a las dificultades al interior de la actividad investigativa. La metodología de IMA se caracteriza por el uso efectivo del tiempo en cuanto a las actividades que la conforman: la introducción de las tareas, la formulación de conjeturas, la prueba de ellas y la socialización. Mary

respondió a la pregunta por las dificultades del trabajo en grupo con algo relacionado con esto:

A veces investigaba uno solo porque uno no podía reunirse con los otros amiguitos (Mary, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009)

En el caso de nuestra actividad investigadora con el torneo de fútbol, como consecuencia de las construcciones que se estaban llevando a cabo en la institución, no era posible tener clases largas y era necesario dejar tareas extraclase para poder avanzar. Al interior de los grupos de clase, los estudiantes se proponían actividades que muchas veces no podían realizar como consecuencia de los lugares de su morada, sus ocupaciones por fuera de los deberes escolares, entre otros aspectos.

Una de las respuestas que dan cuenta de esto, fue la mencionada arriba por parte de James; otra respuesta que combina las dos dificultades tratadas hasta ahora (la falta de tiempo y la posibilidad de poner en común la opinión) fue:

Al principio de la investigación yo tuve un problema con Liset, entonces solamente Brenda y yo hicimos el trabajo y dijimos mentiras diciendo que lo hicimos entre todas y, prácticamente quien lo hizo fue mi mamá. (Yamile, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).

Esta declaración de Yamile fue muy discutida al interior de la clase porque le estaban delegando las responsabilidades a una de las madres de los investigadores, algo que no fue evaluado como correcto por ellos y que comprometía la convivencia al interior del grupo de investigación.

Algunos estudiantes mostraron discordia al trabajar con los compañeros, esto debió obedecer a varios factores supuestos por nosotros: en primer lugar, tal vez a una falta de interés por aprender matemáticas; en segundo lugar, por las actitudes no amables para con los otros integrantes del grupo; y, en tercer lugar, por los ideales del “trabajar solo” que siempre los habían acompañado a lo largo de su vida académica. Uno de estos estudiantes respondió la pregunta por las dificultades de la siguiente manera:

Yo era muy grosero, pero he cambiado mucho. Yo hablaba con un grupo y decía: "que pereza ir a investigar". Y yo dije que no era capaz de hacerlo solo, cuando yo le decía algo a la maestra ella decía que no y por eso yo casi no pude investigar (Harrison, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).

Otro aporte del mismo tipo realizado por Johan fue:

En mi investigación yo peleé con Liset y la "dejé quieta"; después las cosas se arreglaron y seguimos con nuestra investigación (Johan, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).

Los problemas que se presentan al interior de la actividad investigativa son producto de la individualidad de los participantes en ella; sin embargo, como investigadores y actores en el proceso de investigación, junto con la maestra Astrid y los estudiantes, vislumbramos las cualidades de socialización que con el paso de las clases se iban forjando en la medida en que el objetivo se hacía más claro y más alcanzable. Carvalho (2005, p. 24) nos da una opinión frente a esta confrontación de ideas dentro de las interrelaciones normales que se pueden presentar en una clase dirigida desde la investigación:

En el campo implícito de la comunicación que está relacionado con el comportamiento de un estudiante, cuando está trabajando con otro, intentando resolver una tarea, no puede ser considerado como algo estático. Esto es algo dinámico, que se construye y reconstruye, a medida que el juego de las interacciones sociales va siendo jugado por varios compañeros.

Los niños, con la superación de las dificultades a lo largo del proceso, nos dieron un ejemplo de convivencia que sólo con la reflexión conjunta fue posible mostrar. Los estudiantes llegaban a acuerdos importantes, lo que favoreció al final la presentación de los resultados. Las interrelaciones de los estudiantes fue un componente importante para que la actividad investigativa se llevara a cabo. Al respecto, Tudella et ali (1998, p. 7) mencionan que:

La interacción estudiante-estudiante, tiende a ser mucho más fuerte en una clase con investigaciones. Esta interacción estimula a los estudiantes a descubrir nuevas relaciones entre conceptos, dándoles más seguridad en sus ideas matemáticas. Por otra parte, estimula el

pensamiento, la creatividad y el poder del argumento. Las interacciones conducen a un trabajo más rico, porque los estudiantes desarrollan gran parte de la actividad en colaboración, compartiendo su pensamiento matemático (las ideas de uno son utilizadas por los otros y viceversa), para continuar el trabajo.

LAS ACTIVIDADES DE LA MAESTRA ASTRID A LO LARGO DEL PROCESO DE INVESTIGACIÓN

Otra constante que se presentó a lo largo de la investigación fue el apoyo por parte de la maestra Astrid a cada uno de los estudiantes. Ella fue la muestra del compromiso profesional del maestro en un constante compartir con los estudiantes, les mostró caminos a seguir en cuanto a lo metodológico y desde lo humano les dio incondicionalmente toda su ayuda. Tudella et ali (1998, p. 4) afirman, frente al papel de maestro en esta metodología, que:

El curso de la clase depende en gran medida de la actuación del profesor y lo fomenta a través de sus intervenciones en forma explícita, ya que proporciona información sobre la forma de trabajo de los estudiantes y presta apoyo en el desarrollo de la investigación”.

Como consecuencia del avance que tenía cada uno de los grupos, la maestra se vio en la necesidad de organizar asesorías con los estudiantes de modo que ellos pudieran mostrar un orden y coherencia al momento de socializar los avances y los resultados obtenidos. Al final del proceso, cuando les preguntamos sobre sus impresiones acerca de las asesorías:

*¿Cómo les pareció el proceso de asesoría en los proyectos que les dio Astrid?
(Diego, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).*

Las respuestas de reconocimiento hacia la maestra no se hicieron esperar por parte de los estudiantes, los cuales siempre encontraron una ayuda para las dificultades que presentaban:

En la matemática he aprendido muchas cosas; por ejemplo, el año pasado yo no entendía que eran las matemáticas y no me gustaban casi, pero ahora la maestra Astrid me ha enseñado que la matemática es divertida y la podemos aprender de varias maneras (Liset, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).

Es importante aclarar en este punto, que la concepción manejada por los estudiantes en cuanto a lo que es “divertido”, se refiere al cambio de la metodología de clase utilizada respecto a las que normalmente recibía. El hecho de que la clase sea “divertida” no implica que se dispense tiempo en actividades que no lleven a procesos de aprendizaje del tema en cuestión por parte de los estudiantes.

Otra respuesta, formulada por Daniela, fue la siguiente:

A mí me pareció que la maestra nos ayudó mucho, nos explicó los temas y nos dijo qué podíamos investigar. En el primer momento que yo investigué sobre las figuras del espacio, que René Higuera había hecho los ángulos y las posiciones que tuvo cuando tapó el go; la profe, con la asesoría me ayudó mucho, me dijo lo que eran ángulos (Daniela, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).

La primera respuesta nos llamó mucho la atención, porque la maestra Astrid, con las interrelaciones que se han formado a lo largo del año escolar, logró que muchos estudiantes se mostraran en disposición de aprender matemáticas; ellos pasaron a concebirla como algo que les llamaba la atención, más que como algo “obligatorio”. Con sus actitudes, la maestra Astrid les mostró a los estudiantes que era posible aprender matemáticas de una manera dinámica, y con resultados que les iban a ayudar en sus procesos de aprendizaje y en su desempeño en los grados escolares posteriores.

Otras respuestas al respecto de las actividades de la maestra Astrid y las dificultades son las siguientes:

- *A mí me enseñó [la maestra Astrid] a desarrollar mi mente, ya he aprendido, ya se más de las matemáticas, me ha gustado estudiar con ella porque ella sí nos explica (María Camila, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).*

- *Sí, tuvimos muchos inconvenientes sobretodo con Liset, también con Brenda, María Paula y Harrison, pero con ayuda de la maestra Astrid ya los arreglamos (Yamile, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).*
- *La maestra nos ayudó y nos asesoró para nosotros aprender más de la investigación (Harrison, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).*
- *En mi grupo hubo muchos problemas; Empezando por mí que peleaba mucho con Yamile y mis compañeritas, también un día me sacaron del grupo y yo me puse brava. La maestra Astrid nos ayudó a resolver el problema. Ya ahora somos buenas amigas y hacemos todo juntas (María Paula, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).*

Particularmente, esta última respuesta concuerda con lo mencionado por Tudella et al. (1998, p. 8):

Durante la actividad de los estudiantes, el estímulo a la confrontación de puntos de vista es fundamental para encontrar sentido o determinar la forma de proceder. A menudo, los estudiantes tienen diferencias de opiniones y solicitan al maestro decidir quién tiene razón. Estas son buenas oportunidades para alentar a cada estudiante para explicar y argumentar en favor de su punto de vista. Preguntas como: "¿Qué te lleva a creer eso?" "¿Por qué no está de acuerdo con la idea de su colega? Y declaraciones como: "Discutan las dos hipótesis, la tuya y la de ella en el orden que deseen" puede ser un buen estímulo para la discusión.

Coinciden en el sentido de que, esas dificultades y peleas se debían, como lo mencionamos antes, a la falta de puesta en común de las opiniones por medio del diálogo y el debate de puntos de vista. La maestra siempre estuvo dispuesta a escuchar los puntos de vista de los estudiantes y los alentaba a discutir las hipótesis que tenían y establecer acuerdos que llevara a resultados que pudiera satisfacer a todos.

En las actividades de investigación los estudiantes, al formular sus conjeturas, al defender sus ideas, al preguntar y comparar los procesos desarrollados por ellos mismos y sus colegas, y los resultados en forma oral o por escrito, dan pasos importantes para aclarar sus ideas y llegar a un entendimiento más profundo de los conceptos matemáticos (ibídem, p. 7).

Estos pasos importantes para aclarar las ideas, fue una de las apuestas que hizo la maestra Astrid al momento de plantear actividades que despertaran el interés en los estudiantes por la matemática vista desde las investigaciones y con unos objetivos a alcanzar gracias a unos mediadores.

La maestra aconsejaba constantemente a los estudiantes para que utilizaran el tiempo de modo efectivo, de modo que no tuvieran inconvenientes al momento de socializar los resultados. Yamile expuso su reflexión frente a este hecho para responder a la pregunta que le propusimos en la entrevista:

Nosotros teníamos dificultad es por el tiempo y la maestra nos dijo que pusiéramos una hora exacta para reunirnos para que no tuviéramos dificultades (Yamile, entrevista a los niños, 12 de junio de 2009).

Finalmente, como pudimos ver, las interrelaciones que la maestra tenía con los estudiantes y su concepción del conocimiento matemático como algo dinámico marcaron una ventaja determinante para que los estudiantes, mediante sus investigaciones, llegaran al alcance de los objetivos propuestos.

CONCLUSIONES DE NUESTRA EXPERIENCIA DE INVESTIGACIÓN

Al inicio de nuestro proceso investigativo nos planteamos el objetivo de “analizar las <<investigaciones matemáticas en el aula>> como actividad mediadora en la apropiación del concepto de polígono, por parte de los estudiantes de quinto grado de primaria de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera”. Teniendo esto presente, concluimos lo siguiente de nuestro proyecto de investigación:

- En primer lugar, mediante la implementación de la metodología de IMA se posibilitó una transformación en cuanto a las actividades que regularmente se llevaban a cabo en las clases de matemáticas; este hecho lo notamos a partir de las actitudes y reflexiones que los estudiantes realizaron junto a la maestra Astrid, a medida que el proceso investigativo se desarrollaba.
- De igual manera, los estudiantes reconocieron la metodología como una actividad que les posibilitó aprender de una manera diferente lo que es un polígono.
- La mediación se dio en la medida en que los estudiantes, desde el planteamiento de las actividades investigativas hasta las socializaciones finales, encontraron en la investigación un instrumento que les posibilitara la construcción conceptual.
- Un aspecto importante a resaltar es que con la mediación de las Investigaciones Matemáticas en el Aula los estudiantes no solo reflexionaron sobre la manera de apropiarse de los conceptos, sino que reconocieron las relaciones que las matemáticas tienen con las actividades que se realizan en el cotidiano, en este caso con el torneo de fútbol.

- Pensar en la metodología planteada implica una reflexión sobre la naturaleza del saber matemático como una construcción social que responde a las necesidades de una cultura determinada en su afán de comprender el mundo.
- Mediante la práctica investigativa los estudiantes comprendieron que los conceptos geométricos, en este caso el concepto de polígono, están en constante relación con los elementos del entorno que los rodea pues, como ellos mismos lo concluyeron, “estamos en un mundo geométrico”.
- La argumentación de los saberes adquiridos por parte de los estudiantes al momento de socializar los resultados de la investigación, dieron muestra de la apropiación que tuvieron en cuanto al saber matemático específico. Los estudiantes sintieron que mediante las actividades dentro de las Investigaciones Matemáticas en el Aula, las matemáticas eran más fáciles de aprender pues les dieron sentido desde las prácticas cotidianas habituales, en este caso, jugar fútbol.
- En este sentido podemos que la apropiación del concepto de polígono se hizo posible en la medida en que todos los niños asumieron actitudes de investigador y se comprometieron, junto con la maestra Astrid, a comprender las matemáticas como elemento esencial en nuestro contexto pues, como lo mencionaron la mayoría de los estudiantes, nuestro mundo está lleno de poliedros y polígonos.
- Las actividades dentro de la metodología desarrollada marcaron una diferencia en cuanto a las acciones que ambos realizaron. Por un lado, el estudiante mostraba una actitud más activa, buscando información, formulando conjeturas, y construyendo y apropiándose de las definiciones matemáticas. Por otro lado, tenemos al maestro como asesor del proceso, que cuestiona al estudiante frente a sus conclusiones; el maestro supera la clásica visión de transmisores de conocimientos y evaluador de los mismos.

- Los niños, con la superación de las dificultades a lo largo del proceso, nos dieron un ejemplo de convivencia que sólo con la reflexión conjunta fue posible mostrar. Los estudiantes llegaban a acuerdos importantes, lo que favoreció al final la presentación de los resultados. Las interrelaciones de los estudiantes fue un componente importante para que la actividad investigativa se llevara a cabo.

- Finalmente, a lo largo de este estudio, mencionamos constantemente que las Investigaciones Matemáticas en el Aula eran una actividad; al respecto podemos concluir que efectivamente las acciones que se realizaron al interior del aula de clase constituyeron una actividad (en el sentido de la teoría de la actividad de autores como Vidal (2009)) pues se mantuvo un motivo para la investigación, una serie de mediadores que iban en busca de ese objetivo y una interacción social mediada por el lenguaje, tanto el matemático como el no matemático.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P. (1999). *Investigações em Geometria na Sala de Aula*. Recuperado el 16 de julio de 2009 de http://ia.fc.ul.pt/textos/p_153-167.PDF

Bishop, A. (1999). *Enculturación Matemática*. Barcelona: Paidós.

Boavida, A. y Ponte, J. (2002). *Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas*. In GTI (Org.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.

Caraça, B. (1984). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Livraria Sá Da Costa Editora.

Carvalho, C. (2005). *Comunicações e interações sociais nas aulas de matemáticas*. En Nacarato, A. y Lopes C. (Orgs.) (2005). *Escritas e leituras na educação matemática*. São Paulo: Autêntica.

Deslauriers, J. (2004). *Investigación cualitativa. Guía práctica*. Pereira: Papiro.

Fals, O. y Brandão, C. (1987). *Investigación Participativa*. Montevideo: Ediciones de la Banda Oriental.

Fonseca, H. y Ponte J. (1999). *As atividades de investigação, o professor e aula de Matemática*. *Actas do ProfMat*. Lisboa: APM. Recuperado el 16 de julio de 2009, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm

Ibáñez, J. (2003) *La psicología histórico-cultural: cultura, actividad y aprendizaje*. Recuperado el 16 de julio de 2009 de http://www.pangea.org/jei/edu/f/psic-h-c.htm#_Toc49951116.

Lizcano, E. (2006). *As matemáticas da tribo européia*. In: Knijnik, G., Wanderer, F y Oliveria, C. (orgs.) *Etnomatemática, currículo e formação de professores*. Santa Cruz do Sul: Edunisc.

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1998). *Matemáticas. Lineamientos Curriculares*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio

Ortiz, G. y Chávez S. (2008). *La teoría de la actividad en la enseñanza*. Recuperado el 16 de julio de 2009 de <http://caminosabiertos2008.blogspot.com/2008/10/la-teora-de-la-actividad-en-la-enseanza.html>

Ponte, J. y Matos, J. (1996) *Processos cognitivos e Interações Sociais nas Investigações Matemáticas*. In P. Abrantes, L., Leal, y Ponte, J. (Eds.), *Investigar para Aprender Matemática* (pp. 119-137). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Brocardo, J. y Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Auténtica.

(RAE), Real Academia de la Lengua Española. (2009). *Investigar. Diccionario de la lengua española*, 23ª ed., en <http://www.rae.es/>

Sánchez, S. (1998). *Fundamentos para la investigación educativa. Presupuestos epistemológicos que orientan al investigador*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio

Tudella, A., et al (1998). *Dinâmica de uma Aula com Investigações*. Recuperado el 16 de mayo de 2009 de http://ia.fc.ul.pt/textos/p_87-96.pdf.

Vidal, G. (2009). *La actividad del profesor*. Recuperado el 16 de julio de 2009 de <http://www.educar.org/articulos/LaActividaddelProfesor.asp>

Zabalza, M. (2004). *Los diarios de clase: un instrumento de investigación y desarrollo profesional*. Madrid: Narcea.