ARGUMENTOS QUE FAVORECEN LA INTRODUCCIÓN DEL ÁLGEBRA TEMPRANA DESDE UNA VERSIÓN EN ESPAÑOL CASTELLANO DE LOS ARTÍCULOS: ARITHMETIC AND ALGEBRA IN EARLY MATHEMATICS EDUCATION Y THE PROGRESSIVE DEVELOPMENT OF EARLY EMBODIED ALGEBRAIC THINKING A PARTIR DE LA TÉCNICA DE TRADUCCIÓN COMENTADA

YAIRA ALEJANDRA DIUZA MONTAÑO - 1662374
JONATHAN MAURICIO HENAO ANGULO - 1662683

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
BUENAVENTURA
2022

ARGUMENTOS QUE FAVORECEN EL GIRO HACIA EL ÁLGEBRA TEMPRANA DESDE UNA VERSIÓN EN ESPAÑOL CASTELLANO DE LOS ARTÍCULOS: ARITHMETIC AND ALGEBRA IN EARLY MATHEMATICS EDUCATION Y THE PROGRESSIVE DEVELOPMENT OF EARLY EMBODIED ALGEBRAIC THINKING A PARTIR DE LA TÉCNICA DE TRADUCCIÓN COMENTADA

YAIRA ALEJANDRA DIUZA MONTAÑO - 1662374

JONATHAN MAURICIO HENAO ANGULO - 1662683

Trabajo de Grado para optar al título de LICENCIADOS EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

DIRECTOR

Lic. LUIS ANTONIO ALEGRÍA SALAS

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BUENAVENTURA

2022

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

Universidad del Valle

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Programa Académico: Licenciatura en Educación Básica Énfasis Matemáticas

Fecha

Día	Mes	Año
2	5	2022

Código del programa: 3469 Resolución del programa: ________

Título del Trabajo o Proyecto de Grado
Argumentos que favorecen la introducción del álgebra temprana desde una versión en español castellano de los artículos: arithmetic and algebra in early mathematics education y the progressive development of early embodied algebraic thinking a partir

Se trata de:

Proyecto ☐ Informe Final ☑

Director
Luis Antonio Alegría Salas
Nombre del Primer Evaluador
Cristian Andrés Hurtado Moreno
Nombre del Segundo Evaluador
Jose Francisco Vallecilla

Estudiantes

Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Télefonos de contacto
Yaira Alejandra Diuza Montaño	1662374	3469	yaira.diuza@correounivalle.edu.co	3105293957
Jonathan Mauricio Henao Angulo	1662683	3469	jonathan.henao@correounivalle.edu.co	3218344261

Evaluación

Aprobado ☑ Meritorio ☐ Laureado ☐
Aprobado con recomendaciones ☐ No Aprobado ☐ Incompleto ☐

En el caso de ser ***Aprobado con recomendaciones*** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de ________________ (máximo un mes)* ***ante:***

Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐ Primer Evaluador ☐ Segundo Evaluador ☐

En el caso de que el Informe Final se considere ***Incompleto*** *(diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de ________________ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el:* ____ ____ ____

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la ***razón del desacuerdo*** *y las* ***alternativas*** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firmas

Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador
Luis	C.	Francisco VE

DEDICATORIA

Este trabajo se lo quiero dedicar a mi abuela Aura Hilda Caicedo Cabezas Q. P. D. Porque más que una abuela fue una madre para mí, porque sé que desde donde esté, estará feliz de verme cumpliendo mis sueños y logrando lo que algún día me propuse en presencia de ella. A mi prima Leidy Vanessa Angulo Murillo Q. P. D. Porque siempre estuvo presente cuando la necesité. Por último, a todos mis familiares ausentes y presentes por ser una parte fundamental en mi vida.

Jonathan Mauricio Henao Angulo

Le dedico esta tesis a Dios Todopoderoso por haberme dado la capacidad de culminar este ciclo. A mi familia por haberme brindado un apoyo incondicional para seguir avanzando, especialmente a mi hermana Kely Diuza que fue de gran apoyo en mis últimos semestres. Finalmente, a mi compañero Jonathan Henao porque sin él no fuera sido posible culminar este proyecto; por su esfuerzo y dedicación, muchas gracias.

Yaira Alejandra Diuza Montaño

AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer lugar a DIOS por darme la vida, por guiar cada uno de mis pasos y por hacer posible este sueño de obtener mi título profesional.

A mi madre Aura Hilda Angulo Caicedo por permitirme vivir y ayudarme cuando la necesito.

A la universidad del Valle por abrirme las puertas y brindarme una formación de calidad.

A todos los profesores que me guiaron durante mi formación académica, al profesor José Francisco Vallecilla y Freyder Paredes Cáceres por su entrega y comprensión.

Al profesor Luis Antonio Alegría Salas por apoyarnos en este trabajo para poder tener un producto terminado.

A todos mis amigos y compañeros de la carrera por compartir sus conocimientos conmigo y brindarme apoyo cuando lo necesité.

Finalmente quiero agradecer a todas esas personas que directa o indirectamente me han ayudado desde que inicie mi formación profesional, a mis familiares por permitirme gozar de ellos y brindarme momentos de calidad.

Jonathan Mauricio Henao Angulo

RESUMEN

En la presente investigación se asume como problemática la introducción temprana al álgebra la cual está directamente relacionada con el pensamiento variacional, tomando como referencia una aparente contradicción entre los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) que indican que este tipo de pensamiento debe ser cultivado desde la Educación Básica Primaria, y la practica real de la docencia y de los currículos escolares, en donde el álgebra se enseña solo en grados superiores. Dada esta problemática, se ha propuesto tomar como objeto de análisis dos artículos, en donde se presentan resultados de investigaciones realizadas alrededor de la importancia del desarrollo del álgebra temprana. Por tal razón, se propone identificar aquellos argumentos que favorecen la introducción del Álgebra temprana y para ello, se realizó la traducción al español los artículos; posteriormente se clasificaron los argumentos que favorecen la introducción del álgebra temprana en los currículos de matemáticas, luego se identificaron acuerdos y disensos entre los argumentos de los dos artículos respecto a la importancia del álgebra temprana y finalmente se apoyaron estos argumentos con posturas teóricas desde la educación matemática.

Se propone abordar la revisión de estos dos artículos desde la técnica de traducción comentada, con lo cual se logre hacer una interpretación de sus hallazgos investigativos en español. se lograron clasificar estos argumentos en nueve (9) categorías desde las cuales se hace posible agrupar los diferentes discursos argumentativos de los autores. La traducción comentada demostró que fundamentar e implementar el álgebra temprana dentro los currículos de matemáticas en educación primaria no es solo viable sino necesario.

Palabras claves: Álgebra temprana, aprendizaje del álgebra, traducción comentada, argumentos, pensamiento variacional.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de las matemáticas en sus diferentes áreas es fundamental para el desarrollo del ser humano, el Ministerio de Educación Nacional MEN (1998) y MEN (2006) dentro de los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias, propone pautas para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje desde los primeros años de escolaridad. Para el caso de la formación en procesos algebraicos en particular, el MEN los relaciona con el pensamiento variacional, el cual se debe trabajar en todos los niveles escolares iniciando con una construcción de distintos caminos y acercamientos significativos desde la Educación Básica Primaria para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y los sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral.

Sin embargo, se puede decir que, actualmente en términos generales y basados también en afirmaciones de Agudelo (2005) y Gómez (2014), los niños y niñas colombianos empiezan su formación en álgebra en educación secundaria, en ese sentido, existe una contradicción con lo planteado en los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias que lo sugieren desde una edad temprana, así como también otras perspectivas curriculares como la denominada Early Alegra o álgebra temprana.

Por lo anterior, esta propuesta se ha desglosado en cinco capítulos:

En el primer capítulo se presentan los aspectos generales de la investigación el cual, inicia con la descripción y formulación del problema haciendo énfasis en las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas en términos generales, desde lo planteado por

González (2005) para luego centrarse en el objeto de estudio de la investigación (álgebra temprana), pero no sin antes detenerse a centrar un poco con las ideas que plantean el Ministerio de Educación Nacional (2006) con respecto al pensamiento variacional. Los objetivos, presentan el propósito general del trabajo, y la forma como se desarrollará el mismo, teniendo en cuenta los artículos en cuestión. El primero, porque plantea una crítica respecto a que los niños pequeños de entre 8 y 10 años son incapaces de aprender álgebra porque no tienen los medios cognitivos para manejar conceptos como variables y funciones, contrario a ello que los diferentes estudios en el aula sugieren que los niños pueden manejar conceptos algebraicos y usar la notación algebraica algo antes de lo que comúnmente se supone (Carraher et al., 2006) el segundo porque critica el hecho de que el álgebra se enseña después que los estudiantes adquieren un conocimiento sustancial de aritmética, considerando a esta como prerrequisito para el surgimiento y desarrollo del pensamiento algebraico (Radford, 2013). Ambas apuestas dan cuenta que una introducción al álgebra en los primeros grados no solo es posible, sino necesaria de cara a pensar eficazmente la idea del álgebra en el futuro.

En el capítulo dos, se da a conocer el marco conceptual de dicha investigación, en donde se propone iniciar por el pensamiento variacional y su relación con el álgebra temprana; en seguida se aborda el concepto de early algebra o álgebra temprana, en donde adicionalmente se conceptualiza al álgebra, la generalización de patrones y el pensamiento algebraico desde la consulta a la literatura, para cerrar con la exposición de autores que hacen mención a la técnica de traducción comentada.

El tercer capítulo presenta la metodología de la investigación donde se manifiestan los distintos tipos de traducción comentada, para posteriormente hacer una selecciona de aquella que le da más peso a esta investigación.

En el cuarto capítulo, el cual tiene que ver con la traducción comentada; se lograron identificar nueve (9) categorías de análisis desde las cuales se hace posible agrupar los diferentes discursos argumentativos de los autores.

En el quinto y último capítulo, se presentan las conclusiones y reflexiones que se hacen en contraste a los objetivos específicos, el marco teórico y el análisis realizado por cada una de las categorías que se lograron identificar en los artículos traducidos.

Capítulo 1. Problema de investigación

Las matemáticas se reconocen como una de las áreas más importantes que se aprenden en el colegio. A su vez, es considerada una de las asignaturas por las cuales los estudiantes refieren la menor atracción llegando incluso al punto de desarrollar una determinada apatía en sus procesos de aprendizaje (Gonzáles, 2005; Caballero et al., 2007;).

González (2005) por ejemplo afirma que "las matemáticas son importantes tanto para continuar estudios superiores como para acceder a muchas oportunidades laborales" (p.109). Así mismo, Farías y Pérez (2010) plantean que "las matemáticas son de máxima importancia en cualquier ámbito de la sociedad" (p.34). Paradójicamente García (2016) identifica que con frecuencia los alumnos se quejan sobre los fracasos en la educación matemática, sobre todo por el rechazo que a veces suele inspirar esta disciplina, derivando en una actitud negativa hacia su aprendizaje. (Caballero et al., 2007) complementan esto afirmando que es habitual que los alumnos generen actitudes negativas hacia la materia, manifestando a veces aversión y rechazo hacia esta disciplina; los estudiantes las consideran difíciles, aburridas y alejadas de la realidad.

> La matemática es una ciencia antigua, de máxima importancia en cualquier ámbito de la sociedad, se originó en diferentes culturas con la finalidad de resolver problemas cotidianos del hombre. Pero a pesar de esto es vista como una gran problemática, donde el proceso de aprendizaje en cualquier nivel es considerado una tarea difícil para el estudiante y percibido como una asignatura dura, rigurosa y formal. Esta visión genera un rechazo hacia su estudio, produciendo un clima de desmotivación que, de no erradicarse, puede afectar el aprendizaje que se espera lograr del estudiante. (Farias y Pérez, 2010, p.34)

El sistema formativo en Colombia con el fin de velar la calidad instructiva divide los niveles de educación en 5 etapas que son: preescolar, primaria, secundaria, media y superior. Por lo anterior, desde los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de competencias, se propone su enseñanza en coherencia con cinco tipos de pensamiento matemático: El pensamiento numérico (en la aritmética); el pensamiento espacial y el métrico (en la geometría); el pensamiento métrico y el variacional (en el álgebra y el cálculo) y el pensamiento aleatorio (en la probabilidad y estadística). Teniendo en cuenta que esta investigación gira alrededor de la enseñanza del álgebra, se hará énfasis en el pensamiento variacional, relacionado con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación, así como con el cambio en diferentes contextos, su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos (MEN, 2006).

Según los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), el pensamiento variacional, que a su vez se liga directamente al estudio del álgebra, porque si bien ambos componentes, le permiten a las comunidad educativa a pensar dinámicamente, además de establecer relaciones o combinaciones de elementos abstractos con ámbitos numéricos; por tal razón este pensamiento debe ser cultivado desde la Educación Básica Primaria ya que es un tipo de pensamiento que considera problemas de la vida cotidiana y de otras ciencias, por tanto, mediante la comprensión y el reconocimiento de los conceptos y procedimientos relacionados con el álgebra, se aborda con mayor facilidad la etapa como estudiante de Educación Media, en cuyo ámbito debe enfrentarse al cálculo diferencial e incluso al integral.

En cuanto a la enseñanza del álgebra, y según los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de competencias en Matemáticas, este debe darse desde los primeros niveles de la Educación Básica Primaria, con el fin de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos antes de llegar al séptimo y octavo grado, lo cual demuestra que su papel es fundamental no solo respecto a la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, sino también en relación a la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas. En suma, el pensamiento variacional tiene una relación estrecha con otros tipos de pensamiento matemático como el numérico, el espacial, el de medida o métrico y el aleatorio o probabilístico.

Aunque las propuestas curriculares colombianas que propone el MEN (2006) si bien han planteado un trabajo para el desarrollo del álgebra desde el inicio de la edad escolar, esto no se ha logrado implementar. Agudelo (2005) menciona que una de las razones por las cuales no se ha logrado este cambio, es precisamente porque muchos profesores no están interesados en el cambio, no están dispuestos a aprender de sus colegas, y se niegan a participar en programas de desarrollo profesional. Menciona, además, que hay profesores que no ven la necesidad de introducir cambios en su enseñanza, así como también otros que expresan que el cambio es muy difícil (p.403).

El MEN (2006) recomienda que desde los primeros niveles de la Educación Básica Primaria sean desarrolladas actividades encaminadas al análisis de la forma como cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; actividades que le permitan a los estudiantes realizar conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; actividades relacionadas con la expresión de uno, dos o más términos oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, actividades desde las cuales se proponga un procedimiento, algoritmo o fórmula para reproducir el mismo patrón, para calcular los siguientes términos, para confirmar o refutar premisas o para generalizarlas; en suma, en los primeros niveles de la Educación Básica Primaria el organismo rector de la educación en el país, recomienda aplicarlo desde diferentes tipos de actividades; sin embargo, la literatura científica consultada asegura que esto no sucede en la práctica (Butto & Rojano, Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo, 2010) (Cai & Knuth, 2011) (Vergel, 2015). Según Vergel (2014), a pesar que el MEN (2004) sugiere abordar la idea de pensamiento variacional como el estudio de la variación y el cambio, el estudio de las regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente, tales elementos que hacen parte del pensamiento algebraico no son enseñados tempranamente.

Uno de los problemas que a su vez impide pensarse en formas de pensamiento algebraico temprano, tiene que ver con la falsa concepción que para enseñar el álgebra se tenga que aludir necesariamente a un recurso semiótico provisto por el lenguaje alfanumérico. Como lo menciona Vergel (2015) (…) “una dialéctica entre formas de pensamiento algebraico y procesos sobre generalización de patrones, introduce un problema en términos de la constitución del pensamiento algebraico en alumnos jóvenes. Tal proceso de constitución podría darse en ausencia de signos alfanuméricos del álgebra” (p. 194), lo que implica que la enseñanza del álgebra no es sinónimo de utilización de recursos alfanuméricos.

Uno de los problemas que más atrae la atención de investigadores en la Didáctica de la matemática, y que a su vez pueden relacionarse con la ausencia de una enseñanza temprana del álgebra, corresponde con las dificultades que encuentran los estudiantes al momento de hacer una transición desde la aritmética, en la cual se apropian de conocimientos básicos, a otras áreas como lo es el razonamiento algebraico. Tal como lo refiere Butto y Rojano (2010), la transición de la aritmética al álgebra es un paso determinante para la construcción de ideas más complejas y abstractas dentro de las matemáticas escolares, sin embargo, el proceso de formación de estudiantes desconoce la enseñanza del álgebra en la edad temprana, generando con ello dificultades en los estudiantes al momento de enfrentarse al Álgebra en una edad más avanzada.

Así pues, se ha reconocido que el álgebra es inherente a la aritmética. La aritmética al tener un carácter algebraico hace que, en el fondo, estas dos áreas del conocimiento no sean completamente distintas y por ello no habría una razón categórica para rechazar su formación temprana (Vergel y Rojas, 2018).

En el caso del Álgebra, la literatura critica no solo la forma como el Ministerio de Educación ha determinado el proceso de formación, sino también el modo como los docentes la transmiten a los estudiantes, lo cual termina por ubicar al Álgebra como una simple generalización de la aritmética, evitando con ello que el estudiante logre acotar ese conocimiento a un contexto matemático.

De cara a tal problemática, en el presente trabajo de investigación se propone como objeto de estudio la traducción comentada de dos artículos, en donde se presentan resultados de investigaciones realizadas alrededor de la importancia del desarrollo del álgebra temprana, con el propósito de proporcionar a los docentes de educación primaria, estrategias didácticas, y su implicación en la introducción de esta temática en educación primaria.

Los artículos propuestos para este trabajo son Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education (Carraher et al., 2006) y The Progressive Development of Early Embodied Algebraic

Thinking (Radford, 2013), el primero, aborda esta problemática en estudiantes de entre 9 y 10 años de edad, mediante un estudio longitudinal en cuatro aulas en una escuela pública en Massachusetts, para demostrar que los estudiantes jóvenes están en capacidad de plantar ideas y representaciones algebraicas que normalmente están ausentes del plan de estudios de matemáticas iniciales (Carraher et al., 2006); el segundo aborda como objeto de estudio la confrontación entre la aritmética y el álgebra bajo la premisa que hay algo inherentemente aritmético en el álgebra y algo inherentemente algebraico en la aritmética, y que el conclave que une a estas dos disciplinas las constituye la actividad de patrones; un estudio que pretende demostrar que la falta de comprensión entre la distinción y aspectos comunes de ambas disciplinas, es un impedimento para la introducción temprana del Algebra.

Se propone por tanto abordar la revisión de estos dos artículos desde la técnica de traducción comentada, con lo cual se logre hacer una interpretación de sus hallazgos investigativos en español, principalmente porque tales documentos afirman que, para garantizar un buen aprendizaje del álgebra a nivel escolar, se debe impartir la enseñanza de la misma desde la educación primaria. A su vez, muestran resultados alentadores en pro de demostrar que si es posible enseñar el álgebra desde edades tempranas.

1.1 Formulación del problema

¿Cuáles son los argumentos que favorecen la introducción del álgebra temprana desde una versión en español castellano de los artículos: Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education y

The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking a partir de la técnica de traducción comentada?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo general

Identificar y contrastar los argumentos que favorecen la introducción del álgebra temprana desde una versión en español castellano de los artículos: Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education y The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking a partir de la técnica de traducción comentada

1.2.2 Objetivos específicos

- Clasificar los argumentos que desde los dos artículos traducidos se proponen para la introducción del álgebra temprana en los currículos de matemática.

- Identificar los principales acuerdos y disensos respecto a la importancia de la introducción temprana del álgebra en estudiantes, a partir de la traducción de los artículos: Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education y The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking

- Relacionar los argumentos presentados en los artículos traducidos con posturas teóricas desde la Educación Matemática con respecto a la importancia de la introducción del álgebra temprana en la escuela, de tal forma que permita enriquecer la lectura comentada.

1.3 JUSTIFICACIÓN

La construcción de una versión en español castellano de los artículos: Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education y The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking a partir de la técnica de traducción comentada, es un trabajo que muestra la importancia de desarrollar el pensamiento algebraico temprano en estudiantes.

La investigación realizada muestra la importancia que la literatura revela respecto al desarrollo del pensamiento algebraico temprano y aunque en la web se pueden encontrar bibliografías en español respecto a esta temática, se han tomado estos dos artículos para su traducción debido a que evidencian como los estudiantes pueden tener acceso a ideas y representaciones algebraicas desde temprana edad, cosa que normalmente no se hace en las escuelas porque dentro del plan de estudios de matemáticas para la educación primaria no se ha dado un impulso que permita contribuir a esta iniciativa. Por lo anterior, esta investigación es valiosa al menos por dos razones fundamental, por un lado, toma en consideración una problemática de interés genuino, reciente, y de amplio debate para la comunidad académica internacional y nacional en didáctica del álgebra, como lo es el desarrollo del pensamiento algebraico en edades tempranas, y por otro lado, porque aporta elementos a este campo a partir de una técnica que puede ser útil a la comunidad local que, en principio, no les sea de fácil adquisición la lectura en una segunda lengua como lo es el inglés.

En suma, los dos artículos demuestran de manera práctica que la propuesta de enseñar el álgebra tempranamente es viable, tal como se evidencia en la **Error! Reference source not found.**.

Tabla 1. Lo que plantean Carraher, Schliemann y Brizuela (2006) y Radford (2013) en relación con quienes los citan

TITULO		LO QUE PLANTEAN LOS AUTORES DE LOS ARTÍCULOS OBJETO DE ESTUDIO	LO QUE PLANTEAN OTROS AUTORES EN ESPAÑOL
Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education	(Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2006)	Muchos han argumentado que los niños pequeños son incapaces de aprender álgebra porque no tienen los medios cognitivos para manejar conceptos como variables y funciones. Nuestros estudios en el aula sugieren que los niños pueden manejar conceptos algebraicos y usar la notación algebraica algo antes de lo que comúnmente se supone.	Un foco importante de la investigación en educación matemática en los últimos años ha sido el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros niveles de enseñanza (Radford, 2013), que apoya la introducción del Álgebra temprana en el currículum de educación primaria (Carraher & Brizuela, 2006). Con esta perspectiva se propone organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra sin saltos ni rupturas, tratando de que haya una continuidad sin necesidad de introducir nuevos tópicos.
The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking	(Radford, 2013)	A pesar que tradicionalmente, el álgebra se ha enseñado solo después de que los estudiantes hayan tenido la oportunidad de adquirir un conocimiento sustancial de aritmética, y que se haya asumido que el pensamiento aritmético es un requisito previo para el surgimiento y desarrollo del pensamiento algebraico, en este trabajo se demuestra que una introducción al álgebra en los primeros grados no solo es posible, sino necesaria de cara a pensar eficazmente la idea del álgebra en el futuro.	Históricamente la Educación Primaria se ha centrado prioritariamente en la aritmética, retrasando la introducción del álgebra por concepciones erróneas sobre la naturaleza de la aritmética y del álgebra y por la falta de capacidad de los niños. Sin embargo, Carraher, Schliemann y Brizuela (2000) sostienen que la aritmética es algebraica porque proporciona elementos para construir y expresar generalizaciones y afirman que los estudiantes de Educación Primaria son capaces de entender las relaciones funcionales y de razonar

			sobre las variables de los problemas. (Zapatera, 2018, p. 53)

Tal como se evidencia en la **Error! Reference source not found.** y basándonos en la literatura consultada durante el desarrollo del trabajo, los dos artículos son referenciados en otras investigaciones en español, lo que demuestra que su contenido es relevante y puntual, teniendo en cuenta la necesidad de fundamentar e implementar el álgebra temprana dentro los currículos de matemáticas en educación primaria.

Por otro lado, tal como lo refiere El Tiempo (2017) en el caso colombiano el 43% de los 15.300 profesores de inglés, alcanzan apenas el nivel B2 que deberían tener los profesores de primaria y secundaria en servicio, un nivel bajo en el manejo de esta segunda lengua, situación que imposibilitaría el poder leer estas investigaciones y apropiarse de lo que en estas se propone.

A la par de lo anterior, el desarrollo de un pensamiento variacional resulta determinante para la construcción de ideas más complejas y abstractas dentro de las matemáticas escolares, sin embargo, el proceso de formación de estudiantes desconoce el desarrollo de este pensamiento en la edad temprana, generando con ello dificultades en los estudiantes al momento de enfrentarse al álgebra en una edad más avanzada, lo cual justifica aún más el desarrollo de la presente traducción comentada.

Se ha identificado que este pensamiento variacional permite que estudiantes de cinco o seis años de edad puedan razonar algebraicamente, mejorando su capacidad para notar estructuras y relaciones matemáticas generalizadas y representar y razonar con afirmaciones matemáticas a través de sistemas de símbolos formales e informales (Cañadas et al., 2019).

En términos metodológicos, la presente identificación de los argumentos que favorecen la introducción hacia el álgebra temprana se justifica en la elección de la traducción comentada, una técnica que permite el acceso a documentos de fundamental importancia respecto a un problema determinado, lo cual permite acceder en este caso, a la forma como los artículos: Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education y The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking han abordado de manera práctica el problema en cuestión.

Por lo tanto, el presente trabajo de investigación se justifica en la necesidad de revisar de manera crítica, ciertos problemas que se asientan en los lineamientos curriculares dispuestos para normatizar el proceso de educación en Colombia, si bien lo relacionado con el giro hacia el álgebra temprana es el aspecto que se especifica en la investigación, este hace parte de un problema macro que está relacionado con la necesidad de revisar y rediseñar los lineamientos curriculares dispuestos por el Ministerio de Educación.

2. Capítulo 2. Marco conceptual

El presente marco conceptual tiene por efecto, delimitar las definiciones y las apreciaciones teórico empíricas que la literatura hace, de diferentes elementos claves para la identificación de los argumentos que favorecen el giro hacia el álgebra temprana desde una versión en español castellano de los dos artículos objeto de análisis. En este sentido se propone iniciar por el pensamiento variacional y su relación con el álgebra temprana; en seguida se aborda el concepto de early algebra o álgebra temprana, en donde adicionalmente se conceptualiza al álgebra, la generalización de patrones y el pensamiento algebraico desde la consulta a la literatura, para cerrar con la exposición de autores que hacen mención a la técnica de traducción comentada.

2.1. Pensamiento variacional

El problema que se aborda en la presente investigación, en relación a la introducción temprana del Algebra en los estudiantes, tiene una relación directa con el pensamiento variacional, un pensamiento que según el MEN (2006) en sus Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, está relacionado con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos (p. 66). En el pensamiento variacional, el ejercicio matemático ha de enfrentarse a la complejidad del símbolo, lo cual implica que este pensamiento está directamente relacionado con la enseñanza del álgebra, la cual, en la práctica, generalmente no se enseña desde la educación temprana en primaria.

La conexión entre pensamiento variacional y el álgebra también es observada desde Vergel (2014), quien asegura que a pesar que el MEN (2006) sugiere abordar la idea de pensamiento variacional como el estudio de la variación y el cambio, el estudio de las regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente, tales elementos que hacen parte del pensamiento algebraico no son enseñados tempranamente.

Pese a la importancia que, desde los Lineamientos y Estándares de competencia, se le da al desarrollo del pensamiento variacional que lleva consigo el aprendizaje algebraico, uno de los problemas que más atrae la atención de investigadores en Didáctica de las matemáticas, corresponde con las dificultades que encuentran los estudiantes al momento de hacer una transición entre la aritmética, en la cual se apropian de conocimientos básicos, a otras áreas como lo es el razonamiento algebraico.

Según Vasco (2010) el pensamiento variacional es una manera dinámica de pensamiento que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas permitiendo la covariación semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. Se trata de un proceso que inicia con un momento de captación de lo que cambia y de lo que permanece constante, así como de los patrones que se repiten, algunos ejemplos que la literatura menciona, incluyen los cambios de temperatura durante el día y la noche, y los movimientos de caída libre o tiro parabólico.

En un segundo momento se producen la interacción de variables internas reproduciendo con alguna aproximación las covariaciones detectadas, a lo que se le denomina como "modelos mentales".

Posteriormente se ejecutan tales modelos mentales para diferentes fines, entre estos observar qué resultados producen; comparar esos resultados con lo que ocurre en el proceso que se trata de modelar, y revisar y refinar el modelo, o descartarlo y empezar de nuevo.

Un elemento clave en el proceso de pensamiento variacional lo tiene la formulación simbólica, que hace uso de palabras, dibujos u otros íconos o gráficos, letras o números, con los cuales se realiza la formulación simbólica del sistema o modelo mental, la cual permite objetivar el modelo mental, calcular con la representación tecnológicamente disponible, y continuar con los momentos de comparación y reformulación del modelo (Vasco , 2010).

El objetivo del desarrollo del pensamiento variacional, corresponde con la captación y modelación de la covariación entre cantidades de magnitud, así como de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad, según Vasco (2010), en la práctica su utilidad se resume en la modelación matemática.

Para su aplicación, el pensamiento variacional requiere el pensamiento métrico y el pensamiento numérico si las mediciones superan el nivel ordinal, hace uso del pensamiento espacial si una o varias variables son espaciales, y como principal herramienta hace uso de los sistemas analíticos, sistemas lógicos, conjuntistas u otros sistemas generales de relaciones y transformaciones.

Tales concepciones respecto al pensamiento variacional coinciden con los Lineamientos curriculares y Estándares Básicos de Competencias en matemáticas (MEN, 2006). Sin embargo, su objetivo en términos curriculares es

> (…) construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las

funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. (MEN, 2006, pp 66)

El desarrollo de este pensamiento desde los primeros niveles de la Educación Básica Primaria implica analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; procurar expresar ese término, o mejor los dos o tres términos siguientes, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas. Estas actividades preparan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica a través de la formulación verbal de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guíe más o menos directamente a la expresión algebraica. (MEN, 2006, pp 67)

2.2. Early algebra o álgebra temprana

Para adentrarse en la clarificación conceptual del álgebra temprana, se hace necesario conceptualizar al álgebra, la generalización de patrones y el pensamiento algebraico desde la consulta a la literatura.

En cuanto al álgebra, diferentes son los aportes y aproximaciones conceptuales que la definen. En términos generales podría reconocerse como un lenguaje que sirve para comunicar las ideas de la matemática, para expresar generalizaciones a través de símbolos; desde su relación con la aritmética, se define como una aritmética generalizada; también el álgebra se asocia a actividad, definiéndola como una herramienta que se utiliza para resolver problemas y diseñar modelos matemáticos (Serres, 2011).

En términos convencionales, la literatura concluye que la forma más convencional de concebir el álgebra es como una rama matemática orientada a la simbolización de las relaciones numéricas:

> (…) la forma más convencional de concebir el álgebra es como la rama de las matemáticas que trata de la simbolización de las relaciones numéricas generales, las estructuras matemáticas y las operaciones de esas estructuras. En este sentido, el álgebra escolar se interpreta como "una aritmética generalizada" y como tal involucra a la formulación y manipulación de relaciones y a las propiedades numéricas. Sin embargo, las investigaciones ponen de manifiesto las implicaciones que tienen para el aprendizaje del álgebra, considerar la aritmética como su antecesora; el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética, supone un cambio en el pensamiento del estudiante y la dificultad para muchos principiantes en la transición desde lo que puede considerarse modo informal de representación y resolución de problemas, al modo formal (Socas; et al, 1996, pág. 32).

Por su parte, en el trabajo de Vergel y Rojas (2018) se da cuenta de diversas concepciones que corresponden con el uso de las letras que acompañan a las expresiones numéricas y las destrezas asociadas, está la concepción del algebra como una aritmética generalizada en donde la letra se usa para representar patrones generalizadores; esta también la conceptos del algebra como el estudio de los procedimientos para resolver problemas, en donde la letra es utilizada como incógnita; así mismo está la concepción del algebra como el estudio de estructuras, en donde la letra es un objeto arbitrario. En cada caso, las destrezas a las cuales se le asocia son distintas (Ver Tabla 2).

Tabla 2. Diversas concepciones de álgebra en correspondencia con uso de la letra y destrezas asociadas.

Concepción de álgebra	Uso de la letra	Destrezas asociadas
Aritmética generalizada	Patrones generalizadores (letra como objeto)	Traducir y generalizar (relaciones entre números)
Estudio de procedimientos para resolver problemas	Incógnitas	Simplificar y resolver
Estudio de relaciones entre cantidades	Argumentos, parámetros (letra como número generalizado, o como variable)	Relacionar, tabular, graficar
Estudio de estructuras	Objetos arbitrarios	Manipular, justificar

Fuente: (Butto y Rojano, 2004)

En suma, cualquiera de las aproximaciones al concepto de álgebra coincide en que el objetivo del álgebra escolar es desarrollar el razonamiento o pensamiento algebraico.

> El razonamiento algebraico o pensamiento algebraico consiste en un proceso de generalización para formular expresiones algebraicas o patrones, ecuaciones y funciones, el cual utiliza el lenguaje algebraico y su simbología en busca de precisión; para luego resolver problemas y diseñar modelos matemáticos, tanto dentro de la propia matemática como fuera

> de ella en otras áreas del conocimiento y en situaciones reales de la vida cotidiana (Serres, 2011, pág. 126).

Trabajos como el de MacGregor (2004), agregan al pensamiento o razonamiento algebraico, la característica de utilizar situaciones reales, para desde estas formular relaciones críticas, como ecuaciones, aplicación de técnicas para resolver las ecuaciones, e interpretación de los resultados; el mismo autor ratifica que uno de los mayores inconvenientes en el proceso de formación en pensamiento algebraico, es su enfoque en memorización, reglas rígidas y su desconexión con el aprendizaje aritmético previo:

> (…) en cambio lo que algunos estudiantes parcialmente aprenden es una colección de reglas a ser memorizadas y trucos a ser ejecutados, que no tienen coherencia lógica, muy poca conexión con aprendizajes aritméticos previos, y ninguna aplicación en otros asuntos escolares o en el mundo fuera de la escuela (Serres, 2011, pág. 126).

Algunos estudios que han analizado los procesos de formación académica de niños y niñas en matemática, concluyen que el pensamiento algebraico debe ser tratado desde temprana edad justificando que muchas de las dificultades en la escuela secundaria tienen respuesta en la introducción tardía de este contenido matemático (Butto y Rojano, 2004), de esta apuesta surge el concepto.

Según Vergel y Rojas (2018), el Álgebra temprana también denominada como *early algebra*, es una propuesta de cambio curricular que enfatiza en la *algebrización* del currículo de matemáticas, lo cual corresponde con la integración del pensamiento algebraico en las matemáticas escolares situación que implica que la enseñanza del álgebra se extienda a estudiantes jóvenes, bajo la premisa que una exposición temprana al álgebra elimina el elemento curricular más pernicioso de las matemáticas de la escuela de hoy, esto es, cursos de álgebra de secundaria tardíos, repentinos, aislados y superficiales. Por lo tanto, introducir tempranamente el álgebra a los estudiantes obliga a que el álgebra en sí misma, deje de ser vista como una asignatura, y más bien se convierta en una manera de pensar y actuar sobre objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, además que se transforme en una guía hacia una enseñanza con comprensión y significado de las matemáticas.

Callejo et al (2016) suma, que la introducción temprana del algebra busca como fin organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra sin saltos ni rupturas, tratando de que haya una continuidad sin necesidad de introducir nuevos tópicos, para ello, es necesario que se trabaje desde edades tempranas la relación entre cantidades, la identificación de estructuras, el estudio del cambio, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción. Por consiguiente, las investigaciones han demostrado que los estudiantes de los primeros grados son capaces de comprender algunos aspectos de la generalización de patrones antes de introducir el álgebra como tal.

2.3. Traducción comentada

Como marco de referencia se han determinado las consideraciones respecto a la traducción comentada, al ser esta la técnica por la cual se propone la construcción de una versión en español castellano de los artículos: Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education y The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking.

Según Duarte (2018) la traducción ha sido catalogada como un arte, como un ejercicio intelectual con el propósito de verter ideas de una lengua a otra en un idioma preciso y apropiado e incluso como una operación interlingüística la cual implica diferentes variedades de acuerdo al tipo de traducción que se requiere como método, entre estas Espi (2015) refiere las traducciones literarias, automáticas, técnico-científicas, traducción cinematográfica o subtitulaje, entre otras.

La **traducción literaria**, en la cual la premisa es mantener la voz y el estilo del autor, especialmente alineada a la traducción de obras literarias e incluso manifestaciones teatrales. La **traducción automática**, generada por efecto de la inclusión de un determinado texto en un dispositivo de traducción automática, la cual deriva en diferentes niveles de asertividad, de acuerdo a la tecnología dispuesta y a la forma como se manipula el dispositivo traductor. La **traducción técnico-científica** se refiere a productos originales escritos en clave de investigación científica, alineada a diferentes ciencias duras o blandas y que tiene por objetivo un público especializado (Espi, 2015).

Jakobson (1960) complementa con otros tipos de traducción que incluyen la intralingüística, la intersemiótica y la interlingüística. La traducción intralingüística, implica la transferencia de los signos de una lengua a otros signos de la misma lengua, motivado por cambios de época, de estilo, de destinatario, entre otros. La traducción intersemiótica, implica la trasferencia de los signos verbales a los signos de un sistema no verbal; como un discurso transmitido a partir del lenguaje de señas. Finalmente, está la traducción interlingüística, consistente en la transferencia de los signos pertenecientes a una lengua a los signos de cualquier otra lengua.

Otro elemento a considerar es el de las técnicas de traducción propuestas en el trabajo de Hurtado (2001) como las de adaptación, ampliación, amplificación, calco, comprensión, creación discursiva y compensación:

> **Adaptación:** se reemplaza un elemento cultural por otro de la cultura receptora. **Ampliación:** se añaden elementos lingüísticos. Se utiliza en interpretación consecutiva y doblaje. **Amplificación:** se introduce precisiones no formuladas en el texto. **Calco:** Se introduce literalmente una palabra o sintagma extranjero: Puede ser léxico y estructural. **Comprensión:** se sintetizan elementos lingüísticos, se utiliza en interpretación simultánea y subtitulación. **Creación discursiva:** se establece una equivalencia efímera, totalmente imprescindible fuera de contexto. **Compensación:** se introduce en otro lugar de texto un elemento de información que no se puede reflejar en el mismo sitio en que está situado en el texto original. (Hurtado, 2001, p. 256)

Para Hurtado (1996) la traducción es una habilidad que permite resolver un problema a partir del uso de ciertas subcompetencias, la primera, una competencia relacionada con la capacidad de expresión (en este caso textual) en dos lenguas que implica, una competencia de comprensión en la lengua de partida, a la competencia de expresión en la lengua de llegada; una competencia extralingüística que implica un conocimiento enciclopédico, cultural o temático; una competencia traslatoria o de transferencia, en cuanto implica saber comprender el texto original para lograr re expresarlo en la lengua de llegada, de acuerdo a la finalidad que se plantee con la traducción como técnica y las características del destinatario y una competencia profesional que implica saber documentarse respecto al tema que se plantea, para lograr observar de manera critica los contenidos y así mismo expresarlos en un segundo idioma con claridad.

Según Espi (2015) el ejercicio de traducción se deriva de un encargo, el cual debe declarar el propósito del texto de llegada, que, a la luz del presente documento, implica revisar las ideas centrales de los dos documentos objeto de traducción, alrededor del problema de la introducción temprana del álgebra en la escuela.

De acuerdo con lo descrito anteriormente, para el desarrollo de este trabajo nos identificamos con el método de traducción literal de (Hurtado, 2001), el cual se centra en aspectos propios de los elementos lingüísticos del texto original como las palabras, las frases, la morfología, la sintaxis, entre otros. Esto con el fin de lograr hacer una traducción precisa y en sintonía con los artículos originales.

3. Capítulo 3. Metodología

La realización del presente documento de investigación, que tiene como objetivo Identificar los argumentos que favorecen la introducción del álgebra temprana desde una versión en español castellano de dos artículos sometidos a la técnica de traducción comentada, se considera un trabajo alineado al enfoque cualitativo estrictamente, correspondiente con el método de investigación de traducción comentada, y a su vez se recurre como marco de referencia a la metodología de traducción planteada en el trabajo de Hurtado (2001), que la ve como un acto comunicativo que busca plasmar las intenciones comunicativas de los productos de traducción, teniendo en cuenta que cada lengua las expresa de una manera diferente y considerando las necesidades de los destinatarios.

Para la realización de la traducción comentada, se acude inicialmente al método de traducción literal, método centrado en la reconversión de los elementos lingüísticos del texto original, traduciendo palabra por palabra, sintagma por sintagma o frase por frase, respetando la morfología, la sintaxis y/o la significación del texto original (Hurtado, 2001). El objetivo de utilizar este método literal es el de reproducir el sistema lingüístico de partida de los artículos: Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education y The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking.

Una vez obtenida la traducción literal de los dos artículos objeto de análisis, se procede a clasificar los argumentos que, desde los dos artículos traducidos, se proponen para favorecer la introducción del álgebra temprana en los currículos de matemáticas.

Posteriormente, con el fin de Identificar los principales acuerdos y disensos respecto a la importancia de la introducción temprana del álgebra en los estudiantes, a partir de la traducción de los artículos, se propone extraer de los documentos las ideas más relevantes con sus respectivos argumentos, para ser presentadas a modo de acuerdos y disensos evidenciados en la lectura detallada de dichos documentos. Estos argumentos estarán dirigidos a docentes de matemáticas o de otras áreas, que guarden interés por la introducción temprana del álgebra.

Finalmente, estos argumentos serán relacionados y apoyados con posturas teóricas desde la Educación Matemática, dejando clara la importancia de la introducción del álgebra temprana en la escuela.

4. Capítulo 4. Traducción comentada

4.1. Argumentos que defienden la introducción temprana del álgebra en los estudiantes a partir de los artículos: arithmetic and algebra in early mathematics education y the progressive development of early embodied algebraic thinking

Con el fin de agrupar las diferentes ideas que tanto Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006) como Radford (2013) utilizan como argumentos, se ha sometido a una lectura detallada de ambos documentos, con el fin de extraer los principales aportes y a partir de ellos disponerlos en categorias que permitieran exponerlos a modo de acuerdos y disensos en el siguiente apartado. Por ahora, en el presente apartado se propone identificar dichos argumentos a modo general.

Los argumentos dispuestos en los dos articulos, fueron agrupados asi:

- Argumentos históricos
- Argumentos que citan a la institucionalidad
- Argumentos concernientes a los retos curriculares que se derivan de introducir el álgebra tempranamente.
- Argumentos en relación con la transición de la aritmética al álgebra
- Argumentos desde el aprendizaje y el desarrollo cognitivo de los jóvenes como posible limitación en el aprendizaje del álgebra
- Argumentos desde la idea de una propuesta puente o transitoria
- Argumentos intrínsecamente objetivos de la aritmética y el álgebra
- Argumentos empíricos

- Argumentos correspondientes a la introducción del álgebra desde la educación primaria.

La organización de cada uno de ellos y la exposición de sus acuerdos o disensos, no implica una organización jerárquica o similar. Cada uno de los anteriores puede significar un acuerdo entre los dos artículos en tanto ambos autores los mencionan, y otros pueden representar un disenso, en tanto solo es mencionado en uno de los dos artículos que hemos tomado para traducir y comentar.

Los **argumentos históricos**, son los que dan a entender que a través de la historia se ha tenido una errada concepción de la enseñanza del álgebra y la aritmética y que se deben cambiar esas concepciones erróneas, aportando así a la idea de introducir tempranamente el álgebra y ayudar a eliminar las brechas que condicionan las prácticas del docente.

Respecto a los **argumentos que citan a la institucionalidad**, nuevamente Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006) hacen énfasis en organismos como el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas [NCTM] y la comisión especial de la Corporación RAND que, en el contexto estadounidense, han defendido la idea de integrar al álgebra en el plan de estudios de la educación primaria.

Los **argumentos concernientes a los retos curriculares que se derivan de introducir el álgebra tempranamente** constituyen una razón muy importante para introducir tempranamente el álgebra en la escuela ya que estos se refieren a los cambios que debe asumir el currículo como iniciativa para que los educadores acepten y vean este objetivo como una guía que hay que seguir necesariamente.

Los **argumentos en relación con la transición de la aritmética al álgebra**, por el lado de Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006), defienden la idea del álgebra como una aritmética generalizada de números y cantidades que se expresa principalmente en las funciones, la relación numérica de valores, entre otros. Por otro lado, en cuanto al trabajo de Radford (2013), se considera un problema conceptual propio de la ciencia, desde el cual se han agrupado ciertos conocimientos como el de los patrones a la aritmética, cuando en realidad pertenecen al algebra como disciplina.

En cuanto a los **argumentos centrados en el aprendizaje y el desarrollo cognitivo de los jóvenes como posible limitación en el aprendizaje del álgebra** Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006) critican el supuesto de que el pensamiento aritmético evoluciona muy lentamente desde procesos concretos hacia un pensamiento algebraico más abstracto, de tal forma que la supuesto brecha cognitiva que le impide al estudiante adquirir conocimientos tempranos en algebra es equivocada. Radford (2013) por su parte, coincide en este argumento, pero en su caso culpa al propio sistema educativo que observa al estudiante como un sujeto estrictamente cognitivo, ignorando con esto que el contexto sociocultural que habita el estudiante influye de manera determinante en su respuesta al proceso educativo.

Aparecen también **argumentos que discuten la idea de una propuesta puente o transitoria**, en este caso Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006), critican el supuesto transito que actualmente condiciona los contenidos curriculares, también se identificaron argumentos intrínsecamente objetivos de la aritmética y el álgebra en ambos artículos. En este caso, Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006), defienden la idea de un carácter inherentemente algebraico en la aritmética, mientras que Radford (2013) plantea la necesidad de identificar el punto de distinción entre aritmética y algebra.

Adicionalmente en términos de los **argumentos empíricos**, Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006) recurre a una recolección de antecedentes que retratan hallazgos de investigación desde 1969 hasta 2001, los cuales dan cuenta de una contradicción a las supuestas limitaciones de los estudiantes de cara al algebra en términos de edad temprana no eran correctas, tales antecedentes son complementados con su propio estudio de aula en un estudio longitudinal con 69 estudiantes, de manera similar en el trabajo de Radford (2013), también se hace referencia a antecedentes que demuestran que el pensamiento algebraico puede exponerse a los estudiantes jóvenes.

Finalmente, los autores defienden **argumentos correspondientes a la introducción del álgebra desde la educación primaria**, Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006) mencionan que existe una tensión en los maestros, provocada por un carácter de desconexión curricular y dan a entender que el hecho de solucionar estas tensiones sería un aporte importante para la introducción temprana del álgebra. Por su parte Radford (2013) hace un acercamiento a las estrategias didácticas dispuestas por el maestro para reducir las tensiones de las que dan cuenta Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006), en este caso, se menciona también la influencia del contexto sociocultural como determinante del proceso de educación.

En el siguiente capítulo se retomarán cada una de estas categorías, para demostrar los puntos de acuerdo y disensos entre ambos trabajos.

4.2. Principales acuerdos y disensos respecto a la importancia de la introducción temprana del álgebra en los estudiantes, a partir de la traducción de los artículos: arithmetic and

algebra in early mathematics education y the progressive development of early embodied algebraic thinking

En el presente capítulo se exponen los comentarios en razón de las categorías anteriormente planteadas, pero exponiendo separadamente los puntos en los que acuerdan los dos artículos, y aquellos en donde se distancian. Los principales acuerdos se ubican en las categorías de análisis de los argumentos en relación con la transición de la aritmética al álgebra, argumentos desde el aprendizaje y el desarrollo cognitivo de los jóvenes como posible limitación en el aprendizaje del álgebra, argumentos desde el carácter eminentemente algebraico de la aritmética, argumentos empíricos y argumentos correspondientes a la introducción del álgebra desde la educación primaria. Los principales disensos están relacionados con los argumentos históricos, los argumentos que citan a la institucionalidad, los argumentos concernientes a los retos curriculares que se derivan de introducir el álgebra tempranamente y los argumentos que defienden la idea de una propuesta puente o transitoria.

4.2.1. Principales acuerdos respecto a la importancia de la introducción temprana del álgebra en los estudiantes, a partir de la traducción de los artículos: arithmetic and algebra in early mathematics education y the progressive development of early embodied algebraic thinking

Los principales acuerdos dan cuenta de argumentos que tanto Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006) como Radford (2013) coinciden en mencionar en sus artículos, por lo que representan un punto de coincidencia importante, que adicionalmente se complementa en cada caso con literatura científica que vinculan a modo de antecedentes en ambas investigaciones. Estos puntos de acuerdo se ubican en las categorías de análisis argumentos propios de la matemática como ciencia, argumentos desde el aprendizaje y el desarrollo cognitivo de los jóvenes como posible limitación en el aprendizaje del álgebra, argumentos desde el carácter eminentemente algebraico de la aritmética, argumentos empíricos y argumentos desde la praxis del maestro.

4.2.1.1. Argumentos en relación con la transición de la aritmética al álgebra

Por su parte, Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006), hacen referencia a algunos argumentos que, desde la matemática como ciencia, defienden la idea del álgebra inicial, al respecto refieren que el álgebra no es otra cosa que una aritmética generalizada de números y cantidades en la que el concepto de función asume un papel fundamental

> (…) la generalización se encuentra en el corazón del razonamiento algebraico, las operaciones aritméticas pueden verse como funciones y la notación algebraica puede apoyar el razonamiento matemático incluso entre estudiantes jóvenes. (Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2006)

También se hace mención al papel de las funciones en el álgebra, refiriendo que la relación numérica de valores, al tener una relación de dependencia (que implica que, si se tienen dos cantidades o valores numéricos distintos, el primero va a depender siempre del segundo), justifica un conocimiento que debiera ser integrado en el proceso de enseñanza de la matemática desde los primeros años, incluso cuando el niño o niña se somete a procesos como lo son las operaciones básicas iniciales.

> Las funciones han recibido merecidamente un énfasis creciente en la teorización, la investigación y los planes de estudio de la escuela media y secundaria (p. Ej., Dubinsky y Harel, 1992; Schwartz y Yerushalmy, 1992; Yerushalmy y Schwartz, 1993). Proponemos

> que otorgar a las funciones un papel importante en el plan de estudios de matemáticas elementales ayudará a facilitar la integración del álgebra en el plan de estudios existente. La clave de nuestra propuesta es la noción de que las operaciones de suma, resta, multiplicación y división pueden tratarse desde el principio como funciones (Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2006).

Un argumento dispuesto en el trabajo de Radford (2013) justifica la introducción temprana al algebra por problemas conceptuales propios de la ciencia matemática, en su caso citando la concepción del estudio de patrones como temática principal de la introducción del estudiante al algebra.

> Déjame dar un ejemplo. En el Currículo de Matemáticas de Ontario, se supone que los profesores introducen a sus alumnos en el álgebra, recurriendo en particular al estudio de patrones, a través de la investigación de secuencias y su generalización. Una expectativa específica en los grados 1, 2 y 3 establece que los estudiantes deben identificar, describir y ampliar los patrones. En el quinto grado se les pide que predigan un término remoto específico de la secuencia. Ahora bien, ¿describir y extender secuencias y predecir términos remotos son realmente procesos algebraicos o son aritméticos? ¿Qué harían estos procesos algebraicos? ¿Cuáles serían los conceptos algebraicos requeridos en ese tipo de tareas? Al evadir estas preguntas, podemos terminar trivializando las cosas (Radford, 2013).

Ante lo anterior, se discute si los patrones corresponden con un elemento propio del algebra o más bien de la aritmética, inclinándose a este último, y a partir de ello deduciendo que algunos de los conceptos que supuestamente se deben aprender en un grado superior por ser considerados propios del algebra, son realmente conceptos propios de la aritmética que, por tanto, deberían ser aprendidos por los estudiantes en edad temprana.

> Encontrar estas diferencias, quiero argumentar, es importante desde un punto de vista educativo. De lo contrario, podríamos estar enseñando aritmética mientras pensamos que estamos enseñando álgebra. Al hacerlo, podríamos estar fallando en la promoción de formas elementales genuinas de pensamiento algebraico en los estudiantes. Es por esto que la distinción entre aritmética y álgebra es una tarea que no puede descartarse en las primeras investigaciones del álgebra (Radford, 2013).

Con lo anterior, Radford (2013) pretende demostrar que la aritmética y el álgebra guardan una conexión natural, es decir, que hay algo inherentemente aritmético en el álgebra y algo inherentemente algebraico en la aritmética, por lo que una de las primeras metas en su estudio, es la de revelar cuales son los aspectos que distancian a una y otra disciplina.

Según Butto y Rojano (2004) la transición de la aritmética al álgebra es un paso importante para llegar a ideas más complejas dentro de la enseñanza de la matemática, coincide con Radford (2013) en cuanto a que existen problemas conceptuales que dificultan el paso, principalmente porque el contenido matemático se conecta conceptual e históricamente a la idea de variación funcional, precisamente por ello es que en su propuesta utiliza la percepción visual intuitiva y diferentes contextos (numéricos y geométricos) para relacionarlos con los conceptos algebraicos. La lucha por el entendimiento temprano de algunos conceptos matemáticos, es un asunto clave en el trabajo del autor.

Butto y Rojano (2004) no solo coinciden con Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006) en cuanto a que en la primaria se ha enseñado la aritmética por lo general sin establecer vínculos con otros temas matemáticos del currículo, sino que también dan a entender que la aritmética tiene un carácter inherentemente algebraico y no necesariamente debe ser vista como un dominio claramente distinto del álgebra.

Por otro lado, en el trabajo de Serres (2011), se cree que la conceptualización del álgebra escolar está relacionada con distintos factores, entre estos su relación con la aritmética y la definición de la misma como una aritmética generalizada. Los problemas conceptuales derivan en ciertas dificultades para comprender los cambios de significado de los símbolos de la aritmética al álgebra, este autor menciona que algunos de estos, solo tienen lugar en años académicos avanzados.

4.2.1.2. Argumentos desde el aprendizaje y el desarrollo cognitivo de los jóvenes como posible limitación en el aprendizaje del álgebra

Por su parte, en el artículo de Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006), se discute respecto a las supuestas limitaciones de los estudiantes de cara al algebra, desde las cuales se justifica el tránsito entre aritmética y algebra, dada una inexistente preparación previa o ciertas limitaciones del desarrollo del estudiante que le impedirían adquirir un conocimiento que se supone avanzado, especialmente en términos de edad.

> (...) uno naturalmente se pregunta si esto se debe a limitaciones del desarrollo o si los estudiantes simplemente no han logrado la preparación necesaria. Las limitaciones del desarrollo son impedimentos para el aprendizaje que supuestamente están vinculados a

> estructuras mentales, esquemas y mecanismos generales de procesamiento de información insuficientemente desarrollados (Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2006).

Al respecto, en el artículo de Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006) se reconocen varios avances investigativos que defienden la idea de una posible limitación en términos de desarrollo, ideas apoyadas en el supuesto de que el pensamiento aritmético evoluciona muy lentamente desde procesos concretos hacia un pensamiento algebraico más abstracto, y que por tanto, existe un tipo de brecha cognitiva que separa a un tipo de pensamiento del otro, en suma, son trabajos que han considerado como argumento a la actual separación entre aritmética y algebra, a una supuesta incapacidad de los estudiantes para operar espontáneamente con o sobre lo desconocido.

Por su parte, Radford (2013) confirma que el pensamiento aritmético ha sido asumido como un requisito previo para el surgimiento y desarrollo del pensamiento algebraico, dando cuenta que tal lineamiento orientador impide una introducción al álgebra en los primeros grados.

> Por un lado, no mencioné aquí otras partes del encuentro de los estudiantes con el álgebra que incluyen un trabajo sobre tablas ... y una parte muy grande que trata sobre ecuaciones. Limité mi explicación a patrones o la generalización de secuencias de figuras... Por otro lado, no incluí aquí, al menos no de manera explícita, un aspecto crucial del desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, a saber, el que trata cuestiones de subjetividad y agencia. Como bien argumentó Valero (2004), la investigación en educación matemática ha reducido en gran medida al estudiante a un sujeto cognitivo (Radford, 2013).

En términos del aprendizaje y el desarrollo cognitivo de los jóvenes como posible limitación en el aprendizaje del álgebra, tal presunción procede según Radford (2013), del enfoque como tradicionalmente ha sido abordado este problema por la investigación científica, limitando al Estudiante a una condición de sujeto cognitivo, lo cual ignora otras condiciones como lo son las de sujeto social y cultural tal como lo propone de manera general el trabajo de Vygotsky, Radford (2013) asegura que trabajar al estudiante desde el enfoque cognitivo resulta mucho más simple para el investigador, dado que el sujeto socio cultural de Vygotsky implica un problema aún más complicado de conceptualizar e investigar, además un problema de investigación cuyos hallazgos serán mucho menos generales de lo que pretende una investigación alineada al paradigma positivista. Sin embargo, su observación realizada entre los años 1998 a 2006 siguiendo varias cohortes de estudiantes desde el séptimo grado hasta el final de la escuela secundaria, dio cuenta de una apropiación temprana del algebra en contextos educativos que se alejaban de posturas tradicionales en referencia al sujeto cognitivo.

Una postura complementaria a este argumento basado en la capacidad cognitiva del estudiante es la de Vergel y Rojas (2018), en donde se propone que lo cognitivo no debería ser tomado como argumento inhibidor de dicho aprendizaje temprano, dado que el aprendizaje de las matemáticas es esencialmente una actividad semiótica, en este sentido, la preocupación de los docentes se orienta a facilitarles la comprensión del sentido semiótico de la matemática.

Para Vergel (2016), el problema radica en observar a un estudiante estrictamente cognitivo, ignorando las aproximaciones socioculturales y antropológicas que lo entienden como individuo contextual, cultural, concreto, cuya formulación de proyectos, modos de pensar y de actuar, y su producción de significados sólo tiene razón de ser en el interior de la cultura y sus instituciones, lo anterior justifica la idea de sujetos semióticos que bajo todas las circunstancias de la vida, colocan al estudiante (y a cualquier ser humano) como constructor activo de significado.

Al respecto, Callejo y colaboradores (2016) hacen referencia a la teoría de la objetivación desde la cual el individuo no solo se considera como un sujeto pensante sino como un sujeto que vive, piensa y actúa en el marco de una cultura, y de la premisa de que la base de la cognición se encuentra en la praxis social, entendida esta praxis como una actividad humana sensitiva y concreta, de tal forma, que la dificultad que tienen los jóvenes para asumir el álgebra, procede directamente de un distanciamiento obligado de estos mismos a dicho conocimiento, en un momento en el que estaban empezando a reconocer elementos propios de la aritmética, distanciándolos del algebra.

Por otro lado, Vergel y Rojas (2018) defienden la idea que la introducción temprana del Algebra se apoya en una idea procedente del trabajo de Vygotsky, desde la cual se comprende que el marco del niño es puramente situacional, en donde la palabra está vinculada a algo concreto, mientras que el marco del adulto es estrictamente conceptual, lo cual hace más difícil que el conocimiento algebraico sea apropiado en una edad mayor, y mucho más carente de contexto.

Finalmente se puede decir que ambos autores coinciden en que existe una supuesta brecha cognitiva que evita que los estudiantes obtengan conocimientos algebraicos tempranamente y que esto es provocado por la manera como se ve al estudiante, ignorando su contexto social y cultural el cual es determinante en los procesos de aprendizaje.

4.2.1.3. Argumentos intrínsecamente objetivos de la aritmética y el álgebra

Uno de los principales argumentos que se exponen en los artículos, está relacionado con el carácter eminentemente algebraico de la aritmética, al respecto Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006), sugieren que la aritmética tiene un carácter inherentemente algebraico por lo que los conceptos algebraicos y la notación deberían considerarse como parte integral de las matemáticas elementales.

> Estamos sugiriendo que la aritmética tiene un carácter inherentemente algebraico en el sentido de que se refiere a casos y estructuras generales que pueden capturarse sucintamente en notación algebraica. Podríamos argumentar que el significado algebraico de las operaciones aritméticas no es una "guinda del pastel" opcional, sino más bien un ingrediente esencial. En este sentido, creemos que los conceptos algebraicos y la notación deben considerarse parte integral de las matemáticas elementales (Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2006).

En el caso de Radford (2013), una de sus principales hipótesis se centra en la necesidad de encontrar el punto de distinción entre aritmética y algebra. Reconoce que en la literatura es habitual encontrar que el uso de letras en álgebra es la condición necesaria para demostrar un pensamiento algebraico y eso no es cierto, dado que muchos de los problemas expresados con incógnitas, ha demostrado un tratamiento resolutorio desde la aritmética, no desde el álgebra.

> Para operar sobre lo desconocido, o sobre cantidades indeterminadas en general (por ejemplo, variables, parámetros), uno tiene que pensar analíticamente. Es decir, hay que considerar las cantidades indeterminadas como si fueran algo conocido, como si fueran números específicos. Desde un punto de vista genético, esta forma de pensar analíticamente; donde los números desconocidos se tratan a la par con los números conocidos, distingue la aritmética del álgebra. Una consecuencia de esta diferencia entre aritmética y álgebra es la siguiente: por la naturaleza del álgebra analítica, las fórmulas en álgebra se deducen (de la misma manera que las soluciones se deducen al resolver ecuaciones). No advertir esta

característica analítica central del álgebra puede llevarnos a pensar que la producción de fórmulas en patrones (independientemente de cómo se produjeron) es un síntoma del pensamiento algebraico (Radford, 2013).

Dado lo anterior, Radford (2013) reconoce que el uso de letras en álgebra, así como el uso de notaciones o el uso de variables o números indeterminados, no es una condición necesaria ni suficiente para pensar algebraicamente. Por tal razón, en su trabajo se concluye que hay tres condiciones que caracterizan el pensamiento algebraico.

(1) indeterminación: el problema involucra números desconocidos (incógnitas, variables, parámetros, etc.);

(2) denotación: los números indeterminados involucrados en el problema tienen que ser nombrados o simbolizados. Ahora bien, esta simbolización se puede lograr de varias formas. Se pueden utilizar signos alfanuméricos, pero no necesariamente. La denotación de cantidades indeterminadas también se puede simbolizar a través del lenguaje natural, gestos, signos no convencionales o incluso una mezcla de estos;

(3) analiticidad: las cantidades indeterminadas se tratan como si fueran números conocidos. Es decir, aunque no se conocen, se parte de las cantidades indeterminadas y se opera con ellas (es decir, se las suma, se resta, se multiplica, se divide) como si se las conociera: esto es lo que significa analidad (Radford, 2013).

A la par de lo anterior, en el trabajo realizado por Radford (2013), sus argumentos no defienden la idea de un carácter eminentemente algebraico inmerso en la aritmética, más bien se ocupan de encontrar el punto en que ambas disciplinas toman distancia.

Respecto al carácter eminentemente algebraico de la aritmética, Vergel y Rojas (2018) propone la idea de pensamiento relacional, el cual implica considerar las expresiones aritméticas y ecuaciones en su totalidad, así mismo, promover el uso de las propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas para relacionar o transformar sus expresiones, los autores llaman a esta postura como crear un eslabón entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico como estrategia de mejora de la enseñanza del álgebra escolar. Vergel y Rojas (2018) por ejemplo, no encuentran una razón para separar dichos conocimientos, incluso aseguran que las posibles rupturas entre estos dos campos obedecen más a hechos sociales y culturales.

4.2.1.4. Argumentos empíricos

Con el fin de demostrar que las supuestas limitaciones de los estudiantes de cara al álgebra en términos de edad temprana no eran correctas, Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006) citaron diversos estudios de aula que, a pesar de haber sido realizados en diferentes momentos históricos desde 1969 hasta 2001, tuvieron un impacto significativo en la educación matemática relacionado directamente con el álgebra temprana.

> Los estudios en el aula realizados por el equipo de Davydov (ver Bodanskii, 1969/1991; Davydov, 1969/1991) muestran que los niños rusos que recibieron instrucción en representación algebraica de problemas verbales de los grados 1 a 4 se desempeñaron mejor que sus compañeros de control durante los años escolares posteriores y mostraron mejores resultados en la resolución de problemas algebraicos en comparación con los estudiantes de sexto y séptimo grado en programas tradicionales de 5 años de aritmética seguidos de instrucción de álgebra desde el grado 6. Otros resultados prometedores sobre el trabajo en ecuaciones provienen de estudios de entrevistas en Brasil. Brito Lima y da Rocha Falcäo

> (1997) encontraron que los niños brasileños de primero a sexto grado pueden desarrollar representaciones escritas para problemas algebraicos y, con la ayuda del entrevistador, resolver problemas de ecuaciones lineales usando diferentes estrategias de solución. (Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2006, p. 92)

Estos estudios corresponden con trabajos de aula realizados en diferentes poblaciones estudiantiles de primero y hasta quinto grado, demostraron que las supuestas limitaciones de los estudiantes de cara al algebra eran equivocas, y que por el contrario se habría comprobado que los niños que recibieron instrucción en representación algebraica de problemas mostraron mejores resultados en la resolución de problemas algebraicos en comparación con los estudiantes de aritmética que no veían álgebra sino hasta el grado sexto.

> Carpenter y Franke (2001) y Carpenter y Levi (2000) demostraron que los niños bastante pequeños que participaron en actividades en el aula que exploran las relaciones matemáticas pueden comprender, por ejemplo, que "a + b - b = a" para cualquier número a y b. Schifter (1999) describió ejemplos convincentes de razonamiento algebraico implícito y generalizaciones de niños de escuela primaria en aulas donde el razonamiento sobre relaciones matemáticas es el centro de la instrucción. Blanton y Kaput (2000) mostraron que los alumnos de tercer grado hacían generalizaciones sólidas mientras discutían las operaciones en números pares e impares y los consideraban como marcadores de posición o como variables.
>
> Otro conjunto de estudios examinó las generalizaciones de los niños pequeños y su comprensión de las variables y funciones. Davis (1971-1972) y sus colegas del Proyecto

> Madison desarrollaron una serie de actividades en el aula que podrían utilizarse e introducir, entre otras cosas, conceptos y notación para variables, coordenadas cartesianas y funciones en la escuela primaria y secundaria. Estas tareas se pusieron a prueba con éxito en los grados 5 a 9 y, como enfatizó Davis, muchas de las actividades son apropiadas para los niños a partir del grado 2 en adelante. En un estudio previo de intervención en el aula, encontramos que, dados los desafíos adecuados, los estudiantes de tercer grado pueden participar en el razonamiento algebraico y trabajar con tablas de funciones, utilizando la notación algebraica para representar relaciones funcionales (Brizuela, 2004; Brizuela & Lara-Roth, 2001; Brizuela, Carraher y Schliemann, 2000; Carraher, Brizuela y Schliemann, 2000; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; Schliemann, Carraher y Brizuela, 2001, en prensa; Schliemann, Goodrow y Lara-Roth, 2001) . Se ha encontrado evidencia de razonamiento algebraico incluso entre estudiantes de primer y segundo grado que participaron en actividades de álgebra temprana inspiradas en el trabajo de Davydov (1975/1991) (Dougherty, 2003; Smith, 2000). Más recientemente, encontramos (Brizuela & Schliemann, 2004) que los estudiantes de cuarto grado (de 9 a 10 años) que participaron en nuestras actividades de Álgebra Temprana pueden usar la notación algebraica para resolver problemas de naturaleza algebraica (Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2006).

Los antecedentes identificados por los autores, serian comprobados desde su propio estudio de aula un estudio longitudinal con 69 estudiantes provenientes de una comunidad multiétnica (75% latinos) en el área del Gran Boston, en cuatro aulas, desde el grado 2 al 4, estudiantes expuestos a un proceso de enseñanza de las relaciones algebraicas y la notación.

Finalmente, en el estudio de Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006) se demostró que las actividades documentadas en su estudio de aula, correspondían con un dominio del algebra, aun cuando los problemas habían sido resueltos mediante procedimientos alternativos, o si bien no aplicaron el sentido tradicional para despejar una incógnita irrespetando las reglas sintácticas, no pudo ignorar que incluyeron letras para representar variables, utilizaron expresiones algebraicas para representar funciones, utilizaron el conocimiento sobre los cambios en las cantidades para formular nuevas expresiones algebraicas, entendieron las relaciones; las cantidades, comprendieron las relaciones funcionales entre cantidades indeterminadas; trabajaron variables a la vez que mantuvieron una relación invariante entre ellas, lo cual les permitió concluir los estudiantes estaban trabajando con funciones.

En términos de lo empírico, una de las dos preguntas que se plantea en el trabajo de Radford (2013), corresponde con, si las formas incorporadas de pensamiento algebraico ya evidenciadas en adolescentes en investigaciones previas, podrían hacerse accesibles a los estudiantes jóvenes.

> En este artículo, me ocupo de dos preguntas de investigación. La primera gira en torno a si las formas incorporadas de pensamiento algebraico ya evidenciadas en adolescentes en investigaciones previas, pueden hacerse accesibles a los estudiantes jóvenes. Como argumentaré, los estudiantes pueden pensar eficazmente algebraicamente a una edad temprana. Sin embargo, necesitamos reconocer formas no tradicionales de pensamiento algebraico, es decir, formas de pensamiento algebraico que no se basan necesariamente en el simbolismo alfanumérico (Radford, 2013).

En términos de argumentos empíricos que apoyen la idea de una introducción temprana del algebra, Vergel y Rojas (2018) hacen un llamado a revisar los avances de la investigación en didáctica de las matemáticas, dado que esta consigna apuesta especificas a problemas concretos de poblaciones de estudiantes. La didáctica termina siendo según ellos, una muestra real y aplicada en términos de secuencias o situaciones didácticas, para demostrar la comprensión y explicación de los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra en grados iniciales.

4.2.1.5. Argumentos correspondientes a la introducción del álgebra desde la educación primaria

Otro de los argumentos que defienden Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006) está relacionado con la práctica del docente, y las posibles tensiones que ellos deben sortear al momento de enseñar matemáticas, todo esto debido a la desconexión que a nivel curricular se evidencia entre aritmética y algebra. Esta desconexión, termina por sesgar el proceso de enseñanza del docente, a un currículo malinterpretado históricamente, que a su vez le imposibilita hacer mención a letras desde un enfoque matemático en los primeros años de vida del estudiante.

> En la escuela primaria, los maestros pueden enfocarse en operaciones numéricas, fluidez computacional y problemas de palabras que involucran valores particulares. Sólo más tarde se utilizan letras para representar cualquier número o conjuntos de números. No es sorprendente que una demarcación tan marcada lleve a una tensión considerable a lo largo de la frontera de la aritmética y el álgebra (Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2006).

Por su parte, en el trabajo de Radford (2013) se presenta un acercamiento a la praxis del maestro al hacer referencia al aprendizaje contextualizado sociocultural propuesto por Vygotsky, al tiempo que se destaca otro elemento fundamental para la introducción temprana del Algebra en los estudiantes, el asunto de la didáctica.

> Vygotsky (1994) argumentó enérgicamente que el desarrollo solo puede entenderse si tomamos en consideración la manera en que el estudiante está experimentando emocionalmente el mundo. La experiencia emocional [perezhivanie] según sostuvo el psicólogo ruso en una conferencia pronunciada al final de su vida, es el vínculo entre el sujeto y su entorno, entre el sujeto siempre cambiante (el ser perpetuo en proceso de devenir) y su entorno social siempre en movimiento conceptual, político e ideológico (Radford, 2013).

Vergel (2014) coincide con el trabajo de Radford (2013) en cuanto a que el pensamiento se puede desarrollar en la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) a través de la interacción verbal de maestros y alumnos y de los alumnos entre sí.

En suma, las practicas del docente son un aspecto débilmente abordado en ambos estudios, y se consideran a la luz de los autores de la presente traducción comentada como un vacío pendiente por abordar, dado que los ejercicios que presenta cada uno en sus trabajos de aula, representan una notable importancia de las estrategias didácticas en el proceso de aprendizaje temprano del algebra, sin embargo, en términos concretos no se habla de su valor fundamental en el proceso de formación en ambas disciplinas, aritmética y algebra.

4.2.2. Principales disensos respecto a la importancia de la introducción temprana del álgebra en los estudiantes, a partir de la traducción de los artículos: arithmetic and

algebra in early mathematics education y the progressive development of early embodied algebraic thinking

Los principales disensos están relacionados con argumentos que se presentan solo en uno de los dos artículos, por lo que podría considerarse que los documentos hacen énfasis en perspectivas diferentes que no necesariamente son contradictorias. Al respecto debe referirse que el disenso para este caso, no representa propiamente una contradicción entre los dos autores, sino más bien una argumentación desde perspectivas distintas, que incluso podrían llegarse a complementar. En suma, la referencia a disensos para la presente investigación, representa más bien consideraciones desde posturas distintas.

4.2.2.1. Argumentos históricos

El trabajo de Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006), hacen mención a las razones históricas por las que el Algebra ha adquirido un lugar posterior al de la aritmética, una cierta percepción que coloca a la aritmética y al algebra en lugares jerárquicamente distintos, lo cual es considerado por los autores como una interpretación equivoca de la realidad histórica.

> El hecho de que el álgebra haya surgido históricamente después, y como una generalización de la aritmética, sugiere a muchas personas que el álgebra debe seguir a la aritmética en el plan de estudios. Por muy obvia que pueda parecer esta afirmación, creemos que existen buenas razones para pensar lo contrario (Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2006).

Los autores confirman que está equivocada interpretación de la historia, ha influido en un currículo escolar que termina por determinar que primero se enseña aritmética y luego después el álgebra, siendo esto un equívoco por errada interpretación histórica.

> Frente al análisis histórico y la evidencia empírica, sería fácil concluir que los estudiantes enfrentan un viaje largo y difícil hacia el álgebra. Sin embargo, la historia puede ser engañosa… Los desarrollos históricos de las matemáticas son importantes para comprender los dilemas y las dificultades que pueden encontrar los estudiantes. Pero decidir si ciertas ideas y métodos del álgebra están al alcance de los estudiantes jóvenes requiere estudios empíricos con estudiantes jóvenes que han tenido acceso a actividades y desafíos que involucran el razonamiento algebraico y la representación algebraica. Como ha sugerido Booth (1988), las dificultades de los estudiantes con el álgebra pueden deberse a las formas limitadas en que se les enseñó sobre aritmética y matemáticas elementales (Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2006).

Por consiguiente, Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006) proponen la necesidad de reexaminar los supuestos sobre las capacidades de los estudiantes jóvenes, estos autores indican que los trabajos que en la historia han defendido dicha idea, lo han hecho a partir de apuestas teóricas, ignorando con esto que es desde ejercicios empíricos sobre poblaciones de estudiantes específicas, donde a partir de las diferentes propuestas didácticas se pone a prueba la capacidad cognitiva de los estudiantes para asumir la comprensión del algebra tempranamente.

4.2.2.2. Argumentos que citan a la institucionalidad

Dentro de los argumentos que defienden la introducción temprana del Álgebra en los estudiantes, están los relacionados con la criticas que se han venido derivando desde organismos ligados a la educación en el mundo, que representan a la institucionalidad, en este sentido Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006) destacan los puntos de vista de organismos que incluyen al Consejo

Nacional de Profesores de Matemáticas [NCTM] y la comisión especial de la Corporación RAND en los Estados Unidos.

> Un número cada vez mayor de educadores de matemáticas, formuladores de políticas e investigadores creen que el álgebra debería convertirse en parte del plan de estudios de la educación primaria. El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas [NCTM] (2000) y una comisión especial de la Corporación RAND (2003) han acogido con satisfacción la integración del álgebra en los primeros planes de estudio de matemáticas.

Así mismo mencionan los puntos de vista empíricos de los propios educadores de matemáticas, la opinión de los formuladores de políticas públicas y de manera general al cuerpo de investigadores, quienes defiende la idea de integrar al álgebra en el plan de estudios de la educación primaria. Estos hallazgos dan cuenta que la discusión por integrar la enseñanza del algebra tempranamente, esta también respaldada por un cuerpo institucional de especial relevancia en el mundo.

Como un argumento que pretende demostrar la integración temprana de este conocimiento, el trabajo realizado por Cañadas y colaboradores (2019), argumenta esta importancia de integrar contenidos algebraicos desde los primeros cursos, refiriendo como ejemplos los Principles and Standards del National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] y en los Common Core State Standards de la National Governors Association Center for Best Practices [NGA] y el Council of Chief State School Officers [CCSSO], estos modelos curriculares presentan resultados de investigaciones donde la notación algebraica no es la protagonista, donde los niños en los primeros años asumen el pensamiento algebraico mediante patrones, funciones y relaciones, demostrando que no solo es posible, sino que hay ejemplos suficientes de su funcionamiento.

4.2.2.3. Argumentos concernientes a los retos curriculares que se derivan de introducir el álgebra tempranamente

Existen también algunos argumentos que se centran en el currículo escolar como elemento que debe ser sujeto a ajustes, haciendo énfasis en que este es uno de los procesos más complejos para la introducción temprana del Algebra.

> El contenido existente debe transformarse sutilmente para resaltar su carácter algebraico. Hasta cierto punto, esta transformación requiere simbolismo algebraico... La notación simbólica, las líneas numéricas, las tablas de funciones y los gráficos son herramientas poderosas que los estudiantes pueden usar para comprender y expresar las relaciones funcionales en una amplia variedad de contextos de problemas (Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2006).

En ese sentido, el trabajo de Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006), hacen énfasis en elementos como la notación simbólica, las líneas numéricas, las tablas de funciones y los gráficos, los cuales podrían suponer a través de cambios sutiles, la introducción del algebra tempranamente en el estudiante.

> Suponga por el momento que la aritmética y el álgebra son temas distintos. Por ejemplo, supongamos que la aritmética se ocupa de operaciones que involucran números particulares, mientras que el álgebra se ocupa de números, variables y funciones generalizados. Esta distinción permite un ordenamiento ordenado de los temas en el currículo (Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2006).

Para Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006), la equivocada distinción sobre la aritmética y el álgebra ha llevado a supuestos que han sido interiorizados en los currículos escolares, llevando a tratar ambos asuntos como temas distintos e incluso separados el uno del otro.

El problema curricular es tratado también por Vergel (2014), asegurando que las orientaciones curriculares de Pre-Álgebra y de Early-Algebra aún se encuentran en una fase de desarrollo inicial tanto en términos epistemológicos, como cognitivos y didácticos, dado que aun en la actualidad, aun no hay todavía respuestas claras sobre qué tareas y formas de aprendizaje son algebraicas y cuáles no, y qué tipo de evidencias se necesitan para evaluar la presencia de pensamiento algebraico.

La integración curricular del algebra tempranamente es identificada como una de las principales barreras para su institucionalización. El estudio que expone Butto y Rojano (2010) propone una ruta conceptual en la que no necesariamente se debe llegar a la manipulación algebraica en una etapa inicial, sino que tal conocimiento se ubica al final del currículo de la escuela primaria, en la franja del pensamiento pre algebraico, donde aún no se instruye a los alumnos en la sintaxis algebraica, pero si se introducen las ideas algebraicas en dos versiones: pre simbólica (relacionada con la idea de variación proporcional) y simbólica (en tareas de encontrar y expresar una regla general en el lenguaje Logo). En la práctica, lo que proponen los autores es una secuencia de enseñanza en la que los alumnos resuelven problemas relacionados tanto con la variación proporcional como con la generalización, dando lugar a dos rutas de acceso al álgebra, una en donde se aprovecha la familiaridad de los alumnos con el contenido curricular de la primaria sobre razonamiento proporcional y conecta éste con la variación proporcional, la noción de relación funcional y el número general, y otra donde los procesos de generalización promueven la percepción, la expresión y la escritura de patrones gráficos, numéricos y figurativos. En suma, el tratamiento curricular que presenta Butto y Rojano (2010), plantea como meta que los estudiantes en edades iniciales, sean capaces de detectar similitudes, diferencias, repetición y otros aspectos de las regularidades, así como realizar operaciones aritméticas para generalizar, partiendo de casos particulares y viceversa.

4.2.2.4. Argumentos desde la idea de una propuesta puente o transitoria

Finalmente, otro de los argumentos que se evidencian en el artículo de Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006) corresponden con la idea de transición, desde la cual se comprende que de la aritmética al algebra existe cierto transito el cual justifica las diferentes determinaciones curriculares y su vez condiciona las formas como el docente afronta la enseñanza de la aritmética y el álgebra.

> Los enfoques de transición o "pre álgebra" intentan mejorar las tensiones impuestas por una separación rígida de aritmética y álgebra. Sin embargo, las "propuestas puente o transitorias" se basan en una visión empobrecida de las matemáticas elementales, empobrecidas en su postergación de la generalización matemática hasta el comienzo de la instrucción en álgebra. Los estudiantes evidencian dificultades para comprender el álgebra en su primer curso de álgebra. Pero hay razones para creer que sus dificultades están arraigadas en oportunidades perdidas y nociones originadas en su instrucción matemática temprana que luego deben "deshacerse", como la opinión de que el signo igual significa "rendimientos". (Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2006)

Por su parte, en el artículo de Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006), se refiere que una transición se basa en la creencia de un supuesto período en el que la aritmética termina mientras que el álgebra empieza, esa premisa es la que actualmente condiciona el escenario curricular y los modos de enseñar; los autores proponen que esos enfoques denominados como de transición o pre álgebra resultan ineficientes, en primer lugar porque su orientación no es la de apropiar de manera efectiva el conocimiento relacionado con el álgebra, y en segundo lugar porque dicha transición es una respuesta a ciertas tensiones que se han originado por la separación que los autores consideran como "rígida", de la aritmética y el álgebra.

Respecto a esa supuesta transición, el trabajo de Vergel y Rojas (2018) destaca que las dificultades con que se encuentran los estudiantes en el supuesto tránsito de la aritmética al álgebra, están relacionadas principalmente con el uso de las letras, más puntualmente con tres problemas que surgen en ese tránsito, la concatenación de símbolos, el uso de paréntesis y los usos del signo igual, estas barreras no proceden de un aparente transito histórico o etario entre el niño en etapa inicial y el joven en secundaria, sino más bien de ignorar ver a las matemáticas como una actividad semiótica. Para Vergel y Rojas (2018) no existe ese supuesto tránsito, sino una falta de enseñanza de la transformación de signos dentro de un sistema semiótico que se interioriza culturalmente en el interior del aula, en suma, porque al niño no se le brinda esa información suponiéndolo imposible de comprenderla.

5. Capítulo 5. Conclusiones

Finalizada la presente investigación que planteaba como meta general identificar los argumentos que favorecen la introducción del álgebra temprana desde una versión en español castellano de los artículos: Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education y The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking a partir de la técnica de traducción comentada, es posible presentar las diferentes conclusiones del trabajo, en coherencia con los objetivos específicos planteados previamente.

En cuanto a la descripción de los argumentos propuestos en los artículos para la introducción temprana del álgebra en los currículos de matemáticas, primeramente, se realizó la traducción al español los artículos: Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education y The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. Para ello se acudió al método de traducción literal para reconvertir los elementos lingüísticos del texto original en los dos documentos, traduciendo palabra por palabra, sintagma por sintagma o frase por frase, respetando la morfología, la sintaxis y/o la significación del texto original. Con ello se obtuvo una traducción literal de los dos artículos, que se dispone en el capítulo anexos del presente documento. Una vez realizada dicha traducción, se lograron extraer los principales argumentos de cada uno de los dos documentos para ser comentados.

Con lo anterior se identificaron argumentos que defienden la introducción temprana del álgebra en los estudiantes a partir de los dos artículos; se pudo deducir lo siguiente:

En los **argumentos históricos** se pudo notar un acercamiento en vista de que los dos documentos tanto el de Carraher, Schliemann, y Brizuela; como el de Radford coinciden en que en la actualidad va aumentando el número de educadores matemáticos e investigadores que consideran que el álgebra debería ser parte del currículo propio de la educación primaria, por consiguiente, hacen una revisión de la historia del álgebra para entender su naturaleza, y con ello analizar la producción de los estudiantes, con lo que la historia del álgebra ofrece argumentos para promover el estudio del álgebra desde edades tempranas.

En los **argumentos que citan a la institucionalidad**, Carraher, Schliemann, Brizuela; y Radford manifiestan que los docentes requieren estar preparados para procrear conveniencias para incluir el aspecto algebraico de la matemática elemental, aunque las diferentes proposiciones para introducir apariencias del pensamiento algebraico en primaria han conducido a que la definición de su naturaleza, en los primeros niveles educativos, aún no esté por completo clarificado. Sin embargo, estas introducciones facilitan inquisición para empezar con el proceso del pensamiento algebraico en los niños. Sin embargo, esta variación implica grandes pretensiones a los alumnos y a los maestros, pero vale la pena el empeño. Exclusivamente se sugiere que en el entorno escolar aún se necesita puntualizar en los estándares curriculares los modos de desarrollo del pensamiento algebraico y enlazar éstos con el progreso de contenidos en los esquemas de estudio y libros de texto, asimismo con la formación de maestros.

En cuanto a los **argumentos concernientes a los retos curriculares que se derivan de introducir el álgebra tempranamente**, por su parte Carraher, Schliemann, y Brizuela; y Radford, están de acuerdo que implantar el pensamiento algebraico en la escuela es una proposición moderna para la aprehensión y práctica de los temas ya históricos en la educación matemática, que intenta hacer categóricos su forma algebraica. Esto es permisible debido a que el álgebra reside tácitamente dentro del currículo de la matemática en primaria en dificultades de palabras. Sin embargo, hacer terminante el carácter algebraico de la matemática escolar en primaria, involucra una reconceptualización del álgebra para poder deducir su progreso en estos principales niveles educativos.

Por otro lado, en cuanto a los **argumentos en relación con la transición de la aritmética al álgebra**, estos mismos autores, siendo sensatos de que la independencia del álgebra y la aritmética acentúa y amplia los obstáculos de los alumnos, plantean y sugieren aplicar actividades que posibiliten la transición e incorporación de ambas, mediante un enfoque estructural que parta con el énfasis computacional predominante en los principales cursos escolares y que beneficien el avance de sistema de pensamiento algebraicos. La meta es fomentar el razonamiento algebraico junto con el aritmético; enfoque que encamina a una preparación de una aritmética más fascinada y fomente una educación con comprensión.

En relación con los **argumentos desde el aprendizaje y el desarrollo cognitivo de los jóvenes como posible limitación en el aprendizaje del álgebra**, por un lado Carraher, Schliemann, y Brizuela manifiestan que es preciso concretar un ambiente para una sector conceptual donde los alumnos pueden comenzar a razonar de manera algebraica, aun cuando no estén entablando al menos no en gran cantidad, con respecto a los signos alfanuméricos del álgebra, hay que comenzar a considerar que en estos símbolos o expresiones algebraicas, los cuales concretan maneras específicas de la acción del sujeto, y quizás no dejan mirar las formas en que han cambiado las fórmulas que se han manifestado a través de hechos, esto es, fórmulas corpóreas, y que se extienden en la dimensión y la época. Esta notable fachada didácticamente, es un pilar que promueve un reportaje importante en concordancia con la urgencia del pensamiento algebraico temprano; pero por su parte Radford, hace una invitación sobre la fatalidad perceptiva de los docentes frente a los planteamientos de tareas en el dinamismo matemático, de los procesos semióticos a los cuales congregan los estudiantes cuando se encuentran ideas matemáticas. Determina en sí, que las técnicas de objetivación, no son técnica homogéneos y que los recursos semióticos de objetivación disponen el objeto conceptual en estratos de generalidad. También sugiere razonar en prácticas de estimación diferentes a las antiguas en las que se ubica un panorama realista de la evaluación.

Para los **argumentos desde la idea de una propuesta puente o transitoria**, los aspectos en los cuales se detectan discordancias entre estos autores (Carraher, Shliemann y Brizuela) y (Radford) es en qué quehaceres y maneras de aprendizaje son algebraicas, qué tipo de convicción se requieren para estimar la existencia de pensamiento algebraico y qué perspectivas pedagógicos y modelos de formación de profesores deben fomentarse.

En los **argumentos intrínsecamente objetivos de la aritmética y el álgebra**, se resalta una discrepancia en esta categoría en vista que Radford comenta el trabajo de Carraher, Shliemann y Brizuela y argumenta que la idea de operar con lo desconocido ha sido refutada experimental e históricamente desde mucho tiempo atrás. También se opone a la idea de que las operaciones aritméticas conducen al significado algebraico y que el contacto temprano con el álgebra puede ayudar a construir significados dentro de la aritmética de los niños. Según Radford, adoptar la visión tradicional de que el álgebra se relaciona solamente con la aritmética reduce la visión del camino y estrecha las posibilidades de seguir con lo que es más importante: la inclusión de nuevos significados de la aritmética. Este autor argumenta que el álgebra es mucho más que una aritmética generalizada y que lo que conocemos pertenece a la geometría.

En los **argumentos empíricos**, Radford, Carraher et al. refutan la idea aleatoria del desarrollo, y esto crea un diagnóstico aludido al panorama antropológico según lo cual, la circunstancia y el proceso ideal son componentes inherentes del contexto, si éste se ve desde la colisión en el cual el proceso biológico emerge dialécticamente relacionado con algunas líneas culturales. Advierten que, desde el panorama de la historia de las matemáticas, efectuar con lo desconocido en un instante de la historia no se asemeja a operar con lo desconocido en una fase distinta, y discuten la percepción de que los conceptos matemáticos están constituidos por condiciones culturales de conocimiento.

Para los **argumentos correspondientes a la introducción del álgebra desde la educación primaria**. En sus estudios, Carraher, Schliemann y Brizuela comentan que se ha retrasado la introducción escolar al álgebra por concepciones equivocas con respecto a la naturaleza de la de la aritmética, del álgebra y de la inteligencia de los niños para concertar con ella. Afirma que la aritmética es algebraica, porque proporciona elementos para construir y expresar generalizaciones. Los autores ratifican que los niños logran pensar sobre las variables contenidas en los enigmas. Aclaran y examinan las presunciones, por parte de los pedagogos matemáticos, de que la aritmética debe emanar al álgebra porque la principal tiene que ver con las operaciones que implican números particulares y la segunda tiene que ver con números generalizados, variables y funciones.

Para concluir, pese a que este trabajo da muchos aportes sustanciales frente a la importancia del álgebra, en este párrafo se pretende hacer una breve reflexión del por qué es de vital importancia la introducción temprana de la misma. Como muchos autores aquí lo han mencionado, al introducir el álgebra en grados de la básica primaria, le permitirá al estudiante no solo significar funciones y la capacidad de inferir escenarios con la ayuda de símbolos, sino que además el estudio de los patrones numéricos y geométricos; pero se sabe que los docentes pueden afrontar una gran variedad de componentes y dificultades que problematizan y transforman continuamente dicho proceso, por ello es importante que el docente que aborde la enseñanza del álgebra en la educación primaria conozca las particularidades del razonamiento algebraico y sea capaz de distinguir y construir quehaceres matemáticos apropiados que permitan el paulatino preámbulo del razonamiento algebraico en el colegio; ya que está visto que algunas características del razonamiento algebraico no son sencillas de adquirir para muchos estudiantes.

En suma, la presente traducción comentada demuestra que la aspiración de fundamentar e implementar el álgebra temprana dentro los currículos de matemáticas en educación primaria no es solo viable sino necesaria, además de ser ampliamente demostrada en ejercicios de aula que se integran en diferentes investigaciones citadas como antecedentes tanto por Carraher, Schliemann, y Brizuela (2006), como por Radford (2013) en sus trabajos.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agudelo, C. (2005). Explicaciones de ciertas actitudes hacia el cambio: las concepciones de profesores y profesoras de matemáticas colombianos(as) sobre los factores determinantes de su práctica de enseñanza del álgebra escolar. *Revista Ema*, *10*(3), 375 – 412.

Butto , C., & Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Revista Educación Matemática*, *16*(1), 113-148.

Butto, C., & Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Revista Educación Matemática*, *22*(3), 55-86.

Caballero, et al. (2007). *Las actitudes y emociones ante las Matemáticas de los estudiantes para maestros de la facultad de Educación de la Universidad de Extremadura.* Badajoz: Universidad de Extremadura.

Cai, J., & Knuth, E. (2011). *Early algebraization.* New York: Editorial Springer.

Callejo; et al. (2016). Pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Revista AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*(10), 5-25.

Campos, N., & Ortega, E. (2005). *Panorama de linguística y traductología.* Granada: Ediciones de la Universidad de Castilla-La Mancha.

Cañadas; et al. (2019). Special issue on early algebraic thinking. *Infancia y Aprendizaje / Journal for the Study of Education and Development, 42*(3), 469-478.

Carraher, D., Schliemann, A., & Brizuela, B. (2006). Arithmetic and Algebra in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Carraher; et al. (2001). *Can young students operate on unknowns? In M. v.d. Heuvel-Panhuizen (Ed.).* The Netherlands: Utretch University.

Duarte, P. (2018). *Traducción comentada del artículo de investigación Nicotine Increases Codeine Analgesia Through the Induction of Brain CYP2D and Central Activation of Codeine to Morphine.* Valparaiso: Pontificia Universidad Catolica de Valparaido.

El Tiempo. (3 de Octubre de 2017). *Colombia, rezagada en ingles por falta de profesores.* Obtenido de https://www.eltiempo.com/vida/educacion/nivel-de-conocimiento-de-ingles-en-colombia-y-america-latina-137536

Espi, R. (2015). *Encargo de traducción: consideraciones ético profesionales y fidelidad en la traducción.* Mexico: Facultad de Lenguas Extranjeras de la Universidad de La Habana.

Farias, D., & Perez, J. (2010). Motivación en la enseñanza de las matemáticas y la administración. *Formación Universitaria, 3*(6), 33-40.

Garcia, R. (2016). Interés y motivación de los alumnos hacia las matemáticas: Autopercepcion de los más capaces. *Revista Internacional de Ciencia, Matemática y Tecnologia, 3*(1), 13-21.

Gómez, A. (2014). Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica: Cincuenta años de reformas en el currículo colombiano de Matemática en los niveles básico y medio de educación. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* (38), 155 - 176.

González, R. (2005). Un modelo explicativo del interés hacia las matemáticas de las y los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática, 17*(1), 107-128.

Hurtado, A. (1996). La cuestion del método traductor. Método, estrategia y técnica de traducción. *Sendebar*, 39-57.

Hurtado, A. (2001). *Traducción y traductología: Introduccion a la traductología.* Madrid: Catedra.

Jakobson, R. (1960). Closing Statement: Linguistics and Poetics. En T. Sebeok, *Style in Language* (págs. 350-377). Cambridge: MIT Press.

MacGregor, M. (2004). *Goals and Content of an Algebra Curriculum for the Compulsory Years of Schooling. En Kaye Stacey, Helen Chick & Margaret Kendal (Eds.).* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Murcia, E. (2015). Educación matemática en Colombia, una perspectiva evolucionaria. *Revista Entre Ciencia e Ingeniería, 9*(18), 23-30.

Radford, L. (2013). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Group of Australasia*(26), 257-277.

Rivera , E., & Sánchez, L. (2012). *Desarrollo del pensamiento variacional en la educación básica primaria: generalización de patrones numéricos.* Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Rivera , F., & Rossi, J. (2011). *Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students.* Berlín: Springer-Verlag.

Serres, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Revista Universitaria de InvestigaciónSapiens, 12*(1), 122-142.

Socas; et al. (1996). *Iniciación al Álgebra.* Madrid: Editorial Síntesis.

Vasco , C. (2010). *El pensamiento variacional y la modelación matemática.* Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años).* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vergel, R. (2015). Generalizacion de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *9*(3), 193-215.

Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de.

Vergel, R., & Rojas, P. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Zapatera, A. (2018). *Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria.* Revista de Didactica de las Matemáticas, 97, 51-67.

7. ANEXOS

7.1. Traducción artículo 1: Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA TEMPRANA

Autor (es): David W. Carraher, Analúcia D. Schliemann, Bárbara M. Brizuela y Darrell Earnest Fuente: Revista de Investigación en Educación Matemática, Vol. 37, No. 2 (marzo de 2006), págs. 87-115 Publicado por:Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas URL estable:http://www.jstor.org/stable/30034843

Resumen:

Tradicionalmente, la enseñanza del álgebra se ha pospuesto hasta la adolescencia debido a razones históricas (el álgebra surgió hace relativamente poco tiempo), suposiciones sobre el desarrollo psicológico ("restricciones del desarrollo" y "preparación para el desarrollo") y datos que documentan las dificultades que los adolescentes tienen con el álgebra. Aquí proporcionamos evidencia de que los estudiantes jóvenes, de 9 a 10 años de edad, pueden hacer uso de ideas y representaciones algebraicas típicamente ausentes del plan de estudios de matemáticas tempranas y que se cree que están fuera del alcance de los estudiantes. Los datos provienen de un estudio de aula longitudinal de 30 meses de cuatro aulas en una escuela pública en Massachusetts, con estudiantes entre los grados 2-4. Los datos ayudan a aclarar las condiciones bajo las cuales los jóvenes estudiantes pueden integrar conceptos y representaciones algebraicas en sus pensamientos. Se espera que los presentes hallazgos, junto con los que surjan de otros grupos de investigación,

proporcionen una base de investigación para integrar el álgebra en la educación matemática temprana.

Palabras clave: Álgebra; Estrategias infantiles; preparación para el desarrollo; Álgebra temprana; funciones; Matemáticas K-12

INTRODUCCIÓN

Un número cada vez mayor de educadores de matemáticas, formuladores de políticas e investigadores creen que el álgebra debería convertirse en parte del plan de estudios de la educación primaria. El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas [NCTM] (2000) y una comisión especial de la Corporación RAND (2003) han acogido con satisfacción la integración del álgebra en los primeros planes de estudio de matemáticas. Estos avales no disminuyen la necesidad de investigación; al contrario, destacan la necesidad de una base de investigación sólida para orientar a la comunidad de educación matemática en esta nueva aventura. Este artículo presentará hallazgos parciales de una investigación del razonamiento algebraico de estudiantes de ocho a diez años durante un estudio de intervención en el aula de dos años y medio.

Nosotros emprendimos esta investigación con la esperanza de encontrar pruebas de que los jóvenes estudiantes pueden aprender conceptos matemáticos y representaciones que a menudo se cree que están fuera de su alcance.

Nuestro enfoque del álgebra inicial se ha guiado por la opinión de que la generalización se encuentra en el corazón del razonamiento algebraico, las operaciones aritméticas pueden verse como funciones y la notación algebraica puede apoyar el razonamiento matemático incluso entre estudiantes jóvenes. Nos centramos en el álgebra como una aritmética generalizada de números y cantidades en la que el concepto de función asume un papel principal (Carraher, Schliemann y Schwartz, en prensa). Vemos la introducción del álgebra en la escuela primaria como un movimiento de números y medidas particulares hacia relaciones entre conjuntos de números y medidas, especialmente relaciones funcionales.

Las funciones han recibido merecidamente un énfasis creciente en la teorización, la investigación y los planes de estudio de la escuela media y secundaria (p. Ej., Dubinsky y Harel, 1992; Schwartz y Yerushalmy, 1992; Yerushalmy y Schwartz, 1993). Proponemos que otorgar a las funciones un papel importante en el plan de estudios de matemáticas elementales ayudará a facilitar la integración del álgebra en el plan de estudios existente. La clave de nuestra propuesta es la noción de que las operaciones de suma, resta, multiplicación y división pueden tratarse desde el principio como funciones. Esto es consistente con la opinión de Quine (1987) de que "una función es un operador u operación" (p. 72).

La idea no es simplemente atribuir un significado algebraico a las actividades matemáticas tempranas existentes, es decir, considerarlas como ya algebraicas. El contenido existente debe transformarse sutilmente para resaltar su carácter algebraico. Hasta cierto punto, esta transformación requiere simbolismo algebraico. Incluso en los primeros grados, la notación algebraica puede desempeñar un papel de apoyo en el aprendizaje de las matemáticas. La notación simbólica, las líneas numéricas, las tablas de funciones y los gráficos son herramientas poderosas que los estudiantes pueden usar para comprender y expresar las relaciones funcionales en una amplia variedad de contextos de problemas.

En este artículo, nos centraremos en el trabajo de los estudiantes de tercer grado con líneas numéricas y expresiones algebraicas mientras resuelven problemas en el dominio de estructuras aditivas. Proporcionamos evidencia de que los estudiantes jóvenes pueden hacer uso de ideas y representaciones algebraicas que normalmente se omiten en el plan de estudios de matemáticas inicial y se cree que están fuera de su alcance. Debido a que creemos que las funciones ofrecen una excelente oportunidad para integrar el álgebra en el contenido curricular existente, también intentamos aclarar lo que entendemos por tratar a los operadores como funciones.

Antes de presentar los resultados de nuestro estudio de intervención, revisaremos las ideas matemáticas y psicológicas seleccionadas relevantes para la sugerencia de que el álgebra tiene un papel importante en el plan de estudios actual de las matemáticas tempranas.

ÁLGEBRA TEMPRANA DESDE PERSPECTIVAS MATEMÁTICAS Y COGNITIVAS

Las discusiones sobre álgebra temprana tienden a enfocarse en la naturaleza de las matemáticas y el aprendizaje y desarrollo cognitivo de los estudiantes. Revisaremos las cuestiones de fondo a lo largo de estas dos líneas.

Sobre la naturaleza de las matemáticas: ¿Son dominios distintos la aritmética y el álgebra?

El hecho de que el álgebra haya surgido históricamente después, y como una generalización de la aritmética, sugiere a muchas personas que el álgebra debe seguir a la aritmética en el plan de estudios. Por muy obvia que pueda parecer esta afirmación, creemos que existen buenas razones para pensar lo contrario. Suponga por el momento que la aritmética y el álgebra son temas distintos. Por ejemplo, supongamos que la aritmética se ocupa de operaciones que involucran números particulares, mientras que el álgebra se ocupa de números, variables y funciones generalizados. Esta distinción permite un ordenamiento ordenado de los temas en el curriculum. En la escuela primaria, los maestros pueden enfocarse en operaciones numéricas, fluidez computacional y problemas de palabras que involucran valores particulares. Sólo más tarde se utilizan letras para representar cualquier número o conjuntos de números. No es sorprendente que una demarcación tan marcada lleve a una tensión considerable a lo largo de la frontera de la aritmética y el álgebra.

Es precisamente por esta razón que muchos educadores matemáticos (p. Ej., Filloy y Rojano, 1989; Herscovics y Kieran, 1980; Kieran 1985; Rojano, 1996; Sutherland y Rojano, 1993) han llamado tanto la atención sobre la supuesta transición entre aritmética y álgebra: una transición que se cree que ocurre durante un período en el que la aritmética está "terminando" y el álgebra está "comenzando". Los enfoques de transición o "preálgebra" intentan mejorar las tensiones impuestas por una separación rígida de aritmética y álgebra. Sin embargo, las "propuestas puente o transitorias" se basan en una visión empobrecida de las matemáticas elementales, empobrecidas en su postergación de la generalización matemática hasta el comienzo de la instrucción en álgebra. Los estudiantes evidencian dificultades para comprender el álgebra en su primer curso de álgebra. Pero hay razones para creer que sus dificultades están arraigadas en oportunidades perdidas y nociones originadas en su instrucción matemática temprana que luego deben "deshacerse", como la opinión de que el signo igual significa "rendimientos" (p. Ej., Kieran, 1981).

Considere, por ejemplo, la oportunidad de introducir el concepto de función en el contexto de la suma. La expresión "+3" puede representar no solo una operación para actuar sobre un número particular, sino también una relación entre un conjunto de valores de entrada y un conjunto de valores de salida. Se puede representar la operación de sumar mediante la notación de función estándar, como flx) = x + 3, o la notación de mapeo, como x + x + 3. Sumar 3 equivale a x + 3, una función de x. En consecuencia, los objetos de la aritmética se pueden considerar tanto particulares (si n = 5, entonces n + 3 = 5 + 3 = 8) como generales (n + 3 representa un mapeo de Z sobre Z). Si se destaca su naturaleza general, las historias de palabras no tienen por qué ser simplemente sobre trabajar con cantidades particulares, sino con conjuntos de valores posibles y, por lo tanto, sobre variación y covariación.

Estamos sugiriendo que la aritmética tiene un carácter inherentemente algebraico en el sentido de que se refiere a casos y estructuras generales que pueden capturarse sucintamente en notación algebraica. Podríamos argumentar que el significado algebraico de las operaciones aritméticas no es una "guinda del pastel" opcional, sino más bien un ingrediente esencial. En este sentido, creemos que los conceptos algebraicos y la notación deben considerarse parte integral de las matemáticas elementales.

No somos los primeros en sugerir que el álgebra se considere una parte integral del plan de estudios de matemáticas tempranas. Davis (1985, 1989) argumentó que el álgebra debería comenzar en el grado 2 o 3. Vergnaud (1988) propuso que la instrucción en álgebra o preálgebra comience en el nivel de la escuela primaria para preparar mejor a los estudiantes para lidiar con los problemas epistemológicos involucrados en la transición de la aritmética al álgebra; Su teorización sobre los campos conceptuales proporcionó el fundamento para una educación matemática en la que los conceptos se tratan como íntimamente entrelazados en lugar de separados. Schoenfeld (1995), en el informe final del Álgebra Initiative Colloquium Working Groups (LaCampagne, 1995), propone que, en lugar de aparecer en cursos aislados en la escuela media o secundaria, el álgebra debería impregnar el currículo. Mason (1996) ha defendido enérgicamente un enfoque en la generalización en el nivel de la escuela primaria. Lins y Giménez (1997) señalaron que los planes de estudio actuales de matemáticas de K-12 proporcionan una visión limitada de la aritmética. Kaput (1998) propuso el razonamiento algebraico en todos los grados como una hebra integradora en todo el plan de estudios y la clave para agregar coherencia, profundidad y poder a las matemáticas escolares, eliminando los cursos de álgebra tardíos, abruptos, aislados y superficiales de la escuela secundaria. Booth (1988), Brown y Coles (2001), Crawford (2001), Henry (2001) y Warren (2001) han desarrollado argumentos similares. De acuerdo con las convocatorias de investigadores y educadores, el NCTM, a través del Grupo de trabajo de álgebra (NCTM, 1997) y los Estándares de NCTM (2000), proponen que las actividades que potencialmente nutrirán a los niños.

Pero, ¿los estudiantes jóvenes tienen la capacidad de aprender conceptos algebraicos? Veamos lo que nos dicen las investigaciones sobre el aprendizaje y el desarrollo cognitivo en relación con el aprendizaje del álgebra. Esta breve revisión sentará las bases para la presentación y el análisis de nuestros propios datos.

Sobre la naturaleza del aprendizaje y el desarrollo cognitivo de los estudiantes: Afirmaciones sobre las limitaciones del desarrollo

Cuando los estudiantes experimentan dificultades pronunciadas en el aprendizaje de álgebra (ver, por ejemplo, Booth, 1984; Da Rocha Falcäo, 1993; Filloy & Rojano, 1989; Kieran, 1981, 1989; Kuchemann, 1981; Resnick, Cauzinille-Marmeche y Mathieu, 1987; Sfard y Linchevsky, 1994; Steinberg, Sleeman y Ktorza, 1990; Vergnaud, 1985; Vergnaud, Cortes y Favre-Artigue, 1988; y Wagner, 1981), uno naturalmente se pregunta si esto se debe a limitaciones del desarrollo o si los estudiantes simplemente no han logrado la preparación necesaria. (Las limitaciones del desarrollo son impedimentos para el aprendizaje que supuestamente están vinculados a estructuras mentales, esquemas y mecanismos generales de procesamiento de información insuficientemente desarrollados. Se denominan "evolutivos".

Las restricciones del desarrollo se refieren a presuntas restricciones en la competencia cognitiva actual de los estudiantes (es decir, "Hasta que los estudiantes hayan alcanzado un cierto nivel de desarrollo, presumiblemente no pueden entender ciertas cosas ni podrán hacerlo en un futuro cercano"), no simplemente su desempeño (es decir, no utilizaron la propiedad erty). Están asociados con las expresiones "(desarrollo) preparación" y "adecuación." Álgebra a veces se ha pensado que es "inapropiado para el desarrollo" para los estudiantes jóvenes, mintiendo mucho más allá de sus capacidades actuales. Las atribuciones de las limitaciones del desarrollo han sido hechas por Collis (1975), Filloy y Rojano (1989), Herscovics y Linchevski (1994), Kuchemann (1981) y MacGregor (2001), entre otros, han atribuido las limitaciones del desarrollo. Filloy y Rojano (1989) propusieron que el pensamiento aritmético evoluciona muy lentamente desde procesos concretos hacia un pensamiento algebraico más abstracto y que existe un "punto de corte que separa un tipo de pensamiento del otro" (p. 19). Se refieren a este corte como "una ruptura en el desarrollo de operaciones sobre lo desconocido" (p. 19). En la misma línea, Herscovics y Linchevski (1994) propusieron la existencia de una brecha cognitiva entre la aritmética y el álgebra, caracterizada como "la incapacidad de los estudiantes para operar espontáneamente con o sobre lo desconocido" (p. 59).

Aunque reconocieron que los niños pequeños resuelven rutinariamente problemas que contienen incógnitas (por ejemplo, “5 + ? = 8"), argumentaron que los estudiantes resuelven tales problemas sin tener que representar y operar sobre las incógnitas; en su lugar, simplemente usan procedimientos de conteo o la operación inversa para producir un resultado. Aunque algunos (p. Ej., Sfard y Linchevski, 1994) han considerado el uso de la operación inversa como evidencia del pensamiento algebraico temprano, otros han considerado este procedimiento como meramente prealgebraico (p. Ej., Boulton- Lewis et al., 1997).

Apoyo histórico a la idea de las limitaciones del desarrollo

Los paralelos entre los desarrollos históricos y las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes han proporcionado cierto apoyo a la noción de que las dificultades de los estudiantes con el álgebra reflejan las limitaciones del desarrollo. Por ejemplo, los investigadores han utilizado el perspicaz análisis de Harper (1987) de la evolución histórica del álgebra, a través de etapas retóricas, sincopadas y simbólicas, para enmarcar la evolución de la competencia algebraica de los estudiantes. Sfard (1995) y Sfard y Linchevski (1994) han encontrado conexiones entre los desarrollos históricos e individuales de las matemáticas en su teoría de la reificación, que intenta aclarar los procesos psicológicos subyacentes al desarrollo de la comprensión matemática, incluido el álgebra. Asimismo, Filloy y Rojano (1989) proporcionaron evidencia histórica para su idea de un "punto de corte"

Reexaminar los supuestos sobre las capacidades de los estudiantes jóvenes

Frente al análisis histórico y la evidencia empírica, sería fácil concluir que los estudiantes enfrentan un viaje largo y difícil hacia el álgebra. Sin embargo, la historia puede ser engañosa. Los números negativos fueron objeto de un acalorado debate entre los matemáticos profesionales hace menos de 2 siglos, sin embargo, son una tarifa estándar en los planes de estudio diseñados para los estudiantes preadolescentes y adolescentes de hoy. Esto no niega que los números negativos sean un desafío para muchos estudiantes. De hecho, muchos de los obstáculos a los que se enfrentan los estudiantes pueden ser similares a los que enfrentaron los matemáticos anteriores. Sin embargo, cuando se han obtenido nuevos conocimientos matemáticos y científicos sistematizado y trabajado en el corpus del conocimiento existente, puede llegar a ser sorprendentemente accesible.

Los desarrollos históricos de las matemáticas son importantes para comprender los dilemas y las dificultades que pueden encontrar los estudiantes. Pero decidir si ciertas ideas y métodos del álgebra están al alcance de los estudiantes jóvenes requiere estudios empíricos con estudiantes jóvenes que han tenido acceso a actividades y desafíos que involucran el razonamiento algebraico y la representación algebraica. Como ha sugerido Booth (1988), las dificultades de los estudiantes con el álgebra pueden deberse a las formas limitadas en que se les enseñó sobre aritmética y matemáticas elementales.

Los estudios en el aula realizados por el equipo de Davydov (ver Bodanskii, 1969/1991; Davydov, 1969/1991) muestran que los niños rusos que recibieron instrucción en representación algebraica de problemas verbales de los grados 1 a 4 se desempeñaron mejor que sus compañeros de control durante los años escolares posteriores y mostraron mejores resultados en la resolución de problemas algebraicos en comparación con los estudiantes de sexto y séptimo grado en programas tradicionales de 5 años de aritmética seguidos de instrucción de álgebra desde el grado 6. Otros resultados prometedores sobre el trabajo en ecuaciones provienen de estudios de entrevistas en Brasil. Brito Lima y da Rocha Falcäo (1997) encontraron que los niños brasileños de primero a sexto grado pueden desarrollar representaciones escritas para problemas algebraicos y, con la ayuda del entrevistador, resolver problemas de ecuaciones lineales usando diferentes estrategias de solución. Lins Lessa (1995) encontró que después de una sola sesión de instrucción, los estudiantes de quinto grado (de 11 a 12 años) podían resolver problemas verbales o situaciones presentadas en una escala de equilibrio que correspondía a ecuaciones, como $x + y + 70 = 2x + y + 20$ o $2x + 2y + 50 = 4x + 2y + 10$. También mostró que las soluciones de los niños en una prueba posterior se basaron en el desarrollo de ecuaciones escritas y, en más del 60% de los casos, las soluciones se basaron en el uso de reglas algebraicas sintácticas para resolver ecuaciones. En nuestro propio trabajo, hemos descubierto que incluso los niños de 7 años pueden manejar la lógica básica que subyace a las transformaciones aditivas en las ecuaciones (Schliemann, Carraher y Brizuela, en prensa; Schliemann, Carraher, Brizuela y Jones, 1998).

La evidencia de que los niños de la escuela primaria en las aulas estadounidenses pueden razonar algebraicamente se ha ido acumulando a lo largo de los años como resultado de la reforma en la educación matemática que llevó a la introducción de discusiones sobre la generalización de patrones numéricos en la escuela primaria. Carpenter y Franke (2001) y Carpenter y Levi (2000) demostraron que los niños bastante pequeños que participaron en actividades en el aula que exploran las relaciones matemáticas pueden comprender, por ejemplo, que "$a + b - b = a$" para cualquier número a y b. Schifter (1999) describió ejemplos convincentes de razonamiento algebraico implícito y generalizaciones de niños de escuela primaria en aulas donde el razonamiento sobre relaciones matemáticas es el centro de la instrucción. Blanton y Kaput (2000) mostraron que los alumnos de tercer grado hacían generalizaciones sólidas mientras discutían las operaciones en números pares e impares y los consideraban como marcadores de posición o como variables.

Otro conjunto de estudios examinó las generalizaciones de los niños pequeños y su comprensión de las variables y funciones. Davis (1971-1972) y sus colegas del Proyecto Madison desarrollaron una serie de actividades en el aula que podrían utilizarse e introducir, entre otras cosas, conceptos y notación para variables, coordenadas cartesianas y funciones en la escuela primaria y secundaria. Estas tareas se pusieron a prueba con éxito en los grados 5 a 9 y, como enfatizó Davis, muchas de las actividades son apropiadas para los niños a partir del grado 2 en adelante. En un estudio previo de intervención en el aula, encontramos que, dados los desafíos adecuados, los estudiantes de tercer grado pueden participar en el razonamiento algebraico y trabajar con tablas de funciones, utilizando la notación algebraica para representar relaciones funcionales (Brizuela, 2004; Brizuela & Lara-Roth, 2001; Brizuela, Carraher y Schliemann, 2000; Carraher, Brizuela y Schliemann, 2000; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; Schliemann, Carraher y Brizuela, 2001, en prensa; Schliemann, Goodrow y Lara-Roth, 2001) . Se ha encontrado evidencia de razonamiento algebraico incluso entre estudiantes de primer y segundo grado que participaron en actividades de álgebra temprana inspiradas en el trabajo de Davydov (1975/1991) (Dougherty, 2003; Smith, 2000). Más recientemente, encontramos (Brizuela & Schliemann, 2004) que los estudiantes de cuarto grado (de 9 a 10 años) que participaron en nuestras actividades de Álgebra Temprana pueden usar la notación algebraica para resolver problemas de naturaleza algebraica.

Por qué todavía se necesita investigación en álgebra temprana

Puede parecer que los principales problemas de la educación temprana en álgebra se resolvieron cuando el equipo de investigadores de Davydov mostró éxito en la introducción del álgebra a los estudiantes jóvenes (Davydov, 1969/1991). Consideramos que su trabajo es innovador, pero lo vemos como una apertura en lugar de un cierre del campo del álgebra temprana. Destacó muchos de los medios por los cuales los conceptos algebraicos podrían hacerse accesibles y significativos para los niños pequeños, pero aún queda mucho por hacer. Aunque el trabajo soviético ofrece una mirada directa al álgebra temprana desde la perspectiva de los profesores, es de vital importancia comprender cómo los estudiantes dan sentido a los problemas. ¿Cuáles son sus preguntas? ¿Qué tipo de conflictos y múltiples interpretaciones generan? ¿Cómo evolucionan eventualmente sus dibujos inicialmente icónicos en diagramas esquemáticos y notación? ¿Qué tipo de comprensión intermedia producen los niños?

Además, el equipo de Davydov ha tendido a minimizar el potencial de la aritmética como base para el conocimiento algebraico. A veces, incluso argumentan que la aritmética se introduzca en el plan de estudios después del álgebra. Los autores defienden bien el uso de cantidades no medidas para animar a los estudiantes a reflexionar sobre las relaciones cuantitativas y dificultarles eludir dicha reflexión recurriendo directamente a los cálculos. Sin embargo, es difícil concebir que los niños desarrollen fuertes intuiciones sobre las líneas numéricas, por ejemplo, sin haber utilizado métricas y sin tener un conocimiento rudimentario de los hechos de suma y resta.

Finalmente, necesitamos tener una mejor comprensión de cómo se pueden introducir funciones en contextos aritméticos. Como señalamos en otra parte (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000), uno de los secretos mejor guardados de la educación matemática temprana es que la suma es una función, o al menos puede verse como una función. Por supuesto, uno puede recorrer un largo camino sin considerar la adición como una función, y esto es lo que hace el currículo tradicional. Las tablas de números pueden considerarse tablas de funciones (Schliemann, Carraher y Brizuela, 2001).

Pero como los niños pueden llenar tablas correctamente sin hacer explícita la dependencia funcional de la variable dependiente de la (s) variable (s) independiente (s), pueden ser simplemente patrones de extensión. Es necesario que haya un paso adicional para hacer explícita la dependencia funcional subyacente a tales patrones. Esto exige que los estudiantes hagan generalizaciones en lenguaje, notación algebraica u otras representaciones como gráficos y diagramas.

Intentamos abordar los problemas anteriores en un estudio longitudinal de 30 meses con niños de entre 8 y 10 años (desde la mitad del segundo hasta el final del cuarto grado). Desarrollamos y examinamos los resultados de una serie de actividades destinadas a resaltar el carácter algebraico de la aritmética (ver Brizuela & Schliemann, 2004; Carraher, Brizuela y Earnest, 2001; Carraher, Schliemann y Schwartz, en prensa; Schliemann & Carraher , 2002; Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, et al., 2003; Schliemann, Goodrow, et al., 2001). En este artículo, describimos los resultados de dos de las lecciones que implementamos en tercer grado. Nuestro objetivo es ejemplificar cómo se puede alentar a los niños pequeños, a medida que aprenden a sumar y restar, a integrar conceptos y representaciones algebraicas en su pensamiento.

Los estudiantes a menudo son introducidos al álgebra a través de ecuaciones de primer orden de la forma ax + b = cx + d (o una variante como ax + b = d). Desafortunadamente, esto introduce demasiados problemas nuevos a la vez y alienta a los estudiantes a ver las variables como si tuvieran un valor único. Estos problemas se pueden evitar en gran medida dando a los estudiantes la oportunidad de trabajar extensamente con funciones antes de encontrar ecuaciones. En nuestro enfoque, primero encuentran funciones de "compensación aditiva", una subclase de funciones lineales de la forma x + b. Debido a que la constante de proporcionalidad es 1, los problemas de crecimiento proporcional se suprimen temporalmente para resaltar el aspecto constante aditivo de las funciones lineales. Esto tiene ciertas ventajas distintas. Las intuiciones iniciales de los niños sobre el orden, el cambio y la igualdad surgen primero en situaciones aditivas. Y, como mostraremos, a medida que los niños trabajan con la recta numérica y con una recta numérica variable, pueden llegar a tratar eficazmente las variables y la covariación funcional para abordar problemas que involucran relaciones aditivas. Además, las ecuaciones de primer orden se pueden introducir finalmente como una condición especial en la que dos funciones se han restringido para ser iguales.

EL ESTUDIO DEL AULA

Niños pequeños que hacen "aritmética algebraificada"

Los datos actuales provienen de un estudio longitudinal con 69 estudiantes, en cuatro aulas, a medida que aprendieron sobre las relaciones algebraicas y la notación, desde el grado 2 al 4. Los estudiantes provenían de una comunidad multiétnica (75% latinos) en el área del Gran Boston. Desde el comienzo de su segundo semestre en segundo grado hasta el final de su cuarto grado, implementamos y analizamos actividades semanales en sus aulas. Cada semestre, los estudiantes participaron en seis a ocho actividades, cada actividad con una duración de aproximadamente 90 minutos. Trabajaron con variables, funciones, notación algebraica, tablas de funciones, gráficas y ecuaciones. Las actividades algebraicas relacionadas con la suma, resta, multiplicación, división, fracciones, razón, proporción y números negativos.

Todas las actividades fueron grabadas en video. Aquí proporcionamos una descripción general de las lecciones empleadas durante el tercer grado. Nuestra secuencia de actividades no constituye un plan de estudios de álgebra temprana completamente desarrollado y se incluye principalmente para proporcionar un contexto para el análisis posterior. Durante el primer trimestre de su tercer grado, cuando los niños tenían ocho y nueve años, realizamos ocho reuniones semanales de 90 minutos en cada una de las cuatro clases, trabajando con problemas de estructura aditiva y representaciones. Primero proporcionaremos una descripción amplia de cómo los estudiantes fueron introducidos a las líneas numéricas de la Lección 3 a la Lección 6. Luego describiremos con más detalle las actividades que desarrollamos en la Lección 7 y la Lección 8 en una de las aulas. Los instructores, David y Bårbara, son coautores del presente artículo. Por lo general, las lecciones no comenzaron con una representación matemática pulida o con un problema que respaldaba simplemente una respuesta correcta. En cambio, a los niños se les presentó un problema abierto que involucraba cantidades indeterminadas. Después de mantener una discusión inicial sobre la situación, les pedimos a los estudiantes que expresaran sus ideas por escrito. Luego discutimos sus representaciones e introdujimos representaciones convencionales; las convenciones que decidimos introducir tenían conexiones tanto con el problema con el que estábamos trabajando como con las propias representaciones de los estudiantes.

Presentamos las rectas numéricas

Para cuando nuestros estudiantes llegaron a las Lecciones 7 y 8 en el semestre de otoño, ya habían pasado varias horas trabajando con líneas numéricas.

Lección 3

Su primer encuentro tuvo lugar en la Lección 3 cuando ensartamos un cordel a través de la habitación al que se adjuntaban números grandes y fáciles de leer a intervalos regulares; esta recta numérica física ofreció su primer vistazo a los números negativos (variaba de —10 a +20 en aproximadamente 10 metros). También nos permitió llevar a cabo discusiones sobre cómo los cambios en las cantidades medidas y contadas (edad, distancia, dinero, caramelos y temperatura), así como números puros mapeados en representaciones de líneas numéricas. Para tales actividades, los niños representaron diversos valores ubicándose en varias posiciones a lo largo de la recta numérica física. Aprendieron, con un placer que a menudo rozaba el júbilo, a interpretar los desplazamientos en la línea del cordón numérico en términos de su envejecimiento, calentarse o enfriarse, ganar y gastar dinero.

En una clase, David planteó varias preguntas sobre la recta numérica ("¿Cuántos números hay en la recta? ¿Los números solo comienzan en —10 y continúan hasta +20 o hay más? ¿Hasta dónde puede llegar la recta numérica?".). Al principio, los estudiantes sugirieron que los únicos números en la línea eran aquellos para los que había etiquetas impresas (—10 a +20). David preguntó si esos eran todos los números que existían. Un estudiante sugirió que había "50 números" y agregó "Solo se puede llegar hasta la pared". David sugirió que los estudiantes ignoraran la pared; lo importante era asegurarse de que todos los números estuvieran incluidos. A partir de ese momento, los estudiantes comenzaron a sugerir ubicaciones a las que se extendería la recta numérica: a través del patio de recreo, a otras regiones del país y, finalmente, al espacio exterior mismo. Cada vez que los estudiantes mencionaban una nueva ubicación, David preguntaba si ahora se tenían en cuenta todos los números. Finalmente, varios estudiantes sugirieron que la recta numérica iba "al infinito" y explicaron que "seguía y seguía".

Lección 4

Una semana después, David pidió a los estudiantes que explicaran cuál era la recta numérica que habían estado discutiendo. En un salón de clases, un niño mencionó tener que comportarse "como fantasmas" al usar la recta numérica, porque uno atravesaba paredes para alcanzar los números deseados. Otro niño se refirió a la recta numérica como "una máquina del tiempo": le permitía avanzar y retroceder en el tiempo cuando trataba los números como si se refirieran a su edad. Un estudiante objetó, argumentando que la gente no puede retroceder en el tiempo, a lo que otro respondió: "Puedes hacerlo en tu imaginación". En una lección posterior, pasamos de la recta numérica hecha de hilo a diagramas en papel y los proyectamos en una pantalla desde un retroproyector. Introdujimos flechas que vinculaban puntos en la recta numérica para representar cambios en los valores. Cuando se conectaron varias flechas en la recta numérica, los estudiantes aprendieron que podían simplificar la información mediante atajos que iban desde la cola de la primera flecha hasta la punta de la última flecha. También aprendieron a expresar tales atajos o simplificaciones a través de la notación: por ejemplo, "+7 - 10" podría representarse como "—3", ya que cada expresión tenía el mismo efecto. Podrían mostrar las similitudes y diferencias entre los dos haciendo viajes a lo largo de la recta numérica, frente a la clase o en papel. La recta numérica a gran escala, proyectada o colocada frente a toda la clase, permitió a los estudiantes y al maestro discutir las operaciones matemáticas en un foro donde los estudiantes que momentáneamente no hablaban podían seguir el razonamiento de los participantes. Esto ayudó a los estudiantes a lidiar con una serie de cuestiones, incluyendo la inmensamente importante de distinguir entre números como puntos y números como interrupciones. Los operandos podrían tratarse como puntos o como intervalos (desde 0 hasta el punto final), pero operaciones como "+6" se referían al número de espacios unitarios entre posiciones y no al número de postes de cerca o marcadores, por así decirlo, mintiendo entre números.

Lección 6

En la Lección 6, la cuarta sesión en la que tratamos con rectas numéricas, introdujimos una "recta numérica variable" como un medio para hablar sobre operaciones con incógnitas. (ver Figura I).

“N menos 4" podría tratarse como el resultado del desplazamiento de cuatro espacios hacia la izquierda desde N, independientemente de lo que represente el número N. Con un retroproyector, a veces empleamos dos rectas numéricas: la recta numérica variable y una recta numérica estándar con un origen en O. Al colocar una recta sobre la otra (compartían la misma métrica), los estudiantes podían determinar el valor de N; era el entero alineado con N. También gradualmente se dieron cuenta de que podían inferir los valores de, digamos, N + 3 al ver que N + 7 estaba por encima de 4 en la recta numérica regular. Las conexiones con las ecuaciones algebraicas deberían ser obvias para el lector.

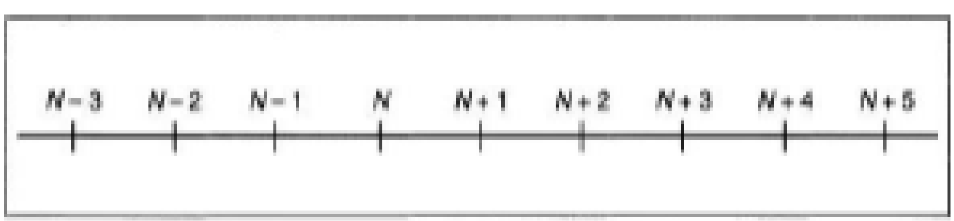

Figura 1. La N – número línea

Trabajar con cantidades desconocidas

Lección 7

La Figura 2 muestra el problema que presentamos a los estudiantes en la Lección 7. El problema no especificaba las cantidades de dinero que Mary y John tienen en sus alcancías al comienzo de la historia; simplemente declaró que tienen cantidades iguales. En las partes posteriores del problema, los estudiantes aprendieron sobre los cambios que ocurrieron en las cantidades. En la parte final, los estudiantes aprendieron cuánto tenía Mary en su alcancía el jueves. A partir de esta información, los estudiantes finalmente determinaron cuánto tenían los protagonistas al principio y cuánto tenían en cada uno.

Mary y John tienen cada uno una alcancía.
El domingo, ambos tenían la misma cantidad en sus alcancías.
El lunes, su abuela viene a visitarlos y les da $ 3 a cada uno.
El martes van juntos a la librería. Mary gasta $ 3 en Harry
El nuevo libro de Potter. John gasta $ 5 en un calendario de 2001 con fotos de perros en él.
El miércoles, John lava el auto de su vecino y gana $ 4. Mary también ganó $ 4 cuidando niños. Corren a poner su dinero en sus alcancías. El jueves, Mary abre su alcancía y descubre que tiene $ 9.

Figura 2. El problema de la alcancía.

Inicialmente mostramos el problema como un todo (excepto la línea sobre lo que sucedió el jueves) para que los estudiantes pudieran entender que constaba de varias partes. Luego cubrimos todos los días excepto el domingo.

Representando una cantidad desconocida

Después de leer lo que sucedió cada día, los estudiantes trabajaron solos o en parejas, tratando de representar en papel lo que se describió en el problema. Durante este tiempo, los miembros del equipo de investigación pidieron a los niños individuales que explicaran lo que estaban haciendo y los interrogaron de manera que los alentaran a desarrollar representaciones más adecuadas. A continuación, intentamos describir, sobre la base de lo que se describió en las cintas de video y en el trabajo escrito de los niños, el contenido de la discusión en el aula que siguió y las percepciones y logros de los niños mientras intentó representar y resolver los diversos pasos del problema.

Domingo: Después de que Kimberley leyó la parte del domingo para toda la clase, Bårbara, el investigador que dirigía esta clase, preguntó a los estudiantes si sabían cuánto dinero tenía cada uno de los personajes de la historia. Los niños dijeron al unísono: "No", y eso no pareció molestarles. Algunos pronunciaron "N" y Talik dijo: "N, es para cualquier cosa". Otros niños gritaron "cualquier número" y "cualquier cosa".

Cuando Bårbara preguntó a los niños qué iban a mostrar en sus hojas de respuestas para este primer paso del problema, Filipe dijo: "Podrías ganar algo de dinero con ellos, pero tiene que ser la misma cantidad". Bårbara le recordó que no sabemos cuál es la cantidad, y luego sugirió que podría escribir N para representar la cantidad desconocida. Jeffrey dijo de inmediato que eso era lo que iba a hacer. Los niños comenzaron a escribir en sus folletos, que solo contenían información sobre el domingo y una copia de la recta numérica N. Bårbara les recordó a los estudiantes que podían usar la recta numérica N (una recta numérica con N en el origen y una métrica de una unidad) en su papel si querían. También dibujó una copia de la línea N-número en la pizarra.

Los alumnos trabajaron durante unos 3 minutos, dibujando alcancías y representando las cantidades en cada una de ellas. Cuatro niños atribuyeron valores específicos a Mary y John el domingo. Cinco representaba la cantidad como N, generalmente dentro de un dibujo de una alcancía. Dos niños colocaron un signo de interrogación dentro o al lado de cada alcancía. Y cinco niños dibujaron alcancías sin ninguna indicación de lo que contendría cada una.

Jennifer, una de las estudiantes que usó N para representar la cantidad inicial en cada banco (ver Figura 3), dibujó dos alcancías, etiquetando una para Mary y la otra para John, y escribió junto a ellas una N grande después de la declaración " ¿No lo sabes? En una interacción individual con Jennifer, David (presente pero no sirviendo como instructor en la clase) señala la N en su folleto y pregunta:

David: Entonces, ¿qué dice aquí?

Jennifer: NORTE.

David: ¿Por qué escribiste eso?

Jennifer: Porque no lo sabes. No sabes cuánta cantidad tienen.

David: También lo hace N... ¿Qué significa eso para usted?

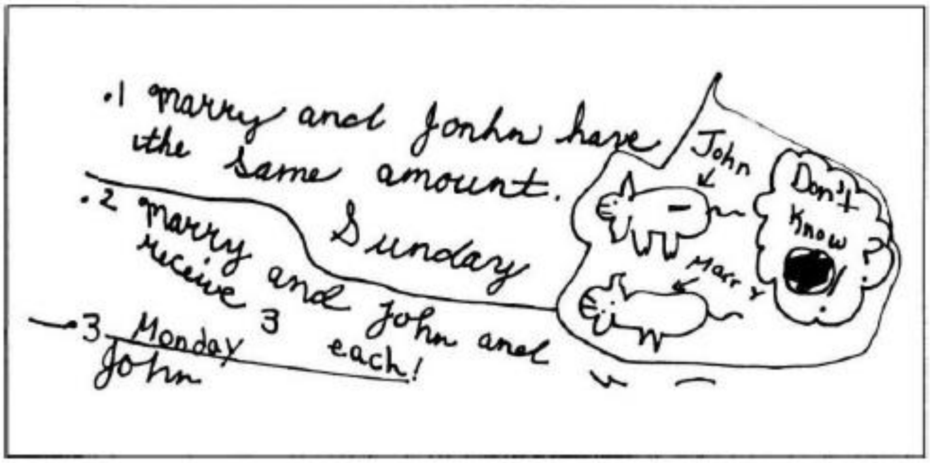

Figura 3. Representación inicial de Jennifer para el problema.

Jennifer: N significa cualquier número.

David: ¿Tienen cada uno N, o tienen N juntos?

Jennifer: [No responde.]

David: ¿Cuánto tiene María?

Jennifer: NORTE.

David: ¿Y qué hay de John?

Jennifer: NORTE.

David: ¿Es el mismo N o tienen diferentes NS?

Jennifer: Son lo mismo, porque dijo el domingo que tenían la misma cantidad de dinero.

David: Entonces, si decimos que John tiene N, ¿es que tienen como $ 10 cada uno?

Jennifer: No.

David: ¿Por qué no?

Jennifer: Porque no sabemos cuánto tienen.

Desde el comienzo de esta clase, los propios niños se propusieron usar N para representar una cantidad desconocida. Habíamos introducido la convención antes en otros contextos, pero ahora se estaba abriendo camino en su propio repertorio de herramientas de representación. Varios niños parecen sentirse cómodos con la notación de un desconocido, así como con la idea de que pueden trabajar con cantidades que pueden permanecer desconocidas.

Hablar de cambios en cantidades desconocidas

Lunes: Cuando los niños leyeron la declaración sobre lo que sucedió el lunes, es decir, que cada niño recibió $ 3 de su abuela, infirieron que Mary y John seguirían teniendo la misma cantidad de dinero que el otro, y que ambos tiene $ 3 más que el día anterior:

Un niño: Ahora tienen tres más de la cantidad que tenían.

Bárbara: ¿Crees que John y Mary todavía tienen la misma cantidad de dinero?

Niños: ¡Si!

Bárbara: ¿Cómo lo sabes?

Talik: Porque antes tenían la misma cantidad de dinero, más tres, ambos tenían tres más, entonces es la misma cantidad.

David: ¿La misma cantidad que antes o la misma cantidad que los demás?

Talik: La misma cantidad entre sí. Antes, era la misma cantidad.

David: ¿Tienen la misma cantidad el lunes que el domingo?

Talik: No.

Otro niño: ¡No lo sabes!

Bárbara: ¿Cuál es la diferencia entre la cantidad que tenían el domingo y la cantidad que tenían el lunes?

Niños; Tienen tres más.

Talik: Si. Tienen tres más. Podrían tener cien dólares; La abuela viene y les da tres dólares más, así que son ciento tres.

A continuación, Bårbara pidió a los niños que propusieran una forma de mostrar las cantidades de dinero en las alcancías el lunes. Nathan fue el primero en proponer que el lunes cada uno tendría N más 3, y explicó: "Porque no sabemos cuánto dinero tenían el domingo, y obtuvieron más, y obtuvieron tres dólares más el lunes". Talik propuso hacer un dibujo que mostrara a la abuela dando dinero a los niños. Filipe representó la cantidad de dinero del lunes como "? + 3". Jeffrey dijo que escribió "tres más" porque su abuela les dio tres dólares más. Los dibujos de la Figura 4 son representaciones espontáneas de Jeffrey de N + 3. En cada caso, las 3 unidades se distinguen individualmente sobre una cantidad, N, de una cantidad no especificada.

James propuso y escribió en su papel que el domingo cada uno tendría "N + 2" y por lo tanto el lunes tendrían N + 5. No nos queda claro por qué eligió N + 2 como punto de partida. Carolina escribió N + 3. Jennifer escribió N + 3 en un arreglo vertical con una explicación debajo: "3 más para cada uno". Talik escribió N + 3 = N + 3. Carolina, Adriana y Andy escribieron N + 3 dentro o al lado de cada cerdito

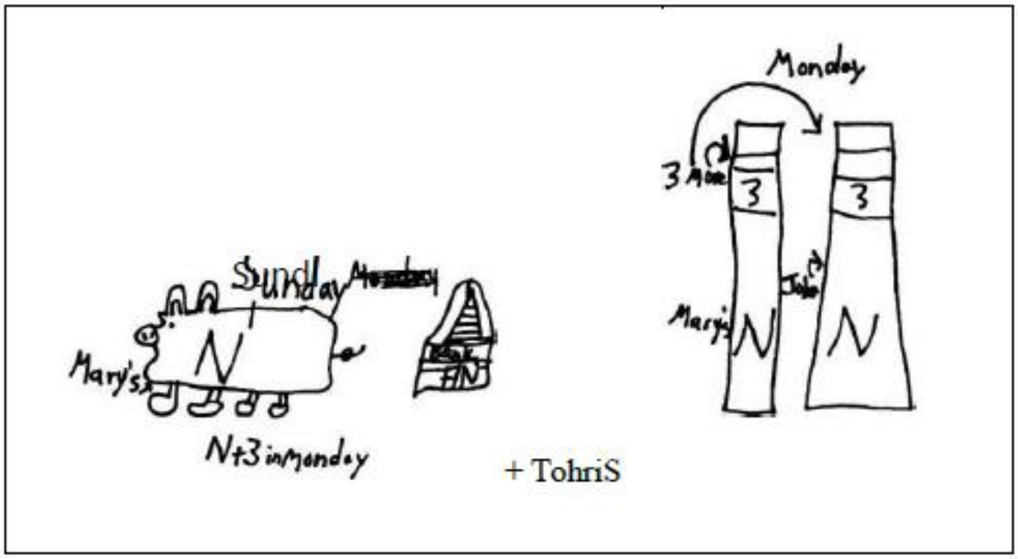

Figura 4. Representaciones de Jeffrey de lo que sucedió el domingo y el lunes.

Jeffrey escribió N + 3 para el lunes y explicó que eso se debe a que su abuela les dio 3 dólares más. Pero cuando David le pregunta cuánto tenían el domingo, Jeffrey respondió: "Cero". Max, sentado a su lado, dice: "No lo sabes". Jimmy, que representó por primera vez las cantidades el domingo como signos de interrogación, escribió N + 3, con conexiones a la representación esquemática de las alcancías de Mary y John, y explicó: "Porque cuando la abuela vino a visitarlos tenían como, N. Y luego le dio a Mary y John $ 3. Por eso digo [señalando N + 3 en el papel] N más tres ".

Bårbara comentó sobre el uso de los signos de interrogación por parte de Filipe, y él y otros niños reconocieron que N es otra forma de mostrar los signos de interrogación. Luego le dijo a la clase que algunos de los niños propusieron valores específicos para las cantidades en las alcancías el domingo. Hablando en contra de este enfoque, Filipe afirmó que "nadie sabe [cuánto tienen]" y James dijo que estos otros niños "se equivocan" al asignar valores específicos. Jennifer aclaró que podría ser una de las cantidades sugeridas.

En este punto, varios niños parecían cómodos con la notación de una incógnita y con la idea de que podían trabajar con cantidades que podrían permanecer desconocidas. Su trabajo escrito mostró que, al final de la clase, 11 de los 16 niños habían adoptado N + 3 por las cantidades que cada uno tendría el lunes. Solo uno de los niños continuó usando cantidades específicas en su hoja de trabajo, y cuatro produjeron dibujos que no se pudieron interpretar o un trabajo escrito que incluía N pero de manera incorrecta como N + 3 = N.

Operación sobre incógnitas con múltiples representaciones

Martes: Cuando consideraron lo que sucedió el martes, algunos de los niños parecían desconcertados e incómodos mientras se preguntaban si habría suficiente dinero en las alcancías para permitir las compras. Un estudiante sugirió que los protagonistas de la historia probablemente tenían $ 10. Otros asumieron que debe haber al menos $ 5 en sus alcancías al final del lunes, de lo contrario, John no podría haber comprado un calendario de $ 5.

Bårbara recordó para la clase lo que sucedió el domingo y el lunes. Los niños coincidieron en que el lunes cada uno de los niños tenía las mismas cantidades. Luego hizo estas preguntas:

Bárbara: Adriana, ¿qué pasa el martes?

Adriana: El martes tenían diferentes cantidades de dinero.

Bárbara: ¿Por qué tienen diferentes cantidades de dinero?

Adriana: Debido a que gastaron, Mary gastó $ 3 y John gastó $ 5.

Bárbara: Entonces, ¿quién gastó más dinero?

Adriana: John.

Bárbara: Entonces, el martes, ¿quién tiene más dinero el martes?

Adriana y otros niños: Mary.

Jennifer describió lo sucedido de domingo a martes y concluyó que, el martes, Mary terminó con la misma cantidad de dinero que tenía en Domingo, "porque gasta sus $ 3". En este punto, Bårbara animó a los niños a usar la recta numérica N para representar lo que ha estado sucediendo de domingo a martes. Siempre dialogando con los niños y recibiendo su opinión, dibujó flechas que iban de N a N + 3 y luego de nuevo a N para mostrar los cambios en las cantidades de Mary. Ella mostró lo mismo con notación algebraica, narrando los cambios de domingo a martes, paso a paso, y obteniendo la información de los niños mientras escribía N + 3 - 3. Luego escribió un corchete debajo de +3 - 3 y un 0 debajo de él. Ella comentó que +3 - 3 es lo mismo que 0, y extendió la notación a N + 3 - 3 = N + 0 = N. Jennifer luego explicó cómo los $3 gastados cancelan los $ 3 dados por la abuela.

Bårbara luego guio a los niños a través de las transacciones de John en la recta numérica N, dibujando flechas de N a N + 3, luego N - 2, para cada paso de su dibujo. Durante este proceso, usó escritura algebraica para registrar los estados y transformaciones, y con la información de los estudiantes hizo un seguimiento de los estados y transformaciones, finalmente escribió N + 3 - 5 para expresar la cantidad de John al final del martes. Algunos niños sugirieron que esta cantidad es igual a "N menos 2", una inferencia que Bårbara registró como N + 3-5 = N-2.

Bårbara le pidió a Jennifer que se acercara a la recta numérica y mostrara la diferencia entre las cantidades de John y Mary el martes. Jennifer al principio señaló vagamente el intervalo entre N -

2 y N. Cuando Bårbara le pidió que mostrara exactamente dónde comienza y termina la diferencia, Jennifer señaló correctamente N - 2 y N como los puntos finales del segmento. David le preguntó a Jennifer cuánto tendría que darle a John para que tuviera la misma cantidad de dinero que tenía el domingo. Jennifer respondió que tendríamos que darle $ 2 a John y explica, mostrando en la recta numérica, que si él está en N - 2 y sumamos 2, vuelve a N. Bårbara representó lo que Jennifer ha dicho como N - 2 + 2 = N. Jennifer tomó el marcador de la mano de Bårbara, trazó corchetes alrededor de la expresión "—2 + 2" y escribió 0 debajo. Bårbara preguntó por qué "—2 + 2"

El dibujo de Nathan en la Figura 5 representa el domingo (arriba), el lunes (abajo a la izquierda) y el martes (abajo a la derecha). Para el martes, primero dibujó representaciones icónicas del calendario y el libro junto a los valores $ 5 y $ 3, respectivamente, los iconos y los valores en dólares conectados por un signo igual.

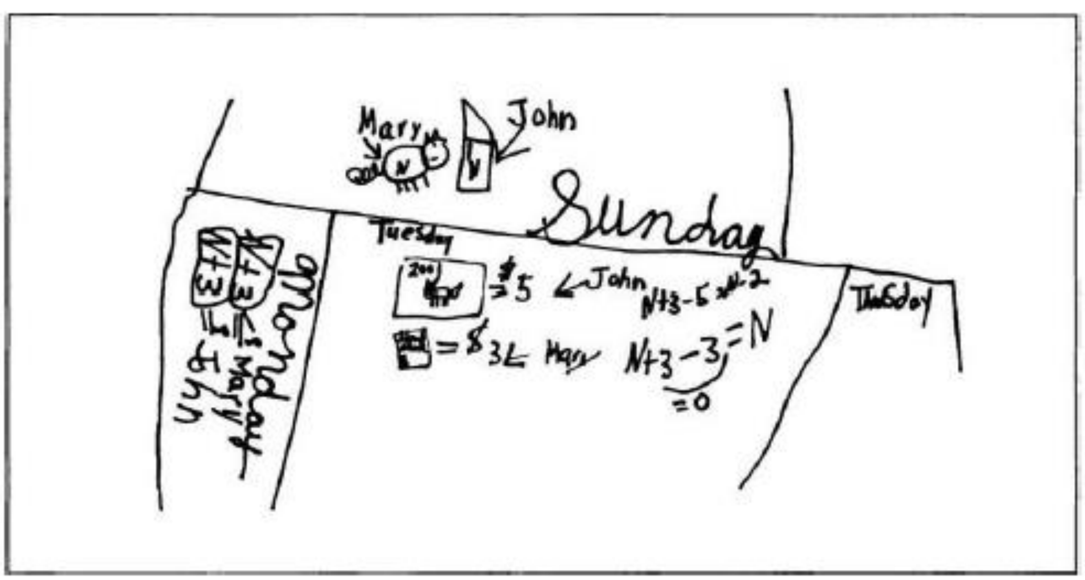

Figura 5. Representación del problema de Nathan.

Durante su discusión con un entrevistador en clase, escribió las dos ecuaciones N + 3 - 5 = N - 2 y N + 3 - 3 = N, utilizando la recta numérica N como apoyo para sus decisiones. Más tarde, cuando supo que N era igual a 5 (después de recibir la información del problema sobre el jueves), escribió 8 junto a N + 3 en la sección del lunes de su hoja de trabajo.

Miércoles: Filipe leyó el paso del problema del miércoles. Bårbara preguntó si Mary y John terminarán con la misma cantidad que el lunes. James dijo: "No", y Adriana luego explicó que Mary tendrá N + 4 y John tener N + 2. Bårbara dibujó una recta numérica con N y le pidió a Adriana que contara la historia usando la recta. Adriana representó los cambios para John y Mary en la recta numérica N, como lo haría en una recta numérica normal. Bårbara escribió N + 4 = N + 4 y luego N - 2 + 4 = N + 2. Talik se ofreció a explicar esto. Dijo que, si tomas 2 del 4, será igual a 2. Para aclarar de dónde viene el 2, Bárbara representó las siguientes operaciones en una recta numérica regular: —2 + 4 = 2.

Bårbara luego preguntó si alguien podía demostrar por qué N + 3 - 3 + 4 es igual a N + 4. Talik se ofreció como voluntario para hacerlo, tachó la subexpresión +3 - 3 y dijo: "Ya no lo necesitamos". Jennifer dijo que esto es lo mismo que O. Este es un momento significativo, porque no habíamos introducido el procedimiento de tachar la suma de un número y su inverso aditivo (aunque habíamos usado corchetes para simplificar las sumas).

El golpe de Talik en lugar de poner entre corchetes muestra su comprensión de que un número y su inverso entre corchetes rinden 0. Bårbara propuso escribir una ecuación que transmita lo que sucedió con las cantidades de John durante la semana. Los estudiantes la ayudaron a seguir cada uno de los pasos de la historia y construir la ecuación N + 3 - 5 + 4 = N + 2. Pero inicialmente no estuvieron de acuerdo con la expresión del lado derecho de la ecuación. Barbara les ayudó a visualizar las operaciones en la recta numérica N. Le pidió a Jennifer que mostrara cómo se podría simplificar la ecuación. Mientras Jennifer reflexionaba, Bårbara señaló que este problema era más difícil que el anterior y le pidió que comenzara con +3 - 5; Jennifer respondió: "Menos dos". Luego colocaron entre corchetes la segunda parte en —2 + 4, y Jennifer, contando con los dedos, dijo que era +2 y escribió. Talik se acercó al frente y explicó: "N es cualquier cosa, más 3, menos 5, es menos 2; N menos 2 más 4, es igual [mientras cuenta con los dedos] N más 2". Luego, Talik intentó agrupar los números de manera diferente, primero sumando 3 y 4 y luego quitando 5. Bårbara mostró que cuando se agrupa +3 + 4, se llega a +7. A continuación, +7-5 resulta en +2. Por tanto, la respuesta es 2, independientemente del orden de las operaciones.

Descubrir un valor particular e instanciar otros valores

Jueves: cuando Amir leyó la parte del problema del jueves, donde decía que Mary terminó con $ 9, varios niños sugirieron en voz alta que N tenía que ser 5. Entonces Bårbara preguntó a los niños: "¿Cuánto tiene John en su alcancía [al final del jueves]?" Algunos estudiantes afirmaron que John (cuya cantidad estaba representada por N + 2) tiene "dos más", aparentemente significando "dos más que N." Jennifer, James y otros niños dijeron que tiene 7. Algunos de los estudiantes aparentemente determinaron esto agregando 5 + 2. Otros lo determinaron a partir de la cantidad final de María (9): Debido a que N + 2 (la cantidad de Juan) es 2 menos que N + 4 (la cantidad de María), Juan tendría que tener 2 menos que María (se sabe que tiene 9). Bårbara concluyó la lección trabajando con los estudiantes para completar una tabla de 2 x 4 que muestra las cantidades que Mary y John tenían durante los 4 días. Algunos estudiantes sugirieron expresiones con valores desconocidos.

Un nuevo contexto: diferencias entre alturas

Lección 8

La semana siguiente, en la Lección 8, le pedimos al mismo grupo de estudiantes que trabajara en el problema que se muestra en la Figura 6 (ver Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000, en prensa, para un análisis previo del mismo problema por otro grupo de estudiantes). El problema establece las diferencias de altura entre tres personajes sin revelar sus alturas reales. Se podría pensar que las alturas varían en la medida en que pueden tomar un conjunto de valores posibles. Por supuesto que esa era nuestra opinión. El objetivo de investigar el tema era ver qué sentido tenían los estudiantes de tal problema.

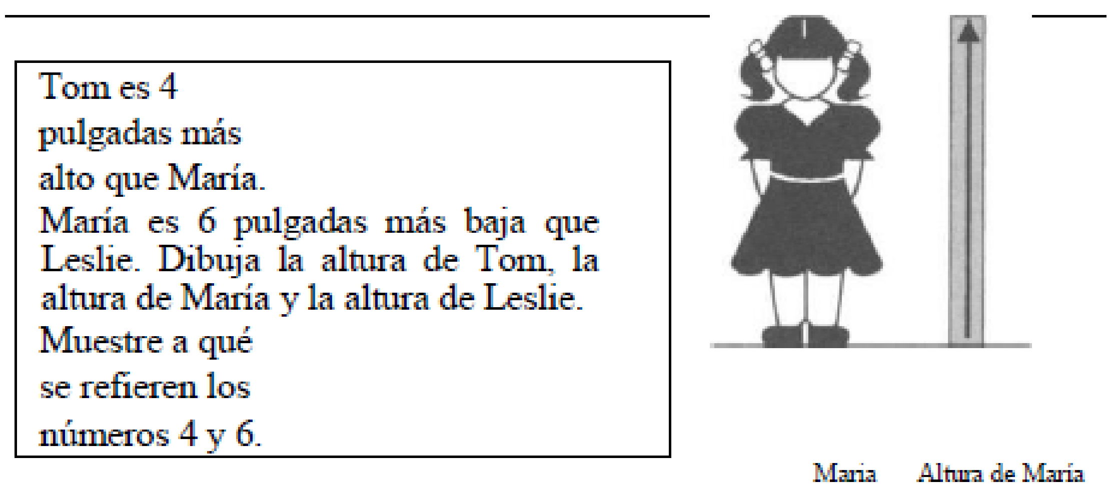

Figura 6. El problema de las alturas.

Después de discutir cada enunciado del problema, el instructor animó a los estudiantes a enfocarse en las diferencias entre las alturas de los protagonistas (ver Carraher, Brizuela, et al., 2001, para detalles sobre esta primera parte de la clase), y a los estudiantes se le pidió que representara el problema en hojas de trabajo individuales. La mayoría de los estudiantes usaron líneas verticales para mostrar las tres alturas (ver ejemplo en la Figura 7). Para nuestra sorpresa, una de las estudiantes (Jennifer) eligió representar las alturas en una recta numérica variable muy parecida a la que habían estado trabajando durante reuniones anteriores (ver Figura 8). Bårbara luego adoptó la recta numérica de Jennifer como base para una clase completa.

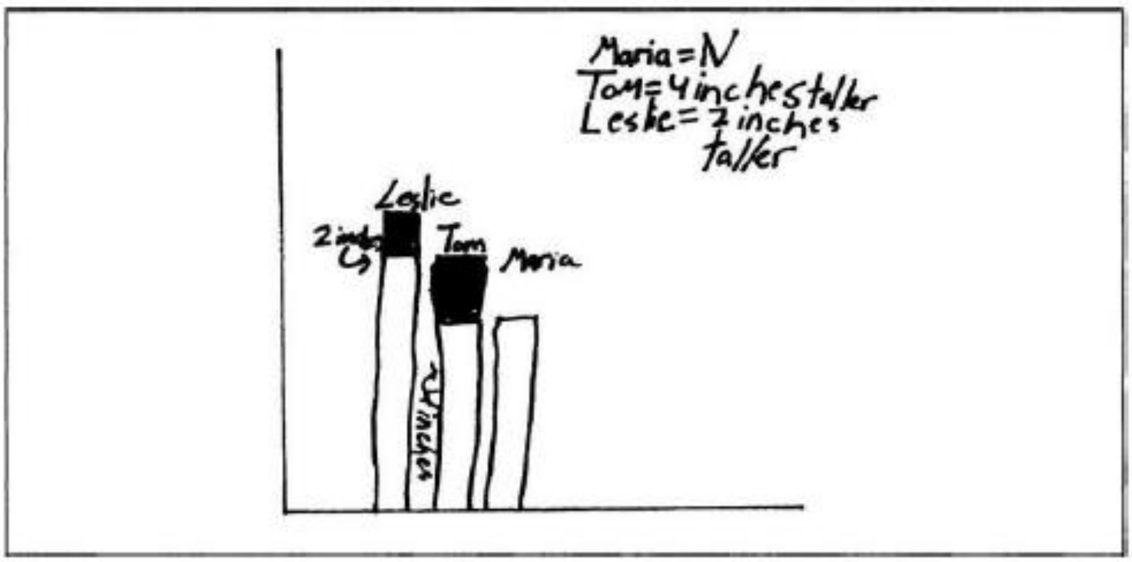

Figura 7. Dibujo y notación de Jeffrey para el problema de Heights.

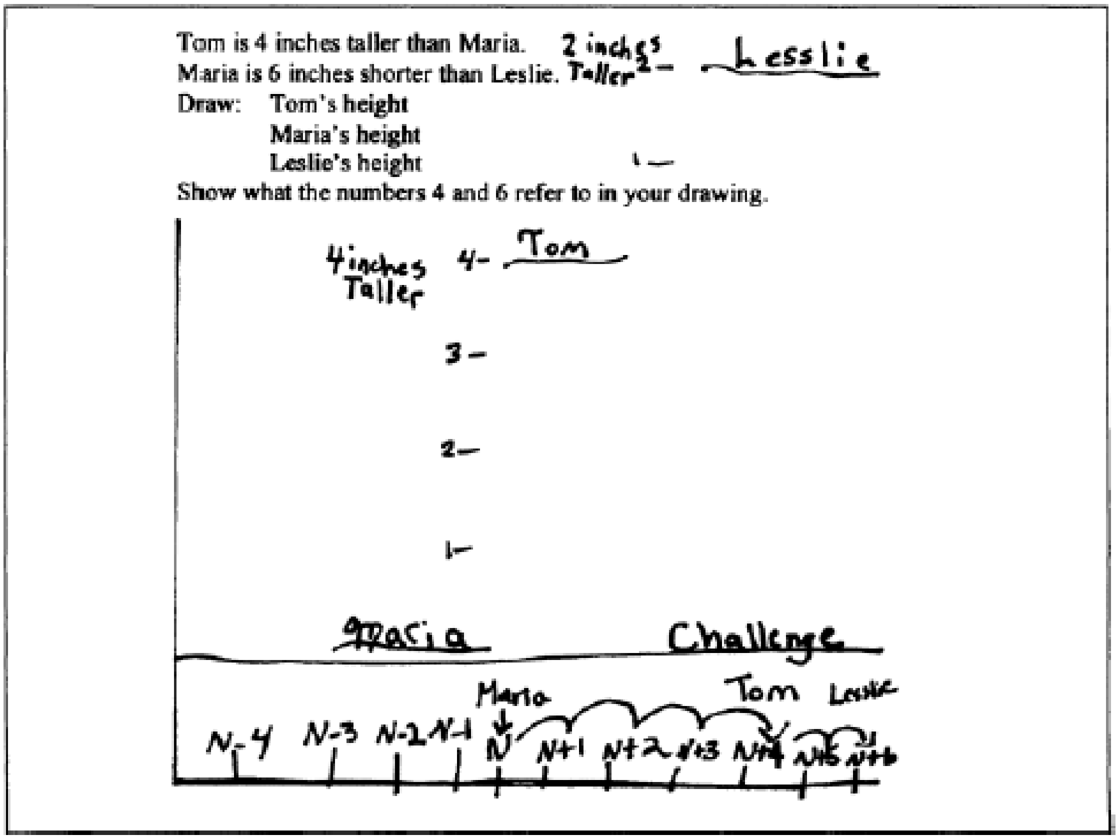

Figura 8. Dibujo de Jennifer (muescas) que muestra diferencias, pero sin origen. También usa un número variable que forma la base de la discusión posterior.

Además, adoptó la suposición de Jennifer de que María está ubicada en N en la recta numérica variable (ver la recta numérica del medio en la Figura 9).

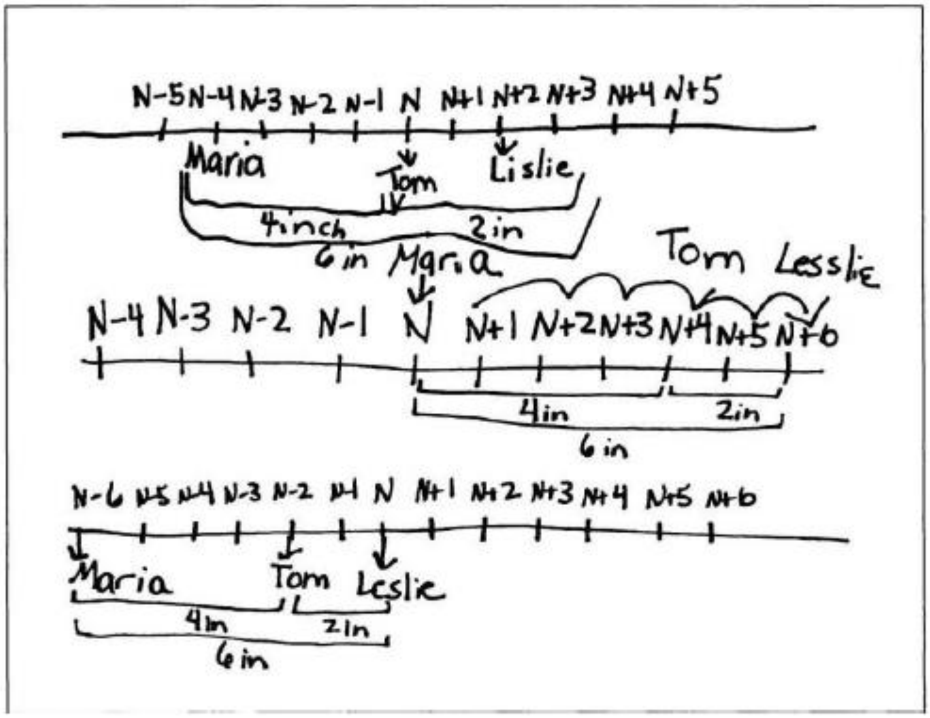

Figura 9. Tres representaciones de líneas numéricas variables (en un retroproyector) utilizadas por los estudiantes y el maestro para discutir los casos en los que a María (en el medio) se le atribuye la altura de N; A Leslie (abajo) se le asigna la altura de N; y a Tom (arriba) se le asigna una altura de N.

Bárbara: Ahora bien, si la altura de María fuera N, ¿cuál sería la altura de Tom?

Estudiantes: N más cuatro.

Bárbara: ¿Por qué?

Estudiantes: Porque sería diez centímetros más alto.

Bárbara: Mm, hmm. ¿Y cuál sería la altura de Leslie?

Nathan y estudiantes: N más seis.

Nathan: Porque Leslie mide quince centímetros más.

Es notable que Jennifer se diera cuenta de que una herramienta de representación introducida en clases anteriores ayudaría a aclarar el problema en cuestión. Es igualmente impresionante que los estudiantes restantes parecieran cómodos con esta idea y dedujeran fácilmente las alturas de Tom y Leslie (N + 2, N + 4, respectivamente) de las de María (N). Bårbara se preguntó si los estudiantes se dieron cuenta de que la decisión de llamar a la altura de María N fue arbitraria. Entonces, pidió a los estudiantes que asumieran en cambio que la altura de Leslie era N. Los estudiantes respondieron que la altura de Tom sería N - 2 y la de María sería N - 6 (vea la recta numérica inferior en la Figura 9). Infirieron esto no actuando sobre la escritura algebraica, sino haciendo los desplazamientos apropiados en la recta numérica variable.

A continuación, Bårbara pidió a los estudiantes que asumieran que la altura de Tom era N. Max fue al frente de la clase y colocó a Leslie en N + 3 (vea la línea numérica superior en la Figura 9; hay un borrado debajo de N + 3 donde Max tenía primero puso incorrectamente el nombre de Leslie). Max se dio cuenta de que la diferencia entre Tom y Leslie es 2, pero sin embargo colocó sus 3 unidades a la derecha de Tom. (Este es un ejemplo del problema del "poste de la cerca". Los estudiantes están acostumbrados a la idea de que un número se refiere al recuento de elementos en un conjunto, es decir, la cardinalidad de un conjunto. Sin embargo, el problema que enfrentan los niños a menudo es "¿Qué debo contar? " En una recta numérica, se sugieren dos tipos de elementos. Uno puede contar el número de intervalos o uno puede contar el número de" postes de cerca "o muescas.

Si nos centramos demasiado en los errores ocasionales que cometen estudiantes como Max, es posible que no veamos el panorama general; es decir, que al final de la lección los estudiantes relacionan las diferencias numéricas dadas con la notación algebraica, diagramas de segmentos de línea, líneas numéricas (incluidas las líneas numéricas variables), resta, conteo y descripciones en lenguaje natural. La fluidez con la que los estudiantes se mueven de una forma de representación a otra sugiere que su comprensión de las funciones de la forma x + b es sólida y flexible. Su disposición a utilizar N para representar la altura de cualquiera de los tres personajes de la historia (siempre que las relaciones entre las alturas de los tres protagonistas se mantengan invariables) muestra un grado alentador de robustez en su pensamiento.

DISCUSIÓN

¿Estaban estos estudiantes haciendo álgebra?

¿Las actividades documentadas aquí califican como álgebra? Algunos podrían sentirse tentados a argumentar que los estudiantes habían resuelto el problema de la alcancía mediante procedimientos, como "deshacer", considerados meramente aritméticos o prealgebraicos (Boulton-Lewis et al., 1997; Filloy y Rojano, 1989). Otros podrían notar que los estudiantes no "resolvieron para x" en el sentido tradicional de aplicar reglas sintácticas a formas escritas, sin tener en cuenta su significado, para producir un valor único para lo desconocido. Sin embargo, es importante reconocer lo que lograron los estudiantes. Usaron letras para representar variables de manera significativa. Utilizaron expresiones algebraicas como N + 3 para representar funciones. Además, utilizaron el conocimiento sobre los cambios en las cantidades para formular nuevas expresiones algebraicas. Entendieron las relaciones entre las cantidades diarias de cada protagonista del problema de la historia; ellos también entendieron como las cantidades de cada día relacionadas con las cantidades iniciales.

En la discusión del problema de Heights (es decir, la lección 8), mostraron una comprensión clara de las relaciones funcionales entre cantidades indeterminadas; estaban trabajando con variables manteniendo una relación invariante entre ellas. Y generaron expresiones apropiadas para las alturas de los protagonistas restantes independientemente de a qué actor se le había asignado el valor inicial N. Como tal, parece que los estudiantes estaban trabajando con funciones, un objeto fundamental de estudio en álgebra (Schwartz & Yerushalmy, 1994).

En varios sentidos, las lecciones descritas anteriormente son típicas de las 32 lecciones de álgebra temprana que implementamos durante el primer semestre (ocho lecciones implementadas en cada una de las cuatro aulas de tercer grado). Al principio, la mayoría de los niños dependía de la instanciación de incógnitas en valores particulares. Pero con el tiempo, en cada lección y a lo largo de las lecciones, los estudiantes llegaron a usar cada vez más notaciones algebraicas y representaciones de líneas numéricas como un medio natural para describir los eventos de los problemas que se les presentaban (ver Carraher, Schliemann y Schwartz, en prensa), para un análisis más detallado de esta evolución en cuarto grado).

Aunque los estudiantes expresaron su comprensión personal en dibujos y explicaciones, no sugerimos que su comportamiento fuera completamente espontáneo. Claramente, su pensamiento se expresó a través de sistemas basados en la cultura, incluidas representaciones matemáticas de varios tipos. Las representaciones de líneas numéricas y el uso de letras para representar cantidades o variables desconocidas son ejemplos de representaciones culturales que presentamos explícitamente a los estudiantes. La cuestión no es si inventan tales representaciones completamente por sí mismos, sino más bien si las aceptan como propias, es decir, si las incorporan a su repertorio de herramientas expresivas.

Hallazgos como estos nos han persuadido de que, dadas las experiencias adecuadas, los niños de ocho y nueve años pueden aprender a usar letras cómodamente para representar valores desconocidos y pueden operar en representaciones que involucran letras y números sin tener que instanciarlos. Concluir que la secuencia de operaciones "N + 3 - 5 + 4" es igual a N + 2, y poder explicar, como muchos niños pudieron, que N más 2 debe ser 2 más de lo que comenzó John. con, cualquiera que sea ese valor, es un logro significativo, uno del que mucha gente pensaría que los niños pequeños son incapaces de hacerlo. Sin embargo, estos casos eran frecuentes y no se limitaban a ningún tipo de contexto de problema en particular. Sería un error descartar estos avances como meras soluciones concretas, indignas del término "algebraico".

También hemos encontrado más evidencia de que los niños pueden tratar las incógnitas en situaciones aditivas como si tuvieran múltiples soluciones posibles. Por ejemplo, en un problema de comparación simple (Carraher, Schliemann y Schwartz, en prensa) en el que describimos que un niño tenía tres dulces más que otro, nuestros estudiantes del tercer grado pudieron proponer que un niño tendría N dulces y el otros tendrían N + 3 caramelos. Además, encontraron perfectamente razonable ver una serie de pares ordenados (3, 6), (9, 12), (4, 7), (5, 8) como soluciones válidas.

Para el caso que nos ocupa, a pesar de que sabían que, en cualquier situación dada, sólo una solución podía ser cierta. Incluso pudieron expresar el patrón en una tabla de dichos pares a través de afirmaciones como "el número que sale es siempre tres más grande que el número con el que empiezas". Cuando los niños hacen declaraciones de una naturaleza tan general, esencialmente están hablando de relaciones entre variables y no simplemente de incógnitas restringidas a valores únicos. Hemos encontrado que los niños de ocho y nueve años no solo pueden entender funciones aditivas, sino también usar expresiones algebraicas de manera significativa como "$n \rightarrow n + 3$" y "$y = x + 3$" (ver Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; Schliemann, Carraher y Brizuela, en prensa).

Casos como los anteriores pueden parecer extraños para las personas acostumbradas a pensar en la variación en términos de cambios en los valores de una sola entidad a lo largo del tiempo. La variación es en realidad un concepto más amplio que el cambio. A veces, la variabilidad ocurre en un conjunto de casos no relacionados, como en la variación de alturas en una población o como en la covariación de alturas y pesos. El ejemplo de un niño que tiene tres dulces más que otro puede entenderse como una variación dentro y, lo que es aún más importante, una invariancia en un conjunto de posibilidades. La invariancia entre casos puede formar la base de las discusiones con los estudiantes sobre las tablas de funciones que contienen muchas "soluciones", una para cada fila. En este caso, la columna uno correspondería a la cantidad de caramelos que tiene el primer niño; la columna dos correspondería a la cantidad de dulces que tiene el segundo niño. Cada fila contiene una solución válida, en la medida en que sea coherente con la información proporcionada.

Una vez que los estudiantes hayan completado y explorado dicha tabla de funciones, el problema es explicarla. ¿Qué propiedades permanecen iguales independientemente de la fila? Este no es un asunto trivial y da lugar a enunciados generales sobre patrones numéricos que son la esencia del álgebra.

Estas formas de variación son importantes porque permiten razonar tanto sobre valores particulares como sobre conjuntos de valores posibles. Permiten considerar las incógnitas como variables. Este es precisamente el espíritu con el que muchos estudiantes vieron el problema de la alcancía antes de que se descubriera información, respecto al jueves, que finalmente les permitió desestimar las múltiples posibilidades y enfocarse en los valores a los que ahora se limitaba el problema. Los estudiantes que sientan la necesidad de instanciar variables desde el principio pueden hacerlo y participar en las clases desde su propia perspectiva, restringiendo su atención a un posible escenario desde el principio. Esto no debería ser motivo de preocupación, ya que hemos descubierto que estos estudiantes aprenden de los demás y de las discusiones en clase. y en unas pocas semanas acogen cómodamente las representaciones algebraicas en su propio repertorio personal de herramientas expresivas. Si su confianza inicial en la instanciación se debiera a limitaciones de desarrollo, el aprendizaje relativamente rápido que presenciamos desde la lección de la alcancía hasta la lección sobre alturas no podría haber tenido lugar.

Los estudiantes demostraron que habían comenzado a manejar conceptos algebraicos fundamentales. Aun así, les queda mucho por aprender. El álgebra es un vasto dominio de las matemáticas y el progreso mostrado por los estudiantes en el presente estudio es el comienzo de una larga trayectoria. En esta etapa inicial, los estudiantes se benefician enormemente de trabajar en contextos de problemas ricos que utilizan para ayudar a estructurar y verificar sus soluciones. A medida que adquieran mayor fluidez en álgebra, podrán confiar relativamente menos en la semántica de la situación del problema para resolver problemas. Las expresiones algebraicas no solo capturarán, sino que, cada vez más, ayudarán a guiar su pensamiento y resolución de problemas. Con el tiempo, es de esperar que sean capaces de derivar inferencias válidas actuando sobre las formas escritas y gráficas ellos mismos, sin tener que reflexionar sobre los ricos contextos del problema para poder proceder con éxito; es decir, su resolución de problemas impulsada semánticamente será cada vez más impulsada por la sintaxis de las expresiones escritas.

Observaciones finales

Nuestro trabajo se ha guiado por las ideas de que (l) la comprensión de los niños de las estructuras aditivas proporciona un punto de partida fructífero para una "aritmética algebraificada"; (2) las estructuras aditivas requieren que los niños desarrollen una conciencia temprana de los números y cantidades negativos y su representación en líneas numéricas; (3) múltiples problemas y representaciones para manejar incógnitas y variables, incluida la notación algebraica en sí, pueden y deben formar parte del repertorio de los niños lo antes posible; y (4) el significado y las notaciones espontáneas de los niños deberían proporcionar una base para las estructuras sintácticas durante el aprendizaje inicial, aunque el razonamiento sintáctico debería volverse relativamente autónomo con el tiempo.

Puede haber muchas razones para ver el álgebra como más avanzada que la aritmética y, por lo tanto, colocarla después de la aritmética en el plan de estudios de matemáticas. Pero hay razones más convincentes para introducir el álgebra como parte integral de las primeras matemáticas. Hay buenas razones para considerar lo abstracto y lo concreto como entretejidos en lugar de completamente distintos (Carraher y Schliemann, 2002). La suma y la resta, la multiplicación y la división son operaciones, pero también son funciones y, por lo tanto, pueden describirse mediante notación algebraica. Si nos detenemos demasiado en la naturaleza concreta de la aritmética, corremos el riesgo de ofrecer a los estudiantes una visión superficial de las matemáticas y desalentar sus intentos de generalizar. Aunque la fluidez computacional es importante (incluso crucial) para permitir a los estudiantes razonar algebraicamente, no asegura que los estudiantes estén atentos a los patrones subyacentes a las relaciones aritméticas y aritméticas. La notación algebraica (así como tablas, rectas numéricas y gráficos) ofrece un medio para expresar tales patrones de manera clara y sucinta. Si se presenta de manera significativa, ofrece la virtud de reunir ideas que de otra manera podrían permanecer fragmentadas y aisladas.

Muchos han argumentado que los niños pequeños son incapaces de aprender álgebra porque no tienen los medios cognitivos para manejar conceptos como variables y funciones (Collis, 1975; Filloy y Rojano, 1989; Herscovics y Linchevski, 1994; Kuchemann, 1981; MacGregor, 2001 Nuestros estudios en el aula sugieren que los niños pueden manejar conceptos algebraicos y usar la notación algebraica algo antes de lo que comúnmente se supone. Puede que no sea necesario que la educación en álgebra espere un supuesto 'período de transición' después de la aritmética. Como otros han demostrado (Carpenter & Franke, 2001; Carpenter & Levi, 2000; Schifter, 1999), existen muchas oportunidades para introducir conceptos algebraicos en el currículo durante los primeros años de la educación matemática. Además, también mostramos, como hicieron Bodanskii (1991) y Davis (1971-1972) antes de nosotros, que es posible introducir la notación algebraica en los primeros grados. Nuestros datos amplían aún más nuestra comprensión de cómo los niños pequeños llegan a la notación de álgebra apropiada ya que representan problemas abiertos, y brindamos ejemplos de cómo la enseñanza y el aprendizaje de operaciones aritméticas pueden relacionarse con funciones.

Para que no demos la impresión errónea de que cualquier concepto matemático puede aprenderse en cualquier momento, dejemos las cosas claras. Al argumentar que el carácter algebraico de la aritmética merece un lugar en la educación matemática temprana, no estamos negando la naturaleza evolutiva de las habilidades matemáticas. Los conceptos numéricos, la capacidad de usar la notación algebraica, interpretar gráficos, modelar situaciones, etc., se desarrollan a lo largo de muchos años. Incluso en un área tan "simple" como las estructuras aditivas, los niños necesitan poder cosificar las diferencias para que puedan ser tratados como cantidades auténticas con sus propias propiedades y sujetos a operaciones aritméticas. Los niños que recién comienzan a trabajar con la suma y la resta pueden interpretar una afirmación como "Tom es 4 pulgadas más alto que María".

La educación temprana en álgebra no es de ninguna manera un campo bien entendido. Sorprendentemente, se sabe poco sobre la capacidad de los niños para hacer generalizaciones matemáticas y utilizar la notación algebraica. Por lo que sabemos, en este momento, ni un solo libro de texto importante en el idioma inglés ofrece una visión algebraificada coherente de las matemáticas tempranas. Consideramos que la aritmética algebraificada es una propuesta apasionante, pero cuyas ramificaciones solo pueden conocerse si un número significativo de personas emprende investigaciones y experimentos de enseñanza sistemáticos. Es posible que los programas de formación docente tarden mucho tiempo en adaptarse al hecho de que los tiempos han cambiado. Esperamos que la comunidad de la educación matemática y sus fuentes de financiación reconozcan la importancia de esta empresa.

7.2. Traducción artículo 2: The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking

EL DESARROLLO PROGRESIVO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO INCORPORADO TEMPRANO

Luis Radford

Resumen:

En este artículo presento algunos resultados de una investigación longitudinal de 5 años con jóvenes estudiantes sobre la génesis del pensamiento algebraico no simbólico incorporado y su transición progresiva a formas de pensamiento simbólico culturalmente evolucionadas. La investigación se basa en una teoría histórico-cultural de la enseñanza y el aprendizaje (La teoría de la objetivación). Dentro de esta teoría, el pensamiento se concibe como una forma de reflexión y acción que es a la vez material e ideal: incluye el habla interior y exterior, formas sensoriales de imaginación y visualización, gestos, ritmo y su entrelazamiento con la cultura material (símbolos, artefactos, etc.). La teoría articula una visión cultural del desarrollo como un proceso dialéctico que se desarrolla entre formas de conocimiento matemático constituidas cultural e históricamente y la actividad en el aula mediada semióticamente. Mirar los datos experimentales a través de estos lentes teóricos revela un camino de desarrollo en el que las formas encarnadas de pensamiento se sustituyen o subsumen en otras más sofisticadas a través de la mediación de una actividad en el aula debidamente diseñada.

Palabras clave: Pensamiento incorporado, Pensamiento algebraico, Desarrollo, Semiótica, Objetivación, Vygotsky.

Introducción

A la luz de las legendarias dificultades que presenta el aprendizaje del álgebra a los estudiantes en la escuela secundaria, se ha sugerido que una introducción progresiva al álgebra en los primeros grados puede facilitar a los estudiantes un acceso a conceptos algebraicos más avanzados más adelante (Carraher y Schliemann 2007). Un desarrollo temprano del pensamiento algebraico puede, en particular, facilitar a los estudiantes un contacto con el simbolismo algebraico (Cai y Knuth 2011; Warren y Cooper2009).

Sin embargo, el fundamento teórico de esta idea y su implementación práctica siguen siendo motivo de controversia. Tradicionalmente, el álgebra se ha enseñado solo después de que los estudiantes hayan tenido la oportunidad de adquirir un conocimiento sustancial de aritmética. Es decir, se ha asumido que el pensamiento aritmético es un requisito previo para el surgimiento y desarrollo del pensamiento algebraico. Claramente, una introducción al álgebra en los primeros grados no se ajusta a tal suposición. Ahora bien, si esto es así, si el álgebra no necesita venir después de la aritmética, la pregunta es: ¿Cuál es la diferencia y la relación entre estas dos disciplinas?

Evadir estas preguntas no nos hace ningún favor. Déjame dar un ejemplo. En el Currículo de Matemáticas de Ontario, se supone que los profesores introducen a sus alumnos en el álgebra, recurriendo en particular al estudio de patrones, a través de la investigación de secuencias y su generalización. Una expectativa específica en los grados 1, 2 y 3 establece que los estudiantes deben identificar, describir y ampliar los patrones. En el quinto grado se les pide que predigan un término remoto específico de la secuencia. Ahora bien, ¿describir y extender secuencias y predecir términos remotos son realmente procesos algebraicos o son aritméticos? ¿Qué harían estos procesos algebraicos? ¿Cuáles serían los conceptos algebraicos requeridos en ese tipo de tareas? Al evadir estas preguntas, podemos terminar trivializando las cosas, como afirma el matemático de la Universidad de Yale Roger Howe:

> En años recientes, "álgebra" ha sido interpretado de manera algo diferente por algunos educadores de matemáticas, y esto se refleja en NAEP [la Evaluación Nacional de Progreso Educativo de EE. UU.]. En particular, el estudio de"patrones" ha sido declarado por algunos como álgebra. Soy escéptico de que esto haya sido productivo. (Howe2005, pag. 1)

En defensa de un enfoque de patrones para el álgebra temprana, se podría argumentar que hay algo inherentemente aritmético en el álgebra y algo inherentemente algebraico en la aritmética, y que la actividad de patrones une estos dos aspectos. En otras palabras, existen filiaciones entre las dos disciplinas. Pero, dado que no coinciden, también debe haber diferencias entre ellos. Encontrar estas diferencias, quiero argumentar, es importante desde un punto de vista educativo. De lo contrario, podríamos estar enseñando aritmética mientras pensamos que estamos enseñando álgebra. Al hacerlo, podríamos estar fallando en la promoción de formas elementales genuinas de pensamiento algebraico en los estudiantes. Es por esto que la distinción entre aritmética y álgebra es una tarea que no puede descartarse en las primeras investigaciones del álgebra. Sin proporcionar una distinción clara entre aritmética y álgebra y las relaciones epistemológicas entre estas disciplinas (al menos en lo que respecta a las matemáticas escolares), será difícil (por no decir imposible) organizar actividades en el aula que movilizarían conceptos algebraicos en los primeros años y preparar al estudiante para aprender conceptos algebraicos más sofisticados más adelante. Sin una distinción clara entre aritmética y álgebra, sería imposible afirmar que los patrones a los que Howe (2005) se refiere en la cita antes mencionada pueden ser útiles en la introducción al álgebra temprana.

En este artículo, me ocupo de dos preguntas de investigación. La primera gira en torno a si las formas incorporadas de pensamiento algebraico ya evidenciadas en adolescentes en investigaciones previas, pueden hacerse accesibles a los estudiantes jóvenes. Como argumentaré, los estudiantes pueden pensar eficazmente algebraicamente a una edad temprana. Sin embargo, necesitamos reconocer formas no tradicionales de pensamiento algebraico, es decir, formas de pensamiento algebraico que no se basan necesariamente en el simbolismo alfanumérico. La segunda pregunta de investigación trata sobre cómo dar cuenta del desarrollo de los jóvenes estudiantes en términos de su pensamiento algebraico. La primera pregunta nos lleva a indagar sobre las diferencias y similitudes entre la aritmética y el álgebra. Basándome en la investigación histórica y educativa, en la siguiente sección sugiero una distinción epistemológica entre las formas de pensamiento que se requieren en ambas disciplinas. Luego, presento algunos hallazgos de un programa de investigación longitudinal en el aula de 5 años en el que se siguió a estudiantes de 8 años a medida que pasaban del Grado 2 al Grado 6. Me centraré en particular en la génesis y el desarrollo del pensamiento algebraico no simbólico incorporado y su progresiva transición a formas culturales de pensamiento simbólico.

Aritmética y álgebra: filiaciones y rupturas

La cuestión de las filiaciones y rupturas entre la aritmética y el álgebra fue uno de los principales temas de investigación educativa en los años ochenta y noventa. Esta pregunta estaba en el centro de varios programas de investigación (por ejemplo, uno realizado por Filloy y Rojano (1989) en México, y uno de Bednarz y Janvier (1996) en Canadá). A menudo se discutió en varios PME's Grupos de trabajo e informes de investigación (Sutherland, Rojano, Bell y Lins 2001).

El trabajo de Filloy y Rojano en (1989) apunta a una de las rupturas fundamentales entre aritmética y álgebra, lo que ellos llaman un cortar. Este cortar se observó en estudios clínicos donde los estudiantes enfrentaron ecuaciones de la forma $Ax + B = Cx + D$. Para resolver ecuaciones de esta forma, los métodos aritméticos de "operaciones de reversión" que son eficaces para resolver ecuaciones del tipo $Ax + B = D$ (los estudiantes suelen restar B de D y dividir entre A), ya no son aplicables. Los estudiantes tienen que recurrir a una idea verdaderamente algebraica: funcionar en lo desconocido. Para operar sobre lo desconocido, o sobre cantidades indeterminadas en general (por ejemplo, variables, parámetros), uno tiene que pensar analíticamente. Es decir, hay que considerar las cantidades indeterminadas como si fueran algo conocido, como si fueran números específicos (ver, por ejemplo, Kieran 1989, 1990; Filloy, Rojano y Puig (2007); para un análisis epistemológico, véase Radford y Puig (2007); Serfati1999)). Desde un punto de vista genético, esta forma de pensar analíticamente; donde los números desconocidos se tratan a la par con los números conocidos, distingue la aritmética del álgebra. Y es tan característico del álgebra que el matemático francés François Viète (uno de los fundadores del álgebra simbólica moderna) identificó el álgebra como un arte analítico (Viète 1983).

Una consecuencia de esta diferencia entre aritmética y álgebra es la siguiente: por la naturaleza del álgebra analítica, las fórmulas en álgebra se deducen (de la misma manera que las soluciones se deducen al resolver ecuaciones). No advertir esta característica analítica central del álgebra puede llevarnos a pensar que la producción de fórmulas en patrones (independientemente de cómo se produjeron) es un síntoma del pensamiento algebraico. Pero como Howe (2005) señala, producir una fórmula podría ser simplemente una cuestión de adivinar la fórmula y probarla. Estoy completamente de acuerdo con él en que no hay nada algebraico en intentar y adivinar. De hecho, las estrategias de prueba y adivinanza se basan únicamente en conceptos aritméticos.

La investigación epistemológica también ha contribuido a la conversación sobre la distinción entre aritmética y álgebra. Esta investigación sugiere que la diferencia entre estas disciplinas no puede expresarse en términos de notaciones, como se ha pensado a menudo. El simbolismo alfanumérico algebraico que conocemos hoy es de hecho una invención reciente. En Occidente apareció durante el Renacimiento, junto con otras formas de representación, como la perspectiva en la pintura y la representación espacial, sustentada por cambios en los modos de producción y nuevas formas de división del trabajo (Radford 2006). El nacimiento del álgebra no es el nacimiento de su simbolismo moderno. En sus *Elementos*, Euclides recurrió a las letras sin movilizar ideas algebraicas (Unguru 1975). Los antiguos matemáticos chinos movilizaron ideas algebraicas para resolver sistemas de ecuaciones sin utilizar notaciones. Los escribas babilónicos usaban diagramas geométricos para pensar algebraicamente (Høyrup 2002). Como resultado, el uso de letras en álgebra no es una condición necesaria ni suficiente para pensar algebraicamente. Naturalmente, nuestro simbolismo algebraico moderno nos permite realizar transformaciones de expresiones que pueden resultar difíciles o imposibles con otras formas de simbolismo. Sin embargo, como veremos en un momento, el rechazo de la idea de que las notaciones son una manifestación del pensamiento algebraico abre nuevas vías para la investigación de formas elementales de pensamiento algebraico en estudiantes jóvenes.

En resumen, el uso de notaciones no puede caracterizar el pensamiento algebraico. Tampoco el uso de variables o números indeterminados. Por ejemplo, muchos estudiantes resuelven ecuaciones como $2x + 2 = 10 + x$ por ensayo y error. Obviamente, la ecuación a la que los estudiantes recurren para reemplazar notaciones con números particulares (por ejemplo, $x = 1$ o $x = 2$, etc.) incluye notaciones. Además, la ecuación trata de encontrar un número indeterminado o desconocido. Sin embargo, el procedimiento no es algebraico. Los estudiantes no piensan algebraicamente. Los estudiantes están recurriendo únicamente a conceptos aritméticos. Están pensando aritméticamente.

Basándose en investigaciones previas (p. Ej., Filloy y Rojano 1989; Filloy, Rojano y Puig 2007; Kieran 1989), hay tres condiciones, me gustaría sugerir, que caracterizan el pensamiento algebraico:

(1) indeterminación: el problema involucra números desconocidos (incógnitas, variables, parámetros, etc.);

(2) denotación: los números indeterminados involucrados en el problema tienen que ser nombrados o simbolizados. Ahora bien, esta simbolización se puede lograr de varias formas. Se pueden utilizar signos alfanuméricos, pero no necesariamente. La denotación de cantidades indeterminadas también se puede simbolizar a través del lenguaje natural, gestos, signos no convencionales o incluso una mezcla de estos;

(3) analiticidad: las cantidades indeterminadas se tratan como si fueran números conocidos. Es decir, aunque no se conocen, se parte de las cantidades indeterminadas y se opera con ellas (es decir, se las suma, se resta, se multiplica, se divide) como si se las conociera: esto es lo que significa analidad. O, como dijo el antiguo matemático Pappus cuando explicó el significado del análisis, el análisis es el movimiento de lo que se da a lo que se buscaba (Rideout 2008). Para volver a nuestra ecuación 2x + 2 = 10 + x, en lugar de sustituir la incógnita por números conocidos para ver si la igualdad se realiza, comienza con las cantidades indeterminadas y resta x de 2x de ambos lados de la ecuación, lo que da usted x + 2 = 10. Ahora, una vez más, resta 2 de cada lado de la ecuación y obtienes x =8. La identidad de x se revela no a través de un método aritmético de prueba y error, sino a través de uno algebraico analítico. La identidad de x no se adivina: es deducido. Mientras que resolver la ecuación usando métodos de prueba y error involucra notaciones y variables (porque variable no es un concepto algebraico *per se*: también hay variables en aritmética), los métodos de prueba y error no satisfacen la condición de analiticidad, y por lo tanto no son algebraicos y no se basan en el pensamiento algebraico, de acuerdo con las condiciones que he sugerido.

Algunos antecedentes de la investigación

En la investigación de los jóvenes estudiantes, el pensamiento algebraico que informo aquí comenzó en 2007. En la década anterior, estaba interesado en la investigación de adolescentes y adultos jóvenes acerca del pensamiento algebraico. De 1998 a 2006 tuve la oportunidad de seguir a varias cohortes de estudiantes desde el séptimo grado hasta el final de la escuela secundaria. Como muchos de mis colegas, comencé a enfocarme en el álgebra simbólica, es decir, una actividad algebraica mediada por signos alfanuméricos. Uno de mis objetivos era comprender los procesos que atraviesan los estudiantes para construir fórmulas algebraicas simbólicas. Mi hipótesis de trabajo era que para comprender la manera en que los estudiantes otorgan significado a las expresiones alfanuméricas, debemos prestar atención al lenguaje (Radford2000). Sin embargo, durante el análisis de cientos de horas de lecciones grabadas en video, se hizo evidente que nuestros estudiantes estaban recurriendo no solo al lenguaje, sino también a los gestos y otras modalidades sensoriales en formas que estaban lejos de ser meros subproductos de la interacción. Estaba claro que los gestos y otras formas de acción incorporadas eran una parte integral de los estudiantes, de proceso significante y funcionamiento cognitivo.

El problema era idear principios explicativos adecuados y articulados teóricamente, a fin de proporcionar una interpretación de los estudiantes. El pensamiento algebraico que integraría aquellos elementos incorporados que los análisis de video ponen en evidencia. Aunque a principios de la década de 2000, algunos lingüistas y psicólogos cognitivos habían desarrollado un trabajo interesante en torno a la cuestión de la encarnación (Johnson1987; Lakoff y Núñez2000), sus cuentas no eran fáciles de aplicar a entornos tan complejos como las aulas; ni tenían necesariamente en cuenta la dimensión histórica y cultural del conocimiento. En los años siguientes, con la ayuda de algunos estudiantes y colaboradores, pude refinar nuestro enfoque teórico (Radford 2002) y revelar formas corporales no convencionales de pensamiento algebraico (Radford 2003). En Radford, Bardini y Sabena (2007), informamos de un pasaje en el que los estudiantes de 9 ° grado mostraron una asombrosa variedad de modalidades sensoriales para llegar a una fórmula algebraica en una actividad de patrón. Lo sorprendente del pasaje relatado es la sutil coordinación de palabras, signos escritos, figuras dibujadas, gestos, percepción y ritmo. La Figura 1 presenta una interesante serie de gestos que hace un alumno al intentar percibir una estructura matemática detrás de la secuencia. Centrándose en el primer término de la secuencia (que se muestra en las tres primeras imágenes de la Fig.1), Mimi, la estudiante, señala con su índice el primer círculo de la fila superior y dice "uno"; mueve el dedo al primer círculo de la fila inferior y repite "uno."

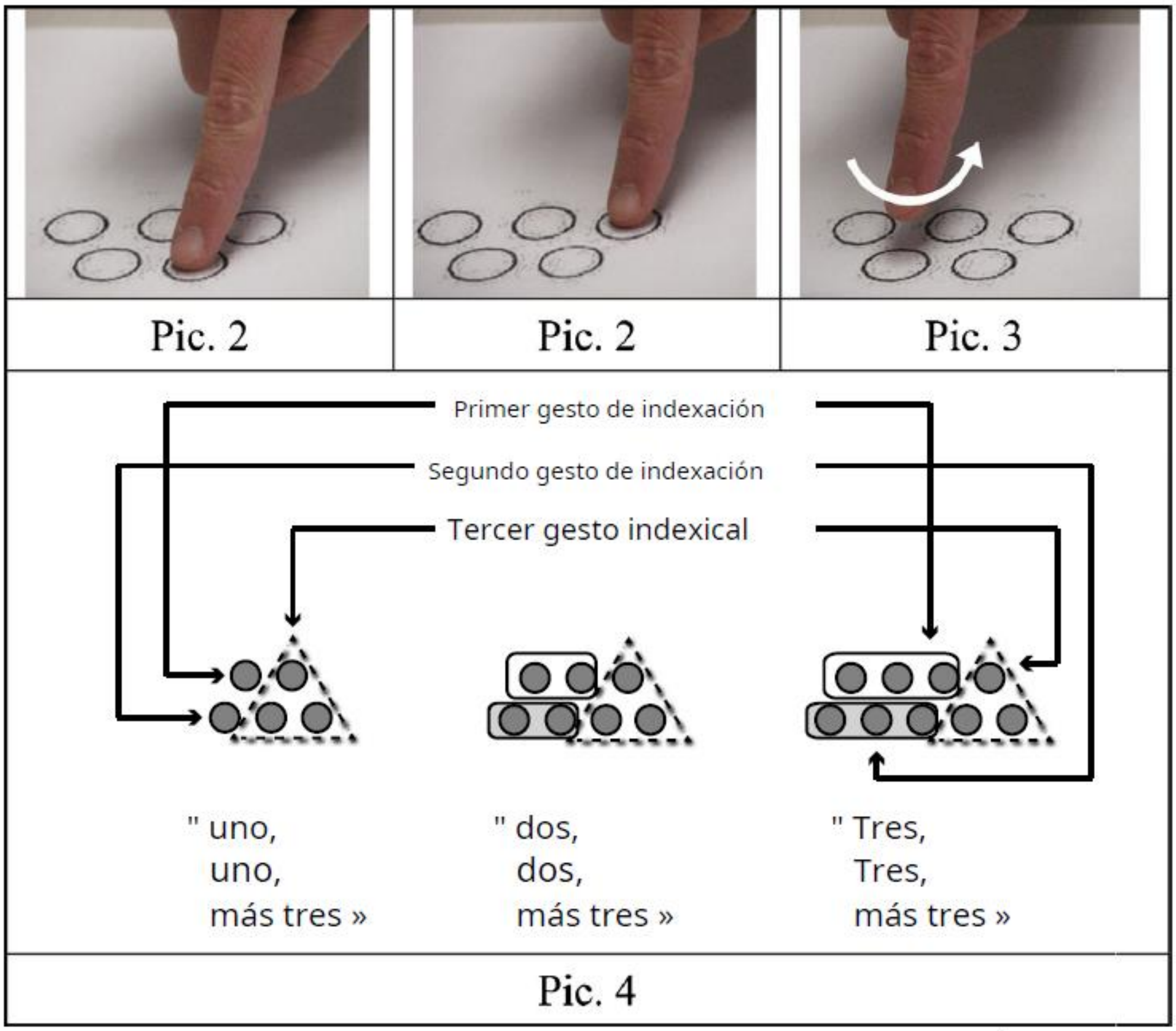

Figura 1 Un estudiante de 9. ° grado que muestra una impresionante coordinación multimodal de recursos semióticos

Luego mueve el índice a su derecha y hace una especie de gesto circular de índice para señalar los tres círculos restantes, mientras dice "más tres." Comienza de nuevo la misma serie de gestos, esta vez apuntando al segundo término de la secuencia (ver segundo término en la Imagen 4 de la Fig. 1), diciendo ahora "dos, dos más tres." Reinicia la misma serie de gestos al tratar con el tercer término (ver tercer término de la secuencia en la Fig. 1, Imagen 4); hemos agregado líneas discontinuas a los términos de la secuencia para indicar los círculos que señala Mimi mientras hace sus gestos). Al hacerlo, Mimi revela una fórmula encarnada que, en lugar de estar formada por letras, está formada por palabras y gestos: La fórmula se muestra en concreto:"uno, uno más tres; dos, dos más Tres; tres, tres, más tres." Luego aplicó la fórmula al Término 10 (que no se dibujó y tuvo que ser imaginado): "tendrá 10 puntos [es decir, círculos] (hace un gesto en el escritorio para indicar la posición de los círculos), 10 puntos (hace un gesto similar), más 3." La fórmula incorporada se basa en el uso de variables y relaciones funcionales que se ajustan al requisito de analiticidad que, como sugerí anteriormente, es característico del álgebra. Aunque la variable "número del término" no está representado a través de una letra, aparece encarnado en sus sustitutos-los números particulares que toma la variable. Luego, la fórmula se muestra como la serie de cálculos sobre la variable instanciada. Y, como tal, la fórmula es algebraica. Ahora, nuestros estudiantes de 9. ° grado usaron simbolismo alfanumérico y construyeron la fórmula"n + n + 3," que luego se transformó en "nx2 + 3"(Radford, Bardini y Sabena 2007). Por lo tanto, estos estudiantes de noveno grado pasaron sin problemas de una forma de pensamiento encarnada a una simbólica.

Volvimos a otros análisis publicados e inéditos y notamos que la sutil coordinación multimodal de sentidos y signos era un fenómeno generalizado en adolescentes. Entonces surgió una pregunta de investigación que me ha mantenido ocupado durante los últimos 6 años: ¿Serían accesibles para los estudiantes jóvenes formas de pensamiento algebraico encarnadas similares? Y en caso afirmativo, ¿cómo se desarrollarían estas formas encarnadas de pensamiento a medida que los estudiantes pasen de un grado a otro? Dado que los estudiantes de segundo grado todavía están aprendiendo a leer y escribir en Ontario, el segundo grado parecía un buen lugar para comenzar. Así fue como me mudé a una escuela primaria y me embarqué en una nueva investigación longitudinal.

Grado 2: el pensamiento algebraico no simbólico en estudiantes jóvenes

La primera actividad de generalización en nuestra clase de Grado 2 se basó en la secuencia que se muestra en la Fig. 2:

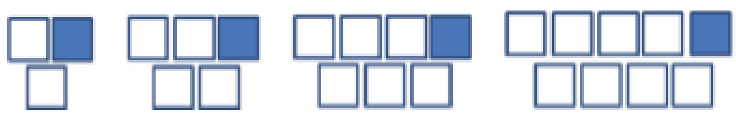

Figura 2 Los primeros términos de una secuencia que los estudiantes de segundo grado investigaron en una lección de álgebra

Les pedimos a los estudiantes que extendieran la secuencia hasta el Término 6. En preguntas posteriores, les pedimos que encontraran un procedimiento para determinar el número de rectángulos en los Términos 12 y 25. Figura 3 muestra las respuestas proporcionadas por dos estudiantes: Carlos y James.

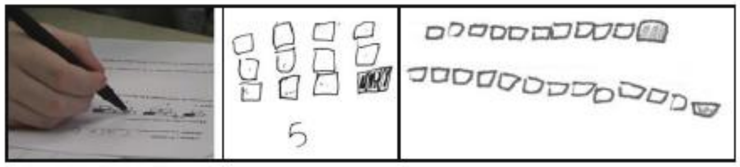

Fig. 3 A la izquierda, Carlos, contando en voz alta, señala secuencialmente los cuadrados de la fila superior del Término 3. En el medio, el dibujo de Carlos del Término 5. A la derecha, el dibujo de James de términos 5 (cima) y 6 (fondo)

Al contrario de lo que observamos en nuestra investigación con estudiantes adolescentes, al extender la secuencia, la mayoría de nuestros estudiantes de segundo grado se centraron únicamente en el aspecto numérico de los términos. Contar era la actividad principal.

En términos generales, para extender una secuencia figurativa, es necesario prestar atención a las figuras estructuralmente (Mulligan y Mitchelmore 2009). En particular, es necesario captar una regularidad que implica la vinculación de dos estructuras diferentes: una espacial y la otra numérica.

De la estructura espacial emerge un sentido de los rectángulos en posición espacial, mientras que su numerosidad emerge de una estructura numérica. Mientras Carlos atiende a la estructura numérica en la actividad generalizadora, la estructura espacial no se enfatiza de manera coherente. Esto no significa que Carlos, James y los demás estudiantes no vean las figuras como compuestas por dos filas horizontales. Lo que esto significa es que el énfasis en la estructura numérica de alguna manera deja en segundo plano la estructura geométrica. Podríamos decir que la forma de los términos de la secuencia se utiliza para facilitar el proceso de conteo. Por lo tanto, como se muestra en la Imagen 1 de la Fig.3, Carlos siempre contaba los rectángulos de forma ordenada espacialmente. La estructura geométrica, sin embargo, no llega a relacionarse con la numérica de una manera significativa y eficiente. No es de extrañar en este contexto, entonces, que los estudiantes encontraran dificultades para responder nuestras preguntas sobre los términos 12 y 25. Sin recurrir a una forma eficiente de contar, el proceso de contar rectángulos uno por uno en términos remotos más allá de lo perceptual, el campo se volvió extremadamente difícil.

Debido a su connotación espacial, no sería sorprendente que, al extender las secuencias, nuestros jóvenes estudiantes no usaran términos deácticos, como "abajo" o "arriba." En los casos en que los estudiantes lograron vincular las estructuras espaciales y numéricas, la estructura espacial apareció solo ostensiblemente, es decir, las filas "superior" e "inferior" no formaban parte del discurso de los estudiantes, sino que se hicieron evidentes a través del apuntamiento y la fila real

Fig. 4 El profesor y los estudiantes contando rítmicamente dicen (ver Pic. 1) "Term 5", (Pic. 2) "5 en la parte inferior", (Pic. 3) "5 en la parte superior", (Pic. 4) "plus 1."

conteo: Permanecieron aislados en el reino encarnado de la acción y la percepción. Al día siguiente, el maestro discutió la secuencia con los estudiantes y se refirió a las filas de manera explícita para llevar a los estudiantes atención a la vinculación de las estructuras numéricas y espaciales. Para ello, el profesor dibujó los primeros cinco términos de la secuencia en la pizarra y se refirió a un alumno imaginario que contaba por filas. "Este estudiante," dijo a la clase, "notó que en el Término

1(señaló el nombre del término) hay un rectángulo en la parte inferior (y señaló el rectángulo en la parte inferior), uno en la parte superior (apuntando al rectángulo), más un rectángulo oscuro (apuntando al rectángulo oscuro)." Luego, pasó al Término 2 y repitió de manera rítmica el mismo proceso de conteo, coordinando los deícticos espaciales "abajo" y "arriba", las filas espaciales correspondientes de la figura, y el número de rectángulos que contiene. Para asegurarse de que todos la siguieran, comenzó de nuevo desde el período 1 y, en el período 3, invitó a los estudiantes a unirse a ella en el proceso de conteo, yendo juntos hasta el período 5 (ver Fig.4). Luego, la maestra preguntó a la clase sobre el número de cuadrados en el Término 25. Mary levantó la mano y respondió:"25 en la parte inferior, 25 en la parte superior, más 1." La clase pasó algún tiempo lidiando con "remoto" términos, como los términos 50 y 100. Figura 5 muestra a Karl explicando al maestro y a sus compañeros de grupo cómo es el Término 50.

En la Imagen 1, Karl mueve su brazo y su cuerpo de izquierda a derecha de manera vigorosa para indicar la fila inferior del Término 50, mientras dice que allí habría 50 rectángulos blancos. Mueve el brazo un poco más y repite el gesto del brazo en movimiento para indicar la fila superior del Término 50. Luego, hace un gesto de semicírculo en el aire para indicar el cuadrado oscuro.

Los alumnos jugaron un rato con términos remotos. En el grupo de Karl, una de las preguntas giraba en torno al Término 500 y al Término 50:

Karl: ¿Qué tal si haces 500 más 500?

Erica: No. Haz algo más simple.

Karl: (Hablando casi al mismo tiempo) 500 más 500 es igual a 1000.

Erica: Más 1, 1001.

Karl: más 1, es igual a 1001.

Cindy: (Hablando del Término 50) 50 más 50, más 1 es igual a

Figura 5 Karl explicando el Término 50

Esquemáticamente hablando, la respuesta de los estudiantes a la pregunta del número de rectángulos en términos particulares remotos fue "x + x +1"(donde x siempre fue un número específico). La fórmula que sostengo, es de naturaleza algebraica, incluso si no está expresada en notaciones estándar. En este caso, la indeterminación y la analiticidad aparecen de forma intuida, en lugar de explícitamente. Una pregunta natural es: ¿Es esto todo lo que los estudiantes de segundo grado son capaces de hacer? De hecho, la respuesta es no. Como veremos en la siguiente sección, pudimos crear las condiciones para el surgimiento de formas más sofisticadas de pensamiento algebraico.

Más allá de la indeterminación intuida: el problema del mensaje

En el quinto día de nuestra secuencia de enseñanza-aprendizaje de generalización de patrones, el maestro volvió a la secuencia del primer día (Fig. 2). Para recapitular, invitó a algunos grupos a compartir frente a la clase lo que habían aprendido sobre esa secuencia a la luz de los debates en el aula de días anteriores y del trabajo en pequeños grupos. Luego, hizo una pregunta completamente nueva a la clase. Tomó una caja y, frente a los alumnos, metió en ella varias tarjetas, cada una con un número: 5, 15, 100, 104, etc. Cada uno de estos números representaba el número de un término de la secuencia mostrada en la fig.2. El profesor invitó a un alumno a elegir al azar una de las tarjetas y meterla en un sobre, asegurándose de que ni el alumno ni el profesor ni nadie más vieran el número de antemano. El sobre, dijo la maestra, iba a ser enviado a Tristan,

un estudiante de otra escuela. Se invitó a los estudiantes de segundo grado a enviar un mensaje que se colocaría en el sobre junto con la tarjeta. En el mensaje, los estudiantes le dirían a Tristan cómo calcular rápidamente el número de rectángulos en el término indicado en la tarjeta. Por tanto, se desconocía el número del término. ¿Podrían los estudiantes generalizar la fórmula incorporada y realizar cálculos sobre este número desconocido? En otros términos, ¿Podrían nuestros estudiantes de segundo grado ir más allá de la indeterminación intuida y su correspondiente forma elemental de pensamiento algebraico? Como en los días anteriores, los alumnos trabajaron en grupos de tres. La respuesta habitual era dar un ejemplo. Por ejemplo, Karl sugirió: "Si el número [en la tarjeta] es 50, usted hace 50, más 50, más 1." La profesora elogió a los alumnos por la idea, pero insistió en que el número podría ser otra cosa y preguntó si habría otra forma de decirlo sin recurrir a ejemplos. Después de una intensa discusión, a los estudiantes se les ocurrió una sugerencia:

Érica: Es el número que tiene, el mismo número en la parte inferior, el mismo número en la parte superior, más 1. . .

Maestro: Eso es excelente, pero no te olvides: él no t tengo que dibujar [el término]. Solo tiene que agregar. . . Entonces, ¿cómo podemos decirlo, usando esta buena idea?

Érica: ¡Podemos usar nuestra calculadora para calcular!

Maestro: Ok. ¿Y qué va a hacer con la calculadora?

Érica: Él pondrá el número. . . (finge estar insertando un número en la calculadora). . .más el mismo número, más 1 (mientras habla, finge estar insertando nuevamente el número y el número 1).

Otro grupo sugirió "el doble del número más 1." Naturalmente, el uso de la calculadora es meramente virtual. En la calculadora real de los estudiantes, todas las entradas son números específicos. Sin embargo, la calculadora ayudó a los estudiantes a adelantar el análisis analítico dimensión que aparentemente faltaba en los estudiantes fórmula explícita. Mediante el uso virtual de la calculadora, los cálculos ahora se realizan en esta instancia no especificada de la variable-el número desconocido de la figura.

Permítanme resumir los logros de nuestros estudiantes de segundo grado durante la primera semana que estuvieron expuestos al álgebra. Al principio, la mayoría de nuestros estudiantes estaban lidiando con secuencias de figuras como la de la Fig.1 a través de un enfoque en la numerosidad. No fue fácil averiguar la cantidad de elementos (rectángulos, en el ejemplo aquí discutido) en términos remotos no fue fácil. El proceso de conteo conjunto en el que participaron el profesor y los estudiantes durante el segundo día ayudó a los estudiantes a pasar a otras formas de ver las secuencias. El proceso de conteo conjunto hizo posible que los estudiantes notaran y articularan nuevas formas de generalización matemática. En particular, se dieron cuenta del hecho de que el proceso de conteo puede basarse en una idea relacional: vincular el número de la figura a partes relevantes de la misma (por ejemplo, los cuadrados de la fila inferior). Esto requiere una percepción completamente nueva del número del término y de los términos mismos. Los términos aparecen ahora no como un mero grupo de rectángulos ordenados, sino como algo susceptible de descomponerse, las partes descompuestas llevan pistas potenciales para que ocurran relaciones algebraicas. Históricamente hablando, la "descomposición" de figuras geométricas en formas más simples (por ejemplo, líneas rectas) fue desarrollado sistemáticamente en el siglo XVII por Descartes en su Geometría (Barbin 2006), un libro central en el desarrollo de ideas algebraicas. La descomposición de cifras permitió la creación de relaciones entre números conocidos y desconocidos y la realización de cálculos sobre ellos.

Nuestros ejemplos, así como los reportados por otros investigadores con otros estudiantes de segundo grado (p. ej., Rivera 2010), sugieren que la vinculación de estructuras espaciales y numéricas constituye un aspecto importante del desarrollo del pensamiento algebraico. Tal vínculo se basa en la transformación cultural en la forma en que se pueden ver las secuencias, una transformación que puede denominarse domesticación del ojo (Radford, 2010).

Para el matemático moderno, la complejidad detrás de la percepción de secuencias simples como la que abordaron nuestros alumnos de 2do grado permanece en un segundo plano, hasta el punto de que ver las cosas como el ojo lo hace, de manera natural. Sin embargo, como indican nuestros resultados, no hay nada natural allí. Prestar atención con éxito a lo que es algebraicamente significativo es parte de aprender a pensar algebraicamente. Esta transformación cultural del ojo no es específica de los estudiantes de segundo grado.

Con todo, la vinculación de estructuras espaciales y numéricas resultó, como hemos visto, en el surgimiento de una forma elemental de pensamiento algebraico que se manifestó en la constitución incorporada de una fórmula donde la variable se expresa a través de instancias particulares, que podemos esquematizar como "x + x +1"(donde x siempre fue un número específico). Esta fórmula, sostengo sobre bases semióticas y epistemológicas, es genuinamente algebraica.

Ahora bien, eso no significa que todas las fórmulas proporcionadas por los estudiantes jóvenes sean algebraicas. Para dar un ejemplo, uno de los estudiantes sugirió que para averiguar la cantidad de elementos en el Término 100, siga agregando 2, 2 y 2 al Término 1 hasta llegar al Término 100. Este es un ejemplo de generalización aritmética no de uno algebraico, ya que no hay analiticidad involucrada. La "Problemática del mensaje" ofreció a los estudiantes la posibilidad de ir más allá de la indeterminación intuitiva y pensar, hablar y calcular explícitamente sobre un número desconocido. Aunque varios estudiantes pudieron producir una fórmula explícita (p. Ej.,"el número más el número, más 1" o "dos veces el número más 1”), otros estudiantes produjeron una fórmula en la que el número desconocido general se representaba mediante un ejemplo. Esto es lo que Mason (1996) llama ver lo general en o a través de lo particular. Tanto la fórmula explícita como la fórmula general a través de lo particular dan testimonio de una forma más sofisticada de pensamiento algebraico elemental que la encarnada en la que la variable y la fórmula se muestran en acción.

Revelando a nuestros estudiantes de segundo grado' Las formas elementales y presimbólicas de pensamiento algebraico antes mencionadas respondieron a nuestra primera pregunta de investigación, es decir, si las formas encarnadas de pensamiento que observamos en los adolescentes son accesibles a los estudiantes más jóvenes. Sin embargo, existen diferencias. Los adolescentes en general tienden a gesticular, hablar y simbolizar de manera armoniosa y coordinada (a menudo después de un período de desajuste entre palabras y gestos (Arzarello y Edwards2005; Radford2009a).

Nuestros jóvenes estudiantes, en cambio, tienden a gesticular con enérgica intensidad (ver, por ejemplo, la Fig.5). La intensidad energética puede disminuir a medida que los estudiantes se vuelven cada vez más conscientes de las variables y la relación entre números conocidos y desconocidos. Sin embargo, la intensidad energética sigue siendo relativamente pronunciada en comparación con lo que hemos visto en adolescentes (Radford2009a, 2009b). Este fenómeno puede ser una muestra de un problema relacionado con nuestra segunda pregunta de investigación, a saber: ¿Cómo se desarrolla el pensamiento algebraico de los jóvenes estudiantes? Esta pregunta constituye la segunda pregunta de investigación que mencioné en la Introducción. ¿Cómo podemos dar cuenta del desarrollo del pensamiento algebraico de los jóvenes estudiantes?

Las preguntas sobre el desarrollo son muy complicadas, como bien saben los psicólogos. No es suficiente recopilar datos año tras año y simplemente comparar lo que hicieron los estudiantes en el año 1, con lo que hicieron en el año 2, etc. Exponer las diferencias muestra algo, pero no explica nada. Luché con la cuestión del desarrollo de los estudiantes durante aproximadamente una década cuando estaba investigando con adolescentes, y debo confesar que no pude encontrar algo satisfactorio. Sin embargo, mi investigación con adolescentes me ayudó a visualizar una concepción sensual y material de la cognición matemática (Radford2009b) que fue fundamental para abordar la cuestión del desarrollo. Antes de continuar en mi relato de lo que hicieron los estudiantes en los años siguientes, primero necesito detenerme en la cuestión del desarrollo.

Pensar y su desarrollo

En contraste con los enfoques cognitivos mentales, he sugerido que pensar (Radford 2009b), no es algo que ocurre únicamente "en la cabeza." Se puede considerar que el pensamiento está formado por componentes materiales e ideacionales: está formado por el habla (interior y exterior), formas objetivadas de imaginación sensorial, gestos, tacto y nuestras acciones reales con artefactos culturales. Así, en la Fig.5 Por ejemplo, Karl está pensando con y a través del cuerpo de la misma manera que está pensando a través y en el lenguaje y el arsenal de categorías conceptuales que nos proporciona para notar, resaltar y prestar atención a las cosas, y las intentemos en ciertas culturas. formas tópicas. Lo mismo puede decirse del profesor de la Fig.4. Aunque se podría argumentar que el profesor y el alumno estan simplemente comunicando ideas, yo replicaría que esta división entre pensar y comunicar sólo tiene sentido dentro del contexto de una concepción de la mente como un espacio privado dentro de nosotros, donde las ideas se crean, computan y solo entonces se comunican.

Esta visión computacional de la mente tiene una larga historia en nuestras tradiciones filosóficas idealistas y racionalistas occidentales. El punto de vista que estoy esbozando aquí va en contra de la suposición dualista de mente versus cuerpo o ideal versus material. El pensamiento aparece aquí como una forma material ideal de reflexión y acción, que ocurre no solo en la cabeza, sino también en y a través de una sofisticada coordinación semiótica del habla, el cuerpo, los gestos, los símbolos y las herramientas. Por eso, durante las conversaciones difíciles, en lugar de escarbar en la cabeza primero, para encontrar las ideas que queremos expresar,

Nótese que decir que el pensamiento se compone de habla (interna y externa), formas objetivadas de imaginación sensorial, gestos, tacto y nuestras acciones reales con artefactos culturales no significa que el pensamiento sea una colección de elementos. Si volvemos a nuestros ejemplos, Carlos (ver Fig. 3, izquierda), mientras movía la parte superior de su cuerpo, recurría a gestos y palabras de señalar para contar los rectángulos en los primeros términos de la secuencia. Las palabras y los gestos fueron guiando su actividad perceptiva para hacer frente a la numerosidad de los términos. Al igual que Carlos, Karl movía la parte superior del cuerpo, hacía gestos con los brazos y las manos y recurría al lenguaje (Fig. 5). Al declarar la fórmula “el número más el número, más 1”, Erica gesticuló como si estuviera presionando teclas en el teclado de la calculadora (Radford 2011). Sin embargo, la relación entre percepción, gestos y palabras no es la misma. Lo que significa es que el pensamiento no es una mera colección de elementos. El pensar es más bien una unidad dinámica de componentes materiales e ideales. Esta es la razón por la que el mismo gesto (p. ej., un gesto indicial que señala los rectángulos en la parte superior del Término 3) puede significar algo conceptualmente sofisticado o algo muy simple. Es decir, el significado real de un componente del pensamiento sólo puede reconocerse por el papel que dicho componente desempeña en el contexto de la unidad de la que forma parte.

Ahora puedo formular mi pregunta sobre el desarrollo. Si el pensamiento es una unidad sistémica de componentes ideacionales y materiales, sería erróneo estudiar su desarrollo centrándose únicamente en uno de sus componentes. Así, el desarrollo del pensamiento algebraico no puede reducirse al desarrollo de su componente simbólico (el uso de la notación, por ejemplo). El desarrollo del pensamiento algebraico debe estudiarse como un todo, teniendo en cuenta el desarrollo dialéctico interrelacionado de sus diversos componentes (Radford 2012a). Si en un apartado anterior hablé de la “domesticación del ojo”, esta domesticación tiene que estar relacionada también con la “domesticación de la mano”. Y, de hecho, esto es lo que sucedió en nuestra clase de Grado 2 a partir del segundo día. Como recordamos, el profesor (Fig. 4) hizo un uso extensivo de la gestualidad y un uso explícito del ritmo y deícticas lingüísticas, seguido más tarde por los alumnos, que empezaron a utilizar las manos y los ojos de formas novedosas, abriendo nuevas posibilidades a la utilizan formas culturales eficientes y evolucionadas de generalización matemática que aplicaron con éxito a otras secuencias con formas diferentes.

En resumen, no es sólo la actividad táctil, perceptual o de uso de símbolos la que se modifica en el desarrollo. De la misma manera que se desarrolla la percepción, también lo hacen el habla (por ejemplo, a través de la deíctica espacial) y el gesto (a través del ritmo y la precisión). La percepción, el habla, el gesto y la imaginación se desarrollan de manera interrelacionada. Llegan a formar una nueva unidad de los componentes material-ideacionales del pensamiento, donde las palabras, los gestos y los signos se usan más generalmente como medios de objetivación o, como dijo Vygotsky, "como medio de dirigir voluntariamente la atención, como medio de abstraer y aislar características, y como medio de ... sintetizar y simbolizar" (Vygotsky 1987, p. 164). Dentro de este contexto, plantear la pregunta sobre el desarrollo del pensamiento algebraico es preguntar sobre la aparición de nuevas relaciones estructurantes sistémicas entre los componentes materiales ideacionales del pensamiento (por ejemplo, el gesto y el habla interna y externa) y la manera en que estas relaciones se establecen. organizado y reorganizado. Es a través de estos lentes de desarrollo que estudié los datos recopilados en los años siguientes y que resumo en el resto de este artículo, centrándome en los grados 3 y 4.

Grado 3: Contracción semiótica

Como es habitual, en el Grado 3 se les presentó a los estudiantes tareas de generalización para ser abordadas en pequeños grupos. La primera tarea presentaba una secuencia figurativa, con n círculos en horizontal y n-1 en vertical, de los cuales se dieron los primeros cuatro términos. Al contrario de lo que hizo primero en Grado 2, desde el principio Carlos percibió la secuencia aprovechando la configuración espacial de sus términos. Hablando con sus compañeros sobre el Término 4 dijo: “aquí (señalando la parte vertical) hay cuatro. Por ejemplo, tomas todo esto [es decir, la parte vertical] juntos (dibuja una línea alrededor), y tomas todo esto [es decir, la parte horizontal] juntos (dibuja una línea alrededor; ver Fig. 6, Imagen 1). Entonces, debemos dibujar 5 así (mediante un gesto vertical indica el lugar donde se debe dibujar la parte vertical) y (haciendo un gesto horizontal) 5 así” (ver Fig. 6, Fotos 2-3). Cuando la maestra vino a ver al grupo, le pidió a Carlos que dibujara para ella el Término 10, luego el Término 50. La primera respuesta se dio usando deícticos y gestos no especificados. Rápidamente dijo: “10 así (gesto vertical) y 10 así” (gesto horizontal). El término deíctico específico “vertical” se usó para responder la pregunta sobre la Figura 50. Dijo: “50 en la vertical… y 49…” Cuando el maestro se fue, los estudiantes siguieron discutiendo cómo escribir la respuesta a la pregunta sobre el Término 6 Carlos escribió: “6 verticales y 5 horizontales”.

En términos de desarrollo, vemos la evolución de la unidad de los componentes ideacionales-materiales del pensamiento algebraico. Ahora, Carlos por sí mismo y con mucha facilidad coordina gestos, percepción y habla. La coordinación de estos componentes externos del pensamiento es mucho más refinada en comparación con lo que observamos en el Grado 2. Este refinamiento es lo que hemos llamado una contracción semiótica (Radford 2008a), es decir, un proceso genético en el curso del cual se toman decisiones. entre lo que cuenta como relevante e irrelevante; conduce a una contracción de la actividad semiótica anterior, lo que resulta en un vínculo más refinado de los recursos semióticos. Implica un nivel más profundo de conciencia e inteligibilidad del problema en cuestión y es un síntoma de aprendizaje y desarrollo conceptual.

Fig. 6 A la izquierda, Término 4 de la secuencia dada. En el centro, los gestos verticales y horizontales de Carlos mientras imagina y habla sobre el Término 5 aún por dibujar. A la derecha, los dibujos de Carlos de los Término 5 y 6

Grado 4: La domesticación de la mano

Para comprobar las preguntas de desarrollo, en 4.° grado les dimos a los alumnos la secuencia con la que comenzaron en 2.° grado (ver Fig. 2). Esta vez, desde el principio, Carlos percibió que los términos estaban divididos en dos filas. Hablando con sus compañeros y refiriéndose a la fila superior del Término 5, dijo como si hablara de algo banal: “5 cuadrados blancos, porque en el Término 1, hay 1 cuadrado blanco (haciendo un rápido gesto de señalar) ... Término 2, 2 [cuadrados] (haciendo otro gesto rápido de señalar); 3, (otro gesto rápido de señalar) 3”. Dibujó los cinco cuadrados blancos en la fila superior del Término 5 y agregó: "después de eso, agrega un cuadrado oscuro". Luego, refiriéndose a la fila inferior del Término 4: “hay 4; allí [Término 5] hay 5.” Cuando el maestro vino a ver su trabajo, Carlos y sus compañeros de equipo explicaron: “Vimos el Término 2, es lo mismo [es decir, 2 cuadrados blancos en la parte superior] . . . El término 6 tendrá 6 cuadrados blancos”.

Había una pregunta en la actividad en la que se pedía a los estudiantes que explicaran a un estudiante imaginario (Pierre) cómo construir un término grande de la sucesión (el “Problema del término grande”). En el Grado 2, los estudiantes eligieron sistemáticamente un término en particular. Esta vez, Carlos escribió: “Necesita [poner tantos cuadrados blancos como] el número del término arriba y abajo, más un cuadrado oscuro arriba”.

El "problema del mensaje" de nuevo

Al final de la lección, los estudiantes abordaron nuevamente el “Problema del mensaje”. A diferencia del largo proceso que, en el Grado 2, precedía a la construcción de un mensaje sin ejemplos particulares (Radford 2011), esta vez la respuesta se produjo más rápidamente:

David: El número del término lo calculas dos veces y le sumas uno. ¡Eso es!

Carlos: (Parafraseando la idea de David) el doble más uno.

La actividad finalizó con un nuevo reto. El maestro pidió a los estudiantes que agregaran al mensaje escrito una “fórmula matemática”. Después de una discusión en el grupo de Carlos sobre la diferencia entre una frase y una fórmula matemática, los estudiantes acordaron que una fórmula debe incluir operaciones únicamente. La fórmula de Carlos se muestra en la Imagen 3 de la Fig. 7. Desde una perspectiva de desarrollo, vemos cómo se ha refinado el uso del lenguaje de Carlos. En el Grado 2 recurrió a términos particulares (Término 1,000) para responder la misma pregunta sobre el "término grande". Aquí trata la indeterminación de manera fácil, a través de la expresión “el número del término”. Incluso va más allá y produce dos expresiones simbólicas para calcular el total de cuadrados en el término no especificado (Fig. 7, derecha). Las actividades semióticas de percibir, gesticular, hablar y simbolizar se han desarrollado en mayor medida. Han alcanzado un refinamiento y consistencia interrelacional que no estaba presente en el grado 2 y no estaba completamente desarrollado

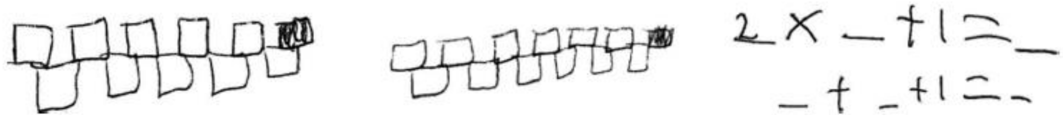

Fig. 7 Izquierda, dibujos de Carlos de los términos 5 y 6. Derecha, fórmulas de Carlos

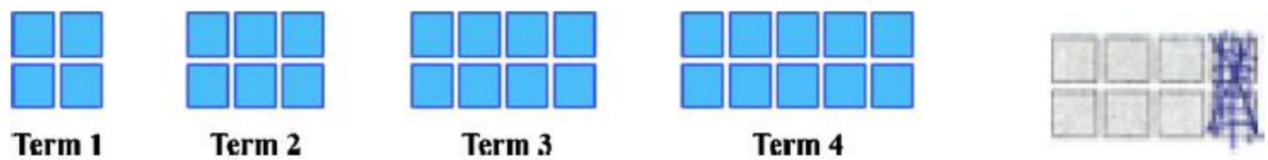

Fig. 8 Foto 1 (izquierda), la secuencia de la tarea. Imagen 2 (derecha), descomposición de Carlos del Término 3

en el Grado 3. Este refinamiento del desarrollo cognitivo se hizo aún más evidente cuando el maestro llevó a los estudiantes al mundo de las notaciones, como veremos ahora.

La introducción a las notaciones

La introducción a las notaciones ocurrió cuando los estudiantes discutieron sus respuestas a la tarea en base a la secuencia que se muestra en la Fig. 8. La discusión tuvo lugar justo después de la discusión general sobre el "Problema del mensaje" aludido en la subsección anterior.

El maestro les dio a los estudiantes la oportunidad de comparar y discutir sus respuestas a la tarea trabajando en pequeños grupos. En el grupo de Carlos, los términos de la sucesión se percibían como formados por dos filas, cada una con el mismo número que el número del término más una suma de dos cuadrados al final (ver Figura 2 en la Fig. 8). Como sugiere Carlos, refiriéndose al Término 15, “15 arriba, 15 abajo, más 2, eso es 32”. O bien, como explica Celia, una de las compañeras de equipo de Carlos, “15+1 es igual a 16, luego 16+16. . . lo que hace 32.” Después de unos 10 minutos de discusión en grupos pequeños, el maestro alentó a los estudiantes a producir una fórmula como la que acaban de proporcionar para el "Problema del mensaje". Luego, la clase pasó a una discusión general donde varios grupos presentaron sus hallazgos. Erica fue a la Pizarra Inteligente Blanca Interactiva (ISB) y sugirió la siguiente fórmula: “1+1+2 × __=__” La maestra preguntó si sería posible escribir, en lugar de los guiones bajos, otra cosa. Un estudiante sugirió poner un signo de interrogación. El maestro reconoció que también se podía usar el signo de interrogación y pidió otras ideas.

Samantha respondió con una pregunta:

Samantha: ¿Una carta?

Maestra: ¡Ay! ¿Puedo escribir uno más uno más dos por n? ¿Qué significa n?

Un estudiante: Un número…

Maestra: ¿Podríamos escribir que (es decir, uno más uno más dos por n) es igual a n? (Algunos estudiantes respondieron que sí, otros que no; hablando con Erica que está en la pizarra) Ok. Escríbelo, escribe tu fórmula (Erica escribe 1+1+2 x n=n).

Carlos: No, porque n (es decir, el primero) no es igual a n (es decir, el segundo)

Maestra: ¡Ay! ¿Por qué dices que n no es igual a n?

Carlos: Porque si haces 2 por n, eso no será igual a [el segundo] n.

Maestra: ¡Guau!

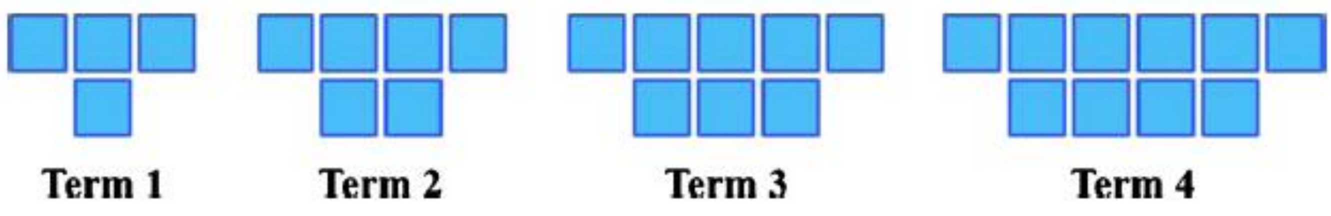

Fig. 9 La secuencia destacada de la nueva actividad

Fig. 10 William haciendo gestos precisos para referirse al Término 6

Para no precipitar a los alumnos en el mundo de las anotaciones, el profesor decidió retrasar la cuestión de utilizar una segunda letra para designar el total. Como veremos, esta pregunta surgirá en la siguiente actividad. Mientras tanto, la fórmula quedó como 1+1+2 x n=__.

La siguiente actividad comenzó de inmediato. A los estudiantes se les proporcionó la nueva hoja de actividades que presentaba la secuencia que se muestra en la Fig. 9. Se animó a los estudiantes a pensar en tantas fórmulas como fuera posible para determinar el número de cuadrados en cualquier término de la secuencia.

Durante la discusión en grupos pequeños, William ofrece una manera de percibir los términos. Hablando con Carlos, y refiriéndose al Término 6, que dibujaron en la hoja de actividades, William dice (refiriéndose a la fila superior): “Hay 8 [cuadrados], porque 6+2=8. Verás, en la parte de abajo siempre está el número del término, ¿ves? Su pronunciación va acompañada de un gesto preciso con dos dedos a través del cual indica la fila inferior (ver Fig. 10, izquierda). Continúa: “entonces, en la parte superior, siempre es más 2” (haciendo el gesto que se muestra en la Fig. 10, a la derecha).

La respuesta al "Problema del mensaje" se proporcionó sin dificultades. Sin dudarlo, Carlos dijo: “Ok. Duplica el número y suma 2.” La clase pasó a una discusión general, que fue un espacio para discutir diferentes formas de percibir la secuencia y de escribir una fórmula. Marianne fue a la JIS y sugirió que los términos se pudieran imaginar divididos en dos filas iguales y que se agregara un cuadrado a la izquierda y otro a la derecha de la fila superior. En la Fig. 11, refiriéndose al Término 3, señala primero la fila superior (imaginada como formada por tres cuadrados; ver Fig. 11, Imagen 1). Luego señala la fila inferior (Imagen 2), luego el cuadrado adicional en la parte superior derecha (Imagen 3) y el cuadrado adicional en la parte superior izquierda (Imagen 4). Celia propuso que un término fuera igual al anterior al que se le agregan dos cuadrados en el extremo derecho. En la Fig. 11, Imágenes 5 y 6, oculta los dos cuadrados más a la derecha en los Términos 2 y 3 para mostrar que lo que queda en cada caso es el término anterior. La sofisticación evolutiva que ha alcanzado la unidad sistémica percepción-gesto-lenguaje es muy clara.

Luego, los estudiantes presentaron sus fórmulas. Carlos presentó la siguiente fórmula: N+N+2=_. El lugar de la variable en la fórmula se simboliza con una letra y el signo de subrayado. Las letras de la fórmula de Carlos aparecen tímidamente dibujadas, conservando aún los vestigios de las simbolizaciones anteriores (ver Fig. 7, derecha).1 La profesora preguntó si sería posible utilizar otra letra para designar el resultado:

Maestra: Bueno, empezamos con letras [en tu fórmula]. Tal vez podríamos continuar

con letras?

Carlos: ¡No!

Maestra: ¿Por qué no?

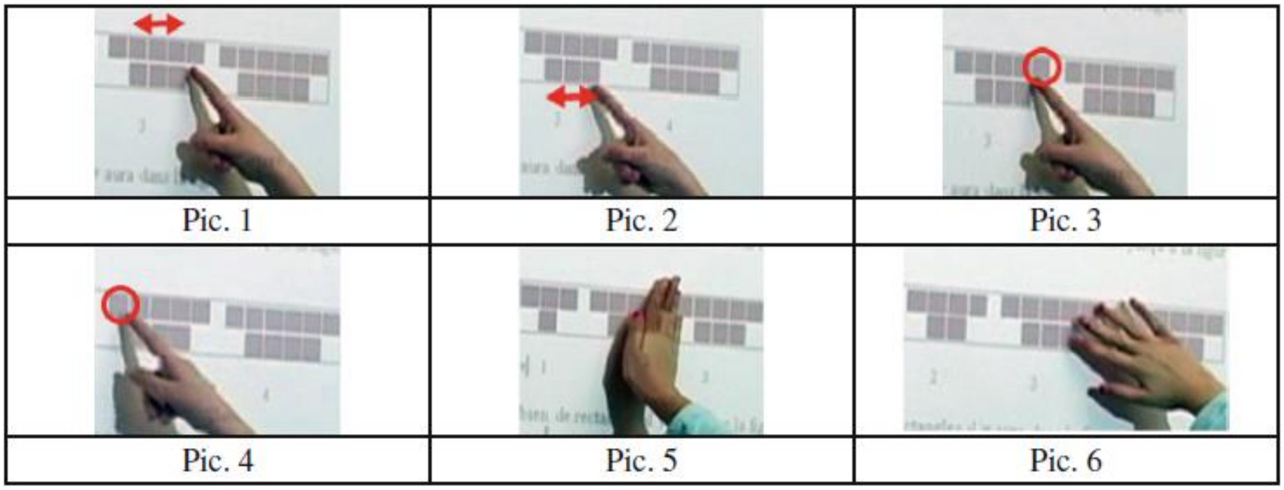

Fig. 11 Gestos de Marianne (Ilustraciones 1–4) y Celia (Ilustraciones 5–6)

Carlos: una r?

Maestra: ¿Por qué r?

Caleb: La respuesta (en francés, la réponse).

Carlos completó la fórmula de la siguiente manera: : N+N+2=R . Otras fórmulas se muestran en la Fig. 12:

Síntesis y observaciones finales

En este artículo, me ocupé de dos preguntas de investigación. El primero giró en torno a si las formas incorporadas de pensamiento algebraico, ya evidenciadas en adolescentes en investigaciones anteriores, pueden hacerse accesibles a los jóvenes estudiantes. La segunda pregunta de investigación fue sobre cómo dar cuenta del desarrollo del pensamiento algebraico de los jóvenes estudiantes.

En la primera parte del artículo sugerí, tanto desde el punto de vista histórico-epistemológico como semiótico, que el pensamiento algebraico no puede reducirse a una actividad mediada por notaciones. Aunque el simbolismo alfanumérico moderno constituye un sistema semiótico muy poderoso, de ninguna manera puede caracterizar el pensamiento algebraico. Como argumenté en trabajos anteriores, se puede obtener una fórmula para calcular el número de rectángulos en secuencias como la que se presenta en la Fig. 2, como “2n+1”, mediante métodos aritméticos de prueba y error. De hecho, esto es lo que sucede a menudo cuando los adolescentes abordan secuencias figurativas o puramente numéricas (Radford 2008a).

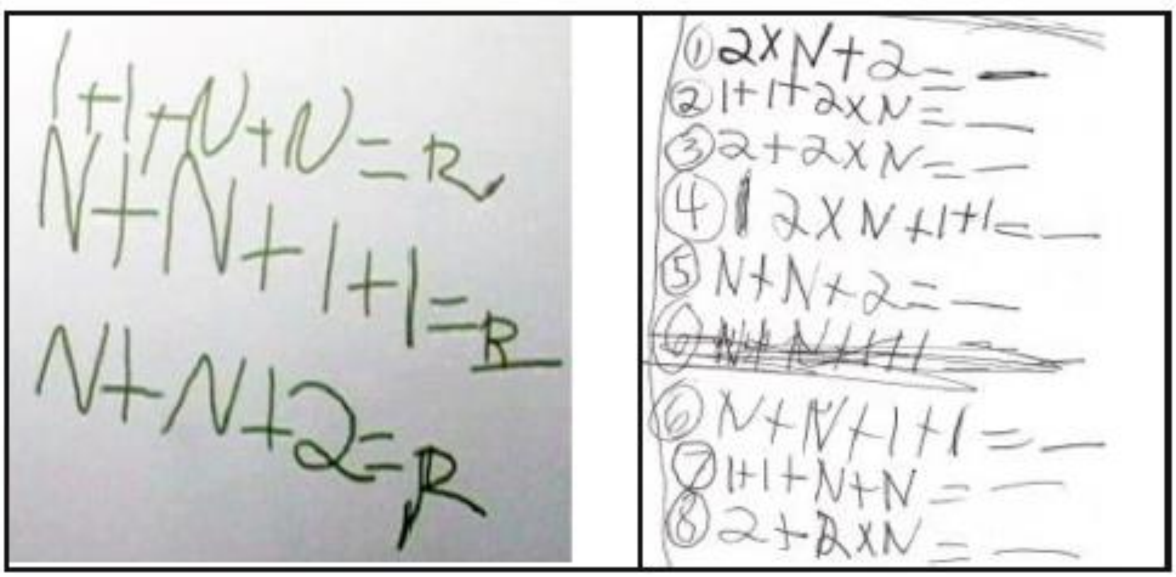

Fig. 12 A la izquierda, algunas fórmulas de la discusión en el aula. Derecha, fórmulas del grupo de Erica.

El pensamiento algebraico, sugerí, se caracteriza más bien por la manera analítica en la que trata con números indeterminados, algo en lo que, como dos padres del álgebra, Viète (1983) y Descartes (1954), afirmaron explícitamente, no se hace diferencia entre lo conocido y lo conocido. números desconocidos.

Mirar el pensamiento algebraico desde esta perspectiva abre nuevas posibilidades para repensar la forma en que se pueden significar las cantidades indeterminadas. Es aquí donde entra en escena la semiótica. De hecho, la semiótica está interesada en comprender la manera en que los individuos significan (Eco 1988). Un riguroso análisis de video nos convenció de que los estudiantes significan números indeterminados recurriendo a una plétora de recursos semióticos. Luego sugerí que, en lugar de ser simplemente un subproducto del pensamiento, estos recursos materiales y corporales constituyen la textura muy sensible del mismo. Por supuesto, para hacer eso, uno tiene que abandonar la idea de la mente como un motor interno computacional o adaptativo. Hay que poner en primer plano una concepción diferente del pensamiento. Para llegar a una visión articulada, que traté de elaborar a través del concepto de cognición sensorial (Radford 2009b), me basé en el trabajo de psicólogos como Leontyev (1981) y antropólogos como Geertz (1973) y, recientemente, Malafouris y Renfrew (2010), quienes abogan por una concepción sensorial y material de la cognición humana. Desde una perspectiva sensual de la cognición humana, no es difícil apreciar que los estudiantes de 7 u 8 años pueden comenzar a pensar algebraicamente de manera efectiva. Pasar a la segunda pregunta de investigación fue mucho más difícil. ¿Cómo dar cuenta del desarrollo de las formaciones cognitivas? El término desarrollo comenzó a usarse en el siglo XVIII y se entendía como un despliegue de estructuras preformadas o como la puesta de manifiesto de posibilidades latentes o de alguna manera incorporadas que florecerían naturalmente. La opinión que he defendido aquí es diferente. El pensamiento algebraico, como todas las formas culturales de pensamiento (por ejemplo, estética, legal, política, artística), es una forma teórica que ha surgido, evolucionado y refinado en el curso de la historia cultural. Preexistía en una forma ideal desarrollada antes de que los estudiantes participaran en nuestras actividades de clase. La mayor característica del desarrollo infantil, argumentó Vygotsky (1994), no es que esta forma ideal cultural e históricamente constituida ya esté presente en el medio ambiente o en la sociedad. La mayor característica del desarrollo infantil consiste en cómo esta forma ideal ejerce una influencia real en el pensamiento del niño. Pero, ¿cómo puede esta forma ideal ejercer tal influencia sobre el niño? La respuesta de Vygotsky (1994) es: bajo condiciones particulares de interacción entre la forma ideal y el niño. En nuestro caso, las condiciones particulares de interacción entre el pensamiento algebraico como forma ideal histórica y nuestros alumnos de 2° grado estaban constituidas por una secuencia de actividades que eran portadoras intencionales de esta forma ideal. La intencionalidad se revela en los principales temas recurrentes de nuestras cuestiones matemáticas (p. ej., la ampliación de las sucesiones, el tratamiento de los "grandes términos", el "Problema del mensaje", las cuestiones de notación), que, lejos de ser inocentes o conceptualmente neutrales, ya eran imbuido de significados culturales y una pretendida dirección de desarrollo teleológico. Naturalmente, los estudiantes no pueden discernir la intención teórica detrás de nuestras preguntas, ya que esta forma ideal cultural que llamamos pensamiento algebraico aún debe ser encontrada y conocida. Los procesos prolongados, creativos y graduales a través de los cuales los estudiantes encuentran y se familiarizan con significados culturales históricamente constituidos y formas de razonamiento y acción (en nuestro caso algebraicos) es lo que he denominado, siguiendo a Hegel, objetivación (Radford 2002; 2008b).

La intencionalidad teórica que sustenta la actividad del aula, sin embargo, no es suficiente para asegurar el éxito de la objetivación de la forma ideal. El éxito siempre es contingente, ya que la actividad como tal, es decir, la actividad como evento, es única e impredecible. Esto es así porque nadie puede implantar una forma de pensamiento ideal cultural en la cabeza de los estudiantes. Vygotsky solía quejarse de que gran parte de la teoría educativa de su época “trataba al estudiante como una esponja que absorbe nuevos conocimientos” (1997, p. 48). La objetivación de formas ideales requiere una continuidad temporal y una estabilidad del conocimiento que se objetiva (nuestros alumnos, por ejemplo, eran conscientes de la recurrencia de nuestros principales temas didácticos). La objetivación de formas ideales requiere también el compromiso emocional y ético mutuo de docentes y estudiantes en la actividad conjunta de enseñanza-aprendizaje (Radford y Roth 2011). Sin embargo, la descripción precisa de cualquier proceso de desarrollo requiere una descripción teórica precisa del fenómeno bajo consideración y de su investigación experimental. Basándome en la idea antes mencionada de cognición y desarrollo sensorial, sugerí que el desarrollo del pensamiento algebraico puede estudiarse en términos de la aparición de nuevas relaciones de estructuración sistémica entre los componentes material-ideacionales del pensamiento (por ejemplo, gesto, habla interna y externa) y la manera en que estas relaciones se organizan y reorganizan en el curso de la participación de los estudiantes en la actividad. El análisis de nuestros datos experimentales se centró en revelar esas relaciones y su refinamiento progresivo. Vimos cómo, por ejemplo, el desarrollo de la percepción es consustancial al desarrollo de la actividad gestual y simbólica.

Sin embargo, toda la historia es mucho más compleja. Por un lado, no mencioné aquí otras partes del encuentro de los estudiantes con el álgebra que incluyen un trabajo sobre tablas (ver, por ejemplo, Roth & Radford 2011) y una parte muy grande que trata sobre ecuaciones. Limité mi explicación a patrones o la generalización de secuencias de figuras (para una investigación longitudinal de las ecuaciones, véase Warren y Cooper 2009). Por otro lado, no incluí aquí, al menos no de manera explícita, un aspecto crucial del desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, a saber, el que trata cuestiones de subjetividad y agencia (Radford 2012b). Como bien argumentó Valero (2004), la investigación en educación matemática ha reducido en gran medida al estudiante a un sujeto cognitivo. Sin embargo, Vygotsky (1994) argumentó enérgicamente que el desarrollo solo puede entenderse si tomamos en consideración la manera en que el estudiante está experimentando emocionalmente el mundo. La experiencia emocional [perezhivanie] es, sostuvo el psicólogo ruso en una conferencia pronunciada al final de su vida, el vínculo entre el sujeto y su entorno, entre el sujeto siempre cambiante (el ser perpetuo en proceso de devenir) y su entorno social siempre en movimiento conceptual, político e ideológico. La inserción explícita y significativa de perezhivanie en las explicaciones del desarrollo es, supongo, un problema aún más complicado de conceptualizar e investigar, un problema de investigación abierto con seguridad.

Agradecimientos Este artículo es el resultado de varios programas de investigación financiados por el Consejo de Investigación de Ciencias Sociales y Humanidades de Canadá (SSHRC/CRSH). Deseo agradecer a los revisores por sus perspicaces comentarios. Una versión anterior de este artículo fue presentada en ICME12, como Conferencia Regular.