UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN

EL TEOREMA DE PITÁGORAS COMO UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

Memoria para optar al título de Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

IVAN DARIO TORRES HERRERA
JHON JAIRO GRISALES HERNÁNDEZ
DAVID MONTES CEBALLOS

Asesor: Jesús María Gutiérrez Mesa

Medellín, Colombia 2009

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

EL TEOREMA DE PITÁGORAS COMO UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

IVAN DARIO TORRES HERRERA

JHON JAIRO GRISALES HERNÁNDEZ

DAVID MONTES CEBALLOS

Asesor: Jesús María Gutiérrez Mesa

Medellín, Colombia 2009

Tabla de contenido

1. INTRODUCCIÓN.

El presente trabajo tiene como propósito mostrar cuales son los subsumidores que permiten alcanzar un Aprendizaje Significativo del Teorema de Pitágoras, por tal motivo, se presentara un análisis explicativo de la situación en la que se encuentra nuestro tema de investigación, en los cuales se revisaran los documentos rectores de la educación matemática, “Lineamientos Curriculares” y “Estándares de Matemáticas” en búsqueda de cómo es planteado el Teorema de Pitágoras y bajo que contexto se debería trabajar, después de esto, se hace un análisis a los textos escolares de los grados octavo y noveno de la educación básica secundaria bajo la pregunta ¿Cómo es visto en la educación colombiana el Teorema de Pitágoras? Para esto analizamos algunos textos escolares (análisis te textos, capitulo 5) justamente, los grados en donde los documentos rectores ubican la pertinencia de enseñar el concepto que se está trabajando (Teorema de Pitágoras), dicha revisión se realizará para analizar la forma en cómo el teorema es enseñado en estos grados como un concepto netamente geométrico.

Dando continuidad a estos análisis se hará una descripción del contexto en el cual se desarrollara la propuesta de intervención.

En el siguiente capítulo se presentara el planteamiento del problema y los respectivos objetivos del trabajo; para luego darle paso a los referentes teóricos, en donde se desarrollara una breve reseña teórica del Aprendizaje Significativo, teoría desarrollada por David Ausubel, donde se tomara como parte fundamental lo concerniente a los subsumidores y los tipos de aprendizaje que se desarrollaran con la adquisición de los nuevos conceptos. Tambien aca se hace necesario preguntarnos ¿Por qué el teorema lleva el nombre de un filósofo del siglo v a.C.? Para dar respuesta a este interrogante daremos un paseo corto por la historia del teorema y a lo que fue la vida de Pitágoras de Samos.

Dentro del capítulo de referentes teóricos se debe incluir un componente más. Las consideraciones metodológicas que para este trabajo se seleccionó *el estudio de caso,* como metodología y estructura de la herramienta de recolección de datos, taller (prueba diagnóstica) y entrevista personalizada (validación y justificación de resultados). Tomando como caso, un rastreo histórico del Teorema de Pitágoras en donde se buscará cuales fueron esos subsumidores que llevaron a Pitágoras a demostrar el teorema que lleva su nombre y que ya había sido desarrollado por los chinos, egipcios y babilonios como algo más práctico. Guiados por la pregunta ¿Cuál fue la ruta que siguió Pitágoras y sus discípulos para demostrar el mencionado teorema? Aquí nos referimos a ruta como el conglomerado de conceptos que Pitágoras debió haber visto y comprendido para poder hacer una demostración, la cual es la primera en el sentido deductivo de la matemática, de un teorema que como veremos ya era conocido muchos siglos-un milenio- antes de que el mismo Pitágoras lo conociera. Esto con el fin de rastrear cuales son los subsumidores en relación con el Teorema de Pitágoras.

Continuamos con la descripción de cada una de las pruebas realizadas a las estudiantes de la Institución Educativa Fe y Alegría Nueva Generación, en donde se incluirán los análisis de lo que se esperaba con las pruebas como una conclusión general del trabajo.

En el siguiente capítulo se mostraran los resultados de las estudiantes y se hará un paralelo o análisis bajo la luz del marco teórico y los objetivos propuestos en capítulos anteriores.

Para terminar en el último capítulo se presentarán las conclusiones y recomendaciones que este trabajo arrojo a la luz de lo que dictaminaba el marco teórico y el estudio de caso.

2. JUSTIFICACIÓN.

El hombre moderno se ha esforzado para que el conocimiento no este sólo en las manos de aquellos más poderosos o mejor posicionados socialmente, como era el caso de los filósofos o los grandes emperadores, ahora es un objetivo global que todos los hombres y mujeres del planeta sepan lo mínimo en cuanto a los conocimientos que hay y que surgen, las matemáticas no son la excepción. Los sistemas educativos junto con la institución escuela tratan a diario de que las matemáticas sean el “pan de cada día” para todas las personas, sin embargo no parecen ser tan aprehensibles ¿Por qué no todos podemos ser “diestros” en matemáticas? Quizás sea una pregunta que no estemos en condiciones de responder, pero lo que si podemos es empezar a dilucidar algunos problemas dentro de la educación de las matemáticas. El Teorema de Pitágoras es, y ha sido, de gran influencia en las matemáticas sin embargo hoy día aún es esquivo en los planteles educativos. Más y más personas pasan por este teorema sin poder comprender en lo mínimo de que se trata, pero no todo es negro, muchos académicos se esfuerzan cada día para sacar nuevas teorías sobre el Teorema de Pitágoras, muchos pedagogos dedican sus horas de trabajo a guiar sus estudios hacia la comprensión de las matemáticas pero aún así estas siguen siendo todo un paradigma para la educación. El Teorema de Pitágoras es el teorema con más pruebas en la historia, son muchos, entre chicos y grandes, los que se han acercado a las grandes demostraciones de este antiquísimo teorema. Son muchos los que lo enseñan y buscan maneras de enseñarlo, de que las personas lo comprendan, de que sea significativo para estas, pero ¿Qué es lo significativo del Teorema de Pitágoras? Es una respuesta que trataremos de bosquejar a lo largo de estas páginas, pero lo que sí es cierto es que hace falta una mirada más significativa del Teorema de Pitágoras para poder que este se vuelva significativo para una persona, hace falta saber qué es lo significativo de éste.

3. ANÁLISIS EXPLICATIVO DE LA SITUACIÓN.

3.1.1 Análisis de los estándares y los lineamientos curriculares.

Hecho un rastreo de la enseñanza de la geometría en los textos del Ministerio de Educación Nacional (M.E.N.) y los lineamientos curriculares de la educación básica y media, se encontró que la enseñanza del Teorema de Pitágoras, es planteada especialmente en los estándares en los grados de octavo y noveno. Lo cual plantea un entendimiento muy específico de éste por medio de demostraciones utilizando su practicidad; por ejemplo: los rompecabezas.

Estos textos del M.E.N. para el grado octavo plantean la enseñanza de este tema en particular de la siguiente manera "Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales)." y también "puedo hacer demostraciones prácticas (como un rompecabezas) del Teorema de Pitágoras, utilizando relaciones entre áreas; lo verifico." (M.E.N, 2007:87).

Como se puede observar estos plantean el teorema como un concepto esencial en la enseñanza de la educación; puesto que lo desarrollan como un entendimiento básico pero bien clarificado para ser utilizado en la demostración de algunas propiedades geométricas y es ahí donde buscamos plantear que este tema debe ser reconocido por el estudiante, pero de una forma significativa; puesto que nos llevará a clarificar y relacionar los subsumidores, a demás plantear la utilización de demostraciones prácticas para el entendimiento de éste, a lo cual consideramos muy prudente para enfocar un importante teorema, puesto que, nos permite buscar todas las posibilidades que nos pueden encaminar a que éste se convierta en un tema significativo para el estudiante.

3.1.2. Análisis de textos escolares.

Para poder hablar de la enseñanza del Teorema de Pitágoras tenemos que buscar como plantean que sea enseñado en los colegios, por lo tanto nos vemos remitidos a los textos escolares de dichos años debido a que según los estándares curriculares en matemáticas lo plantean para octavo y noveno. Miremos ahora el tratamiento que el texto "Matemáticas con tecnología aplicada" tiene del teorema: es utilizado para encontrar la longitud de la hipotenusa del triangulo rectángulo o la diagonal de un cuadrilátero recto y su aplicación consiste solamente para encontrar distancias entre dos puntos; es un trabajo netamente mecánico. Trabajo muy similar al presentado en el libro "Matemática universal" en donde el primer acercamiento es por vía de áreas y con una serie de exploraciones con material concreto como hojas cuadriculadas y cuadros de cartulina para llegar a que "en todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos, equivale al cuadrado construido sobre la hipotenusa" y con esto llegan a la conocida ecuación: $a^2 + b^2 = c^2$.

Por otro lado tenemos que el texto "Matemáticas 2000" presenta como fase introductoria una versión de la historia de Pitágoras, en donde se menciona parte de los descubrimientos que encontró mientras se reunía con sus discípulos en la escuela que recibía por nombre los Pitagóricos, pero continuando con los análisis a las formas en cómo es abordado el teorema, lo primero a que hacen referencia es a las relaciones existentes entre los lados de un triángulo rectángulo y continúan con lo referente a las ternas pitagóricas y por último para no salirse del todo de la tradición de los libros lo mencionan como un área; para rescatar, hacen la demostración del teorema con material concreto en donde se puede observar las relaciones y la conservación del área en los cuadrados, pero también se muestra el trabajo de conceptualización de los números irracionales y de donde sale $\sqrt{2}$ geométricamente.

Para terminar el trabajo del teorema por parte del texto "estructuras matemáticas" es un trabajo similar al presentado en "Matemáticas 2000" con las relaciones en las áreas y las demostraciones geométricas del mismo, pero es rescatable el motivo en que presentan el Teorema de Pitágoras como una forma de crear ángulos rectos por medio de cuerdas con nudos y la utilización de las ternas pitagóricas. En conclusión todos los textos escolares anteriores concuerdan en el trabajo del triángulo rectángulo para demostrar el Teorema de Pitágoras y algunos se quedan en ese trabajo.

3.1.3. Descripción del contexto.

3.1.3.1. La institución.

La Institución Educativa Fe y Alegría "Nueva Generación" ubicada en el barrio de Niquía del municipio de Bello (departamento de Antioquia), es de carácter público. Es para la población de estratos uno, dos y tres; por lo tanto se encuentran estudiantes de bajos recursos.

Posee sala de informática, restaurante estudiantil, una pequeña biblioteca, lo cual indica que posee unas buenas condiciones para que exista un proceso de enseñanza-aprendizaje, aunque es una infraestructura pequeña es bien diseñada, ya que tiene espacios que facilitan o apoyan la adquisición del conocimiento, pero en cuanto a las aulas cabe decir que están diseñadas para aproximadamente treinta personas y están siendo usadas en un promedio entre 40 y 50 estudiantes lo cual dificulta estos procesos de enseñanza-aprendizaje. También contiene una cancha polideportiva para el desarrollo físico, además un espacio de zona verde para la relajación o actividades varias, igualmente una cafetería y los entes administrativos.

3.1.3.2. Los estudiantes.

Los estudiantes de la institución en la mayoría muestran interés por la aprehensión del conocimiento, aunque por la sobrepoblación de las aulas conlleva a que muchos estudiantes dispersen su atención a distractores externos como sonidos realizados por otros estudiantes ajenos al grupo; en el caso particular del octavo A que es en su totalidad de género femenino, consta de 49 estudiantes; que oscilan en un rango de edad entre 12 y 16 años. Es bueno aclarar que este grupo se eligió debido a que uno de los integrantes del trabajo se encontraba haciendo su práctica pedagógica en él.

3.1.4. Antecedentes.

Aunque la teoría del Aprendizaje Significativo viene siendo aplicada en nuestro contexto educativo desde la reforma curricular de matemáticas, y el Teorema de Pitágoras ha sido trabajado a lo largo del desarrollo de la matemática durante toda la historia, que como veremos es el teorema con más demostraciones, cuando se habla del Teorema de Pitágoras como un Aprendizaje Significativo la gran mayoría de autores se refieren a estrategias para hacerlo significativo para los estudiantes.

Por tal motivo siendo el teorema con mas demostraciones en la historia seria un examen sin fin tratar de encontrar o nombrar la cantidad de trabajos que hay y se hacen sobre Pitágoras, por eso sólo nombraremos dos trabajos que son familiares dentro de nuestro contexto educativo (Universidad de Antioquia).

El primero de estos trabajos es una “Propuesta de Intervención Pedagógica para la Enseñanza de las Ternas Pitagóricas” (Valencia, M. y Bastidas, M. 1998) el cual es un trabajo para optar al título de especialista en educación. Menciona la relación de Aprendizaje Significativo al Teorema de Pitágoras para decir que con las ternas pitagóricas el teorema cobra significado para los estudiantes. Es una propuesta que pretende mostrar otra mirada al teorema por medio de las ternas pitagóricas, para esto invierte gran cantidad de potencial matemático para dar varias formas de adquirir las mencionadas ternas.

El otro trabajo son “Las fases del modelo educativo de Van Hiele para el Teorema de Pitágoras” (López, A. y Jaramillo, C. 2008) para optar al título de magister en educación, se refiere más a las fases de Van Hiele, y aunque hace un bagaje por la historia de Pitágoras, propone las ternas pitagóricas y los cuadrados como herramientas indispensables en el aprendizaje del teorema, también le da mucha importancia a el concepto de triángulo y lo sitúa por encima de los demás mientras en nuestro trabajo este concepto no es el más relevante. Se puede decir que el mayor aporte del mencionado trabajo es dar a conocer la herramienta del modelo de Van Hiele para situar a los estudiantes en el nivel apropiado para el aprendizaje del teorema.

4. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.

4.1. Planteamiento del problema.

Teniendo en cuenta que el Teorema de Pitágoras es un concepto fundamental en el campo de las matemáticas y en especial en áreas como el álgebra, la geometría o el mismo cálculo, sin embargo el grado de comprensión que alcanzan los estudiantes frente a éste no parece suficiente a la hora de resolver problemas o ejercicios donde puede aparecer como una aplicación.

Por otra parte, tanto, en los textos escolares como los procedimientos realizados por los docentes no parecen responder a los requerimientos de éste en términos de su comprensión o de su Aprendizaje Significativo, reduciéndolo tanto los unos como los otros a prácticas rutinarias o realización de ejercicios en los que se parece enfatizar sólo en el aprendizaje memorístico del simple enunciado verbal de: “la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa”.

Por lo anterior creemos que se hace necesario preguntarse por ¿Cuáles son los conceptos previos que se deben desarrollar o tener en cuenta para que las estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Fe y Alegría Nueva Generación tengan un aprendizaje significativo del Teorema de Pitágoras? o en lo que en el marco de la teoría del Aprendizaje Significativo se denomina los subsumidores, para la comprensión de este teorema.

4.2.1. Objetivo general.

Identificar los subsumidores para un Aprendizaje Significativo del Teorema de Pitágoras

4.3.1. Objetivos específicos.

- Analizar la obra de Pitágoras en busca de subsumidores que permitan los procesos de enseñanza-aprendizaje del Teorema de Pitágoras.

- Orientar el proceso de enseñanza-aprendizaje por medio de los subsumidores del/o en relación al Teorema de Pitágoras.

5. MARCO DE REFERENCIA.

5.1.1. Aprendizaje Significativo.

Según Ausubel "El Aprendizaje Significativo es muy importante en el proceso educativo, porque es el mecanismo humano por excelencia para adquirir y almacenar la vasta cantidad de ideas e información representadas por cualquier campo del conocimiento."

El autor introduce la noción de Aprendizaje Significativo que es necesario precisar y poner en relación con otras nociones que se le dan al aprendizaje (tomadas de AUSUBEL, D. 1980:537) entre ellas está:

<u>ACTITUD DE APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO</u>: una "disposición" por parte de un aprendiz para relacionar una tarea de aprendizaje sustancial y no arbitraria con los aspectos relevantes de su estructura cognoscitiva.

<u>ADQUISICION DE CONCEPTOS O APRENDIZAJE</u>: aprendizaje del significado de un concepto, es decir, aprendizaje del significado de sus atributos criterio.

APRENDIZAJE COMBINATORIO: aprendizaje del significado de un concepto o proposición de un concepto o proposición nuevos que no se pueden relacionar con ninguna(s) idea(s) particular(es) relevante(s) en la estructura cognoscitiva, pero que se pueden relacionar con un fondo amplio de contenidos generalmente relevantes en la estructura cognoscitiva.

APRENDIZAJE MECANICO O DE MEMORIA: la adquisición de asociaciones arbitrarias al pie de la letra en situaciones de aprendizaje en donde el material de aprendizaje en si no se puede relacionar de manera sustancial y no arbitraria con la estructura cognoscitiva.

APRENDIZAJE DE PROPOSICION: aprendizaje del significado de una nueva idea compuesta expresada en forma de oración; derivado de dos o más conceptos, pero que constituye algo más que la suma de los últimos debido a las propiedades "semánticas" del orden e inflexión de las palabras (sintaxis).

APRENDIZAJE INCLUSIVO O SUBORDINADO: aprendizaje del significado de un concepto o proposición nuevo que puede ser incluido en ideas relevantes particulares mas inclusivas en la estructura cognoscitiva.

APRENDIZAJE POR DESCUBRIMIENTO: tipo de aprendizaje en el que el contenido principal de lo que será aprendido no se proporciona, sino que debe ser descubierto por el aprendiz.

APRENDIZAJE POR RECEPCION: tipo de aprendizaje en el que el contenido total de lo que se debe aprender se presenta al aprendiz más o menos en su forma final.

APRENDIZAJE REPRESENTACIONAL: aprendizaje del significado de símbolos específicos o el aprendizaje de lo que representan: incluye el nombramiento de objetos particulares.

APRENDIZAJE SINIFICATIVO: adquisición de significados nuevos; presupone una tendencia aprendizaje significativo y una tarea de aprendizaje potencialmente significativa (es decir, una tarea que puede estar relacionada de manera sustancial y no arbitraria con lo que el aprendiza ya conoce). Es parte del continuo aprendizaje de memoria–significativo en oposición al continuo recepción–descubrimiento.

APRENDIZAJE SUPERORDENADO: Aprendizaje del significado de un concepto o proposición nuevo que pueden incluir ideas relevantes particulares menos inclusivas ya presentes en la estructura cognoscitiva.

CONCEPTO: objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos de criterios comunes (a pesar de la diversidad de otras dimensiones o atributos) y que se designan mediante algún signo o símbolo, típicamente una palabra, con un significado genérico.

IDEA: concepto o proposición que se relaciona con la estructura cognoscitiva.

MATERIAL LOGICAMENTE SIGNIFICATIVO: tarea de aprendizaje que es lo suficientemente “sensible”, plausible o no al azar como para que no se relacione de manera arbitraria sino sustancialmente a las ideas relevantes correspondientes que radican en el reino de la capacidad del aprendizaje humano.

MATERIAL POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO: tarea de aprendizaje que puede ser significativamente aprendida tanto porque es lógicamente significativa como porque las ideas relevantes están presentes en la estructura cognoscitiva particular del aprendiz.

SIGNIFICADO: contenido diferenciado y agudamente articulado de conciencia que se desarrolla como un producto del aprendizaje simbólico significativo o que puede ser evocado por un símbolo o grupo de símbolos después de que los últimos han estado relacionados de manera sustancial y no arbitraria con la estructura cognoscitiva.

SIGNIFICATIVIDAD: grupo relativo del significado asociado con un símbolo o grupo de símbolos dados en oposición a su contenido cognoscitivo sustancial, como una medición del grado de familiaridad, frecuencia del encuentro contextual o el grado de sustancialidad lexicografía (por ejemplo, un nombre o verbo en contraste con una preposición)

Una de las tesis fundamentales de la teoría del Aprendizaje Significativo y en palabras de Ausubel es:

“Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un sólo principio, diría lo siguiente: el factor aislado más importante que influye en el aprendizaje, es aquello que el aprendiz ya sabe. Averígüese esto y enséñese de acuerdo con ello.” (MOREIRA, 2000: 9)

Cuando el autor plantea que se “debe saber” lo que el aprendiz “ya sabe”, el nos hace referencia a esa “estructura cognitiva” construida por el estudiante y la forma como ha sido su proceso educativo en un caso particular del conocimiento el cual debe ser significativo para que el aprendizaje tenga consistencia, lo cual a la vez nos indica que el proceso de enseñanza en el estudiante debió haber sido de manera no arbitraria y no literal, es decir, que el conocimiento del estudiante no debió ser ni al azar, ni mucho menos lineal, sino que debió haber sido seleccionado y no literalmente enseñado.

Cuando se refiere en la segunda parte a que “averígüese esto”, podríamos entender que hay que explorar los conocimientos ya adquiridos por el estudiante, su organización, sus procesos mentales y la estructura cognitiva de cada estudiante para luego de reconocer esta estructura, proseguir con “enséñese de acuerdo con ello”, lo cual nos indica que después de realizar los procedimientos anteriores, se deben estructurar unas situaciones de adquisición de conocimiento basados en los conocimientos que el estudiante ya posee.

De acuerdo a lo anterior y en relación con la teoría, el aprendizaje es un proceso a través del cual la información se relaciona de manera no arbitraria y no literal (sustantiva) y en este marco la nueva información interacciona con una estructura de conocimiento especifica llamada por Ausubel “concepto subsumidor” existente en la estructura cognitiva de quien aprende” (citado en MOREIRA, 2000:11).

¿Pero de qué trata el concepto “subsumidor”?: este puede entenderse como una idea, una proposición ya existente en la estructura cognitiva y que nos permite un “anclaje” para la nueva información de tal modo que esta adquiera un significado para el aprendiz (individuo); o que en la medida de que existan conceptos relevantes (subsumidores) en la estructura cognitiva del individuo se podrá aprender significativamente las nuevas idea, conceptos o proposiciones. Desde las palabras de Moreira lo que se quiere decir es: que “… Existe un proceso de interacción a través del cual los conceptos más relevantes e inclusivos interaccionan con el nuevo material sirviendo de “anclaje”, incorporándolo y asimilándolo, aunque al mismo tiempo modificándose en función de anclaje.” (MOREIRA, 2000:15)

En el marco de esta teoría para que ocurra Aprendizaje Significativo se debe tener en cuenta unas condiciones necesarias desde la perspectiva ausubeliana:

1. Material potencialmente significativo.

    - La naturaleza del material

    - La naturaleza de la estructura cognitiva

2. El aprendiz manifieste disposición para relacionar los conceptos previos con los nuevos de manera sustantiva y no arbitraria.

Con respecto a la primera en el proceso del Aprendizaje Significativo se requiere la presencia de un material que sea relacionable con la estructura cognitiva del individuo no arbitraria y no literal (sustantiva); pero además el material potencialmente significativo debe ser "lógicamente significativo" o que depende sólo de la naturaleza del material y también en la naturaleza de la estructura cognitiva del aprendiz, en ella deben estar disponibles los conceptos "subsumidores" específicos con los cuales el materia se vuelve relacionable.

En la segunda hablamos de una condición aun más fuerte que la primera y de la cual consideramos que depende que exista un proceso de Aprendizaje Significativo ya que es la voluntad del aprendiz por relacionar el nuevo material con los subsumidores específicos, el estudiante debe tener deseos, motivación de aprender el nuevo conocimiento para que exista ese proceso de "anclaje" significativamente. Lo cual nos indica que en la parte docente se deberán implementar varias estrategias para que ocurra la motivación necesaria; ya que independientemente de lo potencialmente significativo que puede ser la información nueva si el estudiante sólo quiere aprender memorísticamente lo haría y las relaciones no se darían, por lo cual se daría un aprendizaje mecánico y no significativo. El autor entiende el aprendizaje mecánico (o automático) como aquel en el que la nuevas informaciones se aprenden prácticamente sin interacción con conceptos relevantes, lo que quiere decir, que la nueva información se relaciona de forma arbitraria y literal, pero en ningún momento se desecha como proceso del aprendizaje, pues también se considera que en ocasiones este método es deseable y necesario como en el caso de una fase inicial de adquisición de un nuevo cuerpo de cocimientos. O como dice Novak "[…] el aprendizaje mecánico es siempre necesario cuando un individuo adquiere nuevas informaciones en un área del conocimiento que le es completamente nueva."(Citado en MOREIRA, 2000:18).

En la teoría también se distinguen tres tipos de Aprendizaje Significativo los cuales son:

1) Aprendizaje representacional: "es el más básico y depende de los demás. Supone la atribución de significados a determinados símbolos (típicamente palabras); es decir, la identificación, en significado, de símbolos que pasan a significar, para el individuo aquello que sus referentes significan." Un ejemplo de este es el siguiente: la palabra "pelota" para un niño pequeño, cuando el sonido de esa palabra (que es potencialmente significativo) pasa a representar, o convertirse en equivalente al objeto. (MOREIRA, 2000: 21). Lo que se quiere decir con el ejemplo es cuando el niño percibe la pelota y hace esa relación del objeto con el sonido o el niño identifica el objeto con el sonido de la palabra "pelota"

2) Aprendizaje de conceptos: también es"…en cierta forma, un aprendizaje representacional, en donde los conceptos son, también, representados por

símbolos particulares, pero son genéricos o categóricos dado que representan abstracciones de los atributos criteriales (esenciales) de los referentes, es decir representan regularidades en objetos o eventos." (MOREIRA, 2000: 22); o en palabras de Ausubel en relación con los conceptos, entendidos como:"objetos, evento, situaciones o propiedades que poseen atributos criteriales comunes y se designan, en una cultura dada, por algún signo o símbolo dado, típicamente una palabra con un significado genérico.; es la equivalencia existente entre el símbolo y los atributos criteriales comunes a múltiples ejemplos del referente.

3) Aprendizaje preposicional: tiene que ver con aprender el significado de ideas en forma de proposición. "…de modo general, en donde las palabras combinadas en una oración para construir una proposición representan conceptos. La tarea es el significado de las ideas expresadas verbalmente, a través de esos conceptos, bajo la forma de una proposición. Ó sea aprender el significado que esta mas allá de la suma de los significados de las palabras tomadas individualmente o conceptos que componen la proposición."(MOREIRA, 2000: 22).

La teoría también nos habla de algunos aprendizajes que se van dando en el transcurso del Aprendizaje Significativo que son nombrados de la siguiente manera:

- Aprendizaje subordinado.

- Aprendizaje superordenado.

- Aprendizaje combinatorio.

Y que fueron ya explicados anteriormente.

“En todo el proceso de descripción se ha hablado con respecto a la nueva información que adquiera significado a través de la interacción con subsumidores, refleja una relación de subordinación del nuevo material en relación con la estructura cognitiva preexistente. Ausubel se refiere a este proceso como “subsunción”, pero este aprendizaje identificado como subordinado posee dos tipos el derivativo y el correlativo; `para el primero es cuando el material aprendido es entendido como un ejemplo especifico de un concepto ya establecido en la estructura cognitiva; mientras que en el correlativo es aquel en el que el nuevo material se aprende como una extensión, elaboración, modificación o calificación de conceptos o proposiciones previamente aprendidos”(MOREIRA, 2000: 75).

“Para el aprendizaje superordenado es aquel que se da cuando un concepto o proposición potencialmente significativo A, mas general e inclusivo que ideas o conceptos ya establecidos en la estructura cognitiva a1, a2, a3, es adquirido a partir de otro y pasa a asimilarlos.” Las ideas a1, a2, a3 se identifican como instancias más especificas de una nueva idea A y se subordina a ella, “la idea superordenada A se define por un nuevo conjunto de atributos criteriales que se produce el Aprendizaje Significativo.”(MOREIRA, 2000: 29).

Y para el tercero Según Ausubel (1980: 59) el aprendizaje combinatorio es; “el aprendizaje de muchas proposiciones nuevas y, también, conceptos, lleva a este tipo de significado. Son potencialmente significativos porque constan de combinaciones sensibles (es decir, que tienen sentido) de ideas previamente aprendidas que pueden relacionarse de manera no arbitraria, a un “fondo amplio” de contenido, “relevante de una manera general”, existente en la estructura cognitiva en razón de una “congruencia generar”, con ese contenido como un todo.”

Como conclusión tenemos que desde el autor Moreira “…el Aprendizaje Significativo, proceso a través del cual nuevas informaciones adquieren significado por interacción con aspectos relevantes preexistentes en la estructura cognitiva que a su vez, son también modificados durante ese proceso. Para que el aprendizaje pueda ser significativo, el material debe ser potencialmente significativo y el aprendiz tiene que manifestar una disposición para aprender. La primera de esas condiciones implica que el material tenga significado lógico y que el aprendiz tenga disponibles, en su estructura cognitiva, subsumidores específicos con los cuales el material sea relacionable.”(MOREIRA, 2000: 33).

Pero la pregunta es la siguiente ¿cómo se relaciona o cual es la finalidad de la teoría del aprendizaje significativo con el teorema de Pitágoras?, en el trabajo se buscará como fin primordial el encontrar el camino que el mismo Pitágoras utilizó para demostrar el teorema, lo cual nos podrá mostrar los elementos necesarios para la aprehensión del Teorema de Pitágoras, o por decirlo en la teoría del Aprendizaje Significativo, cuáles fueron los subsumidores que Pitágoras tenía que lo llevaron a realizar o pensar en la demostración del teorema que lleva su nombre. ¿Será la relación de triángulos (triángulo rectángulo y el Teorema de Pitágoras), la potenciación, las ecuaciones, los cuadrados (desde las diferentes representaciones de área y espacio) u otros, los subsumidor adecuado para realizar el "anclaje" para la adquisición del nuevo conocimiento? o ¿será un conjunto de subsumidores? o ¿habrá algún método de enseñanza del Teorema de Pitágoras que tenga en cuenta los conceptos previos (subsumidores) que se necesitan para su comprensión y aprendizaje?, sería muy ambicioso darle respuesta a esta pregunta, lo que sí es darle aportes a la enseñanza de este teorema desde una perspectiva histórica. el rastreo histórico se realizara sobre las culturas que impactaron en la educación de Pitágoras con la finalidad de encontrar las herramientas que él utilizó o adquirió, que le permitieron dar una demostración tan estructurada de el teorema que lleva su nombre ,"El Teorema de Pitágoras" ,se buscaran los subsumidores, el camino que recorrió Pitágoras para llegar a tal demostración.

La teoría del Aprendizaje Significativo es demasiado extensa, en este trabajo se ahondara sobre una pequeña parte de ésta, la cual se refiere a los conocimientos previos que un individuo ha de tener para realizar un "anclaje" al nuevo conocimiento, dicha parte se conoce con el nombre de subsumidor, el objetivo de este trabajo será, entonces, la búsqueda de los subsumidores para la aprehensión del Teorema de Pitágoras.

5.1.2. El Teorema de Pitágoras.

En nuestra vida escolar nos encontramos con la matemática y, con esta, nos encontramos infinidad de teoremas, pero hay uno en especial que ha todos los que pasamos por la educación básica lo vemos y, aún más, nos toca volverlo a encontrar en otras épocas de nuestra vida escolar; el Teorema de Pitágoras.

Teorema que quizás se ha robado más atención que cualquier otro en la historia, son muchas las personas que se han dado a la tarea de demostrarlo, y no sólo matemáticos, incluso hoy existen más de 400 demostraciones. Sin embargo hoy día todavía nos es esquivo en algunas escuelas o mejor dicho a algunas personas. Por ley (de educación Colombiana) el teorema debe ser visto en la educación básica y este se debe convertir en una herramienta de las matemáticas para dar soluciones a otros problemas.

Cuando hablamos de esquivo nos referimos a que muchas veces y, no es por exagerar, la actividad de aprender y comprender este teorema se ve opacada, pues en nuestro caso en la Institución Educativa Fe y Alegría Nueva Generación, en los grados octavo y noveno del bachillerato, después de un análisis de caso, presento la inactividad de este, o sea el teorema en algunos casos como en los octavos, no era de conocimiento y, en otros como es el caso del noveno, si había sido visto o mencionado, los alumnos no mostraron comprender en lo más mínimo el Teorema de Pitágoras.

5.1.2.1. Un teorema en la historia.

El Teorema de Pitágoras tiene una gran historia y esa historia al parecer ha producido una gran influencia o peso sobre nuestra educación actual, pues todavía hoy es objeto de estudio y una herramienta para el área de matemáticas. Cualquiera en nuestra época que haya hecho lo equivalente al bachillerato se las ha tenido que arreglar con este antiquísimo teorema e incluso en nuestra educación colombiana está legitimado por los estándares de educación en lo referente a matemáticas (estándar 2 del pensamiento espacial y sistemas geométricos del grado noveno) sin embargo actualmente sólo se usa como un tema más del área de estudio matemático.

Aunque el teorema lleva el nombre del gran filósofo Pitágoras, la arqueología y la historia se han encargado de mostrar que el teorema se conocía incluso mucho antes[1] del nacimiento del propio Pitágoras como lo reseñan muchos autores como Richard Mankiewicz en historia de las Matemáticas (2000:22) cuando escribe: "Sin embargo era bien conocido-refiriéndose al teorema-incluso antes de que Pitágoras naciera…" También Peter Gorman en PITAGORAS (1988:7) nos dice": […] en el mundo moderno se le recuerda principalmente por un logro que probablemente no sea suyo: el teorema que trata de la hipotenusa y los lados en un triángulo rectángulo." Sin embargo, como se ha de mencionar, es el primero en hacer una demostración matemática, además de que es atributo que luego todo el pensamiento griego tomara como base del conocimiento.

---

[1] Existe en la Universidad de Columbia una tablilla Babilónica (Plimton 322) que contiene ternas pitagóricas fraccionarias. La cual data de 1800-1650 a.C.

Incluso otras culturas ya lo conocían, por ejemplo los hindúes en sus escritos Vedas de 800-600 a.C. lo nombraban como “La cuerda que se estira a través de la diagonal de un cuadrado produce un área que dobla la del cuadrado original” (MANKIEWICZ, 2000: 23). En el Zhoubi Suanjing (según Mankiewicz; el más antiguo texto chino) escrito entre el 500 y 200 a.C. trata a dicho teorema como Gougu y es demostrado (en verdad es una mostración) con la terna 3,4 y 5.

De otra forma también era ya conocido por los egipcios, los cuales lo utilizaban en su ingeniería para obtener ángulos rectos y como sabemos por Gorman los griegos obtuvieron sus conocimientos de los egipcios: es cuando Thales de Mileto quien se considera el padre de la matemática griega, aprendió buena parte de los conocimientos de los egipcios y además parece que le insistió a Pitágoras que fuese a Egipto a dotarse de conocimiento, es más, Pitágoras se familiarizo con esta cultura a tal punto que se volvió un místico y se llamo a sí mismo un semidiós.

Es muy curioso que, además en la cultura babilónico, al igual que la egipcia el teorema a demás de ser tratado o mejor dicho utilizado como una herramienta de construcción e ingeniería, su uso era para hallar ángulos rectos, proceso que consistía en dividir una cuerda en tres partes las cuales eran precisamente 3, 4 y 5 que es la referente a la suprema terna pitagórica. Como podremos saber, a su vez los egipcios tomaron parte de su conocimiento de los babilonios, éstos trabajaron las matemáticas como una tecnología de computo la cual les permitía hacer cálculos con respecto a mercancías, a terrenos y a toda su estructura comercial pues como se sabe también resolvían ecuaciones y problemas geométricos.

Otro dato sorprendente es que los babilonios a demás de la terna 3,4 y 5 conocían muchas más pues los hallazgos de tablillas hechas con barro del Nilo muestran ternas incluso fraccionarias. Al igual que los chinos, "los babilonios y los egipcios poseían sus propios métodos, pero todos pertenecían a la categoría empírica"[2] nunca llegaron a una demostración pues incluso es asombroso observar cómo llegaron a la construcción de infinidad de ecuaciones y resultados matemáticos sin el conocimiento del álgebra, lo que quizás a veces podía no permitirles hacer generalizaciones y sólo se quedaban en casos particulares o aplicables a sus necesidades

¿Por qué el teorema lleva el nombre de Pitágoras?

Como sabemos, en la historia, la cultura griega se posiciono como una de las culturas que más ha influido en el pensamiento académico del hombre occidental moderno, los griegos mismos inventaron el termino filosofo que como sabemos significa amor al conocimiento. Dicha cultura se obsesionó por el conocimiento y lo explotó al máximo, sin embargo la causa del conocimiento no es sólo griega sino mas bien que la historia le otorgo a los griegos el calificativo de grandes pensadores y a su vez las conquistas dieron paso a que esta cultura se inmiscuyera en los demás pueblos dando con esto el llamado paradigma euro centrista el cual se esparció por todo el mundo al punto de volverse la forma de

[2] Strathern, Paul, 1997 pp 33-34. Aunque en verdad esta nota es sacada de la traducción al español del texto Pitágoras y su teorema 1999 de Marta Fontes fecharemos con el año de la publicación original

pensamiento valido para la “verdad”. ¿Y Pitágoras? este personaje que es de dudosa procedencia tuvo su gran aporte al pensamiento griego y se posicionó como punto de referencia para los filósofos griegos y fue de éste donde se conoció el tan mencionado teorema. Pitágoras se apasionó con los números y la religión hasta el punto que pensó que “todo era número” incluso el mismo Dios, e hizo un tratado minucioso de lo que hoy conocemos con el nombre de ternas pitagóricas.

Pitágoras de Samos ubicado en el 569 a.C. hasta el 490-80 a.C. formo la fe pitagórica en Italia y sus discípulos se encargaron de regar el conocimiento por toda Grecia. Pitágoras, hijo de un mercader y el mejor fruto de Samos fue discípulo de Anaximandro, de Ferecides e incluso del mismo Thales, este último hizo fama tras contar como había medido la altura de las pirámides en Egipto basándose en su sombra al medio día. Pitágoras se instauró en los sagrados templos egipcios donde aprendió la matemática y su gran atracción hacia la metapsicosis (trasmigración de las almas) por problemas políticos debió abandonar Samos, por su método de enseñar por parábolas tendría que instalarse en Crotona y no en Grecia, donde fundaría su religión o secta pitagórica y “es casi seguro que fue durante aquellos años en Crotona cuando Pitágoras llevó a cabo el grueso de su obra matemática, incluyendo el descubrimiento de su celebrado teorema” (STRATHERN, 1997: 32) de allí lo introvertido de su secta le costaría Crotona y algunos sugieren que hasta la vida misma. Sin lugar a dudas el haber demostrado el teorema hizo que se dotara de gran respeto ante los griegos quienes eran grandes amantes del pensamiento abstracto, y que será lo que siente las bases del pensamiento demostrativo característico de los griegos. Jamblico dice que cuando Pitágoras hubo probado el teorema mando a matar un buey (otros autores como Paul mencionan mas) pero como dice Gorman esto iría en contra de la filosofía de Pitágoras sobre que las almas ocupaban cuerpos de animales e incluso contra su inclinación vegetariana, en todo caso es sin duda este teorema lo que le da el estatus de matemático a Pitágoras, sin embargo es de nuestro conocimiento que además del tratado de las ternas pitagóricas, o los números perfectos, “la música de las esferas” los pitagóricos hacían gran cantidad de material matemático y esto convirtió a Pitágoras en fuente de conocimiento para los griegos, tanto que Platón pagaba grandes cantidades de dinero por los manuscritos pitagóricos.

Luego Platón, filosofo de gran influencia en el pensamiento griego, lo nombro-al teorema- en su dialogo del Menom con el nombre de Pitágoras y quizás este pasaje en que Sócrates hace a un esclavo recordar el dicho teorema sea el más citado en toda la historia del Teorema de Pitágoras.

Fueron los griegos quienes se encargaron de que el teorema se hiciera famoso con el nombre de Pitágoras quien sin duda fue un pensador en la escala más alta de los griegos. También Euclides vendría a ser clave en la historia de el teorema, pues es él quien propone otra demostración (aunque Mankiewicz nos menciona que este método ya era conocido: molino de viento) la cual está en los Elementos, texto que sin duda marca una historia en la matemática actual y que está siempre presente en los cursos de geometría.

Tras el posicionamiento del pensamiento griego, el teorema fue cogiendo fama y con éste se fue inmortalizando a Pitágoras pues pensadores de la talla de Lebniz, Bertrand Russel, Hegel, Aristóteles entre muchos más lo han admirado en sus escritos. Tras el posicionamiento del pensamiento Griego viene otro gran pensador a aclamar al “genio” de Pitágoras, Copérnico; quien dice haber basado su conocimiento en los escritos pitagóricos sobre el universo y más tarde Galileo seguido de Keppler. Todo esto ha contribuido a que el Teorema de Pitágoras y el mismo Pitágoras se hayan inmortalizado.

5.1.3. Referentes metodológicos (Estudio de caso).

> *“toda visión pasa a una consideración, toda consideración a un sentir, todo sentir a una asociación, y por ello podemos decir que en cada atenta mirada al mundo estamos ya teorizando”*
>
> *Goethe*

A continuación se presentan los aspectos metodológicos que estructuran el trabajo, el diseño del mismo y la metodología implementada; que trata sobre el *estudio de caso,* la cual fundamentalmente se desarrolla a partir de entrevistas o unidades de análisis y en este caso, en particular, en relación con los procesos de enseñanza- aprendizaje del Teorema de Pitágoras.

Como afirma Salkind (1998: 24) podemos caracterizar “el *estudio de caso* como un método empleado para estudiar un individuo o una institución en un entorno o situación única y de una forma lo más intensa y detallada posible”, los estudios de caso no solo están limitados a las personas e instituciones, sino que también se pueden acoplar a problemas relacionados con la administración (el fracaso o éxito de un negocio), o el estudio de una partícula. Ejemplos de este tipo de estudio los podemos encontrar en casos como la escuela de “Summerhell” cuya modalidad era la experimentación y fundamentada en la idea de una educación abierta; otro ejemplo es la “Among School Children, de Tacey Kidder, en donde una maestra de quinto grado consigna de una forma muy detallada todas las actividades realizadas en todo el año escolar (SALKIND, 1998: 211).

El estudio de caso también nos permite analizar datos de tipo histórico; “un estudio de caso examina en detalle un evento dado. El nivel de detalle puede ir mucho más allá de las variables estadísticas y enfocarse en características particulares del evento: la historia reciente del país donde sucede, la situación familiar de una persona.” (ANDUCKIA Y OTROS, 2009: 225).

En la aplicación de dicha metodología se siguen los siguientes pasos:

1. Diseño del estudio: en este paso se establecen los objetivos del estudio y las partes en las que se va a desarrollar, concibiendo esto como la estructura de la investigación. Por tanto, se trata en primera instancia de hacer un análisis teórico que para nuestro caso tendrá dos momentos, el primero dedicado a un análisis de tipo histórico y epistemológico del

Teorema de Pitágoras, y un segundo momento en el cual se realiza un análisis en el cual se busca desarrollar la propuesta pedagógica que para nuestro interés es *El Aprendizaje Significativo.*

2. Realización del estudio: en este paso se prepara, se elabora y se ejecuta el medio para la recolección de la información, para nuestra investigación, se analizará la obra de Peter Gorman (Pitágoras), en la cual se buscaran los posibles subsumidores que llevaron a Pitágoras a demostrar el teorema que lleva su nombre y un segundo momento se realizará una prueba fundamentada en los textos rectores y escolares del grado octavo y noveno que hacen referencia al concepto de triángulo rectángulo como eje fundamental de la enseñanza-aprendizaje del Teorema de Pitágoras.
3. Análisis y conclusiones: el cual se constituye según Yin "como el paso del estudio más importante dentro de la metodología debido a que es en este donde se analiza la evidencia, se interpretan los hallazgos y se escriben las teorías que éste estudio puede arrojar." (tomado de STAKE, 1998: 21).

5.1.3.1. Implicaciones didácticas del estudio de caso.

El método investigativo conocido como "Estudio de Caso", a través de la historia ha sido utilizado para enseñar muchos conceptos científicos en la escuela debido a su estructura y a la adaptación que este tiene con la pedagogía, para tener una idea de cómo podemos enseñar bajo este método debemos tener claro el término "caso" definido como "instrumentos educativos complejos que revisten la forma de narrativas. Un caso incluye información y datos: psicológicos, sociológicos, científicos, antropológicos, históricos y de observación, además posee un material técnico" (WASSERMANN, 1994); y agrega que "un caso puede ser algo muy específico, pero en su interior se presenta una interdisciplinariedad, debido a que, a la hora de estudiar un caso es importante preguntarse por su origen epistemológico, el impacto social que trajo consigo, el cambio de las concepciones en las personas (si es que las hubo) frente a este caso y los aportes que pueda dejar a los campos científicos y educativos, ya que este no solo se puede centrar en el cómo se enseña o el cómo se debe adquirir el concepto, sino que también, las consecuencias que trae al ser enseñado, y añade que "los docentes que eligieron esta metodología renovaron su entusiasmo por la enseñanza y que a sus estudiantes les interesa participar en estas clases porque aprenden, recuerdan y disfrutan más." (WASSERMANN, 1994: 126); esto se debe a que el estudio de caso permite la consulta de información en varias fuentes poco convencionales y sub-utilizadas como las películas y las obras literarias, haciendo así un trabajo de investigación multidisciplinar, el cual puede llevarse al aula de clase para crear controversia y debatir sobre el tema en cuestión, por tanto esta metodología se presta para evaluar a los alumnos, sin que estos se sientan presionados con la rigurosidad de los exámenes, por eso podemos afirmar que este enfoque a revolucionado y generado en los que lo aplican un cambio en el estilo de la enseñanza y a las vez permite a los que están sometidos a ella, a fortalecer los procesos de aprendizaje, creando en el alumno un pensamiento crítico sobre sus actos e invitándolo a reflexionar sobre su aprendizaje.

Además Para Goethe (citado por WASSERMANN, 1994: 126) el conocimiento se alcanza por la experimentación con el medio, y su interiorización se logra a partir del informe que pueda dar cuenta en detalles de todo su proceso de experimentación; sugiere también tres principios por los cuales tiene que pasar el individuo para lograrlo:

1. Primero, desde la observación del caso: de la percepción y consideración de aquello que es el caso;
2. Segundo, desde la descripción del caso: de la descripción de procesos y situaciones, de fenómenos y datos que constituyen el caso;
3. Tercero, desde el análisis del caso; de la determinación de características y de formulación de relaciones que se derivan del caso.

En pocas palabras para Goethe el aprendizaje en un individuo debe presentar estos tres principios que en definitiva son los mismos que rigen el estudio de caso.

Todo método investigativo tiene sus fortalezas como a la vez la existencia de debilidades, claro está que eso depende de las características de cada caso, se mencionan algunas.

Fortalezas.

En un *Estudio de Caso:*

1. Se enfocan hacia un sólo individuo o cosa (por ejemplo, una persona o un distrito escolar), lo que permite un examen y escrutinio muy de cerca y la recopilación de una gran cantidad de datos detallados.

2. Fomentan el uso de varias técnicas para obtener la información necesaria, las cuales van desde las observaciones personales hasta las entrevistas de otras personas que podrían conocer el objeto del estudio de caso hasta los expedientes de escuelas o doctores (en nuestro caso los docentes matemáticos institucionales) y otras cuestiones.
3. Sencillamente no hay mejor manera de obtener una imagen más completa de lo que está ocurriendo que a través de un estudio de caso.
4. Si bien el *Estudio de Caso* no prueba hipótesis, sugieren direcciones nuevas para estudios subsecuentes. (SALKIND, 1999: 212)

Debilidades.

1. Las notas que se toman en un diario podrían reflejar con exactitud la realidad o lo que se observa pero también podría no hacerlo.
2. Lo que los estudios de casos proporcionan en profundidad se pierde en amplitud.
3. No se pueden establecer relaciones de causa y efecto entre lo que se ve y lo que se piensa de donde podría estar el origen de los resultados.

5. Por la naturaleza misma de los estudios de caso, la generalización de los hallazgos es limitada. (SALKIND, 1999: 213)

Para terminar, el método de caso, Será utilizado en nuestro trabajo, en tres momentos; en el primer momento se hará una recolección de datos, en donde se busca la biografía u obra de Pitágoras.

El segundo momento se divide en cuatro fases, la primera se analizara los textos de historia de la matemática y la biografía de Pitágoras, en la cual se rastrearan los posibles subsumidores que obtuvo Pitágoras para demostrar el teorema. En la fase dos se diseñara y se aplicara una prueba para los estudiantes del grado octavo fundamentada en el concepto de triángulo y triángulo rectángulo (propuesto por el M.E.N.). En cuanto a la fase tres se realizara una encuesta para comprobar las respuestas de las estudiantes en la fase dos permitiendo mejor subjetividad en cada una de ellas. Y como fase final tenemos una triangulación de las fases anteriores.

Y en el tercer momento, después del análisis de los resultados obtenidos se consignara las conclusiones y recomendaciones que sean producto de nuestra investigación y posibles ampliaciones del mismo.

6. PROCESO DE INVESTIGACIÓN.

6.1. Ruta Pitagórica.

¿Cuál fue la ruta que siguió Pitágoras?

Pitágoras nació en Samos en el 569 a.C. (en la quincuagésima cuarta olimpiada) esta ciudad junto a Lesbos e islas jonias gozaban de una “liberta cultural” e intelectual (GORMAN, 1988: 21) pero Samos no será el lugar donde Pitágoras aprenda toda su matemática y filosofía pues aunque tuvo grandes maestros, era joven y sólo será hasta su regreso a Grecia cuando comprenda las enseñanzas de sus grandes maestros, incluso podríamos asegurar que ni siquiera los griegos desarrollaron tales disciplinas, pero lo que sí es seguro es que fueron estos los que les dieron el carácter de ciencia (HOFMANN, 2003: 18). Pitágoras, cuando apenas es un efebo, tendrá contacto con Tales, Anaximandro y Ferecides (GORMAN, 1988: 22) que como se sabe son y serán de los grandes representantes del conocimiento griego, Tales de Mileto gozaba de gran fama intelectual y era gran conocedor de las matemáticas, por el lado de Anaximandro, que era lo bastante diestro en ciencias de la astronomía y de Ferecides que fue un gran pensador y conocedor de ideas religiosas, con estos observará todo el conocimiento geométrico pero aún más importante es el hecho de gozar de maestros griegos que tienen un desarrollo puramente abstracto lo cual permitirá a

Pitágoras elevar sus conocimientos más allá de lo práctico. A su vez dichos maestros le insistirán a Pitágoras que viaje a Egipto y se permee de esta cultura. Antes de emprender su viaje a Egipto y Babilonia Pitágoras, de niño, estuvo en Tirio en la escuela de los sirios (GORMAN, 1988: 25), en este tiempo en Grecia "los primeros juegos olímpicos se celebraron en el año 776 a.C. y por esa época se había desarrollado ya una maravillosa literatura griega, como ponen en evidencia las obras, un poco posteriores, de Homero y Hesiodo. De la matemática griega de la época no sabemos nada; probablemente se quedo rezagada con respecto al desarrollo de las formas literarias, que se presentan mejor evidentemente a su continuidad por tradición oral. Habían de pasar casi dos siglos antes de que conozcamos ni una palabra, ni siquiera indirectamente sobre la matemática griega. Y entonces durante el siglo VI aparecen dos hombres, Tales y Pitágoras, que seguramente jugaron el mismo papel con respecto a las matemáticas que Homero y Hesiodo con respecto a la literatura." (BOYER, 2003: 74)

Como se pudo leer en el párrafo anterior, los griegos eran ya bien diestros en el campo de la literatura, como ideas proposicionales, como grandes lectores y escritores, aunque en este aspecto la tradición era más oral, y es obvio que Pitágoras en sus años de aprendizaje en la escuela griega desarrollo esta habilidad, proposicional, lo cual nos hace pensar que el primer conocimiento subsumidor que tendrá Pitágoras es el proposicional y que como ya se vio en el marco teórico es uno de los pilares del aprendizaje significativo (APRENDIZAJE DE PROPOSICIONES)

También de niño iría a Italia, donde más tarde volverá (510 a.C.) dotado de todo su conocimiento. A sus veintidós años viajara a Egipto (GORMAN, 1988: 48) sin embargo Jamblico nos dice que debió ser a los dieciocho años (GORMAN, 1988: 57) y estará allí hasta el 525 a.C. y como debió llegar en aproximadamente en el 547 a.C. quiere decir que permaneció allí alrededor de unos 20 años sin embargo Pitágoras no pudo ser aceptado de inmediato por los sacerdotes Egipcios lo que hace suponer que es en el 535 a.C. que comienza su actividad en los centros sacerdotales (GORMAN, 1988: 66). De aquí que sea necesario dar una breve contextualización de las matemáticas de esta cultura en lo que respecta a conceptos propios de el Teorema de Pitágoras (Las cuatro operaciones básicas, la potenciación, las ecuaciones de segundo grado, y en geometría lo correspondiente a triángulos y cuadrados) por tanto adentrémonos en dichos conocimientos

Los egipcios (2000-500 a.C.) tenían la suma como operación fundamental y lo que respecta a multiplicación se hacía por sucesivas duplicaciones o mediaciones (partir) en la época de Ahmés (BOYER, 2003: 36) conocían proporciones equivalentes o lo que se conoce como reglas de tres (BOYER, 2003: 36) casi siempre está asociado a cuestiones prácticas como el comercio o la construcción, como se puede ver en los diferentes papiros (papiro de Rhind, papiro de Moscú , rollo de cuero) sin embargo los cálculos se retenían en la tabla de cálculos (HOFMANN, 2003: 13) la suma era utilizada en su gran mayoría para casos administrativos, en los cuales toda la operación o calculo se lleva por medio de tablillas o sea reglas fijas.

Se nota como para los egipcios era indispensable las cuatro operaciones básicas, por lo tanto es de esperar que Pitágoras también se hiciera lo bastante diestro en estas operaciones, y con el tiempo se hará notar como estas operaciones son de total manejo de Pitágoras, convirtiéndose estas en los siguientes subsumidores y aunque los egipcios utilizaban un aprendizaje mecánico o memorístico, por el uso de tablas, la construcción de estas por parte de los sacerdotes egipcios era de una forma práctica pues casi siempre estaba asociado, el conocimiento, a aspectos prácticos como el comercio o la arquitectura. Incluso a su regreso a Grecia enseñara la aritmética y la geometría de una forma práctica (GORMAN, 1988: 93) y es así como Pitágoras concibe la suma como un APRENDIZAJE POR DESCUBRIMIENTO pues siempre es desde la práctica desde donde se llevan a cabo las adiciones y los cálculos, aún más, las operaciones básicas son desarrolladas por reiteraciones más no con un algoritmo especifico como el que se usa actualmente

Se encuentran en los papiros algunos problemas sobre progresiones aritméticas y geométricas (KLINE, 2002: 41) Pitágoras es un gran conocedor de las sumas y esto se ha de notar en el año 500 a.C. en el pleno apogeo de la escuela Pitagórica cuando en Grecia aparece toda una teoría científica de números : los números enteros se diferencian de pares e impares, aparecen los números primos y números compuestos, los números cuadrados son reconocidos como suma de números impares consecutivos y los triangulares como suma de números enteros consecutivos (HOFMANN, 2003: 20)

En lo que se sabe de potenciación esta era hecha por medio de sumas reiterativas, por ejemplo para calcular doce por doce se hacia una asociación de 1 a 12 luego el doble de uno con el doble de doce y luego se cogían dos números que dieran doce y por el otro lado daría el resultado esperado (KLINE, 2002: 38)

En lo que respecta a ecuaciones de segundo grado sólo se limitaban (los egipcios) a resolver las ecuaciones de tipo $b = ax^2$

En lo respectivo a geometría principalmente la mayoría de los historiadores caen en el relato de Herodoto sobre la toma de cercas para los terrenos que se inundaban por el Nilo, también es de conocimiento común que los Egipcios utilizaban recetas para el cálculo de las áreas de triángulos, rectángulos y trapezoides. En lo particular a el área de un triángulo lo hacían multiplicando un número por la mitad de otro, aunque no se puede estar seguros de que el método es el apropiado pues no se sabe si las medidas o números están representando las longitudes de la base y la altura o simplemente de dos longitudes (KLINE, 2002: 41) el área de de un cuadrilátero cualquiera era calculado por el producto de las medias aritméticas de los pares de lados opuestos. A pesar de que la regla es incorrecta se deduce un colorarío igualmente incorrecto y es el que concierne con el área de un triángulo diciéndose que es igual a la semisuma de dos de sus lados por la mitad del tercer lado (BOYER, 2003: 39)

Se ha de observar en lo concerniente a la geometría egipcia, que Pitágoras se familiarizo principalmente con triángulos y cuadrados más como relaciones de áreas que como figuras abstractas, puesto que en los papiros de esta cultura se muestra una practicidad del trabajo de áreas y más aun “cuando la línea forma un plano, como el triángulo, el tres entra en acción […] el triángulo era asociado al alma, también fue el fundamento de los átomos cósmicos del fuego, el aire y el agua, también es el símbolo de la triada por la característica de tres lados, incluso Pitágoras lo relaciono con el trípode de Apolo. Los Pitagóricos con frecuencia utilizaban las propiedades del tres en conjuros y formulas mágicas, también la consideraban la primera figura plana y (algo que es muy importante) los Pitagóricos relacionaron el tres con el plano (GORMAN, 1988:156) […] El cuatro o tetraktys (es importante señalar que dentro de la escuela Pitagórica el cuatro tenia múltiples definiciones) simboliza los cuerpos sólidos de los compuestos por planos.” (GORMAN, 1988:149), el cuadrado se convirtió en un símbolo de justicia, más adelante (1988:152) Gorman nos dice: Del Uno procede todo lo que es bueno en el universo, puesto que es el origen de los números impares. Dichos números se denominan buenos porque en el sistema de la aritmética Pitagórica los lados que rodean los números o gnomon siempre forman cuadrados alrededor de los números impares. El cuadrado es símbolo de igualdad y regularidad. En esto, el cuadrado se parece al Uno, mientras que la díada, o dos, es el origen de la desigualdad e irregularidad en el cosmos; por lo tanto, la díada es el principio del mal.

Lo anterior nos muestra como los egipcios tenían una concepción de la geometría, específicamente del triángulo y el cuadrado muy amplia, pues no se ligaba sólo a la representación simbólica de ellas, sino que se relaciona en todo el campo de la matemática como construcción de otras situaciones numéricas y como Pitágoras se relaciona con esta concepción hasta tal punto que se considere como un subsumidor de la ruta que siguió para demostrar el Teorema de Pitágoras.

Con respecto al ángulo recto y el Teorema de Pitágoras no se sabe o se puede decir con exactitud que lo conocieran (los egipcios) sin embargo había una técnica de cuerdas y tensores de la cuerda pero el hecho de que se dividieran en las ternas 3, 4 y 5 para hallar ángulos rectos no está clara en la historia pues no hay evidencias (KLINE, 2002:43) sin embargo los registros "[…] arqueológicos indican que por el año 2000 a. de C. los egipcios tenían un sistema numérico primitivo y algunas ideas geométricas sobre triángulos, pirámides y figuras similares. Hay una tradición en este sentido, de que los arquitectos egipcios utilizaban un inteligente sistema para trazar ángulos rectos: Unían unos con otros doce segmentos de soga de la misma longitud formando un lazo, […] estiraban cinco de estos cementos consecutivos y forman con ellos una recta […] luego tirando de la cuerda y fijándola en un punto forman un triángulo rígido con un ángulo recto (DUNHAM, 2002: 22)

El ángulo recto en la cultura egipcia era concebido de una manera práctica, igualmente lo concebían los babilonios, ambas culturas no lo relacionaban directamente a un triángulo, sino a una construcción de él por medio de una relación de cuerdas. No es de extrañarse que en un principio Pitágoras tuviera está misma concepción del ángulo recto, lo cual nos lleva a señalarlo como un subsumidor, pero muy ajeno al triángulo.

Sin embargo en la actualidad el ángulo recto es visto de una forma muy abstracta y no deberíamos sorprender cuando Dunham (citando a Trudeau) dice: los ángulos rectos son algo familiar, realidades cotidianas que aparecen no sólo en el mundo artificial, sino también en la misma naturaleza. ¿Qué podía ser más <<ordinario>> y <<natural>> que los ángulos rectos?

Tras pasar aproximadamente 20 años estudiando esta cultura, sin ser muy claros los motivos por los cuales abandonó Egipto, pasara a Babilonia pero tendrá contacto con las artes Persas pues Pitágoras tiene contacto con Záratas (GORMAN, 1988: 72) Permaneció en Babilonia cerca de trece años y regreso a Samos en el 520 a.C. (GORMAN, 1988: 78)

En lo respectivo a sumar y restar (los babilonios) se reducían a añadir o quitar símbolos (los cuales representaban números en potencia sexagesimal). En la multiplicación lo hacían por números que ya conocían y luego los sumaban; por ejemplo para multiplicar por 37 suponían multiplicar por treinta y luego por siete, luego se suman los resultados. Para dividir utilizaban sus inversos, para esto simplemente multiplicaban, estos eran representados por fracciones sexagesimales (KLINE, 2002: 24) los inversos ya los tenían en sus tablas de inversos, también contenían tablas de multiplicar, de cuadrados y cubos y de raíces cuadradas y cubicas (BOYER, 2003: 53)

Los babilonios también contenían en sus tablas todos los pares de factores que se complementan a 60 o a una potencia de este y son clasificados y aumentados en los valores básicos de un medio y dos tercios. En lo que respecta a raíces cuadradas no exactas las aproximaban con un cálculo repetido del método de la media aritmética-geométrica. Las babilonios también construían triángulos pitagóricos ($x = 2uv,\ y = u^2 - v^2,\ z = u^2 + v^2$) sin querer decir con esto que conocían el teorema en su esencia (HOFMANN, 2003: 10) también es de conocimiento el uso del teorema para hallar la altura de un triángulo isósceles en el volumen del tronco de una pirámide de base cuadrada. También todas las resoluciones de ecuaciones y progresiones eran de tipo práctico como muros de contención u otros casos arquitectónicos. El papel de la geometría para los babilonios no llego a comprender una rama de las matemáticas y fue tan así que muchos de los problemas sobre divisiones de campos o sobre cuántos ladrillos se necesitaban para una construcción se convertían en problemas de carácter algebraico. Aunque no se puede diferenciar si los triángulos de los babilonios son rectángulos o los cuadriláteros son cuadrados, para aplicar las fórmulas y constatar su veracidad si es cierto que ya conocían la relación pitagórica, la semejanza de triángulos y la proporcionalidad de los lados correspondientes en triángulos semejantes (KLINE, 2002: 29)

En esta cultura Pitágoras se relaciona con la concepción de ecuación, más vista como una relación de igualdad y equivalencia, se encuentra con un trabajo raíces evidenciado en el análisis de las tablas de cálculo y es en esta cultura donde estudia a fondo las diferentes concepciones de los triángulos, dándonos a suponer que el triángulo es uno de los últimos subsumidores que Pitágoras adquiere.

Por último viajo a Creta y Esparta donde debió de pasar al menos dos años antes de llegar a Italia, Crotona, en el 518 a.C. Cuando tenía alrededor de cuarenta años (GORMAN, 1988: 104) será allí donde establece su escuela y desarrolla sus grandes teorías incluyendo el Teorema de Pitágoras

El teorema.

Dicho teorema reza así: Para un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los lados más cortos equivale al cuadrado del lado más largo.[3]

Aunque Pitágoras y los pitagóricos sólo lo trataron para números naturales y algunas proporciones o razones, hoy día sabemos que el teorema es generalizado para todos los reales.

Como se mostró, el teorema se posiciono en lo más alto del conocimiento matemático con este se metió o inmiscuyo en la escuela. En la educación colombiana debe ser estudiado en su totalidad en el grado noveno sin embargo muchos profesores y textos lo trabajan en años posteriores.

6.2. Prueba inicial:

6.2.1. Descripción.

Con esta prueba inicial se busca principalmente mirar cuales son los conocimientos que poseen las estudiantes del grado octavo de la Institución

[3] Tomado de historia de las matemáticas de Richard Mankiewicz 2000

Educativa Fe y Alegría Nueva Generación del municipio de Bello en los temas relacionados y anteriores al Teorema de Pitágoras. Para lo cual, se presenta una prueba que consta de cuatro puntos en el que se expresan el reconocimiento de triángulos y sus características fundamentales buscando cuales son los conocimientos previos en el estudiante que sean subsumidores para que se pueda llegar a la aprehensión del Teorema de Pitágoras de una manera significativa.

Con respecto al primer punto se considera que las respuestas deben estar en los numerales c), d) y e); ya que, en los estándares de matemáticas relacionados a estos conceptos o temas ya se debieron haber visto o adquirido por el estudiante. Como por ejemplo de primero a tercero el estándar ocho del pensamiento espacial y sistemas geométricos dice: “Realizo construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o figuras geométricas bidimensionales” (M.E.N, 2007: 80), Otro que nos dice: “Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características” (M.E.N, 2007: 80) otro muy importante y es de los grados de sexto a séptimo es el siguiente: “Clasifico polígonos en relación con sus propiedades” (M.E.N, 2007: 84), entre otros. Y además el numeral d) lo validamos desde la perspectiva representacional ausubeliana. La cual dice: “Aprendizaje del significado de símbolos específicos o el aprendizaje de lo que representan: incluye el nombramiento de objetos particulares” (AUSUBEL, 1980: 538).

Continuando con este punto las figuras que no son triángulos como lo son la de los tres puntos y las de los tres segmentos no intersecado no son triángulos, pero como al ser humano tiende a completar las cosas, el escoger un triángulo nos dará a entender que es diferenciada la figura por su principal definición geométrica (son tres puntos no consecutivos, unidos por tres segmentos).

La figura del numeral b) es la forma clásica de presentación de un triángulo; lo cual nos debe indicar una respuesta más probable, en cambio la figura del numeral e) por su ubicación en el plano no tradicional nos indicara un mejor acercamiento hacia la figura triángulo.

En el punto número dos se espera que exista un reconocimiento de la figura de triángulo rectángulo. Con base en el numeral b); puesto que es una forma tradicional o convencional de presentación de éste, intuimos que la gran mayoría de las estudiantes escogerán esta elección.

En el numeral a) se espera que los estudiantes no la seleccionen, puesto que esto nos dará una diferenciación entre triángulos y los específicos triángulos rectángulos. Y con los numerales c) y e); estos funcionan como distractores por sus propiedades de perpendicularidad y sus nombres de rectángulo, se espera que al no ser seleccionados los estudiantes distingan las propiedades entre triángulos, cuadriláteros u otras formas.

En el tercer punto el cual está dividido en dos partes complementarias una con la otra, lo que se busca es mostrarnos hasta qué punto los estudiantes reconocen este triángulo y sus propiedades, además la segunda parte cumple una función representacional, con respecto a las propiedades del triángulo rectángulo.

Cabe decir que se toma el triángulo rectángulo como posible subsumidor para que el Teorema de Pitágoras sea significativo para el estudiante, lo cual llevó a estructurar la prueba anteriormente descrita con base en él, se espera que las estudiantes no tengan dificultades con la prueba y así tomar el triángulo rectángulo como subsumidor.

6.2.2. Propósitos:

Con la prueba se busca encontrar desde la teoría del Aprendizaje Significativo los conocimientos previos que los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Fe y Alegría Nueva Generación tiene y si estos son lo suficientemente relevantes para considerarlos como subsumidores para realizar el “anclaje” o la relación con el nuevo conocimiento en este caso el Teorema de Pitágoras.

Como resultado de la revisión de textos escolares de dicho grado, los estándares de matemática relacionados al Teorema de Pitágoras se tomó el concepto de triángulo rectángulo como un subsumidor que permitirá el “anclaje” adecuado para que el nuevo conocimiento sea significativo.

También se propone mirar que tan viable y necesario es enseñar el concepto de triángulo para la adquisición del conocimiento de nuestro interés; el Teorema de Pitágoras.

6.2.3. Categorías de análisis.

Como se pudo observar en la ruta Pitagórica hay ciertos conceptos que deben ser anclados para poder introducir el concepto de Teorema de Pitágoras por lo tanto lo ideal sería analizar nuestros casos a raíz de estos conceptos, pero tan bien como ya se había mencionado nuestra prueba estaba más encaminada hacia dos conceptos: Triángulo y cuadrado, por esta razón nuestras categorías de análisis son:

- Categoría 1: Triángulo; desde acá se espera vislumbrar que saben estás estudiantes sobre los triángulos y en especial sobre el rectángulo, y aunque en nuestro trabajo este concepto es de los últimos que adquiere Pitágoras no es el menos importante, además hay que recordar que es precisamente en este grado o en el siguiente donde se trabajara el Teorema de Pitágoras.

- Categoría 2: Cuadrado; como se evidencio este concepto fue de gran importancia para los Pitagóricos y lo es para este teorema pues desde cualquier punto, sea visual o proposicional, siempre se ve arraigado al Teorema de Pitágoras.

6.2.4. Actividad propiamente a realizar.

La siguiente es la prueba inicial (guía) que se efectuó a las estudiantes

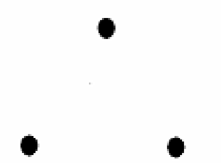
INSTITUCION EDUCATIVA

"FE Y ALEGRIA NUEVA GENERACION"

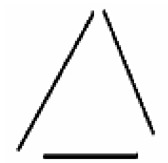
PRUEBA NUMERO UNO

NOMBRE:_______________________________________GRADO:____

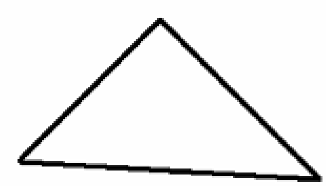
1. De lo que puedes observar ¿Qué es un triángulo?


a)


b)

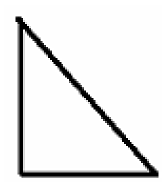

c)

d) TRIÁNGULO

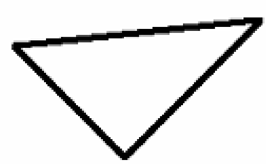
e)


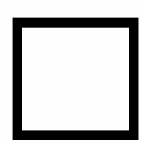
2. ¿Cuáles de las siguientes figuras son triángulos rectángulos?


a)


b)

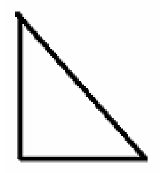
c)



d)


e)

3.

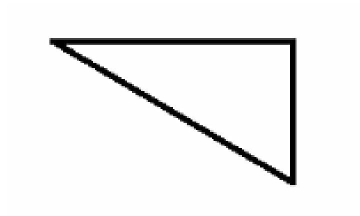
- Coloca los nombres de las partes que conoces o recuerdas del siguiente triángulo rectángulo



- Traslada los nombres que consideres que hacen parte de un triángulo rectángulo.

1. cateto
2. mediana
3. cateto b
4. noventa

5. 90 grado
6. lado
7.diagonal
8.hipotenusa



6.2.5. Análisis de los resultados de la prueba.

En el marco del desarrollo del presente trabajo se hizo necesario identificar, caracterizar o describir el estado actual de las estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Fe y Alegría Nueva Generación en relación con la nociones de triángulo y específicamente el triángulo rectángulo con el fin de observar cuales son los conocimientos que las estudiantes tienen con respecto a los triángulos y mirar si estos pueden ser utilizados para que la enseñanza del Teorema de Pitágoras sea significativa.

La prueba fue realizada a 44 estudiantes de la Institución Educativa Fe y Alegría Nueva Generación de Niquía en el Municipio de Bello (Antioquia)

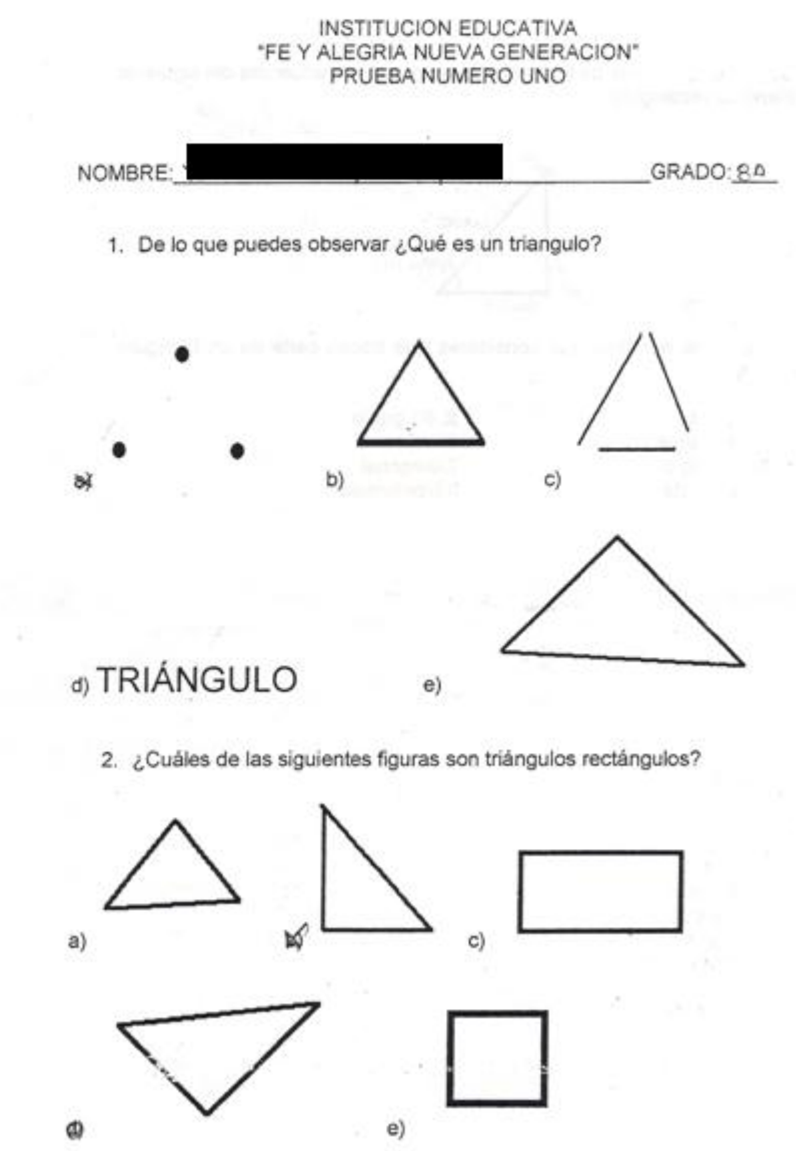
En general se encontró una dificultad en el reconocimiento de los triángulos, puesto que las estudiantes respondían con seguridad que imágenes como los 3 puntos eran triángulos y no se reconocía el concepto del mismo desde la geometría euclidiana que define el triángulo como “la unión de tres puntos no colíndales por medio de segmentos”, otras tomaban el triángulo rectángulo por el ángulo, lo cual llevo a identificar a los cuadriláteros rectangulares como triángulos rectángulos y además no tenían el reconocimiento de las partes del mismo. Se observó estas particularidades en la mayoría de las encuestadas.

Viendo las dificultades de las estudiantes a partir del análisis realizados a las producciones se detectó que en su gran mayoría no se identificaban los triángulos y mucho menos el triángulo rectángulo, lo que nos llevó a la tarea de consultar a cada estudiantes sobre el porqué de las respuestas, lo cual reafirma nuestros análisis, puesto que las estudiantes no tenían un buen reconocimiento de los conceptos que nosotros considerábamos como ya vistos en el proceso educativo por el grado en el que se encontraban. Además se encontró que en su mayoría las estudiantes no tenían idea alguna de las preguntas que se le hacían.

Debido a que se busca que conocimientos previos tenían las estudiantes sobre la noción de triángulo y al encontrar tantas dificultades o vacíos conceptuales se decidió seleccionar a tres estudiantes con el fin de trabajar los mismos conceptos con herramientas diferentes y hacer un análisis más detallado de cada situación.

6.3. Análisis de la prueba realizada con base en el triángulo.

6.3.1 Caso 1.



INSTITUCION EDUCATIVA
"FE Y ALEGRIA NUEVA GENERACION"
PRUEBA NUMERO UNO

NOMBRE: [redacted] GRADO: 8ª

1. De lo que puedes observar ¿Qué es un triangulo?

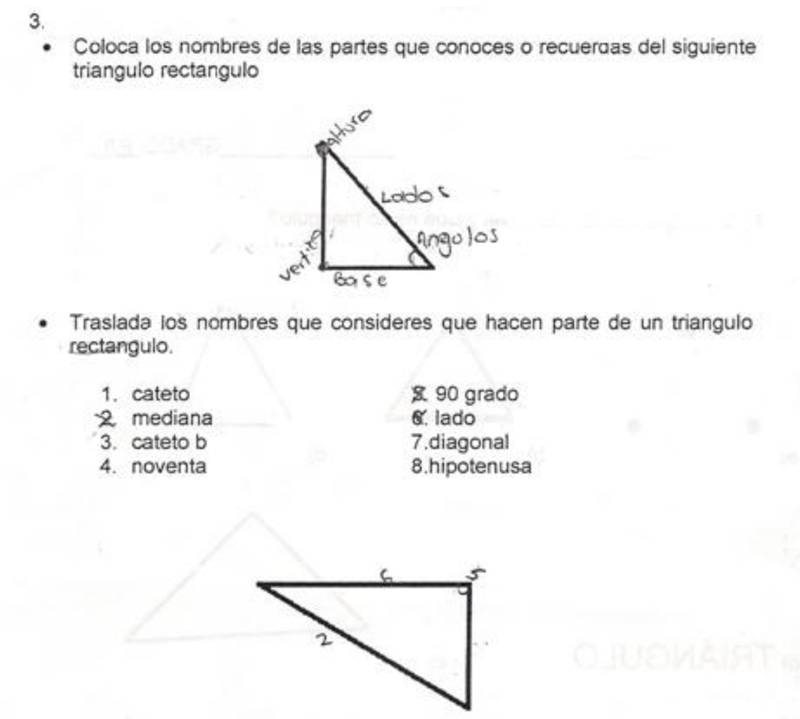
a) b) c)

d) TRIÁNGULO e)

2. ¿Cuáles de las siguientes figuras son triángulos rectángulos?

a) b) c)

d) e)



3.

- Coloca los nombres de las partes que conoces o recuerdas del siguiente triangulo rectangulo

- Traslada los nombres que consideres que hacen parte de un triangulo rectangulo.

1. cateto
2. mediana
3. cateto b
4. noventa
5. 90 grado
6. lado
7. diagonal
8. hipotenusa

Estudiante (YMO)

Con respecto a la prueba inicial: la pregunta uno ¿Qué es un triángulo? Tenía 5 respuestas de la cuales considerábamos 2 opciones que inmediatamente debían ser seleccionadas (las opciones b y e), puesto que los textos escolares del grado octavo, los estándares de matemáticas y profesores, han trabajado este concepto e incluso en grados anteriores ya ha sido trabajado y una tercera selección la palabra “triángulo”, la cual escogimos por el concepto basándose en la teoría del Aprendizaje Significativo de las proposiciones que afirma que: aprendizaje del significado de una nueva idea compuesta expresada en forma de oración; derivado de dos o más conceptos, pero que constituye algo más que la suma de los últimos debido a las propiedades “semánticas” del orden e inflexión de las palabras”(AUSUBEL, 1980: 543).

La estudiante (YMO) seleccionó la opción a) los 3 puntos como un triángulo, la respuesta muestra poco en la adquisición del concepto desde la geometría euclidiana, puesto que se había señalado que en la definición de esta geometría se menciona que son tres puntos unidos por tres segmentos.

En la pregunta dos, ¿Cuáles de las siguientes figuras son triángulos rectángulos? (ver prueba caso uno) las opciones de respuesta eran 5 de las cuales 2 eran triángulos rectángulos, 2 cuadriláteros rectángulos y una era un triángulo escaleno no rectangular. Se espera que seleccionen la opción b y d, puesto que son dos triángulos rectángulos, para saber que tan claro está el concepto triángulo.

(YMO) seleccionó las opciones b) y d) mostrando una identificación de ángulos rectos mas no del concepto de triángulo rectángulo, pues los triángulos rectángulos tenían la hipotenusa distorsionada y aun así los seleccionó como triángulo rectángulo, lo cual muestra como evidencia la identificación del triángulo rectángulo con su característica más representativa “el ángulo recto”.

En la pregunta 3 numeral a) coloca los nombres de las partes que conoces o recuerdas del siguiente triángulo rectángulo (ver prueba caso uno).

(YMO) reconoció algunas partes de los triángulos como los ángulos, vértices y los lados, pero en ningún momento se reconocieron las particularidades del triángulo rectángulo y además reconoció la altura como un vértice del triángulo que se le asignó para que hiciera la respectiva actividad.

En la pregunta 3 numeral b) traslada al triángulo los nombres que consideras que hacen parte de un triángulo rectángulo. En este punto se buscaba corroborar las respuestas del punto 3 numeral a) (suponiendo que encontrarían las particularidades de triángulo rectángulo) y se encontró que sólo identificó como particularidad el ángulo de noventa grados y confundió la hipotenusa con la mediana y aunque tenía las opciones de catetos selecciona la opción de lado para ellos, lo cual indica muy poco afianzamiento al reconocimiento de las partes de un triángulo rectángulo.

Debido que al encontrar errores en las respuestas tan poco acertadas de las estudiantes a la prueba inicial, se prosigue a una entrevista sobre la misma prueba para tratar de rastrear más información, lo cual consiste en preguntar "el por qué de sus respuesta" y "el por qué de no otras" como lo sugiere el estudio de caso para rastrear más información; aquí están los resultados de esta intervención (entrevista personalizada).

Estudiante (YMO).

Entrevistador (E).

Pregunta 1 de la prueba inicial.

(E) ¿Por qué seleccionaste la opción A?

(YMO) Son tres puntos, no está dibujado pero es un triángulo.

(E)¿Por qué no seleccionaste la opción B?

(YMO) Si es, no es la más acorde.

(E) ¿Y qué me dices de la opción C?

(YMO) no, no es.

(E) ¿Qué me dices de la opción D?

(YMO) No hay imagen.

(E) ¿Y por qué no seleccionaste la opción E?

(YMO) Si es, pero no la seleccione.

Pregunta 2 de la prueba inicial.

(E) ¿Por qué crees que la opción A no es un triángulo rectángulo?

(YMO) Porque es un triángulo isósceles.

(E) ¿Por qué seleccionaste la opción B?

(YMO) Porque se asemejan.

(E) ¿Por qué no seleccionar las opciones C y E?

(YMO) Porque son cuadriláteros.

(E) ¿Por qué seleccionaste la opción D?

(YMO) Por que tiene ángulo recto.

Pregunta 3a y 3b de la prueba inicial.

(E) ¿Por qué pones y seleccionas esas partes para el triángulo?

(YMO) Por explicaciones anteriores de mis profesores de geometría.

Todas estas respuestas nos muestran que no hay desconocimiento del tema o concepto relacionado con los triángulos, puesto que aun con los errores muestra identificaciones de elementos que nos aproximan al concepto que se ha querido trabajar, pero aquí surge un interrogante, ¿si es el triángulo rectángulo lo suficientemente significativo para las estudiantes como para que éste sea tomado como un subsumidor primordial para que la enseñanza del Teorema de Pitágoras sea significativa.

6.3.2. Caso 2.

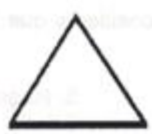
Estudiante (EAPV)

INSTITUCION EDUCATIVA
"FE Y ALEGRIA NUEVA GENERACION"
PRUEBA NUMERO UNO

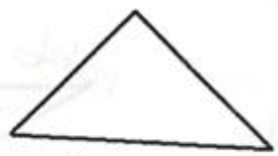
NOMBRE: [redacted] GRADO: 8°A

1. De lo que puedes observar ¿Qué es un triangulo?.

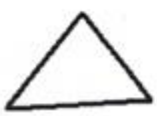
a) 

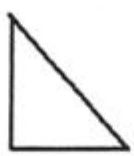
b) 

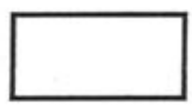
c) 

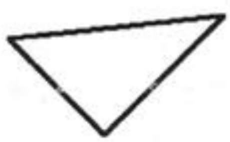
d) TRIÁNGULO 

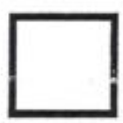
2. ¿Cuáles de las siguientes figuras son triángulos rectángulos?

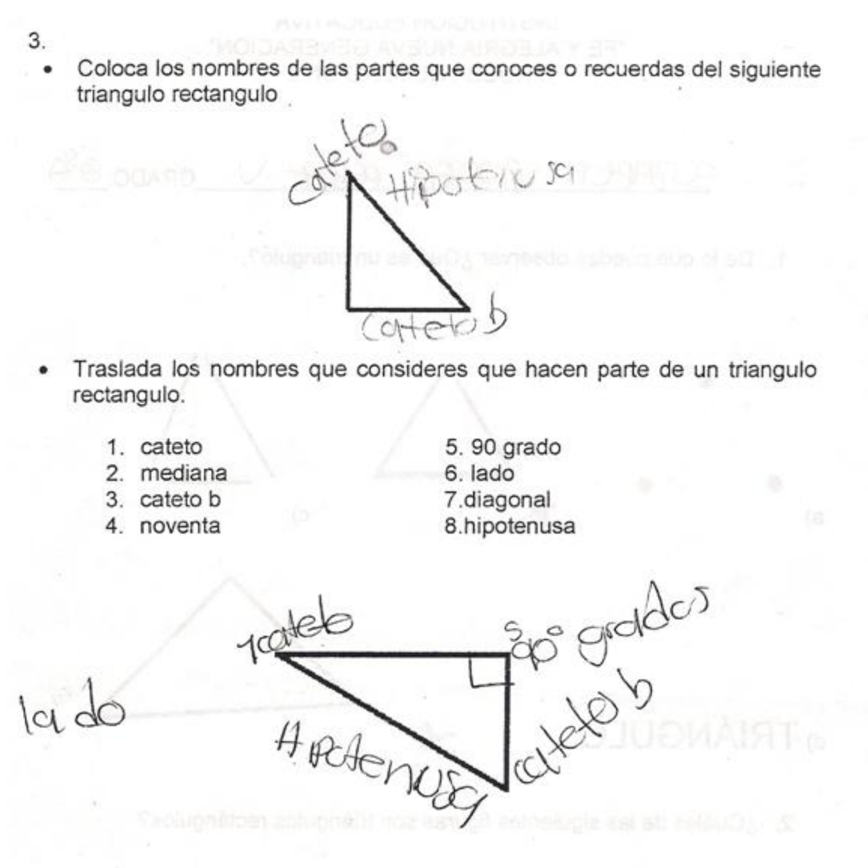
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 



3.

- Coloca los nombres de las partes que conoces o recuerdas del siguiente triangulo rectangulo

- Traslada los nombres que consideres que hacen parte de un triangulo rectangulo.

1. cateto
2. mediana
3. cateto b
4. noventa

5. 90 grado
6. lado
7.diagonal
8.hipotenusa

Respondiendo a las mismas preguntas realizadas a (YMO) en la prueba inicial donde se obtuvieron las siguientes respuestas.

(EAPV) seleccionó la opción b) y d) como triángulos, las respuestas muestra una buena identificación de figuras, en este caso triángulos, la cual es muy importante en la adquisición del concepto, cumpliendo así con lo que se esperaba, que al menos seleccionara las opciones donde se muestran las figuras (reconocimiento de las figuras).

En la segunda pregunta, (EAPV) seleccionó las opciones b) y d) mostrando una identificación de ángulos rectos mas no del concepto de triángulo rectángulo, pues los triángulos rectángulos tenían la hipotenusa distorsionada y aun así los seleccionó como triángulo rectángulo, lo cual muestra como evidencia la identificación del triángulo rectángulo con su característica más representativa "el ángulo recto".

En la pregunta 3 numeral a) coloca los nombres de las partes que conoces o recuerdas del siguiente triángulo rectángulo (ver prueba caso dos).

(EAPV) reconoció algunas partes de los triángulos como los catetos y la hipotenusa, se centro solamente en la identificación de los lados del triángulo y no puso el ángulo recto, que es de lo primordial al definir un triángulo rectángulo.

En la pregunta 3 numeral b) traslada al triángulo los nombres que consideras que hacen parte de un triángulo rectángulo. En este punto se buscaba corroborar las respuestas del punto 3 numeral a), mostrando aquí, que tiene una gran apropiación de las partes de un triángulo rectángulo dando respuestas esperadas.

Estudiante (EAPV).

Entrevistador (E).

Pregunta 1 de la prueba inicial.

(E) ¿Por qué no seleccionaste la opción A?

(EAPV) No se juntan (refiriéndose a los segmentos que deben unir los puntos de un triángulo).

(E) ¿Por qué seleccionaste la opción B?

(EAPV) Tiene tres lados y tres ángulos.

(E)¿Y qué me dices de la opción C?

(EAPV) No se cortan las líneas.

(E) ¿Qué me dices de la opción D?

(EAPV) No hay figura.

(E) ¿Y por qué seleccionaste la opción E?

(EAPV) Tiene tres lados y tres ángulos.

Pregunta 2 de la prueba inicial.

(E) ¿Por qué crees que la opción A no es un triángulo rectángulo?

(EAPV) Porque es un triángulo sencillo.

(E) ¿Por qué seleccionaste la opción B?

(EAPV) Tiene ángulos rectos.

(E) ¿Por qué no seleccionar las opciones C y E?

(EAPV) Son cuadriláteros.

(E) ¿Por qué seleccionaste la opción D?

(EAPV) Tiene ángulos rectos.

Pregunta 3a y 3b de la prueba inicial.

(E) ¿Por qué pones y seleccionas esas partes para el triángulo?

(EAPV) Ya lo sabía todo, porque un profesor me enseño el Teorema de Pitágoras, por eso los identifique.

En el caso de (EAPV) se puede interpretar un mejor acercamiento por parte de la estudiante hacia las particularidades de los triángulos rectángulos, lo cual puede indicar que el triángulo rectángulo podría ser un subsumidor para el “anclaje” con el concepto del Teorema de Pitágoras de una manera significativa.

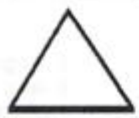
6.3.3. Caso 3*.*

Estudiante (LVMM).

NOMBRE: [redacted] GRADO: 8-A.

1. De lo que puedes observar ¿Qué es un triangulo?

a) 

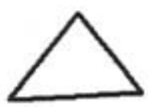
b) 

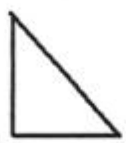
c) 

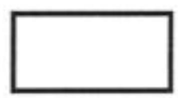
d) TRIÁNGULO

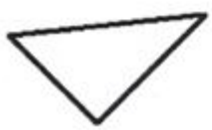
e) 

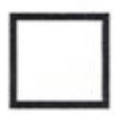
2. ¿Cuáles de las siguientes figuras son triángulos rectángulos?

a) 

b) 

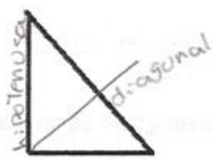
c) 

d) 

e) 

3.

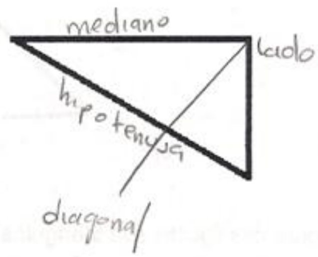
- Coloca los nombres de las partes que conoces o recuerdas del siguiente triangulo rectangulo



- Traslada los nombres que consideres que hacen parte de un triangulo rectangulo.

1. cateto
2. mediana
3. cateto b
4. noventa

5. 90 grado
6. lado
7.diagonal
8.hipotenusa



Repuestas a la prueba inicial.

(LVMM) seleccionó la opción b) como un triángulo, la respuesta muestra una adquisición del concepto, ya que se esperaba que al menos seleccionara las opciones donde se muestran las figuras (reconocimiento de las figuras).

En la pregunta dos, ¿Cuáles de las siguientes figuras son triángulos rectángulos? (ver prueba caso tres) las opciones de respuesta eran 5 de las cuales 2 eran triángulos rectángulos, 2 cuadriláteros rectángulos y una era un triángulo escaleno no rectangular.

(LVMM) seleccionó la opción b) mostrando una identificación del ángulo recto en una sola posición, no selecciona la otra opción la d) debido a que el ángulo recto no está en una posición normal o tradicional, lo que indica que no hay una abstracción del concepto de triángulo rectángulo, puesto que sólo identifica el triángulo en su posición tradicional y es fundamental para el Teorema de Pitágoras la identificación del mismo en todas sus posiciones".

En la pregunta 3 numeral a) coloca los nombres de las partes que conoces o recuerdas del siguiente triángulo rectángulo (ver prueba caso tres).

(LVMM) no pone ninguna de las partes de los triángulos rectángulos en su posición real, la hipotenusa la coloco en el lugar de un cateto y además considera que los triángulos tienen diagonales

En la pregunta 3 numeral b) traslada al triángulo los nombres que consideras que hacen parte de un triángulo rectángulo. En este punto se buscaba corroborar las respuestas del punto 3 numeral a), con lo cual nace un interrogante sobre si conoce o desconoce qué es la hipotenusa puesto que la identifica en este punto claramente, contrario al numeral a); con respecto a los otros puntos si hay un desconocimiento total de las partes de un triángulo rectángulo.

Estudiante (LVMM).

Entrevistador (E).

Pregunta 1 de la prueba inicial.

(E) ¿Por qué no seleccionaste la opción A?

(LVMM) No sé.

(E) ¿Por qué seleccionaste la opción B?

(LVMM) Es y ya.

(E) ¿Y qué me dices de la opción C?

(LVMM) No.

(E) ¿Qué me dices de la opción D?

(LVMM) Mmm..... No sé.

(E) ¿Y por qué no seleccionaste la opción E?

(LVMM) (Se muestra esquiva).

Pregunta 2 de la prueba inicial.

(E) ¿Por qué crees que la opción A no es un triángulo rectángulo?

(LVMM) No es.

(E) ¿Por qué seleccionaste la opción B?

(LVMM) El ángulo de noventa.

(E) ¿Por qué no seleccionar las opciones C y E?

(LVMM) Son cuadriláteros.

(E) ¿Por qué no seleccionaste la opción D?

(LVMM) No lo vi.

Pregunta 3a y 3b de la prueba inicial.

(E) ¿Por qué pones y seleccionas esas partes para el triángulo?

(LVMM) Explicación anteriores en clase de geometría.

Parece ser que en este caso no se puede tomar el triángulo rectángulo como un concepto que sirva para enseñar el Teorema de Pitágoras, debido a que ni el mismo triángulo esta bien interiorizado.

7. ANÁLISIS DE LOS TRES CASOS A LA LUZ DE LOS OBJETIVOS, EL MARCO TEÓRICO Y LA RUTA PITAGÓRICA.

Caso 1:

En el marco teórico se identifica que según la teoría del Aprendizaje Significativo y nuestro objetivo que es encontrar los subsumidores del Teorema de Pitágoras (YMO) muestra una actitud de aprendizaje significativo, puesto que en las respuestas a la encuesta encontramos (YMO) dice:" por explicaciones anteriores de mis profesores de geometría", lo cual nos indica que intenta hacer las relaciones entre los conocimientos ya aprendidos y los nuevos conocimientos que se le están implementando. (YMO) no tiene una adquisición de conceptos o aprendizaje, puesto que seleccionó los tres puntos no colineales como un triángulo desconociendo sus atributos criteriales.

Según nuestro recorrido pitagórico el triángulo es uno de los últimos conocimientos adquiridos por el propio Pitágoras y desde el aprendizaje significativo tenemos el que se ha de relacionar con conceptos anteriores y se observa que la estudiante no tiene claridad del conceptos en sí, puesto que no identifica las parte de los triángulos y mucho menos del triángulo rectángulo, desde la teoría del Aprendizaje Significativo, no tiene el aprendizaje representacional, el cual nos dice:" aprendizaje del significado de símbolos específicos o el aprendizaje de lo que representan: incluye el nombramiento de objetos particulares”, no identifico la hipotenusa, los catetos, el cuadrado y para la inclusión del Teorema de Pitágoras primero se han de tener bien estructurados para ser relacionados con el mismo, por decirlo así Pitágoras ya tenía bien establecido en su estructura educativa las operaciones básicas y otros elementos antes de trabajar con los triángulos y llegar a la demostración que lleva su nombre.

En el caso de (YMO) los conocimientos que posee para dar solución a la prueba inicial no eran lo suficientemente claros o significativos, quiere decir que no pueden ser tomados como subsumidores para realizar el “anclaje” al nuevo conocimiento, se deberá realizar un trabajo para convertir esos conocimientos ya adquiridos en los suficientemente significativos para convertirlos en subsumidores del teorema de Pitágoras.

En el caso (YMO) no se considera el concepto de triángulo como un concepto lo suficientemente relevante y mucho menos el triángulo rectángulo como para ser tomado como un subsumidor para realizar un anclaje adecuado para que el teorema de Pitágoras sea significativo para ella. Esto corroborando la ruta pitagórica donde se muestra que primero se han de tener unos conceptos básicos con una estructura significativa, los cuales nos pueden acercar al teorema sin necesidad de los triángulos.

Caso 2:

En el marco teórico desde el Aprendizaje Significativo se expone la actitud del estudiante como un eje principal para que exista el proceso de anclaje entre los subsumidores y el nuevo conocimiento y (EAPV) muestra una actitud positiva para la adquisición del conocimiento, se diría que tiene una actitud de aprendizaje significativa, puesto que siempre hace referencia a los conocimientos que ya posee y además muestra interés por la actividad a realizar. Tiene desde la teoría del Aprendizaje Significativo una adquisición de conocimiento o aprendizaje, puesto que muestra una identificación clara de todo tipo de triángulo y de sus partes, también relaciona algunos elementos del triángulo rectángulo con el Teorema de Pitágoras.

En la ruta pitagórica se observó que el triángulo era uno de los últimos subsumidores, puesto que primero se han de dar unos procesos con las operaciones básicas y otras. En el caso de (EAPV) se mostró un reconocimiento e identificación del concepto triángulo, lo cual nos da partida para afirmar que podría ser un subsumidor para que el aprendizaje del concepto del Teorema de Pitágoras sea significativo.

En el caso de (EAPV) identifica las particularidades de los triángulos, pero no reconoce el triángulo desde la teoría del Aprendizaje Significativo el aprendizaje representacional, el cual nos dice:" aprendizaje del significado de símbolos específicos o el aprendizaje de lo que representan: incluye el nombramiento de objetos particulares", logra identificar la hipotenusa, los catetos, el cuadrado, pero no identifico el sentido representacional de triángulo y para la inclusión del Teorema de Pitágoras primero se han de tener bien estructurados para ser relacionados con el mismo, por decirlo así Pitágoras ya tenía bien establecido en su estructura educativa las operaciones básicas y otros elementos antes de trabajar con los triángulos y llegar a la demostración que lleva su nombre.

En el caso de (EAPV) el análisis con respecto a la teoría del Aprendizaje Significativo es bastante relevante, ya que la estudiante mostro una actitud de Aprendizaje Significativo, además una adquisición de conceptos y aprendizajes, lo cual nos permite decir que el triángulo seria un subsumidor para la enseñanza del Teorema de Pitágoras, desde la teoría del Aprendizaje Significativo con la actitud de la estudiante y con los conocimientos previos bien establecidos se realizara el “anclaje” de manera adecuada para que el Teorema de Pitágoras sea significativo para el caso de la estudiante (EAPV).

Caso 3:

En el caso de (LVMM) tiene actitud de Aprendizaje Significativo, puesto que hace intentos de relacionar sus conocimientos adquiridos con la actividad que se realizaba, además por la actitud de cuestionamiento sobre las actividades que se realizaban en la prueba inicial y en la encuesta sobre la misma. Desde el Aprendizaje Significativo se diría que aunque tiene la actitud de Aprendizaje Significativo para la adquisición de conocimientos no tendría la adquisición de conceptos o aprendizaje, puesto que este dice: “aprendizaje del significado de un concepto, es decir, aprendizaje del significado de sus atributos criterio”. Y correspondiente al triángulo en especifico los tenía en su mayoria claros, pero con referente al triángulo rectángulo no tenía la suficiente claridad o significatividad grupo relativo del significado asociado con un símbolo o grupo de símbolos dados en oposición a su contenido cognoscitivo sustancial, como una medición del grado de familiaridad, frecuencia del encuentro contextual o el grado de sustancialidad lexicografía (por ejemplo, un nombre o verbo en contraste con una preposición) de éste.

En el caso de (LVMM) identifica las particularidades de los triángulos, pero no reconoce el triángulo desde la teoría del Aprendizaje Significativo el aprendizaje representacional, el cual nos dice:” aprendizaje del significado de símbolos específicos o el aprendizaje de lo que representan: incluye el nombramiento de objetos particulares”, no identifico la hipotenusa, los catetos, el cuadrado, y mucho menos identifico el sentido representacional de triángulo y para la inclusión del Teorema de Pitágoras primero se han de tener bien estructurados para ser relacionados con el mismo, por decirlo así Pitágoras ya tenía bien establecido en su estructura educativa las operaciones básicas y otros elementos antes de trabajar con los triángulos y llegar a la demostración que lleva su nombre.

En el caso de (LVMM), desde la ruta pitagórica en la cual se considera que se encontraron los subsumidores que el propio Pitágoras tuvo antes de hacer la demostración del teorema que lleva su nombre, se dice que las operaciones básicas fueron los primeros subsumidores de éste y consideramos que en este caso se ha de seguir en esa ruta donde primero que todo los conocimientos básicos del caso de (LVMM) han de convertirse en los suficientemente significativos para que puedan ser utilizados como subsumidores para la adquisición del nuevo conocimiento, en este caso el Teorema de Pitágoras y así sea significativo para ella, ya que por las dificultades encontradas con la manipulación del concepto de triángulo, éste no es lo bastante significativo para la estudiante, para considerarlo como un subsumidor que nos permita realizar el “anclaje” adecuado para que el Teorema de Pitágoras sea asimilado de una manera significativa.

8. CONCLUSIONES.

- En la educación actual se observa que el triángulo rectángulo es eje central de la enseñanza-aprendizaje del Teorema de Pitágoras. Mientras desde la ruta Pitagórica se ve sólo como un elemento más hacia la demostración de dicho teorema.

- Otra conclusión seria el hecho de un orden de conceptos que se deben ir aprendiendo significativamente antes de aprender el Teorema de Pitágoras y aunque no es el papel de este trabajo mostrar cómo se deben enseñar si cabe dejar en alto que se debe dar una mirada a la forma como los mostramos en la Ruta Pitagórica, pues muchos de estos conceptos salen por sí solos con tan sólo dar una mirada analítica a la proposición del teorema, pero esto no quiere decir que actualmente se les esté enseñando a los estudiantes de la mejor manera dichos conceptos. Estos son: suma (se vio que los egipcios pasaban gran tiempo contando), multiplicación (también esta merece gran atención en el conteo y se debe ver como una extensión de la suma), cuadrados (como lo dijimos es mas desde lo espacial y el área pues la potencia dos se elaboraba mas como una multiplicación, y en cuanto a lo aritmético los cuadrados juegan para los pitagóricos un gran papel), ecuaciones (más como una relación), relaciones entre números (acá nos referimos más a relaciones con sentido como son las ternas Pitagóricas) y por último, y no menos importante, el triángulo (igual que como el cuadrado toma en sus inicios una forma más espacial que abstracta, además de que tiene para el Teorema de Pitágoras un fin más de tripletas de números).

- Otra conclusión es algo en lo que hemos sido muy reiterativos a lo largo de este trabajo y es el hecho de dejar el concepto de triángulo para el último momento y además de darle a la enseñanza de este un fin más práctico y menos abstracto.
- En la enseñanza actual del Teorema de Pitágoras en la Institución Educativa Fe y Alegría Nueva Generación, tanto textos como profesores dan a conocer la historia del teorema, mas no vinculan está con la enseñanza-aprendizaje del Teorema de Pitágoras.

RECOMENDACIONES.

- Para la enseñanza del teorema de Pitágoras se recomienda llevar la siguiente secuencia de subsumidores como parte del proceso enseñanza-aprendizaje del teorema:

- ***Las proposiciones.(*** los griegos eran ya bien diestros en el campo de la literatura, como ideas proposicionales, como grandes lectores y escritores, aunque en este aspecto la tradición era más oral, y es obvio que Pitágoras en sus años de aprendizaje en la escuela griega desarrollo esta habilidad, proposicional, lo cual nos hace pensar que el primer conocimiento subsumidor que tendrá Pitágoras es el proposicional y que como ya se vio en el marco teórico es uno de los pilares del aprendizaje significativo (APRENDIZAJE DE PROPOSICIONES)).

- ***Las operaciones básicas. (***para los egipcios era indispensable las cuatro operaciones básicas, por lo tanto es de esperar que Pitágoras también se hiciera lo bastante diestro en estas operaciones, y con el tiempo se hará notar como estas operaciones son de total manejo de Pitágoras, convirtiéndose estas en los siguientes subsumidores y aunque los egipcios utilizaban un aprendizaje mecánico o memorístico, por el uso de tablas, la construcción de estas por parte de los sacerdotes egipcios era de una forma práctica pues casi siempre estaba asociado, el conocimiento, a aspectos prácticos como el comercio o la arquitectura. Incluso a su regreso a Grecia enseñara la aritmética y la geometría de una forma práctica (GORMAN, 1988: 93) y es así como Pitágoras concibe la suma como un APRENDIZAJE POR DESCUBRIMIENTO pues siempre es desde la práctica desde donde se llevan a cabo las adiciones y los cálculos, aún más, las operaciones básicas son desarrolladas por reiteraciones más no con un algoritmo especifico como el que se usa actualmente.)

- ***La potenciación como sumas reiterativas****. (*se sabe de potenciación esta era hecha por medio de sumas reiterativas, por ejemplo para calcular doce por doce se hacia una asociación de 1 a 12 luego el doble de uno con el doble de doce y luego se cogían dos números que dieran doce y por el otro lado daría el resultado esperado (KLINE, 2002: 38)

- ***La ecuación vista como igualdad.*** *(*En esta cultura Pitágoras se relaciona con la concepción de ecuación, más vista como una relación de igualdad y equivalencia, se encuentra con un trabajo raíces evidenciado en el análisis de las tablas de cálculo.)

- ***El cuadrado y El triángulo****.(*en lo concerniente a la geometría egipcia, que Pitágoras se familiarizo principalmente con triángulos y cuadrados más como relaciones de áreas que como figuras abstractas, puesto que en los papiros de esta cultura se muestra una practicidad del trabajo de áreas y más aun "cuando la línea forma un plano, como el triángulo, el tres entra en acción […] el triángulo era asociado al alma, también fue el fundamento de los átomos cósmicos del fuego, el aire y el agua, también es el símbolo de la triada por la característica de tres lados, incluso Pitágoras lo relaciono con el trípode de Apolo. Los Pitagóricos con frecuencia utilizaban las propiedades del tres en conjuros y formulas mágicas, también la consideraban la primera figura plana y (algo que es muy importante) los Pitagóricos relacionaron el tres con el plano (GORMAN, 1988:156) […] El cuatro o tetraktys (es importante señalar que dentro de la escuela Pitagórica el cuatro tenia múltiples definiciones) simboliza los cuerpos sólidos de los compuestos por planos." (GORMAN, 1988:149), el cuadrado se convirtió en un símbolo de justicia, más adelante (1988:152)

Gorman nos dice: Del Uno procede todo lo que es bueno en el universo, puesto que es el origen de los números impares. Dichos números se denominan buenos porque en el sistema de la aritmética Pitagórica los lados que rodean los números o gnomon siempre forman cuadrados alrededor de los números impares. El cuadrado es símbolo de igualdad y regularidad. En esto, el cuadrado se parece al Uno, mientras que la díada, o dos, es el origen de la desigualdad e irregularidad en el cosmos; por lo tanto, la díada es el principio del mal.)

- Buscar en la obra de otros autores que hayan demostrado el teorema, los posibles subsumidores que lo llevaron a la demostración del Teorema de Pitágoras y hacer la relación con la ruta Pitagórica para ahondar más en el tema.

10. BIBLIOGRAFÍA.

- AUSUBEL, D. (1980). *Psicología educativa*. México, Trillas.

- ANDUCKIA, J. Y otros. (2009). La investigación aproximaciones a la construcción del conocimiento científico. Colombia, Alfaomega.

- BOYER, C. B. (2003). Historia de la Matemática. Madrid: Alianza Editorial.

- DUNHAM, W. (1993). *Viaje a través de los genios: biografías y teoremas de los grandes matemáticos.* España, Ediciones Pirámide.

- GILLINGS, R. (1972) Mathematics in the time of the pharaohs. Estados Unidos: Dover Publications.

- GORMAN, P. (1988). Pitágoras. Barcelona: Critica.

- HOFMANN, J. E. (2003). Historia de la Matemática. Mexico D.F: Limusa S.A.

- LOPEZ, A. JARAMILLO, C. (2008). Las fases del modelo educativo de Van Hiele para el teorema de Pitágoras. Medellín. Tesis (Magister en Educación) sin editar, Universidad de Antioquia

- KLINE, M. (2002). El Pensamiento Matemático desde la antigüedad a nuestros días 1. Madrid: Alianza Editorial.

- MANKIEWICZ, R. (2000). Historia de las Matemáticas: del cálculo al caos. Barcelona: Paidós.
- M.E.N. (1998). *Matemáticas: lineamientos curriculares. Áreas obligatorias y fundamentales.* Bogotá, Cooperativa Editorial Magisterio.
- M.E.N. (2007). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Bogotá, Cooperativa Editorial Magisterio.
- MOREIRA, M. (2000). *Aprendizaje Significativo "teoría y práctica"*. España, Visor.
- SALKIND, N. (1999). *Métodos de investigación.* México, Prentice Hall.
- STAKE, R. (1998). *Investigación con estudio de casos.* Madrid, ediciones Morata.
- STRATHERN, P. (1999). Pitágoras y su teorema. Madrid: Siglo XXI de España Editores, S.A.
- VALENCIA, M. y BASTIDAS, M. (1998) *Propuesta de Intervención Pedagógica para la Enseñanza de las Ternas Pitagóricas.* Medellín, Tesis (Especialista en Enseñanza de las Matemáticas) sin editar, Universidad de Antioquia.
- WASSERMANN, S. (1994). *"El estudio de casos como método de enseñanza"*, Argentina, Amorrortu editores.