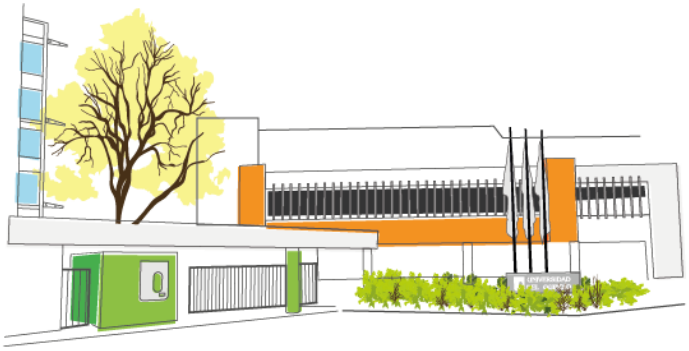
# La comprensión del concepto de función cuadrática a través de la teoría de situaciones Didácticas



Yenny Carolina Ramírez Pardo

Universidad del Quindío
Facultad de Educación, Programa de Licenciatura en Matemáticas
Armenia, Colombia
2022

PERTINENTE CREATIVA INTEGRADORA
@uniquindio uniquindioconectada uniquindioconectada

# La comprensión del concepto de función cuadrática a través de la teoría de situaciones Didácticas.

Yenny Carolina Ramírez Pardo

Trabajo de Grado presentado como requisito para optar al título de:

**Licenciado en Matemáticas**

Director(a):

**Lic. Diana Julie Hincapié Guerrero**

Área de Profundización: Educación matemática
Trabajo de grado bajo la modalidad de: Trabajo de investigación

Universidad del Quindío
Facultad de Educación, Programa de Licenciatura en Matemáticas
Armenia, Colombia
Año 2022

**Agradecimientos**

Gracias a Dios por guiarme en este camino de la docencia que me ha permitido crecer como persona y comprender la importancia de esta gran labor, de difundir el conocimiento y ser una luz para el aprendizaje de nuestros jóvenes.

A mi padre Luis Arturo Ramírez que está en los cielos y quien fue mi primer maestro en la vida, a mi madre Adriana Pardo por su paciencia, amor y perseverancia para ayudarme alcanzar cada una de mis metas, a mis hermanos luz Adriana, Luisa Fernanda y Luis Arturo por siempre estar a mi lado y apoyarme, a mis hijas Isabela y Luisa Fernanda por ser el motor de mi vida y el impulso que me hace ser mejor cada día.

A los docentes que me formaron durante mi carrera profesional, especialmente a Carlos Alberto Abello que plasmo en mí el amor por la Matemática, a Liliana Ospina que me instruyó como pedagoga y admiro por su profesionalismo, Edgar Javier Carmona por su acompañamiento y Diana Yulie Hincapié por sus aportes y conocimientos para que este proyecto fuera realizado.

Gracias al señor rector Jorge Adrián Osorio Acevedo, al coordinador académico Juan Carlos Martínez Guependo, al docente del área de matemáticas Andrey Mauricio Montoya y los estudiantes de la institución educativa Ciudadela El Sur, por brindarme su apoyo para llevar a cabo este proyecto.

TABLA DE CONTENIDO


1. INTRODUCCIÓN ..... 9

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA ..... 10

2.1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA ..... 14

**2.2. PREGUNTA PROBLEMA** ..... 14

**2.3. OBJETIVOS** ..... 15

**2.4. JUSTIFICACIÓN** ..... 15

**3. ESTADO DEL ARTE** ..... 17

**3.1. Aprendizaje de la función cuadrática (objeto matemático):** ..... 17

**3.2. Básica secundaria (población):** ..... 18

**3.3. Teoría de las situaciones didácticas de Brousseau:** ..... 19

**4. MARCO TEÓRICO** ..... 20

**4.1. Aprendizaje** ..... 20

**4.2. Función cuadrática** ..... 21

- ✓ **Función Matemática** ..... 21
- ✓ **Función Cuadrática** ..... 22
- ✓ **Gráfica de la Función Cuadrática (Parábola)** ..... 22
- ✓ **Componentes de la Parábola** ..... 23

**4.3. Situaciones Didácticas de Brousseau** ..... 25

**4.4. Pensamiento lógico matemático** ..... 28

**5. Metodología** ..... 29

**6. Población y muestra** ..... 30

**7. Fases de la investigación** ..... 30

**8. Enfoque histórico Hermenéutico** ..... 33

**9. Diseño de investigación:** ..... 33

**10. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN.** ..... 35

11. CONSIDERACIONES ÉTICAS Y BIOÉTICAS ..... 35

**12. DESCRIPCIÓN DE LAS TAREAS.** ..... 36

**12.1. Concepción y Análisis a priori:** ..... 49
**12.2. Experimentación**: ..... 55
**12.2.1. Secuencia Didáctica Número 1: "la representación de la función cuadrática en el baloncesto"** ..... 56
**12.2.2. Secuencia didáctica número 2: "Encuentra la ecuación, tabula y gráfica"** ..... 61
Guía entregada a los estudiantes: ..... 61
**12.2.4. Secuencia didáctica número 4: "qué es y donde se ubica":** ..... 72
**12.2.5. Secuencia didáctica número 5: "práctica"** ..... 76
**12.2.6. Análisis a Posteriori y Evaluación.** ..... 80
13. CONFRONTACIÓN DE ANÁLISIS A PRIORI CON ANÁLISIS A POSTERIORI ..... 86
14. CONCLUSIONES ..... 89
15. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS ..... 91

## LISTAS DE TABLAS

*Tabla 1* *Aprendizaje de la función cuadrática*……...17
*Tabla 2* *Básica secundaria (población)*……...…18
*Tabla 3* Teoría de las situaciones didácticas de Brousseau……19
*Tabla 4* *Ecuaciones canónicas de la parábola*……..…..24
*Tabla 5* Encueta Universidad del Quindio…….....……...45
*Tabla 6* Notas Analisis A Priori……..……..…51
*Tabla 7* Resumen de situaciones didácticas…….….54
*Tabla 8* Notas Analisis A Posteriori…….81
*Tabla 9* Esquema estadístico de habilidades desarrolladas por los estudiantes……..82

## LISTAS FIGURAS

*Figura 1* Resultados de saber pro de la Institución Educativa Ciudadela del Sur en el área de matemáticas. ……....……..12
*Figura 2* Teoría situaciones didácticas...……27

*Figura 3* Fases de la ingeniería didáctica……...29
*Figura 4* Función Cuadrática a  través de la historia…….……....39
*Figura 5* Libro Santillana ……...44
*Figura 6* Libro SM……..……45
*Figura 7* Encuesta realizada a los estudiantes de U.Q ……..47
*Figura 8* Análisis Preliminar…….. 48
*Figura 9* Análisis Preliminar desarrollado por el profesor de área……49
*Figura 10* Concepción y ánalisis a priori realizada por los estudiantes 23 y 14 ……...53
*Figura 11* Concepción y ánalisis a priori realizada por los estudiantes 2, 20, 12 y 24…….54
*Figura 12* Secuencia Didáctica 1…….....55
*Figura 13* Situación Acción Secuencia Didáctica # 1……..56
*Figura 14* Situación Acción Secuencia Didáctica # 1, segunda parte…….....56
*Figura 15* Experimentación SD1 ..……...58
*Figura 16* Secuencia didáctica 2……..59
*Figura 17* Situación Acción Secuencia Didáctica # 2……60
*Figura 18* Experimentación SD2 ……...62
*Figura 19* Experimentación SD2 ……...…….....63
*Figura 20* Secuencia Didáctica 3……..……..65
*Figura 21* Situación Acción Secuencia Didáctica # 3……66
*Figura 22* Experimentación SD3……..……..67
*Figura 23* Experimentación SD3 …….….……68
*Figura 24* Situación de Validación Secuencia Didáctica # 3…….....69
*Figura 25* Secuencia Didáctica 4……...70
*Figura 26* Situación Acción Secuencia Didáctica # 4……71
*Figura 27* Experimentación SD4 …… 72
*Figura 28* Secuencia Didáctica 5……..74
*Figura 29* Situación Acción Secuencia Didáctica # 5……..75
*Figura 30* Experimentación SD5 ……..……..76
*Figura 31* Situación de Institucionalización  Secuencia Didáctica # 5……77
*Figura 32* Análisis A Posteriori, taller evaluativo……78
*Figura 33* Análisis A Posteriori, taller evaluativo SD6……79

*Figura 34* Análisis A Posteriori, taller evaluativo SD6, parte 2……..8012

## LISTAS DE GRÁFICAS

**Gráfica 1** La función cuadrática básica……...……22
**Gráfica 2** La función cuadrática en diferentes ángulos……...……...22
**Gráfica 3** Componentes De La gráfica de la función cuadrática …...……23

## RESUMEN

La presente investigación promueve el aprendizaje del concepto de función cuadrática y plantea propuestas que permitieran mejorar la comprensión de dicha noción.

El trabajo se realizó en la Institución Educativa Ciudadela del Sur de la ciudad de Armenia, tomando como objeto de estudio un grupo de estudiantes de grado once, a partir de las dificultades que presentaban los estudiantes en años anteriores en el desempeño de las pruebas saber once y en un diagnóstico previo acerca de la función cuadrática, su gráfica, vértice, lado recto, foco y directriz.

Se usó una estrategia para el aprendizaje de la función cuadrática teniendo en cuenta la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau que se llevó a la práctica en el marco de la metodología de la ingeniería didáctica de Artigue, la cual pretende validar la propuesta.

En el desarrollo de la investigación se analizó el proceso de la aplicación y comprensión de la función cuadrática, permitiendo obtener resultados altamente considerables de apropiación

de dicho concepto como resultado de la construcción colectiva de los estudiantes a partir de las estrategias didácticas esbozadas en las secuencias diseñadas para tal fin.

**Palabras Clave:**

Comprensión, Función Cuadrática, Teoría de las Situaciones Didácticas, ingeniería didáctica.

ABSTRAC

This research promotes the learning of the concept of quadratic function and proposes proposals that would improve the understanding of said notion.

The work was carried out at the Ciudadela del Sur Educational Institution in the city of Armenia, taking as an object of study a group of eleventh grade students, based on the difficulties presented by the students in previous years in the performance of the saber eleven tests. and in a previous diagnosis about the quadratic function, its graph, vertex, straight side, focus and directrix.

A strategy for learning the quadratic function was used, taking into account Brousseau's theory of didactic situations, which was put into practice within the framework of Artigue's didactic engineering methodology, which aims to validate the proposal.

In the development of the investigation the process of the application and understanding of the quadratic function was analyzed, allowing to obtain highly considerable results of appropriation of said concept as a result of the collective construction of the students provoked by the didactic strategies outlined in the sequences designed for such end.

**Keywords:**

Comprehension, Quadratic Function, Theory of Didactic Situations, didactic engineering.

## TITULO DEL PROYECTO

La comprensión del concepto de función cuadrática a través de la teoría de situaciones Didácticas.

## 1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha sido desde tiempo atrás un problema relevante para la sociedad y para la educación. En la búsqueda de una solución a esta problemática se ha invertido, por parte de profesores e investigadores, grandes esfuerzos que han dado como frutos, artículos, documentos, libros y en general teorías y propuestas de carácter pedagógico y didáctico. De igual manera se ha hecho esfuerzos por vincular estas teorías a la enseñanza y aprendizaje de las diferentes disciplinas y en los diferentes niveles.

Por consiguiente, en la presente investigación se pretende promover la comprensión del concepto de función cuadrática en estudiantes de grado once de la Institución Educativa Ciudadela del Sur de Armenia, mediante la implementación de la Teoría de las Situaciones Didácticas, que Según (Brosseau, 2000) debe reconocerse que: "(...) la didáctica no consiste en ofrecer un modelo para la enseñanza sino en producir un campo de cuestiones que permita poner a prueba cualquier situación de enseñanza, y corregir y mejorar las que se han producido, y formular interrogantes sobre lo que sucede", explicándonos con esto que podemos mejorar la

comprensión matemática siguiendo los lineamientos de dicha teoría, enmarcada en la metodología de investigación de la ingeniería didáctica de Artigue, como se menciona en: (De Faria Campos, 2006), aludiendo "Como metodología de investigación, la ingeniería didáctica se caracteriza por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en el aula, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Y por el registro de los estudios de caso y la validación que es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori." ya que esta teoría facilita herramientas con las cuales, por medio del diseño e implementación de situaciones didácticas y a-didácticas se pueda comprender y aplicar con mayor facilidad los conceptos. De igual manera promover de una forma significativa las capacidades matemáticas de los estudiantes de grado once de la Institución Educativa Ciudadela del Sur de Armenia, presentando una estrategia que potencialice la comprensión del concepto de función cuadrática.

Es importante mencionar que como producto se logró analizar el proceso de la aplicación y comprensión de la función cuadrática, a partir de la construcción colectiva de dicha noción por parte de los estudiantes quienes evidencian un aprendizaje del concepto, al ser expuestos a estrategias didácticas diseñadas en secuencias para tal fin.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La enseñanza de las matemáticas, es decir la didáctica de dicha disciplina, es uno de los grandes desafíos que enfrentan los docentes del área, a la vez es una de las asignaturas de mayor dificultad en la comprensión de los estudiantes, evidenciado en los bajos resultados en la evaluación de los estudiantes.

Según la revista semana en su publicación de 14 de marzo de 2016, en respuesta a: ¿Cuáles son las materias que más reprueban los estudiantes? dice: “El promedio de todos los niveles, **matemáticas lidera** la lista, registra un 35% de solicitudes para tomar clases particulares, seguido de inglés con el 30%, química con el 19% y lecto-escritura con 16%.” (Revista Semana, 2016)

La enseñanza de la función cuadrática específicamente tiene una mayor dificultad que la función lineal, ya que el estudiante debe tener conocimientos y dominio básico de la aritmética y álgebra para poder comprender dicha función.

Podemos observar la dificultad que presenta los estudiantes de grado once de la Institución Educativa Ciudadela del Sur de la ciudad de Armenia, En la figura 1, la cual es presentada por los directivos de la institución educativa con base en los reportes del Ministerio de educación y el ICFES, donde se refleja el histórico en matemáticas desde el año 2017 al 2020, teniendo una disminución en el porcentaje del año 2020 en su rendimiento comparándolo con los años anteriores, donde se observa una disminución considerable en el desempeño de los estudiantes de grado once de la Institución Educativa Ciudadela del Sur en el año 2020.

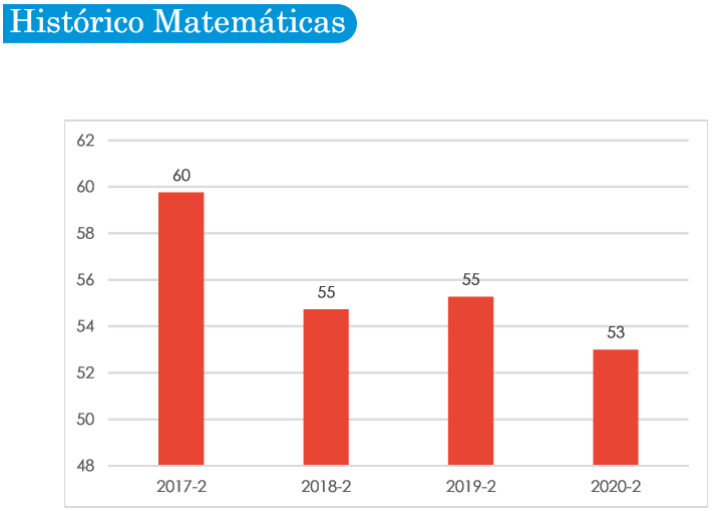



***Figura 1 Resultados de saber pro de la Institución Educativa Ciudadela del Sur en el área de matemáticas***.

En este sentido es preciso presentar estrategias de enseñanza de la función cuadrática pretendiendo que los estudiantes de grado once de la Institución Educativa Ciudadela del Sur de la ciudad de Armenia, adquieran un mayor conocimiento y manejo del concepto de dicha función.

Lo anterior implica que es necesario diseñar un planteamiento metodológico alternativo con el objetivo de mitigar el bajo rendimiento en matemáticas de dichos estudiantes. Es por ello que en esta investigación se hace uso de la indagación de Lázaro Daniel Gutiérrez Banda, (2018) denominado *"Trayectoria hipotética de aprendizaje: La parábola"* en el que señala la necesidad de implementar estrategias de aprendizaje que tengan en cuenta los aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos para mejorar los niveles de desempeño de los estudiantes, en el aprendizaje de la Función Cuadrática.

Por otro lado y con el propósito de generar habilidades, (Amestoy de Sánchez, 2002, pág. 11) Menciona que, "para desarrollar una habilidad de pensamiento se requiere: conocimiento y comprensión de la operación mental que define el proceso, aplicación y transferencia del proceso a variedad de situaciones y contextos, generalización de la aplicación del procedimiento y evaluación y mejora continua del procedimiento". Agrega también la autora, que para lograr la habilidad de pensamiento es necesario que la persona la practique hasta habituarse a usarla de manera espontánea en variedad de situaciones y contextos.

De acuerdo a todo lo anterior, se pueden evidenciar algunas de las dificultades en el aprendizaje de la función cuadrática que son:

- Dificultades previas de los estudiantes en grados anteriores, en especial grado noveno, evidenciando la escasa comprensión del concepto de función y función cuadrática.
- Dificultades en los estudiantes para comprender la estructura de la función cuadrática.
- La metodología de enseñanza de la función cuadrática es poco productiva.
- Falta de herramientas y/o estrategias pedagógicas.
- Dificultad de asimilación por parte de los estudiantes al modelo pedagógico

El Magister Jorge Hernán López en su investigación buscó nuevas metodologías para facilitar el entendimiento de sus estudiantes en el área de matemáticas, así mismo Sahara Doria Rodríguez afirmó que se deberían implementar nuevas formas de enseñanza, cómo la que ella propuso en su

investigación, ya que identificaron dificultades y posibles causas de la falta de comprensión de esta área, a partir de lo cual, se generó la motivación para el desarrollo de este trabajo de investigación, que se fundamenta en promover la comprensión del concepto de función cuadrática en estudiantes, mediante la implementación de situaciones didácticas desde los planteamientos de Brousseau, basada la metodología de la ingeniería didáctica de Artigue.

## 2.1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Según lo expuesto anteriormente, esta investigación buscó el modo de dar respuesta de una manera estructurada y óptima a la siguiente interrogante:

¿Cómo elaborar una estrategia para la comprensión del concepto de función cuadrática en estudiantes de grado once de la Institución Educativa Ciudadela del Sur de Armenia, mediante la implementación de situaciones didácticas desde los planteamientos de Brousseau?

## 2.2. PREGUNTA PROBLEMA

Con base en lo expuesto en el planteamiento del problema y teniendo en cuenta que lo que se quiere es fortalecer la función cuadrática, se planteó la siguiente pregunta de investigación.

¿Cómo elaborar una estrategia para la comprensión del concepto de función cuadrática en estudiantes de grado once mediante la implementación de situaciones didácticas desde los planteamientos Brousseau?

## 2.3. OBJETIVOS

- **Objetivo General**

Elaborar una estrategia para la comprensión del concepto de función cuadrática en estudiantes de grado once de la Institución Educativa Ciudadela del Sur de Armenia, mediante la implementación de situaciones didácticas desde los planteamientos de Brousseau.

- **Objetivos específicos**

✓ Identificar los aspectos histórico-epistemológicos, didácticos y cognitivo del objeto de estudio.

✓ Identificar las falencias o dificultades que tienen los estudiantes de grado once sobre el concepto de función cuadrática.

✓ Implementación de una estrategia didáctica en el marco de la teoría de situaciones de Brousseau para promover la comprensión del concepto de función cuadrática.

✓ Validar a través de la confrontación de los análisis a priori y a posteriori de las situaciones didácticas el nivel de comprensión del concepto de función cuadrática en los estudiantes.

## 2.4. JUSTIFICACIÓN

Las distintas sociedades en el tercer milenio están influenciadas por cambios acelerados en las áreas de la ciencia, la tecnología, la ingeniera y las matemáticas. Las sapiencias, las distintas herramientas y las formas de poder comunicar la matemática, se desarrollan constantemente; por esta razón, la enseñanza de las matemáticas debe estar enfocada a la evolución de las destrezas necesarias para que los estudiantes estén en capacidad de resolver sus problemas cotidianos y a la vez que se fortalezca el pensamiento racional y creativo.

En la actualidad se pretende que los estudiantes reconozcan la función cuadrática respecto de las demás funciones, que puedan resolver problemas de la vida real aplicando con facilidad los conceptos adquiridos, que comprendan la importancia de esta para su crecimiento personal y su inclusión en la sociedad, y que perciban que la matemática forma parte del entorno cotidiano y así poder valorar la importancia de las funciones cuadráticas en situaciones de la vida real.

Por lo anterior se hace necesario que los distintos conceptos matemáticos sean de interés para los estudiantes, haciendo primordial que los profesores de matemáticas propongan estrategias que faciliten este proceso de comprensión matemático, si se tiene en cuenta que en Colombia existe lineamientos y estándares curriculares mínimos exigido por el Ministerio de Educación Nacional y por otra parte las Pruebas Saber y Saber Pro, donde se nota que el bajo rendimiento académico continúa.

La presente propuesta nace de la necesidad de optimizar y promover de una forma significativa las capacidades matemáticas de los estudiantes de grado once de la Institución Educativa Ciudadela del Sur de Armenia, presentando una estrategia que potencialice la comprensión del concepto de función cuadrática.

Esta propuesta, está directamente ligada al aprendizaje e intenta componer una estrategia alterna que permita enriquecer la práctica docente y en los estudiantes potencializar la comprensión del concepto de función cuadrática, desde un conocimiento matemático, pues “la ingeniería didáctica busca crear conocimiento sobre cómo se construye y se comunica el conocimiento matemático. Este conocimiento didáctico se refiere necesariamente a un enfoque teórico, que sirve de base en las distintas fases del proceso metodológico” (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa, & Wilhelmi, 2014, pág. 1).

# 3. ESTADO DEL ARTE

Haciendo una revisión sobre investigaciones realizadas que aporten a las categorías del título de la investigación, empezando con el objeto matemático, seguido de la población y terminando con el marco teórico tenemos las siguientes:

## 3.1.Aprendizaje de la función cuadrática (objeto matemático):

*Tabla 1 Aprendizaje de la función cuadrática*

| TITULO Y AUTORES | OBJETIVO DE LA INVESTIGACION | CONCLUSIONES Y/O RECOMENDACIONES |
|---|---|---|
| Análisis de la compresión del concepto de parábola en estudiantes de ingeniería de sistemas de la universidad del Quindío, utilizando entornos informativos. (López Mesa, 2013)<br>Magister Jorge Hernán López Mesa<br>Universidad del Quindío | Proponer nuevas formas de enseñanza que atraiga la atención y formen seres autónomos, capaces de decidir, personas competentes; para llegar a este logro debe existir una reflexión pedagógica de parte de los docentes para buscar metodologías que respondan a la demanda que exige una sociedad dinámica. | El magister (López Mesa, 2013) invita a buscar nuevas metodologías con las que se pueda enseñar de forma holística. Donde los estudiantes aprenden los conceptos matemáticos, tomándolos como un todo que puede ser mayor a la suma de las partes y facilitar así el entendimiento. |

La investigación del Magister Jorge Hernán López, aporta nuevas metodologías en el proceso de

aprendizaje de la matemática de forma holística, donde se implementan estrategias didácticas para que los estudiantes puedan tener mayor interés en los temas propuestos, teniendo así mayor efectividad en el proceso de enseñanza - aprendizaje.

### 3.2.Básica secundaria (población):

*Tabla 2 Básica secundaria (población)*

| TITULO Y AUTORES | OBJETIVO DE LA INVESTIGACION | CONCLUSIONES Y/O RECOMENDACIONES |
|---|---|---|
| Competencia Matemática Modelizar: un Estudio Exploratorio desde la Función Cuadrática. (Olmos Rojas, Sarmiento Rivera, & Montealegre Quintana, 2006)<br><br>Cesar Olmos Rojas<br><br>Dermin Rogelio Sarmiento R. | Caracterizar la Competencia Matemática Modelizar para el caso de la función cuadrática a partir de su implementación con estudiantes del grado noveno con base en la fundamentación de un modelo teórico funcional cuyos componentes estructurales son las fases del proceso de Modelización, las tareas | (Olmos Rojas, Sarmiento Rivera, & Montealegre Quintana, 2006), destacan las estrategias para Modelizar el estudio de la función cuadrática, proponiendo una estructura del modelo teórico funcional de la competencia matemática que se asume para el desarrollo de esta investigación, a su vez diseña una metodología la cual se consolida en el enfoque |

| | | |
|---|---|---|
| Leonardo Montealegre Q | matemáticas, los niveles de complejidad y los procesos meta cognitivos. | Cualitativo interpretativo, usando el estudio de caso, y teniendo como propósito su caracterización. |

En este artículo, se puede identificar el concepto del enfoque cualitativo - interpretativo, con el propósito de caracterizar la competencia matemática y modelizar la función cuadrática.

### 3.3. Teoría de las situaciones didácticas de Brousseau:

*Tabla 3 Teoría de las situaciones didácticas de Brousseau*

| TITULO Y AUTORES | OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN | CONCLUSIONES Y/O RECOMENDACIONES |
|---|---|---|
| Análisis de una situación didáctica para la enseñanza del valor absoluto en alumnos de educación secundaria (Doria Rodríguez, 2018)<br><br>Sahara Doria Rodríguez.<br><br>Pontificia Universidad | Diseño y análisis de una situación didáctica para la enseñanza del valor absoluto desde el contexto funcional con la teoría de situaciones didácticas y, principios de la ingeniería didáctica, incorporando el análisis cohesivo para el diseño de la | En esta investigación, (Doria Rodríguez, 2018), realiza un estudio del comportamiento de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, tomando como base la teoría de situaciones didácticas, con principios de la ingeniería didáctica en la metodología, y buscando las |

| | | |
|---|---|---|
| Católica del Perú-IREM, Perú | situación didáctica. | diferencias en la estructura de las ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto y cómo llegar al resultado correcto. |

Este artículo, es relevante para este proyecto, ya que describe la implementación de la teoría de situaciones didácticas y principios de la ingeniería didáctica para diferenciar la estructura de las ecuaciones, ofreciendo así, una idea de cómo se puede aplicar en la función cuadrática y de qué manera implementarla en el modelo didáctico, para que los estudiantes puedan comprender y aprender de una forma ágil esta función.

# 4. MARCO TEÓRICO

Para el desarrollo del trabajo de investigación se profundizó en algunas bases teóricas, entre ellas está, el aprendizaje, función cuadrática, la teoría de situaciones didácticas de Brousseau y la Ingeniería Didáctica.

## 4.1.Aprendizaje

Según Juan D. Godino, en su tesis “Perspectiva De La Didáctica De Las Matemáticas Como Disciplina Tecno científica” (Godino J. D., 2010), “Existen teorías generales del aprendizaje y teorías de la enseñanza. Pero, cabe preguntarse ¿aprendizaje de qué?; ¿enseñanza de qué? Los fenómenos del aprendizaje y de la enseñanza se refieren a conocimientos particulares y posiblemente la explicación y predicción de estos fenómenos depende de la especificidad de los conocimientos enseñados, además de factores psicopedagógicos, sociales y

culturales. Esto es, los factores "saber a aprender" y "saber a enseñar" pueden implicar interacciones con los restantes, que obligue a cambiar sustancialmente la explicación de los fenómenos didácticos. La programación de la enseñanza, el desarrollo del currículo, la práctica de la Educación Matemática, precisa tener en cuenta esta especificidad".

Tomando en cuenta el concepto abordado sobre el aprendizaje, lo siguiente a tratar es el concepto de la teoría de la función cuadrática, a partir de lo cual se busca que por medio de la ingenieria didática de Artigue y de las situaciones didacticas de Brosseau, se pueda promover su comprension de una forma mas ágil y entendible.

## 4.2. Función cuadrática

Por lo general, una de las principales dificultades que tienen los estudiantes con la comprensión de las matemáticas es su desconocimiento de cómo son aplicadas en diferentes áreas como la ciencia, los negocios, y la ingeniería. Muchos de los objetos que usamos hoy en día, desde los carros hasta los relojes, no existirían si alguien, en alguna parte, no hubiera aplicado funciones cuadráticas para su diseño. Las funciones cuadráticas se desarrollan a partir del concepto de funcion matemática y se debe conocer su gráfica, componentes de la gráfica y las formas que tiene esta función.

- ✓ **Función Matemática**

"*Una función matemática es una relación que se establece entre dos conjuntos, a través de la cual a cada elemento del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo conjunto o ninguno. Al conjunto inicial o conjunto de partida también se lo llama dominio; al conjunto final o conjunto de llegada, en tanto, se lo puede denominar codominio*." (Pérez Porto & Gardey, 2017)

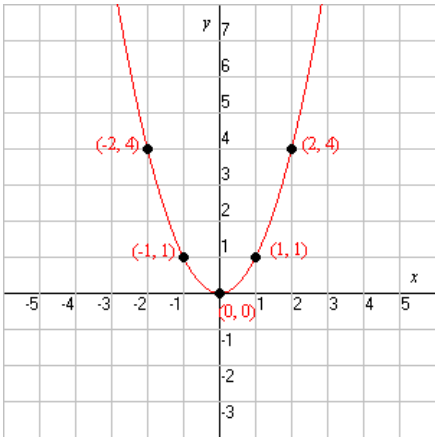
- ✓ **Función Cuadrática**

*"Una funcion cuadratica es una funcion en la que el exponente máximo de las incógnitas es 2. Toda funcion de segundo grado se puede escribir siempre de la forma* $ax^2 + bx + c = 0$*, en donde a es el coeficiente de* $x^2$ *y es distinto de cero, b el coeficiente de x y c el término independiente*. (Zita, 2018)

- ✓ **Gráfica de la Función Cuadrática (Parábola)**

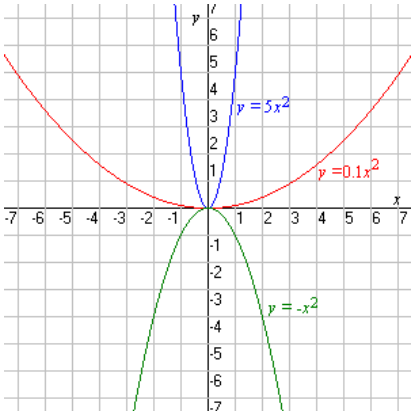
La forma general de una función cuadrática es $f(x) = ax^2 + bx + c$. La gráfica de una función cuadrática es una parábola, un tipo de curva de 2 dimensiones.

La parábola "básica", $y = x^2$, se ve así:




**Gráfica 1** *la función cuadrática básica*

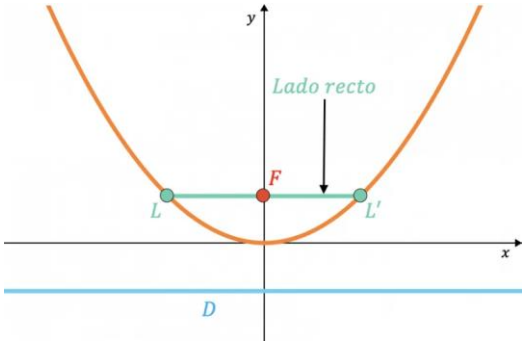
La función del coeficiente ***a*** en la ecuación general es de hacer la parábola "más amplia" o "más delgada", o de darle la vuelta (si es negativa):




**Gráfica 2** *La función cuadrática en diferentes ángulos*

Si el coeficiente de $x^2$ es positivo, la parábola abre hacia arriba; de otra forma abre hacia abajo. (Varsity Tutors, 2007)

- ✓ **Componentes de la Parábola**




**Gráfica 3** ***Componentes De La gráfica de la función cuadrática***

- Foco (F): es un punto fijo del interior de la gráfica de la función cuadrática. La distancia de cualquier punto de la parábola al foco es igual a la distancia de ese mismo punto a la directriz de la parábola.
- Directriz (D): es una recta fija externa a la gráfica de la función cuadrática. Un punto de la parábola tiene la misma distancia a la directriz que al foco de la parábola.
- Vértice (V): es el punto de intersección entre la parábola y su eje.
- El lado recto de la gráfica de la función cuadrática: es la cuerda comprendida dentro de la parábola que pasa por el foco y es paralela a la directriz.

(geometriaanalitica.info)

✓ **Formas de la Parábola o gráfica de la función cuadrática**

- Canónicas

| | |
|---|---|
| $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ | $(x-h)^2 = -4p(y-k)$ |

| | |
|---|---|
| $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ | $(y-k)^2 = -4p(x-h)$ |

*Tabla 4 Ecuaciones canónicas de la parábola*

Lo que diferencia la ecuación reducida o canónica de las otras ecuaciones de la gráfica de la función cuadrática, es que el vértice es el origen de las coordenadas, es decir, el punto (0,0).

La forma de la ecuación reducida de la gráfica de la función cuadrática depende de si esta es horizontal o vertical.

- **Forma General de la Parábola**

*La ecuación general de la parábola es:*

$$A\,x^2 + B\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

*Donde* $A = 0$ *y* $B \neq 0$ *para las parábolas horizontales*

*y* $B = 0$ *con* $A \neq 0$ *para las parábolas verticales.*

(geometriaanalitica.info)

### 4.3. Situaciones Didácticas de Brousseau

Las situaciones didácticas de Brousseau son diseñadas para facilitar el aprendizaje significativo que, según este autor, es el estudio de los procesos de enseñanza entre el estudiante, profesor y concepto matemático (Aprendemos de Todo, 2020). Además de que Brousseau se

refiere a “situación didáctica” como aquella que ha sido construida intencionalmente por el educador, con la finalidad de ayudar a su alumnado a adquirir un conocimiento determinado (Montagud Rubio, sf). A partir de allí Brousseau pretende superar las principales dificultades a las que se enfrenta la didáctica de las matemáticas: El desarrollo cognitivo, el currículo de las matemáticas, los métodos de enseñanza y la complejidad de la disciplina.

Las situaciones didácticas de Brousseau se caracterizan por ser flexibles, estructuradas, significativas, participativas e interactivas. Todo ello permitirá descubrir las intenciones metodológicas, las finalidades didácticas y los saberes a los que se enfrentan los estudiantes en su proceso de enseñanza aprendizaje.

**Fases de las situaciones didácticas de Brousseau:**

**Acción:** “En las situaciones de acción se produce un intercambio de información no verbalizada, representada en forma de acciones y decisiones. El estudiante debe actuar sobre el medio que le ha planteado el profesor, poniendo en práctica los conocimientos implícitos adquiridos en la explicación de la teoría”. (Montagud Rubio, sf). Por consiguiente, el estudiante soluciona un tipo de situación problemática donde el profesor establece o limita las acciones mediante normas o consignas, buscando estrategias para dar solución del problema propuesto. Necesitando una retroalimentación constante de dicha situación.

**Formulación**: “En esta parte de la situación didáctica se formula la información de forma verbal, es decir, se habla sobre cómo se podría solucionar el problema. En las situaciones de formulación se pone en práctica la capacidad del estudiante de reconocer, descomponer y reconstruir la actividad problematizada, tratando de hacer ver a los demás mediante el lenguaje visual, oral y escrito de cómo se puede solucionar el problema”. (Montagud Rubio, sf).

**Validación:** “En las situaciones de validación, como su propio nombre indica, se valida los “caminos” que se han planteado para llegar a la solución del problema. Los miembros del grupo de la actividad discuten sobre cómo se podría resolver el problema propuesto por el profesor, poniendo a prueba las diferentes vías experimentales planteadas por los estudiantes. Se trata de averiguar si estas alternativas dan un único resultado, varios, ninguno y cómo de probable es que estén en lo cierto o en el error”. (Montagud Rubio, sf).

**Institucionalización:** La situación de institucionalización sería la consideración “oficial” de que el objeto de enseñanza ha sido adquirido por el estudiante a partir de diversos criterios de evaluación establecidos por el profesor que le permitan una toma de decisiones frente a dichos resultados. Es un fenómeno social muy importante y una fase esencial durante el proceso didáctico. El profesor relaciona los conocimientos construidos libremente por el estudiante en la fase a-didáctica con el saber cultural o científico. (Montagud Rubio, sf). Según Brousseau desde 1986 reconoce en estos procesos los roles principales del profesor afirmando: “*En la institucionalización, se define las relaciones que puede tener los comportamientos o las producciones libres del alumno con el saber cultural o científico con el proyecto didáctico”*, asimismo, explica que: *la función de la institucionalización es la de establecer y dar un estatus*

*oficial al conocimiento referido en una actividad didáctica; particularmente "...define las relaciones que pueden tener los comportamientos o las producciones 'libres' del alumno con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico: da una lectura de esas actividades y les da un estatuto" (Brousseau, 1986: 64*) (Brousseau, 1986).

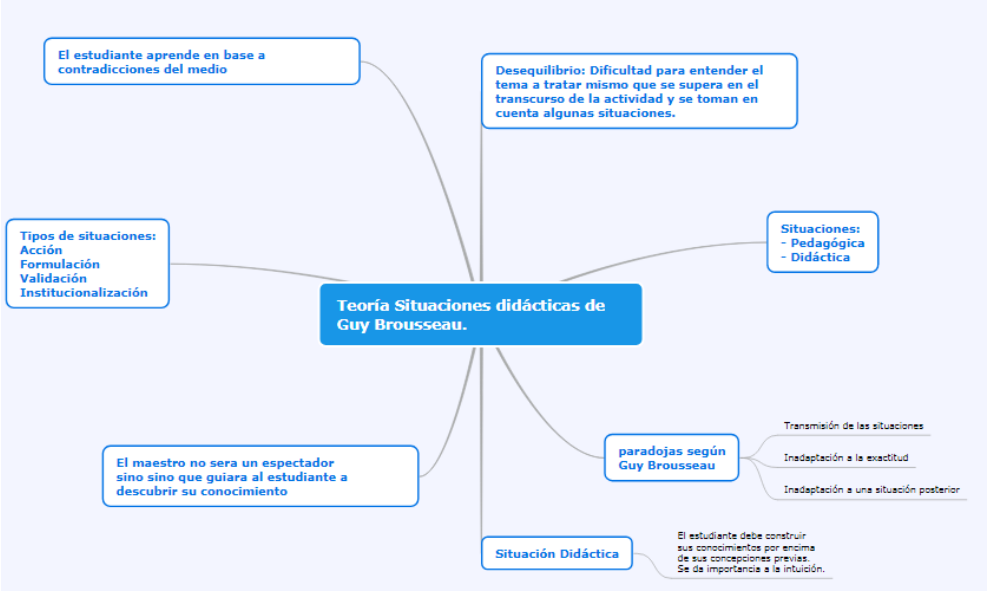



***Figura 2*** ***Teoría situaciones didácticas. Fuente:*** (Ramón, 2019)

## 4.4.Pensamiento lógico matemático

Según el artículo Estudio del razonamiento lógico-matemático desde el modelo de las inteligencias múltiples tomando desde la propuesta de las IM

Se define el pensamiento lógico-matemática como la capacidad para construir soluciones y resolver problemas, estructurar elementos para realizar deducciones y fundamentarlas con argumentos sólidos. Los estudiantes que manifiestan un buen razonamiento matemático disfrutan especialmente con la magia de los números y sus combinaciones, les fascina emplear fórmulas aún fuera del laboratorio; les encanta experimentar, preguntar y resolver problemas lógicos; necesitan explorar y pensar; así como

materiales y objetos de ciencias para manipular. Son estudiantes capaces de encontrar y establecer relaciones entre objetos que otros frecuentemente no ven. Les gusta trabajar con problemas cuya solución exige el uso del pensamiento crítico y divergente, manifiestan unas excelentes habilidades de razonamiento inductivo y deductivo e incluso les gusta proporcionar soluciones y superar desafíos lógico-matemáticos complejos. (Ferrándiz, Bermejo, Sainz, Ferrando, & Prieto, 208)

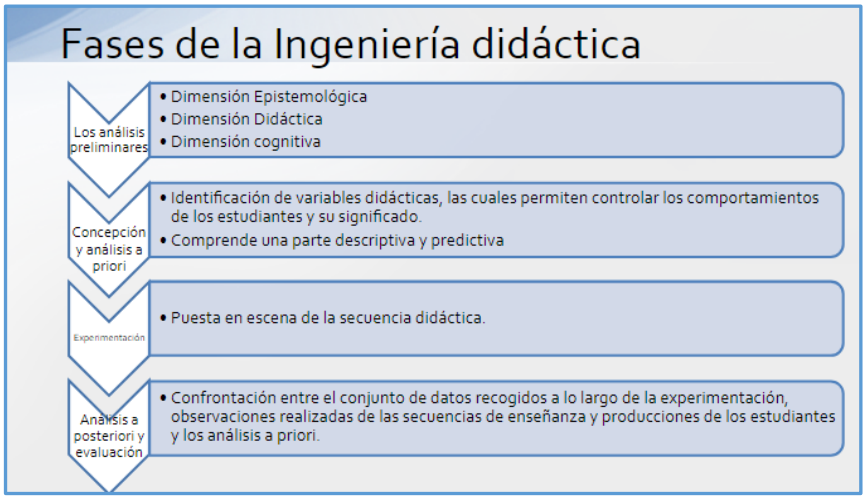
Según Piaget citado en (Andonegui, 2004), el conocimiento lógico-matemático es el que construye el niño al relacionar las experiencias obtenidas en la manipulación de los objetos. Por ejemplo, el niño diferencia entre un objeto de textura áspera con uno de textura lisa y establece que son diferentes. Asimismo, (Piaget, 1984), indica que el desarrollo cognoscitivo comienza cuando el niño o niña, asimila aquellas cosas del medio que les rodea con la realidad a sus estructuras, de manera que antes de empezar la escolarización formal, la mayoría de los niños adquiere unos conocimientos considerables sobre contar, el número y la aritmética. Este desarrollo va siguiendo un orden determinado, que incluye cuatro periodos o estadios, cada uno de los cuales está constituido por estructuras originales, las que se irán construyendo a partir del paso de un estado a otro.

## 5. Metodología

El presente proyecto se realizó con una metodología cualitativa dentro del marco metodológico de la ingeniería didáctica de Artigue, ya que el objeto matemático estudiado y La Teoría de Las situaciones didácticas de Brousseau están inmersos en esta metodología.

Los autores (Blasco Mira & Pérez Turpín, 2007), señalan que la investigación cualitativa estudia la realidad en su contexto natural y cómo sucede, sacando e interpretando fenómenos de acuerdo con las personas implicadas. Se estudia a las personas en el contexto de su pasado y las situaciones actuales en que se encuentran. Por tal motivo, analizamos el desarrollo de los estudiantes en las diferentes situaciones didácticas que utilizamos.

Y se desarrolla según las siguientes fases:




***fases de la ingeniería didáctica***

***Fuente:*** (Pedreros Puente, 2017)

## 6. Población y muestra

Esta investigación se desarrolló con estudiantes de grado once de la Institución Educativa Ciudadela del Sur, ubicada en la ciudad de Armenia Quindío, perteneciente al estrato socioeconómico 1 y 2, los cuales tienen una edad promedio de 15 a 18 años.

## 7. Fases de la investigación

La metodología que se utilizó en esta investigación fue la ingeniería didáctica de Artigue, mediante las siguientes fases:

**Fase 1.** (Análisis preliminar). Según Artigue (1988, p. 288) refiere que en la fase de los análisis preliminares se debe indagar acerca de: «el análisis de la enseñanza usual y sus efectos; el análisis de las concepciones de los alumnos, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución; el análisis del campo de restricciones en que se va a situar la realización didáctica efectiva»

Además, Artigue (1988, p. 289) indica que el análisis de las restricciones se efectúa distinguiendo tres dimensiones: «la dimensión epistemológica asociada a las características del saber en juego; la dimensión cognitiva asociada a las características cognitivas del público al que se dirige la enseñanza; la dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza». Por lo cual se indagó sobre estas 3 dimensiones frente al objeto de estudio en toda la dinámica del proyecto de investigación.

**Fase 2.** (Análisis a priori). Según Michelle Artigue en su libro sobre la ingeniería didáctica esta fase se concibe como: "un análisis de control de sentido: más esquemáticamente, si la teoría constructivista plantea el principio del compromiso del estudiante en la construcción de sus conocimientos por la intermediación de la interacción con un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas, que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería, ha pretendido, desde su origen, la ambición de constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el sentido y las situaciones" (p. 293), además, explica que el objetivo del análisis a priori es "determinar en qué las selecciones efectuadas permiten controlar los comportamientos de los alumnos y sus sentidos. Por eso, este análisis va a ser fundamentado en las hipótesis donde la validación de éstas estará, en principio, indirectamente en juego, en la confrontación que se llevará a cabo en la cuarta fase entre análisis a priori y análisis a posteriori." (p. 294).

En esta fase se realizó una secuencia didáctica en el grupo de estudio, dentro de las situaciones de aula, trabajando el modelo teórico de las situaciones didácticas de Brousseau que concibe un enfoque sistémico, que facilita comprender y realizar procesos de enseñanza-aprendizaje relacionando: al profesor, los estudiantes, el conocimiento matemático y el espacio pedagógico, buscando identificar los conceptos preconcebidos por los estudiantes sobre la definición de función y función cuadrática. Para lograr lo anterior las secuencias diseñadas incluyeron diversas actividades promoviendo un aprendizaje activo.

**Fase 3.** (Experimentación) Esta fase como su nombre lo indica es la experimentación o puesta en escena de la teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau, por lo tanto, se construyeron instrumentos de indagación como son los juegos, talleres, test, evaluaciones y actividades de discusión y análisis en grupo dentro de una serie de 5 secuencias didácticas y a-didácticas que permitieran desarrollar esta teoría, donde el profesor tuvo una participación importante como motivador y orientador para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje estableciendo la anticipación de los errores y el enfrentamiento a diversas variables presentadas en los ejercicios propuestos en la investigación.

**Fase 4.** (Análisis a posteriori). Según lo que refiere Artigue el análisis a posteriori se apoya: "sobre el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación: observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza pero también producciones de los alumnos en clase u horas de clase. Esto datos son en general completados por los datos obtenidos por la utilización de los métodos externos: cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, realizadas en diversos momentos de la enseñanza o a su finalización. Y, como hemos ya indicado, es sobre la confrontación de los dos análisis: análisis a priori y análisis a posteriori que se fundamenta esencialmente la validación de las hipótesis comprometidas en la investigación" (p. 297).

Es decir, que para el análisis se deben tener en cuenta los datos recogidos de la experimentación de todas las secuencias didácticas. Comparando los resultados del análisis a priori y a posteriori (Validación de la ingeniería), mediante la aplicación de la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau.

## 8. Enfoque histórico Hermenéutico

En este enfoque Heidegger indica que: "*la comprensión humana se guía por una comprensión previa surgida de la situación existencial en cada caso, la cual define a su vez el marco temático y la amplitud de validez de cualquier tentativa de interpretación*" (MORÁN ROA, 2018). A partir de este concepto, podemos dar pie a las ideas propuestas por Artigue en la ingeniería didáctica, en la cual se propone que el aprendizaje se basa inicialmente en una investigación basada en intervenciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

Es importante tener en cuenta que la presente investigación se realizó en la institución educativa I.E Ciudadela del Sur en grado Once, el cual cuenta con alrededor de 24 estudiantes y que dada las características y el tipo de investigación será un estudio de caso, sin embargo, de alguna manera el proyecto podrá servir de base para emplear o modificar las situaciones para que puedan ejecutar en otros contextos.

## 9. Diseño de investigación:

La presente investigación se desarrolla a partir del modelo de investigación cualitativa, ya que la información surge de las experiencias de los estudiantes por medio de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau y la metodología de la ingeniería didáctica de Artigue, en la cual se implementó un diagnóstico inicial que incluyera un análisis epistemológico, de contenido, y de las diversas características del grupo focalizado, se hizo un análisis preliminar con los profesores del área con el fin de conocer que herramientas han aplicado para el proceso de enseñanza, caracterizado por una revisión epistemológica, cognitiva y didáctica de la función cuadrática, luego se realizó una encuesta a varios estudiantes de matemáticas de primer semestre de la universidad del Quindío, con el fin de conocer cómo fue la enseñanza de la función cuadrática en grado 11, en sus respectivas instituciones educativas públicas del Quindío, además, se llevó a cabo un análisis a priori ejecutando una prueba diagnóstica a los estudiantes de grado 11 de la Institución Educativa Ciudadela del Sur para evidenciar su nivel de conocimiento sobre el concepto de la función cuadrática. Y la manera como aprenden este tipo de nociones. A partir de este diagnóstico inicial se diseñó la secuencia didáctica con diversas tareas, actividades, y criterios que permitieran anticipar posibles variables, se continuó con la fase de experimentación donde se implementó la teoría de situaciones de Brousseau en varias secuencias didácticas, y por último se llegó a la fase de análisis a posteriori donde Artigue refiere: “sobre el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación: observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza pero también producciones de los alumnos en clase u horas de clase. Esto datos son en general completados por los datos obtenidos por la utilización de los métodos externos: cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, realizadas en diversos momentos de la enseñanza o a su finalización. Y, como hemos ya indicado, es sobre la confrontación de los dos análisis: análisis a priori y análisis a posteriori que se fundamenta esencialmente la

validación de las hipótesis comprometidas en la investigación" (p. 297). Por consiguiente se desarrolló dicha confrontación, para dar paso a las conclusiones de esta investigación.

Esta metodología es abordada por Rafael Bisquerra Alzina, su artículo "Metodología de la Investigación Educativa" (Alzina Bisquerra, 2009), quien a partir de la propuesta de (Sandin, 2003), afirma: "la investigación cualitativa es una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimiento." A partir de los aportes de varios expertos en este ámbito se deduce que la diversidad metodológica de la investigación cualitativa presenta similitudes en cuanto a la forma de entender y definir la realidad (nivel ontológico), forma de aproximarse a la realidad e iniciar su estudio (nivel epistemológico) y en las técnicas utilizadas para recoger evidencias y técnicas de análisis (nivel metodológico y técnico).

## 10. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN.

- Secuencias didácticas que van a conformar una unidad didáctica
- La observación
- Diario de campo.
- Entrevistas semi estructuradas.

## 11. CONSIDERACIONES ÉTICAS Y BIOÉTICAS

**Consideraciones éticas esenciales**

En este tipo de investigación cualitativa, parte del principio de respeto por la integridad de las personas que participan en dicho análisis, que garantice el adecuado manejo de la información y oportunidades de igualdad y equidad propendiendo por resultados veraces y confiables.

Por consiguiente, es posible afirmar que este proyecto es técnica y éticamente correcto, porque le brinda la oportunidad al estudiante de aprender los conceptos y aplicaciones de la función cuadrática a partir de la experiencia, tomando como base la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau a partir de la ingeniería didáctica que propone Artigue en sus diferentes fases. Durante el proceso de desarrollo de esta investigación, se trabajó en la Institución Educativa Ciudadela del Sur con los estudiantes de grado once, el cual se compone de 24 estudiantes de diferente género. Y para proteger su integridad y seguridad, siempre se realizaron las actividades en compañía del profesor, garantizando que su información personal no sea vulnerable y siempre resguardando su integridad. Por ello es importante que se describa la forma como se garantizarán los principios éticos, a partir de la Ley Estatutaria 1581 del 17 octubre de 2012 del Congreso de la República de Colombia, por la cual se dictan disposiciones generales para la protección de datos personales.

## 12. DESCRIPCIÓN DE LAS TAREAS.

- **ANÁLISIS PRELIMINAR:**

Teniendo en cuenta la metodología de la ingeniería didáctica que plantea Michelle Artigue se hizo un análisis caracterizado por 3 dimensiones.

**Dimensión histórico-epistemológica del concepto de función cuadrática:** A través de situaciones significativas en la historia se puede tener un acercamiento del concepto de función cuadrática, rastrear sus orígenes y aportes de los matemáticos en diferentes épocas y conocer sus posturas frente a dicho concepto. Para esto se recopilo información que permitiera identificar a nivel histórico como ha ido evolucionando el concepto de dicha función en una línea de tiempo, así:

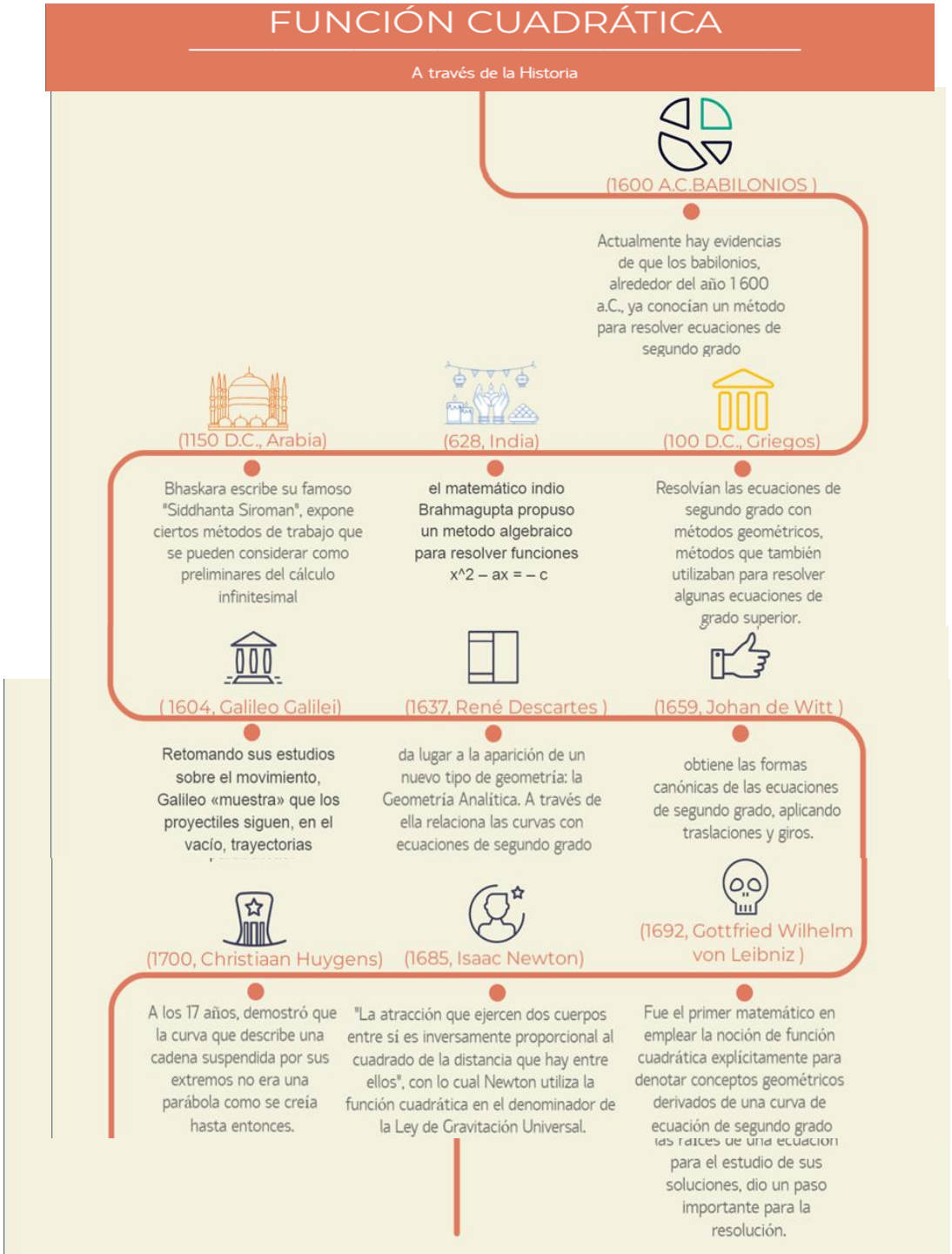


*Figura 3 Función cuadrática a través de la historia*

*Fuente: creación propia.*

- **1600 A.C.**: En la cultura de los babilónicos, las "nociones cuadráticas" se encontraron asociadas a situaciones en donde el concepto de cuadrado tenía una concepción aritmética con ciertos niveles básicos de generalización tal como se observa en la siguiente situación: "Hallar un número tal que sumado a su inverso dé un número dado" que conduce a una ecuación cuadrática (Morris, 1972). La geometría no tuvo un lugar trascendental en el desarrollo de la matemática babilónica, sin que ello no quiera decir que no se recurría a representaciones geométricas. Estas representaciones no fueron trabajadas con la rigurosidad que caracterizó más adelante a la cultura griega. (Morris, 1972).
- **100 D.C**.: Sin lugar a duda los griegos marcaron un hito aún más especial en la construcción de las nociones cuadráticas. Se puede hablar en la cultura griega dos aspectos: uno de carácter aritmético y el otro geométrico. Con respecto a lo

aritmético, la escuela pitagórica establece razonamientos numéricos para sucesiones y progresiones, haciendo un empalme con la geometría en relación con los números figurados. Se observa también en sus trabajos cierta captación de algunas variaciones y predicciones a través de pequeños incrementos. (Mesa & Villa).

- **618 D.C**. **India**: Brahmagupta encontró la solución general de una ecuación lineal. Dicho descubrimiento queda descrito en el capítulo dieciocho de "Brāhmasphuṭasiddhānta": La diferencia entre "rupas", cuando se invierte y se divide por la diferencia de las incógnitas, es la incógnita en la ecuación. Las rupas se restan en el lado debajo de la cual se debe restar el cuadrado y lo desconocido.

  Lo anterior es una solución para la ecuación bx + c = dx + e equivalente a

  $$x = \frac{e - c}{b - d}$$

  , en donde la palabra "rupas" hace referencia a las constantes c y e.

  Brahmagupta encontró dos valores de solución para la ecuación cuadrática:

  - Disminuir por el número medio la raíz cuadrada de las rupas multiplicada por cuatro veces el cuadrado y aumentada por el cuadrado del número medio; Divide el resto por el doble del cuadrado. El resultado es el número medio.
  - Cualquiera que sea la raíz cuadrada de las rupas multiplicada por el cuadrado y incrementada por el cuadrado de la mitad de lo desconocido, disminuya eso por la mitad de lo desconocido y divida el resto por su cuadrado. El resultado es lo desconocido.

  Que son respectivamente soluciones a la ecuación $ax^2 + bx = c$ equivalentes a

  $$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a} \quad \text{y} \quad x = \frac{\sqrt{ac + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}}{a}.$$

(Mesa & Villa)

- **1150 D.C**.: El matemático árabe Mohamed ibn Musa al-Khowarizmi (s. IX) utilizó la siguiente estrategia para resolver la ecuación x^2 + 10x = 39.

  Debes tomar la mitad del número de las raíces, que es 5, y multiplicarlo por sí mismo y obtienes 25 al que le sumas el número 39, con el resultado 64.

  Tomas la raíz cuadrada de este número, que es 8, y le restas la mitad de las raíces, 5, y obtienes 3, que es el valor buscado.

  La fórmula, tal y como la vamos a ver, parece ser obra del matemático hindú Bhaskara (1114-1185).

  Bhaskara escribe su famoso "Siddhanta Siroman" en el año 1150. Este libro se divide en 4 partes, Lilavati (aritmética), Vijaganita (álgebra), Goladhyaya (globo celestial), y Grahaganita (matemáticas de los planetas). La mayor parte del trabajo de Bhaskara en el Lilavati y Bijaganita procede de matemáticos anteriores, pero los sobrepasa sobre todo en la resolución de ecuaciones. Es aquí, donde aparece la fórmula general que permite resolver una ecuación de segundo grado. ( Ruffin, s.f.).

- **1604 D.C.:** Galilei (1638) presenta un acercamiento a los objetos matemáticos que estudia por medio de procesos de modelización, siendo muy significativo para la didáctica del concepto de función cuadrática, en tanto permite evidenciar algunas situaciones que provoca el estudio por parte de los estudiantes y que permite una integración con otras ramas de las matemáticas como la aritmética, la geometría y el álgebra. Una mirada a esta obra permite identificar algunos obstáculos en el proceso de formulación de las observaciones realizadas y sus inferencias a manera de

reconstrucción de conceptos algunos de los cuales fueron presentados en (Mesa & Villa).

- **1637:** Rene Descartes (Descartes) describe (entre otros) un método geométrico para resolver un tipo particular de ecuaciones cuadrática. A su vez, publicó en su libro La geometría, la forma de resolver geométricamente ecuaciones de segundo grado con soluciones positivas. Las soluciones negativas se ignoraban porque se consideraban falsas.

  Así resuelve geométricamente ecuaciones de la forma: $z^2=az-b^2$, $z^2=az+b^2$, y $z^2+az=b^2$, que son la únicas que tienen alguna solución positiva.

- **1700:** Huygens estableció lo que ahora se conoce como la segunda de las leyes del movimiento de Newton en forma cuadrática. En 1659 derivó la fórmula ahora estándar para la fuerza centrípeta, ejercida sobre un objeto que describe un movimiento circular, por ejemplo, por la cuerda a la que está unido. En notación moderna:

  $$F_c = \frac{m\,v^2}{r}$$

  Con m la masa del objeto, v la velocidad y r el radio. La publicación de la fórmula general para esta fuerza en 1673 fue un paso significativo en el estudio de las órbitas en astronomía. Permitió la transición de la tercera ley del movimiento planetario de Kepler a la ley de la gravitación del inverso del cuadrado. (Wikipedia, s.f.)

- **1685:** La ley de Gravitación Universal, es una de las leyes físicas formuladas por **Isaac Newton** en su libro “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica” de 1687.

Describe la interacción gravitatoria entre cuerpos masivos, y establece una relación de proporcionalidad de la fuerza gravitatoria con la masa de los cuerpos.

El enunciado formal de esta ley newtoniana sostiene que:

"La fuerza con que se atraen dos objetos es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa".

(Concepto, 2021)

- **1692: Gottfried Wilhelm von Leibniz**, El mérito de Leibniz fue mostrar que el denominado triángulo característico o triángulo diferencial (Isaac Barrow), se podía utilizar para resolver problemas de cuadratura y para calcular la tangente a una curva. Leibniz consideraba las curvas como polígonos de infinitos lados, de longitud infinitamente pequeña, entre más pequeña fuese esa longitud las aproximaciones a la curva original mejoran, lo cual permitió resolver los problemas de las tangentes y de cuadraturas. (Clayton, s.f.)
- **1736: leonhard Euler**, Introdujo gran parte de la moderna terminología y notación matemática, particularmente para el área del análisis matemático, como por ejemplo la noción de función matemática, y, en particular de función cuadrática. (Brucker, s.f.)
- **1769: Joseph Louis lagrange**, envió el mayor número de sus artículos de álgebra a la Academia de Berlín, destacando su discusión de la solución enteras de las funciones cuadráticas, 1769, y generalmente de ecuaciones indeterminadas, 1770. (Brucker, s.f.)
- **1799: Friedrich Gauss**, A finales del siglo XVIII, demostró que cualquier ecuación polinómica tiene al menos una raíz. (Quesada, s.f.)

En síntesis, podemos concluir que la función cuadrática a través del tiempo fue provocando inquietud en diferentes culturas, desde los babilónicos hasta los griegos, quienes buscaron plantear y resolver la trayectoria de objetos lanzados hacia arriba y con cierto ángulo de elevación, generando una parábola. Esto permitió que su definición fuera evolucionando hasta lo que tenemos hoy en día a nivel algebraico, la cual es implementada en la ciencia (reflectores parabólicos que forman la base de los satélites y faros de los carros), en los negocios (predicciones de ganancias y pérdidas) y la ingeniería (graficas de objetos en movimiento).

**Dimensión didáctica:** Tomando como base los libros pedagógicos con los que se trabajan en los colegios públicos en Colombia, principalmente con la editorial "Santillana" o la editorial "SM", se puede identificar que el modelo pedagógico al cual se acogen la mayoría de los docentes es de tipo magistral, donde se enseña el concepto de la función cuadrática, de qué se compone y algunos ejercicios de ejemplo, generando en los estudiantes las dificultades que ya se han comentado anteriormente en la problemática, provocando inconformidad y el bajo rendimiento con respecto al tema. Es importante por esta razón, aplicar metodologías que sean acorde a los retos que se plantea la didáctica en la actualidad, con mayor enfoque en la aplicación del entorno del estudiante, y así generar mayor interés para la comprensión de la función cuadrática como tal.

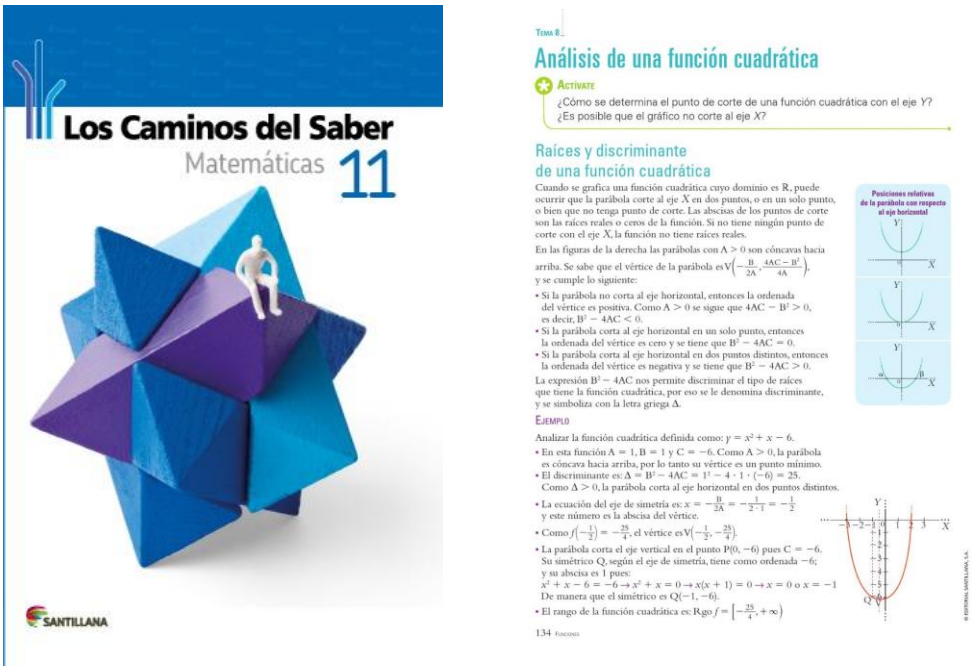



***Figura 4  Libro Santillana***

***Fuente***: (Los caminos del saber)

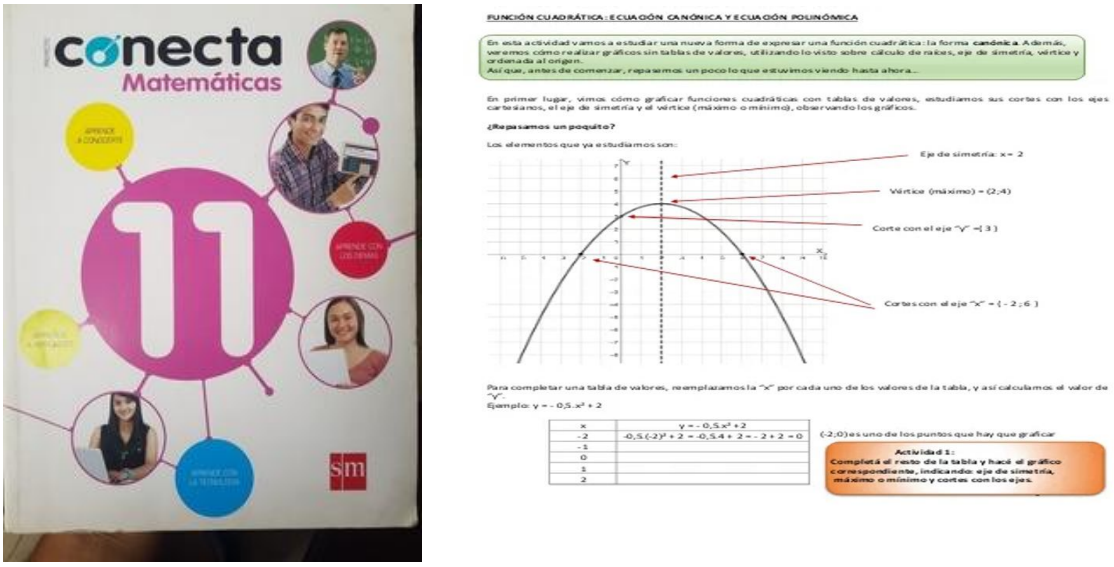



***Figura 5  Libro SM***

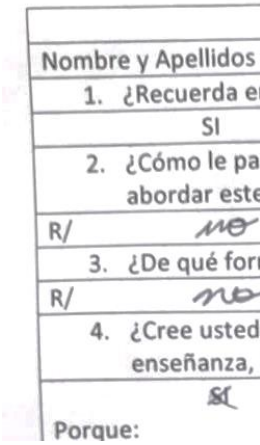
***Fuente:*** (Conecta matemáticas)

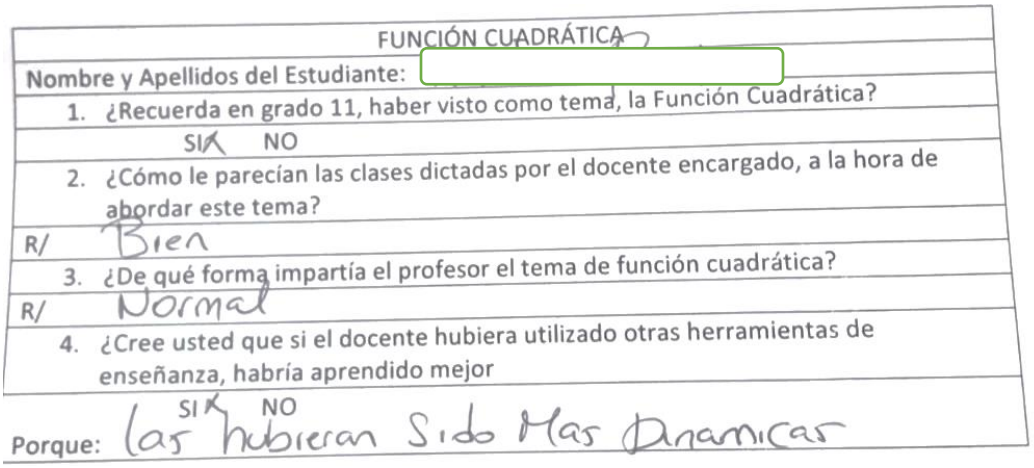
**Dimensión cognitiva:** En esta dimensión se procedió a indagar por medio de una encuesta a varios estudiantes de Licenciatura en matemáticas de primer semestre de la universidad del Quindío, con el fin de conocer cómo fue la enseñanza de la función cuadrática en grado 11, en sus respectivas instituciones educativas públicas del Quindío.

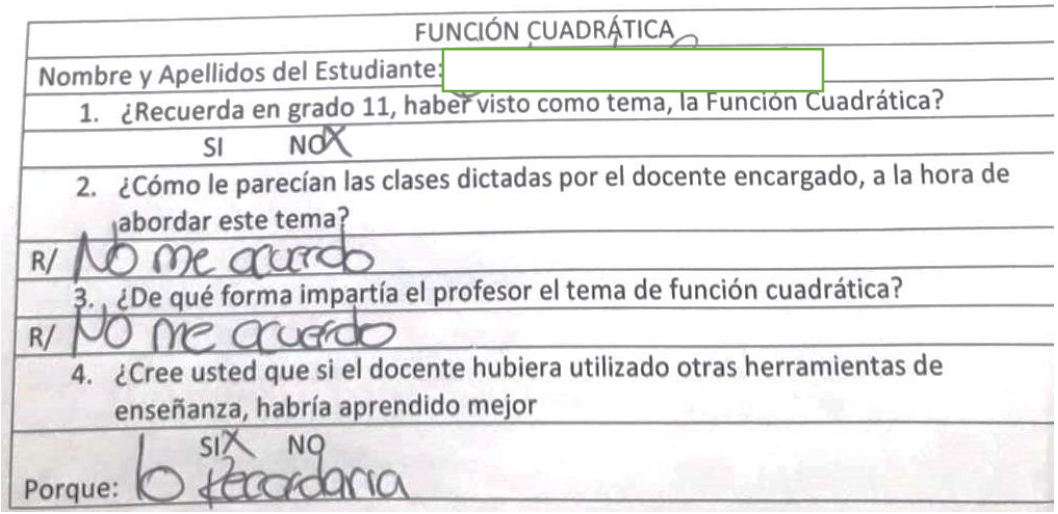
*Tabla 5* Encuesta universidad del Quindío.

| FUNCIÓN CUADRÁTICA |
|---|
| Nombre y Apellidos del Estudiante: |
| 1. ¿Recuerda en grado 11, haber visto como tema, la Función Cuadrática? |
| SI NO |
| 2. ¿Cómo le parecían las clases orientadas y desarrolladas por el docente encargado, a la hora de abordar este tema? |
| R/ |
| 3. ¿De qué forma impartía el profesor el tema de función cuadrática? |
| R/ |
| 4. ¿Cree usted que si el docente hubiera utilizado otras herramientas de enseñanza, habría aprendido mejor |
| SI NO<br>Porque: |
| |

A sí:





FUNCIÓN CUADRÁTICA

Nombre y Apellidos del Estudiante:

1. ¿Recuerda en grado 11, haber visto como tema, la Función Cuadrática?

SI NO X

2. ¿Cómo le parecían las clases dictadas por el docente encargado, a la hora de abordar este tema?

R/ No me acuerdo

3. ¿De qué forma impartía el profesor el tema de función cuadrática?

R/ No me acuerdo

4. ¿Cree usted que si el docente hubiera utilizado otras herramientas de enseñanza, habría aprendido mejor

SI X NO

Porque: lo recordaria

***Figura 6 Encuesta realizada a los estudiantes de Lic. en Matemáticas E1, E2 y E3.***

***Fuente: Creación propia.***

Se concluye que la enseñanza de la función cuadrática no fue desarrollada de una forma adecuada, puesto que 10 de los 15 estudiantes de primer semestre de Licenciatura en Matemáticas de la universidad del Quindío no recuerdan la enseñanza de la misma, 4 afirman no haber entendido el tema por la forma en que el profesor lo impartía y solo uno de ellos recuerda con facilidad el tema, ya que manifiesta que el profesor implementaba herramientas didácticas que ayudaron a su aprendizaje.

Además, se le realizó una encuesta al profesor de área de la institución educativa Ciudadela del Sur de grado 11, para conocer su punto de vista sobre la manera de cómo se ha impartido el concepto de función cuadrática, su metodología de enseñanza y la forma de aprendizaje de los estudiantes, donde manifiesta lo siguiente:

En la dimensión epistemológica, indica que la función cuadrática se ha enseñado basada en problemas de aplicación; en la dimensión didáctica, utilizan herramientas pedagógicas como el televisor, el tablero y aplicaciones móviles como el Geogebra; y en la dimensión cognitiva,

asegura que la mayoría de los estudiantes han comprendido el tema, aunque les cuesta relacionarla con la gráfica.

| INSTITUCION EDUCATIVA CIUDADELA DEL SUR | |
|---|---|
| ANALISIS PRELIMINAR | |
| **PROFESOR:** | |
| **GRADO:** | 11° |

**Dimensión epistemológica**: ¿cómo se ha enseñado la función cuadrática en el grado 11? ¿Qué metodología se ha utilizado en los últimos 4 años?

_____
_____
_____
_____
_____
_____

**Dimensión Didáctica:** ¿Que herramientas pedagógicas se están utilizando actualmente para enseñar la función cuadrática en grado 11?

_____
_____
_____
_____
_____
_____

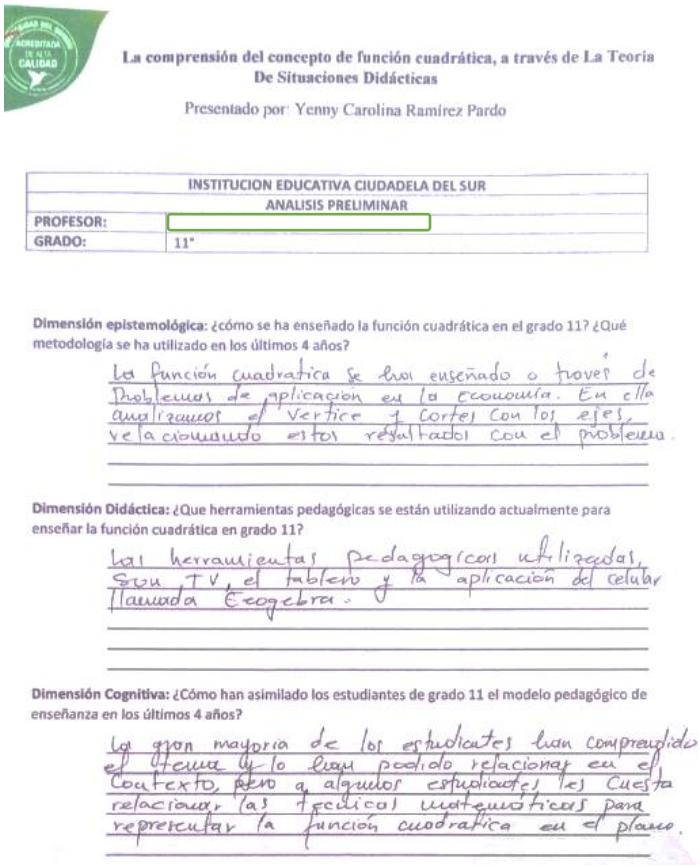
**Dimensión Cognitiva:** ¿Cómo han asimilado los estudiantes de grado 11 el modelo pedagógico de enseñanza en los últimos 4 años?

_____
_____
_____

***Figura 7 Análisis Preliminar***

***Fuente: Creación propia.***

Respuestas del profesor de área:



**La comprensión del concepto de función cuadrática, a través de La Teoría De Situaciones Didácticas**

Presentado por: Yenny Carolina Ramírez Pardo

| INSTITUCION EDUCATIVA CIUDADELA DEL SUR | |
|---|---|
| ANALISIS PRELIMINAR | |
| PROFESOR: | |
| GRADO: | 11° |

**Dimensión epistemológica:** ¿cómo se ha enseñado la función cuadrática en el grado 11? ¿Qué metodología se ha utilizado en los últimos 4 años?

La función cuadratica se ha enseñado a través de problemas de aplicacion en la economia. En ella analizamos el vertice y cortes con los ejes, relacionando estos resultados con el problema.

**Dimensión Didáctica:** ¿Que herramientas pedagógicas se están utilizando actualmente para enseñar la función cuadrática en grado 11?

Las herramientas pedagogicas utilizadas, son TV, el tablero y la aplicación del celular llamada Geogebra.

**Dimensión Cognitiva:** ¿Cómo han asimilado los estudiantes de grado 11 el modelo pedagógico de enseñanza en los últimos 4 años?

La gran mayoria de los estudiantes han comprendido el tema y lo han podido relacionar en el contexto, pero a algunos estudiantes les cuesta relacionar las tecnicas matematicas para representar la función cuadratica en el plano.

***Figura 8 Análisis preliminar desarrollado por el profesor de área.***

***Fuente: creación propia.***

Tomando en cuenta las respuestas dadas por el profesor se concluye que su metodología de enseñanza está basada en un modelo de resolución de problemas y que lo único que ha implementado de manera novedosa es una aplicación que manejan los estudiantes en sus

celulares y nos da a entender que estos estudiantes tienen dificultades en representar la función cuadrática en un plano cartesiano.

### 12.1. Concepción y Análisis a priori:

Luego de hacerle una encuesta al profesor de área también se les realizó una prueba diagnóstica a los estudiantes de grado 11 de la Institución Educativa Ciudadela del Sur para evidenciar en qué nivel se encontraban, puesto que en grado noveno debieron haber visto someramente las funciones cuadráticas y a principios este curso empezaron a ver las todas las funciones matemáticas como tal.

**TALLER:**

**Primera pregunta:**

- ¿Qué es la función?

_____
_____
_____

**Segunda pregunta:**

- ¿Qué es la función cuadrática?

_____
_____
_____

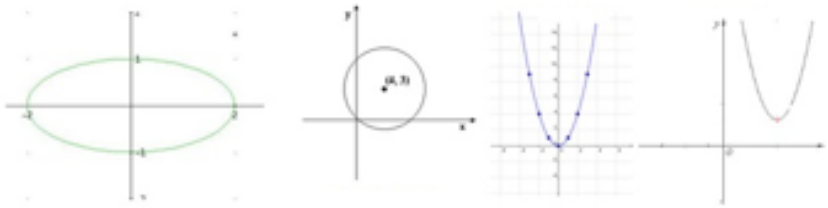
**Tercera pregunta:**

- ¿Cuáles delas siguientes expresiones corresponden a la función cuadrática?

a) $f(x) = -16x^2 + 14x + 10$
b) $f(p) = 16p^3 + 14p^2 + 12$
c) $f(n) = -0{,}25n^2 - 0{,}5n + 1$
d) $f(x) = 6x + 1$
e) $f(t) = -14t - 5 + 32t^2$

**Cuarta pregunta:**

- ¿Encierre en un círculo la gráfica que corresponde a una función cuadrática?



**Quinta pregunta:**

- Grafique siguiente función cuadrática

$$(y + 5)^2 = -12(x - 1)$$

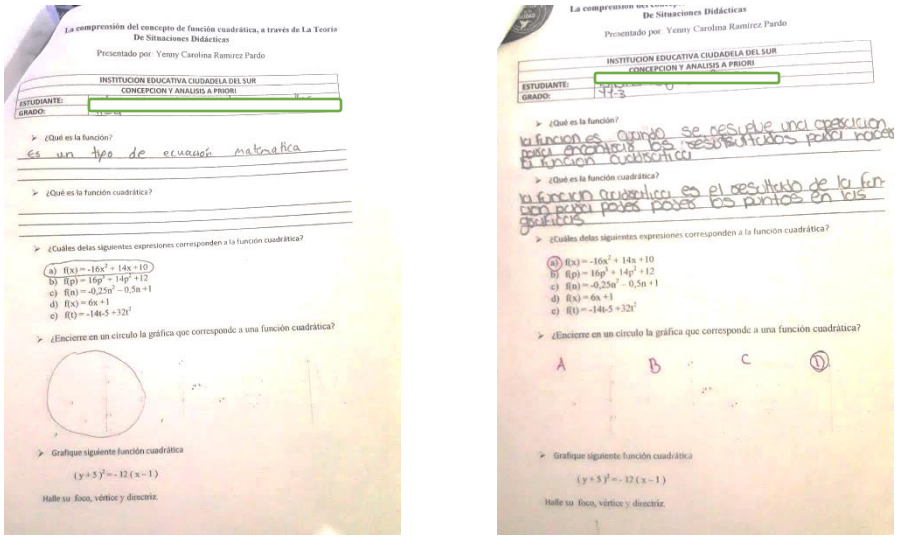
Halle su foco, vértice y directriz.

**TABLA DE NOTAS DEL TALLER DE ANÁLISIS A PRIORI**

*Tabla 6* **Notas Análisis a priori**

| | **Pregunta 1** | **Pregunta 2** | **Pregunta 3** | **Pregunta 4** | **Pregunta 5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Estudiante 1** | Insuficiente | Insuficiente | Aceptable | Aceptable | Insuficiente |
| **Estudiante 2** | Insuficiente | Insuficiente | Insuficiente | Aceptable | Insuficiente |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Estudiante 3** | Insuficiente | Insuficiente | Aceptable | Aceptable | Insuficiente |
| **Estudiante 4** | Insuficiente | Insuficiente | Insuficiente | Bueno | Insuficiente |
| **Estudiante 5** | Insuficiente | Insuficiente | Bueno | Aceptable | Insuficiente |
| **Estudiante 6** | Insuficiente | Insuficiente | Insuficiente | Aceptable | Insuficiente |
| **Estudiante 7** | Insuficiente | Insuficiente | Aceptable | Aceptable | Insuficiente |
| **Estudiante 8** | Insuficiente | Insuficiente | Aceptable | Aceptable | Insuficiente |
| **Estudiante 9** | Insuficiente | Insuficiente | Aceptable | Aceptable | Insuficiente |
| **Estudiante 10** | Insuficiente | Insuficiente | Aceptable | Buena | Insuficiente |
| **Estudiante 11** | Insuficiente | Aceptable | Aceptable | Aceptable | Insuficiente |
| **Estudiante 12** | Insuficiente | Insuficiente | Insuficiente | Aceptable | Insuficiente |
| **Estudiante 13** | Insuficiente | Aceptable | Aceptable | Aceptable | Insuficiente |
| **Estudiante 14** | Insuficiente | Insuficiente | Aceptable | Aceptable | Insuficiente |
| **Estudiante 15** | Insuficiente | Insuficiente | Aceptable | Bueno | Insuficiente |
| **Estudiante 16** | Insuficiente | Aceptable | Aceptable | Aceptable | Insuficiente |
| **Estudiante 17** | Insuficiente | Aceptable | Insuficiente | Aceptable | Insuficiente |
| **Estudiante 18** | Insuficiente | Insuficiente | Insuficiente | Insuficiente | Insuficiente |
| **Estudiante 19** | Aceptable | Insuficiente | Aceptable | Aceptable | Insuficiente |
| **Estudiante 20** | Insuficiente | Aceptable | Aceptable | Insuficiente | Insuficiente |
| **Estudiante 21** | Insuficiente | Insuficiente | Aceptable | Aceptable | Insuficiente |
| **Estudiante 22** | Insuficiente | Insuficiente | Aceptable | Insuficiente | Insuficiente |
| **Estudiante 23** | Insuficiente | Insuficiente | Aceptable | Insuficiente | Insuficiente |
| **Estudiante 24** | Insuficiente | Insuficiente | Aceptable | Aceptable | Insuficiente |



La comprensión del concepto de función cuadrática, a través de La Teoría De Situaciones Didácticas

Presentado por: Yenny Carolina Ramírez Pardo

INSTITUCION EDUCATIVA CIUDADELA DEL SUR
CONCEPCION Y ANALISIS A PRIORI

ESTUDIANTE:
GRADO:

¿Qué es la función?

Es un tipo de ecuación matematica

¿Qué es la función cuadrática?

¿Cuáles delas siguientes expresiones corresponden a la función cuadrática?

a) $f(x) = -16x^2 + 14x + 10$
b) $f(p) = 16p^3 + 14p^2 + 12$
c) $f(n) = -0{,}25n^2 - 0{,}5n + 1$
d) $f(x) = 6x + 1$
e) $f(t) = -14t\text{-}5 + 32t^2$

¿Encierre en un circulo la gráfica que corresponde a una función cuadrática?

Grafique siguiente función cuadrática

$(y+5)^2 = -12(x-1)$

Halle su foco, vértice y directriz.

La comprensión del concepto de función cuadrática, a través de La Teoría De Situaciones Didácticas

Presentado por: Yenny Carolina Ramírez Pardo

INSTITUCION EDUCATIVA CIUDADELA DEL SUR
CONCEPCION Y ANALISIS A PRIORI

ESTUDIANTE:
GRADO: 11-3

¿Qué es la función?

la funcion es cuando se resuelve una operacion para encontrar los resultados para raices

¿Qué es la función cuadrática?

la funcion cuadratica es el resultado de la fun con para pasar los puntos en las graficas

¿Cuáles delas siguientes expresiones corresponden a la función cuadrática?

a) $f(x) = -16x^2 + 14x + 10$
b) $f(p) = 16p^3 + 14p^2 + 12$
c) $f(n) = -0{,}25n^2 - 0{,}5n + 1$
d) $f(x) = 6x + 1$
e) $f(t) = -14t\text{-}5 + 32t^2$

¿Encierre en un circulo la gráfica que corresponde a una función cuadrática?

A B C D

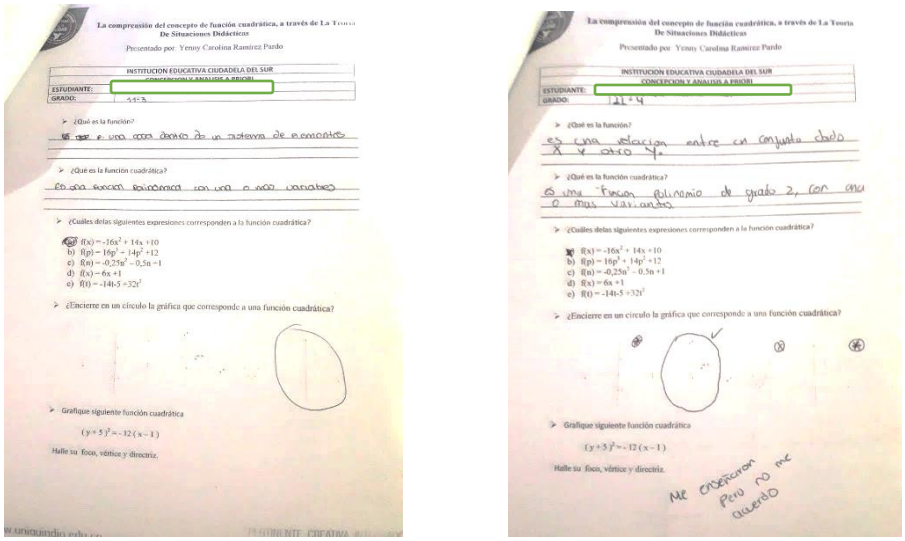
Grafique siguiente función cuadrática

$(y+5)^2 = -12(x-1)$

Halle su foco, vértice y directriz.

***Figura 9 Concepción y ánalisis a priori realizada por los estudiantes 23 y 14***

***Fuente: creación propia.***



La comprensión del concepto de función cuadrática, a través de La Teoría De Situaciones Didácticas

Presentado por: Yenny Carolina Ramírez Pardo

INSTITUCION EDUCATIVA CIUDADELA DEL SUR
CONCEPCION Y ANALISIS A PRIORI

ESTUDIANTE:
GRADO: 11-3

¿Qué es la función?

es una ecuacion dado de un sistema de ecuaciones

¿Qué es la función cuadrática?

Es una ecuacion polinomica con una o mas variables

¿Cuáles delas siguientes expresiones corresponden a la función cuadrática?

a) $f(x) = -16x^2 + 14x + 10$
b) $f(p) = 16p^3 + 14p^2 + 12$
c) $f(n) = -0{,}25n^2 - 0{,}5n + 1$
d) $f(x) = 6x + 1$
e) $f(t) = -14t\text{-}5 + 32t^2$

¿Encierre en un circulo la gráfica que corresponde a una función cuadrática?

Grafique siguiente función cuadrática

$(y+5)^2 = -12(x-1)$

Halle su foco, vértice y directriz.

La comprensión del concepto de función cuadrática, a través de La Teoría De Situaciones Didácticas

Presentado por: Yenny Carolina Ramírez Pardo

INSTITUCION EDUCATIVA CIUDADELA DEL SUR
CONCEPCION Y ANALISIS A PRIORI

ESTUDIANTE:
GRADO: 11-4

¿Qué es la función?

es una relacion entre un conjunto dado X y otro Y.

¿Qué es la función cuadrática?

es una funcion polinomio de grado 2, con una o mas variantes.

¿Cuáles delas siguientes expresiones corresponden a la función cuadrática?

a) $f(x) = -16x^2 + 14x + 10$
b) $f(p) = 16p^3 + 14p^2 + 12$
c) $f(n) = -0{,}25n^2 - 0{,}5n + 1$
d) $f(x) = 6x + 1$
e) $f(t) = -14t\text{-}5 + 32t^2$

¿Encierre en un circulo la gráfica que corresponde a una función cuadrática?

Grafique siguiente función cuadrática

$(y+5)^2 = -12(x-1)$

Halle su foco, vértice y directriz.

Me enseñaron pero no me acuerdo

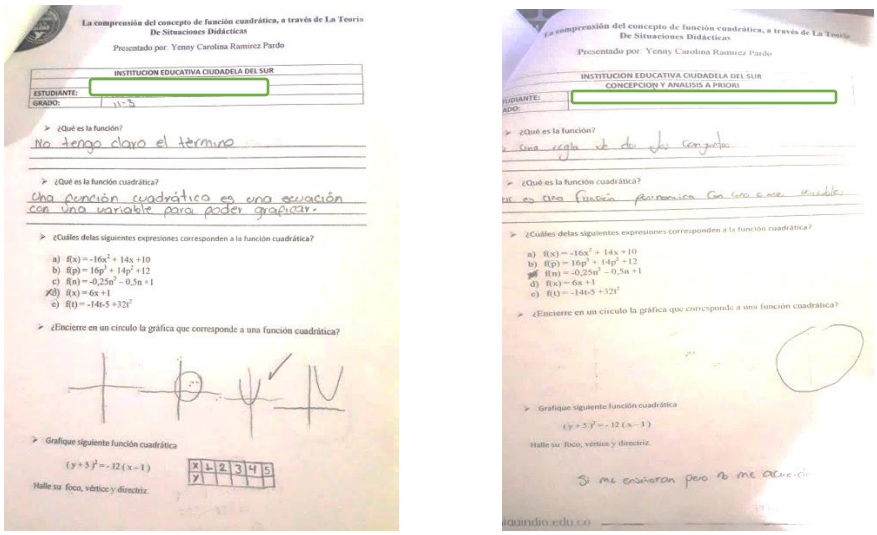



***Figura 10 Concepción y ánalisis a priori realizada por los estudiantes 2, 20, 12 y 24.***

***Fuente: creación propia.***

El análisis a priori constó de un taller de 5 preguntas que se le realizaron a 24 estudiantes de grado 11 de la institución educativa Ciudadela del sur, las cuales fueron estratégicas para saber qué conocimientos previos poseían los estudiantes sobre el concepto de función y función cuadrática. En la primera y segunda pregunta directamente se pidió su definición y sólo un estudiante de esos 24 respondió asertivamente sobre el concepto de función y 5 de ellos definieron aceptablemente el concepto de función cuadrática. La tercera pregunta tenía el propósito de determinar si el estudiante reconocía la expresión correspondiente a una función cuadrática, donde 18 estudiantes indicaron conocerla. En la cuarta pregunta se esperaba el reconocimiento de la gráfica de la función cuadrática puesto que el profesor de área manifestó haberla impartido. De esta pregunta 18 estudiantes lograron identificarla. En la quinta pregunta se pide a los estudiantes graficar una función cuadrática con todas sus partes para verificar si conocían sus ubicaciones, ninguno de los estudiantes graficaron, ni ubicaron la función cuadrática y sus partes y no sabían cuáles eran.

Luego, se realizó el proceso de retroalimentación con los estudiantes donde ellos mismos pudieron concluir que no tenían el conocimiento suficiente sobre la función cuadrática, sus partes y la forma de graficarla. Además, expresan que la forma en que se ha impartido pedagógicamente no fue la adecuada, dejando así un vacío en su aprendizaje.

El análisis a priori también se hace en las situaciones didácticas para saber su propósito, metodología, dificultades y acciones esperadas por parte del estudiante, así:

*Tabla 7* ANÁLISIS A PRIORI DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS:

| SITUACIONES | PROPÓSITO | METODOLOGIA | DIFICULTADES | ACCIONES ESPERADAS | HABILIDADES |
|---|---|---|---|---|---|
| **Representación de la función cuadrática** | Reconocer los conceptos básicos de la función cuadrática. | Realización del juego llamado herradura. | Los estudiantes podrían no señalar las partes de la gráfica de la función cuadrática de forma correcta. | Construcción del concepto de función cuadrática a partir del juego | El estudiante reconoce los conceptos básicos de la función cuadrática por medio de un entorno didáctico en una cancha de baloncesto |
| **Encuentra la ecuación, tabula y gráfica.** | Reconocer la ecuación característica de la función cuadrática. | Realización de rompecabezas y tabulación asignando valores aleatorios. | A los estudiantes les podría causar dificultad encontrar los pares ordenados para ubicarlos en el plano cartesiano y así poder bosquejar la gráfica. | Identificar la ecuación característica de la función cuadrática, tabular y bosquejar la gráfica. | El estudiante identifica la ecuación característica de la función cuadrática por medio de un rompecabezas |
| **Representa cada forma canónica de la función cuadrática.** | Reconocer las 4 formas canónicas de la función cuadrática | Realización de juego, busca la tarjeta y halla su forma canónica. | Podría ser incómodo para algunos estudiantes exponer, ya que algunos son muy tímidos. | Definir las 4 formas canónicas de la función cuadrática y encontrar las diferencias de cada una. | El estudiante reconoce las 4 formas canónicas de la función cuadrática |
| **¿Qué es y dónde se ubica?** | Definir y saber ubicar el Foco, Vértice, | Encuesta sobre conocimientos previos y dada una | A los estudiantes podría causarles dificultad recordar la | Definición correcta de Foco, Vértice, Directriz y Lado recto además de su ubicación | El estudiante dará define que es Foco, Vértice, Directriz y Lado Recto a |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Directriz y Lado recto en una parábola. | función ubicar el Foco, Vértice, Directriz y Lado recto. | definición correcta de Foco, Vértice, Directriz y Lado recto. | en una parábola. | partir los conocimientos adquiridos en cursos anteriores |
| **Práctica.** | Practicar y recordar lo visto en las secuencias anteriores. | Taller propuesto. | Podría causarles dificultad graficar y ubicar los puntos correspondientes a foco, vértice, y directriz, aun sabiendo su definición. | Se esperaba que los estudiantes tuvieran más afianzados los conceptos vistos en las secuencias anteriores y pudieran practicar. | El estudiante aplica lo aprendido durante las secuencias didácticas en un taller evaluativo |

## 12.2. Experimentación:

En esta fase de la investigación se pone en escena las situaciones didácticas diseñadas en el análisis a priori, realizadas en clases de 1 hora diaria de lunes a viernes, en el horario programado por el profesor del área de matemáticas de la institución educativa Ciudadela del sur de 8 a 9 de la mañana. Con un total de 24 estudiantes de grado 11, empezamos el desarrollo de cada clase dividiéndolos en subgrupos de 6 estudiantes, entregándoles una guía para cada categoría.

En cada uno de los procesos: la situación a didáctica de acción, donde los estudiantes afrontaron la situación planteada; la situación a didáctica de formulación, donde los estudiantes trataban de dar solución a la situación; la validación , donde se confronta lo desarrollado por los estudiantes para validar su saber construido y la institucionalización, donde se analiza lo de la validación y llega al saber matemático previsto; estuvo presente la profesora supervisando, observaba las dificultades, y escuchando las inquietudes de los estudiantes.

### 12.2.1. Secuencia Didáctica Número 1: “la representación de la función cuadrática en el baloncesto”

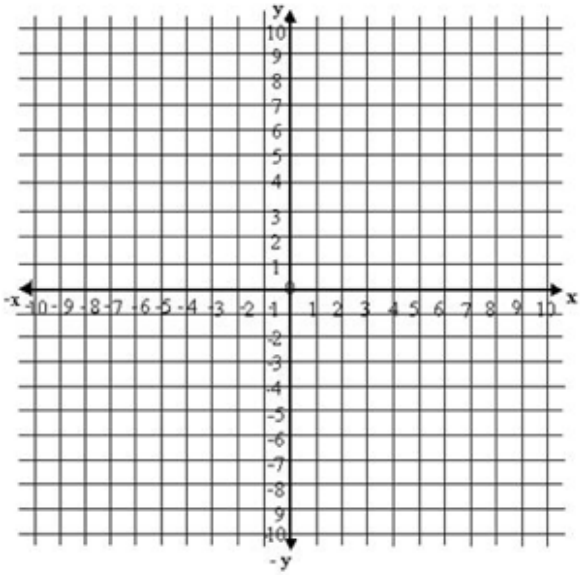
**Guía entregada a los estudiantes:**

| Secuencia didáctica número 1: “la representación de la función cuadrática en el baloncesto” | |
|---|---|
| ESTUDIANTE: | |
| GRADO: | |

Seguir los siguientes pasos:

- Conformar grupos de 7 personas, donde cada estudiante tendrá un número, asignado según el turno que le toque.
- El primer estudiante hará el primer tiro al aro desde cada posición con marca (las marcas son las rayas que tiene la parábola inscrita en la cancha). Si no lo encesta, seguirá el segundo estudiante y así se hará sucesivamente, si lo enceste sigue a la siguiente marca.
- Cada grupo al terminar los lanzamientos identificara que son las marcas en un plano cartesiano.
- Los estudiantes se reunirán y seguirán las siguientes indicaciones:

a. Representarán esas marcas en el plano cartesiano, luego las unirán y así podrán bosquejar una parábola, ubicando su foco, vértice y directriz.




b. Escribirán sus conclusiones y preguntas acerca de la forma de la parábola.
c. Socialización de las actividades.

*Figura 11 Secuencia didáctica 1*
*Fuente: creación propia.*

- **Situación de Acción**

En esta fase el estudiante reconoce los conceptos básicos del estudio de la función cuadrática, ya que Brousseau en su teoría nos explica que es una construcción colaborativa donde los estudiantes aprenden mediante la interacción. Para esto se llevaron a la cancha de baloncesto con el fin que analizaran diferentes entornos del juego donde se pudiera evidenciar la parábola e identificar cada una de sus partes como lo son el vértice, foco, el lado recto y directriz. A partir de esto, realizaron un juego llamado herradura, que es lanzar el balón desde diferentes puntos de la parábola inscrita dentro de la cancha y llegar a la canasta y encestar, esto con el fin de que identificaran otro tipo de parábola que debían realizar al momento de lanzar el balón. Lo anterior les permitió construir su propio concepto de función cuadrática a partir del juego de la herradura que tiene como base la figura inscrita en forma de parábola inscrita dentro de la cancha.

***Figura 12 Situación Acción Secuencia Didáctica # 1***

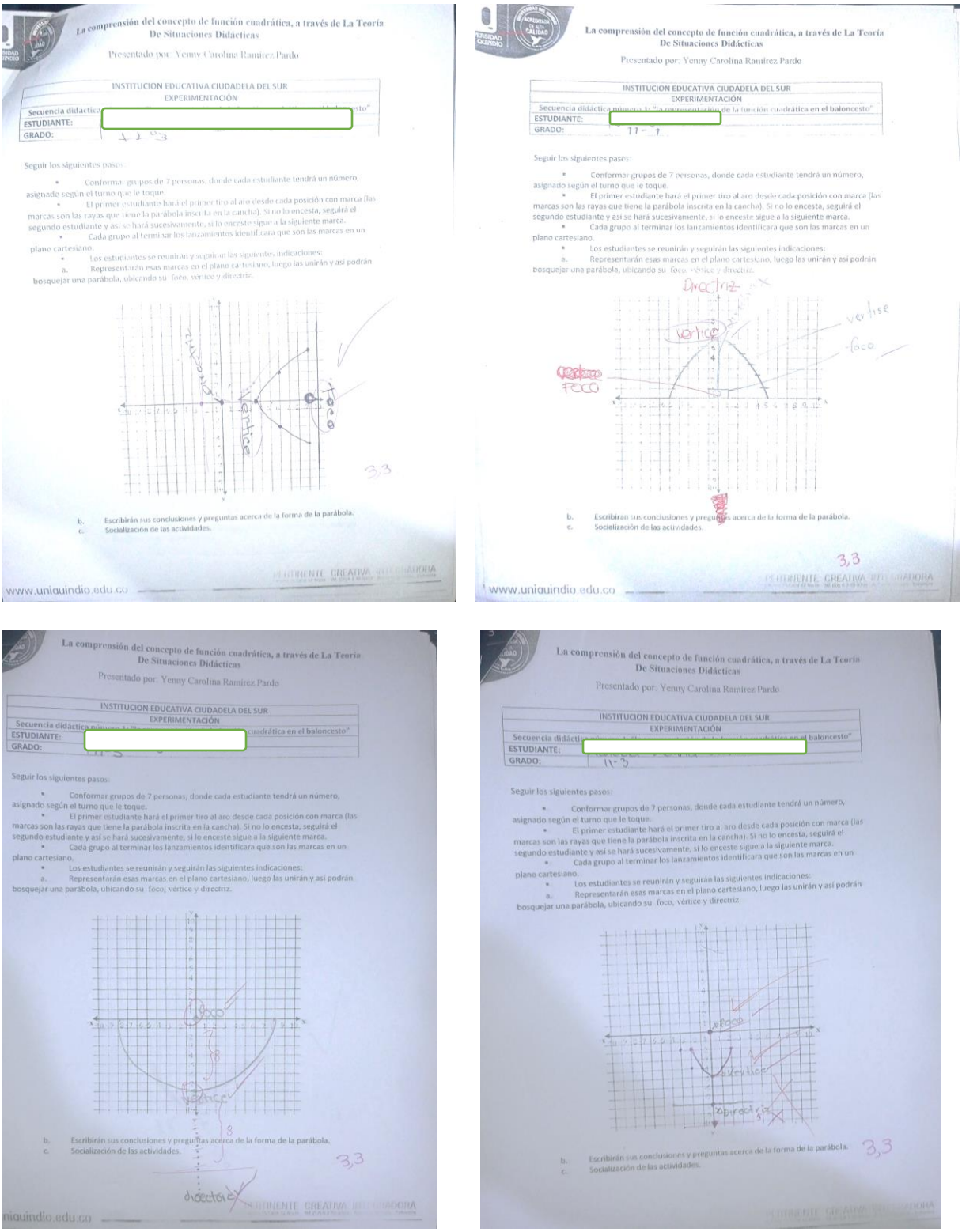
***Fuente: creación propia.***

***Figura 13 Situación Acción Secuencia Didáctica # 1, segunda parte.***

***Fuente: creación propia.***

- **Situación de Formulación**

Posteriormente se les indica que conformen grupos de 6 personas, donde cada estudiante tendrá un número, asignado según el turno que le toque. El primer estudiante hará el primer tiro al aro desde cada posición con marca (las marcas son las rayas que tiene la parábola inscrita en la cancha). Si no lo encesta, seguirá el segundo estudiante y así se hará sucesivamente, si lo encesta sigue a la siguiente marca. Cada grupo al terminar los lanzamientos identificara que son las marcas en un plano cartesiano. Los estudiantes se reunirán y en una hoja cuadriculada y con un lápiz seguirán las siguientes indicaciones: Dibujarán un plano cartesiano. Representarán esas marcas en el plano cartesiano, luego las unirán y así podrán bosquejar una parábola, ubicando su foco, vértice y directriz. Escribirán sus conclusiones y preguntas acerca de la forma de la parábola.



La comprensión del concepto de función cuadrática, a través de La Teoría De Situaciones Didácticas

Presentado por: Yenny Carolina Ramirez Pardo

INSTITUCION EDUCATIVA CIUDADELA DEL SUR
EXPERIMENTACIÓN
Secuencia didáctica
ESTUDIANTE:
GRADO:

Seguir los siguientes pasos:

- Conformar grupos de 7 personas, donde cada estudiante tendrá un número, asignado según el turno que le toque.
- El primer estudiante hará el primer tiro al aro desde cada posición con marca (las marcas son las rayas que tiene la parábola inscrita en la cancha). Si no lo encesta, seguirá el segundo estudiante y así se hará sucesivamente, si lo enceste sigue a la siguiente marca.
- Cada grupo al terminar los lanzamientos identificara que son las marcas en un plano cartesiano.
- Los estudiantes se reunirán y seguirán las siguientes indicaciones:
  a. Representarán esas marcas en el plano cartesiano, luego las unirán y así podrán bosquejar una parábola, ubicando su foco, vértice y directriz.

b. Escribirán sus conclusiones y preguntas acerca de la forma de la parábola.
c. Socialización de las actividades.

www.uniquindio.edu.co

*Figura 14 Experimentación SD1 realizada por los estudiantes E15, E12, E22 Y E11*

*Fuente: creación propia.*

Con el fin de que los estudiantes lograran un aprendizaje significativo, se llevó a cabo un trabajo de campo en la cancha de baloncesto del colegio, donde interactuaron entre ellos y jugaron a la herradura , con el objetivo de identificar las partes de la parábola, (gráfica de la función cuadrática) y luego llevar a cabo un taller donde desarrollaran actividades que les permitieran reforzar los conocimientos adquiridos en clases anteriores.

- **Situación de Validación**

En esta fase cada subgrupo expone como realizaron la actividad con el fin de demostrar cuales son las partes de la parábola según la perspectiva que tenga cada estudiante en el subgrupo al cual pertenece. Y entren a debatir el concepto de la parábola y sus partes, el propósito fue validar las respuestas con los compañeros buscando la precisión en el uso de los conceptos.

En la actividad los estudiantes después de varios análisis empezaron a asociar el juego con los puntos inscritos en la cancha y que forman la parábola, pero al bosquejarlo en el papel tuvieron dificultades al ubicar las partes de la parábola porque no recordaban los conceptos de enseñanzas previas.

- **Situación de Institucionalización**

Terminada la actividad y la exposición de cada subgrupo, se pudo concluir que los estudiantes a partir de lo desarrollado en la situación de acción, identificaron la gráfica de la función cuadrática (parábola) inscrita en la cancha. Las situaciones de formulación y validación contribuyeron a que los estudiantes tuvieran elementos que le permitieran construir su propio concepto. La mayoría de los estudiantes no señalaron sus partes (Foco, Vértice y Directriz) de forma correcta, por tanto, se hizo necesario la fase de institucionalización mediante la explicación de la ubicación de las partes, la definición de función y función cuadrática.

### 12.2.2. Secuencia didáctica número 2: “Encuentra la ecuación, tabula y gráfica”

Guía entregada a los estudiantes:

| Secuencia didáctica número 2: “Encuentra la ecuación, tabula y grafica” | |
|---|---|
| **ESTUDIANTE:** | |
| **GRADO:** | |

Se seguirán los siguientes pasos:

1. Los estudiantes se deberán reorganizar en 2 subgrupos de 7 estudiantes.
2. Cada grupo armará su rompecabezas, encontrando la ecuación característica de la función cuadrática.
3. Cada estudiante dará valores aleatorios a los coeficientes a, b y c, creando así, una nueva función. Ej.: $a = 2, b = 3, c = 4, quedando\ la\ funcion\ asi: f(x) = 2x^2 + 3x + 4$

**(Cada estudiante debe asignar valores diferentes a los de sus otros compañeros de grupo)**

| $a =$ | $b =$ | $c =$ |
|---|---|---|
| $f(x) =$ | | |

4. luego tabulará en la función anterior. dando valores a “x” que oscilarán entra -4 y 4 (Harán este procedimiento por el revés de esta hoja) escribirán el resultado en esta tabla:

| $x$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | |

5. Por último, en una hoja cuadriculada y con un lápiz seguirán las siguientes indicaciones:
   a. Dibujaran un plano cartesiano.
   b. Ubicarán los pares ordenados de la tabulación anterior en el plano cartesiano, luego las unirán con un trazo suave y así podrán bosquejar la parábola.
   c. Socialización de las actividades.

***Figura 15 Secuencia didáctica 2***
***Fuente: creación propia.***

- **Situación de Acción**

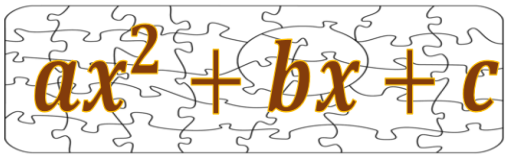
En esta fase el estudiante reconoce la ecuación característica de la función cuadrática, propiciando la construcción del conocimiento a partir de diversas actividades. Para esto se entrega a cada subgrupo de estudiantes un rompecabezas con el fin de que la descubran y analicen su forma, la identifiquen y puedan utilizarla dando valores aleatorios a los coeficientes creando así diferentes funciones cuadráticas.

***Figura 16 Situación Acción Secuencia Didáctica # 2***

***Fuente: creación propia.***

- **Situación de Formulación**

Luego de formar el rompecabezas y encontrar la ecuación característica como se ve a continuación:




Cada estudiante asigno valores aleatorios a los coeficientes a, b y c, creando una nueva función. Luego tabularon en la función creada dando valores a “x” entre -4 y 4 y escribieron los resultados en la siguiente tabla:

| $x$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | |

Por último, en un plano cartesiano, ubicaron los pares ordenados de la tabulación anterior uniendo sus puntos con un trazo suave para bosquejar la parábola y se socializaron las actividades.

- **Situación de Validación**

En esta fase cada subgrupo expone como realizaron la actividad, primero contando la experiencia de armar el rompecabezas, luego escribiendo en el tablero la ecuación que crearon a partir de darle valores a los coeficientes a, b y c, después muestran la forma en que dándole valores a “x” pudieron hallar puntos en el plano cartesiano que les permitieron bosquejar su gráfica, algunos grupos tuvieron fallas en encontrar el valor de “y” para los pares ordenados de las coordenadas de los puntos pero hicieron su mayor esfuerzo, se ayudaron entre todos los compañeros de los subgrupos y lograron hacer sus gráficas.

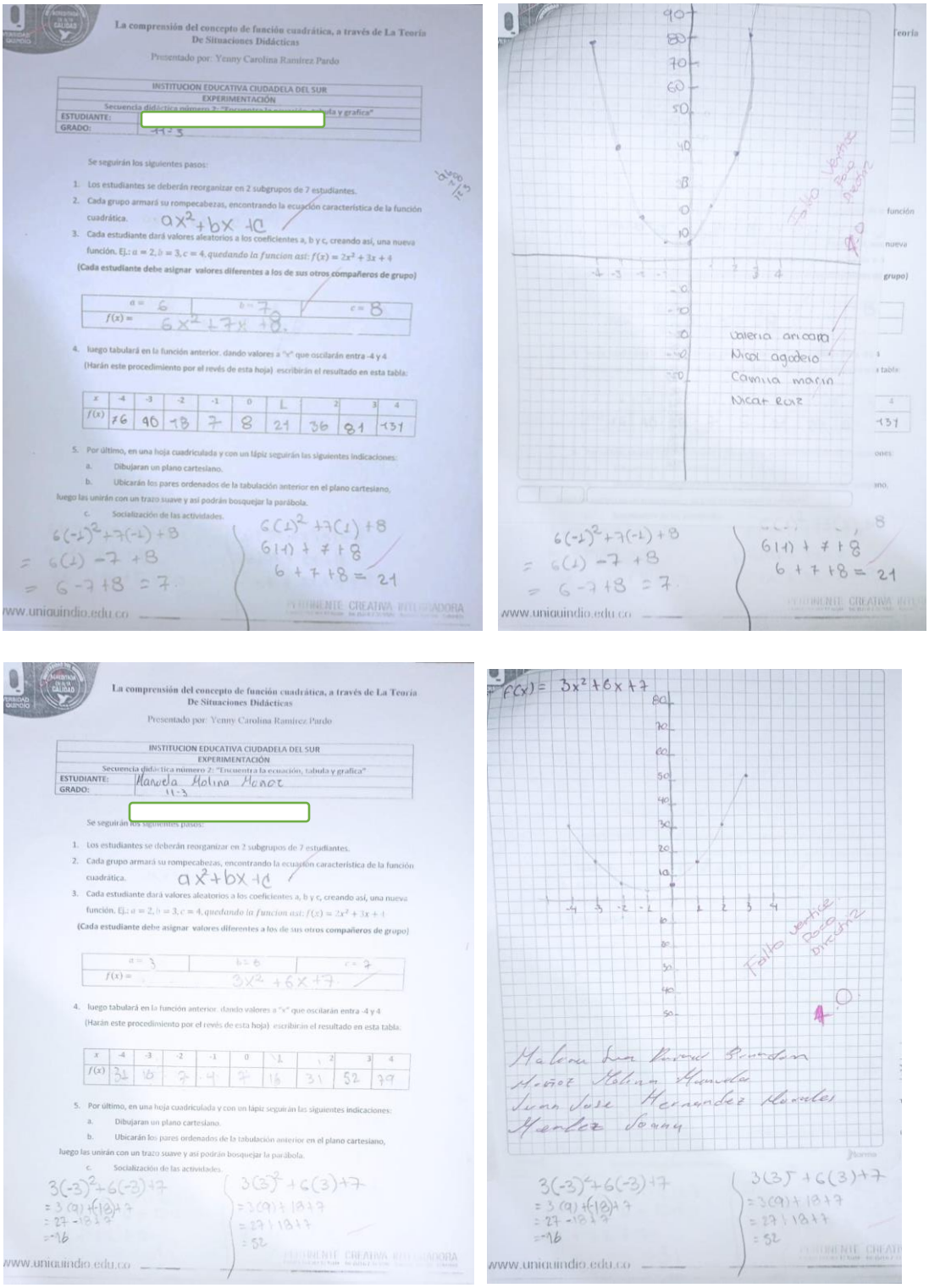
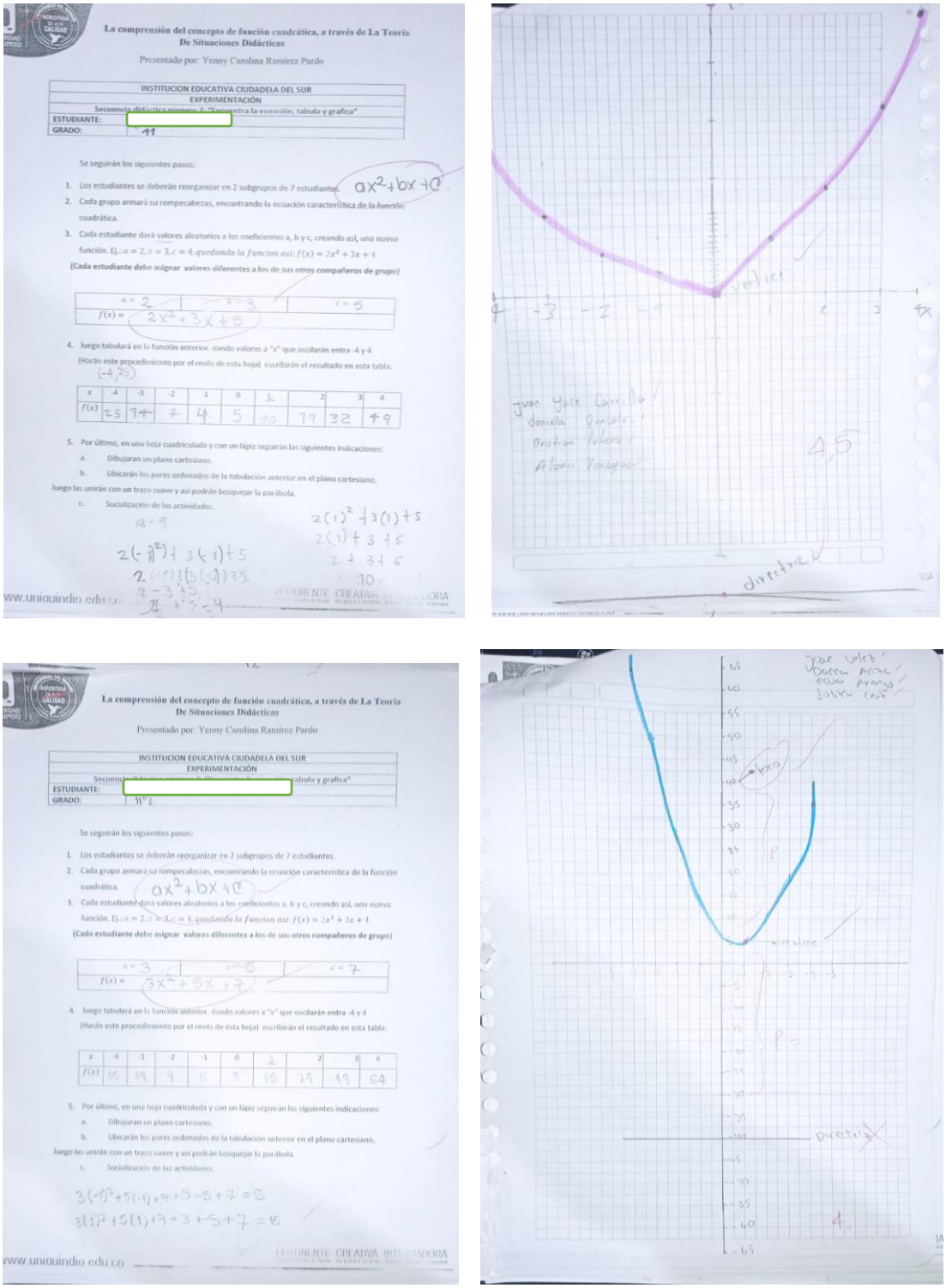



*Figura 17* *Experimentación SD2 realizada por los estudiantes E2 y E12.*

*Fuente: creación propia.*



La comprensión del concepto de función cuadrática, a través de La Teoría De Situaciones Didácticas

Presentado por: Yenny Carolina Ramírez Pardo

INSTITUCION EDUCATIVA CIUDADELA DEL SUR
EXPERIMENTACIÓN
Secuencia didáctica número 2: "Encuentra la ecuación, tabula y grafica"
ESTUDIANTE:
GRADO: 11

Se seguirán los siguientes pasos:

1. Los estudiantes se deberán reorganizar en 2 subgrupos de 7 estudiantes.
2. Cada grupo armará su rompecabezas, encontrando la ecuación característica de la función cuadrática. $ax^2+bx+c$
3. Cada estudiante dará valores aleatorios a los coeficientes a, b y c, creando así, una nueva función. Ej.: $a = 2, b = 3, c = 4$, *quedando la funcion así:* $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$

(Cada estudiante debe asignar valores diferentes a los de sus otros compañeros de grupo)

| a = 2 | b = 3 | c = 5 |
|---|---|---|
| f(x) = $2x^2+3x+5$ | | |

4. luego tabulará en la función anterior, dando valores a "x" que oscilarán entra -4 y 4 (Harán este procedimiento por el revés de esta hoja) escribirán el resultado en esta tabla:

| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 25 | 14 | 7 | 4 | 5 | 10 | 19 | 32 | 49 |

5. Por último, en una hoja cuadriculada y con un lápiz seguirán las siguientes indicaciones:
   a. Dibujaran un plano cartesiano.
   b. Ubicarán los pares ordenados de la tabulación anterior en el plano cartesiano, luego las unirán con un trazo suave y así podrán bosquejar la parábola.
   c. Socialización de las actividades.

www.uniquindio.edu.co



La comprensión del concepto de función cuadrática, a través de La Teoría De Situaciones Didácticas

Presentado por: Yenny Carolina Ramírez Pardo

INSTITUCION EDUCATIVA CIUDADELA DEL SUR
EXPERIMENTACIÓN
ESTUDIANTE:
GRADO: 11°

Se seguirán los siguientes pasos:

1. Los estudiantes se deberán reorganizar en 2 subgrupos de 7 estudiantes.
2. Cada grupo armará su rompecabezas, encontrando la ecuación característica de la función cuadrática. $ax^2+bx+c$
3. Cada estudiante dará valores aleatorios a los coeficientes a, b y c, creando así, una nueva función. Ej.: $a = 2, b = 3, c = 4$, *quedando la funcion así:* $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$

(Cada estudiante debe asignar valores diferentes a los de sus otros compañeros de grupo)

| a = 3 | b = 5 | c = 7 |
|---|---|---|
| f(x) = $3x^2+5x+7$ | | |

4. luego tabulará en la función anterior, dando valores a "x" que oscilarán entra -4 y 4 (Harán este procedimiento por el revés de esta hoja) escribirán el resultado en esta tabla:

| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 35 | 19 | 9 | 5 | 7 | 15 | 29 | 49 | 64 |

5. Por último, en una hoja cuadriculada y con un lápiz seguirán las siguientes indicaciones:
   a. Dibujaran un plano cartesiano.
   b. Ubicarán los pares ordenados de la tabulación anterior en el plano cartesiano, luego las unirán con un trazo suave y así podrán bosquejar la parábola.
   c. Socialización de las actividades.

www.uniquindio.edu.co



*Figura 18* *Experimentación SD2 realizada por los estudiantes E1 y E5.*

*Figura 19* *Fuente: creación propia.*

Lo anterior son algunos de los procesos realizados por los estudiantes donde cabe notar que les causo dificultad encontrar los pares ordenados para ubicarlos en el plano cartesiano y poder bosquejar la gráfica, fue una colaboracion de todo el subgrupo y entre todos pudieron llegar a bosquejarla, se divirtieron y se ayudaron todos.

- **Situación de Institucionalización**

Terminada la actividad y la exposición de cada subgrupo, se pudo concluir que los estudiantes a partir de lo desarrollado en la situación de acción y formulación identificaron la ecuación característica de la función cuadrática, y aunque tuvieron dificultades en la tabulación y en el bosquejo de la parábola, en la situación de validación y en la situación de institucionalización lo corrigieron siendo acompañados por el profesor.

### 12.2.3. Secuencia didáctica número 3: "la representación de cada forma canónica de la función cuadrática":

| INSTITUCION EDUCATIVA CIUDADELA DEL SUR | |
|---|---|
| EXPERIMENTACIÓN | |
| Secuencia didáctica número 3: "la representación de cada forma canónica de la función cuadrática" | |
| ESTUDIANTE: | |
| GRADO: | |

Cada estudiante tendrá una tarjeta con una de las 4 formas canónicas de la función cuadrática.

Se seguirán los siguientes pasos:

a. cada estudiante que asigne valores a las variables p, h, k de la forma canónica de la función cuadrática correspondiente y graficarla.

| |
|---|
| $recuerda: para\ graficar\ una\ función\ cuadratica\ deben\ saber\ 3\ cosas:$ <br> $hacia\ donde\ abre,\ \ v(h,k) = coordenadas\ del\ vértice$ y $valor\ de\ p, donde\ p\ es\ la\ distancia\ del\ vertice\ al\ foco$ |

b. El tablero se dividirá en 4 y en cada columna se escribirá una de las 4 formas canónicas de la función cuadrática, luego se hará debajo de cada función un plano cartesiano y se escogerá al azar 4 estudiantes para que las grafiquen en el tablero y así entre todos los estudiantes encontrarán la diferencia de cada una, escribiéndolas en su cuaderno.

c. Socializar.

***Figura 20 Secuencia didáctica 3***
***Fuente: creación propia.***

- **Situación de Acción**

En esta fase el estudiante reconoce las 4 formas canónicas de la función cuadrática. Para esto se dividirán en 4 grupos y a cada grupo se le entrego una tarjeta donde encontraron una de 4 formas

de dicha función. Esto con el fin de que identificaran a profundidad una de esas formas y pudieran exponerlo a los otros 3 subgrupos.

***Figura 21 Situación Acción Secuencia Didáctica # 3***

***Fuente: creación propia.***

- **Situación de Formulación**

Luego de que cada uno de los subgrupos tenga su tarjeta.

Grupo 1: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Grupo 2: $(x-h)^2 = -4p(y-k)$

Grupo 3: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Grupo 4: $(y-k)^2 = -4p(x-h)$

Asignaron valores a las variables p, h, k de la forma canónica de la función cuadrática que les correspondió y la graficaron. Cada grupo encontró la forma en que se comporta su gráfica y la socializaron entre todos los participantes de su grupo.

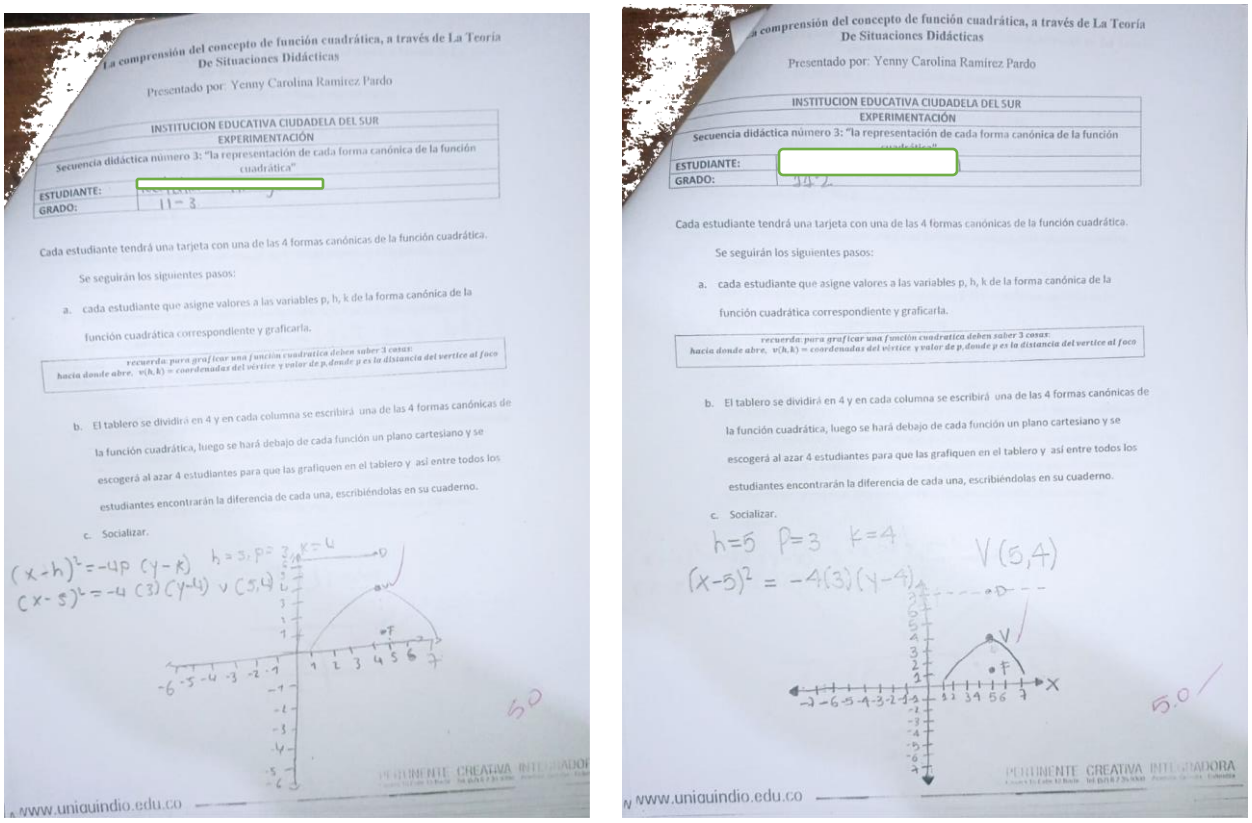
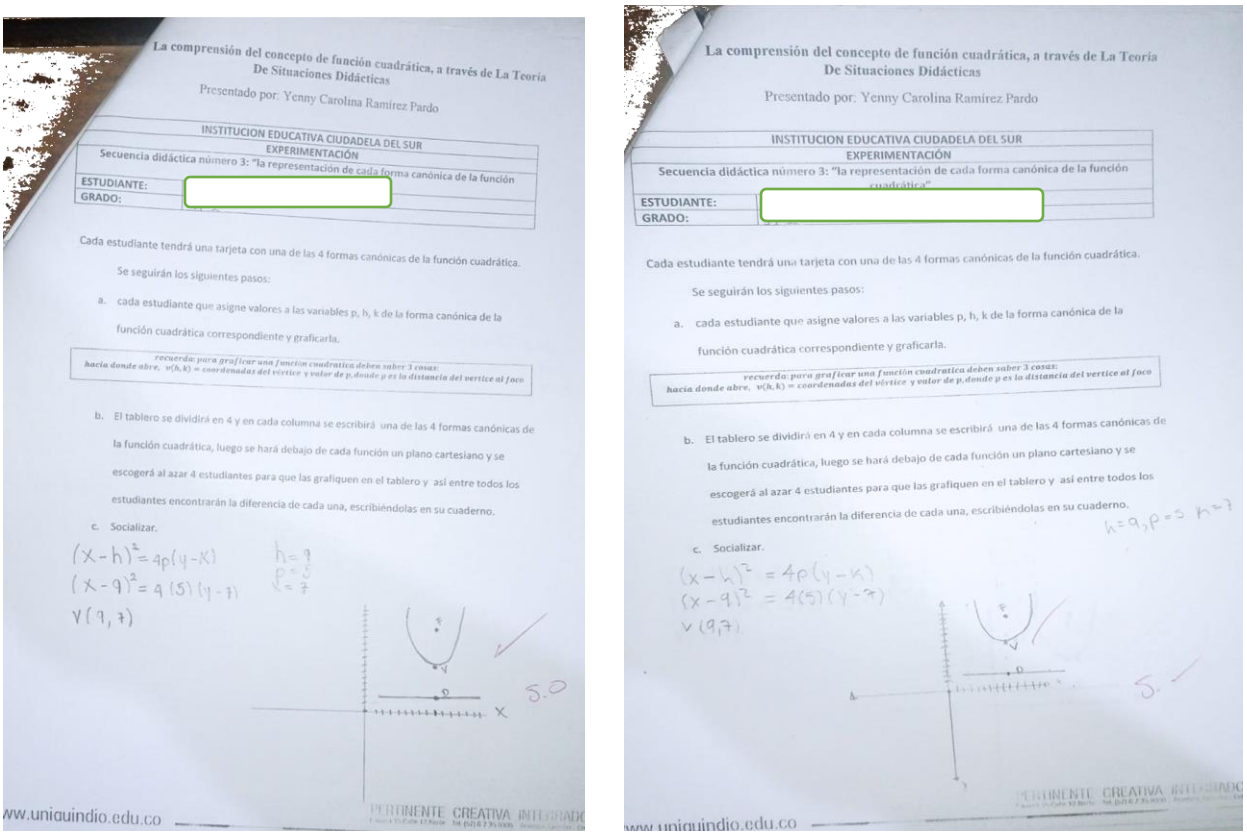



***Figura 22 Experimentación SD3 realizada por los estudiantes E9 y E7.***

***Fuente: creación propia.***



La comprensión del concepto de función cuadrática, a través de La Teoría De Situaciones Didácticas

Presentado por: Yenny Carolina Ramírez Pardo

INSTITUCION EDUCATIVA CIUDADELA DEL SUR
EXPERIMENTACIÓN
Secuencia didáctica número 3: "la representación de cada forma canónica de la función cuadrática"
ESTUDIANTE:
GRADO:

Cada estudiante tendrá una tarjeta con una de las 4 formas canónicas de la función cuadrática.

Se seguirán los siguientes pasos:

a. cada estudiante que asigne valores a las variables p, h, k de la forma canónica de la función cuadrática correspondiente y graficarla.

*recuerda: para graficar una función cuadratica deben saber 3 cosas:*
*hacia donde abre, v(h, k) = coordenadas del vértice y valor de p, donde p es la distancia del vertice al foco*

b. El tablero se dividirá en 4 y en cada columna se escribirá una de las 4 formas canónicas de la función cuadrática, luego se hará debajo de cada función un plano cartesiano y se escogerá al azar 4 estudiantes para que las grafiquen en el tablero y así entre todos los estudiantes encontrarán la diferencia de cada una, escribiéndolas en su cuaderno.

c. Socializar.

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$
$(x-9)^2 = 4(5)(y-7)$
$V(9,7)$

$h=9$
$p=5$
$k=7$

5.0

www.uniquindio.edu.co PERTINENTE CREATIVA INTEGRADO

La comprensión del concepto de función cuadrática, a través de La Teoría De Situaciones Didácticas

Presentado por: Yenny Carolina Ramírez Pardo

INSTITUCION EDUCATIVA CIUDADELA DEL SUR
EXPERIMENTACIÓN
Secuencia didáctica número 3: "la representación de cada forma canónica de la función cuadrática"
ESTUDIANTE:
GRADO:

Cada estudiante tendrá una tarjeta con una de las 4 formas canónicas de la función cuadrática.

Se seguirán los siguientes pasos:

a. cada estudiante que asigne valores a las variables p, h, k de la forma canónica de la función cuadrática correspondiente y graficarla.

*recuerda: para graficar una función cuadratica deben saber 3 cosas:*
*hacia donde abre, v(h, k) = coordenadas del vértice y valor de p, donde p es la distancia del vertice al foco*

b. El tablero se dividirá en 4 y en cada columna se escribirá una de las 4 formas canónicas de la función cuadrática, luego se hará debajo de cada función un plano cartesiano y se escogerá al azar 4 estudiantes para que las grafiquen en el tablero y así entre todos los estudiantes encontrarán la diferencia de cada una, escribiéndolas en su cuaderno.

$h=9, p=5, k=7$

c. Socializar.

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$
$(x-9)^2 = 4(5)(y-7)$
$V(9,7)$

5.

www.uniquindio.edu.co PERTINENTE CREATIVA INTEGRADO

***Figura 23 Experimentación SD3 realizada por los estudiantes E16 y E4.***
***Fuente: creación propia.***

Lo anterior son algunos de los procesos realizados por los estudiantes, donde se puede ver que les fue facil analizar las diferentes formas en que se comportaban las graficas y ubicaron acertivamente los puntos establecidos, puesto que en la clase anterior recordaron entre todos como se ubicaban los puntos en el plano cartesiano.

- **Situación de Validación**

El tablero se dividió en 4 y en cada parte se escribió una de las 4 formas canónicas de la función cuadrática, luego se hizo debajo de cada función un plano cartesiano y se escogió un estudiante por grupo para que las graficara en el tablero y expusiera su forma asignada, cada uno de los

estudiantes fue saliendo y explicándole a sus demás compañeros como la habían graficado, aunque la mayoría de ellos son muy tímidos, lograron hacer la exposición y se les entendía el proceso que llevaban. Con el fin de que entre todos los estudiantes encontraran las diferencias de cada una, y las pudieran definir escribiéndolas en su cuaderno.

***Figura 24 Situación de Validación Secuencia Didáctica # 3***

***Fuente: creación propia.***

- **Situación de Institucionalización**

Terminada la actividad y la exposición de cada subgrupo, se pudo concluir que los estudiantes a partir de lo desarrollado en la situación de acción y formulación, identificaron las 4 formas canónicas de la función cuadrática y con la ayuda del profesor en la situación de validación e institucionalización afianzaron más su conocimiento.

### 12.2.4. Secuencia didáctica número 4: “qué es y donde se ubica”:

| INSTITUCION EDUCATIVA CIUDADELA DEL SUR | |
|---|---|
| EXPERIMENTACIÓN | |
| Secuencia didáctica número 4: “qué es y donde se ubica” | |
| ESTUDIANTE: | |
| GRADO: | |

1. Los estudiantes se deberán reorganizar en los grupos que tenían la secuencia didáctica número 1.
2. Cada grupo entregará la definición de:

   Foco

   Vértice

   Directriz

   Lado recto

   Sin utilizar celular y solo lo que crean que es.
3. El profesor les dará la definición real y verán si estaban o no acordes con lo que realmente era.
4. En la función cuadrática $(y+5)^2 = -12(x-1)$ ubicaran Foco, Vértice, Directriz y Lado recto.
5. Por último, la docente la graficara en el tablero y entre todo el grupo se socializará.

***Figura 25 Secuencia didáctica 4***
***Fuente: creación propia.***

- **Situación de Acción**

En esta fase los estudiantes se reorganizaron en los subgrupos de la primera secuencia didáctica, para que de acuerdo con esa secuencia pudieran dar definiciones de Foco, Vértice, Directriz y

Lado recto sin utilizar celular y solo describiéndolo conforme a sus conocimientos previos, generando un debate entre ellos.

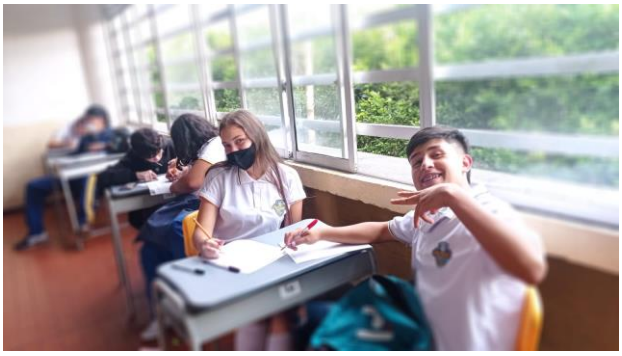


***Figura 26 Situación Acción Secuencia Didáctica # 4***

***Fuente: creación propia.***

- **Situación de Formulación**

En la función cuadrática $(y+5)^2 = -12(x-1)$ graficaron ubicando Foco, Vértice, Directriz y Lado recto según las definiciones que cada grupo concluyó.

Luego escribieron sus observaciones y preguntas acerca de la forma de la gráfica de esta función.

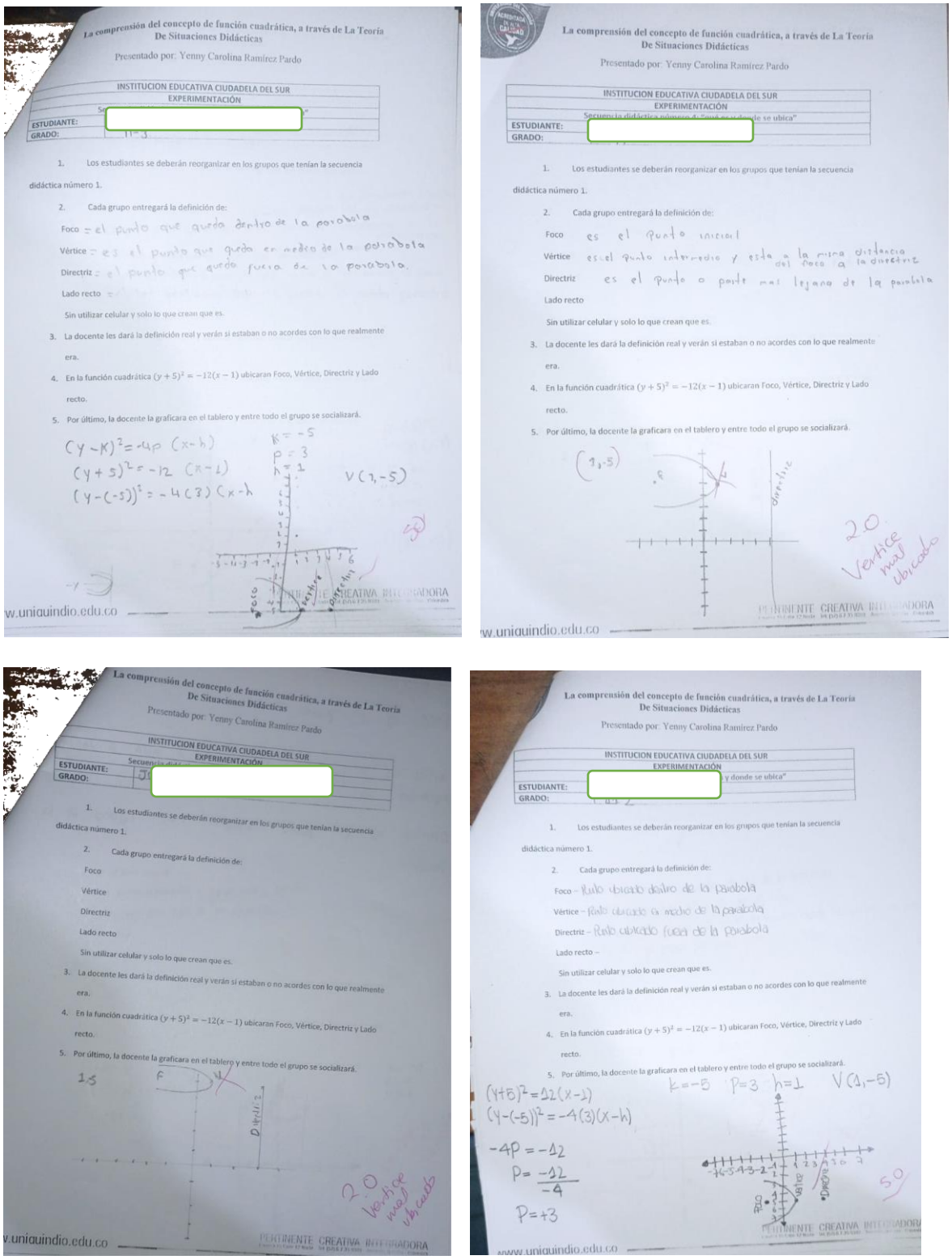



*Figura 27 Experimentación SD4 realizada por los estudiantes E9, E1, E17 y E 7.*

*Fuente: creación propia.*

Lo anterior son algunos de los procesos realizados por los estudiantes donde fue muy interesante ver como estructuraban entre cada subgrupo la definición de todas palabras que estaban en la guia y verlos debatir si era o no la definición correcta, luego ver la reacción de algunos al enterarse que si estaban en lo cierto cuando se dio la definicion correcta, fue emocionante. Posteriormente ubicaron los puntos sugeridos, aunque a algunos les causó dificultad hacerlo correctamente.

- **Situación de Validación**

En esta fase cada subgrupo expone sus definiciones y ubican el foco, la directriz y el lado recto en la función cuadrática dada de la forma que se hizo en la situación de formulación con el fin de mostrarles a los otros subgrupos y sustentar lo que ellos consideren que está bien hecho. Luego de que cada subgrupo exponga, entre todos debatirán cual es el grupo que acertó en su gráfica y definición.

- **Situación de Institucionalización**

Posteriormente el profesor dará la definición real de foco, directriz y lado recto, y grafica de forma asertiva, para que los estudiantes vean si estaban o no acordes con lo que realmente era.

### 12.2.5. Secuencia didáctica número 5: “práctica”

| INSTITUCION EDUCATIVA CIUDADELA DEL SUR | |
|---|---|
| EXPERIMENTACIÓN | |
| Secuencia didáctica número 5: “práctica” | |
| ESTUDIANTE: | |
| GRADO: | |

TALLER PROPUESTO:

1. Identifica cuales de las siguientes expresiones corresponde a una función cuadrática.

   a. $y = x^2+4x+8$ b. $f(x) = x+4$ c. $y = 4x^3+7x$

   d. $y = 8x+4x^4$ e. $f(x) = 6x^2$ f. $y = 4x+6$

2. hallar foco, vértice, directriz, valor de p y graficar

   a. $(x-1)^2 = 10y$
   b. $(y-3)^2 = 8(x+2)$

3. Socializar.

***Figura 28 Secuencia didáctica 5***
***Fuente: creación propia.***

- **Situación de Acción**

En esta fase el estudiante debe recordar lo visto en las secuencias anteriores, con el fin de poder desarrollar un taller propuesto y así reconocer que falencias y fortalezas ha obtenido mediante este proceso de aprendizaje.

*Figura 29 Situación Acción Secuencia Didáctica # 5*

*Fuente: creación propia.*

- **Situación de Formulación**

En esta situación luego de la entrega de la guía, los estudiantes dispusieron de media hora para desarrollar el taller, podían hacerse preguntas entre ellos, pero sin dar la respuesta concreta a las formuladas en el taller. Fue una situación muy tranquila.

**TALLER PROPUESTO:**

1. Identifica cuales de las siguientes expresiones corresponde a una función cuadrática.

   a. $y = x^2+4x+8$ b. $f(x) = x+4$ c. $y = 4x^3+7x$

   d. $y = 8x+4x^4$ e. $f(x) = 6x^2$ f. $y = 4x + 6$

2. hallar foco, vértice, directriz, valor de p y graficar

   a. $(x-1)^2 = 10y$

   b. $(y-3)^2 = 8(x+2)$

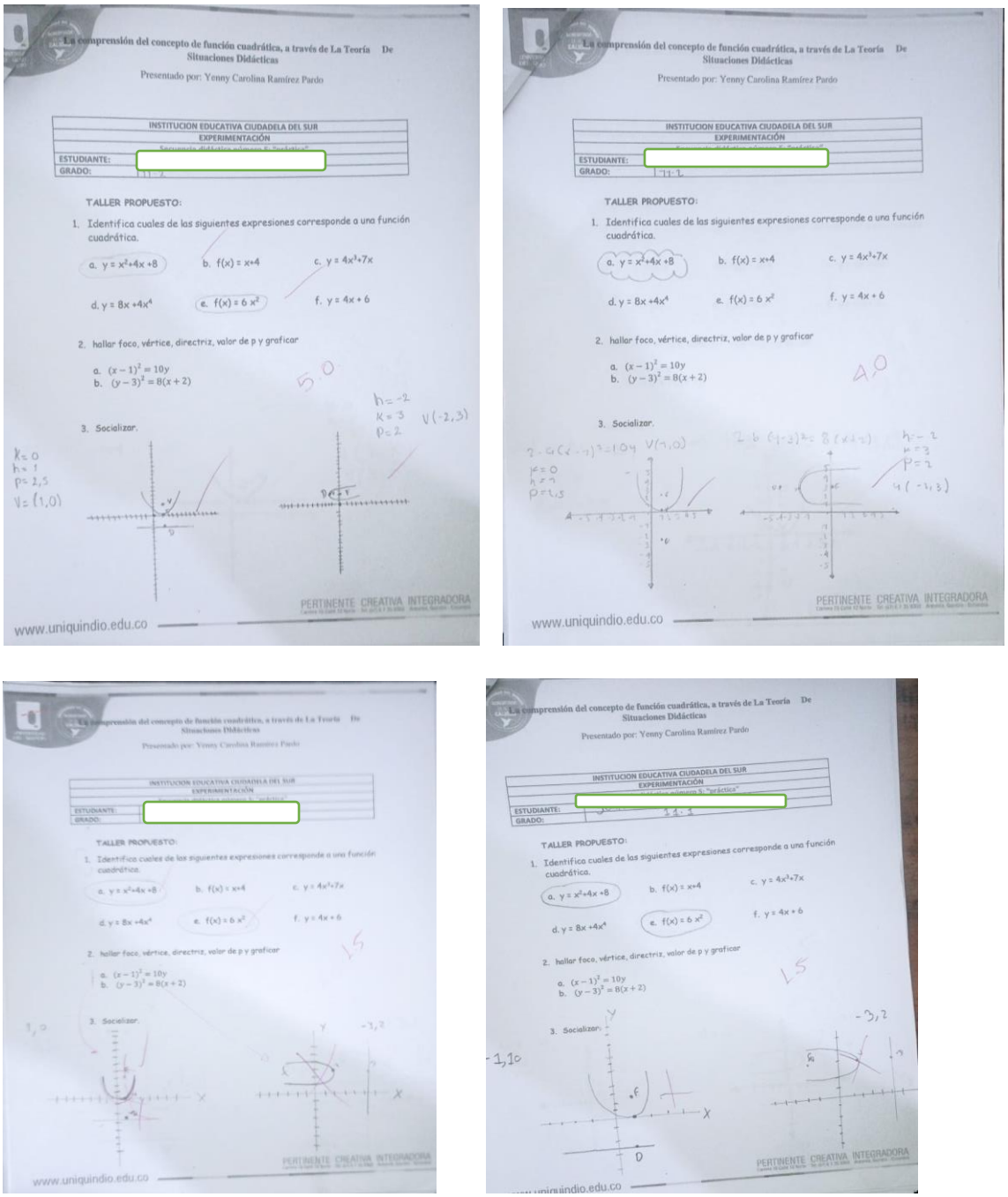



***Figura 30 Experimentación SD5 realizada por 4 estudiantes.***

***Fuente: creación propia.***

Lo anterior son algunos de los procesos realizados por los estudiantes donde visualizamos que la mayoría de ellos pudieron identificar las expresiones correspondientes a una función

cuadrática, les causó dificultad graficar y ubicar los puntos correspondientes a foco, vértice, y directriz, aun sabiendo su definición. Sin nombrar el valor de “p” puesto que la gran mayoría se les olvido qué era y para qué servía.

- **Situación de Validación**

En esta fase cada estudiante expuso a la profesora el desarrollo de su taller, defendiendo sus respuestas y dando a conocer el porqué de ellas, recibiendo una devolución de la profesora y así juntos poder ver las falencias que se habían tenido.

- **Situación de Institucionalización**

Terminada la actividad y la exposición de cada estudiante, el profesor resolvió en el tablero el taller propuesto y explicó paso a paso el procedimiento para los estudiantes puedan ver en que fallaron y corregir estas falencias.

***Figura 31 Situación de Institucionalización Secuencia Didáctica # 5***

***Fuente: creación propia.***

### 12.2.6. Análisis a Posteriori y Evaluación.

Finalmente se realizó un taller evaluativo donde se analizó lo aprendido durante este proceso.

**La comprensión del concepto de función cuadrática, a través de La Teoría De Situaciones Didácticas**

Presentado por: Yenny Carolina Ramírez Pardo

| INSTITUCION EDUCATIVA CIUDADELA DEL SUR | |
|---|---|
| ANALISIS A POSTERIORI | |
| Secuencia didáctica número 6: taller evaluativo | |
| ESTUDIANTE: | |
| GRADO: | |

TALLER EVALUATIVO

1. Cuál de estas ecuaciones es una de las 4 formas canónicas de la función cuadrática.
   a. $y^2 + 3 = x - 2$
   b. $(x + h)^2 = 5y + 3$
   c. $(x - h)^2 = 4p(y - k)$
   d. $x^2 + 2x + y + h + k = 0$
2. Cuáles son las coordenadas de el vértice de una función cuadrática:
   a. $v(h, k)$
   b. $v(k, h)$
   c. $v(p, k)$
   d. $v(h, p)$
3. determinar si las siguientes funciones son cuadráticas:
   a. $y = 2x^2 + 3x + 1$
   b. $y = x^2 + 1$
   c. $y = 10x + 1$
   d. $y = x(x^2 - 1)$
   e. $y = (x - 1)^2$
4. hallar foco, vértice, directriz, valor de p y graficar
   a. $(y + 5)^2 = -12(x - 1)$
   b. $(x - 3)^2 = 8(y + 2)$

***Figura 32 Análisis A Posteriori, taller evaluativo.***

***Fuente: creación propia.***

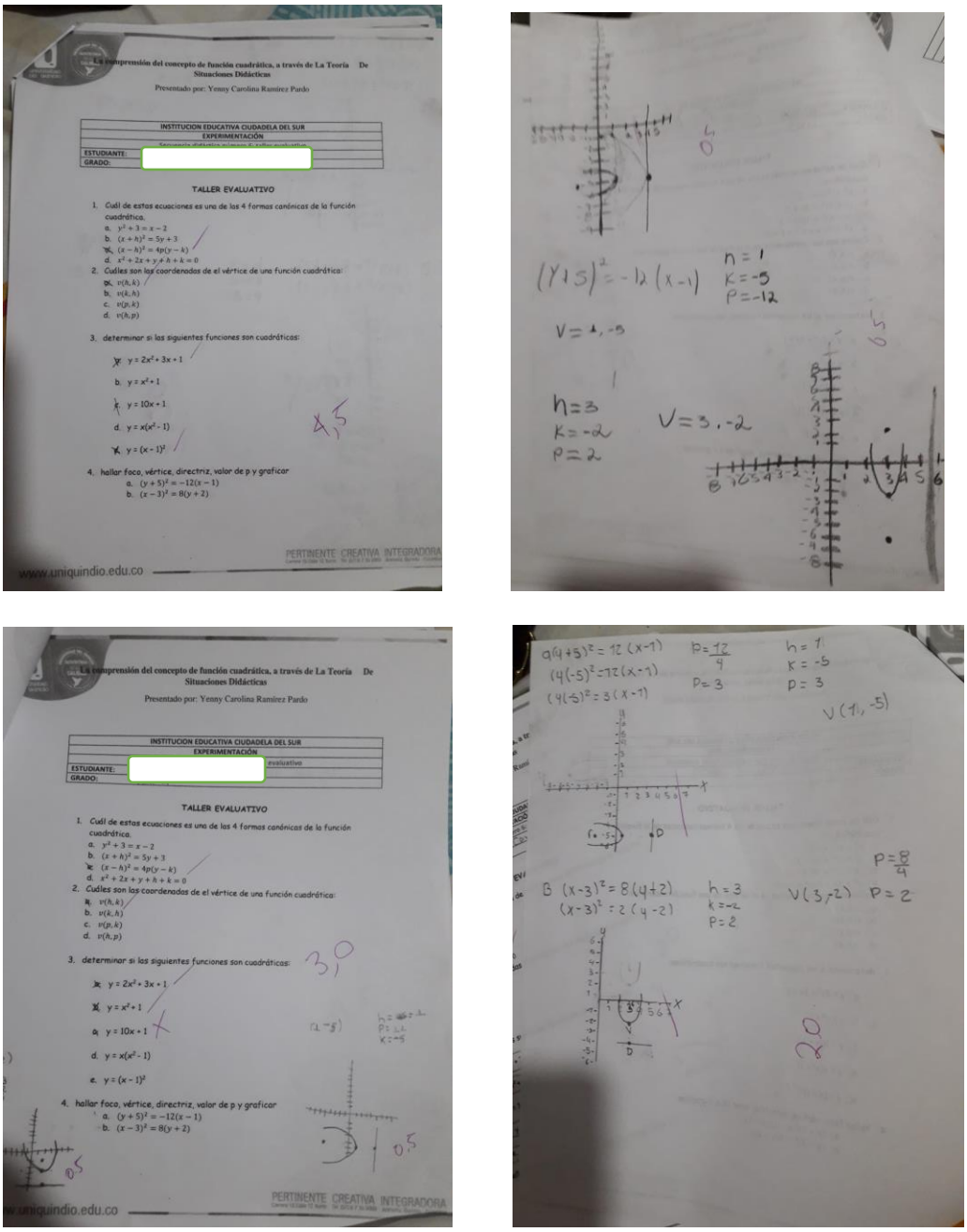



*Figura 33 Análisis A Posteriori, taller evaluativo SD6.*

*Fuente: creación propia.*

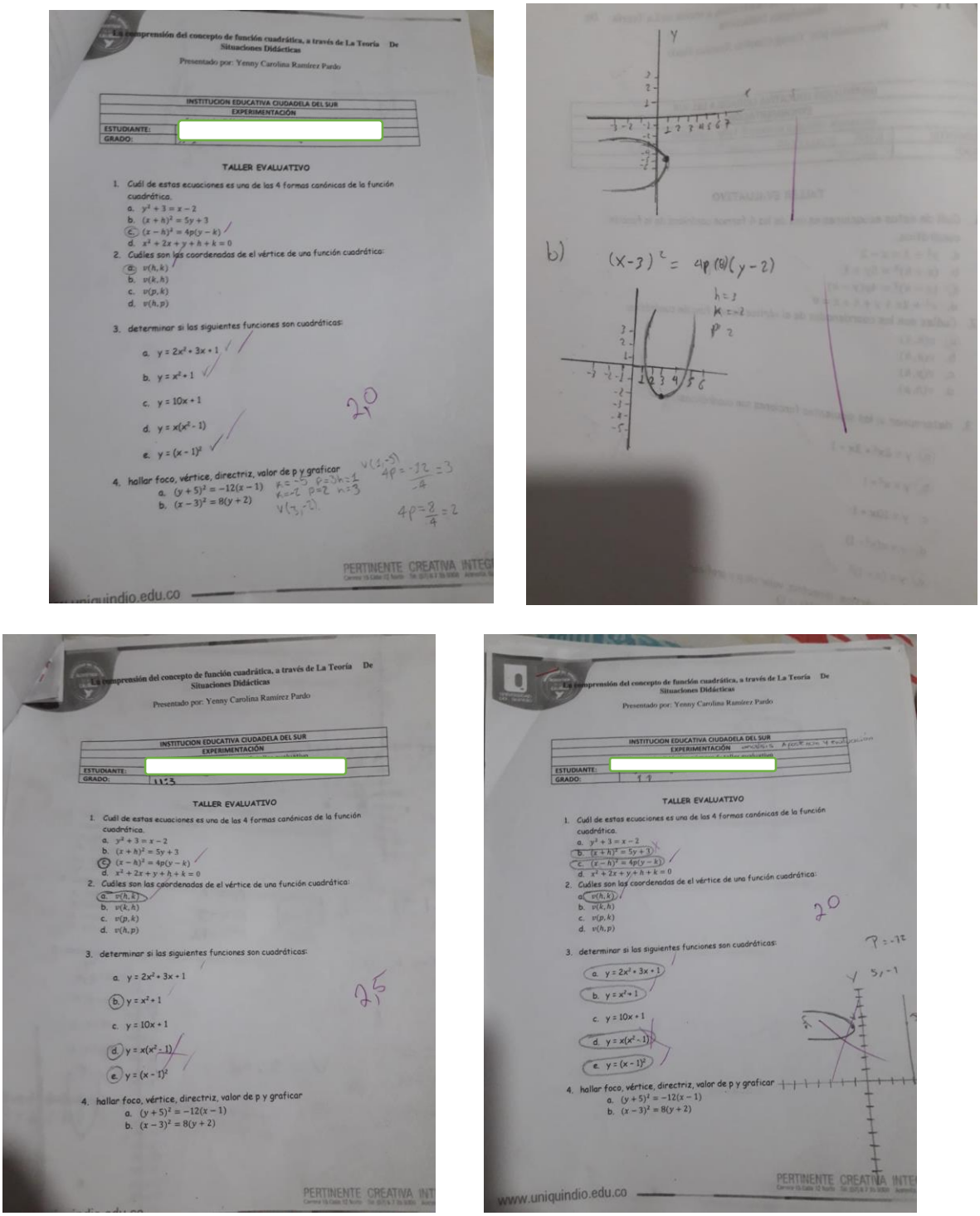



*Figura 34 Análisis A Posteriori, taller evaluativo SD6, parte 2.*

*Fuente: creación propia.*

Este taller evaluativo se hizo con el propósito de analizar el avance que tuvieron los estudiantes después de todo el proceso de aplicación de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau y se evaluó para hacer una comparación con las notas obtenidas en el análisis a priori y así determinar las conclusiones que arroja esta investigación.

En la primera pregunta se cuestionó acerca de las formas canónicas de la función cuadrática donde solo 2 estudiantes no pudieron responder con veracidad, ya que no les quedó claro dicho concepto, en la segunda pregunta se pretendía conocer que tan seguros estaban los estudiantes de la ubicación del vértice y si sabían cuáles eran sus coordenadas, lo cual solo les causó dificultad a 2 estudiantes, en la tercera pregunta se indaga sobre la forma y estructura de una función cuadrática cualquiera, determinando si es o no una función cuadrática, donde 13 de los estudiantes respondieron a la perfección, 9 tuvieron dificultad al responderla y 2 no la respondieron. Por último, en la cuarta pregunta se buscaba que los estudiantes hallaran el foco, vértice, directriz, valor de p y graficaran la respectiva parábola a partir de una función cuadrática, donde 11 estudiantes tuvieron la oportunidad de hacerlo sin ningún problema, otros 11 estudiantes les causó dificultad encontrar el foco, vértice, valor de p y por ende graficar, aun sabiendo sus definiciones.

A continuación, veremos las calificaciones obtenidas en el análisis a posteriori.

**NOTAS ANALISIS A POSTERIORI**

*Tabla 8 Notas análisis A Posteriori*

| | Pregunta 1 | Pregunta 2 | Pregunta 3 | Pregunta 4 |
|---|---|---|---|---|
| Estudiante 1 | Aceptable | Bueno | Insuficiente | Insuficiente |
| Estudiante 2 | Aceptable | Bueno | Bueno | Bueno |
| Estudiante 3 | Aceptable | Bueno | Bueno | Bueno |
| Estudiante 4 | Aceptable | Aceptable | Aceptable | Aceptable |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Estudiante 5 | Insuficiente | Bueno | Aceptable | Bueno |
| Estudiante 6 | Insuficiente | Insuficiente | Aceptable | Aceptable |
| Estudiante 7 | Aceptable | Bueno | Aceptable | Aceptable |
| Estudiante 8 | Aceptable | Aceptable | Aceptable | Aceptable |
| Estudiante 9 | Bueno | Bueno | Bueno | Aceptable |
| Estudiante 10 | Aceptable | Aceptable | Aceptable | Bueno |
| Estudiante 11 | Bueno | Bueno | Aceptable | Aceptable |
| Estudiante 12 | Bueno | Bueno | Aceptable | Bueno |
| Estudiante 13 | Bueno | Bueno | Bueno | Insuficiente |
| Estudiante 14 | Bueno | Bueno | Bueno | Bueno |
| Estudiante 15 | Bueno | Aceptable | Bueno | Aceptable |
| Estudiante 16 | Bueno | Aceptable | Bueno | Aceptable |
| Estudiante 17 | Bueno | Aceptable | Bueno | Aceptable |
| Estudiante 18 | Bueno | Aceptable | Insuficiente | Bueno |
| Estudiante 19 | Bueno | Bueno | Bueno | Bueno |
| Estudiante 20 | Bueno | Bueno | Bueno | Aceptable |
| Estudiante 21 | Bueno | Bueno | Bueno | Bueno |
| Estudiante 22 | Bueno | Aceptable | Aceptable | Bueno |
| Estudiante 23 | Bueno | Bueno | Bueno | Aceptable |
| Estudiante 24 | Bueno | Insuficiente | Bueno | Bueno |

A partir de los resultados dados en el análisis a posteriori se aduce que se logró promover la comprensión del concepto de función cuadrática en estudiantes de grado once de la Institución Educativa Ciudadela del Sur de Armenia, mediante la implementación de situaciones didácticas desde los planteamientos de Brousseau.

## ESTADÍSTICA DE HABILIDADES DE LAS SECUENCIAS DIDÁCTICAS:

Para comprender la investigación anterior y demostrar los objetivos cumplidos, se organizó la información en un esquema estadístico que permita comprender mejor lo trabajado con los estudiantes, en las que se tiene en cuenta cada una de las situaciones didácticas de Brousseau ejecutadas y cada uno de las habilidades desarrolladas por los estudiantes con respecto a la función cuadrática y su grafica (La Parábola).

*Tabla 9 Esquema estadístico de habilidades desarrolladas por los estudiantes.*

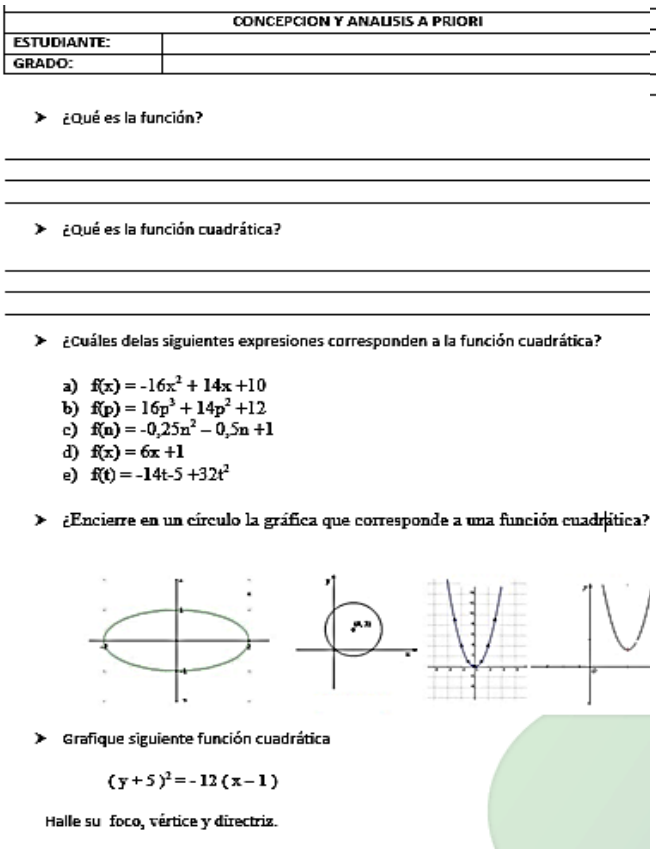
| HABILIDADES | SITUACIÓN | ESTUDIANTES QUE APROBARON | % ESTUDIANTES QUE APROBARON |
|---|---|---|---|
| El estudiante reconoce los conceptos básicos de la función cuadrática por medio de un entorno didáctico en una cancha de baloncesto | SD1: La representación de la función cuadrática en el baloncesto | 17 | 73% |
| El estudiante identifica la ecuación característica de la función cuadrática por medio de un rompecabezas | SD2: Encuentra la ecuación, tabula y grafica | 18 | 77% |
| El estudiante reconoce las 4 formas canónicas de la función cuadrática | SD3: La representación de cada forma canónica de la función cuadrática | 18 | 77% |
| El estudiante dará define que es Foco, Vértice, Directriz y Lado Recto a partir los conocimientos adquiridos en cursos anteriores | SD4: Qué es y Donde se ubica | 5 | 19.2% |
| El estudiante aplica lo aprendido durante las secuencias didácticas | SD5: Práctica | 21 | 88.4% |

| | | | |
|---|---|---|---|
| en un taller evaluativo | | | |

*Fuente: creación propia*

## 13. CONFRONTACIÓN DE ANÁLISIS A PRIORI CON ANÁLISIS A POSTERIORI

Para realizar una confrontación debemos tener en cuenta los dos talleres realizados a los estudiantes de grado 11 de la institución educativa ciudadela del sur.



| CONCEPCION Y ANALISIS A PRIORI | |
|---|---|
| ESTUDIANTE: | |
| GRADO: | |

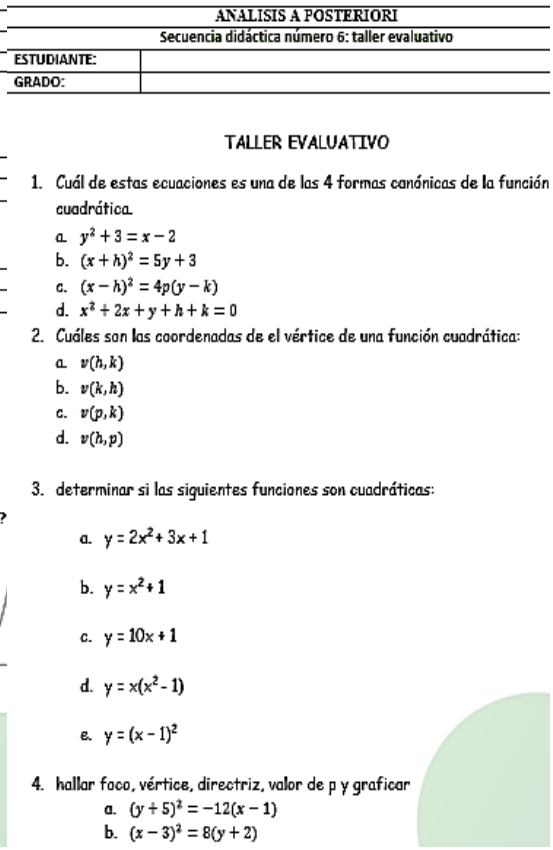
- ¿Qué es la función?
- ¿Qué es la función cuadrática?
- ¿Cuáles delas siguientes expresiones corresponden a la función cuadrática?

a) $f(x) = -16x^2 + 14x + 10$
b) $f(p) = 16p^3 + 14p^2 + 12$
c) $f(n) = -0{,}25n^2 - 0{,}5n + 1$
d) $f(x) = 6x + 1$
e) $f(t) = -14t - 5 + 32t^2$

- ¿Encierre en un círculo la gráfica que corresponde a una función cuadrática?
- Grafique siguiente función cuadrática

$(y+5)^2 = -12(x-1)$

Halle su foco, vértice y directriz.



| ANALISIS A POSTERIORI | |
|---|---|
| Secuencia didáctica número 6: taller evaluativo | |
| ESTUDIANTE: | |
| GRADO: | |

TALLER EVALUATIVO

1. Cuál de estas ecuaciones es una de las 4 formas canónicas de la función cuadrática.
   a. $y^2 + 3 = x - 2$
   b. $(x+h)^2 = 5y + 3$
   c. $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
   d. $x^2 + 2x + y + h + k = 0$
2. Cuáles son las coordenadas de el vértice de una función cuadrática:
   a. $v(h,k)$
   b. $v(k,h)$
   c. $v(p,k)$
   d. $v(h,p)$
3. determinar si las siguientes funciones son cuadráticas:
   a. $y = 2x^2 + 3x + 1$
   b. $y = x^2 + 1$
   c. $y = 10x + 1$
   d. $y = x(x^2 - 1)$
   e. $y = (x-1)^2$
4. hallar foco, vértice, directriz, valor de p y graficar
   a. $(y+5)^2 = -12(x-1)$
   b. $(x-3)^2 = 8(y+2)$

El primer talles es el a priori y otro el a posteriori, la pregunta tres en ambas son muy parecidas, por lo tanto, se pueden confrontar esas respuestas, así como la quinta del a priori y la cuarta del a posteriori, en cuanto a la pregunta uno y dos del a priori son los conceptos básicos y

definiciones, por lo tanto, si los estudiantes lo tienen claro también deberían saber cuáles son las coordenadas del vértice de una función cuadrática, por lo que se confrontaron las preguntas uno y dos del a priori con la dos del a posteriori y la cuarta del a priori se confrontara con la uno del a posteriori así :

| **ESTUDIANTE** | **PREGUNTA 1**<br>**A PRIORI** | **PREGUNTA 2**<br>**A PRIORI** | **PREGUNTA 2**<br>**A POSTERIORI** |
|---|---|---|---|
| **Estudiantes 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 14, 21 y 23** | El estudiante le es difícil dar el concepto claro y correcto de función. | No expresa con claridad la definición de función cuadrática. | **El cambio es positivo ya que reconoce las coordenadas del vértice de una función cuadrática y por lo tanto su definición.** |
| **Estudiantes 6 y 24** | El estudiante le es difícil dar el concepto claro y correcto de función | No expresa con claridad la definición de función cuadrática. | **No hubo cambio. No reconoce las coordenadas del vértice de una función cuadrática y por lo tanto su definición.** |
| **Estudiantes 8, 10, 15, 18 y 22** | El estudiante le es difícil dar el concepto claro y correcto de función | No expresa con claridad la definición de función cuadrática. | **El cambio es positivo ya que intenta reconocer las coordenadas del vértice de una función cuadrática y por lo tanto su definición.** |
| **Estudiantes 11, 13, 19 y 20** | El estudiante le es difícil dar el concepto claro y correcto de función | Intenta expresar la definición correcta de función cuadrática. | **El cambio es positivo ya que reconoce las coordenadas del vértice de una función cuadrática y por lo tanto su definición.** |
| **Estudiantes 16 y 17** | El estudiante le es difícil dar el concepto claro y correcto de función | Intenta expresar la definición correcta de función cuadrática. | **El cambio es positivo ya que intenta reconocer las coordenadas del vértice de una función cuadrática y por lo tanto su definición.** |

Se puede observar que el cambio de análisis a priori al análisis a posteriori, es significativamente alto, ya que la mayor parte de los estudiantes en el análisis a priori no reconocía, ni sabía la definición de función, así como de función cuadrática; en cambio en el análisis a posteriori solo 2 de los 24 estudiantes no reconoció las coordenadas del vértice de una función cuadrática y por lo tanto su definición.

| **Estudiantes** | **Pregunta 3**<br>**A priori** | **Pregunta 3**<br>**A posteriori** |
|---|---|---|
| **Estudiantes 1 y 18** | No identifica las expresiones correspondientes a una función cuadrática | No hubo cambio. No identifica las expresiones correspondientes a una función cuadrática |

| | | |
|---|---|---|
| **Estudiantes 2, 4 y 17** | No identifica las expresiones correspondientes a una función cuadrática | Cambio positivo, Identifica las expresiones correspondientes a una función cuadrática |
| **Estudiantes 3, 9, 13, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 23 y 24** | Intenta Identificar las expresiones correspondientes a una función cuadrática | Cambio positivo, Identifica las expresiones correspondientes a una función cuadrática |
| **Estudiantes 5, 7, 8, 10, 11 y 22** | Intenta Identificar las expresiones correspondientes a una función cuadrática | Cambio positivo, Intenta Identificar las expresiones correspondientes a una función cuadrática |
| **Estudiantes 6 y 12** | No identifica las expresiones correspondientes a una función cuadrática | Cambio positivo, Intenta Identificar las expresiones correspondientes a una función cuadrática |

Cabe resaltar que menos del 10% de los estudiantes no tuvo un cambio significativo, ya que se pudo evidenciar que continuaron fallando en los mismos conceptos, a diferencias del 90% restante de estudiantes, en los cuales se presentó cambio positivo, ya que en el análisis a posteriori reconocen e identifican las expresiones correspondientes a una función cuadrática.

| **Estudiantes** | **Pregunta 4**<br>**Análisis a priori** | Pregunta 1<br>Análisis a posteriori |
|---|---|---|
| **Estudiante 1, 2, 3, 7, 8** | En algunas ocasiones identifica cual es la parábola. | Intenta identificar las formas canónicas y la gráfica de la función cuadrática |
| **Estudiante 4, 10** | Identifica la forma que debe tener la gráfica de función cuadrática (parábola) | Intenta identificar las formas canónicas y la gráfica de la función cuadrática |
| **Estudiante 5, 6** | En algunas ocasiones identifica cual es la parábola. | No identifica las formas canónicas y la gráfica de la función cuadrática |
| **Estudiante 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 19, 21 y 24** | En algunas ocasiones identifica cual es la parábola. | Identifica las formas canónicas y la gráfica de la función cuadrática |
| **Estudiante 15** | Identifica la forma que debe tener la gráfica de función cuadrática (parábola) | Identifica las formas canónicas y la gráfica de la función cuadrática |
| **Estudiante 18, 20,22 y 23** | No identifica la forma que debe tener la gráfica de función cuadrática (parábola) | Identifica las formas canónicas y la gráfica de la función cuadrática |

Tomando en cuenta la confrontación anterior, se concluye que hay un cambio en el aprendizaje de los estudiantes, pero este cambio es sutil. Los resultados arrojados muestran que los conceptos adquiridos reforzaron los conocimientos previos sin avances significativos.

| **Estudiantes** | **Pregunta 5** | Pregunta 4 |
|---|---|---|

| | **Análisis a priori** | Análisis a posteriori |
|---|---|---|
| **Estudiante 1 , 13,** | No grafica correctamente la función cuadrática y no intenta hacerlo. | No sabe graficar correctamente una función cuadrática ubicando Foco, Vértice, Directriz y Lado Recto. |
| **Estudiante 2, 3, 5, 10, 12, 18, 19, 21, 22 y 24.** | No grafica correctamente la función cuadrática y no intenta hacerlo. | Grafica correctamente una función cuadrática ubicando Foco, Vértice, Directriz y Lado Recto |
| **Estudiante 4, 6, 7, 8, 9, 11, 15, 16, 17, 20 y 23** | No grafica correctamente la función cuadrática y no intenta hacerlo. | Intenta graficar correctamente una función cuadrática ubicando Foco, Vértice, Directriz y Lado Recto |

Podemos evidenciar la mejora que tuvieron los estudiantes respecto a cómo realizar la gráfica de la función cuadrática, la disposición que tuvieron para aprender y saber cuál era la ubicación del foco, vértice, directriz y lado recto.

Luego de confrontar el análisis a priori con el análisis a posteriori llegamos a las siguientes conclusiones.

## 14. CONCLUSIONES

Como profesores de matemáticas, es importante tener en cuenta que nuestra misión es enseñar esta área de tal forma que los estudiantes puedan comprender con mayor facilidad cada una de los temas en su formación académica, utilizando estrategias y herramientas didácticas que les ayuden a entender, comprender y aplicar las matemáticas en su cotidianidad, y no generar un trauma en ellos donde no le tomen importancia y se les dificulte el proceso de aprendizaje. Es así como lo indica Artigue, que nos señala que la ingeniería didáctica es un método de investigación en el cual se realiza la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza en cualquier área de la educación.

En este proyecto se pudo identificar que los estudiantes presentaban apatía a este tema, dado que en años anteriores el aprendizaje no se les impartió de manera didáctica para ayudarlos a entender la función cuadrática.

A su vez, con la comparación de las notas obtenidas en el análisis A priori y A posteriori, podemos concluir que el 88% de los estudiantes de grado once de la Institución Educativa Ciudadela del Sur, lograron emplear las herramientas dadas y los saberes que se construyeron a partir de estas secuencias didácticas y en global con esta investigación tuvieron una mayor comprensión del concepto de función cuadrática a partir de esta experiencia de las situaciones didácticas de Brousseau. Puesto que se asimilo con mayor claridad la definición de función cuadrática, sus partes y formas de graficarla, además de su ecuación característica y las 4 formas canónicas, esta investigación ha demostrado que el poner en escena la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau ayuda que enseñanza de las matemáticas sea más dinámica y fácil de comprender en el tema de función cuadrática. A su vez, el interés por las matemáticas fue de mayor importancia para los estudiantes dado que la predisposición de la mayoría de ellos fue positiva.

El análisis a priori demostró que los estudiantes tenían una laguna en su proceso de aprendizaje sobre función y función cuadrática y su desarrollo. De igual manera el proceso de graficación permitió deducir que la metodología de aprendizaje implementada en el colegio no conlleva a alcanzar las metas de conocimiento proyectadas.

A su vez, al terminar el análisis a posteriori, se puede evidenciar que un 90% de los estudiantes con los que se trabajó, presentaron un alto nivel de aprendizaje, manifestando su satisfacción con la metodología y de cómo esta ayuda a comprender de forma más ágil la temática.

También se pudo concluir que los estudiantes ponen un mayor interés en los contenidos cuando se realizan algunas actividades fuera del aula de clase, permitiéndoles desenvolverse en un entorno más tranquilo y dinámico, donde manifestaron que fue más fácil comprender el tema asimilando en este caso la parábola con la figura presentada en la cancha de baloncesto, identificando el Foco, el Vértice, Directriz y Lado Recto. Es importante tener en cuenta que el uso de estas herramientas permite que los estudiantes puedan tener una mejor experiencia en el aprendizaje de las matemáticas, principalmente con la función cuadrática.

Además, la experiencia adquirida en este grupo objeto de investigación podrá ser utilizada en otros entornos, dado que es una estrategia que puede ser aplicada en diferentes instituciones en el nivel nacional puesto que los estudiantes de grado once de la Institución Educativa Ciudadela del Sur, mejoraron también su nivel de comprensión y los índices de resultados en las pruebas saber once.

Finalmente se puede concluir que se promovió la comprensión del concepto de función cuadrática en estudiantes de grado once de la Institución Educativa Ciudadela del Sur de Armenia, mediante la implementación de situaciones didácticas desde los planteamientos de Brousseau.

## 15. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Ruffin, P. (s.f.). *DivulgaMAT*. Obtenido de https://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/Ruffini2.asp.htm

Alzina Bisquerra, R. (2009). Metodología De La Investigación Educativa. En *Metodología De La Investigación Educativa* (pág. 458). Madrid: LA MARULLA.

Amestoy de Sánchez, M. (mayo de 2002). La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades de pensamiento. *Revista electrónica de investigación educativa*. Obtenido de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1607-40412002000100010

Andonegui, M. (2004). El desarrollo del pensamiento lógico. Caracas, Venezuela.

Aprendemos de Todo. (29 de Abril de 2020). RESUMEN DE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS. *RESUMEN DE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS- Guy Brousseau*. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=3omOLC1gkWI

autores, V. (s.f.). *Los caminos del saber.* Santillana.

Blasco Mira, J. E., & Pérez Turpín, J. A. (2007). *METODOLOGÍAS DE INVESTIGACIÓN EN LASCIENCIAS DE LA ACTIVIDAD FÍSICA Y EL DEPORTE: AMPLIANDO HORIZONTES.* Obtenido de https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/12270/1/blasco.pdf

Brosseau, G. (2000). *EDUCACIÓN Y DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS* (Vol. 12). Recuperado el 2021

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y metodos de la didactica de las matematica.* Buenos Aires.

Brucker, J. (s.f.). *timetoast*. Obtenido de https://www.timetoast.com/timelines/61705#:~:text=Leonhard%20Euler,en%20particular%20de%20funci%C3%B3n%20cuadr%C3%A1tica.

Clayton, R. (s.f.). *pdfcoffee*. Obtenido de https://pdfcoffee.com/la-funcion-cuadratica-y-la-de-fenomenos-fisicos-utilizando-herramientas-tecnologicas-como-instrumentos-de-mediacion-pdf-free.html

Concepto. (15 de julio de 2021). (E. Etecé, Editor) Obtenido de https://concepto.de/ley-de-gravitacion-universal/#ixzz7Tkl2B27j

*Conecta matemáticas.* (s.f.). SM.

De Faria Campos, E. (2006). INGENIERÍA DIDÁCTICA. *CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA*. Obtenido de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/6887/6573/

Descartes, R. (s.f.). *LA GEOMETRIA.*

Doria Rodríguez, S. Z. (23 de 07 de 2018). Análisis de una situación didáctica para la enseñanza del valor absoluto en alumnos de educación secundaria. Perú: Pontificia Universidad Católica del perú. Obtenido de https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/12337

Ferrándiz, C., Bermejo, R., Sainz, M., Ferrando, M., & Prieto, M. (208). Estudio del razonamiento lógico-matemático desde el modelo de las inteligencias múltiples. *anales de psiocologia*, 11.

geometriaanalitica.info. (s.f.). *www.geometriaanalitica.info.* Obtenido de www.geometriaanalitica.info: https://www.geometriaanalitica.info/parabola-matematicas-definicion-ecuacion-ejemplos-ejercicios-resueltos-elementos/

Godino, J. D. (2010). *Perspectiva De La Didáctica De Las Matemáticas Como Disciplina Tecnocientífica.* Madrid.

Godino, J., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., & Wilhelmi, M. (2014). INGENIERÍA DIDÁCTICA BASADA EN EL ENFOQUE. 38.

Gutiérrez Banda, L. D. (8 de junio de 2018). Trayectoria hipotética de aprendizaje: La parábola. México. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=BKq1o-_jJ4s

López Mesa, J. H. (1 de 10 de 2013). Análisis De La Comprensión Del Concepto De Parábola En Estudiantes De Ingeniería De Sistemas De La Universidad Del Quindío, Utilizando Entornos Informáticos. *Análisis De La Comprensión Del Concepto De Parábola En Estudiantes De Ingeniería De Sistemas De La Universidad Del Quindío, Utilizando*

*Entornos Informáticos*. Armenia, Quindio, Colombia: Educación - Maestría en Ciencias de la Educación. Obtenido de https://bdigital.uniquindio.edu.co/handle/001/4421?locale-attribute=en

Mesa, Y., & Villa, J. (s.f.). *REFLEXIÓN HISTÓRICA, EPISTEMOLÓGICA Y DIDÁCTICA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN CUADRATICA.* Medellin.

Montagud Rubio, N. (sf). La teoría de situaciones didácticas: qué es y qué explica sobre la enseñanza. *La teoría de situaciones didácticas: qué es y qué explica sobre la enseñanza*. Obtenido de https://psicologiaymente.com/desarrollo/teoria-situaciones-didacticas

MORÁN ROA, A. (09 de 01 de 2018). Heidegger y la hermenéutica. *Heidegger y la hermenéutica*. (r. intempestivas, Ed.) Obtenido de https://reflexionesintempestivasblog.wordpress.com/2018/01/09/heidegger-y-la-hermeneutica/

Morris, K. (1972). *El Pensamiento Matemático.* New York, Estados Unidos.

Olmos Rojas, C., Sarmiento Rivera, D. R., & Montealegre Quintana, L. (2006). Competencia matemática modelizar:un estudio exploratorio desde la función cuadrática. Bogotá, Colombia: universidad de los Andes. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/2625/1/OlmosCompetenciaAsocolme2012.pdf

Pedreros Puente, M. (2017). Fases de la Ingeniería didáctica. *Diseños de la investigación, Didáctica de las matemáticas*. Obtenido de https://slideplayer.es/slide/10203407/

Pérez Porto, J., & Gardey, A. (2017). *Definicion.de.* Obtenido de Definicion.de: https://definicion.de/funcion-matematica/

Piaget, J. (1984). *La representación del mundo en el niño.* Madrid, España: Morata. Obtenido de https://edmorata.es/wp-content/uploads/2021/07/PIAGET.-La-representacion-del-mundo-en-el-nino_prw.pdf

Quesada, T. (s.f.). *glogster*. Obtenido de https://edu.glogster.com/glog/historia-de-la-funcion-cuadratica/23gvton68j4

Ramón, L. (abril de 2019). Teoria situaciones didacticas de guy brousseau. Obtenido de https://www.mindomo.com/es/mindmap/teoria-situaciones-didacticas-de-guy-brousseau-ba8eddc6f9c142da88d3e8ec1174a585

Revista Semana. (04 de 11 de 2016). ¿Cúales son las materias que mas pierden los estudiantes? *SEMANA*, 12. Recuperado el 07 de Octubre de 2021, de http://www.semana.com/educacion/articulo/cuales-son-las-materias-que-mas-pierden-los-estudiantes/465389

Sandin, E. (2003). nvestigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones. España: Mc Graw Hill. Obtenido de file:///C:/Users/COIN%20LUMI%20140G/Downloads/Dialnet-InvestigacionEducativaDesdeUnEnfoqueCualitativo-6521971.pdf

Turtulici, R. (2010). *Investigacion en ciencias sociales en el siglo XXI*. Obtenido de https://sites.google.com/site/investigacioncsociales/investigacion-empirico-analitica-1.

Varsity Tutors. (2007). *varsitytutors.com.* Obtenido de varsitytutors.com: https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/spanish/topics/quadratic-function

Wikipedia. (s.f.). Obtenido de https://hmong.es/wiki/Christiaan_Huygens

Zita, A. (30 de 11 de 2018). *todamateria.com.* Obtenido de https://www.todamateria.com/ecuaciones-cuadraticas-de-segundo-grado/