Relación Histórica y Epistemológica Del Concepto De Límite E Infinito: Concepción Del Docente de Matemática

Jesús Andrés Ruíz Bedoya

3469

Diego Fernando Ortiz

3487

Universidad Del Valle

Facultad De Educación y Pedagogía

Licenciatura En Educación básica Con Énfasis En Matemáticas

Licenciatura En Matemática y Física

Santiago De Cali

2022

Relación Histórica y Epistemológica Del Concepto De Límite E Infinito: Concepción Del Docente de Matemática

Jesús Andrés Ruíz Bedoya

3469

Diego Fernando Ortiz

3487

DIRECTOR:

Dr. Luis Cornelio Recalde Caicedo

Universidad Del Valle

Facultad De Educación y Pedagogía

Licenciatura En Educación básica Con Énfasis En Matemáticas

Licenciatura En Matemática y Física

Santiago De Cali

2022

Agradecimientos

Primeramente damos gracias a Dios y a nuestra familia que permitieron que tuviéramos una buena experiencia en la vida universitaria, gracias a la universidad por permitirnos convertir en seres profesionales en lo que tanto nos apasionaba, gracias a cada maestro que hicieron parte de este proceso integral de formación, en especial a nuestro director de trabajo de grado, por su paciencia y animo que nos inyecto para seguir adelante, y como recuerdo y prueba viviente en la historia: este trabajo de grado, que perdurara dentro de los conocimientos y desarrollo de las demás generaciones que están por llegar.

Finalmente, agradezco aquellas personas que lean este apartado y más de nuestro trabajo de grado, por permitir a nuestras experiencias, conocimientos e investigaciones estar en ese abanico de información para su conocimiento.

Resumen

En el presente trabajo de investigación se tiene como objetivo principal clasificar las concepciones que tienen los profesores de matemática a nivel universitario respecto al límite y su relación con el infinito. Para ello, se realiza una revisión histórica – epistemológica de dichos conceptos con el fin de construir dos rejillas que permiten categorizar las concepciones y con ayuda de dos cuestionarios poder conocer qué clase de concepción tienen 4 profesores de la universidad del Valle y 3 profesores de la universidad Javeriana. Concluyendo que el 87,71% (6 profesores) tienen una *concepción General* del infinito, el 14,29% (1 profesor) tiene una *concepción Formal* del infinito, el 28,56% (2 profesores) tiene una *concepción aritmética - métrica, dinámica del infinitesimal* del límite, el 71,44% (5 profesores) tiene *concepción analítica – aritmética, analítica – estática* del límite y, por último, se encontró que todos los profesores comprenden que el concepto que fundamenta al límite y viceversa es el infinito potencial.

Palabras claves: Concepciones, límite, infinito potencial, infinito actual, relación límite – infinito.

Abstract

In the present research work, the main objective is to classify the conceptions that mathematics teachers have at the university level regarding the limit and its relationship with infinity. For this, a historical - epistemological review of these concepts is carried out in order to build two grids that allow the conceptions to be categorized and with the help of two questionnaires to know what kind of conception 4 professors from the Universidad Del Valle and 3 professors from the Universidad Del Valle have. Javeriana University. Concluding that 87.71% (6 teachers) have a General conception of infinity, 14.29% (1 teacher) have a Formal conception of infinity, 28.56% (2 teachers) have an arithmetic-metric conception, dynamics of the infinitesimal of the limit, 71.44% (5 teachers) have an analytical - arithmetic, analytical - static conception of the limit and, finally, it was found that all teachers understand that the concept underlying the limit and vice versa is infinity potential.

Keywords: Conceptions, limit, potential infinity, actual infinity, limit-infinity relationship.

CONTENIDO

Tabla de Figuras 4

Introducción 5

Metodología 8

1. Historia y Epistemología de la Relación Límite-Infinito 12

1.1 El Límite y el Infinito en los Antiguos Griegos 12

1.1.1 Los Presocráticos 12

1.1.2 Pitagóricos 14

1.1.3 La Escuela de los Eleáticos 19

1.1.4 Los Atomistas 24

1.2 El Límite e Infinito Desde Platón Hasta Arquímedes 27

1.2.1 El Infinito en Platón 27

1.2.2 Límite e Infinito en Aristóteles 28

1.2.3 Límite e Infinito en Euclides 31

1.2.4 Límite e infinito en Arquímedes 35

1.3 El Límite y el Infinito en el Renacimiento: Teoría de los Indivisibles 42

1.3.1 Kepler y su Método de Aproximación 43

1.3.2 El Método de Indivisibles de Cavalieri 44

1.3.3 Límite e Infinito Para Wallis 50

1.4 Newton y Leibniz: Una Nueva Disciplina ... 53

1.5 Camino a la Rigorización de los Procesos Infinitos: de Euler a Weierstrass ... 59

1.5.1 Berkeley, una Crítica a los Fundamentos Lógicos del Análisis ... 60

1.5.2 Euler, Como Precursor del Análisis ... 63

1.5.3 El Límite en D'Alembert ... 65

1.5.4 L'Huilier, el Método Exhaustivo en Términos de Límites ... 67

1.6 Formalización del Concepto de Límite ... 70

1.6.1 Cauchy: el Infinito Potencia se Instaura Formalmente en las Matemáticas ... 70

1.6.2 El Límite Estático en Weierstrass y el Infinito en Cantor ... 75

2. Concepciones y Creencias de los Docentes Respecto a la Relación Límite e Infinito ... 82

2.1 Las Concepciones de los Docentes en el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje ... 82

2.2 Los Instrumentos Aplicados a los Docentes ... 89

3. Análisis de Resultados ... 91

4. Conclusiones ... 106

Referencias ... 116

Tabla de Figuras

Figura 1: Relación entre el límite y otros conceptos centrales en el cálculo -------------------- 5

Figura 2: Contrato Didáctico-- 6

Figura 3: Construcciones numéricas y la escala musical--14

Figura 4: La inconmensurabilidad de la diagonal con uno de los lados de un cuadrado ------16

Fogura 5: Triángulo Rectángulo ABC ---16

Figura 6: Propiedades del ser --19

Figura 7: Ángulo de contingencia ---33

Figura 8: Figura rectilinea y algunos poligonos inscritos--36

Figura 9: Cuadratura del circulo--37

Figura 10: Equivalencia del circulo y el triángulo rectángulo-------------------------------------39

Figura 11: Cuadratura de la parábola ---40

Figura 12: Framentación de un barril en cilindros --43

Figura 13: Cono de radio R y piramide de base cuadra, tiene igual altura h-------------------46

Figura 14: Cuadratura $ABCD$, cuyos ladas miden a ---48

Figura 15: Curvas de la forma $y = x^n$---50

Figura 16: Aritmética de los indivisibles de Wallis---52

Figura 17: Generalización de las cuadraturas de Newton--53

Figura 18: Sucesión de curvas equivalentes ---58

Figura 19: Triángulo caracteristico--58

Introducción

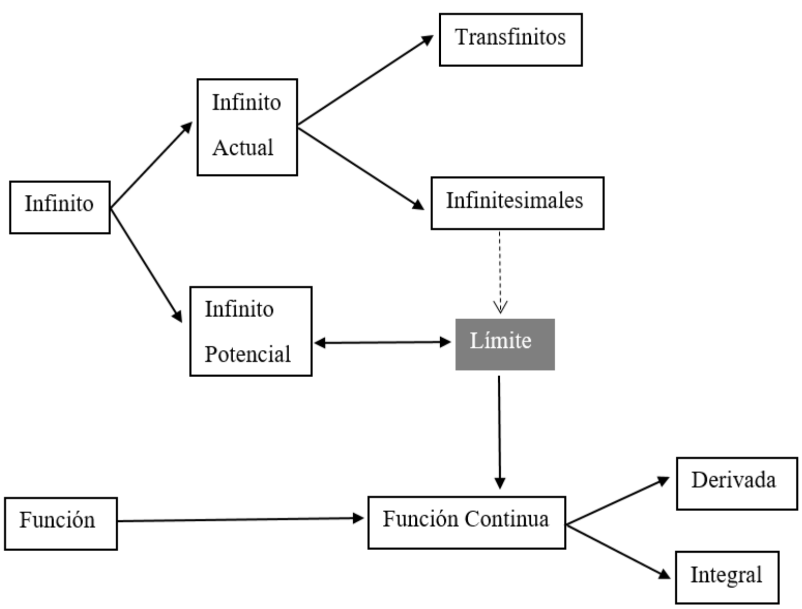
Una de las motivaciones para realizar este trabajo de grado es el fracaso que tienen los estudiantes en los primeros semestres de la universidad al momento de abordar el concepto de límite. .

Nota. Elaboración propia.

A través de la historia la formalización del concepto de límite no ha sido un proceso sencillo, primordialmente por su relación que tiene con el del infinito potencial. Estos dos conceptos son problemáticos y llevaron a los antiguos griegos a ciertas paradojas como la de

Figura 1.

Relación entre el límite y otros conceptos centrales en el cálculo.



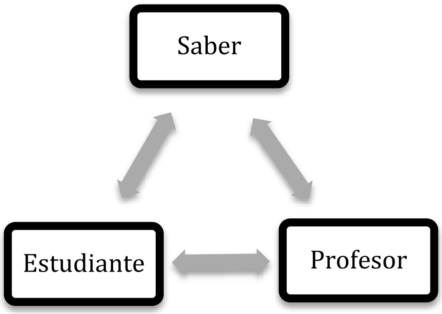
Aquiles y la tortuga, la dicotomía y a contradicciones en la noción común de Euclides, la cual dice; “El todo es mayor que sus partes”. Produciendo durante muchos siglos que se dificultará la formalización del concepto de límite. Por ende, aparte de los diferentes problemas que puedan tener los estudiantes al momento de afrontar el estudio del concepto de límite, se debe de tener en cuenta los obstáculos epistemológicos propios del saber, obstáculos didácticos, las concepciones y creencias que tienen los docentes de matemáticas de los dos conceptos límite e infinito. Estos obstáculos, además de las concepciones de los docentes, hacen que la comprensión del concepto límite no sean fáciles de acceder por parte de los estudiantes.

De esta manera, el límite viene siendo un problema vigente, esto debido a que es un concepto complejo y además está relacionado con otro objeto matemático como lo es el infinito. Por esta razón, es importante analizar cómo se concibe el concepto de límite por parte del docente. En este sentido es pertinente tener en cuenta la teoría de las situaciones didácticas de (Brousseau, 2007). Desde esta teoría, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas intervienen tres elementos: Saber, docente y estudiante. En este trabajo de grado se colocará la atención en el saber y el maestro; para ello se analizará la dimensión histórica y epistemológica del concepto de límite y su relación con el infinito. Por lo dicho antes, esta relación es una de las grandes dificultades que históricamente se ha dado para las definiciones que se manejan en el cálculo, en este trabajo de grado indagaremos sobre qué tanto conocen los docentes sobre estas dificultades.

De acuerdo con (Brousseau, 2007) en el proceso de enseñanza-aprendizaje se ponen en juego tres aspectos: el docente, el estudiante y el saber.

Figura 2

Contrato didáctico



Nota. Adaptado de (Chevallard, 1998).

De acuerdo con el diagrama anterior, en el momento de diseñar situaciones didácticas es importante tener en cuenta estos tres factores interrelacionados. Particularmente en este trabajo indagamos sobre el grado de conocimiento que tienen los docentes acerca de la estrecha relación entre el infinito potencial y el concepto de límite. En este sentido, nos propusimos, en este trabajo de grado, indagar sobre el grado de conocimiento que tienen los docentes acerca de la relación infinito-límite.

La indagación se hizo tomando como referencia la línea de historia y la epistemología de las matemáticas; además se referenciaron aspectos ontológicos que permitieron estudiar la naturaleza de los conceptos de límite e infinito. De esta manera, se pretende identificar los cambios conceptuales que estos conceptos han tenido a través de la historia. Esta línea también contribuye al interés y al entusiasmo de los estudiantes; muestra una matemática más humana y permite al docente darse cuenta de algunos problemas relacionados con el origen de ciertos conceptos matemáticos y de su evolución hasta el día de hoy.

Para la elaboración de la tesis partimos de la hipótesis que el proceso de enseñanza de las nociones del límite y el infinito se puede establecer de diversas maneras, de acuerdo con las creencias y concepciones de los docentes. El docente debe ser consciente de que los conceptos matemáticos sufren una transposición didáctica, es decir, sufre cambios importantes para adaptarlo a su enseñanza. Por lo tanto, es el docente el responsable de la manera como se presentan los conceptos. En este sentido, una mala concepción del docente desencadenará obstáculos en el proceso de aprendizaje, el cual solo se superará a través de un cambio importante en su forma de presentar dichos conceptos.

Para la elaboración del trabajo tomamos como referencia las definiciones establecidas en Gil & Rico:

> **Creencias:** Son aquellas verdades individuales que no tienen discusión y se descomponen de la experiencia o de la imaginación, que están fuertemente permeadas por lo afectivo y no son fundamentadas a través de la razón.
>
> (2003, pág. 28).

También adoptamos la definición de concepción de Vergnaud, citado por (Ruiz-Higueras, 1994, pág. 50), donde define a una concepción, partiendo de la definición de concepto matemático… Una concepción estaría formada por la terna (S; situaciones, I; invariantes y s; representaciones), considerándola en un instante de la evolución del concepto.

En primer lugar, se establece un recorrido histórico-epistemológico de los dos conceptos, límite e infinito, a partir de fuentes secundarias.

Metodología

Este trabajo tuvo un enfoque investigativo cualitativo, dado que nos interesaba indagar las concepciones de algunos profesores de nivel universitario (La idea inicial es abordar a 10 profesores), acerca de la relación que tiene el límite e infinito, a través de dos entrevistas. Esto se hizo en tres momentos: En el primer momento se estableció un análisis histórico-epistemológico, en el cual se utilizaron las siguientes obras: La lógica de los números infinitos: Un acercamiento histórico (Recalde, 2004); Lecturas de historias de las matemáticas (Recalde, 2018); Física (Aristóteles, 1995); Curso de análisis (Cauchy, 1994 (Primera versión en frances, 1982)) Los Elementos (Euclides, Elementos. En: Cientificos griegos, 1970); El concepto de límite (Ortiz, 1994); el infinito en la historia de la matemática (López, 2014); concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas (Medina, 2001). Trabajos de grado como: Del "horror al infinito" de los antiguos griegos a la noción de límite moderno (Garcia, 2014).

En el segundo momento nos centramos en el estudio de casos, como forma de acercarnos a fenómenos complejos de la realidad como los son las concepciones de los profesores de matemáticas (Durán, 2012). Para esto se presentaron dos cuestionarios. El primero es un cuestionario abierto que nos permitirá conocer las concepciones y creencias que tengan los profesores respecto al límite, infinito y la relación entre ellos, y para esto se formulan cinco preguntas abiertas; las preguntas de la 1 a la 3 se centran en las concepciones que tienen sobre el infinito. La pregunta 4, en cambio, es para mirar la concepción respecto al límite y la última pregunta tiene que ver con la relación entre el límite y el infinito. Así, se podrá evidenciar a qué contexto se asocian estos conceptos y de esta manera categorizar sus respuestas. Aclaramos que dependiendo de las respuestas se podrán observar, en cualquiera de ellas, concepciones ya sean del límite, del infinito o su relación.

El segundo cuestionario está constituido por seis preguntas; con la primera pregunta se pretende encontrar los argumentos que utiliza el profesor para explicar que el límite de un número periódico puro es un número natural, es decir, si ellos usan el límite para ver como acabado un proceso potencial. La segunda tiene conexión con la correspondencia biunívoca que hay entre el todo y la parte. La tercera está relacionada con las paradojas de Zenón. De la cuarta a la sexta se pretende identificar si los profesores realizan las aproximaciones laterales del dominio e imagen. Referente a la imagen se trata de observar si son coincidentes o no de que hay o no límite en el punto dado, también se pretende evidenciar si hay un manejo del lenguaje matemático para expresar el límite de una función en un punto dado, y conocer la relación que hay entre el límite y el infinito en un contexto matemático. Específicamente, en el punto seis se pretende ver si existe la comprensión de las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes como si fuesen un simple número, un punto, un símbolo o como lo que plantea Cauchy; como variables que están aumentando o disminuyendo en la dirección del infinito potencial.

También, pretendemos ver en las respuestas si al momento de explicar el docente utiliza la definición ya sea estática o/y utiliza la definición dinámica de límite y, además, se quiere ver si el docente entiende que el infinito no sigue las reglas aritméticas que los números reales cumplen y que significa para ellos el símbolo ∞.

En el tercer momento se realizó un análisis cualitativo de acuerdo con las respuestas de los docentes, a partir de unas categorías que se describen en las siguientes tablas:

Tabla 1: *Organización del cuestionario abierto según las categorías*.

Categoría	**Respuestas asociadas a la categoría**	**Observaciones**
Concepciones sobre el infinito	Se coloca el profesor (P#) y su respuesta a la pregunta asociada a la categoría (*se realiza en esta columna*).	Se analizarán las respuestas (*se realizará en esta columna*).
Concepciones relacionadas con el límite		

Concepciones sobre la relación entre el límite y el infinito		

Tabla 2: *Organización del cuestionario cerrado según las categorías.*

Categoría	**Respuestas asociadas a la categoría**	**Observaciones**
Concepción estática del límite (pregunta 3 y 5).	Se coloca el profesor (P#) y su respuesta a la pregunta asociada a la categoría (*se realiza en esta columna*).	Se analizarán las respuestas (*se realizará en esta columna*).
Concepción dinámica del límite (preguntas 2, 4 y 6)		
Concepción del infinito potencial (preguntas de la 1 a la 6)		

Para realizar la clasificación de las concepciones de los profesores, en las conclusiones, usamos las rejillas que están en las tablas 3 y 4 del capítulo concepciones y creencias del concepto de límite e infinito.

1. Historia y Epistemología de la Relación Límite-Infinito

Careamos inicio a este estudio con los antiguos griegos, donde la geometría es la disciplina que más se desarrolla. Luego, pasamos al renacimiento, donde las nuevas heurísticas van dando una salida a la necesidad de obtener cuadraturas y cubaturas de figuras más generales. Posteriormente, el estudio se centra en los siglos XVI al XVIII d.C, ya que es en este periodo donde se inicia y culmina la formalización y rigurosidad del límite. Así, como también, se le da la ciudadanía al infinito actual.

1.1 El Límite y el Infinito en los Antiguos Griegos

Las bases de las matemáticas modernas subyacen en el trabajo de los antiguos griegos, aunque ya existían unas matemáticas prácticas expuestas por los babilonios y egipcios que consistían en medir y contar. Estos métodos sirvieron, por ejemplo, para tener una estadística de los cultivos y un control de sus tierras. En este apartado se realizará un recorrido histórico desde los presocráticos hasta Arquímedes.

1.1.1 Los Presocráticos

Las matemáticas que hoy usamos exigen un proceso demostrativo, pero esto tuvo un periodo de controversia. Los primeros filósofos griegos tuvieron distintas posiciones frente al origen del universo, a lo que llamaron "*arjé*" que traduce principio y/o fundamento de las cosas, su origen, aquello que las hace ser. Está necesidad de explicar el origen de las cosas sin acudir a la mitología, creó nuevas líneas filosóficas tales como la escuela Pitagórica, la escuela de Mileto, los eleáticos, la academia de Platón, el liceo de Aristóteles, entre otras, algunas de estas líneas tienen el nombre de sus creadores. En ese entonces surgen ideas sobre el origen de todas las cosas; como ejemplo, los principios naturalistas expuestos por Empédocles (434 a.C), que consideraba que todo lo que nos rodea provenía del agua, fuego, aire y tierra. Otro naturalista es

Tales de Mileto (624 - 546 a.C), el cual consideraba que la Tierra flotaba sobre agua y se cree que esta sería la razón por la que decía que el origen de las cosas es el agua. Mientras que su discípulo, Anaxímenes (590 - 525 a.C), decía que es el aire el constructor de todo aquello que nos rodea, es infinito, eterno y está siempre en movimiento produciendo una fuerza que mantiene al universo en una unidad. Anaxímenes, posiblemente llega a esta conclusión debido a que observaba que el viento es el creador de las nubes y el fuego, además es vital para el proceso de respiración. También, pensaba que las cosas surgían a través de dos procesos denominados; condensación y rarefacción. El primero es el constructor y el segundo el destructor de las cosas o procesos contrarios (Peñalosa, 2009).

Anaximandro (610 - 545 a.C), también discípulo de Tales de Mileto y compañero de Anaxímenes, a pesar de que consideraba al "*arjé*" (que llamó Ápeiron) como infinito se separa de su maestro y compañero al concebir el origen como aquello que no puede ser uno de los cuatro elementos de la naturaleza, porque la experiencia muestra que un elemento no puede originar a su elemento contrario, como el agua no puede crear fuego. Consideraba al ápeiron de naturaleza eterna y de donde nacen los cielos y los mundos que se encuentran dentro de ellos. Anaximandro, tiene la idea que el ápeiron es aquello que no tiene principio, un ser divino, ya que por su naturaleza es inmortal e indestructible, y no es un "ser" material. En esto podemos ver, que es Anaximandro, el que le da a la infinitud del ápeiron la cualidad temporal y espacial (Peñalosa, 2009).

Anaxímenes y Anaximandro conciben al universo como una unidad, algo limitado, pero que está constituido por algo infinito y eterno. Lo anterior permite posicionar a estos dos pensadores como precursores del infinito en acto, que posteriormente es Aristóteles que desliga al infinito actual de la matemática.

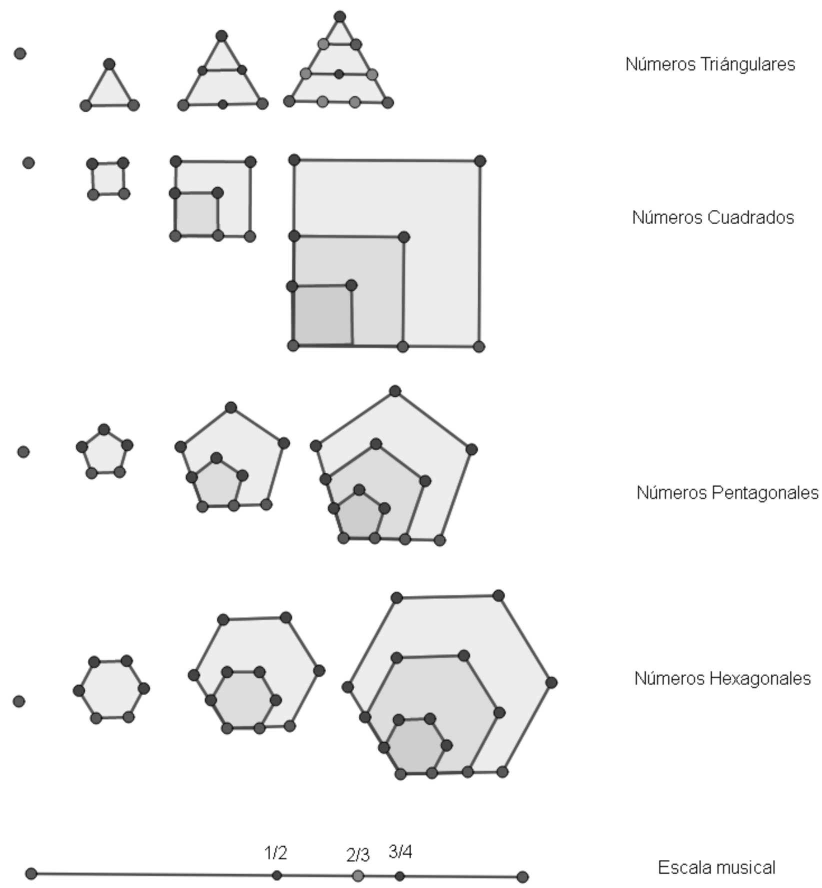
1.1.2 Pitagóricos

Los pitagóricos creían que la esencia y el principio de todo en el universo, el arjé, eran los números; ya que todo era entendido a través de ellos. Además, porque existe una relación entre las cosas y los números, mucho más semejante que los principios propuestos por los filósofos naturalistas. La rama de las matemáticas que les permitió ahondar más en el tema de los números fue la aritmética. Su estudio fue tanto que lograron la caracterización y clasificación de los números. Para los pitagóricos, los números no son entes abstractos, sino que tienen una presencia física. La unidad es el ser idéntico e igual, al cual llamaron Uno, y a la dualidad llamaron al dos, a partir de la conjugación de ellos se tienen los números naturales, que inician a partir del tres. El tres es un número triangular porque su arreglo, con piedrecillas, configura un triángulo y de esta manera clasifican los números de acuerdo con su forma.

Otro ejemplo, son los números cuadrados como el cuatro, u otras estructuras algo más complicadas; entre estas estructuras tenemos a los oblongos o rectangulares que son el resultado del producto de dos números naturales consecutivos. Entre otros, tenemos los números perfectos, que son el resultado de la suma de sus divisores, como $6 = 3 + 2 + 1$ o $28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1$ y los números pentagonales y los hexagonales. Además, en los pitagóricos se inicia esa relación entre la música y los números al descubrir la escala musical, como razón de los primeros números naturales; ½ (la octava), ⅔ (la quinta), ¾ (la cuarta) (Coronado, 2002, págs. 15 - 17).

Figura 3

Construcciones Numéricas y la Escala Musical

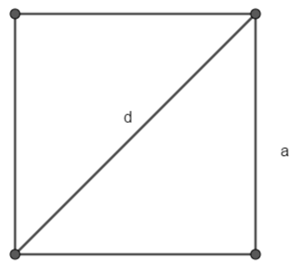


Nota. Elaboración propia.

Por principio se tiene que todos los números son magnitudes que nacen del uno, se dividen por uno y tiene las mismas cualidades del uno o la unidad. Es decir; toda magnitud se puede comparar con otra magnitud. Esto está de acuerdo con la idea de los pitagóricos de que toda magnitud es conmensurable. Aun así, la crisis se presenta, por ejemplo, cuando se quiere medir o expresar con números naturales o a través de una fracción la diagonal, d, de un cuadrado, cuyo lado es a (Figura 5). El Pitagórico Hipasos de Metaponto, logró demostrar que no se puede expresar como razón de dos números naturales al cuadrado de dos. Es decir; no existe n, m números naturales que cumplan con la condición $n^2 = 2m^2$. Actualmente conocemos que 2 no es un número racional.

Figura 4

La Inconmensurabilidad de la Diagonal con uno de los Lados de un Cuadrado.

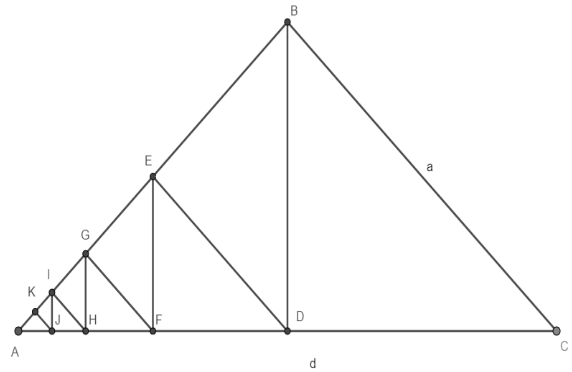


Nota. Elaboración propia.

La demostración se hace por reducción al absurdo, y vamos a considerar al triángulo que se forma con la diagonal, siendo este la base del triángulo. Como es un cuadrado, el triángulo tiene igual los lados $AB = BC = a = nU$ y es rectángulo (Figura 5). Para la diagonal supongamos que es $AC = d = mU$. Se tiene que U es el segmento unidad. Donde n y m son números naturales que no tienen divisores comunes, a parte de la unidad, por eso m/n es una razón irreducible o lo que modernamente llamamos primos relativos o coprimos.

Figura 5

Triángulo Rectángulo ABC



Nota. Demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal con uno de sus los lados de un cuadrado. Adaptado de (Recalde, 2018).

Suponiendo que

$$d/a = mU/nU$$

Entonces

$$d/a = m/n \ldots [1]$$

Ahora bien, si elevamos al cuadrado la expresión [1] tenemos que

$$d^2/a^2 = m^2/n^2$$

Por el teorema de Pitágoras y teniendo en cuenta que se tiene un cuadrado, entonces tiene lados iguales, obtenemos que

$$2 = m^2/n^2 \ o \ m^2 = 2n^2 \ldots [2]$$

tenemos que m^2 es par. Se puede demostrar que m es par, diciendo que m es impar y así se llegará a que n^2 no es par. Entonces, si m^2 es par, tenemos que m es par, de aquí que la altura BD corta al segmento $AC = mU$ en el punto medio D, que corresponde al extremo del segmento unidad. Por tanto, supongamos que

$$m = 2k \ldots [3]$$

siendo k un número natural. Reemplazando [3] en [2], tenemos que

$$4k^2 = 2n^2$$

Entonces

$$2k^2 = n^2$$

Y de aquí vemos que n^2 es un número par. Por lo tanto, n es par. Sea, E, el punto medio del segmento AB. Construimos el segmento EF paralelo al segmento BD. Así, formamos el triángulo AED, cuyos catetos son iguales y siguiendo el mismo procedimiento anterior, tenemos que EF corta a AD en el punto medio, esto nos dice que F corresponde al extremo de un segmento unidad. De esta manera y realizando la misma construcción se forman los triángulos AGF, AIH, AKJ y así indefinidamente. Como m es un número natural finito, se supone que tras hacer un número finito de pasos se llegaría a la unidad o a un número impar, este sería el límite. Esto contradice el argumento anterior. Entonces, no se puede determinar una unidad que esté contenida en AC y AB o que no son magnitudes conmensurables.

Vemos que se está comparando los números con las magnitudes. Los números pares se pueden dividir de manera finita, es decir, su división tiene un límite, mientras que las magnitudes por su naturaleza se pueden dividir infinitamente o, a través de un proceso infinito potencial. Esta comparación entre el límite y el infinito conlleva a que no se puede excluir al infinito actual de la matemática. Aun así, los Pitagóricos no aceptan el infinito acabado pues esto les causó un horror al infinito debido a que les ocasiona un desequilibrio en sus planteamientos filosóficos acerca del origen de las cosas.

De esta manera, se puede determinar que en esa búsqueda de los pitagóricos acerca del origen de todas las cosas a través de los números descubren las magnitudes inconmensurables dando así el génesis de los números irracionales. (Recalde, 2018)

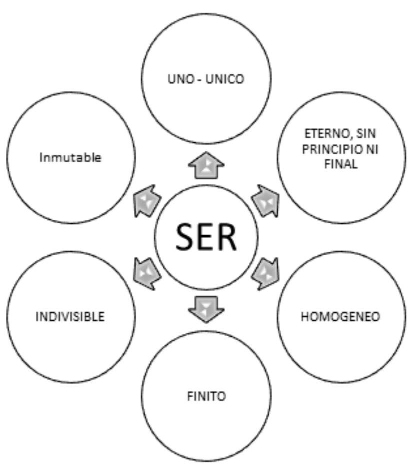
1.1.3 La Escuela de los Eleáticos

Esta escuela fue fundada por Parménides de Elea entre los siglos VI y V a. c, Platón lo sitúa en 516 a. C. Parménides, recoge las ideas de Jenófanes, y lleva una vida pitagórica. Es considerado como el filósofo de lo finito. Escribió un poema filosófico el cual está escrito en verso épico. Su obra se divide en dos partes: una es la *vía de la verdad* y la otra es *la vía de las opiniones de los mortales*. Es en *la vía de la verdad* que Parménides caracteriza a "lo que es" o "ente" o el principio fundamentador de todas las cosas, la parte divina, y expone sus propiedades: "Es ajeno y por lo tanto es inengendrado e indestructible, es lo único que verdaderamente existe - con lo que niega la existencia de la nada - es homogéneo y perfecto" (Heidegger, 1982).

Desde esta ideología el ser es una sustancia inmóvil, ya que está confinada en sus propios límites, es eterno, que no se puede ver ni tocar ni oler ni tampoco es un número. Además, no puede nacer ni padecer. Esta concepción es análoga a ver al ser como una esfera, que muestra la finitud del ser, y estos límites de la esfera son perfección.

Figura 6

Propiedades del ser



Nota. Producción propia.

En la segunda vía establece los orígenes del cosmos. Parménides dice que la naturaleza es apariencia porque cambia, nace y muere. Es decir; los objetos de la naturaleza son ilusiones de los sentidos. Además, los seres vivos son creados a través del fuego (calor, dador de vida e inteligencia) y la tierra (el frío).

Parménides, en su poema, en el fragmento 8 en los versos del 5 - 11:

> Ni fue alguna vez ni será, puesto que ahora es a la vez todo,
>
> Uno, continuo; pues, ¿cuál nacimiento buscaríales?
>
> ¿Cómo, desde dónde habría crecido? Y no permito que digas ni pienses
>
> Que de "lo que no debe ser", pues ni decible ni inteligible
>
> Es cómo no es. ¿Y qué necesidad lo haría surgir
>
> más tarde o más temprano, desde la nada naciendo, para ser?
>
> Así pues, o que completamente sea necesario es, o que no sea en absoluto (Moral, 2016, págs. 16-17).

Parménides postula la eternidad del ser, en el sentido que es una entidad que no concibe ni principio ni final; es inmutable, pues el pasado y el futuro son la negación del ser, su única verdad es el presente. El ser de Parménides no tiene límite temporal, porque en sus brazos infinitos que apuntan en direcciones opuestas no hay cabida alguna a lo limitante.

En la escuela eleática se destacan Melisso de Samos y Zenón de Elea. El más conocido es Zenón, discípulo de Parménides; se sitúa su nacimiento más o menos en el año 489 a.C. Zenón se destaca por reducir al absurdo las tesis de quienes estaban en contra de la unidad. Así, conseguía la veracidad de las tesis de Parménides.

En Zenón se pueden divisar dos grupos de argumentos. El primer grupo va contra la multiplicidad y la divisibilidad de las cosas: Si llegamos afirmar que la unidad posee una magnitud, aunque sea mínima, en cada cosa hay infinitas unidades, entonces cada cosa será infinitamente grande. Ahora, si la unidad no posee magnitud, cada cosa tendrá falta de longitud, por ende, cada cosa será nula de magnitud. Con este argumento Zenón niega la existencia del espacio o que no es real, por lo que vemos, si todo está en el espacio, esté estará en otro espacio y así sucesivamente hasta el infinito.

El segundo argumento es aquel que va en contra del movimiento y aquí proporciona sus tres paradojas “Aquiles y la tortuga”, donde el hombre veloz, Aquiles, no alcanza a la tortuga, un animal muy lento, ya que esta tiene una distancia de ventaja y siempre tendrá una ventaja, aunque sea mínima, a medida que Aquiles avanza. La segunda paradoja es la “dicotomía”; si se desea ir de un lugar a otro, primero se debe pasar por la mitad, y antes de este punto debe pasar por su mitad, y así sucesivamente hasta el infinito. Concluyendo que no se alcanza el punto de llegada. Estos argumentos de Zenón son debidos a que se pensaba que el espacio estaba constituido por puntos de forma discontinua.

Y, la tercera paradoja es “una flecha en vuelo”, aquí el tiempo es discontinuo. Se arroja una flecha y está en el aire. La flecha en cada instante de tiempo ocupa un lugar en el espacio y equivale a la propia flecha. El instante de tiempo que fue lanzada la flecha y el instante de tiempo en el que se encuentra ahora es un conjunto de instantes de tiempo, ya que en todo instante de tiempo la flecha estará en reposo. Por ende, afirma Zenón que la suma de instantes donde la flecha se encuentra en reposo no puede producir el movimiento. Estas ideas están direccionadas a demostrar que el ser es único, continuo, eterno, indivisible e inmutable, además Zenón ve al infinito como algo que no puede ser alcanzado, de forma potencial, rechazando al infinito en acto. Y siguiendo a Parménides, Zenón dice que el movimiento no existe, es solo una ilusión de nuestros sentidos. Modernamente La paradoja de Aquiles y la tortuga se puede demostrar con una serie convergente de que Aquiles si alcanza a la tortuga y el de la dicotomía también se puede ver como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Podemos mostrar que la serie geométrica tiene suma o converge de la siguiente manera:

$r = \frac{1}{2}$, porque para obtener el siguiente término la razón es de un $\frac{1}{2}$. La expresión de la suma será

$S = \lim_{n\to\infty} (S_n)$, donde $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ Entonces $S = \frac{a}{1-r}$. Donde a es el primer término de la serie. Entonces $a = \frac{1}{2}$. Por tanto, $S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$. Aquí podemos ver que si converge esta serie en el infinito.

Melisso de Samos (440 a.C.), continua con las ideas de su maestro, Parménides. Sus argumentos hacia las propiedades del ser inician formulando que algo no puede nacer de la nada, atribuyendo al ser la cualidad de inengendrado e indestructible. Pero, contradice a su maestro en la negación del pasado y el presente en el ser, donde permanece en el eterno presente. En contra de esto Melisso decía que aparte del presente está el “era” y está el “será”, dándole atributos de eternidad temporal y espacial.

Otra cosa en la que Melisso no concuerda con Parménides es que, si algo llega a existir, debe hacerlo primero en el tiempo y si es eterno en el tiempo no podrá ser limitado en extensión espacial, como lo expresaba Parménides. Esto se puede argumentar mediante las siguientes citas, que se toman de (Kirk, Raven, & Schofield, 1983, págs. 525-526):

> Fr. 1, Simplicio, *in fhys.* 164, 24.
>
> 525. Siempre era lo que era y siempre lo será; pues si llego a ser, necesario es que, antes de llegar a ser, no fuera nada. Ahora bien, si nada era, de ningún modo podría algo llegar a ser.
>
> Fr. 2, Simplicio, *in fhys.* 29, 22 y 109, 20.
>
> 526. Puesto que no llegó a ser, sino que es, siempre era y siempre será y no tiene ni principio ni fin, sino que es ilimitado. Pues, si hubiera llegado a ser, tendría un principio (ya que habría comenzado a ser alguna vez) y un fin (porque habría cesado en el ser en algún momento). Pero, dado que ni comienzo ni llegó a un fin, era siempre y siempre será y no tiene ni principio ni fin; pues lo que no es todo, no puede ser siempre**.**
>
> Fr. 3, ibid. 109, 31.
>
> 527. Pero, así como es siempre, debe ser siempre ilimitado en magnitud.
>
> Fr. 4, ibid. 110, 3.
>
> 528. Nada que tiene principio y fin es eterno o ilimitado.

En estas citas podemos ver que para Melisso la característica fundamental está intrínseca en el infinito. Platón y Aristóteles replican la doctrina eleática bajo las ideas de Melisso en su construcción de una teoría metafísica. Y es Aristóteles, siguiendo los argumentos de Melisso, quien abre la posibilidad de pensar en un universo infinito.

1.1.4 Los Atomistas

Los atomistas son los últimos naturalistas, el exponente y quien sigue las ideas de su maestro Leucipo sobre el átomo, siendo esté el arjé o principio de todas las cosas, es Demócrito. Aunque la existencia de Leucipo está en un velo oscuro, ya que no se tiene muchos fragmentos sobre los presocráticos y muchos estudiosos no concuerdan en que tanto se tiene de Demócrito y Leucipo, y se reconstruyen a través de sus críticos como Aristóteles que lo toma muy en serio en su estudio. Por ello vamos a referirnos a Demócrito únicamente.

Demócrito (460 - 370 A. C), basa su teoría del atomismo sobre las ideas de Parménides y se diferencia de la filosofía de su contemporáneo, Sócrates, que se enfocó en la ética y la política. Las huellas de los pensamientos del arjé de Parménides están en los principios de Demócrito:

Primer principio dice que: Lo lleno, que viene siendo el "ser" de Parménides. Ya que lo que "es" está completamente lleno. Por tanto, aquello que está lleno no puede ser uno, sino que hay infinitos de ellos, no son perceptibles a nuestros ojos dado por la pequeñez de sus partículas. Mientras el segundo principio estable que: Lo vacío, que viene a ser el "No-ser" de Parménides. Este principio no concuerda por completo con Parménides, ya que el vacío existe y es donde estas partículas (átomos) se mueven. Así se sostiene en la mirada de Melisso el cual identifica al vacío como el no-ser. Juntos, el "ser" y el "no-ser", componen las causas de las cosas existentes.

Para Demócrito, los átomos son indivisibles, de ahí proviene su nombre, a pesar de tener tamaño, volumen y forma, no tienen partes. Además, son sólidos, eternos, plenos, impenetrables, imperecederos, pero aun así están sujetos a cambios respecto a su posición en el vacío y este cambio o movimiento eterno de los átomos, al chocar al azar forman alguna cosa en la naturaleza. Estas cosas formadas por los átomos son ilusiones de nuestros sentidos y que no cambian la esencia del átomo. Es interesante ver que para Demócrito no hay un ser humano como tal, sino átomos unidos formando dicho ser humano. Y la diferencia entre las cosas de la naturaleza que vemos radica en la forma, el orden y la posición en la cual están entrelazados los átomos. Entonces, el todo o la unidad es la suma infinita de sus partes o que la esencia de las cosas está determinada en sus átomos. Además, estos indivisibles están desprovistos de color, sabor, olor, frio o calor, ya que estas cualidades son subjetivas. Así, se crea una crítica completa contra la fiabilidad de los sentidos para describir lo que es el ser.

En resumen, en la era de los presocráticos, comenzando con Tales hasta Demócrito, la idea central es poder describir el origen de todas las cosas, el arjé, a través de una filosofía de la naturaleza. Pasando por ideas monistas, que decían que todo proviene de un solo arjé, y pluralistas, que decían que hay múltiples arjé, para explicar el mundo que nos rodea explorado a través de nuestros sentidos con criterios o argumentos puramente racionales, dejando a un lado las ideas teológicas que hasta ese entonces venía profesando con los antiguos poetas.

Inicialmente se dijo que en Tales de Mileto el arjé era el agua. Anaximandro en cambio, consideraba al ápeiron, ya que pensaba que si el arjé fuera algo en concreto, como el agua, por ejemplo, todo sería agua. Pero, el agua no daría su contrario, el fuego. Entonces, propone al ápeiron, siendo este amorfo, indeterminado que no era nada en concreto, puede transformarse en cualquier cosa. Aquí, en Anaximandro, nace la idea del infinito en potencia desde una mirada temporal, puesto que el ápeiron es eterno y la idea de del infinito actual al considerar al universo como la unidad y compuesto de algo infinito como es el ápeiron. Luego está Anaxímenes que vuelve a dar como arjé a algo concreto, el aire, pero sí proporciona una salida a cómo se originan todas las cosas o da una forma del paso del arjé a todas las cosas. Tales y Anaximandro no dan una explicación de cómo sucede el cambio del arjé a cualquier cosa del universo. Anaxímenes explica dicho cambio a través de la rarefacción y la condensación. Pitágoras, en su escuela, llegó a pensar que el arjé son los números y encontraron en su pensamiento un obstáculo que eran los números irracionales o magnitudes inconmensurables.

Todas estas ideas encuentran sus contradicciones o en duda con Parménides. Hasta ese instante decían que todo proviene de un principio único y para esto se debe dar el cambio. Pero, para que se dé el cambio se debe pasar del “no ser” al “ser”, más no obstante en su ideología el “ser”, que es eterno, inmutable, imperecedero, entre otras cualidades, no podía surgir del “no ser”. Llegando a la conclusión que el cambio o las cosas que perciben nuestros sentidos son solo ilusiones, el “ser” es lo único real. Este pensamiento tiene una explicación satisfactoria en Aristóteles en su doctrina del acto y la potencia. Zenón es un exponente de esta forma de pensamiento y con sus famosas paradojas trata de dar cabida a la no existencia del movimiento.

Partiendo de la premisa que de la nada no puede salir algo, se dan ideas sobre la multiplicidad; para que se dé la multiplicidad es necesario que no solo exista un solo arjé, sino varios. Entre estos pensadores están los atomistas. Demócrito, establece que hay dos arjé, lo lleno y lo vacío, donde los átomos se mueven en el vacío en la eternidad y la unión de átomos producen las cosas que vemos y su separación es el fin o muerte de estas cosas. Entonces, si se quiere medir dichas cosas, compuestas de átomos, solo hay que buscar la manera de poder contar estos entes indivisibles. Con ello, Demócrito, proporciona el problema de poder hacer sumas infinitas, lo que no sabemos es si él dio o no una salida a este problema. Aun así, Demócrito contribuye a la construcción del límite. Aquí vemos que el infinito es un principio fundamental en estas doctrinas, siendo un principio eterno, inmutable e indestructible que está inherente en cada cosa que nos rodea.

1.2 El Límite e Infinito Desde Platón Hasta Arquímedes

El límite en los trabajos de geometría, en los antiguos griegos hasta antes de ser formalizado, se da de manera intuitiva. Entendiéndose por intuitivo; como lo define (Fischbein, 1994, pág. 200): "Un tipo especial de cognición caracterizada por la autoevidencia y la inmediatez: una cognición intuitiva aparece subjetivamente para el individuo como directamente aceptable, sin necesidad de una justificación extrínseca - una prueba formal o un apoyo empírico."

Mientras el infinito encuentra una definición en Aristóteles en donde se desliga de la matemática al infinito en acto. Estas ideas aristotélicas continúan permeando la matemática en los siguientes matemáticos griegos.

1.2.1 El Infinito en Platón

Aristocles, o como es conocido Platón (427 - 347 a.C.) fundador de la Academia, planteaba discusiones sobre filosofía, cosmología, metafísica, matemática, gimnasia entre otras áreas del conocimiento. Platón conoció a Crátilo, en su juventud, quien decía que todo es en esencia un cambio, que nada permanece. Esto no lo convence y después de conocer a Sócrates continúa su filosofía, que consiste en pensar que, aunque las cosas cambian hay algo que no permuta, que no cambia, la esencia de las cosas. El planteamiento de Platón se puede dividir en dos partes; una es la ontológica la cual está enmarcada dentro de su obra llamada la teoría de las ideas y la otra parte es la política que se fundamenta en la obra conocida con el nombre de "república", Nosotros nos centraremos en la parte ontológica de las cosas.

En la teoría de las ideas de platón define dos mundos

El mundo sensible; todo objeto aquí está sujeto a cambios, es imperfecto, visible, temporal, corpóreo, mortal e imperfecto.

El mundo de las ideas; Son objetos invisibles, eternos, invariantes, incorporales, inmortales, perfectos. Son ideas.

Para Platón el ápeiron, el principio de todas las cosas, de todo lo que percibimos a través de los sentidos proviene del mundo de las ideas, es decir; en el mundo de las ideas descansan los moldes que son eternos de todo lo que nos rodea.

Dentro de los elementos que analizo Platón está el término infinito, él lo define como un principio (Aristóteles, 1995, pág. 188) del cual no se deriva otro, este principio no proviene de otro, ya que, si es así, él tendría un límite lo que atentaría contra su naturaleza. El infinito para Platón como principio descansa en el mundo de las ideas y no está presente en el mundo sensible.

1.2.2 Límite e Infinito en Aristóteles

Aristóteles (384 – 322 A.C), discípulo de Platón, funda su propia escuela a la cual llamó Eliseo, se aleja de lo dicho por su maestro respecto al mundo de las ideas y se enfoca en el mundo sensible. Trabajó el concepto de infinito tratando de dar solución a las paradojas de Zenón y, a diferencia de Platón, considera que el infinito es un depósito al que siempre se le podría adicionar algo más, sin importar lo que se haya adicionado. De esta manera, define dos tipos de infinitos; el potencial y el actual. En su *Física*, Aristóteles, establece que el infinito potencial aparece principalmente en dos instancias: (1) En el proceso de divisibilidad: una magnitud se puede dividir en partes que a su vez se pueden dividir estos en partes más pequeñas y así sucesivamente; (2) En el proceso de adición: a un número determinado se le agrega la unidad y se obtiene otro nuevo número, formándose una sucesión ilimitada de números.

Frente a lo que dice Melisso, Aristóteles piensa que este comete un error en el momento de razonar sobre el infinito porque “parte de premisas falsas y sus conclusiones no se siguen” (Aristóteles, 1995, pág. 86) es decir; que si niega el antecedente se obtiene la negación del consecuente lo que no es cierto dentro de la lógica. Pero sirve, según Melisso, para pensar en un universo infinito. Ya que, si se admite que todo lo que es generado tiene un principio, entonces lo que no es generado no tiene principio, dicho de otra manera, si el universo no es generado entonces el origen era infinito.

Aristóteles en su libro llamado *Física* el cual está constituido por ocho libros, plantea el continuo y la imposibilidad del infinito acabado. En los capítulos 7 y 8 del libro III, Aristóteles se encarga de demostrar la inexistencia del infinito actual aceptando solo el infinito como potencialidad, es decir el infinito como algo no terminado, algo que no podía alcanzar su ser y al que constantemente se le puede encontrar algo fuera de él.

En el libro III de la *Metafísica*, Aristóteles también trata de analizar y explicar las cuatro paradojas de Zenón. En la paradoja de Aquiles y la tortuga, Aristóteles contrasta el infinito por división y por añadidura, explicando que no se puede recorrer un número infinito de puntos en un tiempo finito. Es decir, no se puede mezclar el infinito potencial con el infinito actual. Las paradojas se convierten entonces en argumentos que llevan a contradecir nuestros sentidos en el cual el movimiento no es posible. Dichas contradicciones son un elemento del denominado “horror al infinito”.

La paradoja de Aquiles y la tortuga. En esta paradoja, Aristóteles, utiliza el concepto en el cual la recta está compuesta de infinitos puntos para así poder generar una contradicción con la realidad que percibimos, en especial con el tiempo.

Aquiles tendrá que recorrer un número infinito de puntos para alcanzar a la tortuga, pero esto es imposible, porque para darle alcance tendría que transcurrir un número infinito de instantes o «ahoras» desde el momento en que partieron. Pero, de esto, que es verdad, no se sigue que un número infinito de instantes constituyan un tiempo infinito, como tampoco que un número infinito de puntos constituyan una extensión o líneas infinitas. (Aristóteles, 1995, pág. 377).

De acuerdo con la paradoja, nuestros sentidos nos dicen que Aquiles por lo rápido que es, en algún momento alcanzará a la tortuga, la más lenta; pero en el modelo matemático se entiende que el segmento AB es un espacio que está compuesto de infinitos puntos "Aquiles no podrá pasar de un punto a otro, porque simplemente entre dos puntos hay infinitos puntos", es decir Aquiles no podrá en ningún momento sobrepasar a la tortuga. Aristóteles le da salida a esta paradoja utilizando su concepto de tiempo. Él está dividido entre pasado y futuro por el ahora, este último es un punto arbitrario que se elige en el tiempo y no tiene ninguna duración pues si fuera así este tendría un pasado y un futuro. "*El ahora*" es igual a todos los ahoras, pero es distinto a los demás porque todos reflejan condiciones distintas del mundo. En otras palabras, "el ahora" es un punto de un segmento de tiempo que se puede tomar en cualquier momento y dividir el tiempo de manera infinita, si así se quiere. Sin embargo, esta división infinita del tiempo no divide la realidad, no divide a las cosas, solo hace es dividir los segmentos que se han puesto de manera arbitraria. en conclusión, en las matemáticas se puede dividir un pastel tantas veces como queramos, sin embargo, esta división del pastel no hace infinito al pastel, dejando claro que una cosa es la división infinita de los segmentos y otra cosa es la división de la extensión de las cosas, que de hecho es finita.

En la actualidad sabemos que esta paradoja tiene una salida a través de una serie convergente en la que la suma de las distancias infinitas da como resultado algo finito. Cada vez que Aquiles avanza y la distancia que los separa es cada vez más pequeña, la suma de esas distancias reducidas es finita, lo que comprobaría que Aquiles si alcanza a la tortuga.

La paradoja de la dicotomía. En esta paradoja Zenón nos expone una contradicción al aceptar el infinito actual. No es posible trasladarse de un punto $\boldsymbol{A}$ a un punto $\boldsymbol{B}$ porque antes de llegar a $\boldsymbol{B}$, se tendrá que recorrer la mitad de la trayectoria. Es decir, llegar hasta $\boldsymbol{C}$, pero antes de llegar a $\boldsymbol{C}$ se tendrá que recorrer hasta la mitad y así sucesivamente, por lo que nunca se alcanzaría la meta. En otras palabras, el límite no se alcanza y esto se hace con un fin, negar la existencia del límite pues al aceptarlo llevaría a contradicciones y a una matemática inconsistente. Aristóteles genera una contraposición frente a Zenón, argumentando que no es posible que se recorra un espacio infinito en un tiempo infinito porque el tiempo no está derivado de instantes, así como la línea recta no puede estar compuesta de infinitos puntos.

> El movimiento es imposible, porque, si el espacio es divisible hasta el infinito, un móvil que parte del punto A para llegar al punto B tendrá que recorrer antes la mitad de la trayectoria, pero para que eso sea posible tendrá que alcanzar antes la mitad de la mitad, y así ad infinitum (pues la línea siempre es divisible por dos); tendría entonces que recorrer un número infinito de puntos, lo cual es imposible en un tiempo finito. (Aristóteles, 1995, pág. 377)

1.2.3 Límite e Infinito en Euclides

Euclides (325 - 265 a.C.) considerado el padre de la geometría tiene entre sus obras, *Elementos*, *División de figuras*, *Óptica*, *Datas*. Siendo Los *Elementos* su obra más destacada, la segunda impresa después de la Biblia. *Elementos* surge por una necesidad de sistematizar el conocimiento sobre la matemática que se tenía y con el rigor que los griegos dieron a través del sistema hipotético deductivo. Aun así, ya el método hipotético deductivo se encontraba en la filosofía de Platón y Aristóteles. Por eso, la importancia que tiene esta obra matemática hasta nuestros días. *Los Elementos* consta de 13 libros, en los cuales se abordan temas de teoría de números, geometría del espacio, geometría del plano y álgebra geométrica. Claro está, que no se encontrarán dichos temas como títulos en los *elementos*, sino que actualmente a los temas tratados se les llamó de esa manera.

Euclides, influenciado por Aristóteles, crea un abismo entre la concepción de número y magnitud adicionando la siguiente definición: “Unidad es aquello en virtud de lo cual cada cosa que existe se llama uno. Número es una pluralidad compuesta de unidades” (Euclides, 1970, pág. 829).

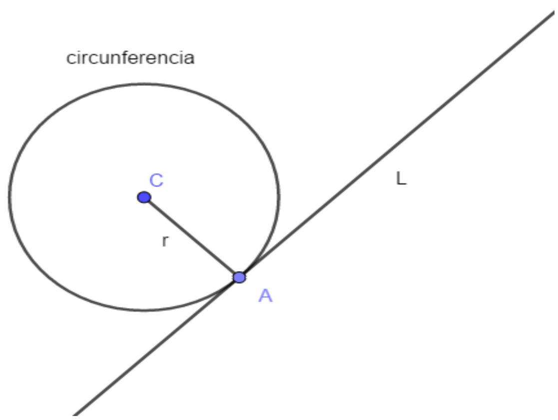
Como podemos observar los números naturales para Euclides, y en sí para los griegos, comienza desde el 2 y adicionando de forma reiterada y sin fin, se obtienen los demás números. Viendo a los números como discretos y a las magnitudes continuas. Además, y a pesar de no llegar a definir al infinito potencial se puede observar que desliga a la matemática al infinito actual, a los infinitesimales y lo infinitamente grande a través de su trabajo. Por ejemplo, la definición 4: “Se dice que las magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que una supera a la otra.” (Recalde, 2004)

Está enunciado tiene relación con la propiedad arquimediana, según dice que: si se tienen dos magnitudes, sean A y B, donde $A < B$. Entonces existe un número natural n, tal que $nA > B$. Ahora, si A es infinitamente pequeña, nA no superará a B. En el caso de que B sea infinitamente grande nA no superará a B. Como se dijo, lo infinitamente pequeño o grande en las magnitudes no tiene cabida en sus trabajos. Aun así, en la proposición XVI del libro IV que trata sobre el ángulo de contingencia:

> La recta trazada por los extremos del diámetro de un círculo formando ángulos rectos con el mismo caerá fuera del círculo, y no se interpondrá otra recta en el espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor y el restante menos que cualquier ángulo rectilíneo agudo (Euclides, 1991, págs. 311-312).

Figura 7

Ángulo de Contingencia



Nota. Elaboración propia. Circunferencia de radio r, por la que pasa la recta L, tangente a la circunferencia por el punto A.

Euclides se aleja de la concepción aristotélica y nos muestra un ángulo que es el más pequeño a cualquier ángulo dado, pero que no es cero (de tamaño infinitesimal) y como este ángulo es una magnitud cumple con la definición anterior. Pero, esto será una contradicción con la misma definición 4, porque en ella se niega la existencia de los infinitesimales y de lo infinitamente grande. Otro ejemplo, de su concepción del infinito potencial que tiene Euclides es la proposición XX del libro IX: "Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos." (Euclides, 1994, pág. 226)

En su razonamiento el conjunto de números primos es inagotables, no acabados, donde no hay un número primo que sea mayor que otro o, dicho de otra manera; dado un primo siempre podemos obtener otro que sea mayor a este. Sigue esa esencia aristotélica de la definición del infinito potencial.

Euclides, en la proposición I en el libro X, da uso de uno de los métodos de gran importancia, ya expuesto por el matemático Eudoxo (390 - 337) de Cnino, donde el concepto de límite se muestra de forma anticipada para dar salida conceptual en donde se encapsulan procesos infinitos y que después Arquímedes lo usa y potencializa para calcular áreas, por ejemplo, la circunferencia y la parábola. (Recalde, 2018)

Proposición 1: Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de la que queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite continuamente este proceso, quedará una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas.

Esta proposición actualmente la podemos ver así (Recalde, 2018, pág. 97): Dadas dos magnitudes $M_1 > \epsilon$, donde es una magnitud. Ahora tenemos una sucesión, $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n, \ldots$, de magnitudes que cumplen con la siguiente condición; $M_1 > M_2 > M_3 > \ldots > M_{n-1} > M_n > \ldots$, por tanto, existe un $n \epsilon IN$, tal que $M_n < \epsilon$. Lo cual tendríamos que

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0.$$

Proposición 2: Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la restante nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables (Recalde, 2018).

La segunda proposición proporciona una manera de definir a las magnitudes inconmensurables.

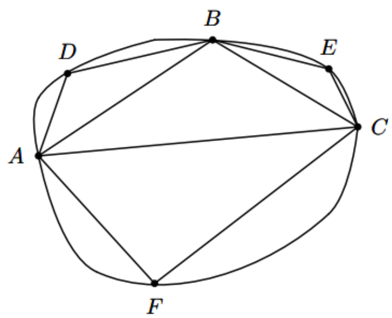
1.2.4 Límite e infinito en Arquímedes

Arquímedes (288 - 212 a. C), nace en Siracusa, Sicilia. En su juventud realizó numerosos viajes y conoció a muchos científicos y la famosa biblioteca de Alejandría. Se estableció en Siracusa cuando ya era un reconocido científico. En física realizó grandes inventos que ayudaron a proteger a su ciudad durante dos largos años y en la matemática, considerado un gran geómetra, y tras conocer a los *Elementos* de Euclides, completa y potencializa sus desarrollos. Siendo, Euclides, el primero que calcula e introducir una aproximación de la medida del número π, con el principio que permite adoptar fracciones y raíces inexactas como cantidades. También, al realizar o adoptar en la matemática algunos procesos físicos de forma heurística para obtener cuadraturas, como la demostración de que $4/3$ del triángulo mayor inscrito a una parábola es igual a un segmento de esta parábola. Y, por último, Arquímedes, visualiza una metodología donde se relacionan los procesos infinitos, el problema del paso al límite y la composición del continuo, esto establece las primeras bases conceptuales del cálculo infinitesimal que se desarrolla más rápido a partir de Newton y Leibnitz.

El Método Exhaustivo en Arquímedes. Arquímedes, posiblemente era más conocido entre la ciudadanía por sus hallazgos en física y no tanto en matemática. Pero, aun así, fue un hombre que aportó una gran riqueza a la matemática. Antes de Arquímedes se le daba salida a la controversia del infinito a través de método de exhaustivo, y es Arquímedes quien desarrolla unas metodologías alternativas, las cuales eran novedosas para su tiempo, que proporcionan algunos resultados (límites). En la sesión anterior se mostró el método Exhaustivo y ahora vamos a ver cómo fue usado por Arquímedes ***(Recalde, 2018, págs. 97-98)***. Supongamos que se tiene una figura cerrada no rectilínea (ilustración 8) y que se va a calcular su medida.

Figura 8

Figura no Rectilínea y Algunos Polígonos Inscritos.



Nota. Método Exhaustivo. Según (Recalde, 2018).

La idea es inscribir o circunscribir una sucesión de figuras rectilíneas de tal manera que: Si R es el área de la figura no rectilínea, A_n el área de las figuras rectilíneas. Siendo $A_0 = ABC$, $A_1 = ABECF$, Y así sucesivamente. Entonces, hacemos que estas figuras rectilíneas cumplan con la hipótesis del método de exhaustivo, tal que $A_0 < A_1 < A_2 <\ldots< A_{n-1} < A_n <\ldots$.

Ahora, cada resta $R - A_0$, $R - A_1$,... es más cercana a cero. Supongamos que en el límite las dos áreas son iguales. Es decir, si el límite es A, entonces $A = R$. Para demostrarlo se utilizará el método por reducción al absurdo. Supongamos que $R > A$, por tanto, $R - A > 0$. por el principio Exhaustivo, existe un n tal que $R - A_n < R - A$. Esto nos hace concluir que A_n>A. Pero, esto contradice la hipótesis inicial que A es el límite. Por otro lado, si $R < A$, tenemos que $A - R > 0$. Entonces, existe un n tal que $A - A_n < A - R$. Por tanto, A_n>R lo cual es contradictorio, porque el área se está acercando a R y todo $A_n < R$. Por lo que se concluye que $A = R$.

La Cuadratura del Círculo en Arquímedes. Uno de sus trabajos donde se destaca su gran ingenio, Arquímedes, muestra la solución de unos de los problemas clásicos, la cuadratura del círculo. Para mostrar que la cuadratura del círculo es posible demuestra que los catetos de un triángulo rectángulo son equivalentes al radio y el perímetro de cualquier círculo. Su argumento para esto es que se puede calcular la longitud de la circunferencia, dado que la razón entre la longitud de la circunferencia y su radio es constante. Arquímedes utiliza la siguiente proposición y demuestra la igualdad entre el círculo, $\boldsymbol{C}$, y el triángulo rectángulo, $\boldsymbol{T = ABD}$, cuya base, $\boldsymbol{R_n}$, y su altura, $\boldsymbol{l}$, es el radio y la longitud de la circunferencia, respectivamente.

Proposición XII.2: Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros (Euclides, 1994, pág. 268).

Euclides citado por (Recalde, 2018, págs. 99-100) emplea una sucesión de polígonos inscritos, P_n, en la circunferencia C(ver ilustración 9). Estos polígonos tienen la forma

P_0 =Cuadrado $AEFH$

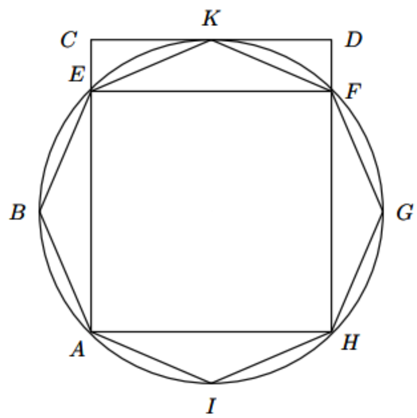
P_1=Octógono $ABEKFGHI$

…

$P_n = polígono$ regular $2n + 2$ lados inscritos en C

Figura 9

Cuadratura del Circulo



Nota. Método Exhaustivo Aplicado al Círculo. Tomado de (Recalde, 2018).

Según (Recalde, 2018) la demostración de que un círculo se puede agotar por una sucesión de polígonos inscritos es la siguiente:

Vamos a realizar las siguientes restas y definirlas así:

$$M_0 = C - P_0 \,, M_1 = C - P_1 \,, M_2 = C - P_2, \dots, M_N = C - P_n \;\; \dots..$$

Ahora tenemos que

$$M_0 - M_1 = C - P_0 - (C - P_1) = P_1 - P_0$$

Entonces, $M_0 - M_1$ es igual a 4 veces EKF. Ahora, 2 el rectángulo $ECDF$ es mayor que

$$\frac{1}{2}(C - P_0) = \frac{1}{2}M_0$$

Entonces, se puede decir que $M_1 < \frac{1}{2}M_0$. Por tanto, existe un n tal que, para una magnitud superficial, tendríamos un P_N que cumple con la siguiente condición

$$C - P_n < \varepsilon$$

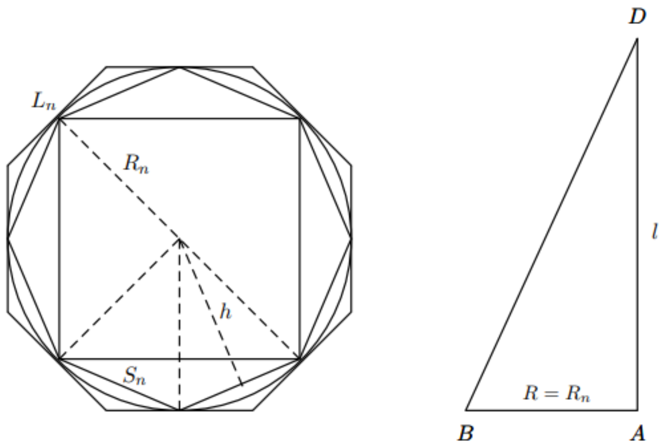
A lo que se llega es que, dada una sucesión de polígonos inscritos en una circunferencia, el área de estos polígonos se puede hacer tan cercana como se quiera al área de la circunferencia.

Proposición 1. Un círculo es equivalente a un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales al radio y a la circunferencia del círculo.

Arquímedes, citado por (Recalde, 2018, págs. 100-101), realiza la demostración utilizando el método de reducción al absurdo, donde utiliza polígonos inscritos y circunscritos como se ve en la siguiente ilustración.

Figura 10

Equivalencia entre del Círculo y el triángulo rectángulo.



Nota. Tomado de (Recalde, 2018).

Sigamos el proceso que aparece en (Recalde, 2018). Sea C el área del círculo, T el área del triángulo ABD y l la longitud de la circunferencia. Primero consideremos que $C > T$, entonces $C - T > 0$ y por la proposición XII.2 de los Elementos, existe n tal queP_n un polígono inscrito en la circunferencia que cumpla con

$C - P_n < C - T$, por tanto, $P_n > T$. Tenemos que P_n es n el triángulo que tiene base S_n y altura h. Entonces, P_n es igual al triángulo de base nS_n y altura h. De aquí que; P_n es menor que el triángulo de lado l y altura R_n

Como $nS_n < l \, y \, h < R_n. Por \; tanto \; P_n < T,$ lo que contradice el resultado anterior.

Por otro lado, si consideramos que $C < T$, entonces $T - C > 0$. Usando la proposición XII.2 de *los Elementos*, en este caso se tienen polígonos circunscritos Q_n. Entonces

$Q_n - C < T - C$, por tanto $Q_n < T$.

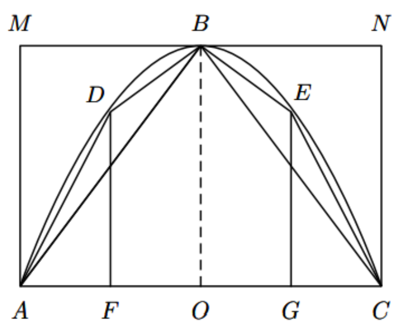
Ahora, Q_n es igual al triángulo de base L_n y altura R_n y es mayor al triángulo de lado l y altura R_n. Como $nL_n > l$, tendremos que $Q_n > T$. Esto contradice el resultado anterior. Lo que implica que $C = T$, donde se quería llegar.

La Cuadratura de la Parábola. Arquímedes, para la demostración propone algunos métodos que no están dentro de la matemática. Este método es un proceso lógico donde entran en juego conceptos físicos, como los principios de equilibrio. El mismo Arquímedes decía que, en sí los métodos utilizados por él no constituyen una demostración rigurosa. Más bien esperaba que otro llegue a los resultados con métodos estrictamente matemáticos. El proceso que sigue Arquímedes, citado por ***(Recalde, 2018, págs. 109-111)***, es el siguiente:

Consideremos la parábola ABC, con vértice B. Se inscriben triángulos de la siguiente forma: Sea $P_0 = ABC, P_1 = P_0 + ADB + BEC, \dots, P_n, \dots$. Cómo se ve en ilustración 11

Figura 11

Cuadratura de la parábola.



Nota. Cuadratura de la parábola por el método exhaustivo. Tomado de (Recalde, 2018).

La construcción de dichos triángulos divide el segmento AC en cuatro partes iguales, obteniendo los puntos $F, O\ y\ G$. Luego, se trazan los segmentos FD y GE que sean paralelos a OB. Por las propiedades de la parábola obtenemos que

$ABC = 4(ADB + BEC)$ De donde tenemos que $P_1 = P_0 + \frac{1}{4}P_0$. Análogamente podemos demostrar que

$$P_2 = P_0 + \frac{1}{4}P_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P_0, \dots, P_{\boldsymbol{n}} = P_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^n P_0$$

Si esta sucesión de triángulos cumple con la hipótesis de la proposición X.1, entonces el área del segmento parabólico, S, cumple que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un n tal que $S - P_n < \varepsilon$

Se traza el paralelogramo $AMNC$, de tal manera que AM es paralelo a OB y CN. Ahora, sea a el área del paralelogramo $AMNC$, entonces $P_0 = \frac{1}{2}a$ y se tiene que $S < a$. Entonces

$$P_0 > \frac{1}{2}S\ y\ S - P_0 < \frac{1}{2}S$$

Vemos que P_0 abarca más de la mitad del área S y de forma análoga se puede generalizar el resultado para los otros triángulos de la sucesión. Por tanto, queda demostrado que esta sucesión si cumple con la hipótesis de la proposición X.1.

Para determinar el límite de la sucesión, Arquímedes, parte de que

$$P_n = P_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{P_0}{4^k} = \frac{4}{3}P_0 - \frac{1}{3}\left(\frac{P_0}{4^n}\right)$$

Como el segundo término puede ser tan pequeño como se desee, Arquímedes concluye que $S = \frac{4}{3}P_0$. Donde, Arquimedes se apoya en que:

$S = A + B + C + D$, de donde $A:B = B:C = C:D = D:E = 4:1$, por tanto $S = \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}E$. Sin pérdida de generalidad se puede extender a un número cualquiera de sumandos. Por último, se obtiene utilizando reducción al absurdo:

$$S = \frac{4}{3}P_0$$

Estos trabajos son de vital importancia, a pesar de que no está el límite como una operación matemática, pero si se encuentra escondido en el método exhaustivo donde hay procesos infinitos en los cuales el límite se ve como la convergencia de una determinada sucesión. La concepción de límite está de forma intuitiva en procesos geométricos infinitos originados por las paradojas de Zenón, el surgimiento de los inconmensurables y en especial en el cálculo de cuadraturas y cubaturas. Se nota una idea del infinito en acto en los trabajos de Arquímedes, dado que se propone que en un cuerpo está constituido por infinitos indivisibles. Con estos métodos se tiene las raíces del análisis matemático, aun así, no se tiene un método general para todas las figuras curvas, dejando así un camino largo para recorrer.

1.3 El Límite y el Infinito en el Renacimiento: Teoría de los Indivisibles

En la edad media, donde el imperio romano alcanza su esplendor y posteriormente su decaimiento, se crea un oscurantismo por parte de la religión que condena a muerte a todo pensador que llegue a ir en contra de sus ideas. De una u otra manera estanca los avances científicos, y en matemáticas, por ejemplo, el infinito es asignado a creencias espirituales. Pensadores católicos como Felipon y Santo Tomas de Aquino establecen que solo Dios, en su infinita sabiduría y perfección, podría entender al Infinito. Pero, hay otros pensadores como Oresme avanzan en los conceptos matemáticos como por ejemplo en la variación, donde el infinito y el límite entran en juego (Riestra, 2004). Es en la época del renacimiento donde se cambia esta idea religiosa sobre el infinito y se encuentra en los procesos geométricos y numéricos en vísperas de la consolidación del análisis matemático. Surgen grandes ideas en base a lo que Demócrito propuso; si se quiere medir alguna cosa, solo hay que sumar los átomos que la conforman. En un principio sobresalen Kepler, Cavalieri y Willis proporcionando métodos novedosos.

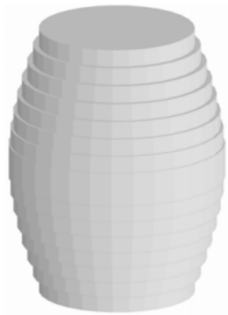
1.3.1 Kepler y su Método de Aproximación

Johannes Kepler (1571 - 1630), introdujo un método novedoso para el cálculo del volumen de barriles de vino. En esta época, el volumen de los barriles se determinaba de manera aproximada, basada en procesos de mediciones arbitrarias. El procedimiento llama la atención de Kepler y comienza un estudio para calcular el volumen de estos barriles. Sus resultados aparecen en el libro *Nova stereometria doliorum vinariorum,* 1615 (Nueva geometría sólida de los barriles de vino). En este trabajo se encuentran 92 figuras curvas, sus áreas y volúmenes, algunos de manera exacta y otros de manera aproximada.

El método que sugiere Kepler para calcular el volumen de un sólido consiste en considerarlo compuesto de capas, también de la misma naturaleza, con grosor tan pequeño como se quiera. Por ejemplo, una esfera podríamos dividirla en infinitos conos, donde el vértice de cada pirámide está en el centro de la esfera, su altura es el radio y la base se encuentra en la superficie de la esfera (Edwards, 2012, pág. 102). Para determinar el volumen de un objeto se deben de sumar infinitesimales de su misma naturaleza; si se quiere calcular el volumen se divide el objeto en volúmenes infinitesimales, o si es áreas se deben de sumar áreas. En el caso de los barriles, se obtienen cilindros con una altura infinitesimal y luego se suman estos cilindros infinitesimales, como se ilustra en la figura 12.

Figura 12

Fragmentación de un Barril en Cilindros.



Nota. Kepler: Volumen de barril. Matemáticas Visuales. Tomado de (htt)

Kepler sólo pudo obtener las áreas y volúmenes en algunos pocos casos, la mayoría de los cuales ya eran conocidos. Sin embargo, hay que destacar su importancia histórica en el sentido de la incorporación de un proceso que involucra el infinito. Se trata de sumar infinitas capas infinitesimales que tienen como límite la figura misma.

1.3.2 El Método de Indivisibles de Cavalieri

Bonaventura Cavalieri (1589 - 1647), matemático italiano jesuita, fue discípulo de Galileo Galilei. Uno de los precursores del cálculo, al igual que Kepler y otros matemáticos. A diferencia de Kepler, Cavalieri, usa "indivisibles". Los indivisibles tienen la cualidad de ser una dimensión menor a la figura que se desea calcular el área o el volumen. Es decir; si un objeto tiene dimensión n, entonces los indivisibles, que lo componen, tienen dimensión $n-1$. Estos trabajos se encuentran plasmados en su obra titulada *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (*Geometría avanzada de una nueva manera por los indivisibles del continuo, abreviadamente: Geometría de los indivisibles*) (Recalde, 2018, págs. 167 - 168).

Para entender los métodos de Cavalieri sobre los indivisibles debemos hablar primero en su principio:

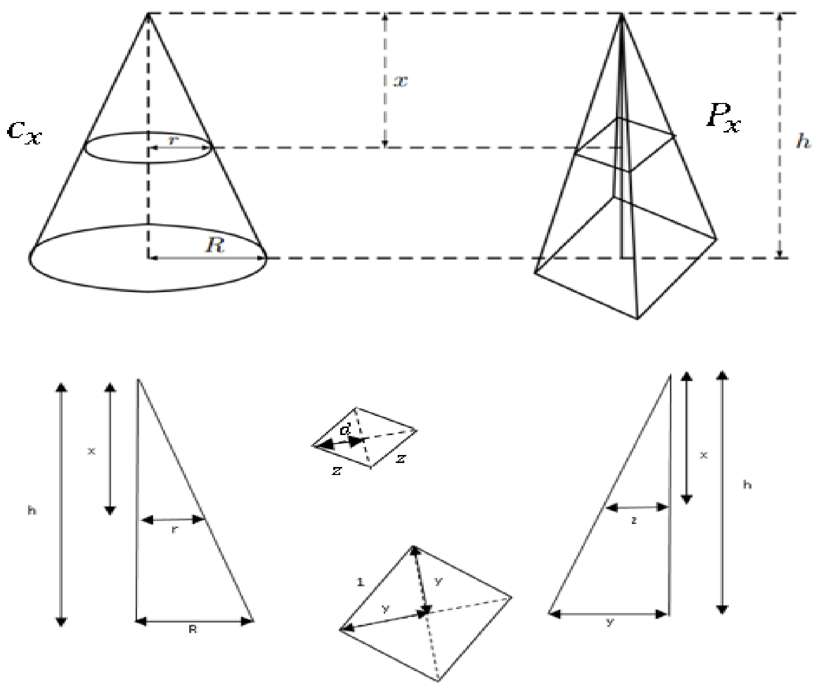
> Si dos superficies cortadas por un sistema de rectas paralelas generan segmentos correspondientes isométricos, estas tienen una misma área; si los segmentos correspondientes tienen una relación constante, existe la misma relación entre las áreas… Si dos sólidos cortados por un sistema de planos paralelos generan secciones correspondientes a la misma área, estos tienen el mismo volumen. Si las secciones correspondientes tienen una relación constante, dicha relación existe entre los volúmenes (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2011, pág. 59).

Este método considera al infinito en acto, ya que un conjunto infinito de indivisibles, sean puntos, líneas o áreas, pueden formar una figura determinada o limitada. En este proceso el límite se toma como algo intuitivo, dado que no hay un proceso matemático que lo consolide, es decir que esquiva los tratamientos con el infinito a través de la comparación entre las figuras geométricas (Recalde, 2018, págs. 172 - 174). En este principio se pueden comparar dos figuras, siempre y cuando se conozca la medida de una de ellas. Este método es el inicio del cálculo de regiones como se hace con la integral, y es está la razón que este método catapulta el inicio del análisis matemático. Cavalieri establece dos formas o métodos para comparar estas figuras:

Método Colectivo. Lo que hace Cavalieri, en concordancia con ***(Recalde, 2018, págs. 175 - 176)***, es una superposición de elementos indivisibles de las sesiones de áreas entre dos figuras geométricas. Para ejemplarizar este método tenemos un cono ($\boldsymbol{C}$) y una pirámide ($\boldsymbol{P}$) de altura $\boldsymbol{h}$, donde el cono tiene radio $\boldsymbol{R}$ en la base circular y la pirámide tiene base cuadrada cuyos lados miden 1 (Figura 13).

Figura 13

Cono de Radio, R, y Pirámide de Base Cuadrada, Tiene Igual Altura, h.



Nota. Adaptado de (Recalde, 2018).

Modernamente, se pueden establecer los desarrollos de Cavalieri. Tomando como punto de partida el volumen de la pirámide:

$$v(P) = \frac{1}{3}h. \ [1]$$

A una distancia x de la punta de ambas figuras se trazan las secciones de área usando semejanza de triángulos rectángulos:

Para el cono $r^2 = R^2\frac{x^2}{h^2}$. Entonces, la sesión de área es

$$a(C_x) = \pi R^2\frac{x^2}{h^2} \ldots [2]$$

Para la pirámide $z^2 = \frac{1}{2}\frac{x^2}{h^2}$. Usando Pitágoras y teniendo en cuenta que en la pirámide se tiene un cuadrado cuyos lados miden d y que $d^2 = \frac{x^2}{h^2}$, tenemos que

$$a(P_x) = \frac{x^2}{h^2} \ldots [3]$$

Dividiendo [2] por [3] obtenemos

$$\frac{a(C_x)}{a(P_x)} = \pi R^2$$

Usando el principio de Cavalieri tenemos que

$$v(C) = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Esta manera de proceder, Cavalieri, a pesar de ser un hombre que sigue las tradiciones griegas se aleja de ellas al considerar el infinito actual. La suma de todas las líneas (ominus) que establece una convergencia de una cantidad no numerable de indivisibles involucrando el límite, ya que las figuras son acotadas. Pero, esté límite no es como un proceso, sino acabado, un cierto valor al que se llega o converge.

Método Distributivo. Se hace una partición de cada uno de los indivisibles de dos figuras geométricas. A partir de estas particiones se establecen o encuentran las relaciones de las colecciones de los elementos en estas particiones y se encuentra el resultado final al unir esas colecciones. Según ***(Edwards, 2012, pág. 106)*** es una aproximación al cálculo de "sumas de potencias de las líneas", donde se obtiene un resultado igual al obtenido por la integral:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \ldots [4]$$

Se resolverá para $n = 1$ y $n = 2$.

Siguiendo lo propuesto por (Edwards, 2012, págs. 107 - 108), un ejemplo del trabajo de Cavalieri para el método distributivo es considerar un cuadrado $ABCD$, utilizando la ilustración 14, cuyos lados tienen longitud a. Se traza la diagonal AC que divide el cuadrado en dos triángulos congruentes. Sean tanto x como y las longitudes de las secciones PQ y QR de estos dos triángulos congruentes. De donde podemos sacar que $x + y = a$. Entonces

$$\sum_A^B a = \sum_A^B (x + y) = \sum_A^B x + \sum_A^B y = 2\sum_A^B x$$

Donde

$$\sum_A^B x = \sum_A^B y$$

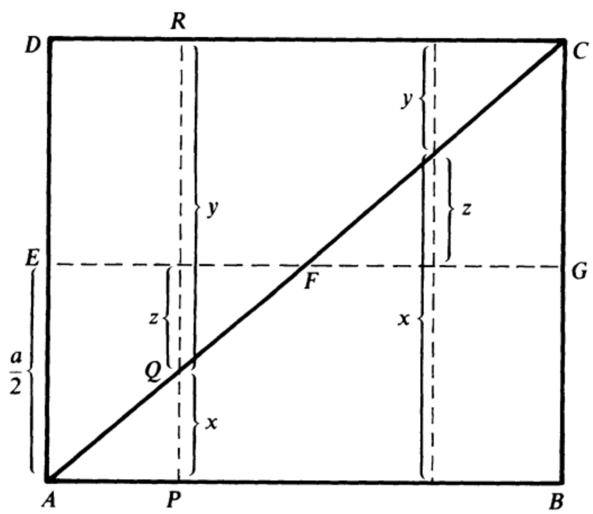
Por simetría. Podemos decir que

$$\sum_A^B x = \frac{1}{2}\sum_A^B a = \frac{1}{2}a^2$$

Ya que $\sum_A^B a$ representa cuadrado de lado a.

Figura 14

Cuadrado $ABCD$, cuyos lados miden a.



Nota. Tomado de (Edwards, 2012).

Ahora, para calcular a $\sum_A^B x^2$, consideremos a $x = \frac{1}{2}a - z$, $y = \frac{1}{2}a + z$. De donde $xy = \frac{a^2}{4} - z^2$ Teniendo esto en cuenta, tenemos que

$$\sum_A^B a^2 = \sum_A^B (x+y)^2 = \sum_A^B x^2 + 2\sum_A^B xy + \sum_A^B y^2 = 2\sum_A^B x^2 + 2\sum_A^B xy$$

Por simetría. Entonces

$$\sum_A^B a^2 = 2\sum_A^B x^2 + 2\sum_A^B \left(\frac{a^2}{4} - z^2\right)$$

Al multiplicar por dos la ecuación y hacer unos arreglos algebraicos obtenemos

$$\sum_A^B a^2 = 4\sum_A^B x^2 - 4 \qquad [5]$$

Donde $\sum_A^B z^2$ es la suma de las líneas de los triángulos AFE y FGC. De donde la suma de los z^2 de uno de los triángulos es el volumen de una pirámide cuyas dimensiones es la mitad del volumen de una pirámide cuyo volumen es $\sum_A^B x^2$. Entonces

$$\sum_A^B z^2 = 2\left(\frac{1}{8}\sum_A^B x^2\right) = \frac{1}{4}\sum_A^B x^2 \qquad [6].$$

Sustituyendo [6] en [5] y restando obtenemos que

$$\sum_A^B a^2 = 3\sum_A^B x^2,$$

de donde se tiene que

$$\sum_A^B x^2 = \frac{1}{3}\sum_A^B a^2 = \frac{1}{3}a^3.$$

Porque $\sum_A^B a^2$ representa un cubo de lado a.

Cavalieri, al parecer no ve la necesidad de nombrar de forma diferente a los dos métodos porque el inductivo es un suplemento del colectivo. Está nueva heurística generaliza las cuadraturas y abandona la tradición griega del método exhaustivo. Además, crea una necesidad de seguir en la búsqueda de nuevos métodos para calcular cuadraturas generales.

1.3.3 Límite e Infinito Para Wallis

Jhon Wallis (1616-1703) publicó su obra en 1655, *la aritmética de los infinitos* en donde plantea una relación entre los infinitesimales y los indivisibles a través de un método que permite el cálculo de sumas infinitas y cuyo fundamento es la geometría analítica y el método de los indivisibles de Cavalieri.

Wallis calculó la cuadratura de una curva por medio de un método que consiste en determinar a X de la proposición $\frac{T}{P} = \frac{1}{X}$.

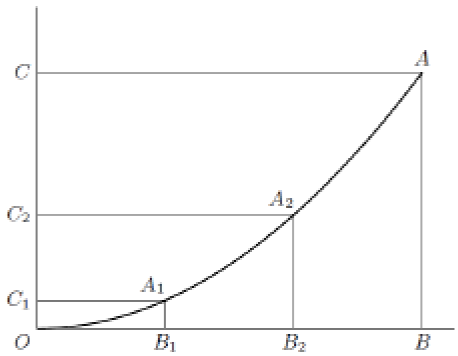
Para Wallis, el problema de la cuadratura de una curva se reduce a calcular la razón entre el área de la figura curvilínea T (área buscada), formada por la curva y los segmentos paralelos a los ejes coordenados, y el polígono P, circunscrito en T; concretamente, se trata de calcular X, en la proporción (Recalde, 2018, pág. 222):

$$\frac{T}{P} = \frac{1}{X}$$

Teniendo en cuenta la figura 15, Wallis pretende establecer la razón entre el triángulo curvo OAB y el paralelogramo $OCAB$. Para ello divide el intervalo B_1B_2 en h partes iguales y la suma de todas las h da como solución el área de la figura que se pretende calcular. En la actualidad la demostración se puede hacer de la siguiente manera.

Figura 15

Curvas de la forma $y = x^n$.



Nota. Tomada de (Recalde, 2018).

De acuerdo a (Recalde, 2018), se tiene que:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{(C_1A_1)^n}{(C_2A_2)^n}, n \in \boldsymbol{Z}^+$$

Al tener la cuadratura $OCAB$ es necesario hallar X de la expresión

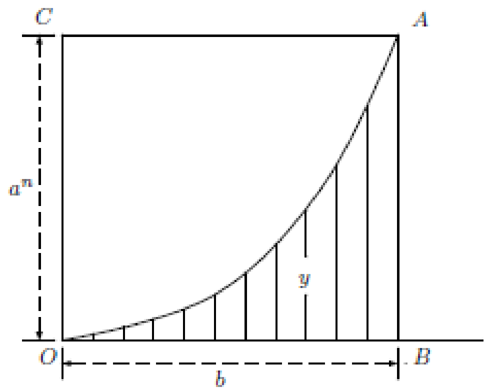
$$\frac{Cuad.OAB}{Cuad.OCAB} = \frac{1}{X}$$

Si $n = 1$ tendremos que OA es una recta, OAB es un triángulo rectilíneo y $x = 2$. El anterior resultado se obtiene gracias a la geometría euclidiana. Ahora si $n = 2$, Wallis utiliza el método de Cavalieri, considera que el triángulo OAB y el paralelogramo $OCAB$ están formados por una infinidad de segmentos paralelos, pero se aleja de él al establecer un formalismo para las sumas infinitas mediante el método de interpolación. De esta manera, si se toma la región limitada por la curva $y = x^n$, el eje x y la recta $x = a$, como se ve en la ilustración 16 se obtiene que:

$$\frac{Cuad.OAB}{Cuad.OCAB} = \frac{\sum_{x=0}^{a} y}{\sum_{x=0}^{a} x} = \left[\frac{\left(\frac{0a}{h}\right)^n + \left(\frac{1a}{h}\right)^n + \ldots + \left(\frac{ha}{h}\right)^n}{a^n + a^n + \ldots + a^n}\right]_{h\to\infty} = \left[\frac{\sum_{i=0}^{h} i^n}{\sum_{x=0}^{a} h^n}\right]_{h\to\infty}$$

Figura 16

Aritmética de los indivisibles de Wallis.



Nota. Adaptada de (Recalde, 2018).

Wallis para llegar a establecer el caso general comienza con casos particulares. Para $n = 1$, en términos actuales se puede considerar la siguiente igualdad

$$\left[\frac{\sum_{i=0}^{h} i^n}{\sum_{x=0}^{a} h^n}\right]_{h\to\infty} = \left[\frac{\frac{h(h+1)}{2}}{h(h+1)}\right]_{h\to\infty} = \frac{1}{2}$$

Wallis sigue el anterior proceso para $n = 2$, obteniendo $\frac{1}{3}$, para el caso $n = 3$ obtiene $\frac{1}{4}$. Lo que lo lleva a establecer la proposición general para n enteros positivos.

$$\left[\frac{\sum_{i=0}^{h} i^n}{\sum_{x=0}^{a} h^n}\right]_{h\to\infty} = \frac{1}{n+1}$$

Por lo tanto, tenemos que en la proposición

$$\frac{Cuad. OAB}{Cuad. OCAB} = \frac{1}{X}$$

Donde $X = n + 1$. De esta manera, si se considera la región limitada por la curva $y = x^n$, la recta $x = a$ y el eje x, dado que el área del paralelogramo $OCAB$ es a^{n+1} (tiene como base a y altura a^n), entonces $\frac{1}{n+1}a^{n+1}$ corresponde a la cuadratura de la región OAB.

1.4 Newton y Leibniz: Una Nueva Disciplina

Newton (1642-1727), físico, filósofo y matemático de origen inglés. Publica su obra *Principios matemáticos de la filosofía natural* en el año 1687. (Vega, 2019) fundamentándose en el texto mencionado, plantea entender el cálculo de tres maneras:

1. El cálculo en términos de infinitesimales. Para Newton un infinitesimal se puede definir como una cantidad infinitamente pequeña no nula "o". Con estas cantidades, Newton, forma una serie de métodos que articulados con algunas nociones de física y con la ecuación de la cuadratura encuentra una expresión a la curva buscada.

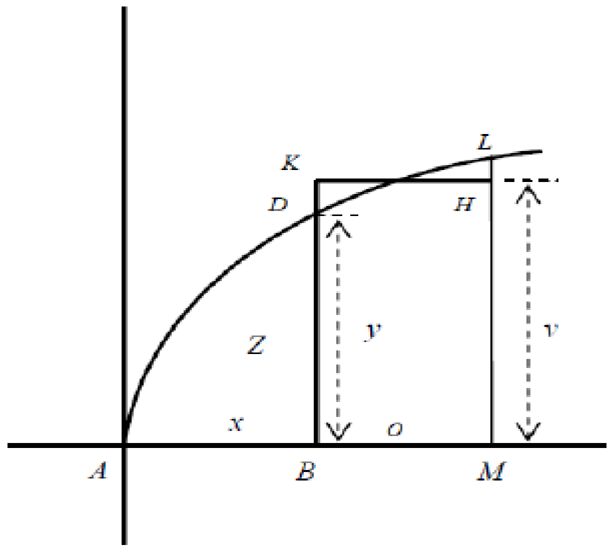
Dada la cuadratura $\frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ se muestra que la curva correspondiente es $y = ax^{\frac{m}{n}}$.

Para la demostración Newton incorpora el símbolo "o". (Incremento infinitesimal), una cantidad muy pequeña distinta de cero, que tiene una característica de no poder ser cero cuando está en el denominador pero que en los sumandos desaparece considera la expresión de la cuadratura de la forma $z = f(x)$ limitada por el segmento $[0, x]$.

Demostración: Tomando como referencia la Ilustración 17, sea el área de $ABD = z, AB = x, BD = y.$ Se toma, $BM = o, BK,$ tales que el área de $BDLM =$área $BKHM = ov$ que es el área del triángulo infinitesimal.

Figura 17

Generalización de las cuadraturas de Newton



Nota. Adatada de (Recalde, 2018).

Newton parte de la curva $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, de donde se puede obtener $z^2 = \frac{4}{9}x^3$. Haciendo una variación infinitesimal o en la variable x se producirá de inmediato una variación ov en el área total, por tanto $(z + ov)^2 = \frac{4}{9}(x + o)^3$. Tanto o y ov son funciones y variaciones tan pequeñas como se desee, si de desarrollan los binomios y reemplazando $z^2 = \frac{4}{9}x^3$, simplificando y dividiendo a los dos miembros de la igualdad por o, lo cual se puede hacer pues el infinitesimal o es una cantidad diferente de cero, la expresión quedara,

$$2zv + ov^2 = \frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2)$$

De esta manera Newton asume a BM infinitamente pequeño, de tal manera que v se hace igual a y, y además o se hace cero, entonces $2zv = \frac{4}{3}x^2$ de tal manera que al momento de sustituir $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, se llega a $y = x^{\frac{1}{2}}$.

Con el anterior resultado Newton encontró un método para hallar las variaciones de distintas cantidades, un método muy semejante al épsilon-delta que manejamos hoy en día.

2. Fluentes y fluxiones. Esta es la segunda concepción del cálculo, en ella, se incluyen los métodos infinitesimales y el concepto de fluxión. Este último, se refiere a la cantidad que fluye continuamente con el tiempo, es decir, una cantidad que no es una agregación de cantidades infinitas, sino que es originada por el movimiento continuo.

Por otra parte, (Vega, 2019) manifiesta las definiciones de Newton acerca de:

Fluente: Cantidades que varían con el tiempo, las denota por x, y.

Fluxiones: Es el cambio de los fluentes, se denota por $\dot{x}, \dot{y}$

Recta tangente: Es el cociente entre las fluxiones, es decir $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}$

Momentos: Son incrementos correspondientes a x,y se denotan por $\dot{x}o, \dot{y}o$

Newton a partir de la ecuación de la curva y utilizando los momentos logro establecer la relación que satisfacen las fluxiones, y consigo la tangente a la curva.

Sea la ecuación de la curva

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

Si se sustituye $x \to x + \dot{x}o$, $y \to y + \dot{y}o$ se obtiene:

$$(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0$$

Si se desarrollan los binomios se tiene:

$$x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}^2o^2 + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}^2o^2 + axy + ax\dot{y}o + ay\dot{x}o$$
$$+ a\dot{x}\dot{y}o^2 - y^3 - 3y\dot{y}^2o^2 + \dot{y}^3o^3 = 0$$

Si se tiene en cuenta que $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ y dividiendo por o y despreciando los demás términos que contienen a o se obtiene:

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ax\dot{y} + ay\dot{x} - 3y^2\dot{y} = 0$$

De esta manera se obtiene el diferencial

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$$

3. Razones primera y última de incrementos evanescentes. Este es el nombre que le da Newton a la tercera presentación de su cálculo, en ella se establece los cimientos del cálculo de fluxiones, con el fin de buscar una solución al problema del tiempo más propiamente a los cocientes de los incrementos infinitesimales de las cantidades variables. Para ello se hace uso de algunos procedimientos en donde se determina el instante en donde dichas cantidades se originan desde cero (razón primera) o se anulan (razón última).

Con lo anterior, Newton muestra la noción de límite, que ahora en la actualidad se conoce con el nombre del límite de un cociente de funciones que se anulan.

Un ejemplo de lo dicho anteriormente se puede evidenciar con el cálculo de la fluxión de la función $y = x^n$

Se debe considerar un incremento o de tal manera que x seria $x + o$ por lo tanto x^n se convierte en $(x + o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \cdots$

De esta manera se puede ver que la variación de x es o y la variación de x^n es $nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \cdots$

Lo que significa que

$$\frac{variacion\ x^n}{variacion\ x}=\frac{nox^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2}+\ldots}{o}=\frac{o\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}ox^{n-2}+\ldots\right]}{0}$$

$$=\frac{nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}ox^{n-2}+\ldots}{1}$$

Por último, se anulan los incrementos, dando como resultado:

$$\frac{fluxion\ x^n}{fluxion\ x}=\frac{nx^{n-1}}{1}$$

Leibniz (1646-1716), filósofo y matemático alemán. Hace dos grandes aportes a las matemáticas, uno es, estudiar la cuadratura de curvas y la otra es, el desarrollo del cálculo diferencial e integral. Según (Vega, 2019), Leibniz desarrolla su cálculo a través de tres ideas:

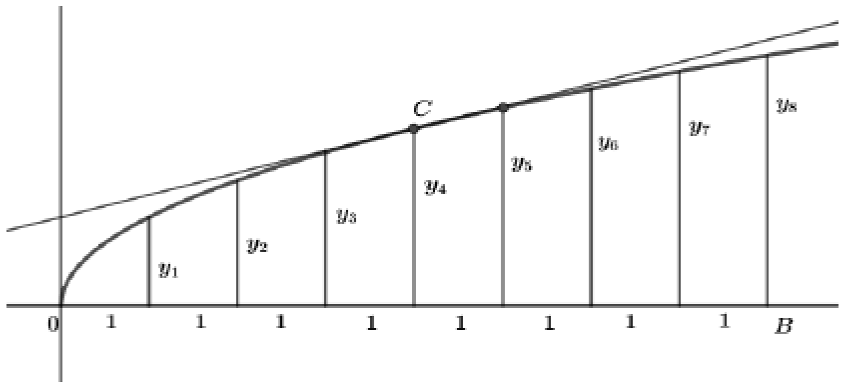
1. lenguaje simbólico apropiado: Leibniz a diferencia de Newton hace uso de ideas filosóficas con el propósito de buscar un lenguaje universal y consigo una notación matemática que ayuda a expresar razonamientos y argumentos por medio de símbolos, formulas y operaciones.

2. Suma y diferencia de ordenadas: Para poder determinar cuadraturas y tangentes, Leibniz, propuso un cálculo infinitesimal de sumas y diferencias de ordenadas. Su cálculo consiste en escoger la unidad muy pequeña, infinitamente pequeña, pues, así, las aproximaciones serían más exactas. Lo anterior significa que la cuadratura es igual a la suma de las ordenadas y que la pendiente es igual a la diferencia de dos ordenadas sucesivas.

En la Ilustración 18 se considera la curva OPB semejante a un polígono, el cual tiene infinitos lados de longitud infinitesimal. A la curva se le asocia una sucesión de abscisas $x_1, x_2, x_3,$ ...y una sucesión de ordenadas $f_1, f_2, f_3, \ldots$, donde los puntos (x_i, y_i) están todos en esta curva. Este polígono es considerado como una sucesión de ordenadas trazadas a intervalos de longitud unidad.

Figura 18

Sucesión de curvas equidistantes.

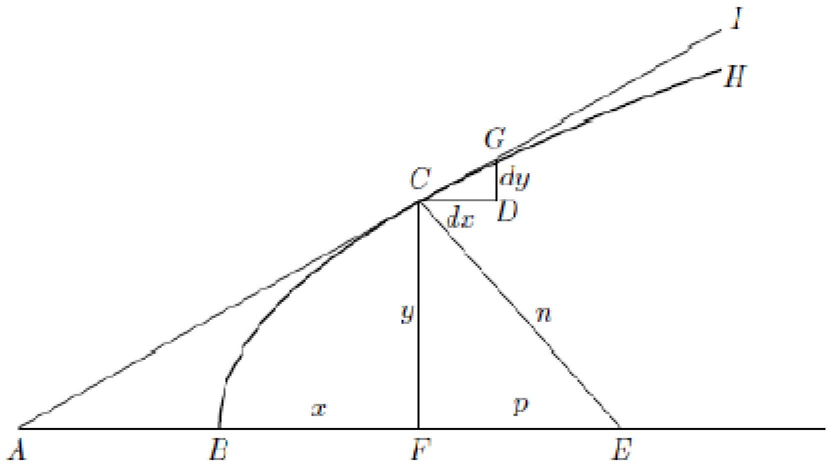


Nota. Tomado de (Lucero, 2020).

3. Uso del triángulo característico. Leibniz, recurre a él triangulo característico, el cual fue incorporado por Pascal (1623-1662) junto con la semejanza de triángulos para poder hallar la cuadratura de una curva. En este triángulo los lados son considerados como cantidades infinitesimales; este se construye tomando un incremento infinitesimal en el eje x, denominado dx y un incremento infinitesimal en el eje y llamado dy. Leibniz considera a las cantidades dx y dy como magnitudes infinitamente pequeñas mayores que cero, pero menores que cualquier otra cantidad dada, es de esta manera, como se convierten los incrementos, en operadores que se pueden sumar y dividir y que funcionan como denominadores pues ellos son diferentes de cero.

Figura 19

Triangulo característico.



Nota. Adatada de (Recalde, 2018).

Sea la curva BCH, de tal manera que la recta AI es tangente a la curva en el punto C, que tiene coordenadas (x, y). Se trazan paralelas al eje x y al eje y, se dibuja el triángulo característico CDG, donde sus lados son infinitesimales, $CD = dx$, $DG = dy$. Este triángulo tiene una particularidad y consiste en que el diferencial dx es una cantidad fija, no nula, infinitamente pequeña en comparación con x, ósea es cantidad infinitesimal, algo similar sucede con dy: Donde CE es la normal, de esta forma se puede observar que la tangente viene dada por $\frac{dy}{dx}$, que es un cociente de diferenciales al que Leibniz llamo cociente diferencial. Dado que el triángulo CDG y CFE son semejantes se obtiene la relación $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$.

1.5 Camino a la Rigorización de los Procesos Infinitos: de Euler a Weierstrass

Debido a las críticas que genero Berkeley a Newton y a Leibniz acerca de la falta de rigor en los procesos infinitos, matemáticos como Euler, D´ Lambert y L’ Huilier dan una salida a esta encrucijada a través de distintos fundamentos.

1.5.1 Berkeley, una Crítica a los Fundamentos Lógicos del Análisis

Berkeley (1685 – 1753), matemático y filósofo jesuita irlandés, se convierte en un opositor al uso de las nuevas técnicas que se desarrollan en el análisis. Más allá de los resultados que el análisis proporcionaba, Berkeley no estaba a favor por la falta de fundamentos en estos nuevos métodos, donde los infinitésimos eran los protagonistas. En 1707 dio una conferencia llamada *Of Infinites* una obra que aparte de tener un contenido filosófico, es una crítica al uso de los infinitesimales en el análisis. Berkeley lo dijo de la siguiente manera en su obra *Of Infinite*; "sin embargo, hay algo en sus principios que ocasiona muchas controversias y disputas, para gran escándalo de la tan celebrada evidencia de la Geometría" (Lopez, 2014, pág. 201).

Según Berkeley, toda esta controversia que trajo el uso de los infinitesimales podría acabar si se sigue las ideas de John Locke en su libro según, en el capítulo XVII, donde aborda el tema es la infinitud. Locke, asevera que el ser humano se hace a la idea de infinitud a través de los números. Esta idea conlleva a que la mente pude entender a través de una cantidad que es incrementada a su voluntad, pero esto conlleva confusiones. Locke decía, según (Lopez, 2014, pág. 201):

> … mientras la idea de infinitud es una idea en crecimiento sin fin, la idea que tiene la mente de cualquier cantidad está en ese momento terminada en esa idea, pues cuando se piensa en una cantidad cualesquiera sólo se tiene, en ese momento, esa cantidad específica y no otra. Lo que esto implicaba es que cuando se unía la idea de infinitud a una cantidad, lo que se estaba haciendo era adaptar una medida fija a una cantidad en constante aumento; como esto resultaba confuso al pensamiento era necesario distinguir entre la infinitud y lo infinito o, en sus propias palabras, entre la idea de "infinitud del espacio" y la idea de "espacio infinito".

Locke, afirmaba que lo primero, “infinitud del espacio”, es aquella idea de incrementos sin fin que la mente se hace de una magnitud dada, mientras que lo segundo, “espacio infinito”, no se podría tener una idea cómo tal, porque sería cómo si la mente hubiera recorrido, contemplar todas aquellas ideas repetidas de espacio y esta repetición sin fin nunca podría cubrirla totalmente, Por tanto, esto llevaría a una contradicción. Berkeley, siguiendo este razonamiento dice, según (Lopez, 2014, pág. 202); “ahora bien, si lo que dice el señor Locke se aplicase mutatis mutandis a cantidades infinitamente pequeñas, sin duda nos sacaría de esa oscuridad y confusión que de otra manera entorpecen las grandes mejoras del Análisis Moderno”.

Los matemáticos se evitarían muchas confusiones y malestares, según Berkeley, si se distingue estos dos tipos de infinitos, donde se puede conocer o entender la infinitud del espacio y no se conocerá el espacio infinitamente grande o pequeño, porque está por encima del entendimiento del ser humano. Esta percepción de Berkeley, en consonancia de la tesis de Locke, establece que toda palabra que se enuncia debe producir una idea en la mente y los infinitesimales no dan una idea clara de lo que son. Está claro sobre la posición que Berkeley que tiene sobre el nuevo trabajo que los matemáticos están tomando y lo expresa de la siguiente forma, citado por (Lopez, 2014, pág. 203):

> Ellos representan en papel infinitesimales de varios órdenes, como si tuviesen en sus mentes ideas que correspondiesen a esas palabras o signos, o como si no incluyese una contradicción que hubiese una línea infinitamente pequeña y aún otra infinitamente menor que esa. A mí me es claro que no debemos usar ningún signo sin una idea que le corresponda y es muy claro que no tenemos ninguna idea de una línea infinitamente pequeña, y no sólo eso, sino que es imposible que

> pueda haber alguna cosa así, pues toda línea, por pequeña que sea, es aún divisible en partes menores que ella misma. Por tanto, no puede haber ninguna cosa tal como una línea quavis data minor o infinitamente pequeña.

Berkeley no se queda ahí, sino que cuestiona los trabajos hechos por Wallis, Newton y Leibniz. Respecto al trabajo de Newton, según (Edwards, 2012, págs. 293-294); Berkeley, En 1734 escribe un ensayo llamado *El analista*, de donde expresa su inconforme con los fundamentos lógicos de los procesos en el cálculo, se obtienen conclusiones verdaderas de premisas falsas.

En su discurso, Berkeley, expresa la necesidad de que los infinitesimales se ajusten a las leyes de la aritmética, y de no ser así, se podría considerar que son simplemente cero.

> De hecho, debe reconocerse que [Newton] usó fluxiones, como el andamio de un edificio, como cosas que debían dejarse de lado o deshacerse de ellas tan pronto como se encontraran líneas finitas proporcionales a ellas. Pero luego estos exponentes finitos se encuentran con la ayuda de fluxiones. Por lo tanto, todo lo que se obtiene con tales exponentes y proporciones debe atribuirse a las fluxiones, las cuales, por lo tanto, deben entenderse previamente. ¿Y qué son estas fluxiones? ¿Las velocidades de los incrementos evanescentes? ¿Y cuáles son estos mismos incrementos evanescentes? No son cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas, ni tampoco nada. ¿No podemos llamarlos fantasmas de cantidades que se han ido? (Edwards, 2012, pág. 294).

Berkeley, argumentó que en estas raíces que tiene el análisis se encuentra, además, suposiciones en los cálculos básicos, que traen conflictos, y si llegan a conclusiones validas es debido a que se equilibran los errores.

1.5.2 Euler, Como Precursor del Análisis

Leonhard Euler (1707 - 1783), matemático y físico suizo, discípulo de Johann Bernoulli (1667 – 1748), su vínculo se estableció gracias a la amistad que Johann tenía con su padre, Paulus Euler. En un principio Paulus fue discípulo de Jakob Bernoulli (1654 – 1705), pero su hermano, Johann Bernoulli, se hace amigo y maestro de padre e hijo Euler. En su regreso a Berlín, en 1741, realiza los primeros libros sobre el análisis matemático. Es Euler el primero en organizarlo de forma formal, comprensible y, además, desvincula los conceptos geométricos de la nueva disciplina, el análisis matemático, a través de tres textos (Del simple calculo al análisis matemático: Euler. Navarro S. Joaquín, pp 129 - 13):

1. Introductio in analysin infinitorum (Introducción al análisis del infinito en 1748).
2. Institutiones calculi differentialis (Fundamentos de cálculo diferencial en 1755).
3. Institutiones calculi integralis (Fundamentos de cálculo integral desde 1768 a 1770).

En el primer libro se introduce el número e, la idea de función (es aquí donde se muestra la estructura interna de las funciones a través de lo infinitamente pequeño e infinitamente grande), las series de potencias de $sen(x)$ y $\cos(x)$, series divergentes, la solución del problema de Basilea, entre otras. Estos y otros conceptos hacen de esta obra muy importante en las matemáticas y sobre todo porque realiza un fuerte trabajo en la unión de los puntos de vista de Newton y Leibniz y aclara la diferencia entre la derivación y la integración, exponiéndolas como operaciones inversas. En las otras dos obras de 1755 y 1768 – 1770 Euler trabaja las fracciones continuas, las series, los mínimos y máximos, etc.

Euler aborda las series convergente y divergente, en una época donde no se ha fundamentado el límite, y encontró varias de estas series divergentes. En este proceso de encontrar la convergencia o no de una serie se tenía, en algunos casos, desconocimiento a donde convergían, si es que en realidad estás series convergen. Casos donde no se entendía donde converge una serie es, por ejemplo, la serie: $1-1+1-1+1-1+\cdots$, si se agrupa de esta manera $(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0$, considerada como una suma de ceros. Pero, si se agrupa $(1+1)-(1+1)-(1+1)+\cdots=1$. Aun así, Euler, como otros matemáticos, partía de la serie

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots$$

La cual conocían muy bien. Se tomaba a $x=-1$, y se tendría que

$$\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}=1+(-1)+(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+(-1)^5+\cdots$$

De donde Euler concluía que la serie, en realidad, converge a $\frac{1}{2}$ (Recalde, 2018, págs. 265 - 266). Entre otras series que iba encontrando Euler, se tiene

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} i}+\cdots=2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}=6$$

$$sen(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

Euler, no se preocupa por mostrar con rigor sus procedimientos, sino solamente mostrar los resultados obtenidos a través de fórmulas y algoritmos, utiliza las propiedades del algebra finita para realizar operaciones con el infinito, donde, sin tener cuidado en sus procedimientos, da sus resultados como en los casos de la suma de series antes expuestas. No le huye al "horror al infinito" como se hace desde la época de los griegos, sino que lo aborda implementado técnicas operativas (Recalde, 2018, pág. 266).

En este pensamiento considera a los infinitesimales casi cero o cero en el caso de su límite. De aquí que, a los infinitesimales, de Leibniz, los hacia cero cuando le convenia y considera que estos son el inverso de lo infinitamente grande. Euler, sostiene que el análisis diferencial esta dado por diferencias entre cantidades extremadamente pequeñas, dx, y que estos al ser más pequeños que cualquier otra cantidad, deben ser iguales a cero. Además, sostenía que $dx \neq dx^2$, pero el diferencial de segundo orden desaparece más rápido que el diferencial de primer orden, a pesar de que al final simplemente sustituye a los dos por cero. Ahora, como $\frac{a}{0} = \infty$, pensaba que el múltiplo entre el cero y el infinito era un número bien definido. Por tanto, clasifico a los infinitos dependiendo del orden que tenía los diferenciales, por ejemplo; al dividir por dx^2 se obtiene un infinito de segundo grado, dx^3, un infinito de tercer grado y así sucesivamente.

1.5.3 El Límite en D'Alembert

D'Alembert (1717- 1783) Matemático, filósofo y enciclopedista francés. Utiliza las críticas que le hace Berkeley a Newton y a Leibniz, para fundamentar las bases del cálculo a través de su teoría de límites. La teoría propuesta por D'Alembert interpreta las razones primeras y últimas de Newton como límites, para así de esta manera poder sustituir la interpretación infinitesimal, esto se puede ver mediante la siguiente cita:

> Se dice que una magnitud es el límite de otra magnitud, cuando la segunda puede acercarse más a la primera que a una magnitud dada, tan pequeña como esa magnitud {dada} puede suponerse, sin embargo, sin que la magnitud que se está acercando sea capaz de superar la magnitud a la que se acerca, la diferencia entre una cantidad y su límite es absolutamente inasignable…hablando correctamente, el límite nunca coincide, o nunca llega a ser igual, a la cantidad de la cual es un límite, pero esté ultimo siempre puede acercarse más y más, y puede diferir de él en tampoco como se desee. [Traducido al español de [(Grabiner, 2005, pág. 8)]].

De acuerdo con lo anterior, para D'Alembert la cantidad (es decir la variable) que se aproxima a otra cantidad (su límite), no puede ser igual a él. Esto es porque siempre se van a diferenciar la una de la otra por una distancia o porción tan pequeña como se quiera. Aunque, alejándose de la postura de Newton respeto a su teoría de "primeras y ultima razones". Esta definición presenta falencias; no indica que tanto se aproxima las dos magnitudes ni tampoco si está aproximación se hace con valores mayores o con valores menores a la magnitud límite y además no tiene una simbología matemática adecuada. Sin embargo, está da una apertura para la construcción moderna del concepto de límite, que se desarrollara un siglo después por Weierstrass.

D'Alembert, trata de fundamentar los infinitesimales de segundo orden y de orden superior, de la siguiente forma:

> Cuando uno dice que una cantidad es infinitamente pequeña con respecto a una cantidad que ya es infinitamente pequeña, esto significa simplemente que la proporción de la primera de estas cantidades a la segunda es simplemente mucho más pequeña que la segunda cantidad que la última que cantidad dada… y que la relación puede superarse tan pequeña como queramos al imaginar la segunda cantidad suficientemente pequeña. [Traducido al español de [(Boyer, 1949, pág. 248)]].

Más adelante Cauchy aclara el concepto y la resolución en el orden en los infinitesimales, pero, su punto de partida fue la anterior apreciación dada por parte D'Alembert. Además, instaura, que el límite de la relación debería ser cero para los infinitesimales de orden superior.

D'Alembert también deja establecido su noción de infinito "la noción de infinito es realmente la de lo indefinidamente grande y solo es un resumen conveniente para la interpretación en términos de la doctrina de límites" [Traducido al español de [(Boyer, 1949, pág. 249)]]" es decir, D'Alembert interpreto el infinito como algo indefinidamente grande, cuyos valores sucesivos aumentan más allá de cualquier valor dado.

1.5.4 L'Huilier, el Método Exhaustivo en Términos de Límites

Simón Antoine Jean L'Huilier, en su ensayo, en 1788, intenta mostrar que el método exhaustivo convenientemente modificado, en términos de límites, puede llegar a establecer las bases del análisis, sin llegar a retomar los infinitesimales, así como lo pensaba D'Alamber (Boyer, 1949, pág. 255).

L´Huilier, en esta búsqueda de fundamentar el cálculo proporciona ideas acertadas que incluso hoy en día se siguen usando. Da algunas definiciones como la de límite, (Boyer, 1949, pág. 256):

> Dada una cantidad variable siempre menor o mayor que una cantidad propuesta; pero que puede diferir de esta última en menos que cualquier cantidad propuesta por pequeña que sea, esta cantidad constante se llama el límite en grandeza o en pequeñez de la cantidad variable.

Y, en términos del límite define la razón o cociente diferencias, según (Boyer, 1949, pág. 255); "L'Huilier define a la razón o cociente diferencial como el límite de la razón del incremento en la función a la de la variable independiente". L'Huilier, contribuye a las notaciones, ya que pensaba que una buena notación favorece al aprendizaje, e incluso hoy en día se usa el símbolo $\frac{dy}{dx}$, como el de límite, lim. Además, demostró los teoremas de cociente y producto entre límites, siempre y cuando estos límites existieran:

$$\lim_{n\to\infty}(p_n)\,(q_n) = \left(\lim_{n\to\infty} p_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} q_n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} p_n}{\lim\limits_{n\to\infty} q_n}$$

L'Huilier, a pesar de que consideraba su trabajo en la misma línea de desarrollo que Newton tenía, su trabajo va más allá. Consideraba que la derivada es un solo número cómo el límite del cociente de los incrementos, y no solo como una razón entre dos cantidades evanescentes, o de dos fluxiones, o de cualesquiera otras dos cantidades que conserven la misma proporción que estos. Hay que notar que a pesar de que decía "cociente diferencias" y mantuvo el símbolo $\frac{dy}{dx}$, L´Huilier, sostenía que este último se debe interpretar como un solo número o función, que es equivalente a la función derivada que Lagrange desarrolla y representa esencialmente la concepción actual de la derivada. De la misma manera, al tratar diferenciales de orden mayor, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., no se deberán dividir como si fueran un cociente. Esta es la diferencia que tenía entre el trabajo de Newton y Leibniz, donde se consideraba que los fluxiones y diferenciales de cualquier orden tenían un significado independiente de la razón o ecuación de entrada.

Aunque los notorios avances que produjo la definición de L'Huilier sobre el cociente diferencial, sobre las dificultades que traía los infinitesimales, la antigüedad de la razón última y la incertidumbre del cociente de $\frac{0}{0}$; paso por alto, que el concepto de límite está ligado a la naturaleza de las sucesiones convergente infinitas, así como también con la naturaleza de los números reales y el continuo. Esto es dado porque trato con funciones sencillas, es decir; donde las variables a considerar siempre eran menores o mayores que su límite y no consideró aquellas variables que pudieran oscilar, como se podría hacer actualmente bajo una visión más general.

Otro error que L´Huilier toma, expresa [traducido al español (Boyer, 1949, pág. 256)], es la idea de uniformidad, que Leibniz la expresa en la ley de continuidad: "si una cantidad variable en todas sus etapas goza de cierta propiedad, su límite gozará de esta misma propiedad". Esto no concuerda, por ejemplo, con la concepción que se tiene de los números irracionales, los cuales se definen cómo el límite de las sucesiones de números racionales. Otro ejemplo, es que las propiedades que tiene un número de polígonos inscritos en un círculo no son las misma que de la figura límite; el circulo.

Aunque, L'Huillier trató de dar solución a la fundamentación del cálculo a través del límite, acertadamente, su trabajo trato de funciones buen funcionamiento y esto trajo la dificultad de poder generalizar el concepto de límite. Además, al compartir la concepción de D'Alembert sobre el infinito desde el punto de vista de la magnitud y no tanto de la adición, también, niega la existencia del infinito actual, porque esté trae consigo "contradicciones" como $\infty + n = \infty - n$ y esto es por tratar al infinito con las mismas reglas del algebra de lo finito. Por tanto, según [traducido al español (Boyer, 1949, pág. 257)]:

> … Sostuvo que había demostrado que el cálculo es independiente de toda idea del infinito, ya sea grande o pequeño. En esto no se dio cuenta de que toda la teoría de los límites se basa, en última instancia, en la de los agregados infinitos. Este hecho no fue claramente reconocido hasta el siglo siguiente.

1.6 Formalización del Concepto de Límite

Todo concepto matemático debe de contar con una serie de requisitos para ser formalizado, el concepto de límite no es indiferente a ello. Weierstrass es quien le da rigor a este concepto, pero para ello fue necesario contar con la definición del infinito potencial el cual ya había sido establecido previamente por Cauchy.

1.6.1 Cauchy: el Infinito Potencia se Instaura Formalmente en las Matemáticas

Agustín-Louis Cauchy (1789 - 1857), ingeniero y matemático francés, desde muy temprana edad fue estudiante de Lagrange, al parecer Lagrange y Laplace eran amigos del padre de Cauchy. Debido a la revolución francesa el padre de Cauchy se desplaza, con toda su familia a Arcueil donde pasan malos momentos económicos. Al volver a París, el joven Cauchy recibe clases en casa y se destaca por su gran talento, en especial en matemáticas. Trabaja en los campos de ecuaciones diferenciales, teoría de permutaciones, probabilidad, física, series convergentes y divergentes, y en su gran aporte a la estructuración en el análisis matemático, donde establece una serie de conceptos que permiten organizarlo teóricamente, y esto lo hace en dos libros; *Curso de análisis* (1821) y las *Lecciones sobre el cálculo infinitesimal* (1823). De acuerdo con (Recalde, 2018, págs. 263 - 264), en el libro de 1821 se establecen los conceptos de número real; "…corresponden a la medida absoluta de las magnitudes", cantidad; "es un número precedido de signo", cantidad variable; "es aquella que recibe sucesivamente varios valores diferentes los unos de los otros". Y, con esta última definición se prepara para definir el límite y lo hace de la siguiente manera:

> "Cuando los valores que va tomando sucesivamente una variable particular, se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acaba por diferir de él tan poco como queramos, entonces este último valor, recibe el nombre de límite de todos los anteriores." (Cauchy, pág. 76).

Con esta definición de límite, Cauchy le toma un paso adelante a L'Huilier, aunque trata de no alejarse del pensamiento euclidiano y también, estar acorde con los nuevos trabajos del análisis matemático. Ataca las deficiencias conceptuales que se tenían hasta el momento, pero faltan ajustes en su lenguaje para que el concepto de límite llegue a ser, además de formal, riguroso matemáticamente. Esta decadencia se nota en la parte que dice: "…de tal manera que acaba por diferir de él tan poco como queramos…", está parte se refiere a que está tan cerca del límite, tanto como se quiera. Esto es ambiguo, ya que no se tiene como medir esa diferencia, y es en la escuela de Weierstrass donde se replantea o se completa esta definición a través de $\varepsilon - \delta$.

Ya con la definición de límite, Cauchy entiende que puede formalizar las cantidades infinitas:

> Un infinitamente pequeño es una cantidad variable cuyos valores numéricos sucesivos decrecen indefinidamente, tornándose menores que cualquier número dado. En otras palabras, cuando su límite es cero. Una cantidad deviene

> infinitamente grande cuando sus valores numéricos sucesivos, que crecen más y más, de modo que rebasan cualquier número dado (Cauchy, pág. 76).

Ya que se define a través del concepto de límite está definición continua con la concepción de una "variable numérica dinámica", una aproximación infinita de una variable, concepción de movimiento que Cauchy proporciona al límite. Aun así, es Cauchy, él que incorpora los primeros pasos en la formalización del infinito potencial aristotélico, se ve cuando habla de esa variación tanto como en números que disminuyen continuamente o que aumentan indefinidamente, no solo se trata de variaciones discretas, como en el caso de la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ o $\{n\}$, sino también de variaciones continuas.

Luego, establece la definición de función continúa.

> La función $f(x)$ es una función continua de la variable x entre dos límites asignados, si para cada valor de x entre esos límites, el valor numérico (absoluto) de la diferencia $f(x+a)-f(x)$ decrece indefinidamente con a. En otras palabras, la función $f(x)$ será continua entre dos límites, si un incremento infinitamente pequeño de la variable siempre produce un incremento infinitamente pequeño de la función misma (Cauchy, pág. 76).

Modernamente se distingue que la definición de Cauchy no es puntual sino para un intervalo cerrado. Pero, esto no trae dificultad alguna, ya que la continuidad uniforme en una función implica continuidad en un intervalo cerrado y viceversa (Recalde, 2018, pág. 265).

Respecto a la convergencia y divergencias de series no se tenía un marco teórico claro, donde se tenían algunas soluciones de algunas series sencillas, sus tratamientos eran algebraicos y la convergencia y divergencias se tomaba de forma conveniente en los casos que la serie tenga valores oscilantes o en los casos donde el enésimo termino tendía al valor cero. En cambio, Cauchy observa que es el límite el concepto que lleva a dar solución a estos problemas en la teoría de series. Toma como base los criterios de convergencia y divergencia que aparecen en su libro *curso de análisis*, en el capítulo VI: "Una serie divergente no tiene suma". Siguiendo a (Recalde, 2018, pág. 267):

> Sea la serie $\sum_{k=o}^{\infty} U_k$, y $S_n = \sum_{k=o}^{n} U_k$ su enésima suma parcial. La serie $\sum_{k=o}^{\infty} U_k$ converge a S si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ existe y es finito. La serie diverge; "si mientras n crece indefinidamente, la suma no se aproxima a ningún valor fijo [...]".

Ahora bien, ¿qué pasará con los criterios de convergencia si no se conoce el límite? Cauchy da respuesta a esta pregunta con un tratamiento que hoy en día se conoce como el *criterio de Cauchy*; si para la serie se tienen las sumas S_n, S_{n+1}, S_{n+3},... para valores de n infinitamente grandes, la diferencia entre estas sumas y el límite S cada vez es menor, entonces entre estas cantidades infinitamente pequeñas son menores en valor absoluto que cualquier otra cantidad asignable. En la actualidad decimos que; una sucesión $\{a_n\}$ es de Cauchy o cumple con el criterio de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: Si\; n, m \in \mathbb{N} \rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Hoy se entiende que para que una sucesión sea de Cauchy y converja es necesario que el espacio sea completo. Aunque cuando Cauchy presenta esté criterio no había una construcción formal del sistema numérico, él suponía que converge o que es completo.

Además, Cauchy logra demostrar los siguientes criterios que se encuentran en su libro de 1821, (Recalde, 2018, págs. 267 - 268):

a) El de la raíz, basado en el límite de $\sqrt[n]{|U_n|}$.

b) El del cociente, con base en el límite de $\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|$.

c) El del producto: Si $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ convergen, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(U_n * V_n)$ converge.

d) El criterio de la integral: Si $U(x)$ tiende monótonamente a cero al tender x a infinito, entonces $\int_1^{\infty} U(x)$ converge o diverge simultáneamente.

Estos criterios proporcionan un cuerpo teórico para tomar como propios los procesos infinitos en las matemáticas, sin las paradojas que estos contenían desde los antiguos griegos y hacen que se encamine la axiomatización de la teoría de series.

Jean-Marie Duhamel (1979-1872) Matemático y físico de origen francés. Fue director de estudios de la Ecole Polytechnique en donde tuvo a cargo el curso de análisis. En sus clases popularizo el uso del libro de análisis de Cauchy. Escribió su obra *Elements de calcul infinitesimal* en la cual estudia los infinitesimales y sus aplicaciones en el cálculo integral y diferencial.

Duhamel, define una cantidad infinitamente pequeña a través de la noción que se tenía hasta el momento del límite "llamamos cantidad infinitamente pequeña o simplemente infinitamente pequeño, a toda magnitud variable cuyo límite es cero" (Arbelaez, 2011, pág. 95) para Duhamel el límite es una cantidad constante de una cantidad variable, que se origina cuando una cantidad variable se aproxima a una segunda cantidad variable indefinidamente.

El aporte más importante hecho por Duhamel es el "principio de sustitución" el cual, establece que se puede sustituir una cantidad infinitamente pequeña por otra, si la relación entre las dos tiene como límite la unidad.

Con Cauchy se tiene una estructura formal del análisis, con la ciudadanía matemática del límite (concepción dinámica) y a partir de él los procesos infinitos vuelven con fuerza en incorporándose al quehacer del matemático sin los fuertes cuestionamientos que ciertos matemáticos de la época hacían, como por ejemplo Berkley. Pero, es en la escuela de Weierstrass quien le da el rigor necesario.

1.6.2 El Límite Estático en Weierstrass y el Infinito en Cantor

Como se mencionó en el apartado anterior, Cauchy es quien logra esquematizar el análisis matemático a través de definiciones donde ciertos conceptos, como el límite e infinito, adquieren su carácter formal. Pero, es Karl Weierstrass (1815 – 1897) en una serie de conferencias, en 1861, dictadas a sus alumnos, quien le da el rigor necesario, a través de los términos ε – δ, un tratamiento que utiliza solamente número reales, y se aleja de la concepción de movimiento, así como todo referente geométrico. Para 1872 Weierstrass publica un artículo donde demuestra, lo que Bolzano sabia antes, que a pesar de que una función sea continua en un intervalo no quiere decir necesariamente sea derivable en algún punto de dicho intervalo. Anteriormente se pensaba sobre la base en física, que si una curva era continua poseía al menos una derivada en uno de sus puntos. Entonces, la experiencia sugería que dada una función continua esta necesariamente debería ser derivable, aun así, Weierstrass logra demostrar que estas sugerencias son incorrectas. Da un ejemplo de la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ que es continua pero no es derivable, donde x es una variable real a un número entero impar y b una constante positiva menor que la unidad tal que $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ (Boyer, 1949, págs. 284 - 285).

El propósito de Weierstrass era separar de toda intuición geométrica y para esto establece las bases del análisis sobre el concepto de número únicamente. Entiende entonces que debe de excluir la idea de límite del concepto de numero irracional, dado que la última presupone la primera. Comienza con el concepto de numero entero que lo entiende como un agregado de unidades que cumplen una característica en común. Mientras que un número complejo se puede pensar como el agregado de unidades de varias especies que tienen más de una propiedad característica. Ahora bien, los números racionales se pueden construir a partir de clases convenientes de números complejos. Según (Boyer, 1949, pág. 286) Por ejemplo:

> el número $3\frac{2}{3}$ está formado por 3α y 2β, donde α es la unidad principal y β es una parte alícuota, $1/3$, tomada como un elemento más. Aquí se entiende que para que un numero quede determinado es necesario conocer qué elementos, de los cuales hay un número infinito, está compuesto y cuantas veces aparece cada uno. Para $\sqrt{2}$ se tiene un agregado no ordenado de 1α, 4β, 1γ,... donde α es la unidad principal y β, γ,... son ciertas de sus partes alícuotas, y donde el agregado está, por supuesto, sujeto a la condición de que la suma de cualquier número finito de elementos sea siempre menor que cierto número racional. Ahora podemos probar, si lo deseamos, que este número es el límite de la secuencia variable 1α; 1α, 4β; 1α, 4β, 1γ;..., corrigiendo así el error lógico surgido en la teoría del número y los límites de Cauchy. En cierto sentido, Weierstrass resuelve la cuestión de la existencia de un límite de una sucesión convergente haciendo de la sucesión (realmente él la considera un agregado no ordenado) el número o límite.

Si se quiere mostrar que $0.\overline{9} = 1$, tendríamos dos procesos. El primero se puede realizar a través de una correspondencia $x = 0.999$ .... después multiplicar la anterior relación por 10 dando como resultado que $10x = 9.999999$ ... posteriormente se resta la primera ecuación con la segunda, generando que $x = \frac{9}{9} = 1$. También se puede realizar utilizando el concepto de convergencia de una serie, en este caso la serie geométrica: $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000}$ converge a 1. Se puede concluir que el paso que nos permite identificar el 0.99999.. y el 1 es la aplicación del límite. En esta clase de series se ve como una convergencia al límite del cual la sucesión llega a través del suceso infinito acabado.

Weierstrass, apela a estos tratamientos estáticos para considerar a una variable y el límite conceptos que no necesariamente están ligados a la experiencia de la física. Define que una variable es una cantidad o magnitud que no es constante, donde una variable x es una letra que se le asigna una colección cualquiera de valores numéricos. Sigue con la definición de variable continua, (Boyer, 1949, pág. 286): "Si para cualquier valor x_0 del conjunto y para cualquier secuencia de números positivos δ_1, δ_2,..., δ_n, por pequeños que sean, existen en los intervalos $x_0 - \delta_i$, $x_0 + \delta_i$ otros del conjunto, esto se llama continuo".

Ahora entra a definir lo que es una función continua:

> $f(x)$ como continua, dentro de ciertos límites de x, si para cualquier valor x_0 en este intervalo y para un número positivo arbitrariamente pequeño ε, es posible encontrar un intervalo alrededor de x_0 tal que para todos los valores en este intervalo la diferencia $f(x) - f(x_0)$ es en valor absoluto menor que ε; o, como Heine fue dirigido por las conferencias que para $\eta < \eta_0$, la diferencia $f(x \pm \eta) - f(x)$ es menor en valor absoluto que ε. (Boyer, 1949, pág. 287).

Weierstrass, se aleja del movimiento infinitesimal que por ejemplo Bolzano, Cauchy y otros matemáticos le daban al decir que la diferencia $f(x + \Delta x) - f(x)$ se vuelve infinitesimal, o se vuelve y permanece menor que cualquier cantidad dada, cuando Δx se aproxima a cero. El límite de una variable o función la define de una manera similar:

> El número L es el límite de la función $f(x)$ para todo $x = x_0$ sí, dado cualquier número arbitrariamente pequeño ε, se puede encontrar otro número δ tal que para todos los valores de x que difieran de x_0 en menos de δ, el valor de $f(x)$ diferirá del de L en menos de ε. (Boyer, 1949, pág. 287).

En estas definiciones no se ven rastro de los infinitesimales. Aunque desde Newton y Leibniz hasta Cauchy se trató de no trabajar con lo infinitamente pequeño, pero se puede decir que la notación que establece Weierstrass borra del análisis esa noción persistente de lo infinitesimal. Otro aspecto importante es la variable estática que Weierstrass involucra en el análisis donde cambia esa idea de que la variable recorre todos los valores uno cada vez, dejando en nuestra mente esa oscura sensación de movimiento. Se puede ver como el límite está encadenado a los procesos potenciales del infinito. En nuestro de devenir el infinito potencial es evidente cuando trabajamos con conjuntos no acotados, nos creamos una idea intuitiva del infinito, y es porque en estos conjuntos da la posibilidad de seguir un proceso inagotable. Pero, encontramos una cierta barrera cuando pensamos en conjuntos acotados, es ahí donde el infinito potencial se oculta y es por lo que la enseñanza del límite debe abarcar la comprensión el concepto del infinito.

Ulisse Dini (1845-1918) matemático y político italiano. En 1878, publico su obra *Fondamenti per la teórica delle funzioni di variable real,* en ella establece una teoría del cálculo basada en el concepto de límite definido por Weierstrass y por Cauchy.

Dugac, citado por (Lucero, 2020, pág. 94), establece que; Dini antes de estudiar, las funciones variables, primero se enfoca en el estudio del límite y los números irracionales pues, en estudio previo se logran demostrar algunos teoremas que permiten a su vez dar el formalismo necesario a algunas preguntas que hasta el momento no se habían podido responder.

Dugac, citado por (Lucero, 2020, pág. 95) dice que; Dini, introduce en el concepto de "limite", "lo más cercano que queremos, pero diferente de a" en términos matemáticos seria $a + 0$ y $a - 0$ en otras palabras, puntos a la derecha de a y la izquierda de a. Es decir, Dini toma la definición de límite de una función en términos de épsilon-delta como lo deja ver la siguiente cita

(…) un límite A de y para qu$e$ $x = a$ a la derecha o a la izquierda (…) cuando uno no toma 0 sino cualquier número positivo pequeño o luego puede encontrar un ε positivo para el primer caso y negativo para el segundo caso, lo que hace la diferencia numérica $A - y$ siempre sea menor que o para todos los valores de x que permanecen entre a y $a + \varepsilon$ (sin excluir a)

De acuerdo con lo anterior, para Dini, y es una cantidad real, que tiene valores definidos y finitos, la cual, se da para todos los valores de otra cantidad real x, excepto para el caso en donde $x = a$. A se considera que es el valor límite de la función $y = y(x)$ en el momento en el que x crece o decrece al aproximarse a a.

En el otro aspecto, el infinito no es sino en Cantor (1845 - 1918) a finales del siglo XIX, donde toma su carácter formal y riguroso, en su trabajo sobre los transfinitos. La controversia que incluso aun nos causa el infinito a través de sus propiedades llevo a que estuviera por siglos en los trabajos de los matemáticos sin estar formalmente establecido.

Desde Aristóteles se tiene una idea sobre el infinito potencial y actual, donde solo se aceptó el potencial al ser un concepto muy intuitivo. En Galileo Galilei a través de una biyacción entre elementos de dos conjuntos infinitos se puede contar dichos elementos, que lo hace pensar que dos conjuntos como los números naturales y su subconjunto los números pares, por ejemplo, al encontrar una bisección entre ellos tiene la misma cardinalidad. Por ende, Galileo concluye que al hablar de conjuntos infinitos no tiene sentido atribuirles las propiedades de "más grande", "más pequeño" e "igual". Pero, es Cantor quien demuestra que hay infinitos más grandes que otros. Nosotros no profundizaremos en los trabajos de Cantor, solo daremos de forma general como se formaliza este concepto.

Cantor, en su teoría está centrada en los conceptos de conjuntos derivados y de potencia. Define al conjunto derivado P' al conjunto de puntos acumulados de un conjunto arbitrario P,.., P^n el conjunto de puntos acumulados de P^{n-1}. Y, esto le permite clasificar los conjuntos en dos tipos: Los de primera especie (Es aquel que existe un numero natural n se tiene que $P^n = \emptyset$) y los de segunda especie (Es aquel que $P^n \neq \emptyset$). En el segundo caso el proceso de derivación se puede continuar indefinidamente. Cantor se da cuenta que en esta asignación de $P^{\infty}, P^{\infty+1}, \ldots, P^{\infty+n}, \ldots, P^{\infty^2}, \ldots, P^{\infty^{\infty}}$, ... sugiere que se podía contar más allá de los números naturales y que los superíndices eran en sí números y los cambio por la letra griega ω como el límite de la sucesión (Recalde, 2004, págs. 8 - 10)

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

De acuerdo con (Recalde, 2004, págs. 9 - 12), esto proporciono la idea de que los naturales, por ejemplo, es un conjunto infinito acabado. Cantor anuncia dos principios; el primer y segundo principio de generación. El primero permite adicionar nuevas unidades para formar nuevos ordinales. Mientras que el segundo al tener una sucesión limitada se define un nuevo número que va a ser el mínimo número mayor de toda la sucesión. Usando estos dos principios se puede construir una sucesión de números

$$\omega, \omega + 1, \ldots, \omega + n, \ldots 2\omega, 2\omega + 1, \ldots, 3\omega, \ldots \omega^{\omega}, \ldots$$

Aunque el orden es muy importante al momento de contar infinitos, ya que no se obtiene el mismo número si se toma un orden diferente. Posteriormente, Cantor demuestra que el cardinal de un A siempre es menor que el conjunto partes de A o conjunto potencia $|A| < |\wp(A)|$. Esto garantiza la existencia de cardinales cada vez mayores. Este trabajo es vital porque Cantor le da formalidad a los conjuntos infinitos y ciudadanía matemática al infinito actual.

2. Concepciones y Creencias de los Docentes Respecto a la Relación Límite e Infinito

Las concepciones de los distintos saberes expuestos en un aula de clase por parte de un docente, en la mayoría de los casos se presentan de manera acabada, dejando a un lado todos los cambios que han sufrido a lo largo de la historia. En nuestro caso nos centraremos en definir en una primera parte el término concepción, para después categorizar las diferentes concepciones que han tenido dos objetos matemáticos; el finito y el límite. Dichos conceptos se clasificarán en dos rejillas con el objetivo de analizar las respuestas a las preguntas de dos cuestionarios, en donde se les cuestiona a los profesores de matemáticas por el límite, el infinito y la relación entre los dos.

2.1 Las Concepciones de los Docentes en el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje

Los conceptos matemáticos como son expuestos en las clases y/o en los libros de texto escolar han sufrido una transposición didáctica que esconde todo un conjunto de complejidades que el concepto ha sufrido a lo largo de su historia. Las concepciones y creencias que cada docente tiene sobre un determinado concepto (relación saber - maestro) tienen relación directa con la forma de enseñarlo. El hecho que, en muchas ocasiones, el docente presente los conceptos de manera acabada y autoritaria, sin ninguna alusión a su desarrollo histórico, puede produce en los estudiantes, obstáculos y/o dificultades y/o errores en el momento de interactuar con dicho concepto. Si a esto le agregamos que algunos docentes no tienen en cuenta las concepciones y creencias previas que sus estudiantes han construido con antelación, se puede llegar a construir concepciones no adecuadas o erróneas en este proceso de aprendizaje y enseñanza en el aula.

El estudio de los conceptos centrales del cálculo, como por ejemplo el límite, tiene numerosas dificultades pues se encuentra emparentado con un concepto que, históricamente, tiene enormes complejidades como lo es el infinito. En muchas ocasiones no se garantiza la construcción adecuada de este concepto, aun teniendo buenos conocimientos de algebra, de propiedades de los números, de las desigualdades o de la geometría. Esto es por su complejidad, como lo plantean muchos investigadores como Blázquez [citado por (Blázquez, Ortega, Gatica, & Benegas, 2006)]. Además, hay que tener en cuenta que en el proceso de aprendizaje es necesario realizar roturas cognitivas previas y acomodaciones; procesos que no se dan de manera continua (Chevallard, 1998).

Por consiguiente, en la práctica docente es de muy importante establecer que rutas se deben abordar los conceptos en el aula de clase a partir, por un lado, de las concepciones que tienen los educandos y los docentes; y, por otra parte, de acuerdo con las teorías pedagógicas. Muchos investigadores afirman que no basta con exhibir la definición para que los estudiantes entiendan y se apropien de los conceptos. Es necesario establecer interrelaciones con otros conceptos implícitos. Por ejemplo, el concepto de límite está relacionado con el infinito potencial. También, los conceptos esconden obstáculos y dificultades que conllevan a que los estudiantes comentan numerosos errores en el momento de plantearles una actividad matemática concreta. Al respecto, Brousseau plantea:[1]

> Las concepciones de los estudiantes son el resultado de un intercambio permanente con las situaciones problema en las cuales están situados y en el curso de las cuales sus conocimientos anteriores son movilizados para ser modificados, completados o rechazados.

Leinhardt y Cols, citados por (Ruiz-Higueras, 1994, págs. 48-49), dicen que muchas veces estas concepciones, originadas de alguna manera de la experiencia que los estudiantes han

[1] Citado por (Ruiz-Higueras, 1994, pág. 51).

tenido con el objeto matemático o indirectamente a través de la vida cotidiana, son resistentes a ser modificadas.

Por ende, no se debe abordar con una enseñanza directa o ignorar dichas concepciones previas que tienen los estudiantes ni tampoco las concepciones que tiene el docente. En este trabajo se abordarán las concepciones de los docentes. Para esto, se tuvo en cuenta la teoría de concepción de Vergnaud, citado por (Ruiz-Higueras, 1994, pág. 50), donde define a una concepción, partiendo de la definición de concepto matemático:

> La noción de concepto nos da cuenta del estado de los conocimientos de un alumno en relación con un concepto. Según este investigador, todo concepto matemático estaría determinado por una terna (S, I, s), siendo:
>
> S: El conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (la referencia);
>
> I: El conjunto de invariantes que constituyen el concepto (el significado);
>
> s: El conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere (el significante).
>
> "Análogamente, una concepción estaría formada por esa misma terna, pero considerándola en un momento dado de la evolución del concepto."

En pocas palabras, una *concepción* que tiene un individuo está relacionada en su forma de utilizar y entender un *concepto*. Entonces, para acceder a las concepciones de los docentes se tratará de estimular con preguntas y actividades relacionadas con el infinito y el límite, que se dan en los dos escenarios, donde se evocan y se involucran las representaciones del concepto en cuestión. Para poder clasificar las concepciones, tanto de límite como de infinito, se construyeron dos rejillas (una para límite y la otra para el infinito) que tiene como base los capítulos realizados anteriormente sobre el recorrido histórico y en el caso del límite, la rejilla se enfatiza en el trabajo de (Medina, 2001):

Tablas 3: Rejilla para clasificar las concepciones de límite.

Concep-ción	División de la concepción	Matemáticos	Límite	Situaciones ligadas al concepto (S)	Invariantes (I)	Sistema de representación (s)
Geométrica	Rigurosa.	Eudoxo - Euclides	No hay un procedimiento matemático. El límite está implícito en el método exhaustivo. Se da los resultados como una deducción intuitiva más que hallarla.	Se origina a partir de contextos geométricos. Procesos geométricos infinitos. Se puede decir que va desde VII a.C. – XVII d.C.	No hay una operación matemática para el límite y es rechazado el concepto de infinito (horror al infinito) que no permite ver la aproximación sucesiva como una operación que llega a un resultado. En la época griega se aplica el límite a procesos geométrico-infinitos, a través de la intuición geométrica. En el renacimiento, en cambio, se considera al límite como una “aproximación finita”	Aproximaciones de áreas construidas a través de regla y compás, y se basan en iteraciones indefinidas. Sumas infinitas de magnitudes geométricas infinitamente pequeñas. Fracciones y la notación decimal.
	Heurística – rigurosa.	Arquímedes	El límite está oculto en las heurísticas de aproximación sucesivas, donde la intuición geométrica y conocimientos de la física. Al final se deduce por el método exhaustivo.			
	Heurística de aproximación finita.	Cavalieri y Kepler	El límite está oculto en procesos heurísticos que nos permite la búsqueda de los que no conocemos. No hay un uso del infinito y se evita el método exhaustivo.			
Metafísica	Heurística de aproximación cinética infinitesimal.	Newton	El límite es un cociente al cual se aproxima indefinidamente a través de una razón de cantidades, más que cualquier diferencia dada y no se puede alcanzar o sobrepasar antes que las cantidades hayan decrecido indefinidamente. Aquí se alcanza el límite.	Se manifiesta a través de problemas de la física, donde tiene que desarrollar procedimientos matemáticos para dar solución a dichos problemas. XVII – XVIII.	El límite se aplica a “magnitudes variables” y se interpreta como una “aproximación infinita cinemática”. No se acepta el infinito actual, aun así y al considerar al límite como el último termino surgido en el tiempo se estaría considerando en acto al infinito, pero de una forma potencial.	Razones de cambio instantánea. Sumas de series infinitas, aproximaciones numéricas mediante procesos iterativos. Representaciones gráficas de curvas, algebraicas y numéricas.
	Algebraica infinitesimal	Leibniz	El límite es el elemento último, donde existe solamente una diferencia infinitesimal entre él y los valores que se están aproximando.	El límite se da implícitamente en problemas de movimiento y variación. XVII – XVIII	Se aplica a cantidades variables, relativas a valores numéricos (fijos pero indeterminados). Considera diferenciales infinitamente pequeños. Y su visión del infinito es igual a la de Newton, ya que	Razones entre magnitudes, triángulo diferencial. Series infinitas y representaciones geométricas, algebraicas y aritméticas. Representaciones gráficas de curvas.

					la sucesión infinita llegara con el tiempo a estar completada.	
Algebraica	Finitista	Pascal y Fermat	Se prima las operaciones algorítmicas y algebraicas para obtener resultados a problemas que involucraban la noción del límite.	Hallar máximos y mínimos a curvas polinómicas y a problemas con tangentes.	El límite se aplica a "cantidades variables en expresiones analíticas (y=f(x))" y están inversas a magnitudes físicas o geométricas, en el sentido de valores fijos pero indeterminados. El límite se determina a través de algoritmos y artificios algebraicos. Predomina la actitud finitista ya que el infinito se considera como un número muy grande o se rechaza.	Incrementos fijos de las variables. Representaciones gráficas y algebraicas de curvas. Se introduce el símbolo $f(x)$ para función y representa una expresión analítica.
	Algorítmica Algebraica	Euler	El límite está impreso en los infinitesimales; ya que ellos al ser tan pequeños los consideraba cero en su límite.	Este inserto en problemas de Geodesia, física, navegación, calendarios		
	Rigurosa Finitista	Lagrange	No hay una idea en límite. Tampoco está implícito en los métodos algebraico.	Trata algunos problemas donde no puede de forma general desligar el análisis de los infinitesimales y el límite.	No hay	
Aritmética	Heurística infinitista	Wallis	Es un procedimiento heurístico y se basa en la inducción incompleta.		Se aleja del Horror al infinito. Sus procesos no tienen el formalismo, pero obtiene resultados.	Bautiza al infinito con el símbolo ∞.
	Geométrica - aritmética dinámica	D'Alembert	Valor fijo al cual se acerca indefinidamente.			
	Numérica dinámica infinitesimal.	Cauchy	Valor fijo al cual se acerca indefinidamente.	Se estructura el análisis a través de un conjunto de definiciones.	Aproximación infinita. Se inicia el encapsulamiento de los procesos infinitos involucrados, donde el límite a veces es alcanzado y en otras no se alcanza. No se apela a concepciones geométricas.	Simbología aritmética y algebraica. Expresiones verbales par las definiciones.
Analítica	Aritmética analítica estática.	Weierstrass	Concepto riguroso, estático y precisa.	Analizar sobre una función y a partir de esta se fundamenta todo el análisis. Se estructura a través de la aritmética en los reales	Se aplica el límite a funciones. Se encapsulan los procesos infinitos y se destierran los infinitesimales. Se utiliza el infinito actual.	Símbolos de $\varepsilon - \delta$. Se establecen vecindades alrededor del límite y el valor de tiende x.

Respecto a las concepciones del infinito tendremos en cuenta la teoría de los campos conceptuales de (Vergnaud, 1990), donde se tiene que el desarrollo cognitivo consiste en llevar a cabo un amplio repertorio de esquemas y el flujo de la conciencia está parcialmente organizado por los esquemas. Entendiéndose por esquema como aquellas acciones totales y organizadas que un sujeto realiza para darle solución a una determinada situación problema. Los esquemas son objetos cognitivos del mismo tipo lógico que los algoritmos y reposan sobre un determinado número de conceptos implícitos. Para un problema determinado el sujeto debe de analizar e inferir que tipo de acción va a realizar para darle solución, y estas acciones están compuestas por reglas que el sujeto a interiorizado, es decir; elementos cognitivos que permiten que esas acciones que el sujeto realiza sean operatorias (a estas acciones se llaman "conocimiento-en-acto" y "conceptos-en-acto" o de forma general "invariantes operatorios").

Lo interesante aquí es entender que los conceptos tienen elementos de variada naturaleza que pueden ser totalmente implícitos y una parte de ellos llegan a ser explícitos. Esto nos dice que una persona puede tener un determinado esquema o varios que le permite hacer una serie de acciones para dar solución a un problema, pero en algunas ocasiones no es capaz de identificar qué tipo de conceptos están implícitos o reposan en este o estos esquemas. Nosotros llamaremos aquellas concepciones que las personas utilizan, pero están de forma implícita en sus acciones como una *concepción general*. Una concepción que esté de forma explícita, es decir; que la persona pueda exteriorizar de forma verbal o escrita será categorizada como una *concepción formal*.

construimos el siguiente cuadro para clasificarlas:

Tabla 4: Rejilla para clasificar las concepciones del infinito.

Concepción o Creencia	**Matemáticos**	**Situaciones ligadas al concepto (S)**	**Invariantes (I)**	**Sistema de representación (s)**
Intuitivo	Anaximandro, los Escolásticos.	Se origina a través del contexto numérico, en el proceso de contar y sus inconsistencias con la experiencia del movimiento, tiempo, vida, etc.	Procesos reiterados de suma. Ver los procesos sin un fin, tampoco con un comienzo. Se excluye lo infinitamente pequeño o infinitesimales.	"Ápeiron", descripción de los números naturales.
General	Aristóteles	Se da a través del contexto numérico y geométrico y sus inconsistencias con la experiencia del movimiento.	Procesos reiterados de suma y división. La construcción de los números naturales, la división de segmentos de forma reiterada sin fin., en la física los procesos infinitos llegan a un límite.	los infinitesimales, los indivisibles (átomos, para Demócrito),
	Eudoxo, Arquímedes, Cavalieri, Wallis, ...	Se origina en las cuadraturas, cubaturas	A pesar de que no se acepta al infinito actual, se llega a un resultado después de realizar un proceso iterado en la geometría y en el renacimiento se tiene la idea de que los objetos están compuestos de indivisibles.	Aproximaciones de áreas construidas a través de regla y compás, y se basan en iteraciones indefinidas. Sumas infinitas de magnitudes geométricas infinitamente pequeñas. Fracciones y la notación decimal. Símbolo de la lemniscata (∞).
	Newton	Contextos de movimiento y en series.	Se adopta al infinitesimal para los cálculos, que a veces es diferente de cero y es cero en la suma. No se define el infinito actual a pesar de que se usa en sus trabajos.	Fluxiones y fluyentes de las primeras y últimas razones. Binomio de Newton, uso de infinitesimales.
	Leibniz	Contextos de movimiento y en series.		El triángulo característico, cálculo de diferenciales.
Espiritual – Emocional	Agustín	Creencias religiosas y sentimientos.	Lo divino está por encima de la capacidad del hombre para entenderlo.	No tiene
Formal	Cauchy	Desde la necesidad de darle ciudadanía al límite define lo infinitamente grande e infinitamente pequeño.	Se expulsa el infinitesimal. Se ve como el infinito potencial está inmerso en la definición de límite y viceversa.	Lenguaje formal para definir lo infinitamente grande e infinitamente pequeño.
	Weierstrass	Establece una operatividad del límite desde una concepción estática, donde el proceso iterativo se encapsula y oculta al infinito potencial.	Se esconde el infinito potencial en la definición de límite, donde se establece distancias para medir.	Desigualdades, donde se establecen intervalos abiertos.
	Cantor	Construcción de los conjuntos infinitos (contable y transfinitos)	La teoría de conjuntos, surgen los transfinitos y el infinito actual se establece formalmente.	$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, ...$ O $2^{\aleph}, 2^{2^{\aleph}}, 2^{2^{2^{\aleph}}}, ...$

				O, A través de la letra griega ω.

2.2 Los Instrumentos Aplicados a los Docentes

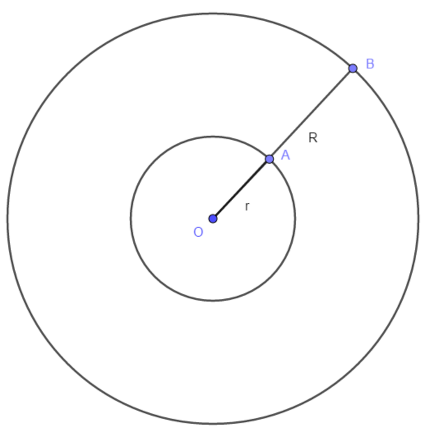
Tomando en cuenta las rejillas anteriores, se diseñaron dos cuestionarios para aplicarlos a los docentes, los cuales se transcriben a continuación.

Cuestionario Abierto

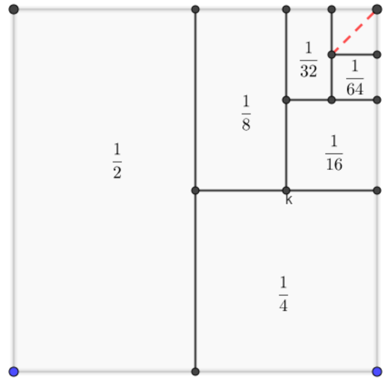
1. ¿Qué es, para usted, el infinito? De algunos ejemplos.
2. Formalmente, ¿cómo se introduce el infinito en matemáticas?
3. ¿Qué es una cantidad infinitamente pequeña? ¿Qué es una cantidad infinitamente grande? ¿Cómo se introducen en la escolaridad estos conceptos?
4. En sus clases de cálculo, ¿cómo introduce el concepto de límite?
5. ¿Cuál es la relación que existe entre los conceptos de límite e infinito?

Cuestionario Cerrado

1. ¿Cómo argumenta usted que $3,\overline{9} = 4$?
2. Dadas dos circunferencias concéntricas con radios R y r, con $R > r$. Se trazan segmento que sea proyección central. Es decir; un segmento que sale del centro común O hasta un punto en la circunferencia de radio mayor. Como se ve en la figura. Dicha proyección corta a la circunferencia de radio menor en un punto A y a la otra circunferencia en el punto B. Si hacemos proyecciones centrales, vemos que se puede tener una biyección entre puntos de las dos circunferencias, a pesar de tener radios diferentes o perímetros diferentes. ¿Esté hecho es contradictorio?



3. Dado el cuadrado, se divide de forma sucesiva a la mitad. Como se muestra en la siguiente figura. Cada fracción representa el área de la porción correspondiente.



Si suma estás fracciones de área, ¿qué obtiene?

4. De la siguiente integral ¿Cuál es el significado formal del símbolo dx?

$$\int (x^2 + 1)dx$$

4. Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

¿Cómo les explicaría a sus estudiantes que $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$, dado que $f(x)$ no está definida para $x = 2$?

5. Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

¿Cómo les explicaría a sus estudiantes que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$,? ¿Cuál es el significado del símbolo ∞? ¿Cómo argumentaría que $\infty + \infty = \infty$, pero que $\infty - \infty$ no es igual a cero?

3. Análisis de Resultados

Se describen a los profesores con el símbolo $P\#$, por ejemplo $P1$ o $P2$ o $P3$ y así sucesivamente. Inicialmente se quería solo encuestar a los profesores del departamento de matemáticas de la universidad del Valle, pero, después, se buscaron profesores del área de matemáticas de la universidad Javeriana. Se registran cuatro (4) profesores de la universidad del Valle y tres (3) de la universidad Javeriana. En la siguiente tabla se tiene las respuestas de los profesores.

Tabla 1: Organización del Cuestionario Abierto Según las Categorías

Categoría y pregunta relacionada	Respuestas asociadas a la categoría	Observaciones
Concepciones sobre el infinito **Pregunta 1**: ¿Qué es, para usted, el infinito? Dé algunos ejemplos. **Pregunta 3**: ¿Qué es una cantidad infinitamente pequeña? ¿Qué es una cantidad infinitamente grande? ¿Cómo se introducen en la escolaridad estos conceptos?	**P1.** **Respuesta a la pregunta 1**: “En general, es algo que no conocemos, es correcto decir que es un indeterminado precisamente por lo anterior. Es como algo muy lejano que nunca alcanzamos.” **Respuesta a la pregunta 3**: “Un cantidad infinitamente pequeña o mejor dicho un infinitesimal, es aquella magnitud que podemos hacer tan pequeña como queramos a medida que nos acercamos a ella. En la escolaridad este concepto se introduce a través de un límite.” **P2.** **Respuesta a la Pregunta 1**: “Creo que el infinito es un camino que surge al estudiar los límites o delimitaciones de ciertos conceptos o situaciones. ¿Qué pasaría si tuviera mucho tiempo y nunca me cansara, qué distancia podría cubrir corriendo? ¿Cuántas ideas se me pueden ocurrir? ¿Qué pasa si no fuésemos mortales, cuántos años viviríamos? ¿Cuántas veces puedo dividir por la mitad un segmento?” **Respuesta a la Pregunta 3**: “Una cantidad infinitamente pequeña debería ser un “objeto” que sea más pequeño que cualquier número positivo, pero que sea	Los profesores P1, P2, P3, P5, P6 y P7 tiene una idea intuitiva del infinito potencial: “Algo que no conocemos, Indeterminado, que no se alcanza, Inmortal, división de segmentos, tiempo ilimitado, sin fin, no existe, procesos sin fin.” Mientras que en el profesor P4 se observa una conceptualización bien definida tanto del infinito potencial como el infinito en acto en su respuesta: “El infinito como algo que no es finito, se está considerando la negación del principio de Euclides (el todo es mayor que las partes). Por otro lado, se tiene el infinito como un proceso.” En la pregunta 3, observamos que en los profesores P1 al P4 lo infinitamente pequeño e infinitamente grande es definido a través del concepto de límite. Además, al

	diferente de cero. Una cantidad infinitamente grande debería ser un "objeto" más grande que cualquier número positivo que se nos ocurra, pero no sea "infinito". Un ejemplo de cantidades infinitamente pequeñas podría ser el diferencial o delta de la función distancia cuando pasa un instante de tiempo muy pequeño. Para ello formalmente aparece el concepto de diferencial, que utiliza límites. Así que para hablar de esas cantidades infinitamente grandes o pequeñas el concepto de límite es muy oportuno." **P3.** **Respuesta a la Pregunta 1**: "Algo sin fin… o matemáticamente, sin cota." **Respuesta a la Pregunta 3**: "Infinitamente pequeña: Que se acerca a cero tanto como se quiera. Infinitamente grande: Que es mayor que cualquier cantidad. Se introduce cuando se habla de cotas." **P4.** **Respuesta a la Pregunta 1**: "El infinito es una propiedad que se asigna a ciertos objetos matemáticos y que puede tener diferentes significados según el contexto, por ejemplo, conjuntos infinitos o límites infinitos. Por un lado, tenemos el infinito como la representación de algo que no es finito, en este sentido, se está considerando la negación al principio fundamental de Euclides: "El todo es mayor que las partes"; mientras que de otro lado se tiene el infinito como proceso, por ejemplo, cuando consideramos una variable tomando valores sin cota alguna." **Respuesta a la Pregunta 3**: "Una cantidad infinitamente pequeña es una cantidad simbólica (no nula) en un proceso donde se permite dividir una unidad en tantas partes como se desee. Note que esta cantidad no corresponde formalmente a un número real, pues el único número real no negativo menor que cualquier cantidad positiva es el cero. De manera similar, una cantidad	momento de definirlo, y también el profesor P7, lo hace con acercamiento o alejamiento tanto cómo se quiera a número cero; (**Infinitamente pequeño**: "Magnitud que se hace tan pequeña como se quiera a medida que se acerca a cero", "objeto más pequeño que cualquier todo número positivo", cantidad simbólica, no nula, en un proceso donde se permite dividir una cantidad en tantas partes como se desee, sin ser cero". Ejemplos: "diferencial o delta de la función distancia cuando pasa un instante de tiempo muy pequeño". **Infinitamente grande**: "Un objeto más grande que cualquier número positivo que se nos ocurra, pero que no sea infinito", "desde un contexto matemático, una vista geométrica, está tan alejado del cero cómo se quiera."). El profesor P5 piensa que posiblemente se hable de lo infinitamente pequeño cómo si fuera el infinito negativo ("el opuesto de las cantidades positivas, grandes, pero de signo negativo.") y sus ejemplos son: "contar la cantidad de pelos de la cabeza, cuando se tiene una cabellera abundante, los granos de arena en la playa y las estrellas en el firmamento". El profesor P6 no introduce estos conceptos en sus clases.

	infinitamente grande es una cantidad simbólica mayor a cualquier otra cantidad positiva. Estos conceptos son introducidos en el estudio del cálculo a través del concepto de límite.” **P5.** **Respuesta a la Pregunta 1**: “Lo empleo en un proceso que no se le ve fin, cuando se trabaja en las particiones para dar la definición de integral definida. Lo empleo cuando estoy escribiendo los conjuntos numéricos Natural y Entero, que además de ser conjuntos de cardinalidad infinita, sus términos se hacen grandes, infinitamente grandes Cuando se hace acercamiento para trabajar los límites.” **Respuesta a la Pregunta 3**: “No manejo la expresión infinitamente pequeña, si es que se refiere al menos infinito. Si es esa la expresión indico como el opuesto de las cantidades positivas, grande, pero de signo negativo. Se introduce en la escolaridad el infinito contando los pelos de la cabeza, cuando se tiene una cabellera abundante, los granos de arena en la playa y las estrellas en el firmamento.” **P6.** **Respuesta a la Pregunta 1**: “No existe.” **Respuesta a la Pregunta 3**: “Nunca los introduzco.” **P7.** **Respuesta a la Pregunta 1**: “Una forma de expresar que un proceso o definición de algún objeto o situación no tiene fin. Números naturales son infinitos, el tiempo de vida de la humanidad.” **Respuesta a la Pregunta 3**: “Infinitivamente pequeño o grande dependerá del contexto a emplear. En el contexto matemático y desde un punto de vista geométrico, un número infinitamente grande podría ser aquel que está tan alejado del cero como sea posible, dualmente, el	

	infinitamente pequeño será el opuesto de un número infinitivamente grande.”	
Concepciones relacionadas con el límite **Pregunta 4:** En sus clases de cálculo, ¿cómo introduce el concepto de límite?	**P1.** “Inicialmente de forma intuitiva, posteriormente en la forma maravillosa que nos regaló Cauchy, a través de épsilon – delta.” **P2.** “Personalmente creo que una de las dificultades con el límite es hablar de cercanía, o de qué significa estar cerca de algo (topología de los números reales). Así que usualmente es bueno tener buenas nociones de los números reales y mencionar ejemplos de la vida cotidiana para evidenciar que la cercanía es algo curioso. Hoy en día con las redes sociales estar cerca de alguien es algo no trivial. Se puede estar cerca de un punto sin estar en el punto, esa idea es crucial para hablar del límite de funciones reales. Mediante ejemplos trato de evidenciar diferentes casos que puede tener el límite de una función real.” **P3.** “Por contraposición, cuando se habla de cotas.” **P4.** “El concepto de límite lo introduzco a través de la recta numérica y el concepto de proximidad en los números reales, intentando formar una idea geométrica del concepto.” **P5.** “Es analizar el comportamiento de una función cuando los valores se acercan a un dato que no pertenece al dominio de la función.” **P6.** “Acercándose a un punto fijo recorriendo cada vez la mitad de la distancia.” **P7.** “Usualmente, menciono el punto al cual se quiere determinar el comportamiento de la función, indicando que sobre la recta real se tienen dos formas de acercarse, por la	Desde un punto de vista general todos los profesores establecen que desde un primer acercamiento con el concepto de límite se debe de hacer a través de acercamientos del punto en el dominio para luego analizar qué pasa con los valores de la imagen de la función. Dicen lo siguiente: (“Forma intuitiva y luego a través del concepto de épsilon-delta”, “las dificultades con el límite es hablar de cercanía, o de qué significa estar cerca de algo - topología de los números rales”, “por contraposición, cuando se habla de cotas”, “analizar el comportamiento de una función cuando los valores se acercan a un dato que no pertenece al dominio de la función”, “mencionó el punto al cual se quiere determinar el comportamiento de la función, indicando sobre la recta real se tiene dos formas de acercarse, y luego se empieza a analizar que ocurre con los valores imagen de estos valores”). Cómo vemos, sólo el profesor P1 dice que después utilizaría la definición de estática del límite.

	izquierda o por la derecha, en este sentido, se explora que significa que un número sea cercano por izquierda y por derecha y luego, se empieza a analizar lo que ocurre con los valores imágenes de estos valores. Se dan varias opciones en cuanto a la existencia de límites en funciones continuas, discontinuas.”	
Concepciones sobre la relación entre el límite y el infinito **Pregunta 2:** Formalmente, ¿cómo se introduce el infinito en matemáticas? **Pregunta 5:** ¿Cuál es la relación que existe entre los conceptos de límite e infinito?	**P1.** **Respuesta a la pregunta 2**: “Generalmente a través del concepto de límite. Geométricamente me gusta la definición que se da en el curso de variable compleja con la representación estereográfica, más exactamente, el infinito es el punto que le corresponde al Polo Norte de la esfera de Riemann mediante la proyección estereográfica.” **Respuesta a la Pregunta 5**: “En que el concepto de infinito se expresa a través de un límite. En particular, podemos tomar el límite cuando x tiende a un número finito y el resultado puede ser una indeterminada como el infinito.” **P2.** **Respuesta a la Pregunta 2**: “Creo que debe ser necesario introducir el concepto de función y el de límite. El concepto de función nos ayuda a estudiar el cambio y el límite a entender ese cambio para casos muy particulares.” **Respuesta a la Pregunta 5**: “Para mí el límite de funciones reales es una herramienta que permite estudiar el infinito.” **P3.** **Respuesta a la Pregunta 2**: “Cuando se habla de los conjuntos o cantidades no acotadas.” **Respuesta a la Pregunta 5**: “Que es una tendencia, a lo cual no necesariamente se llega.” **P4:** **Respuesta a la Pregunta 2**:	De forma general, en los profesores se tiene una tendencia de introducir el concepto de infinito a través de una idea de proceso (recordemos que está idea intuitiva se tiene desde la construcción de los números naturales – infinito potencial). El P2 le interesa mostrar el cambio a través de los conceptos de función y límite. Para P6 no existe el infinito, por eso no lo introduce en sus clases. La idea de infinito potencial se encuentra; “conjuntos o cantidades no acotadas”, “conjunto que no es posible hacer corresponder sus elementos de manera biyectiva con los elementos de un conjunto de la forma $\{1,2, \dots, n\}$ donde n es un número natural”, “idea de proceso”. Además, en la pregunta 5, se tiene una tendencia reiterada de que el límite está estrechamente relacionado con el infinito potencial: “En particular, podemos tener el límite de x tiende a un número finito y el resultado puede ser una indeterminada como el infinito” (aquí se expresa de que el límite proporciona una idea del infinito potencial),

	"Se introduce como cardinalidad, pensando en un conjunto tal que no se es posible hacer corresponder sus elementos de manera biyectiva con los elementos de un conjunto de la forma$\{1,2, \dots, n\}$ donde n es un numero natural." **Respuesta a la Pregunta 5**: "Entendiendo el infinito como la propiedad que puede tener un proceso de aproximación, es posible llegar al concepto de límite a partir del concepto de infinito. De hecho, creo que podrían ser conceptos equivalentes, pero debo meditar mejor acerca de esta última afirmación." **P5.** **Respuesta a la Pregunta 2**: "lo introduzco básicamente con la idea de proceso." **Respuesta a la Pregunta 5**: "El límite es un proceso infinito, que no todas las veces da infinito como respuesta al proceso." **P6.** **Respuesta a la Pregunta 2**: "No Existe." **Respuesta a la Pregunta 5**: "i) cuando la variable independiente "tiende" a él ii) cuando la variable dependiente tiende a él. Uso la recta real extendida para el eje x o/y para el eje y. Ahora, use el mismo concepto de límite que si no fuera "a infinito." **P7.** **Respuesta a la Pregunta 2**: "Se puede introducir de forma recursiva. En el caso de los naturales, se puede visualizar a través del método de inducción." **Respuesta a la Pregunta 5**: "La relación que existe es estrecha, debido a que, al hallar comportamiento de funciones cercano a un valor, puede suceder que la tendencia de los valores imágenes sean muy grandes o pequeños, lo cual permite pensar que dichos valores crecen o decrecen sin una cota."	"es una tendencia, a lo cual no necesariamente se llega", "el infinito como una propiedad que puede tener un proceso de aproximación, es posible llegar al conceto de límite a partir del concepto de infinito", "El límite es un proceso infinito, que no todas las veces da infinito como respuesta al proceso", "i) cuando la variable independiente tiende a él. ii) cuando la variable dependiente tiende a él" y el hallar comportamientos de funciones cercano a un valor, puede suceder que la tendencia de los valores imágenes sean muy grandes o pequeños…"

Tabla 2: Organización de Cuestionario Cerrado Según las Categorías.

Categoría	Respuestas asociadas a la categoría	Observaciones
Concepción respecto al límite **Pregunta 3:** Dado el cuadrado, se divide de forma sucesiva a la mitad. Cada fracción representa el área de la porción correspondiente. **Pregunta 5:** Dada la función: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ¿Cómo les explicaría a sus estudiantes que $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$, dado que $f(x)$ no está definida para $x = 2$?	**P1.** **Respuesta a la pregunta 3**: "Una sucesión geométrica con $q = ½$. Ahora, en ningún momento se afirma que la suma indicada es una suma infinita. En caso de que la suma sea infinita, obtenemos una serie geométrica convergente." **Respuesta a la pregunta 5**. "Lo mejor sería ilustrarlo con el gráfico de la función dada $f(x)$, allí podemos ver que la función no está definida en ese punto pero que el límite en ese punto si existe. Lo mejor sería hacerle ver a los estudiantes que mediante el concepto de límite en un punto, nos podemos acercar tanto al punto, como queramos, pero sin tocarlo." **P2** **Respuesta a la pregunta 3**: "Observemos que deberíamos obtener el área del cuadrado de lado 1, es decir, 1." **Respuesta a la pregunta 5**: "Usualmente lo mejor para empezar es ver para creer, así que sugería que tabularan los valores que toma la función para x muy cercanos a 2. Números de la forma 1.99999 o 2.00001 ayudarían para la tabla." **P3.** **Respuesta a la pregunta 3**: "UNO" **Respuesta a la pregunta 5**: "Mostrando que la diferencia entre 4 y la cantidad del límite se acerca a cero cuando x se acerca a 2." **P4.** **Respuesta a la pregunta 3**: "Se obtiene el área del cuadrado original, es decir, 1." **Respuesta a la pregunta 5**:	De forma general, podemos decir que los profesores dan solución a la pregunta a través de una serie convergente (P1 y P6), mientras que otros abordan su solución como un problema geométrico, donde se obtiene el área de un cuadrado ("serie geométrica convergente", "el área del cuadrado de lado 1", "área aproximada del cuadrado"). Para calcular el límite de funciones que tienen algún tipo de discontinuidad, los profesores utilizan procesos como: • Obtener una función equivalente para calcular el límite, posiblemente utilizando la factorización (P7. "Se puede aproximar dicho límite puntualmente a través de una función equivalente") • Utilizando las diferencias entre los valores de las imágenes con el límite cuando los valores del dominio se acercan a 2 (P3: "mostrando que la diferencia entre 4 y la cantidad del límite se acerca a cero cuando x se acerca a

	“A través de la definición de límite. Si se analiza el concepto de límite (definición matemática) se podrá reflexionar que este concepto no depende de que la función este definida en el punto hacia donde de desea calcular el límite.” **P5.** **Respuesta a la pregunta 3**: “El área del cuadrado, la unidad cuadrada.” **Respuesta a la pregunta 5**: “Como lo expresé antes, la función no se puede evaluar en dos, pero si en los números, cantidad por cierto infinita, que están muy cerca de dos por la derecha o por la izquierda.” **P6.** **Respuesta a la pregunta 3**: “Una serie.” **Respuesta a la pregunta 5**: “En la definición de límite el "a" del límite NO tiene que pertenecer al dominio de la función. Yo hago el concepto de límite de manera formal y rigurosa. Así NO tengo que presentar depués disculpas por haberlos confundido.” **P7.** **Respuesta a la pregunta 3**: “Área aproximada del cuadrado.” **Respuesta a la pregunta 5**: “Pensando en la discontinuidad removible y que se puede aproximar dicho límite puntualmente a través de una función equivalente.”	2”. P4: “a través de la definición del límite… se podría reflexionar que este concepto no depende de que la función este definida en el punto”. P6: “En la definición del limite el “a” del límite no tiene que pertenecer al dominio de la función”). • Haciendo uso de distintas representaciones del concepto, como por ejemplo por medio de tablas y graficas (P1: lo mejor sería ilustrarlo con el grafico de la función $F(x)$ allí podemos ver que la función no está definida en ese punto”. P2: “sugeriría que tabularan los valores que toma la función para x muy cercanos a 2”. P5: “la función no se puede evaluar en dos, pero si en los números …muy cercanos a dos por la derecha y por la izquierda”).
Concepción respecto al infinito. **Pregunta 2:** Dadas dos circunferencias concéntricas con radios R y r,	**P1.** **Respuesta a la pregunta 2**: “Me surge una pregunta y es ¿contradictorio con qué? Aquí se aprecia que mediante la proyección indicada en el ejemplo a cada punto de la circunferencia pequeña le corresponde uno y solo un punto de la circunferencia grande y viceversa.	A la pregunta número 2, los profesores desde P1 a P7 consideran que el hecho planteado no es contradictorio. Es decir, si se tiene dos circunferencias de diferente radio se puede establecer una biyección entre los puntos de las

con $R > r$. Se trazan segmento que sea proyección central. Es decir; un segmento que sale del centro común O hasta un punto en la circunferencia de radio mayor. Como se ve en la figura. Dicha proyección corta a la circunferencia de radio menor en un punto A y a la otra circunferencia en el punto B. Si hacemos proyecciones centrales, vemos que se puede tener una biyección entre puntos de las dos circunferencias, a pesar de tener radios diferentes o perímetros diferentes. ¿Esté hecho es contradictorio? **Pregunta 4:** De la siguiente integral ¿Cuál es el significado formal del símbolo dx?	Pienso que la pregunta debió haber sido más precisa." **Respuesta a la pregunta 4**: "Significa que la integral la estamos calculando con respecto a la variable x, aunque en realidad dx es el incremento de la variable x, es decir, es el delta de x." **No responde a la pregunta 6**. **P2.** **Respuesta a la pregunta 2**: "Uno podría pensar que la circunferencia de radio R es más grande y por lo tanto debería de estar formada por más puntos, pero esta construcción muestra que ambas circunferencias tienen la misma cantidad de puntos. Pero están organizados de forma diferente. La gran pregunta sería, ¿Cuántas de esas proyecciones centrales puedo hacer? Aquí aparece la topología y el infinito, los conceptos de infinito, estar cerca o de forma suelen ser bastante traviesos." **Respuesta a la pregunta 4**: "el dx en esta integral indefinida nos recuerda que estamos considerando antiderivadas vistas como funciones de la variable x." **Respuesta a la pregunta 6**: "Aquí también empezaría con la sugerencia de que hagan una tabla para números grandes, por ejemplo, potencias de 10. El símbolo de la lemniscata representa que x tiene la libertad de hacerse arbitrariamente grande. Primero, trato de enfatizar que ese símbolo o es un número real, por lo que las reglas de los números reales no tienen por qué funcionar, más bien se debe pensar como una herramienta que permite escribir algunas cosas de forma más compacta. Mediante ejemplos con diferentes funciones se puede analizar casos de restar infinitos." **P3.** **Respuesta a la pregunta 2**:	circunferencias. ("Uno podría pensar que la circunferencia de radio R es más grande y por lo tanto debería de estar formada por más puntos, pero esta construcción muestra que ambas circunferencias tienen la misma cantidad de puntos", "Para nada, es la misma idea de la cantidad de términos que se tiene en un intervalo finito, por ejemplo [0, 1], se tienen infinitos números", "Solo en apariencia pues el conjunto de puntos de la circunferencia menor pareciera ser más pequeño que el de la circunferencia mayor"). En la sexta pregunta el profesor P1 no contesto. Tengamos en cuenta que esta pregunta está compuesta por tres situaciones. La primera es explicar cómo se calcula un límite, la segunda consiste en dar un significado al símbolo lemniscata y la tercera corresponde a la suma y resta entre infinitos. Se encuentra que P2 y P7 dan valores a x para ver el comportamiento de la función ("Aquí también empezaría con la sugerencia de que hagan una tabla para números grandes"). P5 establece un ejemplo de división con números cada vez más grandes ("Siempre empiezo con la ida de dividir una torta entre 5 persona y empiezo a aumentar el

$\int (x^2+1)dx$ **Pregunta 6:** Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$. ¿Cómo les explicaría a sus estudiantes que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$,? ¿Cuál es el significado del símbolo ∞? ¿Cómo argumentaría que $\infty + \infty = \infty$, pero que $\infty - \infty$ no es igual a cero?	"Solo en apariencia pues el conjunto de puntos de la circunferencia menor pareciera ser más pequeño que el de la circunferencia mayor." **Respuesta a la pregunta 4**: "Un diferencial: Una cantidad infinitamente pequeña." **Respuesta a la pregunta 6**: "El símbolo representa una cantidad arbitrariamente grande. El argumento para la suma seria que, al sumar cantidades arbitrariamente grandes, nos daría una cantidad arbitrariamente grande; pero la diferencia no da cero porque las cantidades arbitrariamente grandes, no necesariamente son iguales o parecidas." **P4.** **Respuesta a la pregunta 2**: "El hecho es paradójico dependiendo del conocimiento que se tenga en matemáticas. La proyección muestra que como conjuntos las dos circunferencias tienen la misma cantidad de puntos, pero este hecho nada tiene que ver con la medida de cada conjunto. Si se relaciona el cardinal del conjunto con la medida es un hecho contradictorio, si se sabe que en realidad son conceptos independientes, no lo es." **Respuesta a la pregunta 4**: "El significado dependerá de la teoría en la cual se esté interpretando la integral. Asumiendo la integral de Riemann-Stieltjes es la función respecto de la cual se está realizando la medición de la función $(x\text{^}2+1)$." **Respuesta a la pregunta 6**: "Nuevamente, estos conceptos se deben explicar a partir de la definición de cada símbolo. El símbolo infinito en cada una de las escrituras del enunciado NO debe interpretarse de manera solitaria, lo que tiene sentido es "x tiene a infinito" no el símbolo infinito en solitario; de la misma manera, lo que tiene o no sentido es "infinito + infinito" y "infinito - infinito",	número de comensales"). Mientras que P6 asegura que es fácil si se hace a través de una demostración ("Son preguntas MUY ELEMENTALES. La primera se demuestra."). Aquí, se podría decir que, el profesor utiliza la definición estática para mostrar dicho límite. Respecto a la segunda pregunta el profesor P1, P5 y P7 no contestan. Para el profesor P2 el símbolo es lemniscata, Para el profesor P3 es una cantidad muy grande, para el profesor P4 es el infinito y por último el profesor P6 lo define como la recta extendida. A la tercera pregunta el profesor P1y P5 no responde, para los profesores P4 y P2 sumar o restar infinitos no es lo mismo que sumar o restar números reales, es decir las propiedades de los números reales no aplican en las operaciones con los infinitos ("trato de enfatizar que ese símbolo no es un número real, por lo que las reglas de los números reales no tienen por qué funcionar"). Los profesores P3 y P7 proponen sumar cantidades infinitamente grandes obteniendo como resultado cantidades más grandes y para la resta de infinitos coinciden que la resta no necesariamente da cero siempre y cuando esas

	y cada uno tendrá su contexto independiente. La dificultad con las últimas igualdades radica en parte en abusar de las operaciones suma (resta) y producto con objetos que no son números reales, en este caso el símbolo infinito." **P5.** **Respuesta a la pregunta 2**: "Para nada, es la misma idea de la cantidad de términos que se tiene en un intervalo finito, por ejemplo $[0, 1]$, se tienen infinitos números, solo moviéndose con los dígitos de un número decimal como 0.1, 0.11, 0.111 y aumente la cantidad de unos y no se está ni cerca de 0.2 y ya tiene una cantidad infinita de números entre 0.1 y 0.12." **Respuesta a la pregunta 4**: "La interpretación que yo le doy, es para que vean quien es la variable. Con respecto a quien deben derivar para comprobar que realizaron bien la integral." **Respuesta a la pregunta 6**: "Siempre empiezo con la ida de dividir una torta entre 5 persona y empiezo a aumentar el número de comensales, que imaginen que ya son 100 y que 100 está muy lejos de infinito." **P6.** **Respuesta a la pregunta 2**: "No. Z(enteros) y 2Z no equipotentes también y el proceso que menciona en su caso muestra la equipotencia." **Respuesta a la pregunta 4**: "Ninguno. Clarifica la variable del integrando." **Respuesta a la pregunta 6**: "Son preguntas MUY ELEMENTALES. La primera se demuestra. Para la segunda: la recta real extendida con dos PUNTOS. La tercera NO SE ARGUMENTA, sino que se define (pero fácilmente puede decir porqué le es, A USTED, conveniente. Finalmente, "La resta" en la recta real extendida NO ESTA DEFINIDA. Pero	cantidades infinitamente grandes no sean iguales ("al sumar cantidades arbitrariamente grandes nos daría una cantidad arbitrariamente grande, pero la diferencia no da cero"). El profesor P6 afirma que explica la suma mediante la definición y que la restra entre infinitos no está definida. Para los profesores P1, P2, P5, P6, P7 el significado que le dan a dx dentro de la expresión, es la variable con respecto a la cual se está integrando la función ("clarifica la variable del integrando"), aunque P1 dice que también representa un incremento. Para P4 el dx es una función respecto a la cual se le realiza la medida de la función ("asumiendo la integral de Reiman…. Es la función respecto de la cual se está realizando la medición de la función"). Para P3 el dx es una cantidad muy pequeña ("un diferencial. Una cantidad infinitamente pequeña").

	PODÍA DEFINIR LA DEL EJEMPLO como "0" SI le conviene (no de daña algo).” **P7.** **Respuesta a la pregunta 2**: “No es contradictorio.” **Respuesta a la pregunta 4**: “la variable con respecto al que se está calculando la antiderivada.” **Respuesta a la pregunta 6**: “Analizar el comportamiento de la función conforme los valores se hacen muy grandes y positivos, hará que el resultado de dicha función tome valores cercanos a cero. En el caso de sumar valores tan grandes como sea posible, su resultado será cada vez mayor, pero en el caso de la diferencia, puede tener dos valores tan grandes como sea posible, sin embargo, su diferencia puede no ser necesariamente cero.”	
Concepciones sobre la relación entre el límite y el infinito **Pregunta 1:** ¿Cómo argumenta usted que $3,\overline{9} = 4$? **Pregunta 6:** Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$. ¿Cómo les explicaría a sus estudiantes que $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$,? ¿Cuál es el significado del símbolo ∞? ¿Cómo	**P1.** **Respuesta a la pregunta 1**: “De ninguna forma esto es una igualdad, es una buena aproximación.” **No contesta la pregunta 6**. **P2.** **Respuesta a la pregunta 1**: “Si no fuesen iguales entonces debería poder escribir un número real diferente a ellos que esté en medio de ellos. Ahora por la representación decimal de los números pareciera que no tuviéramos muchas opciones para encontrar ese número. Pero también se puede buscar la representación en la forma p/q de 3,999… para saber si se puede escribir como 4. Para buscar esa representación racional se puede hacer uno de series geométricas o simplemente con las propiedades de los números escritos en base 10. Por ejemplo, tomamos $x = 3{,}999$ ..., multiplicamos por 10, es decir $10x = 39.9999$ ..., restamos $10x - x = 36$, por lo que encontramos que $x = 4$.”	A la primera pregunta en donde aparece una igualdad entre un número entero y un número periódico puro los profesores tienen distinta forma de argumentar si es una igualdad. El profesor P1 establece que no es una igualdad (P1: “de ninguna forma es una igualdad es una buena aproximación), dando a entender que el proceso potencial no se puede ver como algo acabado o que no tiene un límite. Del profesor P2 hasta el P7 establecen que la expresión corresponde a una igualdad, el argumento que utilizan para demostrar la igualdad se puede dividir en tres grupos. El primer grupo de profesores P2, P5 y P7 muestran que

argumentaría que $\infty + \infty = \infty$, pero que $\infty - \infty$ no es igual a cero?	**Respuesta a la pregunta 6**: "Aquí también empezaría con la sugerencia de que hagan una tabla para números grandes, por ejemplo, potencias de 10. El símbolo de la lemniscata representa que x tiene la libertad de hacerse arbitrariamente grande. Primero, trato de enfatizar que ese símbolo o es un número real, por lo que las reglas de los números reales no tienen por qué funcionar, más bien se debe pensar como una herramienta que permite escribir algunas cosas de forma más compacta. Mediante ejemplos con diferentes funciones se puede analizar casos de restar infinitos." **P3.** **Respuesta a la pregunta 1**: "Mostrando que la diferencia tiende a cero." **Respuesta a la pregunta 6**: "El símbolo representa una cantidad arbitrariamente grande. El argumento para la suma seria que, al sumar cantidades arbitrariamente grandes, nos daría una cantidad arbitrariamente grande; pero la diferencia no da cero porque las cantidades arbitrariamente grandes, no necesariamente son iguales o parecidas." **P4.** **Respuesta a la pregunta 1**: "la argumentación formal parte de entender qué es 3,999… La escritura 3,999… invoca a la representación de números reales en base decimal donde la representación del 9 después de la coma es una suma infinita. Desde el concepto de serie se tiene definido cuando una suma infinita representa un número real (convergencia) y a partir de este concepto argumenta que $3{,}999 \ldots = 4$. Hay un proceso algebraico que aparenta argumentar la igualdad, pero de manera implícita (y hasta inconsciente) usa la convergencia de las sumas infinitas."	dicha igualdad se puede dar mediante la representación de números Racionales $\frac{p}{q}$ ("la representación en la forma $\frac{p}{q}$ de 3.999 ...para saber si se puede escribir como 4"), Es decir parten de una igualdad entre un número racional y un número con cifras periódicas infinitas para mostrar que es cierta. El segundo grupo de profesores P4 y P6 proponen el uso de la convergencia de series, para este caso tenemos: $$3 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100}$$ ("desde el concepto de series se tiene definido cuando una suma infinita representa un número real (convergencia)"). El profesor P3 establece la diferencia entre 4 y números que se van acercando a él, por ejemplo $4 - 3;\ 4 - 3.9;\ 4 - 3.9999$ y así sucesivamente, de esta manera se ve que la diferencia tiende a cero ("mostrando que la diferencia tiende a cero"), es decir se ve un proceso potencial en donde se trata de mostrar que esas diferencias convergen a cero y eso pues hace que se dé la igualdad. Los profesores P4 y P6 utilizan una técnica en donde se ve un proceso potencial, suman al número 3 números cada vez más pequeños (por ejemplo 9 sobre una potencia de 10) para así determinar que la serie converge a 4,

	Respuesta a la pregunta 6: “Nuevamente, estos conceptos se deben explicar a partir de la definición de cada símbolo. El símbolo infinito en cada una de las escrituras del enunciado NO debe interpretarse de manera solitaria, lo que tiene sentido es “x tiene a infinito” no el símbolo infinito en solitario; de la misma manera, lo que tiene o no sentido es “infinito + infinito” y “infinito - infinito”, y cada uno tendrá su contexto independiente. La dificultad con las últimas igualdades radica en parte en abusar de las operaciones suma (resta) y producto con objetos que no son números reales, en este caso el símbolo infinito.” **P5.** **Respuesta a la pregunta 1**: “Para los números decimales infinitos periódicos, les muestro el proceso en la división. Después el proceso contrario, para encontrar la fracción generatriz.” **Respuesta a la pregunta 6**: “Siempre empiezo con la ida de dividir una torta entre 5 persona y empiezo a aumentar el número de comensales, que imaginen que ya son 100 y que 100 está muy lejos de infinito.” **P6.** **Respuesta a la pregunta 1**: No sé qué es 3,999… en el lenguaje coloquial. Si se escribe la serie que se llama 3,999… “se muestra” que el límite es 4. **Respuesta a la pregunta 6**: “Son preguntas MUY ELEMENTALES. La primera se demuestra. Para la segunda: la recta real extendida con dos PUNTOS. La tercera NO SE ARGUMENTA, sino que se define (pero fácilmente puede decir porqué le es, A USTED, conveniente. Finalmente, "La resta" en la recta real extendida NO ESTA DEFINIDA. Pero PODÍA DEFINIR LA DEL EJEMPLO	admitiendo que esta secuencia es el mismo límite.

	como "0" SI le conviene (no de daña algo).” **P7.** **Respuesta a la pregunta 1**: “Se podría pensar en una conversión a través del método aquel que llama x = 3,999 y luego se hace la transformación para hallar una expresión equivalente con la inicial a él racional irreducible.” **Respuesta a la pregunta 6**: “Analizar el comportamiento de la función conforme los valores se hacen muy grandes y positivos, hará que el resultado de dicha función tome valores cercanos a cero. En el caso de sumar valores tan grandes como sea posible, su resultado será cada vez mayor, pero en el caso de la diferencia, puede tener dos valores tan grandes como sea posible, sin embargo, su diferencia puede no ser necesariamente cero.”	

4. Conclusiones

Debido a algunas dificultades en la aplicación de los cuestionarios se plantea, para otros trabajos, la necesidad de entrevistas personales. También la adición de preguntas, como: ¿Por qué asegura que el infinito no existe? En el estudio del cálculo, ¿por qué considera que no es necesario introducir los conceptos de infinitamente grande o/e infinitamente pequeño? Usted utiliza el método de factorización para dar salida a la discontinuidad que presenta la función en el punto donde se quiere analizar el límite, ¿cómo explicaría a sus estudiantes que este paso de factorizar se puede hacer? ¿Por qué cree que 3,999… es una buena aproximación de 4 y no una igualdad?

Las respuestas las hemos categorizado en tres grandes grupos, de las cuales se establen en las tablas número 5 y 6 de la sesión de análisis de resultados:

Concepción respecto al infinito. Del cuestionario abierto tenemos en la pregunta 1: ¿Qué es, para usted, el infinito? Dé algunos ejemplos.

Los profesores tienen explicaciones del infinito potencial, pero no del infinito actual; eso se nota cuando, de manera verbal, utilizan palabras como "lo ilimitado", "no existe", "dividir de forma indefinida", "inmortal", "indefinida", entre otras. Solo el 14, 29% (1 de 7), de los profesores, dio una definición sobre los dos tipos de infinitos; el potencial (visto como un proceso) y el infinito en acto (argumentando que el infinito está contenido en algo finito – da cómo ejemplo la negación del principio de Euclides; "el todo es mayor que sus partes"). Pero, en todos los profesores se identifica una idea del infinito en acto al momento de responder la pregunta 2 del cuestionario cerrado. Los profesores encuentran coherente la biyección de las dos circunferencias de diferente radio. Es decir; que a pesar de que las circunferencias poseen diferente diámetro estas tienen la misma cardinalidad y este hecho no fue paradójico para ellos, no se dejan llevar por la representación gráfica. También, hay una confusión en los términos de muy grande y el infinito, esto se observa en el 28.57% (2 de 7) de los profesores, donde uno de ellos establece en la pregunta 3, del cuestionario abierto: ¿Qué es una cantidad infinitamente pequeña? ¿Qué es una cantidad infinitamente grande? ¿Cómo se introducen en la escolaridad estos conceptos? Con el fin de explicar estas preguntas y caracterizar el infinito dan los siguientes ejemplos: Contar la cantidad de cabellos de una persona o granos de arena en una playa o la cantidad de estrellas en el firmamento. Mientras que el otro profesor, en la pregunta 6 del cuestionario cerrado: ¿Cuál es el significado del símbolo ∞? Establece una igualdad entre el símbolo ∞ y una cantidad muy grande. En primer lugar, lo muy grande no es el infinito, a pesar de que las tareas de contar en los ejemplos anteriores sean arduas o imposibles de hacer no quiere decir que sea infinito. Es más, el universo visible hasta el momento no es infinito. El termino cantidad muy grande puede establecer una idea muy intuitiva del infinito (potencial) en los estudiantes y esto llevarlos a confusiones o contradicciones al momento de trabajar con conceptos donde se establecen procesos infinitos, cómo lo es el límite.

Respecto al cuestionario abierto, la pregunta 3: ¿Qué es una cantidad infinitamente pequeña? ¿Qué es una cantidad infinitamente grande? ¿Cómo se introducen en la escolaridad estos conceptos?

Se observa que el 85,71% (6 de 7) de los profesores concuerdan que es una variable o magnitud u objeto matemático que se acerca (tanto como se quiera) a cero, sin llegar a ser cero. El 14,29% de los profesores le da un significado de una función en la cual se realiza la medida de la función. Solo el 14,29% de ellos piensa que se habla del infinito negativo. Esto puede ser que el último profesor piense que algo infinitamente pequeño no sea una distancia, sino que es un objeto matemático que crece sin cota, pero de signo negativo. En las respuestas acerca de lo infinitamente grande e infinitamente pequeño concuerda con esa necesidad de explicar el infinito potencial, pero cómo algo se crece o decrece sin fin. Por último, el 14,29% de los profesores no tiene la necesidad de explicar en sus clases estos dos conceptos. Aquí, esta respuesta está en concordancia con lo que dijo sobre la no existencia del infinito es algo que no está definido matemáticamente para el profesor y creemos que sería este el motivo por el cual no lo introduce en sus clases.

Respecto al cuestionario cerrado, se tiene en la pregunta 6: ¿Cuál es el significado del símbolo ∞?

El 42.86% de los profesores (3 de 7) no dan respuesta al significado del símbolo "∞". El 28,57% da referencia a este símbolo con la palabra lemniscata (símbolo que fue establecido por Wallis) y el 14,29% establece que este símbolo es la recta extendida (como un objeto geométrico). Estas respuestas siguen la idea anterior sobre una concepción intuitiva del infinito, dado que convoca al infinito cómo potencia. Claro, esto no implica que los profesores estén equivocados.

Cuestionario cerrado, pregunta 4: De la siguiente integral: $\int(x^2+1)dx$. ¿Cuál es el significado formal del símbolo dx?

La idea sobre lo infinitamente pequeño concuerda cuando a los profesores se les pide definir el diferencial (dx) de una integral. El 42,86% de los profesores dicen que el dx es un objeto infinitamente pequeño. El 71,42% de los profesores le da la cualidad de variable respecto a la cual se está integrando.

Continuando con este orden de ideas, podemos decir que los profesores tienen una idea intuitiva, fundada en creencias, del infinito potencial. Esto puede llegar a ser contraproducente en el aprendizaje del cálculo si no se establecen vías o estrategias donde el profesor aclaré los procesos infinitos que se encapsulan en algunos conceptos del análisis matemático, dando así un concepto claro sobre el infinito y enfatizando que este concepto no es solo un proceso de algo muy grande o que crece sin cota alguna o que no tiene un principio ni un final. Por eso, sugerimos que los profesores del área de cálculo incluyan en sus clases la enseñanza del infinito matemático, para tener una mejor idea sobre la relación que tiene el límite con el infinito.

De esta manera y teniendo en cuanta la rejilla del infinito (tabla 4), categorizamos las concepciones de los profesores así: El 87.71% posee una *concepción general*, tienen una idea del infinito potencial, pero no le dan cabida al infinito actual. Esto se nota porque establecen construcciones que dan lugar al infinito potencial más no del infinito actual. Esto es porque no definen al infinito en acto de manera formal, pero si lo usan, esto se ve en la solución de las preguntas 1, 2 y 3 del cuestionario cerrado. El 14.29% de los profesores tienen una *concepción formal* del infinito, debido a que distingue las dos clases de infinitos; el potencial y el actual.

Concepción respecto al límite. En cuanto al cuestionario abierto, todos los profesores consideran que el concepto de límite se debe de iniciar mediante la definición dinámica (propuesta por Cauchy), donde se puede abordar con representaciones numéricas (tablas de datos) y gráficas; esto está alineado con investigaciones en el área de educación matemáticas como (Blázquez & Ortega, 2001), que citando a Tall (1996), quien afirma que en la representación formal rigurosa es en donde se encuentra una mayor dificultad al momento de comprender el lenguaje simbólico que trae el concepto de límite; esto conlleva a que se construya y se reconstruya un saber significativo. Además, la concepción dinámica del límite no se considera como un obstáculo epistemológico, ya que a partir de esta idea física de movimiento es el paso para dar el inicio a la formalización del concepto de límite con Weierstrass, a través de $\varepsilon - \delta$.

Cuestionario cerrado, pregunta 5: Dada la función, $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, ¿Cómo les explicaría a sus estudiantes que $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$, dado que $f(x)$ no está definida para $x = 2$?

Solo un profesor establece, de manera explícita, que utilizaría la definición estática del límite. A pesar de lo dicho, al momento de abordar los problemas con límites el 42.86% de los profesores utilizarían la definición formal rigurosa. También, se encuentra que los profesores utilizan tres estrategias para calcular límites que tengan una determinación o discontinuidad removible:

- Factorizando para hallar la función equivalente. El 14.29% de los profesores prefieren darle solución a este límite a través de este método.
- Usando la definición estática del límite. El 42.86% de los profesores utilizan este método
- Usando la definición dinámica del límite. El 42.86% de los profesores usan este método.

El límite de una función que no está definida en un valor del dominio, no se soluciona evaluando en ese valor, sino que se mira la tendencia de los límites laterales. Esta es la esencia del límite que proporciona la idea física de movimiento, y es en estos límites laterales donde se puede factorizar para encontrar la función equivalente, dado que en el punto no se puede evaluar porque la función no está definida ahí, pero si está definida en los puntos cercanos. Luego de factorizar, se calculan dichos límites laterales para decidir si el límite existe o no. Por eso, resaltamos que los profesores deben de explicar a sus estudiantes el problema de la continuidad, de la densidad de los números reales y así explicar ese proceso iterado de acercarse a un número, ya que entre dos números reales existen infinitos números reales. Uno de los profesores encuestados, reflexiona sobre el problema de cercanía, como ya se mencionó, y este genera más dificultades a los estudiantes al momento de trabajar con el concepto en sus diferentes representaciones, tanto en las conversones como en los tratamientos.

Ahora, en el cuestionario cerrado, pregunta 6: Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$, ¿Cómo les explicarías a sus estudiantes que el $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$?

Para calcular el límite de una función cuando la variable tiende al infinito, se encontró que los profesores privilegian ciertos métodos; el 28.57% sugieren analizar el comportamiento de la función a partir de una tabla de datos (representación numérica), el 14.28% muestra el comportamiento de la función cuando se realiza una división; teniendo como constante el numerador, y se hacen los valores del denominador cada vez más grandes. El 14.28% sugiere utilizar la definición formal del límite. El resto de los profesores no dan respuesta a la pregunta.

De lo anterior, se puede inferir que los profesores abordan el concepto de límite a través de distintas representaciones. En una primera instancia lo hacen mediante aproximaciones que se pueden ver en una tabla y/o en la gráfica, posteriormente se aborda este tipo de problemas utilizando la concepción de distancia, en otras palabras; la representación algebraica (límite estático). Esto es importante ya que la conversión y tratamiento de al menos dos registros genera una mejor comprensión del concepto en los estudiantes (Duval, 2006). Pero, investigaciones como (Blázquez & Ortega, 2001) dicen que para tener un conocimiento significativo se debería trabajar con las cuatro representaciones; verbal, numérica, gráfica y algebraica.

Encontramos que el 28.56% de los profesores expresan que, para darle solución a las preguntas relacionadas con el límite, utilizan el método de aproximaciones, ya sea con la gráfica y/o con la tabla de datos. Con ello y teniendo en cuenta la rejilla de la tabla 3, podemos decir que tienen una *concepción aritmética - numérica, dinámica e infinitesimal* del límite. El resto de los encuestados (71,44%) abordan los problemas de límite, al inicio con la idea de aproximación, y posteriormente utilizan la definición formal rigurosa de límite, a través de $\varepsilon - \delta$. Por ende, estos últimos, y siguiendo la rejilla de la tabla 3, tiene una concepción *analítica – aritmética, analítica estática*.

Concepción de la relación límite infinito. El concepto de límite, como se expuso en el presente trabajo de investigación, está estrechamente ligado con el infinito potencial, donde ya se analizó que la definición formal de límite en los cuantificadores, el "para todo" (∀) tiene ese criterio de acercarse tanto como se quiera, estando en él o encapsulando el infinito potencial. Esto se nota también en la expresión: $x \neq x_0$ y $x \to x_0$, se esta trabajando con el infinito potencial y no con el actual, porque se habla de acercamiento y no que la variable toma el valor en ese punto. Por eso, anteriormente se explicó que no se evalúa el límite en el punto, sino que se analiza la tendencia que tiene la función a medida que me acerca a dicho punto, x_0.

Los profesores no son ajenos a esta concepción; esto se ve cuando establecen que la definición de límite, el cual encapsula el infinito potencial y no permite verlo, sino que se esconde en situaciones y procesos que le dan sentido a la noción. Resaltamos una de las respuestas de los profesores, del cuestionario abierto, pregunta 5: ¿Cuál es la relación que existe entre los conceptos de límite e infinito? La respuesta es: "Es una tendencia, a lo cual no necesariamente se llega". "Tendencia…", acercamiento potencial y "…a la cual no necesariamente se llega", no se evalúa en el punto para conocer el valor de la función, sino que se analiza las vecindades alrededor de la ordenada, $|f(x) - L|$, a medida que las vecindades en el punto del dominio $|x - x_0|$ cada vez son más pequeñas.

Otra de las respuestas interesantes de los profesores, y que está acoplada a esta concepción estática del límite, se da en el cuestionario cerrado, en la pregunta 5: Dada la función, $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, ¿Cómo les explicaría a sus estudiantes que $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$, dado que $f(x)$ no está definida para $x = 2$? Es donde proponen ver la diferencia entre puntos, que cada vez estén más cerca al punto donde tiende x. Esto de mirar restas, tanto en dominio como en la imagen, ayuda a que estudiante se acerque a la concepción de Weierstrass. Esta clase de explicación y desde una secuencia didáctica se proporcionará a los educandos una menor dificultad para entender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto, llevando a la comprensión de las distintas técnicas que se realizan para dar solución al cálculo de límites de una función.

Por otro lado, existe una relación entre el infinito actual y el límite. Lo anterior lo muestra Weierstrass cuando establece la existencia del límite de una sucesión convergente haciendo la sucesión misma el límite o un número. En el cuestionario cerrado, de la pregunta 1: ¿Cómo argumenta usted que 3,999… = 4? De la igualdad entre $3{,}9$ ... y 4, se presenta este hecho. El 85.3% de los profesores aceptan la igualdad ($3{,}999\ ... \ = \ 4$). Solo el 14,29% dice que es una aproximación. También, del cuestionario cerrado, la pregunta 3: Dado el cuadrado de lado 1, se divide de forma sucesiva a la mitad. Cada fracción representa el área de la porción correspondiente. Si se suma estás fracciones de área, ¿qué obtiene? Del cuadrado que se divide de forma iterada a la mitad, donde ellos dicen que la suma de la sucesión es el área de dicho cuadrado.

En el siguiente cuadro se resume como se clasificaron los profesores respecto a sus concepciones.

Tabla 5: Clasificación de las concepciones de los profesores.

Concepto	**Concepción**	**Sub-concepción**	**Profesor(es)**

Infinito	General	No se tiene	P1 – P2 – P3 – P5 – P6 y P7
	Formal	No se tiene	P4
Límite	Aritmética	numérica, dinámica e infinitesimal	P2 – P5
	analítica	aritmética, analítica estática.	P1 – P3 – P4 – P6 y P7
Relación Infinito y Límite	De forma general todos los profesores entienden que existe una relación entre el infinito potencial y el límite.		

Comentarios finales. El proceso de enseñanza y aprendizaje de un concepto matemático trae grandes desafíos; razón por la cual, se hace necesario que el docente realice un estudio de la evolución histórica – epistemológica y ontológica para conocer los orígenes y procesos de formalización del concepto. Este estudio es importante porque es una herramienta que permite al profesor, además de entender la naturaleza y el desarrollo del objeto matemático, también, ayuda a hacer reflexiones sobre los errores que pueden presentar los estudiantes, crear posibles soluciones, prever posibles dificultades y evaluar la implementación de una estrategia conducente a la reflexión crítica sobre la propia forma de pensar que fomente a la concienciación de los estudiantes sobre la presencia del obstáculo y la forma de superarlo.

Se vio en este estudio histórico – epistemológico que tanto el límite como el infinito son objetos complejos debido a su simbología, a su lenguaje y además que están relacionados con otros conceptos complicados como lo son; la función, la derivada, la integral, la densidad de los números reales, entre otros. Este trabajo de investigación se centró en clasificar las concepciones de los profesores de matemáticas a nivel universitario respecto a los conceptos de infinito, límite y su relación, ya que esta relación es importante en el proceso de instauración del concepto de límite. Sin embargo, no se trabajó en los obstáculos epistemológicos del límite y el infinito presentes en los profesores y cómo estos infieren en la enseñanza y aprendizaje de estos conceptos y se deja a futuras investigaciones.

Referencias

(s.f.). Obtenido de http://www.matematicasvisuales.com/html/historia/kepler/keplerbarril.html

Arbelaez, G. (2011). *Proceso de instauración del analisis matemático en Colombia: 1850 - 1950.* Cali, Colombia.

Aristóteles. (1995). *Física.* Madrid: Gredos.

Arrigo, D'Amore, & Sbaragli. (2011). *Infinitos infinitos.Historia, filosofia y didactica del infinito matematico.* Bogota: Magisterio.

Blázquez, S., & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del limite. *Revista latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 4*(3), 219-236.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., & Benegas, J. (Julio de 2006). Una concepción de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista latinoamerica de investigación en matemática educativa*, *9*(2), 189 - 209.

Boyer, C. (1949). The history of the calculus and its conceptual development (the concepts of the calculus).

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires, Argentina: Libros del Zarzal.

Cauchy, A. l. (1994 (Primera versión en frances, 1982)). *Curso de Análisis.* Mexico: Servicios Editoriales de la facultad de Ciencias.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: AIQUE grupo editorial.

Coronado, G. (2002). Los pitagóricos: Matemática e interpretación de la naturaleza. *Revista de filosofía de la universidad de Costa Rica*, 13 - 21.

Durán, M. m. (Enenr - Junio de 2012). El estudio de casos en la investigación cualitativa. *revista nacional de la administración, 3*(1), 121 - 134.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*(61), 103 - 131.

Edwards, C. H. (2012). *The historical developmend of the calculus.* Georgia: Springer Science and Business Media.

Euclides. (1970). *Elementos. En: Cientificos griegos.* (A. Recopilación de Francisco Vera, Trad.) Madrid: Aguilar.

Euclides. (1991). *Elementos.* Madrid: Gredos.

Euclides. (1994). *Elementos libros V-IX.* Madrid: Gredos.

Fischbein, E. (1994). *Intuition in science and mathematics.* Holland: Reidel Publishing Company.

Garcia, J. J. (2014). *Del "horror al infinito" de los antiguos griegos a la noción de límite moderno.* Trabajo de Grado, Universidad del Valle, Valle del Cauca, Cali.

Gil, F., & Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las ciencias, XXI*(1), 27 - 47.

Grabiner, J. V. (2005). *The origins of Cauchy's rigorous caculus.* New York: Dover publications.

Heidegger, M. (1982). *Parménides.* Madrid: Akal.

Kirk, C., Raven, J., & Schofield, M. (1983). *Los filosofos presocraticos.* Gredos.

Lopez, A. l. (2014). Berkeley: El origen de la crítica a los infinitesimales. *Cuadernos Salmantinos de Filosofía, 41*, 195 - 217.

López, C. A. (2014). El infinito en la historia de la matemática. *Ciencia y tecnologia* (14), 277 - 298.

Lucero, J. E. (2020). *El límite como concepto fundamentador del infinito potencial en matemáticas: Un acercamiento histórico-epistemológico.* Trabajo de grado, Universidad del Valle, Valle del cauca, Cali.

Medina, A. C. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. *Obtenido de Red Acádemica [en línea]*. Obtenido de https://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/5622

Moral, J. J. (2016). *El poema dotrinal de parménides.* Mendoza.

Ortiz, J. R. (1994). El concepto de límite. *Boletín, I*(2), 59 - 81.

Peñalosa, X. P. (2009). El concepto de ápeiron en Ananximandro: Una estética del origen. *Ontology Studies*, 131 - 138.

Recalde, L. C. (junio de 2004). La lógica de los números infinitos: Un acercameinto histórico. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria, XII*(1), 51 - 68.

Recalde, L. C. (2018). *Lecturas de historia de las matemáticas.* Cali, Colombia: Universodad del Valle, Programa Editorial.

Riestra, J. A. (2004). El estudio de la variación en la edad media y su resolución con el concepto de límite. *Micelánea Matematica*(39), 49 - 60.

Ruiz-Higueras, L. (1994). *Concepciones de los estudiantes de secundaria sobre la noción de función. Análsis epistemologíco y didáctico.* Tesis doctoral.

Vega, S. (2019). *El desarrollo historico - epistemologico de la derivada en el paso de lo geometrico a lo analitico.* Santiago de cali.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 10*(2,3), 133 - 170.