RECONOCIMIENTO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO DE UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE GRADO 3° DE LA EDUCACIÓN BÁSICA A PARTIR DE TAREAS SOBRE GENERALIZACIÓN DE PATRONES

MIGUEL ÁNGEL VELÁSQUEZ JIMÉNEZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
Cali, Valle del Cauca, septiembre de 2021

RECONOCIMIENTO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO DE UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE GRADO 3°DE LA EDUCACIÓN BÁSICA A PARTIR DE TAREAS SOBRE GENERALIZACIÓN DE PATRONES

MIGUEL ÁNGEL VELÁSQUEZ JIMÉNEZ

Código: 201626401

Requisito para optar el título de Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

Director:

Mg. Fabián Porras Torres

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
Cali, Valle del Cauca, septiembre de 2021

Agradecimientos

A Dios por darme una segunda oportunidad en estos tiempos tan difíciles para todos.

A mis padres por su amor y buena voluntad para conmigo.

A mi tutor, Fabian Porras, por sus sugerencias y dedicación en mi proceso de formación.

A mi profesor, Cristian Hurtado, por compartirme sus conocimientos sobre pensamiento algebraico en su momento.

A los estudiantes, que hicieron parte de esta investigación.

A Laura por su colaboración y apoyo incondicional.

Tabla de contenido

Tabla de figuras

Resumen

En este trabajo se reconocen las formas del pensamiento algebraico que manifiesta un grupo de tres estudiantes de tercer grado de la educación básica primaria de la Institución Educativa Pedro Antonio Molina de Cali, Valle del Cauca, cuando desarrolla un conjunto de tareas sobre generalización de patrones de secuencias numéricas y figurales. Para ello, se toma como referencia la propuesta teórica del pensamiento algebraico realizada por Radford (2003, 2010a, 2010b), la cual se basa en la Teoría de la Objetivación (Radford, 2014a, 2014b, 2018b), específicamente, las tres características (el sentido de indeterminancia, la analiticidad, y la designación semiótica) y las tres formas del pensamiento algebraico (factual, contextual y simbólico) tomadas desde esta perspectiva conceptual.

Los análisis de los resultados de las producciones de los estudiantes, permiten reconocer la manifestación de un pensamiento algebraico factual y contextual. En esto, los estudiantes proponen generalizaciones aritméticas, que posteriormente evolucionan a algebraicas, permitiéndoles la deducción de una fórmula que generaliza la situación propuesta en las tareas. En cuanto al desarrollo de las tareas, se hace a través de una labor conjunta entre profesor y estudiantes.

Palabras claves: formas de pensamiento algebraico, generalización de patrones, analiticidad, indeterminancia, designación semiótica.

Introducción

El presente proyecto de investigación se inscribe en la Línea de formación en Didáctica de las Matemáticas, del Programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, de la Universidad del Valle.

La problemática de estudio se enmarca en el reconocimiento del pensamiento algebraico que manifiesta un grupo de estudiantes de tercer grado de la Institución Educativa Pedro Antonio Molina ubicada en la ciudad Santiago de Cali, a través de la implementación y análisis de resultados de un conjunto de tareas relacionadas con la generalización de patrones.

La necesidad de reconocer el pensamiento algebraico en estudiantes de edades tempranas surge por el interés de conocer cómo estos estudiantes objetivan y comunican ideas matemáticas a través de los diferentes recursos semióticos, ya que existen investigaciones que coinciden en que el pensamiento algebraico se debe desarrollar en estudiantes de edades tempranas, básicamente para cubrir la transición de la aritmética al álgebra y sugerir que pensar algebraicamente no implica el uso de la simbología alfanumérica estándar del álgebra (Cai & Knuth, 2011; Callejo, García-Reche & Fernández, 2016; Carraher & Schliemann, 2007; Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014; Radford, 2003, 2010a, 2010b, 2013a; Socas, 2011; Vergel, 2014).

Para llevar a cabo este proyecto, se toma en consideración el marco conceptual de la Teoría de la Objetivación, teoría que sienta la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas como una labor conjunta entre profesores y estudiantes, además ubica la generalización de patrones como una ruta hacia el desarrollo del pensamiento algebraico temprano (Radford, 2014a, 2014b, 2018b).

Para dar cuenta de lo propuesto, el presente trabajo de investigación se estructura a partir de cinco capítulos mediante los cuales se va dando respuesta a la pregunta de investigación y a los objetivos propuestos. Estos capítulos se describen a continuación:

El primer capítulo trata sobre los aspectos generales de esta investigación, en él se exhibe la problemática que permite proponer la pregunta de investigación, así como los objetivos que direccionan el estudio a propósito de responder a la pregunta, la justificación que muestra la importancia de desarrollar este trabajo, y los antecedentes relacionados con el desarrollo del pensamiento algebraico a partir de la generalización de patrones.

En el segundo capítulo se exponen los referentes conceptuales que sustentan el desarrollo de esta investigación. En ese sentido, se hace una presentación de algunos elementos teóricos de la Teoría de la Objetivación y del Pensamiento Algebraico (Radford, 2010a, 2010b, 2014), los cuales son la base conceptual para el desarrollo de la presente investigación.

En el tercer capítulo se presenta el marco metodológico, se precisa el tipo y el diseño de la investigación, se describen y justifican las tareas propuestas, se especifica la población objeto de estudio y se describen los instrumentos y técnicas de recolección de información.

En el cuarto capítulo, se exponen los análisis de la actividad matemática y las producciones de los estudiantes al realizar las tres tareas propuestas sobre generalización de patrones numéricos y figurales, para ello se toma como referencia la teoría expuesta en el segundo capítulo.

Finalmente, en el último capítulo se exponen las conclusiones, mencionando los resultados más relevantes que dan respuesta a la pregunta de investigación, y a su vez se plantean algunas reflexiones en torno al desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros grados de educación básica primaria.

Capítulo I: Aspectos generales de la investigación

1.1. Problema de investigación

Las investigaciones asociadas al pensamiento algebraico realizadas en los últimos años en el campo de la Educación Matemática (Castro, Godino & Rivas, 2010; Kaput, 2000; Molina, 2007; Radford, 2003, 2010a, 2010b; Vergel, 2014) buscan impulsar el reconocimiento y la inclusión de formas de pensamiento algebraico desde la educación básica primaria por parte de los profesores en formación y en ejercicio a fin de desarrollar en los estudiantes una mejor comprensión y desarrollo en el aprendizaje del álgebra escolar, además permitiendo establecer continuidad en el proceso de la aritmética al álgebra.

Pese a que hay mucha investigación al respecto, estas investigaciones, por lo general, aún no impactan en las aulas de clases de los establecimientos educativos a razón de que los profesores siguen presentando resistencia a las propuestas curriculares y metodológicas relacionadas con el desarrollo del pensamiento algebraico (Zapata et al., 2018).

En ese sentido, la mayoría de países integra en sus currículos de matemáticas procesos de enseñanza asociados al desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros años de escolaridad. Sin embargo, este pensamiento suele ser abordado, a veces sin éxito, en los últimos años de la educación básica secundaria (grados 8° ó 9°) (Rojas & Vergel, 2013).

Por lo anterior, se afirma que, se sigue sosteniendo el esquema tradicional[1] de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar en los establecimientos educativos puesto que las definiciones, propiedades, procedimientos y la simbología alfanumérica se presentan abruptamente, sin previa dedicación paulatina y con sentido de procesos en relación con el desarrollo del pensamiento algebraico que permitan una comprensión significativa desde la escuela primaria, generando descontento y dificultades por parte de los profesores y estudiantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar.

[1] "Hay una gran tradición de enseñar, en las escuelas, aritmética antes que álgebra. El aprendizaje de la aritmética se produce en la educación primaria y el aprendizaje del álgebra en la educación secundaria" (Castro, 2012, p.80).

Este esquema tradicional de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar hace que no haya un desarrollo significativo sobre las formas de pensamiento algebraico que debe desarrollar un estudiante desde la escuela primaria para que posteriormente tenga una mejor comprensión y desarrollo en los procesos y objetos algebraicos.

Además, cabe decir que otro asunto problemático que sigue sosteniendo el esquema tradicional de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar son los libros de texto, ya que la mayoría de estos textos reposan la idea de pensamiento algebraico en los métodos memorísticos, los procedimientos e instrucciones, la operatividad o manipulación de fórmulas, expresiones, símbolos alfanuméricos, definiciones y tareas aisladas de contexto, sin previa presentación alguna que incite a los procesos matemáticos de los estudiantes, pese a que son figuradamente elaborados a partir de las sugerencias de los documentos de política pública[2] (Guzmán, 2013).

Continuar con este esquema tradicional es seguir sustentando el álgebra escolar como un curso en el que prima el uso de la simbología alfanumérica para atender unos contenidos conceptuales, y no como una forma reflexionar y comunicar saberes matemáticos que exige avanzar en otras formas de representación, como lo son el lenguaje natural y los gestos, hacia la emergencia de formas de pensamiento algebraico desde la escuela primaria.

En virtud de lo anterior, la generalización de patrones es considerada por muchas investigaciones (Callejo, García-Reche & Fernández, 2016; Radfor,2003, 2010b; Rojas & Vergel,2013, 2018a, 2018b; Vergel, 2014, 2015a; Zapatera, 2015) como un instrumento metodológico para promover el pensamiento algebraico. En ese sentido, Vergel (2015a) sostiene que “la generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela.” (p.194). Además, manifiesta que el

[2] Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016) no hablan explícitamente sobre pensamiento algebraico, sin embargo, la propuesta que hace el MEN desde el pensamiento variacional es coherente con la propuesta de desarrollar pensamiento algebraico temprano.

desarrollo del pensamiento algebraico y los procesos de generalización de patrones son posibles sin recurrir a la simbología alfanumérica que prima en la enseñanza tradicional del álgebra escolar.

En el caso particular de la generalización de patrones como un contexto apropiado para potencializar el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes desde los primeros años de escolaridad de la educación básica, Radford (2013b) plantea que existen dos categorías de la generalización de patrones que se manifiestan en las producciones de los estudiantes, por una parte, la generalización algebraica y, de otra parte, la generalización aritmética. Según, este autor, la generalización algebraica está basada en los siguientes principios:

> (a) la toma de conciencia de una propiedad común que se nota a partir de un trabajo en el terreno fenomenológico de observación sobre ciertos términos particulares (por ejemplo, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$), (b) la generalización de dicha propiedad a todos los términos subsecuentes de la secuencia ($p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3} \dots p_{k+n}$), y (c) la capacidad de usar esa propiedad común a fin de deducir una expresión directa que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia. (p.6)

Lo que este autor propone entonces es que el proceso de generalización de patrones reposa en tres momentos claves: la toma de conciencia de una(s) comunalidad(es) o propiedad(es) común(es), extrapolar la propiedad común a términos no dados en la secuencia y utilizar la propiedad común para determinar una regla que permita encontrar cualquier término de la secuencia.

En cuanto a la segunda categoría, la generalización aritmética, Radford (2013b) afirma que al igual que la generalización algebraica comparte solamente los dos primeros principios de ésta dejando a un lado al tercero, es decir, que el patrón o la comunalidad encontrada es utilizada solamente para calcular casos concretos (pasar de un término al otro) de la secuencia, más no es utilizada para proporcionar, deducir una fórmula u expresión que permita calcular cualquier término de la secuencia.

Debido a lo anterior, en esta investigación se pretende reconocer las formas de pensamiento algebraico que manifiesta un grupo de estudiantes de grado tercero a través de un conjunto de tareas que promuevan la generalización de patrones, con el fin de que los estudiante logren desarrollar formas de abstracción, como por ejemplo: observar un patrón de recurrencia, la toma de conciencia sobre objetos indeterminados y una forma de operar con esos objetos, esto es, la analiticidad, como también formas de expresión semiótica para designar a estos objetos que se han mencionado.

Para que estas formas de abstracción surjan en el desarrollo de las tareas elaboradas debe primar la interacción estudiante- profesor, dado que esta interacción es capital para el desarrollo del pensamiento algebraico, ya que el profesor a través de sus intervenciones debe direccionar y estimular las habilidades y representaciones incipientes de los estudiantes.

Estos elementos problemáticos que se han mencionado en este apartado son concurrentes en los establecimientos educativos de educación básica y secundaria, pues, ya sea por la planeación curricular institucional, la formación de los profesores o el libro de texto utilizado es necesario que se generen situaciones significativas en torno a este pensamiento a través de constructos teóricos y vías adecuadas para desarrollar el pensamiento algebraico, con lo cual se hace necesario identificar, describir y analizar qué hacen los estudiantes de básica primaria cuando realizan tareas sobre generalización de patrones para ir fomentando su pensamiento algebraico.

Sobre esa base, se propone indagar sobre esas formas de pensamiento algebraico que emergen en la actividad matemática de los estudiantes cuando desarrollan tareas sobre generalización de patrones, como una alternativa que genere reflexión y documentación acerca de este pensamiento.

En ese sentido, se atenderá al siguiente interrogante:

¿Cuáles son las formas de pensamiento algebraico que manifiesta un grupo de estudiantes de tercer grado de la Institución Educativa Pedro Antonio Molina cuando desarrolla tareas sobre generalización de patrones numéricos y figurales?

1.2. Antecedentes

Para la comunidad de investigadores en Educación Matemática la inclusión del álgebra de manera temprana en el currículo ha sido objeto de estudio con cierta relevancia (Cai & Knuth, 2011; Callejo, García-Reche & Fernández, 2016; Carraher & Schliemann, 2007; Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014; Radford, 2013a; Socas, 2011; Vergel, 2014), básicamente, porque ha existido un interés manifiesto por establecer continuidad en el proceso de la aritmética al álgebra, aprovechando el incipiente desarrollo de las habilidades y representaciones intuitivas que favorecen la interiorización y comprensión de las representaciones convencionales de los objetos algebraicos.

En particular, los trabajos de Radford (2003, 2010a, 2010b) sugieren que los estudiantes de educación básica primaria manifiestan tres formas de pensar algebraicamente (factual, contextual y simbólica) a partir de la generalización de patrones, como instrumento metodológico.

Este autor muestra la pertinencia del desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros años de escolaridad a partir de un estudio riguroso de los recursos semióticos que despliegan y movilizan los estudiantes, para lograr generalizaciones algebraicas de patrones (factual, contextual y simbólica).

En ese sentido, la contribución de Radford (2003) sugiere que los gestos, el discurso y los movimientos corporales como recursos semióticos juegan un papel importante para el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de edades tempranas.

De manera análoga, Vergel (2014) señala que el ritmo como recurso semiótico resulta ser constituyente de las formas de pensamiento algebraico que presenta un grupo de estudiantes de cuarto y quinto grado de educación básica primaria cuando realiza tareas de generalización de patrones.

Sin embargo, la mera identificación de los recursos semióticos que movilizan los estudiantes en la construcción de pensamiento algebraico, exige de un análisis centrado en la identificación de producciones verbales y escritas que refieren los objetos indeterminados y su carácter operatorio, así que, en el marco de esta investigación se tomarán como muestra de formas de pensamiento algebraico solamente las producciones que expresen generalizaciones algebraicas de patrones que permitan identificar posibles elementos constitutivos de pensamiento algebraico (la indeterminancia, la analiticidad y la designación semiótica), según Radford (2003, 2006a, 2010a, 2010b).

Con referencia a lo anterior, el aporte de estas investigaciones permite señalar que el estudio y el análisis de los recursos semióticos que movilizan los estudiantes al momento de desarrollar tareas en el marco de la generalización de patrones, requiere de conocimientos y de constructos teóricos en semiosis, para lograr analizar en profundidad cada discurso, acción corpórea, gesto y ritmo que se presente en la actividad matemática de los estudiantes, específicamente, con el fin de investigar sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en la educación básica primaria.

La lectura de los anteriores antecedentes contribuye a esta investigación en algunos aspectos. Primero, limitar y centrar el análisis de los resultados en la identificación y la descripción de los recursos semióticos que permitan reconocer pensamiento algebraico en un grupo estudiantes a partir de sus producciones orales y escritas; y segundo, se presenta un gran interés en la generalización de patrones como vía de aproximación al álgebra escolar.

Radford (2014b) plantea que el papel del profesor es fundamental para el buen desarrollo e implementación de las tareas, porque a través de sus intervenciones debe direccionar y estimular las habilidades y representaciones incipientes de los estudiantes.

Desde esta perspectiva, el anterior antecedente permite sugerir en esta investigación un aspecto metodológico, como lo es la técnica de observación participativa, básicamente para orientar el buen desarrollo de las tareas propuestas.

En cuanto a los diseños de las tareas que se elaboraron en esta investigación, se tomó como referencia los aportes de Casas (2005), Radford (2003, 2010a, 2013b) y Vergel (2014), que sugieren que las tareas en el contexto de la generalización de patrones deben permitirle al estudiante reconocer comunalidades, el planteamiento de conjeturas, la extrapolación a términos cercanos o no dados en la secuencia, establecer relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas, y la deducción de una regla general que permitan generalizar la situación en cuestión.

En particular, Radford (2003) y Vergel (2014) consideran sustancial que se proponga en las tareas la elaboración de un mensaje rápido que permita calcular cualquier término de la secuencia por parte de los estudiantes, porque permite el desarrollo de un tipo de pensamiento algebraico a otro.

En tal sentido, el problema del mensaje sugiere la posibilidad de que los estudiantes propongan a través del lenguaje natural una generalización que reconozca los objetos indeterminados de manera analítica.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Reconocer las formas de pensamiento algebraico que presenta un grupo de estudiantes de grado tercero de la Institución Educativa Pedro Antonio Molina, a través de la implementación y análisis de resultados de un conjunto de tareas sobre generalización de patrones.

1.3.2 Objetivos específicos

- Fundamentar los elementos conceptuales de la Teoría de la Objetivación necesarios para comprender el pensamiento algebraico, desde la perspectiva de la generalización de patrones.
- Articular los elementos conceptuales necesarios desde la perspectiva de la generalización de patrones en un conjunto de tareas que favorezca en la construcción de pensamiento algebraico.
- Identificar los recursos semióticos que subyacen en las producciones escritas y orales de los estudiantes en la construcción de pensamiento algebraico.

1.4 Justificación

En la presente investigación se pretende reconocer las formas de pensamiento algebraico (factual, contextual y simbólica) que manifiesta un grupo de estudiantes de grado tercero de la educación básica primaria, puesto que reconocer esas formas de pensamiento algebraico va a propiciar elementos conceptuales y metodológicos a los maestros en formación y en ejercicio para que éstos opten por una planeación curricular e implementación de estrategias de enseñanza relacionadas con el álgebra escolar que permitan identificar elementos que den cuenta de lo que significa pensar algebraicamente en estudiantes con edades tempranas, básicamente para cubrir la transición de la aritmética al álgebra y proveer a los estudiantes de habilidades y recursos orientados hacia un entendimiento más sofisticado sobre los objetos y procesos algebraicos.

En ese sentido, el presente proyecto espera contribuir a la formación de los docentes y ser una alternativa significativa para quienes estén interesados en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Por lo anterior, se presenta un gran interés en la generalización de patrones como vía de aproximación al álgebra escolar porque permite el planteamiento de conjeturas, establecer relaciones entre cantidades conocidas (como las constantes) y desconocidas (como las variables), la formulación de procedimientos o fórmulas que permitan generalizar la situación en cuestión. En efecto, la generalización de patrones es un proceso que permite el desarrollo del pensamiento algebraico, toda vez que sea abordado con un sentido algebraico.

Por ello, se da la escogencia de la generalización de patrones como propuesta metodológica en el diseño e implementación de las tareas propuestas para llevar a cabo la investigación.

Se puede sustentar además la importancia del presente trabajo, con el énfasis que se le da a los sistemas algebraicos y analíticos y a la generalización de patrones en los documentos de política pública, como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), que brindan orientaciones teóricas, didácticas y pedagógicas para el diseño, desarrollo y evaluación curricular de la educación fundamental a nivel nacional, regional, local e institucional en Colombia.

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) no se habla propiamente de pensamiento algebraico sino de pensamiento variacional, en el cual se indica explícitamente que los maestros desde la escuela primaria deben desarrollar tareas sobre generalización de patrones buscando colocar el acento en el estudio de la variación y el cambio. En ese sentido, el MEN (1998, 2006) está reconociendo, validando como importante este tipo de ejercicio en el cual generalizar patrones, dar cuenta de la variación y el cambio son tareas importantes a desarrollar desde los primeros años de escolaridad.

Por eso, se establece total coherencia entre la propuesta del MEN (1998, 2006) y la de reconocer pensamiento algebraico en tanto que el tipo de tareas que se vincula con la generalización de patrones permite también una aproximación significativa al álgebra escolar en la escuela primaria, tal como lo sugiere la amplia investigación en Educación Matemática en relación con el pensamiento algebraico (Véase, por ejemplo, Radford, 2003; Vergel, 2014).

Más específicamente, el MEN (1998, 2006) a través de la generalización de patrones busca colocar el acento en la variación y el cambio para desarrollar pensamiento variacional, mientras que la presente investigación a través de la generalización de patrones busca colocar el acento en las formas del pensamiento algebraico para desarrollarlo.

Para cubrir la necesidad de reconocer el pensamiento algebraico de un grupo de estudiantes de grado tercero de la educación básica, se requiere de estrategias de observación y análisis de información debidamente sustentadas en constructos teóricos adecuados. Por tanto, es pertinente optar por la Teoría de la Objetivación, la cual sienta la enseñanza y el aprendizaje de la educación en general como una labor conjunta entre profesor y estudiantes[3] (Radford, 2014a, 2014b, 2018b).

[3] "La teoría de la objetivación propone una alternativa en la cual la educación retoma una dimensión ética, histórica y cultural" (Radford, 2014b, p.34).

En el caso particular de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, esta teoría posiciona la idea de pensamiento algebraico como una forma de encontrar, conocer y comunicar saberes matemáticos que se produce a partir de la labor conjunta y que se manifiesta a través de los recursos semióticos que despliegan y movilizan los estudiantes y profesores en el desarrollo de tareas en el contexto de la generalización de patrones [4](Arzarello, 2006; Radford, 2001, 2003, 2014a,).

Por eso, el papel de la Teoría de la Objetivación en este proyecto es fundamental para alcanzar la problemática y los objetivos propuestos porque permite reflexionar e indagar sobre otras formas no convencionales de conocer y comunicar los objetos matemáticos y particularmente con estudiantes en edades tempranas.

Por último, la idea de impulsar el reconocimiento de pensamiento algebraico en estudiantes de la Educación Básica permite sembrar cimientos para futuras investigaciones en Educación Matemática, en particular desde esta perspectiva de la Teoría de la Objetivación, una teoría que "plantea el objetivo de la educación matemática como un esfuerzo político, social, histórico y cultural cuyo fin es la creación de individuos éticos y reflexivos que se posicionan de manera crítica en prácticas matemáticas constituidas histórica y culturalmente" (Radford, 2014a, pp.135-136).

[4] De acuerdo con los trabajos de Radford (2003, 2010a, 2010b, 2013a, 2013b, 2018a), la ruta por excelencia hacia la caracterización de pensamiento algebraico en el marco de la TO es la generalización de patrones.

Capítulo II: Marco teórico

En este capítulo se fundamentan algunos elementos conceptuales necesarios del referente didáctico que sustenta la investigación, esto es, la Teoría de la Objetivación de Radford (2014a, 2014b, 2018b) y el pensamiento algebraico desde la perspectiva de la generalización de patrones (Radford, 2003, 2010a, 2010b, 2013b).

Para ello, se expone brevemente el surgimiento y fundamentación de la Teoría de la Objetivación; luego se expone la idea de pensamiento algebraico desde la Teoría de la Objetivación, se presenta la ruta de aproximación al pensamiento algebraico que se tomó para el desarrollo de la investigación, esto es, la generalización de patrones y, por último, se expone el referente curricular tomado de los documentos de política pública.

2.1 Una aproximación sobre la Teoría de la Objetivación desde la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

En la década de los años noventa el profesor Luis Radford comienza a trabajar en la Teoría de la Objetivación apoyándose sobre las ideas de Vygotsky, Marx, Hegel, entre otros. Dicha teoría se ubica en una gama amplia de las líneas de investigación de los aspectos socioculturales en Educación Matemática.

Dentro de las razones que condujeron a la emergencia de la Teoría de la Objetivación se encuentran, por una parte, la pedagogía transmisionista en la cual el estudiante no tiene la oportunidad de expresarse ni de posicionarse como un sujeto que piensa y reflexiona críticamente ante el mundo que lo rodea, y, por otra, la pedagogía centrada en el estudiante, en la cual no tiene la oportunidad de encontrarse con esos saberes culturales que le prexisten.

Como una alternativa ante las pedagogías tradicionales, la Teoría de la Objetivación ve al estudiante como un sujeto político-conceptual, es decir, “la educación en general y la enseñanza y aprendizaje en particular tratan de saberes y de seres” (Radford, 2014a, p.135).

En términos más específicos, no solo el estudiante se encuentra con unos saberes para aprender sobre determinados conocimientos matemáticos, sino que a medida que objetiva dichos saberes se transforma y evoluciona para comprender como los demás sujetos en sociedad piensan y actúan sobre los objetos matemáticos.

En ese sentido, no sólo interesa que el estudiante aprenda sobre saberes matemáticos sino también se constituya en un sujeto que sea crítico, ético y reflexivo a través de un discurso que le permita comprender el entorno que lo rodea. La Teoría de la Objetivación se distingue respecto al papel de los signos como mediación en la constitución de sujetos pensantes, pensados en el marco de una historia y una cultura. Por tanto, su enfoque es semiótico-cultural.

De acuerdo con ello, la tarea de la escuela es permitir que el estudiante aprenda sobre unos conocimientos matemáticos, a saber, cuando el sujeto nace y se incorpora en la cultura ya hay unos saberes matemáticos que le preexisten a él, así, el papel de la escuela es permitirle al sujeto reconocer unos conocimientos sobre ese saber que se ha venido produciendo y consolidando en la cultura, además de ser un saber dinámico por el mismo papel de las matemáticas y de la historia, pero también posicionarse frente a ese conocimiento para poder entender el mundo y participar de él, para volverse más competente en ciertos aspectos .

Con estas ideas expuestas, Radford (2014a, 2014b, 2018b) reformula la actividad de enseñanza y aprendizaje como una "labor conjunta" entre profesor y estudiantes, dado que es en esta interacción social que emerge la producción de saberes y de seres. Desde esta perspectiva el papel del profesor es fundamental a causa de permitirle al estudiante encontrarse con unos saberes culturales e históricamente constituidos.

En cuanto a la posición ontológica y epistemológica de la Teoría de la Objetivación, el fundamento ontológico sustenta que los objetos matemáticos son un constructo social (o legado histórico-cultural) y que se llegan a compartir a través de una práctica social. Dicho de manera análoga, "los objetos matemáticos son patrones fijos de actividad reflexiva […] incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos" (Radford, 2006b, p. 111). Es por esto que la actividad matemática de los sujetos es central para generar dichos objetos.

Por otro lado, el fundamento epistemológico plantea que la forma de conocer esos objetos matemáticos es a través de un esfuerzo por "dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura" (Radford, 2006, p.113). En consecuencia, el aprendizaje de las matemáticas se comprende como "la adquisición comunitaria de una forma de reflexión del mundo guiada por modos epistémico-culturales históricamente formados" (Radford, 2006, p.124).

2.2 La labor conjunta. Este constructo teórico es central en la Teoría de la Objetivación, pues, Radford (2014a, 2014b, 2018b) expresa que tanto estudiantes como profesores se adentran en la búsqueda de un sistema de saberes que ya ha sido constituido histórica y culturalmente y, simultáneamente, están coproduciéndose a sí mismos en tanto que son subjetividades en formación, así, "profesores y estudiantes laboran en conjunto como uno solo" (Radford, 2018b, p.19).

De hecho, es en esta labor conjunta en la cual emerge la producción de saberes y de seres. Así, la labor conjunta es constituirse en comunidad a través de un esfuerzo colectivo por alcanzar un interés común, en el que se incluyen unos compromisos tanto individuales como colectivos, pero también unos repertorios de práctica y de conocimientos.

En términos de la escuela, en particular en el aula dichos sujetos se encuentran a medida que participan, se interesan unos por otros, se solidarizan, responsabilizan, aprenden, sufren, se transforman mutuamente, entre otras formas éticas de colaboración humana.

La Teoría de la Objetivación reconoce un papel ontológico y epistemológico a la categoría de la labor conjunta puesto que son los sujetos quienes a través de ésta se encuentran con unos saberes matemáticos y al mismo tiempo se transforman a través de una práctica social mediatizada por unas formas de conocer que son determinadas por las acciones y las reflexiones de los mismos, o sea, que "el ser y el saber están interrelacionados de una manera profunda en la que uno no ocurre sin el otro" (Radford, 2014a, p.136).

En términos generales, el encuentro entre el sujeto y los saberes matemáticos va a estar determinado por unas maneras de comportarse, argumentarse, representarse, además de unas reglas y unos tratamientos que han sido establecidos por el momento histórico-cultural al que pertenece el sujeto. Así, tanto estudiantes como profesores deberán hacer un esfuerzo colectivo por encontrar y comprender significativamente los saberes matemáticos que la cultura y la historia se han encargado de introducir a lo largo del tiempo.

2.3 El pensamiento algebraico desde la Teoría de la Objetivación

Considerando el enfoque semiótico-cultural que sustenta la Teoría de la Objetivación, se afirma entonces que el pensamiento algebraico es un saber que se ha venido caracterizando paulatina y progresivamente en la cultura, en el cual los sujetos se transforman y modifican su manera de pensar a medida que objetivan esas formas de pensar algebraicamente para posicionarse en el mundo. En palabras de Radford (2014c), "el saber algebraico es una síntesis histórica y culturalmente codificada de hacer y de reflexionar en términos analíticos sobre números desconocidos y conocidos" (p.14) [5].

Vale decir que, según Radford (2011), la idea de pensamiento algebraico implica una diferencia notable con la idea de pensamiento aritmético en virtud de que pensar

[5] "Por ejemplo, los escribas babilonios usaban nombres contextuales, dependiendo del problema (por ejemplo, el lado de un rectángulo, el peso de una piedra), para reflexionar y tratar con lo indeterminado" (Radford, 2011, p.310).

algebraicamente, para él, significa operar con cantidades indeterminadas (variables o incógnitas) como si fueran conocidas.

Desde esa perspectiva Radford (2006a, 2010b) propone tres características fundamentales del pensamiento algebraico, estas son: el sentido de la indeterminancia, que refiere a la toma de conciencia de lo desconocido, a saber, incógnitas, variables y parámetros; la analiticidad, por un lado, como la posibilidad de operar con la indeterminancia, y, por otro, es la deducción de una fórmula para poder generalizar una situación. En caso de que la fórmula no explicite la indeterminancia, o sea, quede sin nombrar, se está frente a una proto-analiticidad o analiticidad intuida; y la designación simbólica o expresión semiótica que indica la forma o la manera de referir o mencionar los objetos indeterminados y la analiticidad a través de los recursos semióticos.

Con base en la caracterización del pensamiento algebraico, es de suma importancia resaltar que las tres características elementales que articulan este pensamiento están siempre presentes explícita o implícitamente en las tres formas de pensamiento algebraico que el mismo Radford (2003, 2006a, 2010a) determina sobre este modo de hacer y de reflexionar analíticamente con cantidades indeterminadas.

Entonces, con la caracterización del pensamiento algebraico en mente, Radford (2003, 2010a) postula tres formas de pensamiento algebraico que los sujetos manifiestan en su actividad matemática, éstas formas de pensar son: pensamiento algebraico factual, que se caracteriza por atender un proceso de generalización que reposa sobre el plano numérico, a saber, la forma de objetivar siempre atiende a casos concretos, por lo tanto, el sujeto no toma conciencia de la indeterminancia puesto que ésta siempre aparece sustituida por lo concreto.

En efecto, la analiticidad, como posibilidad de deducir una fórmula, aparece mediada a través de acciones sensibles (corpóreas, lingüísticas, etc.) y se extiende en el espacio y el tiempo. Los recursos semióticos movilizados en esta forma de pensamiento son los gestos, las señas, los movimientos corpóreos, las acciones numéricas y el ritmo.

Referente al pensamiento algebraico contextual, éste se caracteriza por la toma de conciencia de los objetos indeterminados para atender un proceso de generalización a través de un discurso mediatizado por los términos lingüísticos o genéricos. Es decir, la objetivación de las variables, parámetros e incógnitas refiere al contexto de la situación de generalización. En efecto, la analiticidad es tomada en sus dos sentidos: como operatividad con lo indeterminado y como posibilidad de deducir una fórmula.

Los recursos semióticos movilizados en el pensamiento algebraico contextual son conocidos como frases “clave”, estas son, “formas reducidas de expresión” (Vergel, 2014, p.80) que dan cuenta de una extrapolación para cualquier término de la situación de generalización. Esta forma de pensamiento es claramente una evolución del pensamiento algebraico factual a razón de la explicitud de la indeterminancia.

En cuanto al pensamiento algebraico simbólico, éste se caracteriza por dotar alfanuméricamente los procesos de generalización que se llevan a cabo para objetivar una fórmula que dé cuenta de la generalidad de una situación. En consecuencia, en esta forma de pensamiento, la analiticidad y la indeterminancia se desprende del contexto de la situación.

Los recursos semióticos movilizados son los símbolos alfanuméricos. Esta forma de pensamiento es claramente una evolución del pensamiento algebraico contextual a razón de que el lenguaje alfanumérico incorpora la dimensión lingüística.

2.4 La generalización de patrones como ruta hacia el desarrollo del pensamiento algebraico

La idea de pensamiento algebraico se ubica en la generalización de patrones como una ruta hacia la manifestación de este pensamiento, debido a que ésta es una forma de pensar y de actuar algebraicamente (Vergel, 2015a).

En tal sentido, la generalización de patrones contempla tres dimensiones que la caracterizan, estas son: la dimensión fenomenológica, la cual se sitúa en las acciones del sujeto cuando se enfrenta al mundo de lo sensible, o sea, hechos concretos (secuencia de figuras, numéricas, etc.) accesibles a ese accionar del sujeto.

La dimensión epistemológica, que se caracteriza por la emergencia de un conocimiento para generar una comunalidad (propiedad común) para ser extrapolada a términos que no están al alcance de la sensibilidad del sujeto, es decir, términos que se escapan del terreno fenomenológico.

Por último, la dimensión semiótica, la cual alude a los recursos semióticos de los que se vale el sujeto para generalizar, articular, extrapolar los términos de la secuencia con el fin de encontrar patrones, fórmulas, características, etc. En suma, estas tres dimensiones fundamentan toda actividad matemática en el contexto de la generalización de patrones.

Tal como se mencionó en los antecedentes, Radford (2003, 2006a) reconoce tres tipos de generalización algebraica que los estudiantes manifiestan en sus procesos de generalización, estos pueden ser de naturaleza factual, contextual y simbólica. En los cuales la definición de cada uno está íntimamente relacionada con la tipología de pensamiento algebraico propuesta por este autor (2003, 2006a, 2010a) y por ende con los tres vectores que lo caracterizan.

Específicamente, una generalización algebraica de tipo factual es aquella en la que se manifiesta una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional, mediante el cual la indeterminancia es manipulada tácitamente. Este esquema operacional reposa sobre el nivel concreto y se expresa a través de los gestos, las señas, la actividad perceptual, los movimientos corpóreos, el ritmo, las acciones numéricas y las palabras (términos deícticos[6]) como recursos semióticos.

En la generalización algebraica contextual en contraste con la factual, se generaliza las acciones concretas y los objetos de las acciones. Va más allá del dominio de números o figuras específicas y trata con objetos genéricos (como la figura o la posición) que no pueden ser percibidos por los sentidos. Los recursos semióticos movilizados son frases "clave" que expresan explícitamente la indeterminancia y sustituyen a otros como los esquemas operacionales y los gestos.

Por último, la generalización algebraica simbólica en contraste con la contextual, dichas frases "clave" son sustituidas por símbolos alfanuméricos, mediante los cuales la indeterminancia se desprende del contexto de la situación.

En cualquier caso, el proceso de generalización de patrones se comporta según el siguiente esquema (ver Figura 1).

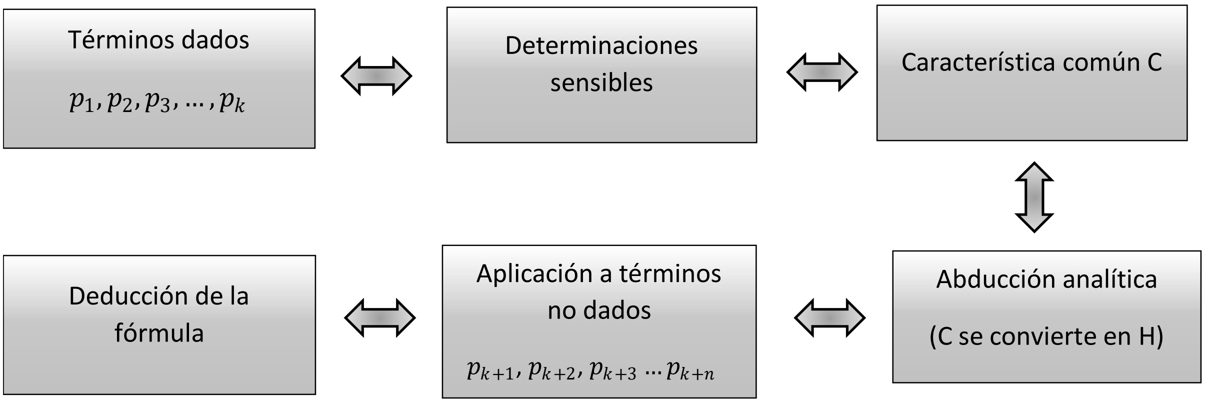


Figura 1. Estructura de la generalización algebraica de secuencias (De Radford, 2013b, p.24).

[6] Son términos o palabras que dependen de un contexto, tiempo y lugar determinado para trasmitir un significado. Por ejemplo, la frase "sumamos cinco veces esto, y de allí quitamos uno", presenta dos deícticos: "esto" y "allí". Para comprender su significado se debe conocer el contexto en el que ocurre, de lo contrario su significado permanece incierto (Pérez & Merino, 2017).

Esta representación de la estructura de la generalización algebraica de secuencias sugiere que dada una secuencia de elementos concretos (términos dados), accesibles generalmente por la percepción visual del sujeto, se debe denotar las características de la misma, por ejemplo, la estructura de la secuencia (espacial, numérica, etc.), los cambios o regularidades de un término a otro, etc., en el cual todas estas apreciaciones se hacen a través de las determinaciones sensibles del sujeto con el propósito de abstraer una característica común (patrón(es)) con la posibilidad de deducir una fórmula, a saber, la característica común (C) se convierte en una hipótesis (H) para el sujeto para poder deducir una expresión que permita hacer extrapolaciones a términos no dados, sin embargo, no siempre el tratamiento que se le dé a la característica común llega a ser analítico, lo cual conduce a una abducción[7] no analítica (generalización aritmética), pero dado el caso de un tratamiento analítico a la característica común la abducción llega a ser analítica (generalización algebraica), en el que esta "será utilizada ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir apodícticamente[8] una fórmula que proporciona el valor de cualquier término"(Radford, 2013b, p.7).

Finalmente, se da la toma de conciencia de la fórmula que permite calcular cualquier término de la secuencia.

En este orden de ideas, conviene exponer una situación hipotética para comprender mejor lo que vendría siendo una generalización aritmética y una generalización algebraica.

Suponga que dos estudiantes se enfrentan a una tarea que constituye una secuencia numérica que tiene como regla general a $2n$, con $n = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Y una de las preguntas de la tarea corresponde al cálculo de la posición 4 de la secuencia.

[7] Se llama abducción a la generalización de la característica común, que pueden ser una o varias (Radford, 2013b).
[8] Llegar a una verdad demostrable a partir de un razonamiento valido (Pérez & Gardey, 2015).

Sobre esa base, el primer estudiante propone que para calcular dicha posición se debe ir sumando de dos en dos hasta llegar a la posición 4, es decir, $2 + 2 + 2 + 2 = 8$. Mientras que el segundo estudiante propone que para calcular dicha posición se debe multiplicar 2 por el número de la posición, esto es, 2 por 4 = 8.

En el caso del primer estudiante, se está frente a una generalización aritmética que permite la posibilidad para calcular cualquier término de la secuencia ya que el tratamiento que se le da a la característica común (2) es para pasar de un término a otro.

En el caso del segundo estudiante, se está frente a una generalización algebraica, porque se explícita, analíticamente, un carácter operatorio (multiplicar 2 por el número de la posición) con una cantidad indeterminada (número de la posición). Obsérvese que esta generalización algebraica propuesta por este estudiante refiere al contexto de la situación, es decir, lo indeterminado está constituido en las posiciones de la secuencia, y en efecto, se puede decir que este estudiante presenta un pensamiento algebraico contextual.

2.5 Referente curricular: El pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

Los documentos curriculares de matemáticas (Lineamientos Curriculares de Matemáticas, 1998; Estándares básicos de Competencias en Matemáticas, 2006) recomiendan que la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar debe centrarse en el estudio de la variación y el cambio, a partir de los primeros grados de escolaridad mediante situaciones problemáticas en diferentes contextos.

En ese sentido, señalan que la variación y el cambio deben promoverse desde el estudio de patrones y regularidades. Sugiriendo explícitamente el desarrollo de tareas centradas en el análisis de secuencias numéricas y figurales, que inviten a los estudiantes a visualizar, explorar, proponer conjeturas sobre los próximos términos de la secuencia, e intentar formular un procedimiento o fórmula oralmente o por escrito que permita calcular términos remotos o bien el término general de la secuencia, como elementos asociados al pensamiento algebraico.

En particular, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) consideran la generalización de patrones como "una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar al séptimo y octavo grado" (p. 67).

Obsérvese que las sugerencias descritas sobre el proceso de la generalización de patrones en los documentos curriculares de matemáticas logran situarse en las tres dimensiones (fenomenológica, epistemológica y semiótica) que caracterizan a toda generalización de patrones, según Radford (2013b).

Puesto que, brevemente, en la dimensión fenomenológica, invitan a la visualización y exploración de secuencias. En la epistemológica, indican que se conjeture un procedimiento o fórmula que generalice la secuencia. Y, por último, en la semiótica, señalan el lenguaje natural como recurso semiótico para referir procedimientos o fórmulas matemáticas.

Concretamente, lo que se propone en este trabajo es coherente con lo planteado por el MEN (1998, 2006), porque se está validando como importante que desarrollar tareas relativas a la variación, el cambio y a generalización de patrones, es fundamental desde los primeros años de escolaridad.

Dado que, preparan a los estudiantes para la construcción de fórmulas algebraicas a través de la formulación oral o escrita de un procedimiento recursivo que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el descubrimiento de un patrón que los guíe más o menos directamente a las fórmulas algebraicas (MEN, 2006).

En tal sentido, el diseño de tareas propuesto obedece con la observación, la identificación de una comunalidad o bien de las variaciones que subyacen en la secuencia, la exigencia de extrapolar la comunalidad a otros términos no dados y la formulación de un procedimiento o una fórmula verbal o escrita que permita generalizar la secuencia.

Capítulo III: Aspectos metodológicos

3.1 Tipo de investigación

Para responder a la problemática de la investigación, y en función de sus objetivos, además del sustento teórico ya mostrado, esta investigación exige un estudio cualitativo con un enfoque descriptivo e interpretativo, orientado a un método de estudio de casos para reconocer el pensamiento algebraico que manifiesta un grupo de estudiantes a través de los recursos semióticos que utiliza en la construcción de dicho pensamiento.

Con el paradigma cualitativo se busca llevar a cabo procesos de interpretación a través de la reconstrucción de la realidad tal y como la observan los participantes del fenómeno social previamente definido (Hernández, Fernández & Baptista, 2003).

En la presente investigación se observan, recopilan, describen e interpretan las producciones escritas y orales de un conjunto de estudiantes a partir de los datos obtenidos. De acuerdo con Balestrini (2006), la investigación descriptiva consiste en "presentar la frecuencia de algunos elementos principales que configuran el fenómeno a estudiar […] se centra en la búsqueda de datos respecto a la configuración de estructuras y conductas observables dentro de un campo determinado" (p.53).

En ese sentido, esta investigación utiliza el enfoque descriptivo e interpretativo, porque busca identificar en las producciones escritas y orales de los estudiantes toda correspondencia con la manifestación de pensamiento algebraico, lo cual se logra cuando se interpretan los significados que éstos le dan a su propio comportamiento y al comportamiento de los otros como también a los objetos matemáticos que se encuentran al momento de desarrollar tareas sobre generalización de patrones.

Para ello, se optó por el método de estudio de casos, el cual se caracteriza por procesos de búsqueda e indagación de información relevante, así como el análisis profundo y sistemático de una situación, individuo o grupo particular (Hernández, Fernández & Baptista, 2003).

3.2 Diseño de la investigación

Para el reconocimiento del pensamiento algebraico del grupo de estudiantes, se plantea una ruta que inicia con el diseño de tareas coherentes con el marco teórico y curricular de referencia. Los desarrollos de los estudiantes y el investigador serán registrados audiovisualmente y por escrito al momento de resolver dichas tareas; luego se llevará a cabo un análisis de las producciones orales y escritas de los estudiantes centrado en identificar los recursos semióticos correspondientes con las características y formas del pensamiento algebraico, según Radford (2003, 2010a, 2010b). Lo cual implica con base en las grabaciones en video y las hojas de trabajo que se obtienen en cada sesión observar, seleccionar, transcribir y analizar un conjunto de episodios para finalmente reconocer el pensamiento algebraico de los estudiantes.

Para efectuar la investigación se basó en el diseño metodológico propuesto por Radford (2010b), el cual plantea cuatro etapas, estas son: el diseño de tareas para el salón de clases, la implementación de tareas en clase, la interpretación de datos y la generación de teoría (Ver Figura 2).

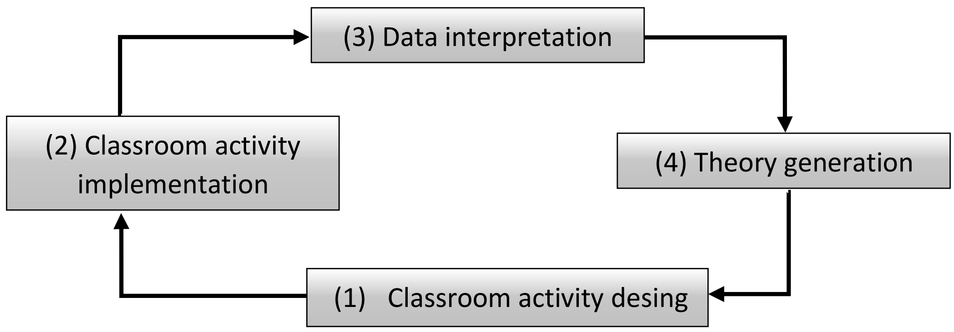


Figura 2. Metodología de la investigación (Radford, 2010b, p.38).

Es importante tener en cuenta que el marco metodológico de Radford (2010b) culmina en la producción de constructos teóricos para posteriormente ser considerados en nuevos diseños o rediseños de tareas. Sin embargo, para efecto de esta investigación se realizó una modificación en la cuarta etapa a fin de desembocar en una nueva que brindase las conclusiones de la investigación (ver Figura 3).

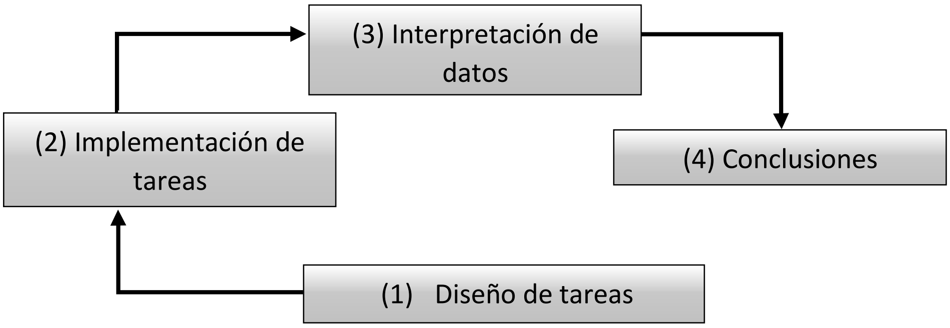


Figura 3. Metodología de la investigación (adaptado de Radford, 2010b).

Una concisa descripción de cada una de las etapas en relación con su desarrollo para esta investigación se hará a continuación, no obstante, se desglosan de manera más amplia a lo largo de todo el informe.

Etapa 1. Diseño de tareas: Para llevar a cabo la investigación se elaboraron tres tareas en términos de la generalización de patrones, para las cuales se tuvo en cuenta el marco teórico de la Teoría de la Objetivación y el referente curricular.

Para la elaboración, las tareas se centraron en diferentes situaciones que favorecieran el planteamiento de procesos de generalización, los cuales fueron orientados con un sentido algebraico, buscando colocar el acento en las tres características y formas del pensamiento algebraico, según Radford (2003, 2010a, 2010b).

Etapa 2. Implementación de tareas: Cada una de las tareas se aplicó durante una sesión a un grupo de tres estudiantes de grado tercero de la Institución Educativa Pedro Antonio Molina. Las tareas 1 y 3 fueron implementadas en la sala de sistemas de la institución, la tarea 2 fue implementada en el salón de clases, cabe aclarar que en el salón únicamente estuvieron los participantes de la investigación ya que los demás estudiantes de grado tercero se encontraban en la sala de sistemas recibiendo clase.

El desarrollo de cada tarea inició con una presentación general de la misma en la que se establece un trabajo en conjunto entre el investigador (profesor) y los estudiantes para responder a las preguntas de la tarea, en el que se podían hacer intervenciones o plantear discusiones acerca de la tarea. Para lograr este proceso el investigador tomó el rol de orientador, atendiendo las intervenciones, observaciones e inquietudes de los estudiantes en cada momento del proceso. Terminada la tarea se recogieron las hojas de trabajo de los estudiantes.

Etapa 3. Interpretación de datos: Con base en las grabaciones de video y las hojas de trabajo obtenidas en cada sesión se procede al procesamiento de los datos mediante la observación, selección, transcripción y análisis de un conjunto de episodios objeto de estudio.

Para la construcción de esos episodios se tienen en cuenta los recursos semióticos empleados por los estudiantes para solucionar las tareas sobre generalización de patrones, los cuales se detectan en las producciones escritas y orales de éstos, lo que implica la observación e interpretación de lo que dicen y escriben cuando desarrollan las tareas propuestas; luego se procede a detectar esas características y formas de pensamiento algebraico que presenta el grupo de estudiantes. Por último, se transcriben los episodios que constituyen el dato de estudio susceptible de análisis.

La transcripción de los episodios responde a unos criterios específicos. Estos criterios son presentados más adelante.

Etapa 4. Conclusiones: Con base en los análisis respectivos de la investigación se procede a responder la pregunta de investigación y a concluir los resultados de ésta.

3.3 Caracterización de la población

Para cumplir con los propósitos de la investigación se propone implementar tres tareas con un grupo de tres estudiantes de la Institución Educativa Pedro Antonio Molina, de la ciudad de Cali, Valle del Cauca. Esta cantidad de estudiantes se consideró prudente para el buen desarrollo y manejo de las tareas, porque el análisis de resultados demanda la atención minuciosa sobre las producciones orales y escritas de los estudiantes, lo cual requiere centrar la observación e interpretación detalladas en cada palabra y escrito con el propósito de reconocer su pensamiento algebraico. Llevar a cabo el estudio con una cantidad superior de estudiantes desbordaría los alcances de éste.

Este grupo está conformado por una niña y dos niños con edades de 8 años. Estos son alumnos del grado tercero de educación básica primaria, jornada de la mañana.

El criterio de selección para el grupo de niños fue que comprendieran el significado de las operaciones de la suma y la multiplicación puesto que éstas se consideran conocimientos previos para la generalización de patrones.

La selección de los estudiantes que conforman el grupo se dejó en consideración de la profesora de matemáticas de grado tercero, la cual realizó la selección aleatoriamente.

Es conveniente resaltar que las tareas son aplicadas sólo a estos tres estudiantes puesto que se trabaja con un grupo particular, dado que es un estudio de caso y se pretende realizar grabaciones en video con ellos, de tal forma que se logren capturar sus producciones orales y escritas al momento de realizar las tareas.

Al realizarlo de esta forma, se puede hacer un análisis más preciso de sus producciones cuando desarrollan las tareas propuestas.

3.4 Descripción de los Instrumentos y Técnicas de Recolección de Información

En consideración de los objetivos y la pregunta problema se recurre a la técnica de observación participativa, debido a que el autor de esta investigación pretendía no solamente buscar, observar y registrar información relevante para los propósitos de la investigación sino también participar en las sesiones que se llevarán a cabo, básicamente para orientar el buen desarrollo de las tareas propuestas.

En cuanto a la recolección de los datos se contó con 3 sesiones del curso de matemáticas de grado tercero de la institución educativa Pedro Antonio Molina, que se realizaron entre el 12 y el 19 de noviembre de 2019. La primera sesión tuvo una duración de 40 minutos, la segunda de 60 minutos y la tercera de 40 minutos aproximadamente.

Para la recolección de información y el análisis de los datos se sigue el modelo usado por Miranda, Radford y Guzmán (2007), sustentado en los planteamientos de Arzarello (2006), en el cual se recoge la información a través de video grabaciones de las cuales se seleccionan y transcriben algunos episodios de la actividad matemática de los estudiantes y el profesor que den cuenta de una o varias de las unidades de análisis objeto de estudio.

En seguida se presenta cada una de las cuatro fases que constituyen el modelo de Miranda et al. (2007) en relación con la presente investigación.

Fase 1: Grabación de la actividad. Para cada sesión se contó con una cámara de video para grabar todo el desarrollo de la tarea durante la sesión, esto es, grabar a los participantes de la investigación para capturar las producciones orales y escritas que manifiestan durante su actividad matemática. Para ello se requirió de la colaboración de un asistente, quien recibió la instrucción de grabar los momentos ocurridos durante la sesión.

Fase 2: Obtención de las hojas de trabajo de cada estudiante. En cada sesión se entregó a cada estudiante una hoja de trabajo que contenía las preguntas de la tarea y, además, hojas en blanco para que escribieran lo que ellos consideraran necesario como también sus respuestas a las preguntas. Al comienzo de cada sesión se solicitó a los estudiantes colocar en el encabezado de cada tarea la fecha, el nombre, la edad, y el grado escolar. Del mismo modo, se les solicitó escribir con claridad y orden. Al finalizar cada sesión se recogieron las hojas de trabajo.

Fase 3: Trascripción de las sesiones. Para organizar, sistematizar y evitar la saturación de la información se recurre a la transcripción de los episodios que constituyen los recursos semióticos en correspondencia con la construcción de pensamiento algebraico, para ello se analizaron las video grabaciones obtenidas y se transcribieron los episodios con base en los siguientes criterios: el dialogo de los estudiantes (Antonio, Valentina y Santiago) y el profesor investigador (PM) se presenta mediante líneas enumeradas (L1, L2, L3, …)[9]. Se utilizan corchetes ([…]) para indicar las acciones no verbales e intervenciones realizadas por ellos y en letra cursiva. Se utilizan puntos suspensivos (…) para expresar cuando alguien es interrumpido por otro participante. Por último, se reinicia la numeración (L1, L2, L3, …) cuando se cambia de episodio.

Fase 4: Análisis de los episodios. Se realiza el análisis de los episodios y de las hojas de trabajo de los estudiantes, buscando identificar los recursos semióticos que éstos emplean en la construcción de pensamiento algebraico. Específicamente, reconociendo las características y formas del pensamiento algebraico que el grupo de estudiantes manifiesta.

3.5 Diseño y justificación de las tareas

Conviene destacar que no toda tarea en el contexto de la generalización de patrones conduce necesariamente a desarrollar pensamiento algebraico, si bien es una vía bastante sofisticada para ello, no siempre los procesos de generalización que manifiestan los estudiantes son de naturaleza algebraica puesto que ya se mencionó en algún momento que hay ocasiones en que los estudiantes reposan sus procesos de generalización de patrones en

[9] Dado que los estudiantes son menores de edad sus nombres fueron cambiados por los seudónimos Antonio, Valentina y Santiago para salvaguardar sus identidades.

una generalización aritmética y no logran evolucionar hacia modos de pensamiento algebraico (factual, contextual y simbólico) a través de una generalización algebraica.

Por esta razón se hace necesaria la intervención del profesor, tal y como lo postula la Teoría de la Objetivación desde la idea de labor conjunta, para que colaborándole a sus estudiantes estos logren formas más sofisticadas de pensamiento algebraico mediante el desarrollo de tareas en el contexto de la generalización de patrones, lo cual significa que las estrategias pedagógicas y metodológicas como también las intervenciones del profesor deben buscar que los estudiantes se involucren con la generalización de patrones en un sentido algebraico y con ello permitir el desarrollo de pensamiento algebraico en los estudiantes.

Para hacer frente a la problemática de la investigación se proponen tres tareas correspondientes con la generalización de patrones, tomando como referencia las tres dimensiones (fenomenológica, epistemológica y semiótica) que caracterizan a toda generalización de patrones. Por tanto, se proponen en las tareas aspectos relacionados con la observación e identificación de variaciones o regularidades, el conteo, la extrapolación de la característica común a términos no dados y la búsqueda de relaciones o procedimientos que permitan la deducción de una regla verbal para encontrar cualquier término en una secuencia numérica o figural.

Un aspecto en común que comparten todas tres tareas es que son gobernadas por una regla de recurrencia lineal. En tal sentido la secuencia de la tarea 1 está constituida por una regla de la forma $f(n) = an$, donde n es la posición de un término cualquiera, a es el patrón de crecimiento y $f(n)$ es la cantidad de elementos correspondiente a n. A diferencia de la tarea 1, las tareas 2 y 3 invitan al estudiante a tomar conciencia del término independiente que se mantiene constante en la secuencia, de esta manera la regla de recurrencia de las tareas 2 y 3 está constituida de la forma $f(n) = an + b$, donde b es el término independiente que se mantiene constante.

Es importante señalar que los ítems que hacen referencia a la regla de recurrencia de la secuencia en cada una de las tareas se solicita en forma de escrito rápido, buscando colocar el acento en la producción de frases claves para evitar que los estudiantes acudan al empleo de generalizaciones aritméticas basadas en largas cadenas de operaciones (como las sumas) o el cálculo de subtotales.

La presentación de las reglas de recurrencia que gobiernan las secuencias de las tareas propuestas no se hace de manera ingenua ya que se consideró prudente que en un primer momento, el acercamiento hacia modos de pensamiento algebraico por parte de los estudiantes se hiciese a través de una primer tarea que únicamente exigiera el reconocimiento de un patrón de crecimiento, mientras que las tareas 2 y 3 no solamente invitan al estudiante a la toma de conciencia del patrón de crecimiento, sino también del término independiente, lo cual exige procesos de generalización aún mayores a razón de que algunos estudiantes suelen tener en cuenta simplemente el patrón de crecimiento cuando intentan deducir una regla de recurrencia (véase Callejo et al.,2016).

En cuanto al contexto de las tareas, la primera tarea se ubica en el marco de una situación, la cual presenta una secuencia numérica; la segunda tarea, se ubica en una secuencia figural, la cual se caracteriza por la coordinación de las estructuras numérica y espacial, y de acuerdo con Radford (2013b) y Vergel (2014), es pertinente que el trabajo algebraico descanse sobre estas dos estructuras diferentes para posteriormente encontrar relaciones que permitan deducir la regla de recurrencia, es decir, el trabajo sobre secuencias figurales constituye un factor indispensable del desarrollo del pensamiento algebraico; la tercera tarea, se ubica en el marco de una situación que se apoya en una secuencia numérica con registro tabular, el trabajo sobre este tipo de secuencia, según Vergel (2014), reduce la intensidad de los recursos semióticos que son movilizados cuando el estudiante se enfrenta a una secuencia figural.

Las secuencias con registro tabular, permiten a los estudiantes establecer relaciones entre cantidades constantes y variables para posteriormente hacer cálculos entre ellas y finalmente deducir una fórmula algebraica. En ese sentido, el registro tabular que acompaña la secuencia debe ser considerado como un recurso que le permita al estudiante establecer generalizaciones algebraicas.

A continuación, se hace una presentación de cada una de las tareas, en la que se exhibe a mayor detalle la secuencia y el cuerpo de preguntas que constituye la tarea.

3.5.1 Tarea 1

En la elaboración de esta tarea se consideró introducir una secuencia numérica en el marco de una situación con un total de seis (6) preguntas, cuyo término general corresponde a $3n$ con $n = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. En seguida se presenta de manera esquemática la tarea 1 (ver Figura 4).

Nombre: ____ **Grado:** _____________

Fecha: _____________ **Edad:** _____________

Tarea 1

Hola, soy Camila.

En el proyecto ecológico de mi escuela recolecto botellas de plástico para reciclar. 3 en el primer día, 6 en el segundo, 9 en el tercero y así sucesivamente.

Teniendo en cuenta la situación anterior, responde:

a) ¿Qué puedes decir acerca de la secuencia que se va formando a medida que pasan los días?
b) ¿Qué sucedió del primer día al segundo y del segundo al tercero?
c) ¿Cuántas botellas habré recolectado en el día cuarto, quinto y sexto? ¿Por qué?
d) Calcula la cantidad de botellas recolectadas para el día 15. Justifica tu respuesta.
e) Encuentra una forma rápida de hallar la cantidad de botellas recolectadas para el día 200. Justifica tu respuesta.
f) Si te pido que le escribas a un compañero una manera rápida de calcular el número de botellas recolectadas para cualquier término de la secuencia ¿Qué le escribirías?

Figura 4. Tarea 1

A continuación, se presenta la justificación de cada ítem de la tarea 1.

Con el ítem $a)$, después de la lectura y comprensión del enunciado realizada por los estudiantes, se busca que los estudiantes identifiquen las variaciones que pueden percibir en la consigna de la situación, como, por ejemplo, la variación en el número de botellas o días.

Con el ítem $b)$, se invita a los estudiantes a identificar la comunalidad, es decir, la diferencia constante entre los primeros términos de la secuencia.

Con el ítem $c)$, se pretende que la comunalidad sea generalizada a otros términos no dados de la secuencia. En otras palabras, que haya una abducción de la característica común.

Con el ítem *d)*, se indaga sobre el tratamiento que se le da a la abducción para encontrar un término cercano de la secuencia. En efecto, se espera que los estudiantes recurran a una generalización aritmética.

Con el ítem e), se pretende que la abducción sea utilizada de manera analítica para encontrar un término lejano. En efecto, invita a los estudiantes a buscar y establecer relaciones o vínculos entre cantidades que varían y que permanecen constantes para generar una generalización algebraica.

Con el ítem f), se busca que los estudiantes establezcan la regla general de la secuencia. Para ello se les solicita que le escriban a un compañero una forma rápida de calcular la cantidad de botellas recolectadas para cualquier término de la secuencia. Esta solicitud ya no hace referencia al caso particular puesto que invita a los estudiantes a pensar en cualquier término posible, exigiendo que movilicen formas reducidas de expresión, haciendo énfasis en la producción de frases claves que dejen ver tanto la indeterminancia, como también su carácter operatorio.

3.5.2 Tarea 2

En la elaboración de esta tarea se contempló una situación en el marco de una secuencia figural con registro tabular y un total de diez (10) preguntas, buscando indagar sobre cómo los estudiantes toman conciencia de la coordinación entre las estructuras numérica y espacial de la secuencia figural, para luego conocer las relaciones que encuentran para objetivar una comunalidad y posteriormente una regla de formación de la secuencia.

Como lo indica Radford (2013b), estas dos estructuras son constitutivas del terreno fenomenológico de la generalización de patrones, es decir, “el trabajo algebraico sobre el terreno fenomenológico va a reposar sobre la articulación de dos estructuras diferentes una de tipo numérico y otra de tipo espacial” (p.8), permitiendo la movilización de recursos semióticos como los señalamientos y términos deícticos, los dibujos, etc. En ese sentido, se pide en un par de preguntas dibujar términos no dados y encontrar la secuencia numérica que representa las primeras posiciones de la secuencia figural.

A continuación, se presenta la tarea 2, cuyo término general corresponde a $3n + 1$ con $n = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ (ver Figura5).

Nombre: ____ **Grado:** _____________

Fecha: _____________ **Edad:** _____________

Tarea 2

Observa la siguiente secuencia de figuras hechas con palillos:

1ª Posición 2ª Posición 3ª Posición

Teniendo en cuenta la secuencia anterior, responde:

a) ¿Qué observas en la secuencia de figuras?
b) ¿Qué sucede de la primera posición a la segunda y de la segunda a la tercera? Justifica tu respuesta.
c) Escriba la secuencia numérica, contando el número de palillos de cada figura.
d) Dibuja las figuras correspondientes a las posiciones cuarta, quinta y séptima.
e) Calcule el número de palillos de la figura que ocupa la posición 12. Justifica tu respuesta.
f) Calcule el número de palillos de la figura que ocupa la posición 19. Justifica tu respuesta.
g) ¿Qué relación encuentras entre la cantidad de palillos de cada figura con su posición?
h) Encuentra una forma rápida de hallar el número de palillos de la figura que ocupa la posición 100. Justifica tu respuesta.
i) Escribe una forma rápida de hallar el número de palillos de la figura que ocupa la posición 930. Justifica tu respuesta.
j) Si te pido que le escribas a un compañero una manera rápida de hallar el número de palillos para cualquier término de la secuencia ¿Qué le escribirías?

Figura 5. Tarea 2

Para la elaboración de esta tarea se tomó como referencia a Casas (2005) y a Radford (2010a), ya que la secuencia figural aparece como una propuesta para el desarrollo del pensamiento algebraico.

En seguida se presenta la respectiva justificación de los ítems de la tarea 2.

Con el ítem $a)$, se pretende que los estudiantes expresen de forma verbal y escrita que se observa una variación de forma ascendente en el número de palillos y de la posición de cada figura de la secuencia.

Con el ítem $b)$, se invita a los estudiantes a identificar comunalidades o el patrón en la secuencia figural.

Con el ítem $c)$, se pretende que los estudiantes identifiquen la secuencia numérica correspondiente a la secuencia figural, lo cual se logra a través del conteo, permitiendo establecer la cantidad de palillos correspondientes en cada término dado en la secuencia. Explicitar la secuencia numérica es fundamental para establecer relaciones entre ambas representaciones (numérica y figural) de la secuencia.

Con el ítem $d)$, se busca que los estudiantes utilicen la comunalidad de la secuencia para calcular términos cercanos no dados, en tanto al uso que se le dé a la coordinación de las estructuras numérica y espacial de la secuencia.

Con los ítems $e)$ y $f)$, se pretende que la comunalidad sea generalizada a términos no dados de la secuencia, relativamente lejanos, En otras palabras, que haya una abducción aritmética de la característica común.

Con el ítem $g)$, se pretende que el registro tabular en la secuencia sea considerado como un recurso para indagar sobre relaciones entre cantidades constantes y variables a través de operaciones aritméticas con el fin de establecer una abducción analítica.

Con los ítems $h)$ y $i)$, se espera que la abducción encontrada anteriormente sea puesta en acción para encontrar términos lejanos de la secuencia.

Con el ítem j) se busca que la indeterminancia, como su carácter operatorio se vuelvan objeto del discurso de los estudiantes. Para ello se les solicita escribir un mensaje a un compañero que le permita calcular el número de palillos para cualquier término de la secuencia. Esta solicitud ya no hace referencia al caso particular puesto que invita a los estudiantes a pensar en cualquier término posible, exigiendo que movilicen formas reducidas de expresión, haciendo énfasis en la producción de frases claves que dejen ver tanto la indeterminancia, como también su carácter operatorio.

3.5.3 Tarea 3

Esta tarea se ubica en el marco de una situación, la cual está constituida por una secuencia numérica con registro tabular y un total de cuatro (4) preguntas. El número de preguntas es reducido en comparación con las tareas 1 y 2 a razón de que el trabajo en estas dos primeras tareas debería representar un avance paulatino y progresivo para el pensamiento algebraico de los estudiantes toda vez que hayan desarrollado las mismas.

Por tal razón, las preguntas de esta tarea se centran en indagar directamente sobre algunos casos particulares y el término general de la secuencia. Esto último, conlleva a que el estudiante tome conciencia del trabajo realizado en las tareas anteriores, lo que implica indagar ciertos aspectos como la comunalidad que hay entre los términos dados, para que posteriormente sea generalizada para encontrar casos concretos y una fórmula general de la secuencia.

A continuación, se presenta de forma esquemática la tarea 3, cuyo término general corresponde a $6.000n + 2.000$ con $n = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ (ver Figura6).

Nombre: ______________________________________ **Grado:** ____________

Fecha: ____________ **Edad:** ____________

Tarea 3

Carlos recibe en su cumpleaños una alcancía con \$2.000 pesos y decide ahorrar \$6.000 pesos por semana. Transcurrida la primera semana había ahorrado \$8.000 pesos; la segunda \$14.000 pesos; la tercera \$ 20.000 pesos y así sucesivamente como se muestra a continuación:

1ª Semana 2 ª Semana 3 ª Semana

Si continúa con su decisión:

a) ¿Cuánto dinero habrá ahorrado en la cuarta semana?
b) ¿Cuánto dinero habrá ahorrado en la séptima, octava y novena semana? Justifica tu respuesta.
c) ¿Cuánto dinero habrá ahorrado en la semana 46? Justifica tu respuesta.
d) Escribe una forma rápida que te permita calcular el dinero ahorrado para cualquier término de la secuencia.

Figura 6. Tarea 3

En seguida se presenta la respectiva justificación de los ítems de la tarea 3, la cual se apoya desde los diferentes referentes teóricos y curricular de referencia.

Con el ítem a), Se pretende que el estudiante retome la observación y logre una abstracción de la característica común para que sea utilizada para encontrar el siguiente término de la secuencia.

Con el ítem b), Se busca que la comunalidad sea generalizada a otros términos no dados de la secuencia. En otras palabras, que haya una abducción de la característica común.

Con el ítem $c)$, Se procura que la abducción sea utilizada de manera analítica para encontrar un término lejano. En efecto, invita a buscar relaciones o vínculos entre las cantidades que varían y las que permanecen constantes para generar una generalización algebraica.

Con el ítem $d)$, se busca que la indeterminancia, como su carácter operatorio se vuelvan objeto del discurso de los estudiantes. Para ello se les solicita escribir una forma rápida que permita calcular el dinero ahorrado para cualquier término de la secuencia. Esta solicitud ya no hace referencia al caso particular puesto que invita a los estudiantes a pensar en cualquier término posible, exigiendo que movilicen recursos semióticos como las expresiones lingüísticas o formas reducidas de expresión, haciendo énfasis en la producción de frases claves que dejen ver tanto la indeterminancia, como también su carácter operatorio.

Capítulo IV: Análisis de resultados

En este capítulo se exponen los análisis respectivos a la implementación de las tareas propuestas, los cuales están centrados en identificar los recursos semióticos que utilizan los estudiantes en la construcción de pensamiento algebraico (factual, contextual, simbólico), para lo cual se tiene en cuenta la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica.

Los análisis que se presentan en este capítulo, surgen de la observación, descripción e interpretación de las producciones verbales y escritas que cada estudiante manifiesta en el desarrollo de las tareas.

Para ello, se analizaron las video grabaciones obtenidas y se transcribieron los episodios con base en los siguientes criterios: el dialogo de los estudiantes (Antonio, Valentina y Santiago) [10] y el profesor investigador (PM) se presenta mediante líneas enumeradas (L1, L2, L3, …). Se utilizan corchetes ([…]) para indicar las acciones no verbales e intervenciones realizadas por ellos y en letra cursiva. Se utilizan puntos suspensivos (…) para expresar cuando alguien es interrumpido por otro participante. Por último, se reinicia la numeración (L1, L2, L3, …) cuando se cambia de episodio.

4. 1 Análisis de las producciones de los estudiantes en la tarea 1

Para el desarrollo de esta tarea se empleó una sesión de 40 minutos aproximadamente, el día martes 12 de noviembre de 2019, de 08:00 AM hasta las 8:40 AM en la sala de sistemas de la Institución Educativa Pedro Antonio Molina. Se trabajó de manera grupal, realizando una grabación fílmica con los estudiantes de 30 minutos. La grabación se realizó de forma continua, al terminar el desarrollo de la tarea se recogieron las hojas de trabajo de los estudiantes.

---

[10] Dado que los estudiantes son menores de edad sus nombres fueron cambiados por los seudónimos Antonio, Valentina y Santiago para salvaguardar sus identidades.

El investigador (PM) les explica a los estudiantes que realizarán una tarea de manera conjunta. Seguidamente, les solicita que por favor colocaran su nombre, grado y edad en el encabezado de la tarea; luego les pide leer la consigna de la tarea para proceder a responder las preguntas.

Se presenta a continuación el análisis del primer ítem de la primera tarea de forma general para los tres estudiantes puesto que todos interactuaron simultáneamente. A partir del interrogante ¿Qué puedes decir acerca de la secuencia que se va formando a medida que pasan los días? todos los estudiantes logran identificar la variación en la estructura numérica, como se muestra en el siguiente episodio:

L1. PM: ¿Qué puedes decir acerca de la secuencia que se va formando a medida que pasan los días? ¿Qué dices tu Antonio?

L2. Antonio: Que cada vez se van aumentando las botellas.

L3. Valentina: Que cada vez ella va recolectando de tres en tres, como la tabla del tres.

L4. PM: ¡Bien! Ahora, por favor, respondan la pregunta en su hoja de trabajo.

L5. Valentina: Profe, lo que va de tres en tres.

L6. Santiago: Yo coloque cada día recolecta más.

En este episodio se manifiesta que los estudiantes Antonio y Santiago identificaron el cambio de manera cuantitativa no numéricamente del número de botellas en cada día. Con este tipo de respuestas se valora que los estudiantes logran alcanzar el propósito en este interrogante, pues era importante inicialmente que los estudiantes identificaran dicha variación en el número de botellas que aumentaba de día en día. Sin embargo, se debe señalar que los estudiantes no se percatan de la variación en el número de días puesto que centran su atención solamente en la variación del número de botellas.

Valentina en L5 expresa verbalmente “*ella va recolectando de tres en tres, como la tabla del tres*”. A partir de esta afirmación se puede sugerir que la estudiante logró reconocer el patrón numérico de aumento.

En el análisis del segundo ítem, cuyo objetivo era identificar la comunalidad la de la secuencia, se puede destacar el siguiente episodio:

L1. PM: ¡Observen con cuidado la secuencia!

L2. Santiago: ¡Por eso! tres, seis, nueve.

L3. Antonio: tres aquí, tres, seis aquí [*Señala con el lápiz el número de botellas en su hoja de trabajo*].

L4. PM: ¿Qué respondiste tú, Santiago?

L5. Santiago: Que aumentan las botellas cada día.

L6. PM: ¡Muy bien! ¿pero del día 1 al día 2 en cuánto aumentaron?

L7. Santiago: En tres.

L8. PM: ¿Y del día 2 al día 3?

L9. Santiago: En tres.

En este episodio las afirmaciones en las líneas L7 y L9 conllevan a pensar que el estudiante Santiago está reconociendo la comunalidad de la secuencia puesto que el uso reiterado de la frase “en tres” parece indicar dicho reconocimiento.

Para los ítems c y d se tomó el siguiente episodio que sugiere la presencia de rasgos de pensamiento algebraico factual.

L1. PM: ¿Cuántas botellas habré recolectado en el día cuarto, quinto y sexto? ¿Por qué?

L2. Antonio: ¡Uy! ¡Yo sé cuántas!

L3. Santiago: ¡Uy! ¡Yo también!

L4. PM: ¿Cuántas?

L5. Santiago: Vea 12, 15 y 18 [*Señalando con el lápiz los días cuarto, quinto y sexto en la hoja del profesor Miguel*].

L6. Antonio: 18 *[Contesta al mismo tiempo que Santiago].*

L7. PM: ¿Por qué?

L8. Santiago: Porque, 4 por 3 es igual a 12.

L9. PM: ¿Cómo te diste cuenta que tenías que multiplicar 4 por 3?

L10. Santiago: Porque multiplique el 4 por 3 y 4 por 3 es igual a 12.

L11. PM: ¿Y en el día 5?

L12. Santiago: 15, porque 5 por 3 es igual a 15.

L13. PM: ¿Por qué el día 4, ella recolectó 12 botellas?

L14. Valentina: Porque multiplique 3 por 4 que es igual a 12.

L15. PM: ¿Por qué hiciste esa multiplicación?

L16. Valentina: Porque acá en la secuencia está yendo de tres en tres y cada vez va aumentado [*Señalando con el dedo la secuencia de la tarea*].

L17. PM: Calcula la cantidad de botellas recolectadas para el día 15 ¿Cómo lo harían?

L18. Antonio: Haciendo una multiplicación.

L19. Santiago: Multiplicando 3 por 15.

L20. Valentina: 3 por 5 [*Santiago interrumpe diciendo, 3 por 15*] ¿Por qué?

L21. Santiago: [*lee el ítem d, haciendo caer en cuenta a Valentina que efectivamente en el ítem se cuestiona es por el día 15]* 3 por 10 (…) *[interviene Antonio].*

L22. Antonio: Y también ya sé porque uno se puede dar cuenta, porque uno recoge las botellas y después uno está recogiendo de tres en tres y uno las puede sumar o contar.

En la línea 22, expresiones tales como "sumar" o "contar" por parte de Antonio parecen proponer una abducción aritmética (generalización aritmética) ya que el tratamiento que se le da a la característica común es asumido como simple posibilidad para encontrar otros términos de la secuencia, más no es utilizada para deducir una fórmula general que permita encontrar cualquier término de la secuencia.

L23. Santiago: 3 por 10, 30, 3 por 11, 33, 3 por 12, 36, 3 por 13, *[hace una pausa]*, 45. 3 por 15 me da 45. Porque 3 por 15 lo multiplicamos y me da 45 [*Santiago escribe su justificación en su hoja de respuesta*] (ver Figura 7).

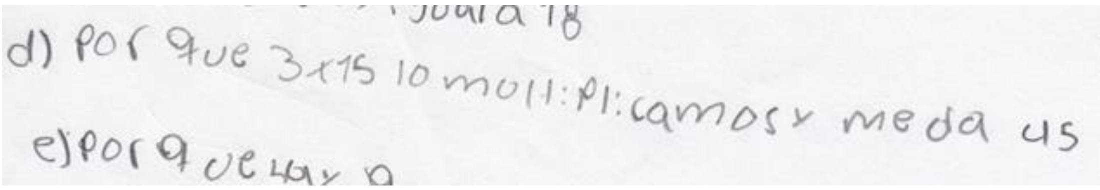


Figura 7. Producción de Santiago para calcular el número de botellas recolectadas para el día 15.

En lo que respecta a la generalización algebraica, Santiago en L5 "Vea 12, 15 y 18 *[Señalando con el lápiz los días cuarto, quinto y sexto de la hoja del profesor Miguel]"*, señala con el lápiz los días 4,5 y 6 de la hoja del profesor, estos gestos indexicales (gestos de señalamiento) parecen marcar el reconocimiento de una generalización algebraica de tipo factual a razón de que la acción de señalar los días en la hoja del profesor sugiere un sentido intuitivo de la indeterminancia (el número de un día cualquiera) y por tanto una pro-analiticidad en tanto que se opera con estos casos concretos en particular.

En el caso de Valentina, su explicación en L16 *"porque acá en la secuencia está yendo de tres en tres y cada vez va aumentado [Señalando con el dedo la secuencia de la tarea]"* el deíctico *"acá"* utilizado parece estar dirigido a la estructura numérica, involucrando la necesidad de señalar la secuencia. Esta acción de señalar sugiere un uso intuitivo de lo indeterminado ya que la estudiante hace referencia finalmente a la variación que tiene la cantidad de botellas recolectadas respecto al número del día.

Si bien la indeterminancia no alcanza a ser enunciada en el discurso de los estudiantes, ésta parece más bien estar constituida en las acciones de éstos y por tanto también lo estará la manera en cómo se opere con ella, por ejemplo, cuando Santiago dice: "porque multiplique el 4 por 3 y 4 por 3 es igual a 12" o "multiplicando 3 por 15", nótese que el tratamiento que se le da a los números constituye a un esquema operacional que apela a ciertos días particulares ("4", "5" y "15"), pero que al mismo tiempo es aplicable para cualquier término de la secuencia, es decir, los números no son comprendidos únicamente como números para operar, sino que son constituyentes de algo más general, esto es, la fórmula algebraica.

En ese sentido, obsérvese que en L23 "*3 por 10, 30, 3 por 11, 33, 3 por 12, 36, 3 por 13, [hace una pausa], 45. 3 por 15 me da 45. Porque 3 por 15 lo multiplicamos y me da 45*", Santiago pone el esquema operacional en acción para calcular el número de botellas recolectadas para el día 15, para lo cual realiza acciones numéricas sobre casos concretos no dados ("10", "11", "12") en el ítem d, lo cual pone de manifestó una abducción analítica mediante la aplicación de este esquema operacional.

En efecto, es en este punto en el que se reconoce que, pese a que la generalización algebraica factual reposa sobre el plano numérico, el enfoque no es estrictamente numérico como parece (como si ocurre en la generalización aritmética), claro está que se trabaja sobre números o casos concretos, pero éste trabajo es de forma algebraica ya que hubo una reflexión analítica entre números constantes (como el 3) y números que varían (como el 4, 5, 6 y 15) en tanto que estos números fueron vinculados entre sí para acceder a la generalización algebraica factual.

Concretamente, la indeterminancia aparece expresada de forma implícita en el uso de sus constituyentes (el número del día dado, por ejemplo, “4”, “5”, “6” y “15”) y la analiticidad (pro-analiticidad) en la manera en cómo se vinculan estos símbolos numéricos a través de los señalamientos deícticos y las acciones numéricas mediante notación multiplicativa, como recursos semióticos.

L24. PM.: Encuentra una forma rápida de hallar la cantidad de botellas recolectadas para el día 200. Justifica tu respuesta.

L25.Antonio: Yo ¡ya sé! Vea (…) [*Santiago interrumpe a Antonio y responde*].

L26. Santiago: 200 por 3, da 600.

L27. Antonio: Eso yo iba decir.

L28. PM: Entonces ¿Cómo responderían?

L29. Santiago: Multiplicar 200 por 3 *[Valentina responde al mismo tiempo que Santiago].*

L30. Valentina: porque hay que multiplicar 200 por 30, ¡ve! Por 3.

Para los tres estudiantes, se logra reconocer la presencia de una generalización algebraica, en este caso factual, la cual se manifiesta a través de un conjunto de acciones numéricas que permiten calcular cualquier término de la secuencia.

Esta generalización algebraica factual es puesta en juego nuevamente por los estudiantes para responder el ítem e, el cual cuestiona por un caso remoto, como se valora en L26 *“Santiago: 200 por 3, da 600*”, L29 *“Santiago: Multiplicar 200 por 3”* y L30 *“Valentina: porque hay que multiplicar 200 por 30, ¡ve! Por 3”.*

En la Figura 8 se aprecian las producciones de dos estudiantes en relación con el ítem *e*, la cual deja ver la aplicación de la generalización algebraica factual en cuestión.

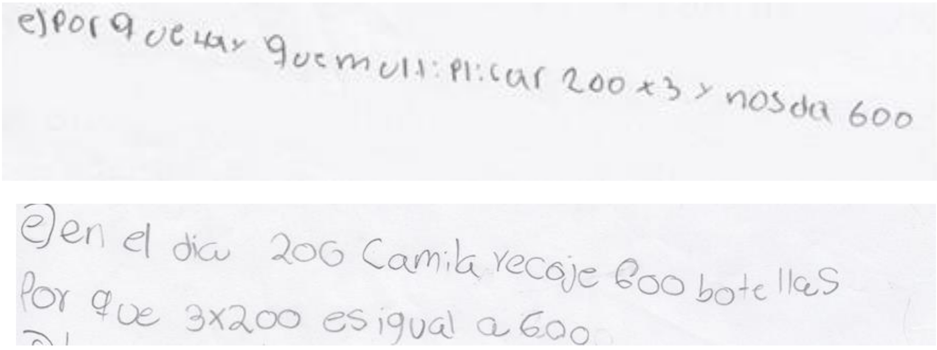


Figura 8. Producciones de dos estudiantes para calcular el número de botellas recolectadas para el día 200.

Obsérvese en la Figura 8, de un lado las expresiones semióticas a través del lenguaje escrito y la simbología numérica y, de otro lado, el carácter operatorio: *"hay que multiplicar 200 × 3"* o *"3 × 200"*. En ambas producciones la indeterminancia aparece sustituida por el símbolo numérico "200", la cual es tratada tácita y analíticamente con notación multiplicativa. Sin embargo, la indeterminancia aún no se objetiva propiamente.

En el siguiente episodio se pretendía indagar sobre el ítem f) con el fin de poner el acento en la emergencia de pensamiento algebraico contextual en los estudiantes, lo cual implicó que se indagara más de cerca sobre la forma cómo utilizaban la generalización algebraica factual que ya habían deducido para calcular el número de botellas recolectadas de días cercanos y remotos.

L1. PM: Si te pido que le escribas a un compañero una manera rápida de calcular el número de botellas recolectadas para cualquier término de la secuencia ¿Qué le escribirías? Analicen bien lo que han hecho hasta ahora ¿De qué se han dado cuenta según el ejercicio?

L2. Santiago: De que hay que multiplicar para saber lo que nos da el resultado.

L3. PM: ¿Multiplicar qué?

L4. Santiago: Los números que nos dan, por ejemplo, 200 multiplicado por 3, nos da 600 *[Valentina responde simultáneamente]*.

L5. Valentina: que nos dan.

L6. PM: Dame otro ejemplo, como, por ejemplo, el día 500.

L7. Santiago: el día 500, nos, 500 por 3 nos daría 1.500.

L8. PM: Digamos que ustedes han logrado encontrar una forma de cómo hallar el número de botellas para cualquier día ¿cierto? Porque si yo les pregunto, por ejemplo, por el día 1.000.

L9. Santiago: nos daría 3.000

L10. PM: ¿por el día 4.000?

L11. Santiago: nos daría 12.000

L12. PM: ¡Muy bien! ¿Por el día 10.000?

L13. Santiago: Nos daría 30.000

Inicialmente las afirmaciones de los estudiantes dejan ver que aún persisten en el uso de la generalización algebraica factual, pues, expresiones tales como *"los números que nos dan", "500 por 3 nos daría 1.500"*, y entre otras que quedan implícitas, hacen referencia al uso de la generalización algebraica puesto que el empleo de algunos esquemas operacionales deja ver el tratamiento de una pro-analiticidad.

Por eso, era necesario direccionar el ítem *f* hacia la explicitud de lo indeterminado (el número de cualquier día), como también su carácter operatorio.

L14. PM: Entonces ahora la pregunta dice para cualquier término, o sea, ustedes no saben que día (…) *[Antonio y Santiago interrumpen simultáneamente al profesor Miguel]*.

L15. Antonio: pueden hacernos.

L16. Santiago: nos pueden dar.

L17. PM: Entonces ¿cómo harían ustedes?

L18. Valentina: Escoger un día.

L19. Santiago: No

L20. Antonio: No

L21. PM: ¿Qué relación encuentran ustedes en el número de botellas y el número del día? Por ejemplo, empecemos con estos, para el día 1, 3 botellas, para el día 2, 6 botellas, para el día 3, 9 botellas.

L22. Valentina: que va como por la tabla, 3 por 1, 3, 3 por 2, 6, 3 por 3, 9, así sucesivamente.

L23. PM: Ahora supongamos que no conocemos el número del día. Entonces, sabemos que hay que multiplicar 3 *[hace una pausa]*.

L24. Valentina: por 4.

L25. PM: ¿Por qué por 4?

L26. Santiago: 3 por el número que nos den del día.

Se logra valorar en la afirmación L18 *"Escoger un día"* enunciada por Valentina que aún existe la necesidad de recurrir a un caso en particular, lo cual se reafirma en L24 *"por 4"*. Con base en estas afirmaciones, se sugiere que la estudiante aún manifiesta rasgos de pensamiento algebraico factual.

Con respecto a la afirmación enunciada en L26 *"3 por el número que nos den del día"* Santiago parece estar marcando el reconocimiento de una generalización algebraica contextual, puesto que propone una fórmula en la cual se explícita la indeterminancia *"el* *número que nos den del día”* y su carácter operatorio *“3 por el número que nos den del día”*. En efecto, se presenta una evolución de pensamiento algebraico factual a contextual. A continuación, se ilustra el mensaje escrito por Santiago (ver Figura 9).

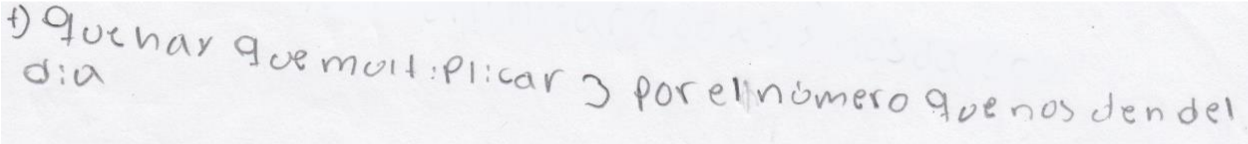


Figura 9. Producción de Santiago para dar respuesta al ítem f)

El análisis de los procesos de generalización a los que recurre Santiago en el desarrollo de la tarea 1, sugiere que se presenta una generalización algebraica factual y, posteriormente, se avanza para lograr una generalización algebraica contextual.

En seguida se presenta un episodio respecto al mismo ítem f), que ilustra que el estudiante Antonio aún no toma conciencia de la indeterminancia puesto que sus respuestas apelan a términos particulares de la secuencia.

L1. PM: ¿Cómo lo harías? *[preguntándole a Antonio respecto con el ítem f)]*.

L2. Antonio: Entonces sería el día 30, aquí sería una multiplicación que seria 30 por 3.

L3. Santiago: Antonio no lo ha entendido. Usted no lo ha entendido. Que el número del día que nos den hay que multiplicarlo por el 3.

L4. Antonio: ¡Ya entendí! O sea, digamos si es el día 20, nosotros multiplicamos 20 por 3.

La necesidad de recurrir a casos concretos de la secuencia por parte de Antonio es bastante notable en el desarrollo de la tarea. En efecto, su forma de proceder para responder el ítem f) lo conlleva a pensar en otro caso particular, caso que no se solicita en ningún momento en el desarrollo de la tarea (ver Figura 10).

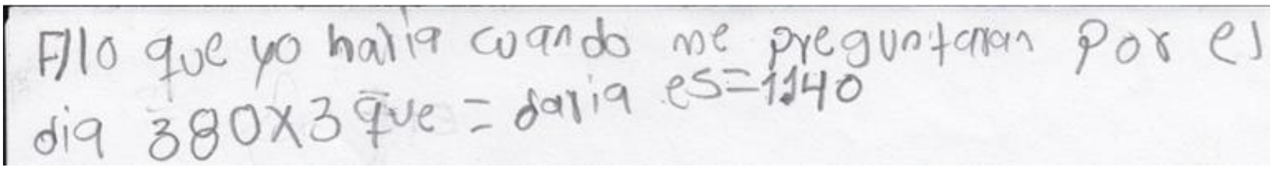


Figura 10. Producción de Antonio para dar respuesta al ítem f)

Con base en esta respuesta de Antonio, se afirma que este estudiante aún manifiesta una forma de pensamiento algebraico factual. En la cual lo indeterminado es representado tácitamente por un símbolo numérico ("380") y un carácter operatorio que hace uso de un lenguaje escrito y símbolos de igualdad como expresiones semióticas.

En cuanto a la respuesta de Valentina al ítem f), se valora el siguiente episodio en el cual Santiago interviene para explicarle a su compañera.

L1. PM: ¿Valentina aún no entiendes? *[Santiago interviene]*.

L2. Santiago: Que usted. Un ejemplo *[hace una pausa]*. Yo *[hace una pausa]*. Usted no sabe nada de eso. Entonces yo le digo que multiplique el 3 por el número del día que le den.

L3. PM: Si le entiendes.

L4. Valentina: ¡Ujum!

L5. PM: Supón que le tienes que escribir un mensaje a una amiga. Entonces ¿tú qué le escribirías a tu amiga? (ver Figura 11).

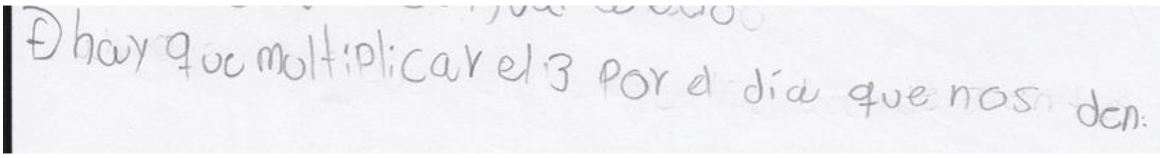


Figura 11. Producción de Valentina para dar calcular cualquier término de la secuencia numérica.

Este episodio sugiere que Valentina hace explícita una generalización algebraica contextual. Sin embargo, no es una generalización deducida propiamente por la estudiante. Más bien, está basada en la intervención que hace Santiago en L2 *"Que usted. Un ejemplo [hace una pausa]. Yo [hace una pausa]. Usted no sabe nada de eso. Entonces yo le digo que multiplique el 3 por el número del día que le den"*. Por tanto, se puede concluir que la estudiante aún presenta rasgos de pensamiento algebraico factual ya que no hubo deducción propia de la fórmula algebraica en términos de una generalización algebraica contextual.

4.2 Análisis de las producciones de los estudiantes en la tarea 2

Para el desarrollo de esta tarea se empleó una sesión de 60 minutos aproximadamente, el jueves 14 de noviembre de 2019, de 11:00 AM hasta las 12:00 PM en la sala de sistemas de la Institución Educativa Pedro Antonio Molina. Se trabajó de manera grupal, realizando una grabación fílmica con los estudiantes de 50 minutos. Al terminar el desarrollo de la tarea se recogieron las hojas de trabajo de los estudiantes.

El investigador (PM) les explica a los estudiantes que realizarán una tarea de manera conjunta. Seguidamente, les solicita que por favor colocaran su nombre, grado y edad en el encabezado de la tarea; luego les pide a sus estudiantes leer la consigna de la tarea para proceder a responder las preguntas.

Se presenta a continuación el análisis del primer ítem de la primera tarea de forma general para los tres estudiantes puesto que todos interactuaron simultáneamente. A partir del interrogante ¿Qué observas en la secuencia de figuras? todos los estudiantes logran identificar la variación en la estructura numérica, como se muestra en el siguiente episodio:

L1. PM: ¿Qué observas en la secuencia de figuras? ¿Valentina qué observas tú?

L2. Valentina: Que en una figura hay cuatro palos, en la otra hay siete y en la otra hay diez.

L3. PM: ¿Qué observaste tú Santiago?

L4. Santiago: Yo observo que en cada posición van aumentando los palitos.

L5. PM: ¿Y tú Antonio?

L6. Antonio: Yo iba a decir lo mismo que él (Santiago).

En este episodio los estudiantes con el uso de expresiones tales como L2 *"Valentina: Que en una figura hay cuatro palos, en la otra hay siete y en la otra hay diez."* y L4 *"Santiago: Yo observo que en cada posición van aumentando los palitos."* conllevan a pensar que están reconociendo únicamente la variación numérica de "*palos"* o "*palitos"* en la secuencia de figuras, pero, al parecer, no caen en cuenta de la variación numérica en las posiciones de la secuencia.

Sin embargo, en el siguiente episodio, correspondiente al ítem 2 de la tarea, se logró valorar el reconocimiento de la comunalidad y la variación numérica en las posiciones de la secuencia, por parte de los estudiantes.

L1. PM: ¿Qué sucedió de la posición 1 a la posición 2?

L2. Antonio: Se aumentaron los palitos.

L3. PM: Se aumentaron los palitos ¿Y en cuánto se aumentaron los palitos?

L4. Antonio: En tres.

L5. PM: ¿Y de la posición 2 a la posición 3?

L6. Antonio: En *[hace una pausa]* tres también.

L7. PM: ¿Tú también estás de acuerdo? *[preguntándole a Valentina respecto con el ítem b)]*.

L8. Valentina: Si, profe.

L9. Santiago: Profe, yo observé que la posición va aumentando también.

L10. Valentina: Yo también.

L11. Santiago: Cada vez va posición 1, después posición 2.

Obsérvese que las líneas 9 y 10, *"Santiago: Profe, yo observé que la posición va aumentando también*" y *"Valentina: Yo también",* respectivamente, permiten sugerir que los estudiantes Santiago y Valentina reconocen la variación numérica de las posiciones de la secuencia figural.

L12. PM: Entonces. En conclusión, ¿qué sucedió de la posición 1 a la posición 2?

L13. Valentina: Que van aumentando.

L14. PM: ¿En cuánto?

L15. Valentina: En tres.

L16. PM: ¿Y de la posición 2 a la posición 3?

L17. Santiago: Otros tres.

L18. PM: O sea, que si se preguntara por la posición 4.

L19. Santiago: Aumentan tres más.

Nótese que expresiones tales como L15 *“Valentina: En tres”*, L17 *“Santiago: Otros tres”*, y L19 *“Santiago: Aumentan tres más”* conducen a pensar que los estudiantes Valentina y Santiago han logrado identificar la comunalidad de la secuencia.

El próximo episodio corresponde al desarrollo de los ítems c) y d) de la tarea, en los cuales los estudiantes hacen uso de la comunalidad de la secuencia para calcular casos concretos mediante el uso de una generalización aritmética.

L1. PM: Escriba la secuencia numérica, contando el número de palillos de cada figura *[lee el ítem 3 de la tarea]*.

L2. Valentina: Profe, en la primera figura hay cuatro palitos, en la segunda hay siete y en la tercera hay diez.

L3. PM: O sea, ¿ustedes ya saben en la posición 4 cuántos palitos les tiene que dar?

L4. Valentina: Trece.

L5. PM: Muy bien. Entonces ustedes cuentan hasta trece. Para la posición séptima ¿cuántos palitos habría?

L6. Santiago: 21.

L7. PM: ¿21? ¿Por qué 21?

L8. Santiago: ¡Vee! 22.

L9. PM: 22. ¿Por qué 22?

L10. Santiago: porque 16 más 3, 19, más 3, 22.

L11. PM: ¿Y ese 16 de dónde lo sacas?

L12. Santiago: Porque en la cuarta posición me da 16 y le sumaria 3 más, entonces me (…) *[Valentina interrumpe preguntando, ¿en la cuarta?].*

L13. Santiago: ¡Ay! Verdad.

L14. Valentina: ¡En la quinta!

L15. PM: Deja hablar a Santiago *[diciéndole a* Valentina*]*. Santiago, habla.

L16. Santiago: ¡Ah!, sí. Ve en la quinta me da 16 palitos, y le sumo otras dos posiciones, que son 6. Entonces me daría 22.

Explicaciones tales como L10 *"Santiago: porque 16 más 3, 19, más 3, 22"* y L12 *"Santiago: Porque en la cuarta posición me da 16 y le sumaria 3 más"*, permiten señalar que el estudiante Santiago utiliza de manera reiterada expresiones como *"más 3"* o *"le sumaria 3 más"* para calcular algunos casos concretos de la secuencia figural.

En efecto, se deja ver que el estudiante reconoce una generalización aritmética apoyada en el cálculo de subtotales, como se aprecia también en L16 *"Santiago: ¡Ah!, sí. Ve en la quinta me da 16 palitos, y le sumo otras dos posiciones, que son 6. Entonces me daría 22".*

En el siguiente episodio se presenta el desarrollo de los ítems *e* y *f* de la tarea, en el cual los estudiantes insisten en el uso de una generalización aritmética, apoyada en el cálculo de subtotales.

L1. PM: Calcula el número de palillos de la posición 12 ¿Tu qué opinas Santiago?

L2. Santiago: Que hay que ir sumando de tres en tres, hasta que de la posición 12. Por ejemplo, la posición séptima me dio *[hace una pausa]* 22, hay que sumarle cinco posiciones más.

L3. PM: Entonces ¿cómo harías eso?

L4. Santiago: Sumando 22 más 3, 25 más 3.

L5. PM: Hagamos la pregunta *f) [haciendo referencia a la pregunta f) de la tarea].* ¿Cuántos tendría la posición (…) *[Antonio interrumpe a PM, diciendo, ¡esperece!]*.

L6. Antonio: Si la posición séptima tiene 21 entonces la posición octava tendría 24, ¡ah!, no, 22 tiene (…) *[Santiago interrumpe a Antonio, diciendo, 25 la octava]*. Tendría 25, después en la novena tendría 28 y en la diez tendría 31, y en la once tendría 34, y en la doce tendría 36.

L7. Santiago: ¡37! (ver Figura 12).

L8. Antonio: ¡No!, 37, 37. En la posición 12 tendría 37.

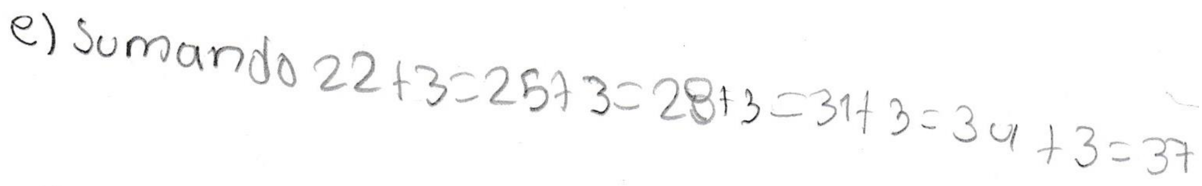


Figura 12. Producción de Santiago para hallar el número de palillos de la posición 12.

L9. PM: ¡Muy bien! Ahora has la posición 19, la que sigue, la *f) [haciendo referencia a la pregunta f) de la tarea]*.

L10. Valentina: ¡Me da 37! (ver Figura 13).

Figura 13. Producción de Valentina para hallar el número de palillos de la posición 12.

L11. PM: ¿37? ¿Cómo lo hiciste? Escuchemos a Valentina ¿De dónde sacaste este 15?

L12. Valentina: Sumando los tres, por la tabla, 3 por 5, 15.

L13. PM: 3 por 5, 15. Muy bien. Explícame lo que tú hiciste.

L14. Valentina: primero conté cuanto le faltaba a 7 para llegar a 12. Después puse los tres cincos, ¡ve!, los cinco tres que me faltaban y después sume 15 más 3, ¡ve!, más 22.

El desarrollo del ítem *e* en lo que respecta a las respuestas de los estudiantes Santiago y Valentina, *"sumando 22+3=25+3=28+3=31+3=34+3=37"* y *"sume 22+15 me da igual a 37",* respectivamente, permite sugerir que para ambos estudiantes el uso recurrente de calcular subtotales es necesario para encontrar casos concretos de la secuencia.

L15. Antonio: ¡Profesor antes de que se me olvide la respuesta!, la posición 19 tendría 61.

L16. Santiago: ¡aja!, ¡58!

L17. PM: Haber, escuchemos a Santiago. Santiago ¿tú como lo hiciste?

L18. Santiago: Sumando 37 más 3, me da 40, más 3 me da 43, más 3 me da 46, más 3 me da 49, más 3 me da 52, más 3 me da 55 y más 3 me da 58 (ver Figura 14).

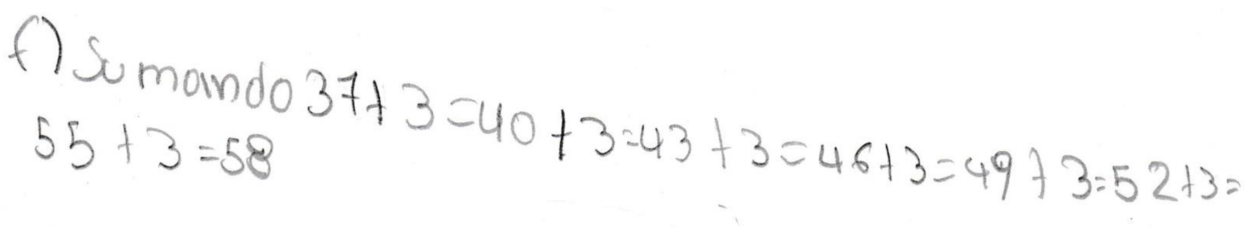


Figura 14. Producción de Santiago para hallar el número de palillos de la posición 19.

L19. Antonio: ¡Da 61!

L20. PM: ¿Y tú cómo la hiciste? Escuchemos a Antonio.

L21. Antonio: porque daría 37, ¡ah no si, estaba mal, ya me acorde por qué!, porque 37 *[hace una pausa]* y era 40, yo estaba sumando era por 4.

L22. PM: Entonces, podemos analizar que en cada posición van sumando tres palitos. Cierto. Pero entonces, yo les propongo algo, ustedes en vez de estar sumando tres más tres, más tres, porque no se ayudan como lo hizo Valentina. Ella estaba haciendo las sumas como nosotros, pero ella colocó el resultado de 15, o sea, tomó los cinco tres que puso y los sumo.

L23. Valentina: ¡Lo multiplique!

L24. PM: O sea, tu cogiste el 3 y lo multiplicaste por ¿Cuánto? *[hace una pausa].*

L25. Valentina: por 5.

L26. PM: Por 5. Muy bien. Entonces ¿qué quiere decir eso? que nos podemos ayudar *[hace una pausa].*

L27. Santiago: Con las tablas.

L28. Valentina: Con las tablas

L29. PM: Con las tablas ¡muy bien! Como nos podemos ayudar con las tablas, eso nos ahorra *[hace una pausa].*

L30. Valentina: Tiempo.

L31. PM: Tiempo y trabajo, porque ya no estamos sumando, sume, sume y sume. Sino que, vamos haciendo las multiplicaciones para calcular los resultados más rápidos. Ahora, teniendo claro esto de la multiplicación ¿Cómo harían la *f)* ya sabiendo lo de la multiplicación?

L32. Valentina: Después de contar hasta 12, contaría cuanto le hace falta al 12 para llegar a 19, colocó los siete tres y hay multiplico.

L33. PM: Haber ayudémosle a Valentina. A 37 (palillos) le corresponde la posición 12 ¿Cuántos (palillos) tienes que sumar hasta la posición 19?

L34. Valentina: 3 por 7, 18.

L35. PM: O sea, siete posiciones más dan 21(palillos). O sea, que a 37 tienes ¿Qué?

L36. Valentina: Multiplicarle 21.

L37. Santiago: ¡Sumarle 21! *[con intención de corregir a* Valentina*]*.

Las expresiones L23 *"lo multiplique"*, L34 *"3 por 7, 18"* y L36 *"Multiplicarle 21"* ofrecidas por Valentina dejan ver que sustenta sus cálculos con la operación de la multiplicación para calcular subtotales. Esto último sugiere, tal vez, una generalización aritmética más sofisticada que la propuesta por Santiago para calcular las posiciones 12 y 19, la cual se basa en largas cadenas de operaciones, por ejemplo, L20 "*Santiago: Sumando 37 más 3, me da 40, más 3 me da 43, más 3 me da 46, más 3 me da 49, más 3 me da 52, más 3 me da 55 y más 3 me da 58*".

L38. Antonio: ah sí, da 58, casi que no lo descubro.

L39. Valentina*:* da 58, profe.

Hasta este momento los desarrollos de los estudiantes ponen de manifiesto una generalización aritmética, sustentada en el cálculo de subtotales, los cuales se apoyan en el uso de la suma y la multiplicación.

Con base en estos desarrollos era necesario lograr hacer consientes a los estudiantes del patrón de crecimiento, pero de forma analítica, es decir, que ya no recurrieran al cálculo de subtotales, ni que dependieran de éstos para calcular casos concretos posteriores.

Por tanto, a partir del ítem *g*, se esperaba que los estudiantes lograran establecer una relación entre la cantidad de palillos y el número de la posición de una o varias de las figuras ya trabajadas en los ítems anteriores, con el fin de explicitar la relación entre el patrón de crecimiento con el número de la posición de una figura conocida y el término independiente de la secuencia figural.

En ese sentido, el PM invita a los estudiantes a realizar, con la ayuda de un lápiz de color, una inscripción sobre uno de los palillos de cada una de las figuras ilustradas en la hoja de la tarea (ver Figura 15). Esta invitación tenía como objeto, que los estudiantes lograran identificar el término independiente de la secuencia figural e intentar establecer relaciones que les permitieran manifestar una generalización algebraica de patrones.

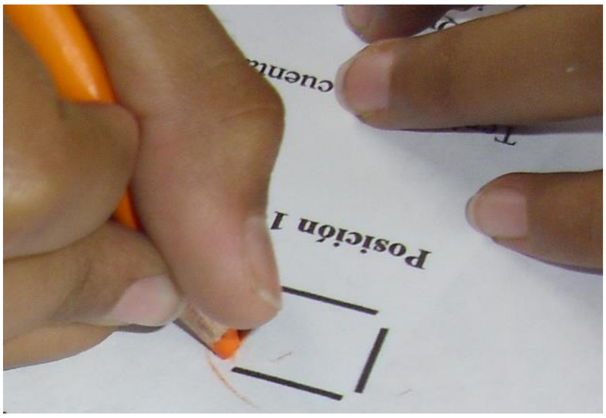


Figura 15. Producción de Valentina. Inscripción en la figura correspondiente a la posición 1 de la secuencia de la tarea 2.

Seguidamente, se presenta el siguiente episodio que permitió reconocer y establecer relaciones respecto a los primeros términos de la secuencia Figural.

L1.PM: ¿Qué observan en la posición 1?

L2. Valentina: profe, yo estoy observando que aquí como ya subrayamos uno *[haciendo referencia al palillo coloreado de la figura 1 en su hoja de trabajo]*, teníamos que hacer de cuenta que no existe, pero aquí se ve como si fuera el número tres, porque hay tres palitos en negro. Y este se suma *[señalando el palillo coloreado]*.

L3.PM: Entonces, Valentina los palitos negros ¿qué significan?

L4. Valentina: El tres.

L5. Antonio: No. Significan lo que tenemos en la posición.

L6. Valentina: si ve que sí, aquí significan dos tres *[señalando la figura de la posición 2]*, aquí un tres *[señalando la figura de la posición 1]*, y aquí tres, tres *[señalando la figura de la posición 3]*.

L7.PM: Entonces, asociando eso. En la primera *[haciendo referencia la figura de la posición 1]* ¿Cuántos grupos de tres (palillos negros) identificas?

L8. Valentina: Uno.

L9. PM: ¿Y en la posición 2?

L10.Valentina: Dos.

L11. PM: ¿Y en la posición 3?

L12. Valentina: Tres.

L13.PM: O sea, que en la posición 4 ¿Cuántos?

L14. Valentina: Cuatro.

L15.PM: ¿Y en la cinco? *[haciendo referencia la figura de la posición 5].*

L16.Santiago: Cinco. *[Valentina, responde simultáneamente diciendo, cinco]*.

L17.PM: ¿Y en la 10? *[haciendo referencia la figura de la posición 10].*

L18.Valentina: Diez.

L19.Santiago: El tres va ser lo mismo que el número de la posición.

L20.PM: ¿Esto que nos quiere decir? *[haciendo referencia a L19]*.

L21.Valentina: que es como la tabla del 3, pero sólo da un resultado. Hay si ya contar el que delineamos.

En este episodio los estudiantes exploran las relaciones entre los elementos observados (palillos negros, palillo coloreado y el número de la posición) y reconocen una correspondencia entre la cantidad de veces que se repite el número tres, representado por un grupo de tres palillos negros, y el número de la posición de la figura.

Es decir, realizan agrupaciones de tres palillos negros en cada una de las figuras ilustradas en la secuencia y se percatan que la cantidad de agrupaciones es equivalente al número de la posición de la figura, ya que expresiones tales como "*pero aquí se ve como si fuera el número tres, porque hay tres palitos en negro", "aquí significan dos tres", "aquí un tres", "y aquí tres, tres", "el tres va ser lo mismo que el número de la posición"* y *"que es como la tabla del 3, pero sólo da un resultado. Hay si ya contar el que delineamos"* están marcando tal reconocimiento.

Este reconocimiento por parte de los estudiantes podría sugerir que, analíticamente, eran capaces de calcular el número de palillos correspondientes de cualquier figura de la secuencia, puesto que se había logrado establecer una abducción analítica entre la característica común (3 palillos) y el número de la posición (indeterminancia) de la figura, lo que parecía permitirles calcular el número de palillos negros correspondientes de una determinada figura, y, posteriormente, sumarlo con el término independiente (palillo coloreado) y así obtener la totalidad de palillos de la figura.

Para corroborar esta abducción analítica encontrada por los estudiantes se les solicitó realizar los ítems *h* e *i* de la tarea. Enseguida, se presenta el episodio correspondiente a estas preguntas de la tarea.

L1. Valentina: Encuentra una forma rápida de hallar el número de palillos de la figura que ocupa la posición 100. Justifica tu respuesta *[lee el ítem h]*

L2. PM: ¿Cómo sería entonces? Con base en lo que hemos hecho.

L3. Santiago: Multiplicar el 3 por 100, y sumarle 1. Daria 301 (ver Figura 16).

L4. PM: ¡Muy bien! Y si yo les pregunto por la posición 1000.

L5. Santiago: 3 por 1000 *[hace una pausa]*.

L6. Valentina: 3001.

L7. PM: Y por la posición 1.000.000.

L8. Valentina: 3.000.001 *[Santiago contesta simultáneamente diciendo: 3.000.001]*.

L9. PM: Encuentra una forma rápida de hallar el número de palillos de la figura que ocupa la posición 930. Justifica tu respuesta *[lee el ítem i]*.

L10. Santiago: 2.790 y le sumamos 1, 2791.

L11. Antonio: Daria 2.790.

L12. PM: ¿Sí?

L13. Antonio: 2.791.

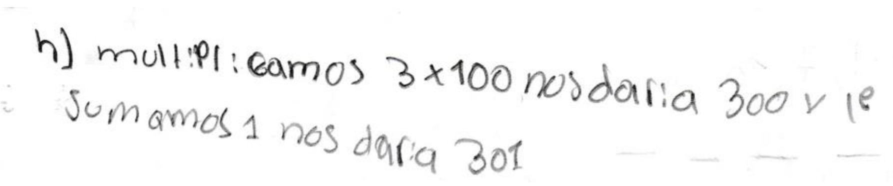


Figura 16. Producción de Santiago para hallar el número de palillos de la posición 100.

En las líneas L2 *"Santiago: Multiplicar el 3 por 100, y sumarle 1. Daria 301"* y L10 "*Santiago: 2.790 y le sumamos 1, 2.791"* se sugiere la manifestación de una generalización algebraica factual, en la cual el rasgo analítico reposa en una proto-analiticidad explícita en tanto que hay una operatividad entre la característica común y la indeterminancia, la cual es tácita o queda sin nombrar.

Así mismo, en las líneas L6 *"Valentina: 3.001"* y L8 *"Valentina: 3.000.001"* se puede observar que las afirmaciones hechas por esta estudiante corresponden, efectivamente, a la cantidad de palillos de las posiciones 1.000 y1.000.000, respectivamente. Posiciones que fueron propuestas por fuera de la tarea con la intención de comprobar la aplicación de la abducción analítica en términos no dados.

Con base en el episodio presentado, se logró identificar que los tres estudiantes eran capaces de calcular cualquier término de la secuencia a través de una generalización algebraica factual, la cual es un elemento constituyente del pensamiento algebraico factual.

El desarrollo del siguiente y último ítem de la tarea pretendía que lo indeterminado (la posición de la figura) y su carácter operatorio se volvieran objeto del discurso de los estudiantes. En el desarrollo del ítem *j*, se valoran las respuestas de Antonio y Santiago.

Por una parte, Santiago, enuncia *"que multiplicara el 3, si va de tres en tres, por el número de la posición y sumarle 1"*; y por otra, Antonio escribe en su hoja de respuestas *"diría que multiplicamos el número que vaya aumentando en la posición por 3 y al número que nos dé, le sumamos el palito que sobra" (*ver Figura 17).

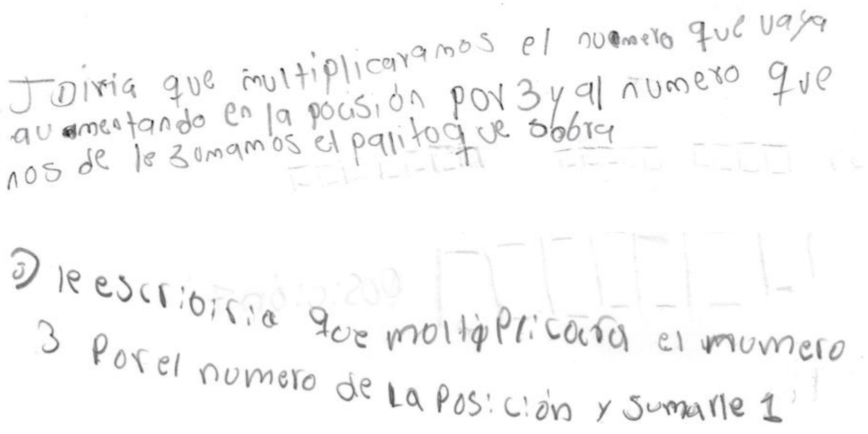


Figura 17. Producciones de Antonio y Santiago para calcular cualquier término de la secuencia figural.

Las producciones de Antonio y Santiago en la Figura 17, ponen de manifiesto la explicitud de lo indeterminado y su carácter operatorio, es decir, la analiticidad, por medio de una frase que corresponde con lo solicitado en el ítem *j*, permitiendo sugerir que hay una evolución del pensamiento algebraico factual al contextual en estos estudiantes.

Para ser más exhaustivo, obsérvese que la expresión semiótica para referir lo indeterminado y su carácter operatorio en ambos estudiantes es distinto. Santiago refiere la indeterminancia como *"el número de la posición"*, mientras que Antonio la refiere como *"el número que vaya aumentando en la posición"*, lo que conlleva a pensar que, para él, la posición, efectivamente, está cambiando o variando de forma creciente, quizás, por la extrapolación de los casos remotos en la tarea.

4.3 Análisis de las producciones de los estudiantes en la tarea 3

Para el desarrollo de esta tarea se empleó una sesión de 40 minutos aproximadamente, el martes 19 de noviembre de 2019, de 08:00 AM hasta las 8:40 AM en la sala de sistemas de la Institución Educativa Pedro Antonio Molina. Se trabajó de manera grupal, realizando una grabación fílmica con los estudiantes de 30 minutos. Al terminar el desarrollo de la tarea se recogieron las hojas de trabajo de los estudiantes.

El investigador (PM) les explica a los estudiantes que realizarán una tarea de manera conjunta. Seguidamente, les solicita que por favor colocaran su nombre, grado y edad en el encabezado de la tarea; luego les pide a sus estudiantes leer la consigna de la tarea para proceder a responder las preguntas.

A continuación, se expone el primer episodio correspondiente a los ítems *a* y *b* de la tarea.

L1. PM: ¿Cuánto dinero habrá ahorrado Carlos en la cuarta semana?

L2. Santiago: 26.000

L3. PM: ¿Por qué 26.000?

L4. Antonio: Porque aumentamos 6.000 más 20.000.

L5. ¿Cuánto dinero habrá ahorrado Carlos en la semana 7?

L6. Antonio: 26, 32 en la semana 5, 38 en la semana 6, 48 en la semana 7.

L7. Santiago: 7 por 6, 42.

L8. PM: ¿Por qué multiplicas el 7 por el 6? *[Preguntándole a Santiago]*.

L9. Santiago: Porque la semana 7 y el valor es 6.000, entonces 7 por 6, 42.

L10. PM: ¿42.000? *[Preguntándole a Santiago]*.

L11. Santiago: Sí.

L12. PM: ¿Tú lo que estás multiplicando es el número de la semana por el valor 6.000?

L13. Santiago: Sí, señor.

En el actual episodio se puede valorar como en las líneas L4 *"Antonio: Porque aumentamos 6.000 más 20.000"* y L6 *"Antonio: 26, 32 en la semana 5, 38 en la semana 6, 48 en la semana 7"*, se sugiere pensar que el estudiante Antonio está marcando el reconocimiento de una abducción aritmética, la cual utiliza para calcular los términos 4, 5, 6 y 7 de la secuencia numérica. No obstante, no se percata en dar los términos de la secuencia en unidades de mil, esto es, 32.000, 38.000 y 48.000.

En cuanto a las líneas L7 *"Santiago: 7 por 6, 42"* y L9 *"Santiago: Porque la semana 7 y el valor es 6.000, entonces 7 por 6, 42"*, Santiago parece estar marcando el reconocimiento de una abducción analítica debido a que propone una pro-analiticidad, la cual está representada en la forma en cómo opera con la característica común (6.000) y el número de la semana (7), esto corroborado por el PM al preguntar en L12 *"¿Tú lo que estas multiplicando es el número de la semana por el valor 6.000?"* *,* en la cual el estudiante responde en L13 *"Sí, señor"*.

Sin embargo, la pro-analiticidad expuesta por Santiago solamente permite dar cuenta del patrón de crecimiento ($6.000n$), más no reconoce el término independiente de la secuencia numérica. Pero, se valora en el estudiante la manera en cómo opera analíticamente con lo indeterminado (número de la semana) de forma tácita, lo que permite reconocer en el estudiante un avance en pensamiento algebraico factual, pese a que no se percate todavía del término independiente de la secuencia numérica.

Seguidamente, en el próximo episodio las intervenciones de Valentina permitieron la toma de conciencia del término independiente de la secuencia numérica por parte de los demás estudiantes.

L1.PM: ¿Y en la semana 8?

L2. Santiago: 50.000

L3. Valentina: 52.000.

L4. Santiago: No.

L5. Valentina: Si, sí, porque más los 2.000 que le dieron los papás.

L6. PM: ¿Por qué 52.000?

L7. Valentina: Porque 44.000 más 6 son 50*[PM, interviene diciendo: 50.000]* y los 2.000 que le dieron los papás son 52.000.

L8. Santiago: ¿Pero ya no se habían sumado? *[haciendo referencia a los 2.000 que ya se habían sumado]*.

L9. Valentina: No, porque siempre se tienen que sumar *[haciendo referencia a que siempre se deben sumar los 2.000].*

En este episodio se aprecia la forma en que Valentina con expresiones como L5 *"Si, sí, porque más los 2.000 que le dieron los papás"*, L7 *"… y los 2.000 que le dieron los papás son 52.000"* y L9 *"No, porque siempre se tienen que sumar"* hace un esfuerzo por mostrar a sus compañeros la presencia del término independiente de la secuencia numérica, no obstante, a que sus cálculos no son correctos.

Aprovechando la proto-analiticidad que Santiago había manifestado en el episodio anterior y la toma de conciencia del término independiente por parte de los estudiantes en el actual episodio, el PM les propone a los estudiantes retomar la pregunta respecto al término 7 y 8 de la secuencia, tal como se muestra a continuación.

L1. PM: Para la semana 7, entonces, lo que ustedes me habían dicho era que multiplicaban 6 por ¿cuánto?

L2. Santiago: por 7.

L3. PM: por 7 y les daba 42.

L4. Valentina: más 2.

L5. PM: 44.000 *[los estudiantes responden simultáneamente, 44.000]*. Entonces, ustedes han encontrado una relación entre el número de *[hace una pausa, esperando a que los estudiantes propongan algún enunciado]*.

L6. Valentina: el número de la semana. *[Santiago, responde simultáneamente: el número del valor]*.

L7. PM: El número de la semana con ¿Quién?

L8. Santiago: con el valor *[haciendo referencia al valor 6.000]*.

L9. PM: ¿Y en la semana 8?

L10. Santiago: 8 por 6, 48.

L11. PM: Más los 2.000.

L12. Santiago: 50.000.

En el presente episodio se puede sugerir que los estudiantes logran conectar la proto-analiticidad propuesta por Santiago y el término independiente de la secuencia, dado que expresiones tales como L2 *"Santiago: por 7"*, L4 *"Valentina: más 2"*, L6 *"Valentina: el número de la semana"*, L8 *"Santiago: con el valor"*, L10 *"Santiago: 8 por 6, 48"* y L11 *"PM: Más los 2.000"* permiten mostrar elementos constituyentes de una analiticidad, como lo son la indeterminancia (*"por 7"*, *"el número de la semana"*) y el carácter operatorio ("*8 por 6, 48" ,"más 2","más los 2.000")*.

La analiticidad expresada en las afirmaciones de los estudiantes parece señalar que se manifiesta una posible generalización algebraica factual, porque gobierna un esquema operacional que reposa sobre números que constituyen valores constantes y variables.

Sin embargo, cabe mencionar que, en la línea L6 *"Valentina: el número de la semana"*, Valentina hace explícita la indeterminancia, es decir, hace referencia a una cantidad que varía en la secuencia, lo cual se constituye una característica del pensamiento algebraico contextual. No obstante, el tratamiento que se le da a lo indeterminado reposa en el uso de sus constituyentes (términos 7 y 8).

Para corroborar que en realidad los estudiantes habían logrado generalizar la situación en cuestión, se les solicitó responder los ítems *c* y *d,* los cuales preguntaban por el término 46 y la regla general de la secuencia numérica, respectivamente.

Para ello, se valora el siguiente episodio.

L1. PM: ¿Cuánto dinero habrá ahorrado Carlos en la semana 46?

L2. Santiago: 46 por 6, 276.000.

L3. Valentina: 276.

L4. PM: ¿Seguros? Ahí falta algo.

L5. Valentina: Los 2.000 *[Santiago responde simultáneamente: los 2.000]*.

L6. Antonio: ¡ah! Los 2.000.

L7. Santiago: 278.000.

L8. Valentina: 278 (ver Figura 18).

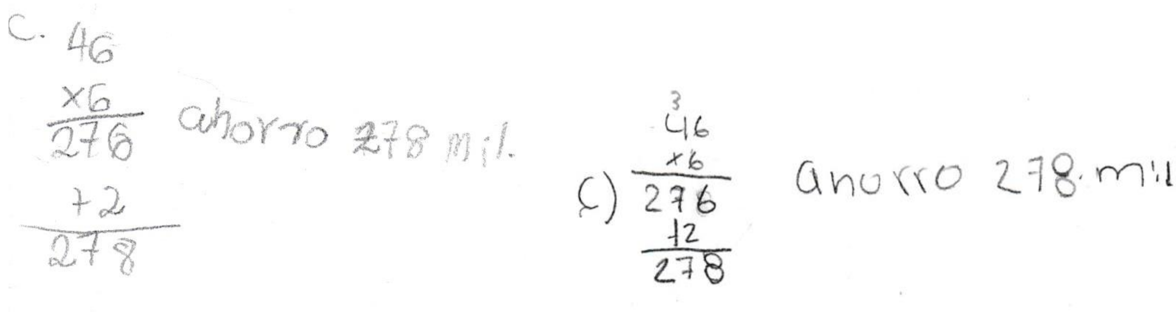


Figura 18. Producciones de Valentina y Santiago para calcular el término de la semana 46.

La Figura 18, permite sugerir que Valentina y Santiago habían logrado generalizar la situación en cuestión, pues, el esquema operacional que utilizan no sólo les permitiría calcular el término de la semana 46, sino también cualquier término de la secuencia.

Con base en este tipo de respuesta, se logra reconocer que Valentina y Santiago presentan una forma de pensamiento algebraico factual.

L9. PM: ¿Él ahorro 278? *[preguntándole a Valentina]*. Él está ahorrando en miles de pesos ¿Qué dice la *d*? *[Santiago lee la pregunta d]*.

L10. Santiago: ¡Ah! Multiplicando, multiplicar el número de la semana por el valor que nos den.

L11. PM: Pero, para este caso ¿Cuál es el valor que nos dan?

L12. Santiago: 6.000.

L13. PM: ¿Entonces?

L14. Santiago: Multiplicar el 6.000 por el número de la semana.

L15. Valentina: Hay que siempre multiplicar por el 6 y después sumarle los 2.

L16. PM: ¿Qué número es este, 6 ó 6.000? *[Preguntándole a Valentina]*.

L17. Valentina: 6.000.

L18. PM: ¿Y el 6.000 hay que multiplicarlo por? *[Hace una pausa]*.

L19. Valentina: Por el número de la semana y sumarle los 2.000.

L20. Santiago: Por el número de la semana que nos den y le sumamos 2.000.

En este último episodio, obsérvese que las intervenciones del PM posibilitan respuestas en Valentina y Santiago en un tipo de labor conjunta. Las expresiones en L4 *"PM: ¿Seguros? Ahí falta algo"* y L18 *"PM: "¿Y el 6.000 hay que multiplicarlo por?"*, sugieren que los estudiantes retomen y especifiquen el término independiente y la indeterminancia, respectivamente.

En ese sentido, el uso reiterado de las expresiones *"los 2.000"* y *"el número de la semana"* en las líneas L5, L6, L10, L14, L19 y L20, parece indicar el reconocimiento de los elementos constituyentes de la regla general de la secuencia por parte de los estudiantes. Tal como se expresa en L19 *"Valentina: Por el número de la semana y sumarle los 2.000"* y L20 *"Santiago: Por el número de la semana que nos den y le sumamos 2.000"*.

Considerando las expresiones semióticas producidas por Valentina y Santiago en las líneas L19 y L20, respectivamente, se sugiere que estos estudiantes llegan a encontrar una regla general o fórmula que se aplica a cualquier término o semana particular de la secuencia (ver Figura 19).

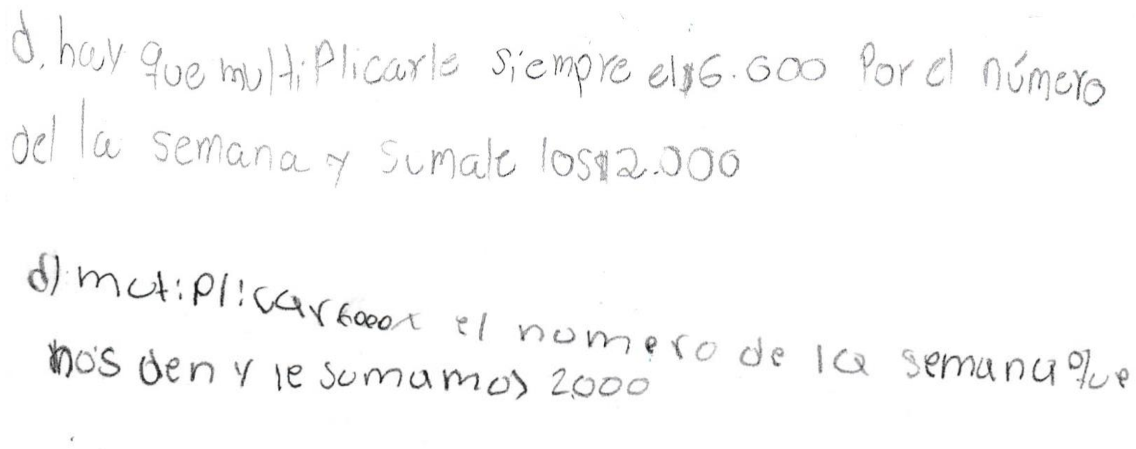


Figura 19. Producciones de Valentina y Santiago para calcular cualquier término de la secuencia numérica.

El trabajo desarrollado en esta tarea sugiere que Santiago y Valentina manifiestan una forma de pensamiento algebraico contextual, pues la indeterminancia (número de la semana) es analítica.

Obsérvese que las expresiones semióticas para referir la indeterminancia en las producciones de los estudiantes coinciden y son objeto de operatividad con cantidades conocidas como la comunalidad (6.000) y el término independiente de la secuencia (2.000).

Capítulo V: Conclusiones y reflexiones

5.1 Conclusiones

Con apoyo del marco teórico expuesto en la investigación, se diseñaron e implementaron tres tareas en correspondencia con la generalización de patrones que permitieron, con ayuda de las intervenciones apropiadas del profesor, que los estudiantes lograran pensar algebraicamente.

En la implementación de las tareas se presentó la necesidad de plantear otros interrogantes y solicitudes que no estaban explícitos en éstas por parte del PM, lo que favoreció en la manifestación de pensamiento algebraico en los estudiantes, dado que se hizo explícita la indeterminancia y su carácter operatorio, como se muestra a continuación, "***PM:*** *¿Y el 6.000 hay que multiplicarlo por?* ***Valentina****: Por el número de la semana y sumarle los 2.000".* En este ejemplo, la estudiante propone operar respecto a lo indeterminado ("por el número de la semana y sumarle los 2.000"), lo que parece indicar que el interrogante planteado por el PM fue decisivo para la manifestación de pensamiento algebraico en esta estudiante.

Desde la implementación y el desarrollo de las tareas, se puede sugerir que los estudiantes de los primeros grados de escolaridad sí logran manifestar pensamiento algebraico, conforme al tipo de pregunta que se le plantee, así como la intervención apropiada que haga el profesor en el salón de clases.

En efecto, se sugiere que no se aprende de manera individual, sino dentro de un contexto social, es decir, que no hay aprendizaje sin la ayuda de otro. El papel del profesor es el de actuar como mediador para que el estudiante lleve a cabo una toma de conciencia sobre los objetos matemáticos que le preexisten.

En el desarrollo de estas tareas se logra apreciar cómo, en un primer momento, los estudiantes necesariamente recurren a generalizaciones aritméticas sustentadas en el cálculo de largas cadenas de operaciones y de subtotales, como se muestra en los siguientes casos:

"Sumando 37 más 3, me da 40, más 3 me da 43, más 3 me da 46, más 3 me da 49, más 3 me da 52, más 3 me da 55 y más 3 me da 58" y *"¡Ah!, sí. Ve en la quinta me da 16 palitos, y le sumo otras dos posiciones, que son 6. Entonces me daría 22"*; y, en un segundo momento, recurren a generalizaciones algebraicas, como se expone a continuación: *"que multiplicara el 3, si va de tres en tres, por el número de la posición y sumarle 1"* y *"Multiplicar el 3 por 100, y sumarle 1. Daria 301"*.

En cuanto a los recursos semióticos utilizados por los estudiantes en la construcción de pensamiento algebraico, se observó que el principal es el lenguaje natural, mediante el cual las palabras y frases refieren cantidades desconocidas (en calidad de variables), números conocidos (en el contexto de un cálculo aritmético o de una generalización aritmética o algebraica), operaciones matemáticas y reglas o fórmulas verbales o escritas.

En tal sentido, en los análisis elaborados sobre las producciones escritas y orales de los estudiantes se identifican el conteo, términos deícticos, esquemas operacionales y frases claves en la construcción de pensamiento algebraico.

En relación con el conteo, permitió a los estudiantes reconocer las variaciones y la característica común en las secuencias de las tareas, lo que les posibilitó expresar sus primeras generalizaciones aritméticas basadas en largas cadenas de operaciones y de subtotales.

En cuanto a los términos deícticos que emplean los estudiantes, tanto orales como escritos, sugieren indicar un reconocimiento para designar algunos elementos que subyacen en las secuencias numéricas y figurales. En efecto, expresiones tales como *"acá"*, *"así sucesivamente"*, *"más 3"*, *"más los 2.000"*, *"más el palito que sobra"* y *"aquí"*, solo por mencionar algunos, están en correspondencia con elementos tales como la característica común, el término independiente y el terreno fenomenológico de la secuencia.

Respecto a los esquemas operacionales, favorecieron en la generalización de la situación propuesta en las tareas. Facilitando el cálculo de casos remotos y en general de cualquier término de la secuencia, aun cuando el tratamiento con lo indeterminado era tácito.

Referente a las frases claves, estas representan abducciones analíticas para calcular cualquier término de la secuencia, mediante la sincronización de cantidades conocidas y desconocidas. Algunas de estas frases son *"le escribiría que multiplicara el número 3 por el número de la posición y sumarle 1"* y *"hay que multiplicar siempre el $6.000 por el número de la semana y sumarle los $2.000".*

La inscripción sobre figuras, propuesta por el PM, utilizando un lápiz de color, permitió que los estudiantes lograran establecer un vínculo entre los palillos negros y el palillo coloreado en las figuras de la secuencia de la tarea 2. Posibilitando la emergencia de generalizaciones algebraicas de patrones.

De esto se sugiere que hay que enseñarle a observar a los estudiantes aquellas correspondencias que no son capaces de ver por sí mismos. En este aspecto, se corrobora que el papel de profesor es capital para el buen desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes.

Identificar estos recursos semióticos que tienen a su alcance y a través de los cuales los estudiantes logran acercarse y evolucionar hacia esas formas de pensamiento algebraico, favorece al profesor en ser más sensible frente a esas formas tempranas de aproximación al álgebra escolar.

De los análisis elaborados sobre las producciones orales y escritas de los estudiantes durante las tareas propuestas sobre generalización de patrones, se puede afirmar que el grupo de estudiantes presenta formas de pensamiento algebraico factual y contextual.

Los resultados permiten constatar que los recursos semióticos antes y durante el problema del mensaje son distintos, en el primer caso se enuncian expresiones como

"*Multiplicar el 3 por 100, y sumarle 1"*, mientras que en el segundo caso se produjeron expresiones como *"que multiplicara el 3, si va de tres en tres, por el número de la posición y sumarle 1"*.

El problema del mensaje resultó ser un elemento clave para la manifestación de pensamiento algebraico contextual. En su abordaje la indeterminancia y su carácter operatorio son objeto del discurso de los estudiantes. En este aspecto, se afirma que hay una evolución del pensamiento algebraico factual hacia el contextual.

En particular, el análisis de la tarea 1 sugiere que Antonio y Valentina presentan una forma de pensamiento algebraico factual. En el caso de Antonio, al enfrentarse al problema del mensaje recurre inmediatamente a casos particulares, incluso para responder recurre a otro caso particular que no se solicitó ni en la tarea ni en las intervenciones del profesor Miguel (ver Figura 10). En el caso de Valentina, se presenta igualmente la necesidad de recurrir a casos concretos, por ejemplo, *"por 4"*.

Esta necesidad de recurrir a casos particulares de la secuencia es característica propia del pensamiento algebraico factual, puesto que la indeterminancia queda sin nombrar. Por su parte, Santiago presenta una forma de pensamiento algebraico factual que avanza hacia una forma de pensamiento algebraico contextual.

El análisis de la tarea 2, señala que los estudiantes Santiago y Antonio presentan, en un comienzo, una forma de pensamiento algebraico factual y, posteriormente, avanza a una forma de pensamiento algebraico contextual, mientras que Valentina presenta una forma de pensamiento algebraico factual. En el primer caso, Santiago y Antonio para responder al problema del mensaje recurren a expresiones semióticas que involucran la indeterminancia y su carácter operatorio (ver Figura 17). En el segundo caso, Valentina recurre a un esquema operacional en el cual la indeterminancia queda sin nombrar.

El análisis de la tarea 3, indica que los estudiantes Valentina y Santiago presentan una forma de pensamiento algebraico factual que avanzó hacia una forma de pensamiento algebraico contextual. Ambos estudiantes, en un comienzo, generalizan la situación mediante una generalización algebraica factual (ver Figura 18) y; luego, avanzan hacia la elaboración de un mensaje que constituye una generalización algebraica contextual (ver Figura 19). En efecto, en este caso, el problema del mensaje provoca una continuidad entre lo particular y lo general.

Seguidamente, se presenta una rejilla que expone las expresiones semióticas de las indeterminancias y sus correspondientes caracteres operatorios de algunas producciones de

los estudiantes, las cuales se consideran casos representativos de pensamiento algebraico contextual (ver Tabla 1).

Estudiante	**Expresión semiótica de la indeterminancia**	**Analiticidad o carácter operatorio con la indeterminancia**
Valentina	"el número de la semana"	"hay que multiplicarle siempre el $6.000 por el número de la semana y sumarle los $2.000"
Santiago	"el número de la posición"	"que multiplicara el número 3 por el número de la posición y sumarle 1"
Antonio	"el número que vaya aumentando en la posición"	"diría que multiplicamos el número que vaya aumentando en la posición por 3 y al número que nos dé, le sumamos el palito que sobra"

Tabla 1. Rejilla de las expresiones semióticas de las indeterminancias y sus correspondientes caracteres operatorios de algunas producciones de los estudiantes.

Cabe llamar la atención sobre cómo en el desarrollo de las tareas los estudiantes utilizaron diferentes estrategias en la generalización de patrones. La estrategia más frecuente fue el uso recursivo de la comunalidad. Esta estrategia pone de manifiesto la identificación de la diferencia constante entre los términos de la secuencia y el uso del conteo como procedimiento para calcular términos posteriores.

También se observó una estrategia basada en una relación de proporcionalidad. En la implementación de la tarea 2, por ejemplo, la solicitud que el PM hace a los estudiantes respecto a delinear uno de los palillos en cada una de las figuras de la secuencia, permitió que los estudiantes establecieran una relación de proporcionalidad entre la comunalidad y el número de la posición de la figura para calcular la cantidad de palillos negros correspondientes en la figura.

Específicamente, observaron que la cantidad de veces que se repite el número tres, representado por un grupo de tres palillos negros, en cada figura es equivalente con el número de la posición de la figura. Por ejemplo, la cantidad de veces que se repite el número tres en la posición 10 es 10 veces. Lo cual les permitió calcular el número de palillos negros de cualquier figura de la secuencia.

Llevar a cabo la solicitud, les posibilitó a los estudiantes visualizar un patrón algebraico distinto al que propone la tarea. Esto sugiere que las secuencias figurales están compuestas de patrones algebraicos ocultos. Puesto que, subyacen en la secuencia a la espera de ser identificados.

Identificar ese patrón algebraico ($3\ X\ número\ de\ la\ posición$), permitió que se estableciera una relación con el término independiente de la secuencia (el palillo delineado), para luego lograr establecer una fórmula algebraica que rige la secuencia propuesta ($3\ X\ número\ de\ la\ posición\ +1$).

De manera análoga, en la tarea 3 los estudiantes utilizaron una relación de proporcionalidad ($6.000X\ número\ de\ la\ semana = dinero\ total\ ahorrado$) para calcular el dinero ahorrado por Carlos, ignorando el término independiente de la secuencia (2.000). Lo que conduce a cálculos incorrectos.

En tal sentido, el uso de esta estrategia sugiere que estos estudiantes identifican patrones algebraicos ocultos de naturaleza proporcional y, posteriormente, establecen relaciones con el término independiente y, finalmente, proponen una fórmula algebraica que representa la secuencia.

5.2 Reflexiones

El desarrollo de esta investigación espera brindar a los investigadores y profesores interesados en pensamiento algebraico, con estudiantes en edades tempranas, herramientas metodológicas y teóricas que mejoren su desempeño profesional y sus prácticas de aula.

En función de los análisis de las producciones orales y escritas de los estudiantes se sugiere que el desarrollo del pensamiento algebraico sea paulatino, progresivo y continuo en todos los cursos de educación básica primaria, básicamente, para identificar los recursos semióticos que éstos manifiestan y despliegan en la realización de tareas sobre generalización de patrones u otras vías de aproximación al álgebra escolar, y así lograr avanzar hacia una caracterización del pensamiento algebraico.

En tal sentido, se podrían desprender investigaciones futuras alrededor del análisis de los recursos semióticos que utilizan los estudiantes y los que surgen de las intervenciones del profesor en la implementación de tareas orientadas a la estimulación del pensamiento algebraico, sugiriendo que el análisis debe estar centrado en las relaciones de todos esos posibles recursos semióticos que se movilizan y se sincronizan en la actividad matemática de los estudiantes y el profesor, con el fin de establecer un vínculo entre los distintos tipos de recursos semióticos (el discurso, los gestos, el ritmo, etc.) y las características del pensamiento algebraico (indeterminancia, analiticidad y designación semiótica) que permita seguir avanzando en la construcción de este pensamiento.

En este aspecto, sería interesante, por ejemplo, investigar cómo estudiantes con discapacidad auditiva, los cuales se comunican principalmente mediante los gestos y señalamientos, construyen significados algebraicos. Lo cual requiere de constructos teóricos adecuados sobre el lenguaje gestual y corporal, para lograr caracterizar su pensamiento algebraico.

En ese orden de ideas, se podrían desprender investigaciones futuras alrededor de:

- ¿Qué recursos semióticos utilizan los estudiantes en edades tempranas para referir la indeterminancia y su carácter operatorio en la construcción de pensamiento algebraico?
- ¿Cómo establecer un vínculo entre la generalización aritmética y algebraica, con el propósito de estimular la continuidad entre el pensamiento numérico y algebraico?
- ¿Qué efectos tiene el uso de materiales manipulativos sobre el proceso de la generalización de patrones algebraicos en la construcción de pensamiento algebraico?
- ¿Qué estrategias emplean los estudiantes de educación básica primaria para expresar generalizaciones de patrones algebraicos?

Como una posible línea de investigación, se propone indagar alrededor de las intervenciones (afirmaciones, elecciones, solicitudes, preguntas, decisiones, etc.) que expresa el profesor de matemáticas en la implementación de tareas relacionadas con el pensamiento algebraico, con el propósito de caracterizar su intervención y seguir avanzando en el mejoramiento de su práctica y formación.

En cuanto al diseño de tareas propuesto, los resultados de la investigación sugieren que los profesores en la planeación de sus clases diseñen e implementen tareas que inviten a los estudiantes a un acercamiento al pensamiento algebraico factual, puesto que se logró reconocer que este tipo de pensamiento es una de las manifestaciones más tempranas de aproximación con el álgebra escolar.

Esto indica que se debe diseñar un tipo de preguntas adecuadas que conlleven a los estudiantes a pensar fundamentalmente en el plano concreto, en el cual lo indeterminado es manipulado tácitamente.

Luego, proponer tareas centradas en el reconocimiento y la elaboración de frases o palabras claves que constituyan la indeterminancia y su carácter operatorio y, posteriormente, paulatina y progresivamente, otras que permitan avanzar hacia la designación alfanumérica.

Por último, el desarrollo de este trabajo aporto a la formación y práctica profesional del autor algunas competencias investigativas y conceptuales, específicamente, la habilidad para innovar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas como una praxis reflexiva, en la cual el papel de la labor conjunta entre profesor y estudiantes en la construcción de saberes matemáticos cobra un valor importante. En tal sentido, es sustancial reconocer y saber enfrentar el contexto sociocultural de los estudiantes, puesto que éste es determinante en las formas en que éstos aprenden y conocen.

La capacidad de trabajar en equipo y enactivamente en el quehacer profesional es fundamental para la formación de estudiantes éticos, críticos y reflexivos, dado que es responsabilidad de ambas partes (profesor y estudiantes) la producción de saberes y de seres para constituirse en una sociedad que actualmente demanda sujetos competentes con alta calidad humana.

Comprender, identificar y aplicar algunos elementos conceptuales del pensamiento algebraico desde la Teoría de la Objetivación favoreció la capacidad de asumir nuevos referentes teóricos que demandan aspectos curriculares (planeación, evaluación, etc.) y metodologías de enseñanza y aprendizaje distintas a las tradicionales (transmisionismo y constructivismo), permitiendo una actualización y proyección en las futuras prácticas de aula del autor.

Referencias

Arzarello, F. (2006, junio). Semiosis as a Multimodal Process. *Relime,* Número Especial, 267-299.

Balestrini, M. (2006). *Como se elabora el proyecto de Investigación*. Recuperado de https://issuu.com/sonia_duarte/docs/como-se-elabora-el-proyecto-de-inve

Casas, E. (2005). Álgebra recreativa: Procesos básicos para el desarrollo del pensamiento. Bogotá, Colombia: Magisterio.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM

Castro, W.F., Godino, J.D., Rivas, M. (2010). Competencias de maestros en formación para el análisis epistémico de tareas de razonamiento algebraico elemental. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 259-270). Lleida: SEIEM

Cai, J. & Knuth, E. (2011) (Ed.). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives.* Berlin: Springer-Verlag.

Callejo, M., García-Reche, A., & Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 5-25.

Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F.K. Lester Jr (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 669-706). Charlotte, NC:

Information Age Publishing; Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. En J. Kaput. D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the Early Grades (pp. 235–272). Mahwah, NJ: Erlbaum.

D'Amore, B., & Radford L. (2017). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Fernández, C & Sánchez, G. (2015, abril). Mirar profesionalmente el aprendizaje de las matemáticas. Un ejemplo en el dominio de la generalización. *Uno. Didáctica de las matemáticas*. (68), pp.39-48.

Godino, J. D., Castro Gordillo, W. F., Aké, L. P., & Wilhelmi, M. R. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema : Boletim de Educação Matemática*, *26*(42B), 483-511.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219.

Hernández, K. & Tapiero, K. (2014). *Desarrollo del razonamiento algebraico a partir de la generalización de patrones gráficos - icónicos en estudiantes de educación básica primaria.* (Tesis de pregrado), Universidad del Valle, Cali.

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación*. La Habana, Cuba: Felix Varela.

Kaput, J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by algebrafying the K-12 curriculum: National Center of

Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Dartmouth, MA.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencia. Bogotá: Magisterio.

Molina, M. (2007). *La integración del pensamiento algebraico en educación primaria.* En Camacho, Matías; Flores, Pablo; Bolea, María Pilar (Eds.), Investigación en educación matemática (pp. 53-70). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Molina, M. (2015). *Concepciones del algebra escolar*. Granada; Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Moreno, G. (2015). *Una aproximación al álgebra temprana por medio de una secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos.* (Tesis de pregrado). Universidad del Valle. Cali.

Pérez, J. & Gardey, A. (2015). *definicion.de*. Recuperado de https://definicion.de/ apodíctico

Pérez, J. & Merino, M. (2017). *definicion.de*. Recuperado de https://definicion.de/deicticos

Radford, L. (2001). Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra, in: Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Marja van den Hueuvel-Panhuizen (ed.), Freudental Institute, Utrecht University, The Netherlands, Vol.4, pp.81-88.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to studens' types of generalization. Mathematical Thinking and Learning, 5(1), 37-70.

Radford, L. (2006a). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective, PME-NA, Vol. 1, 2-21.

Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *RELIME:Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(Extraordinario 1), 103-129.

Radford, L., Edwards, L. & Arzarello, F. (2009). Introduction: beyond words. *Educational Studies in Mathematics*, *70*, 91-95.

Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19.

Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Radford, L. (2011). Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds.) Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives. Berlin: Springer-Verlag, 303 - 322.

Radford, L. (2012). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. icme-12 Regular Lecture. Seoul, South Korea.

Radford, L. (2013a) The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277.doi: 10.1007/s13394-013-0087-2

Radford, L. (2013b). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro (pp. 3-12). Granada, España: Editorial Comares.

Radford, L. (2014a). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 132-150.

Radford, L. (2014b). La teoría de la objetivación. *Ruta Maestra*, *9*, 33-37.

Radford, L. (2014c). *La enseñanza-aprendizaje desde una perspectiva histórico-cultural: la teoría de la objetivación.* Conferencia presentada en Ciclo de conferencias en Educación Matemática de Gemad (18 de octubre de 2014). Bogotá.

Radford, L. (2018a). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice (pp. 3-25). New York: Springer.

Radford, L. (2018b). Saber, aprendizaje y subjetivación en la Teoría de la Objetivación. In: Iran Abreu Mendes (Ed.), Anais do 5o Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – 5º SIPEMAT (pp. 1-22). Belém, Brazil.

Rivera, E. & Sánchez, L. (2012). *Desarrollo del pensamiento variacional en la educación básica primaria: generalización de patrones numéricos.* (Tesis de pregrado), Universidad del Valle, Cali.

Rojas, P. & Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. En: Gallego P. (Editora) (2013). *Revista Científica*, *Edición especial*. 760-766.

Rojas, P. & Vergel, R. (2018a). Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula. Bogotá: Editorial UD.

Rojas, P. & Vergel, R. (2018b). Iniciación al álgebra y pensamiento algebraico temprano: actividades para orientar el trabajo en el aula. *RECME: Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *3*(1), 19-30.

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números 77*, 5-34.

Vergel, R, (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)* (Tesis Doctoral). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá.

Vergel, R. (2015a). Generalización de Patrones y Formas de pensamiento Algebraico temprano. *PNA*, *9* (3) ,193-215.

Vergel. R. (2015b, abril). ¿Cómo emerge el pensamiento algebraico? El caso del pensamiento algebraico factual. *Uno. Didáctica de las matemáticas*. (68), 9-17.

Vergel. R. (2016, Julio). El gesto y el ritmo en la generalización de patrones. *Uno. Didáctica de las matemáticas*. (73), 23-31.

Zapata, S. M., Jaramillo López, C. M., & Santa Ramírez, Z. M. (2018). El profesor de primaria: una reflexión sobre su papel en la inclusión del álgebra temprana en el currículo escolar. *Revista Virtual Universidad Católica Del Norte,* (55), 192–209.

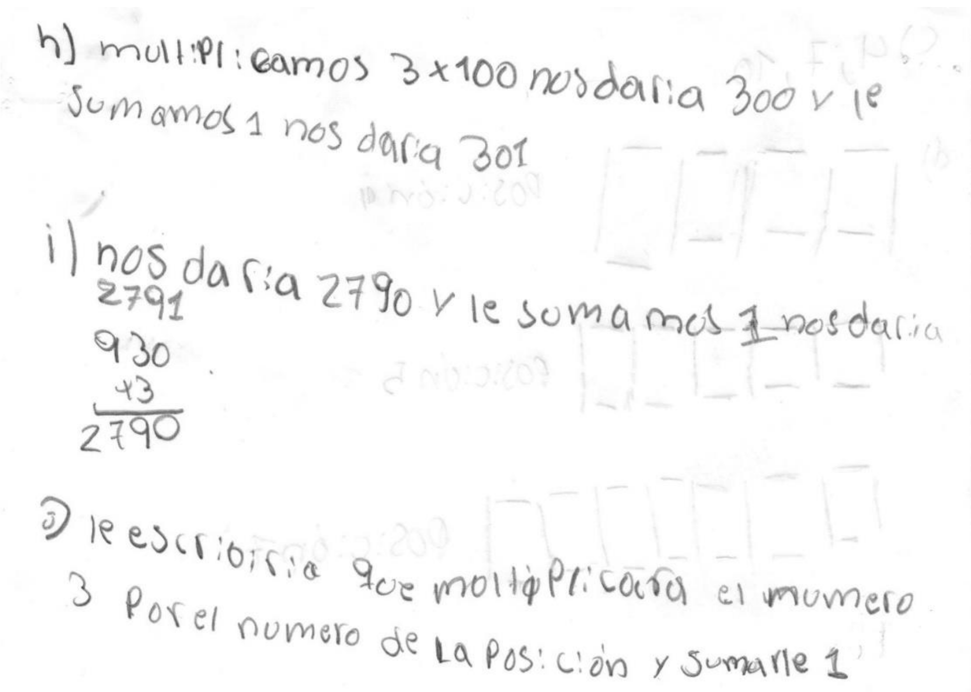
Zapatera, A. (2015, abril). Como interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento algebraico de alumnos de primaria. *Uno. Didáctica de las matemáticas*. (68), 30-38.

Anexos

Anexo 1: Producción de Santiago en la Tarea 1

a) cada dia recoleta mas camila
b) cada dia aumentabanias botellas en 3
c) porque 4x3 es igual a 12
porque 5x3 es igual a 15
porque 6x3 es igual a 18
d) por que 3x15 lo multiplicamos y me da 45
e) porque hay que multiplicar 200x3 y nos da 600
f) que hay que multiplicar 3 por el número que nos den del dia

Anexo 2: Producción de Santiago en la Tarea 2



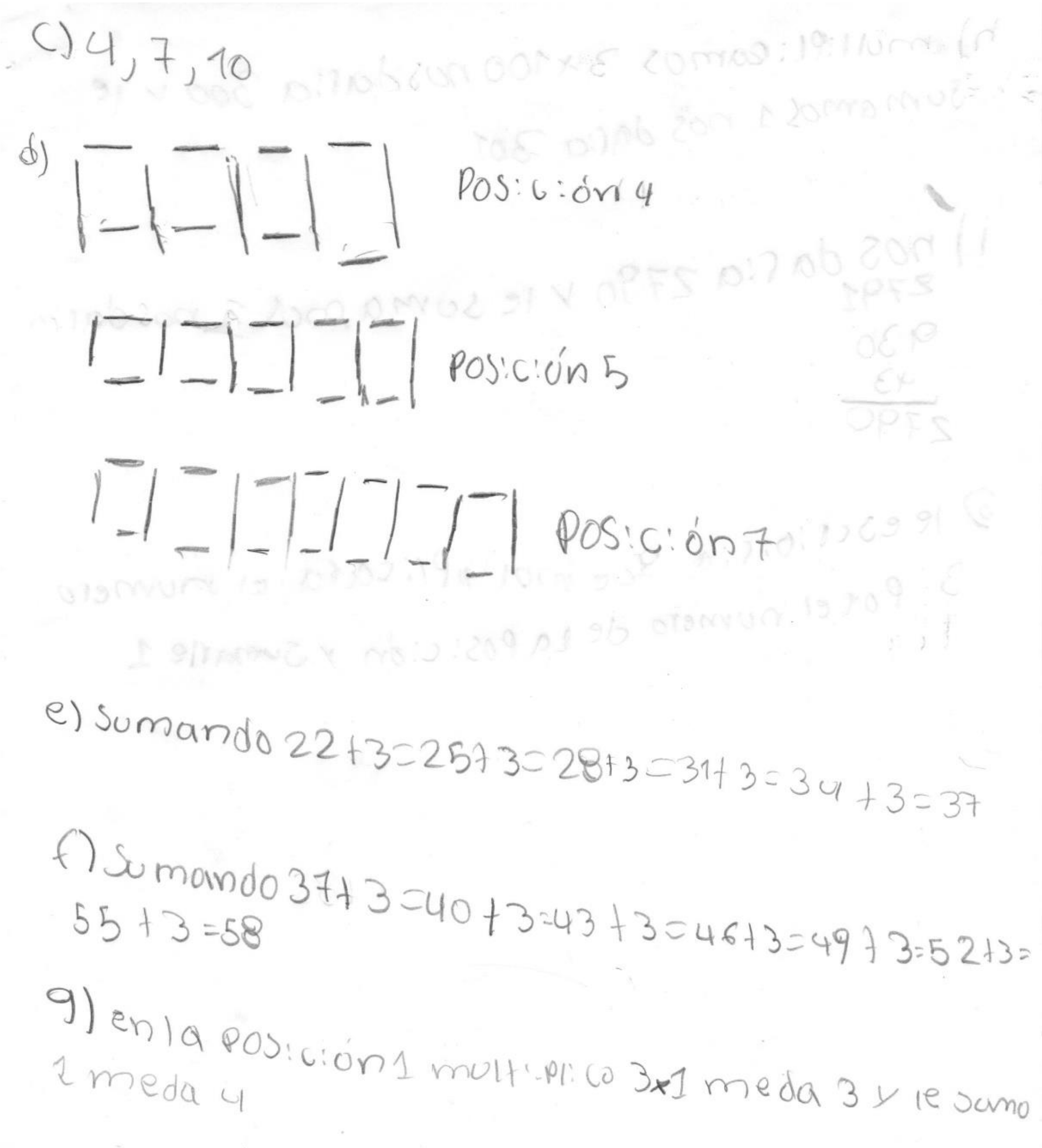
h) multiplicamos 3 x 100 nos daria 300 y le sumamos 1 nos daria 301

i) nos daria 2790 y le sumamos 1 nos daria 2791

930
x3
2790

j) le escribiria que multiplicara el numero 3 por el numero de la posición y sumarle 1

Anexo 3: Producción de Santiago en la Tarea 2


c) 4, 7, 10

d) Posición 4

Posición 5

Posición 7

e) Sumando 22+3=25+3=28+3=31+3=34+3=37

f) Sumando 37+3=40+3=43+3=46+3=49+3=52+3=
55+3=58

g) en la posición 1 multiplico 3x1 meda 3 y le sumo
1 meda 4

Anexo 4: Producción de Valentina en la Tarea 3

a. 26.000

b. en la semana 7 ahorro 44.000, para la semana 8 ahorro 50.000, para la semana 9 ahorro 56.000.

c. 46
×6
276 ahorro ~~2~~78 mil.
+2
278

d. hay que multiplicarle siempre el $6.000 por el número del la semana y sumale los $2.000