# Una propuesta para el desarrollo del razonamiento algebraico en estudiantes de grado quinto desde el enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática

Sindy Vanessa Arboleda Palomino

María Camila Quetama Mercado

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

2021

Una propuesta para el desarrollo del razonamiento algebraico en estudiantes de grado quinto desde el enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática

Sindy Vanessa Arboleda Palomino Cód.1552170

María Camila Quetama Mercado Cód. 1532721

Trabajo de grado para optar al título de Licenciadas en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Director: Mg. Cristian Andrés Hurtado Moreno

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

2021

*Primeramente, a Dios que nos ha bendecido siempre, a nuestras madres que desde el cielo nos cuidan y nos acompañan, nuestras hermanas por ser ese apoyo incondicional, nuestra familia por siempre estar presente.*

AGRADECIMIENTOS

Gracias a Dios que nos iluminó durante todo este proceso, nuestro más sinceros agradecimientos al profesor Cristian Andrés Hurtado Moreno, director de este trabajo, quien nos orientó de la mejor manera para que el desarrollo de este fuera posible.

Muchas gracias a nuestras madres que desde el cielo nos acompañan y nos han dejado un ejemplo de esfuerzo y constancia para lograr cada una de nuestras metas, nuestras hermanas y cada uno de los miembros de nuestra familia quienes nos han brindado todo su apoyo incondicional en los momentos difíciles donde más lo hemos necesitado, nuestras parejas que con su muestra de amor siempre estuvieron dispuestos a escucharnos y aconsejarnos para hacer las cosas bien.

A los profesores quienes participaron en esta investigación por su tiempo y consejos académicos, al colegio por tan maravillosa experiencia con los estudiantes.

Por último, a la universidad del valle. ¡Gracias!

# Resumen

En este trabajo se desarrolla una investigación cuyo propósito es favorecer el desarrollo del razonamiento algebraico de un grupo de estudiantes de grado quinto de educación básica primaria del colegio Instituto Ángeles de Dios, en Santiago de Cali, a partir de una propuesta de aula fundamentada en el enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. La propuesta fue implementada con 14 estudiantes y los datos se recogieron a partir de las producciones escritas de los estudiantes en las hojas de trabajo, grabaciones de audio y video para su posterior análisis. Estos análisis dejan evidencia que los estudiantes avanzan por mayores niveles de algebrización, lo que muestra que el razonamiento algebraico se favorece.

Palabras claves: niveles de algebrización, razonamiento algebraico, prácticas matemáticas, álgebra, EOS.

# Tabla de Contenido

*Pág.*

# Índice de esquemas



# Índice de tablas

*Pág.*

# Índice de figuras

*Pág.*

# Introducción

En la actualidad la enseñanza y aprendizaje del álgebra continúa siendo objeto de estudio por investigadores que reportan diversas dificultades que giran en torno a su enseñanza y aprendizaje en la escuela. Muchas de estas dificultades radican en que el álgebra es vista como una herramienta para la manipulación de símbolos, para resolver problemas y desprovista de significado (Kaput y Blanton, 2001; Kieran, 2007), motivo por el cual su enseñanza ha sido fuertemente criticada por el poco éxito que obtienen los estudiantes en su estudio (Molina, 2009). En el intento por dar una solución a estas dificultades y saber cuán importante es el álgebra y el difícil acceso conceptual que poseen los estudiantes, investigadores en educación matemática mencionan que es significativo la introducción del álgebra en edades tempranas, y una forma de lograr tal fin es la introducción del razonamiento algebraico en la escuela primaria para que le permita al estudiante pensar distintas formas al momento de resolver un problema y así crear ideas algebraicas que le ayuden a aprender álgebra como aritmética generalizada.

Con respecto a lo anterior se hace necesario crear propuesta de aula que contribuyan con el razonamiento algebraico de los estudiantes desde sus edades tempranas, por consiguiente el presente trabajo de investigación se inscribe en la línea de didáctica de las matemáticas de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemática de la Universidad del Valle, por medio del cual se pretende favorecer al desarrollo del razonamiento algebraico a un grupo de estudiantes de grado quinto de educación básica primaria del colegio Ana Julia Holguín de Hurtado ubicado en Candelaria Valle del Cauca, a partir de una propuesta de aula fundamentada desde la perspectiva del enfoque Ontosemiótico del conocimiento matemático y la instrucción matemática (EOS), esto con el fin de ayudar a los estudiantes en el aprendizaje del álgebra como aritmética generalizada por medio de tareas que involucren el uso, estudio de patrones y estructuras concernientes a las ecuaciones, el estudio de variación y cambio, y también aportar elementos conceptuales y metodológicos, para el planteamiento de tareas que posibiliten el desarrollo del razonamiento algebraico.

Para el desarrollo de la propuesta, se emplea el enfoque del EOS propuesto por Godino y colaboradores en el cual se usa fundamentalmente el análisis de los procesos y categorías emergentes para analizar las prácticas matemáticas de los estudiantes cuando se implemente la propuesta, se considera este análisis porque brinda las herramientas necesarias para describir el nivel de razonamiento algebraico que los estudiantes van empleando al desarrollar los problemas que se les propone, de igual manera se usan estas categorías teóricas del EOS y la idea del razonamiento algebraico que desde esta perspectiva se propone para el diseño mismo de la propuesta como así mismo se tienen en cuenta algunas orientaciones del referente curricular nacional desde los Lineamientos curriculares y Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas que están completamente vinculados con la propuesta del EOS y del razonamiento algebraico.

Para lograr los objetivos trazados en este estudio, este trabajo se organiza en cuatro capítulos, tal como se sigue:

En el **primer capítulo** se presentan los **aspectos generales de la propuesta**, los antecedentes que surgen de la búsqueda de la literatura alrededor del álgebra escolar y el desarrollo del razonamiento algebraico temprano desde la perspectiva del EOS; la presentación de la problemática basada en las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela; los objetivos que se quieren alcanzar y desarrollar en este trabajo; la justificación de este.

En el **segundo capítulo** se presenta el **marco conceptual de referencia** que se divide en un referente didáctico, relacionado con la teoría del EOS, el razonamiento algebraico y los niveles de algebrización; un referente matemático basado en los conceptos de generalización de patrones y el estudio de estructuras, en este caso ecuaciones.

En el **tercer capítulo** se delimita el **diseño metodológico y el análisis de resultados**, se describe el tipo de investigación y su proceso mediante fases, se precisan los instrumentos de recolección de datos, la población de estudio con la que se trabaja. La descripción de la propuesta de aula, metodología de la implementación y, por último, los análisis de resultados.

En el **cuarto capítulo** se presenta las **conclusiones del trabajo y algunas reflexiones didácticas** sobre el desarrollo del razonamiento algebraico teniendo en cuenta los objetivos trazados, el marco de referencia conceptual y el análisis de los resultados obtenidos. Al finalizar este capítulo se presentan las referencias bibliográficas y los anexos.

# 1. Capítulo 1. Aspectos generales de la investigación

Este capítulo versa sobre los aspectos generales que guían el desarrollo de la investigación, como: el reporte de los antecedentes consultados relacionados con el álgebra escolar y el enfoque del EOS, se define una problemática que da cuenta de múltiples dificultades vigentes en el aprendizaje del álgebra y del desarrollo del razonamiento algebraico en edades tempranas, se trazan los objetivos del estudio para el desarrollo de este, y finalmente dan elementos que justifican la pertinencia de este trabajo tanto en el campo local como conceptual. Los capítulos son las principales divisiones del documento. En estos, se desarrolla el tema del documento. Cada capítulo debe corresponder a uno de los temas o aspectos tratados en el documento y por tanto debe llevar un título que indique el contenido del capítulo.

## 1.1 Antecedentes

En este apartado se presentan algunas investigaciones realizadas en el campo de educación matemática relacionadas con el álgebra escolar y con el desarrollo del razonamiento algebraico desde la perspectiva del EOS. El estudio de estas investigaciones se hace con el propósito de aportar elementos significativos para lograr los objetivos propuestos en el presente trabajo, tal como se precisará al finalizar este apartado.

Al reflexionar sobre la necesidad de incluir la enseñanza del álgebra en estudiantes de primaria, se pone en evidencia el papel crucial que tiene el docente al diseñar situaciones significativas que promuevan el razonamiento algebraico inicial en los estudiantes. Al respecto Castro, Godino & Rivas (2011) en su trabajo proponen una experiencia significativa a un grupo de profesores de formación inicial invitando a diseñar una unidad didáctica, con el objetivo de analizar, interpretar e identificar rasgos característicos del álgebra presentes en las tareas realizadas por estos profesores, que ayuden a promover el razonamiento algebraico en sus estudiantes. Para darle mayor viabilidad a la actividad propuesta los investigadores orientan a los docentes sobre aspectos algebraicos tanto curriculares como didácticos sobre los elementos algebraicos que deben contener las tareas propuestas. Una de las conclusiones que llegan estos autores con el estudio realizado se contribuye y mejora la perspectiva que tienen los profesores sobre el álgebra y los lleva considerar que esta área se puede desarrollar en edades tempranas.

De igual manera Aké (2013) en su tesis doctoral abordó la clarificación de la naturaleza del álgebra escolar y la formación de los profesores para que asuman una nueva manera de entender el álgebra y capacitarles para su enseñanza. En una primera fase la autora realizó la construcción de un cuestionario para evaluar aspectos parciales de los conocimientos sobre el razonamiento algebraico en profesores de formación primaria. Este estudio de evaluación ha revelado los significados personales de los futuros maestros y sus necesidades formativas para hacer frente a la inclusión de formas de razonamiento algebraico en los primeros niveles educativos. Las dificultades que se encontraron evidencian que los maestros no están familiarizados con los procesos de desarrollo de ideas algebraicas, teniendo en cuenta las propiedades y relaciones que se presentan en las actividades matemáticas elementales. En una segunda fase procede al diseño, implementación y evaluación de un proceso formativo sobre razonamiento algebraico en un curso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para estudiantes de magisterio. Durante este proceso formativo la autora desarrolla y evalúa las competencias de los futuros maestros, en la resolución de tareas de índole algebraica, en la identificación de objetos algebraicos y asignación de niveles de algebrización a actividades matemáticas escolares.

Por su parte, Rueda (2017) centró su interés en caracterizar el razonamiento algebraico en profesores de educación secundaria por medio de los niveles de algebrización, que manifiestan en sus prácticas matemáticas al resolver un conjunto de problemas que la investigadora les propuso. Se utiliza como herramienta el enfoque ontosemiótico porque permite analizar los tipos de objetos y procesos matemáticos que emergen e intervienen en la resolución de los problemas. El análisis de los datos obtenidos cuando los profesores resolvieron los problemas le permitió caracterizar sus actividades como más o menos algebraica, según niveles de algebrización propuesto por Godino et al. (2014). Este estudio permite reflexionar sobre el razonamiento algebraico manifestado en las prácticas matemáticas del docente y sus competencias para promover dicho razonamiento, lo cual, puede brindar pautas interesantes para emprender planes de formación tanto para docentes en ejercicio como en formación.

Sibaja & Soto (2016) indagaron en su investigación sobre el desarrollo del razonamiento algebraico en estudiantes de 3° grado de primaria por medio de tareas que se asocian a la identificación de patrones y regularidades, durante la experiencia lograron ver avances que permiten fortalecer el razonamiento algebraico y en la solución de las actividades los estudiantes avanzaron en los niveles de algebrización, lo cual es un avance significativo porque este tipo de tareas no hacen parte del currículo escolar establecido para este grado.

Martínez (2014) propuso identificar los niveles de algebrización que se presenta en los libros de textos para la escuela primaria y la correspondencia con los niveles que desempeñan los estudiantes cuando resuelven las tareas algebraicas que han sido tomadas de estos libros. A partir de este estudio estos autores evidenciaron que no siempre los niveles de algebrización aplicados en una tarea de matemáticas tienen correspondencia con los desempeños que dan a conocer los estudiantes cuando se enfrentan a esta. Este desempeño aporto interesantes formas de abordar las tareas, es decir, que es viable la propuesta del algebrizar el currículo desde la educación inicial.

Aké (2010) realizó una investigación desde el enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático para abordar el diseño de un modelo que permitió identificar los rasgos algebraicos que se presentan en las tareas matemáticas, a través de la articulación de una visión global del álgebra que son guiadas por la perspectiva del álgebra escolar, para que se dé la caracterización del razonamiento algebraico. El modelo que construyó la autora de esta investigación permitió identificar cuándo una tarea matemática y su solución correspondiente son consideradas como algebraicas.

### *1.1.1 Aportes de los antecedentes consultados*

A partir del estudio de los antecedentes descritos anteriormente se reconocen algunos elementos de interés para este trabajo, los cuales se presentan a continuación:

En primer lugar, aportan información para entender y comprender el marco de referencia conceptual basado en el razonamiento algebraico desde la perspectiva del EOS, donde este enfoque propone unos niveles de algebrización para caracterizar la solución de una tarea matemática por medio de objetos y procesos algebraicos que intervienen en la solución.

Segundo, dan a conocer las dificultades que existen en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar porque son elementos claves para precisar la problemática e identificar el problema que hay alrededor del desarrollo del razonamiento algebraico.

Tercero, aportan ideas que permiten justificar este trabajo, debido a que algunas de estas investigaciones coinciden en la necesidad de seguir abordando y profundizando en el desarrollo del razonamiento algebraico, de seguir conceptualizando y entendiendo cómo es que se dan estos procesos de razonamiento en los estudiantes.

Cuarto, algunos trabajos reportados permiten reconocer los diferentes niveles de razonamiento a los que se enfrenta un estudiante al resolver actividades de índole algebraico y las dificultades que surgen durante este proceso, que limitan a los estudiantes para avanzar en estos niveles.

Y, por último, dan elementos para la configuración de la propuesta de aula que se pretende diseñar en este estudio, tomándolos como insumo o punto de partida para ser adaptados y mejorados en esta propuesta.

## 1.2 Planteamiento del problema

Diversas investigaciones en educación matemática han manifestado que existen múltiples dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra. Estas han sido estudiadas por autores como Espinosa (2004), Fernández (1997), Martínez (2011), Socas (2011), Kieran & Filloy (1989), Gallardo & Rojano (1988). Estos investigadores en sus estudios muestran distintas dificultades que presentan los estudiantes en el tránsito de la aritmética al álgebra en la escuela, este tránsito es importante para llegar a ideas más generales dentro de las matemáticas escolares, porque determina un cambio en el modo de realizar la actividad matemática en tanto que en aritmética se trabaja con expresiones conocidas como lo son los números específicos, mientras que en el álgebra se trabajan con cantidades desconocidas, "Lo que esto significa es que, en álgebra, se calcula con cantidades indeterminadas (esto es, se suma, resta, divide, etc., incógnitas y parámetros como si se conocieran, como si fueran números específicos)" (Radford, 2010, p. 2).

Al respecto Kieran (1992), Radford (2012), Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, (2014), Castro (2012) expresan que los estudiantes presentan dificultades de distinta naturaleza, que pueden ser clasificadas en tres tipos: inherentes al objeto, al propio sujeto e involuntarias por las técnicas de enseñanza, desde el estudio de generalización de patrones y estructuras se tienen en cuenta aspectos como: reconocimiento de un patrón arbitrario, al establecer una regla y realizar su representación simbólica en el lenguaje matemático, al entender una expresión en término particular y general, la forma de entender el signo igual, que hace referencia a la diferencia entre las convenciones de notación de la aritmética y el álgebra, el uso e implicaciones de la simbolización algebraica, el uso de las variables e incógnitas, y la falta de comprensión de las actividades, mal interpretación de situaciones relacionadas con la variación y cambio. Estas se evidencian por el hecho que muchos estudiantes coinciden en un pensamiento aritmético que trae consigo estrategias y propiedades que no bastan para el desarrollo del pensamiento algebraico. La experiencia al trabajar situaciones numéricas concretas y explícitas en aritmética confunde al estudiante en el momento de interpretar situaciones algebraicas porque no aceptan la existencia de cantidades desconocidas y los múltiples significados que puede tomar una variable (Kieran & Filloy, 1989).

La resolución de problemas es otra de las dificultades que autores como Ameronn (2002), Rodríguez, Molina, Cañadas & Castro (2015), describen en sus investigaciones, pues estos han reportado que los estudiantes al enfrentarse a una actividad de este tipo presentan dificultades debido a que en aritmética  a los problemas se les daba solución con ayuda de operaciones intermedias que ellos contienen, mientras que los problemas algebraicos necesitan ser traducidos a distintas representaciones, para formalizarlos y darle solución. Este cambio requiere que el estudiante realice un tratamiento necesario en la traducción de un enunciado verbal a un lenguaje simbólico algebraico.

Otra de las dificultades que ha sido ampliamente reportada en la investigación de didáctica del álgebra y señalada por Butto & Rojano (2004) se relaciona con el excesivo énfasis en el lenguaje simbólico que comúnmente se le presenta en la escuela a los estudiantes sin ningún sentido y carente significado para ellos, tal y como expresan estos autores:

> En cuanto a las dificultades que enfrentan los estudiantes que trabajan con dicho abordaje, la principal crítica es que se introduce al niño en un simbolismo desprovisto de significado y de sentido, siendo que los niños vienen de trabajar con la aritmética, donde todos los símbolos poseen significados y los contextos de los problemas determinan mucho la manera de resolverlos. (p.114)

Nótese como estos autores llaman la atención en cómo se presenta este simbolismo de manera abrupta en la escuela, lo cual hace que el estudiante tenga una concepción de las actividades sin algún significado, un ejemplo de ello es cuando en aritmética se presenta a y b que para el estudiante puede ser un nombre o una etiqueta en particular, en cambio en álgebra estas letras tendrían un simbolismo distinto al tratarse de una incógnita o una expresión para generalizar. (Castro, 2012)

De acuerdo con lo anterior, una de las posibles propuestas que se ha realizado por la investigación para enfrentar estas dificultades consiste en la inclusión del razonamiento algebraico elemental (RAE) al currículo de la educación primaria, el cual se denominó “Early álgebra”. Este enfoque fue apoyado por muchos investigadores, entre ellos Kaput (2000) que propuso “algebrizar” el currículo de la escuela primaria para así promover el álgebra como una manera más clara para comprender las matemáticas en lugar de ser cohibida, esta propuesta la llamó “algebra for all”. “Early–Algebra” tiene como objetivo que los estudiantes desarrollen su aprendizaje en el álgebra con un grado mayor de comprensión de esta, para lo cual se promueve que el estudiante comprenda el estudio de las relaciones numéricas, estructuras abstraídas del cálculo y relaciones, generalizaciones de patrones, relaciones funcionales, desarrollo y manipulación del simbolismo, modelización de expresiones y formación de generalizaciones (Blanton & Kaput, 2005).

Butto & Rojano (citado por Aké, 2013) apoyan la propuesta de introducir el álgebra desde la escuela temprana, ellos indican trabajar el razonamiento algebraico partiendo de la idea que el desarrollo de este razonamiento es un proceso largo y paulatino, es decir, que no surge en un momento determinado, sino que tiene un carácter progresivo que se va generando en los estudiantes. Al respecto de esta forma de razonamiento investigadores como Godino & Font (2003) afirman que este implica representar, generalizar, formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas permitiendo que el estudiante tenga acceso a procesos de generalización para ayudarlos a que sean capaces de pasar de lo particular a lo general.

Teniendo en cuenta esta idea del razonamiento algebraico sustentada desde el enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, Godino, (2002); Godino, Batanero & Font, (2007) brindan herramientas que permiten establecer si una tarea matemática se puede considerar como algebraica, dado que este enfoque permite analizar el tipo de actividad matemática en términos de objetos y procesos como: relaciones binarias, operaciones, propiedades, funciones y sus tipos de operaciones, estructuras y sus tipos. El análisis de estos objetos algebraicos puede expresar diversas representaciones e incluir el estudio de los tipos de entidades (elementos lingüísticos, contextos, procedimientos, propiedades y argumentos) y el papel que desempeña en la actividad matemática. Además de estos, estos autores junto con Aké (2010) han propuesto niveles de razonamiento algebraico para describir la progresión y avance por el que se transita cuando se desarrolla este modo de razonamiento. Desde esta perspectiva estos autores han propuesto un modelo de caracterización del razonamiento que se centra en estos niveles y se fundamenta en el EOS.

Todo lo anterior señala la problemática que gira alrededor del álgebra en la escuela y la propuesta de desarrollar el razonamiento algebraico en los grados elementales. Teniendo en cuenta los aspectos mencionados, en esta investigación se propone el siguiente interrogante:

*¿Cómo favorecer al desarrollo del razonamiento algebraico en estudiantes de grado quinto a través de una propuesta de aula fundamentada en el enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática?*

## 1.3 Objetivos

### *1.3.1 Objetivo general*

Favorecer el desarrollo del razonamiento algebraico de un grupo de estudiantes de grado quinto a partir de una propuesta de aula fundamentada en el enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática.

### *1.3.2 Objetivos específicos*

- Analizar desde el enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática el desarrollo del razonamiento algebraico desde los primeros grados de escolaridad.

- Articular los elementos conceptuales didácticos y curriculares estudiados en el diseño de la propuesta de aula para su implementación con estudiantes de grado quinto.

- Analizar los avances en los niveles del razonamiento algebraico que logran los estudiantes de grado quinto a partir de la implementación de la propuesta de aula.

## 1.4 Justificación

“La competencia algebraica es importante en la vida adulta,
en el trabajo y en la preparación para la educación secundaria.
Todos los estudiantes deberían aprender álgebra.”
(Castro & Molina, 2007, p 67).

Diversos investigadores en didáctica del álgebra han hecho importantes propuestas de algebrizar el currículo y con ello la introducción temprana del álgebra en la escuela, entre esas propuestas una de las más destacadas es la del Early álgebra, que propone un cambio curricular al introducir el álgebra desde educación primaria integrada en bloques de contenido matemático, con el fin de incorporar y crear situaciones matemáticas en el aula de clase que permitan a los estudiantes tener un acercamiento a conceptos más generales de las matemáticas en lo que tiene que ver patrones, relaciones y propiedades matemáticas, para así desarrollar competencias propias del álgebra (Socas, 2011). Para alcanzar este objetivo los autores ya mencionados coinciden en la necesidad de: a) crear actividades algebraicas que ayuden a la enseñanza y aprendizaje del álgebra y al desarrollo del razonamiento algebraico en los estudiantes. b) Identificar qué contenidos algebraicos puede y deben ser presentados, en la escuela y que a su vez se involucren con otras sub-áreas de las matemáticas. c) el uso de representaciones en las actividades que conduzcan a los estudiantes a desarrollar diferentes modos de pensar en la resolución de una tarea (Castro & Molina, 2007; Kieran & Filloy, 1989; Butto, & Rojano, 2004; Molina, 2006; Lins & Kaput, 2004; Kaput, 2000). Estos aspectos son reflexiones de investigaciones que animan e invitan a incluir la enseñanza del álgebra en la escuela temprana porque facilita la comprensión de las matemáticas y permite que los estudiantes tengan distintos modos de pensar al resolver una actividad algebraica.

Introducir el razonamiento algebraico en la escuela da a conocer la nueva visión respecto a que la aritmética es parte del álgebra y la forma de considerarla es como aritmética generalizada. En esta nueva forma de concebir la aritmética se hace necesario el uso de cantidades concretas (números particulares) y el uso de símbolos que representa una cantidad de una magnitud cualquiera (casos generales), donde le permite al estudiante explicar y justificar las propiedades que se están utilizando, es ahí donde se evidencian algunos rasgos característicos del álgebra (Burgos & Godino, 2019; Godino & Font, 2003). Desde este enfoque, en la aritmética se deberá tener en cuenta las relaciones numéricas de una situación y expresarlas por medio de un lenguaje simbólico, a este proceso que realizan los estudiantes, Kieran (2004) lo asocia al razonamiento algebraico porque involucra el desarrollo de formas de pensamiento en actividades, para las que el álgebra puede ser utilizada como una herramienta que permita expresar relaciones entre cantidades, reconocer la estructura de una situación, estudiar el cambio y generalizar sobre situaciones que involucren a objetos matemáticos. Desde este enfoque de trabajar la aritmética, está claro que el álgebra se puede y se debe trabajar desde los primeros años de escolaridad, por lo que este tipo de estudios cobran un real sentido e importancia y siendo además un asunto vigente. Esta idea invita para reflexionar sobre la importancia de enseñar álgebra desde los primeros grados de escolaridad y en estrecha relación con la aritmética lo cual favorece el desarrollo de una forma de razonamiento que en la literatura que se ha preocupado por este asunto se conoce el razonamiento algebraico.

Este modo de razonamiento algebraico, “implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones” (Godino y Font, 2003, p. 774). Es importante desarrollar este razonamiento en los estudiantes porque les- permite explorar, buscar tanto irregularidades como regularidades, generalizar, justificar, reconocer el cambio en las variaciones y formalizar ideas matemáticas.

Otros rasgos característicos de la actividad algebraica y por tanto del razonamiento asociado a esta actividad se reconoce cuando el estudiante realiza determinadas prácticas operativas y discursivas que son utilizadas para dar solución a estos tipos de problemas o tareas. En estas prácticas intervienen elementos de naturaleza diversa, en particular, medios de expresión, reglas conceptuales, procedimentales, proposiciones y justificaciones. Así pues, la caracterización de la práctica algebraica se debe de hacer en términos de la presencia de los tipos de objetos y de procesos que intervienen en la misma (Aké, 2010). Es por ello que el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007) ) se convierte en una herramienta teórica importante para analizar la actividad algebraica, pues permite el estudio e identificación de objetos matemáticos y significados que se componen por elementos que abarcan los símbolos, las representaciones, los términos y las expresiones matemáticas, los conceptos matemáticos, los procedimientos que contienen técnicas, las operaciones y los algoritmos, y las propiedades propuestas en toda tarea matemática. De este modo, este enfoque se toma en consideración en este trabajo porque brinda las herramientas teóricas necesarias y suficientes, no solo para entender y conceptualizar la idea de razonamiento algebraico, sino que también porque se pueden operativizar tanto para el diseño de la propuesta de aula que en este trabajo se espera realizar, como para analizar las producciones de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de naturaleza algebraica.

Además de lo anterior, se propone incluir los niveles de algebrización en este estudio porque son una herramienta que permiten analizar, describir, caracterizar y entender las producciones de los estudiantes al solucionar tareas algebraicas o problemas que se proponen, de tal manera que dicha producción se pueda analizar en términos de la algebrización que presenta. Tal como lo menciona Godino, Aké, Gonzato & Wihelmi (2014):

> El nivel se asigna no a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que se realiza, por lo que dependiendo de la manera en la que se resuelve una tarea, la actividad matemática puede ser clasificada en un nivel u otro. (p.206)

Estos autores dan a conocer que los niveles no se centran en analizar la estructura matemática de la tarea sino en los conocimientos matemáticos que se utilizan para la resolución de problemas. Además de ello, estos niveles proponen tres criterios para realizar la clasificación, uno de los criterios se relaciona con el tipo de objetos y procesos matemáticos, otro con la transformación que los estudiantes hacen sobre esos objetos matemáticos, es decir, el tratamiento que realiza por medio de las operaciones, propiedades, etc.; y por último el tipo de lenguaje empleado por los estudiantes en sus producciones. Estos tres criterios dan los elementos suficientes para poder caracterizar de manera minuciosa y detallada las producciones de los estudiantes en términos de los niveles de algebrización, y con ello poder caracterizar el razonamiento algebraico que emplean los estudiantes cuando enfrentan las tareas. Por todos estos elementos mencionados se considera que esta propuesta de los niveles de algebrización es potente y permite lograr en buen término el objetivo propuesto en este estudio.

Continuando con la idea de incluir el razonamiento algebraico por medio de los niveles de algebrización desde el punto de vista curricular en los lineamientos y estándares básicos de competencia en matemáticas no se trabaja el razonamiento algebraico como una categoría conceptual propiamente de la matemática, sino que por el contrario se habla de desarrollar una forma de pensamiento matemático que se centra en el estudio de la variación y el cambio, conocido como pensamiento variacional que está estrechamente relacionada con  la propuesta del razonamiento algebraico ya mencionada. Ambas formas de pensamiento tienen como elemento importante trabajar fenómenos de variación y cambio, como la generalización, el reconocimiento, la percepción, la identificación de patrones en busca de regularidades[1] y realizar conjeturas, generando así mayores niveles de abstracción donde el lenguaje se hace más sofisticado permitiendo la descripción, modelación y representación de un problema en distintos registros simbólicos ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos

De este modo, este trabajo considera los elementos anteriormente mencionados sobre el pensamiento variacional que no están alejados en absoluto con la idea del razonamiento algebraico que se toma en esta investigación para el desarrollo de la propuesta de aula que se espera diseñar, además de esto se tiene en cuenta los procesos generales mencionados en estos documentos de política pública como el razonamiento, la resolución de problemas, la comunicación que se destacan para el diseño de la propuesta.

[1] Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo a un patrón (MEN, 2006, p. 67).

Uno de los propósitos que expresan estos documentos de política pública es construir desde la educación primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y el uso de los conceptos del cálculo numérico y algebraico, es por ello que este trabajo aborda una propuesta de aula que tiene como objetivo desarrollar el razonamiento algebraico en estudiantes de grado quinto de primaria, la cual se plantea al considerar los siguientes aspectos, primero porque en los grados anteriores han abordado diferentes conceptos meramente aritméticos sin tener en cuenta otras formas de pensamiento que le permite al estudiante modelar, hacer predicciones, discutir sobre situaciones problemas y expresarlo por medio de ideas algebraicas, segundo los estudiantes están próximos a concluir su primera etapa de escolaridad y pueden aprender matemáticas haciendo uso del simbolismo algebraico, pues el contenido matemático del currículo se menciona que se debe enseñar a simbolizar, generalizar y formalizar ideas por medio del álgebra, y por último, dentro del saber de los estudiantes de quinto está el comprender, representar y analizar situaciones matemáticas. Por consiguiente, esta propuesta ayuda al estudiante a desarrollar habilidades que le permiten avanzar en los niveles que se proponen para el desarrollo del razonamiento algebraico.

Cabe mencionar que los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) se toman como referencia para el diseño de la propuesta de aula porque indican unos procesos generales que se tendrán en cuenta, como lo son: la comunicación porque permite comprender e interpretar ideas matemáticas, brindando la oportunidad de construir representaciones ya sean físicas, históricas, gráficas y simbólicas; la resolución de problemas porque genera en el estudiante un proceso de construcción que le permite adquirir conocimiento al explorar, formular conjeturas, lo que lleva a formular argumentos para así hallar una solución; el razonamiento porque por medio de este se puede justificar las estrategias, formular hipótesis, hacer conjeturas y expresarlas matemáticamente. También, es importante el contexto, aquello que rodea el estudiante, el cual es un recurso importante para el proceso de enseñanza de las matemáticas porque se relacionan con los ambientes que rodean al estudiante, con la intención de que se aprenda a resolver problemas de la vida diaria. Así pues, el diseño responde a las orientaciones y directrices dadas desde estos documentos curriculares nacionales.

Otro aspecto que es importante destacar de este diseño, es que, se puede convertir en un instrumento potente para que pueda ser empleado en otros estudios, ser empleados con profesores en ejercicio y futuros maestros en formación, de tal manera que se pueda nutrir más y con ello se puedan hacer nuevos diseños que busquen siempre colaborar en el desarrollo del razonamiento algebraico en los estudiantes. Además, se espera que los maestros implementen diversas herramientas o metodologías que fortalezcan el desarrollo de este razonamiento en edad temprana, con el fin de evitar dificultades relacionadas a este.

La realización de este trabajo es una experiencia muy importante para las autoras del mismo porque constituye un reto a nivel personal como profesional y sobre todo un interés por conocer las capacidades algebraicas que desarrollan los estudiantes por medio de esta propuesta de aula. Además de esto, el desarrollo de este trabajo investigativo aporta elementos para iniciarse como profesoras investigadoras que entiendan la complejidad del aula, los problemas que en ella se da y la forma de entenderlos y atenderlos desde una perspectiva rigurosa que ayuda a mejorar las competencias científicas investigativas.

# 2. Capítulo 2. Marco conceptual de referencia

Este segundo capítulo presenta dos referentes: el didáctico y matemático. En el primero de ellos se explicitan aspectos generales de la teoría del EOS para dar paso a una presentación minuciosa de las categorías de análisis que específicamente se usan en este trabajo, articulándolo con la idea de razonamiento algebraico y con una caracterización de este razonamiento que en el seno de esta teoría se ha ido construyendo por diferentes autores que han trabajado en ella; en el segundo referente se encuentran algunos conceptos matemáticos relacionados con las estructuras matemáticas, las sucesiones y generalización de patrones.

## 2.1 Referente Didáctico

### 2.1.1 Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática

Este enfoque es pragmatista antropológico y semiótico el cual surge por la necesidad de desarrollar herramientas teóricas que permiten analizar la actividad matemática de un sujeto y precisar con más amplitud y profundidad las relaciones dialécticas entre el pensamiento (ideas matemáticas), el lenguaje matemático (sistema de signos) y las situaciones problemas para cuya resolución es necesario elaborar ciertos recursos. Para alcanzar este objetivo Godino junto con otros colaboradores vieron la necesidad de construir un enfoque teórico unificado asociando otras disciplinas teóricas que permitieron construir el enfoque Ontosemiótico y la Instrucción Matemática (EOS).

Estos autores construyen este enfoque alrededor de tres etapas: teoría de significados esta primera etapa se centró en las nociones del significado institucional y personal de un objeto matemático, la segunda etapa teoría de funciones semióticas en donde se elaboró un modelo ontológico y semiótico suficiente para describir la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus producciones, y en la tercera etapa teoría de configuración didáctica, se interesaron por los modelos teóricos propuestos en el seno de la didáctica de las matemáticas sobre la instrucción matemática[2].

[2] Entendida como enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos en el seno de los sistemas didácticos (Godino, Batanero & Font, 2008).

En conjunto con las etapas anteriores se elaboraron cinco tipos de análisis didácticos que componen actualmente el EOS los cuales facilitan el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino, 2012, Godino; Batanero & Font 2008), a saber:

1. Sistemas de prácticas: práctica matemática que posee una persona para resolver un problema matemático donde se consideran los sistemas operativas y discursivas, acompañado de un significado personal e institucional ante un tipo de situación-problema.

2. Configuración de objetos y procesos: redes de objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas.

3. Configuración didáctica: fase constituida por interacciones profesor-alumno a propósito de un objeto o contenido matemático, se concibe como una red organizacional con la interacción de otras configuraciones como: epistémica, instruccional, cognitiva.

4. Dimensión normativa: normas, reglas que se reconocen en las prácticas matemáticas y didácticas que condicionan en menor o mayor medida los conocimientos que construyen los estudiantes, estas aproximaciones centran su atención principalmente en las interacciones profesor-alumno.

5. Idoneidad didáctica: criterio de adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, ésta se compone por un sistema de idoneidades donde deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas para que así se garantice la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

De acuerdo con estos tipos de análisis, este trabajo se centra en la configuración de objetos y procesos porque describe los conocimientos matemáticos que se evidencia en la resolución de problemas, caracterizando los procesos que emergen en la práctica matemática, lo cual da los elementos suficientes y necesarios para responder al objetivo del presente trabajo , en virtud que a partir de la configuración de objetos y procesos es que se describe el desarrollo del razonamiento algebraico tal y como se verá en el siguiente apartado.

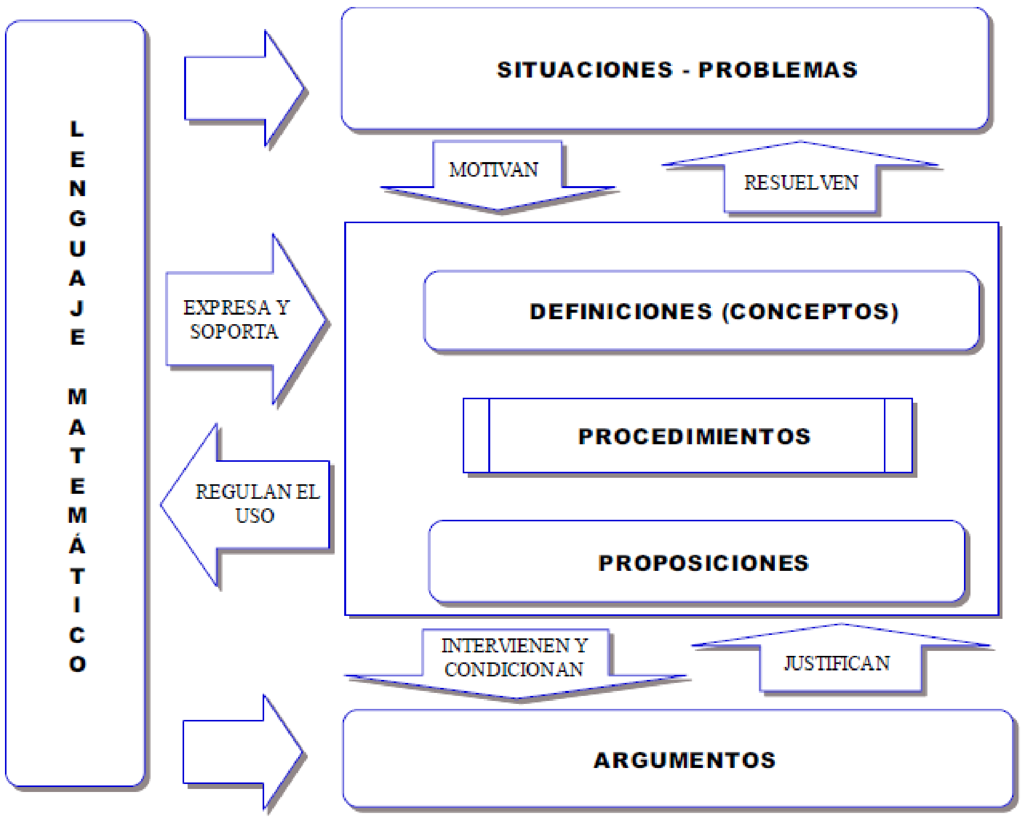
#### 2.1.1.1 Configuración de objetos y procesos

Desde el marco del EOS se presenta la configuración de objetos y procesos como un modelo de análisis matemático que surge como una herramienta clave para el análisis epistémico y cognitivo de los procesos de instrucción matemática donde este tiene en cuenta las prácticas matemáticas, operativas, discursivas y normativas realizadas en una situación problema, de igual manera a los objetos y procesos matemáticos que emergen en las prácticas. Entendiéndose como objeto matemático aquel que emerge en un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semíticos: oral, palabras o expresiones pronunciadas; registros gestuales: dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito (Chevallard, 1991). De acuerdo a lo anterior los objetos están ligados al sistema de prácticas y a su vez estos sistemas están asociados al campo de resolución de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado (Godino & Batanero, 1994), en este campo se abordan tareas matemáticas en las que es necesario analizar las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes, entendiéndose por práctica matemática "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas" (Godino & Batanero, 1994, p. 334).

De acuerdo con lo anterior, las prácticas matemáticas ocupan un lugar central, donde la situación-problema es la promotora de las prácticas matemáticas de un sujeto, entonces se entiende que una situación-problema comprende problemas más o menos abiertos, con aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas y se entiende que una práctica es todo aquello que hace o dice un sujeto para resolver dicha situación-problema.

Esta práctica matemática propone una tipología de objetos propios que intervienen en la actividad matemática: situaciones, acciones, lenguaje, conceptos-reglas, propiedades, argumentaciones, considerados como “entidades primarias”, articulado en la configuración de la figura 1 (Godino, Batanero, & Font, 2009, p. 7)

**Figura 1** *Configuración de objetos primarios.*




Nota: esquema tomado de Godino, Batanero y Fon, 2009, p.7

A continuación, se describen estos objetos:

Situaciones-problemas: son los problemas, actividades, tareas, extra-matemáticas como intra-matemáticas.

Procedimientos: operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos que presenta el sujeto ante las tareas matemáticas.

Lenguaje: aquellos términos, símbolos, gráficos, expresiones, notaciones, que se presentan, en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).

Conceptos-reglas: aquellos elementos o construcciones dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, media, función...).

Propiedades: son proposiciones, afirmaciones o enunciados sobre los conceptos.

Argumentaciones: demostraciones, justificaciones o pruebas de las proposiciones usadas.

Estos seis tipos de objetos se relacionan entre sí, se complementan y se enriquecen por cinco facetas o dimensiones duales, las cuales se pueden considerar según las circunstancias contextuales y del lenguaje en que participen. Estas son: personal e institucional, ostensiva y no ostensiva, ejemplar y tipo, unitario y sistémico, expresión y contenido. A continuación, se describe el uso que se da a esos términos:

Personal e institucional: Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como "objetos personales" (Aké, 2013, p.88)

Ostensiva y no ostensiva: cualquier objeto matemático que sea público puede ser ostensivo, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos personales e institucionales poseen una naturaleza no ostensiva (no perceptibles por sí mismos) por lo que se hace necesario de ostensivos (símbolos, gestos, gráficos, entre otros) para su comunicación.

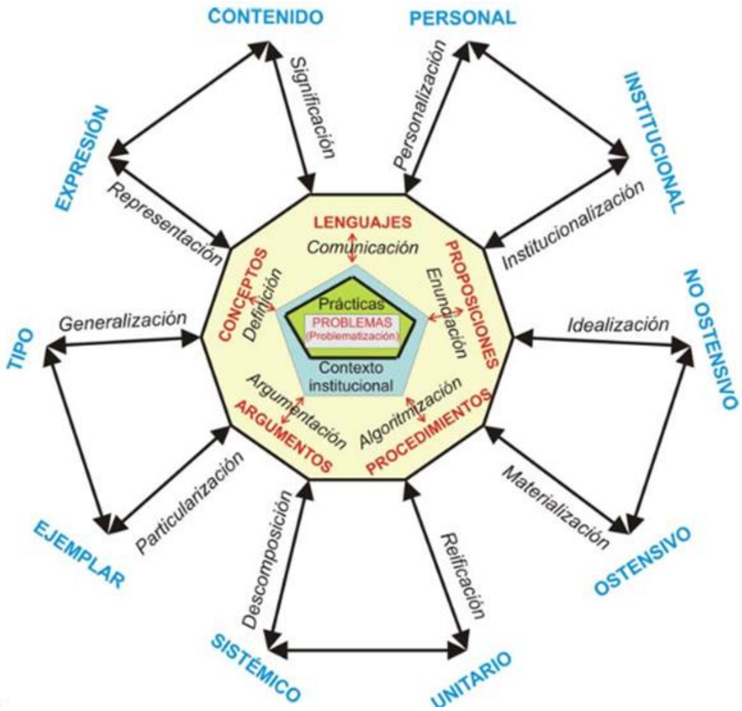
Ejemplar y tipo (extensivo-intensivo): esta dualidad contextual se centra en la dialéctica entre lo particular y lo general, siendo una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático. Teniendo en cuenta esta idea, un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (extensivo) y una clase más general (intensivo). Ejemplo en el estudio de funciones, $y = 5x + 1$, seria una función particular perteneciente al tipo de funciones de la forma $y = mx + n$ (esta función es un objeto intensivo).

Unitario y sistémico: en algunos casos los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio, es decir, como entes sistémicos.

Expresión y contenido: estos objetos se relacionan con el significante – significado, de esta forma, el signo (la marca) funge como la expresión, y aquello a lo que alude, como su contenido.

En el enfoque del EOS tanto las dualidades como las configuraciones de objetos primarios se pueden considerar desde una perspectiva de procesos-productos, indicados en la figura 2, lo que da lugar a los siguientes procesos cognitivos/epistémicos: institucionalización-personalización; generalización-particularización; análisis/descomposición-síntesis/reificación; materialización/concreción-idealización/abstracción; expresión/representación-significación.

**Figura 2** *Articulación de nociones teóricas presentes en la configuración de objetos y procesos matemáticos.*




Nota: Esquema tomado de Godino, Batanero y Font, 2009, p.10

La figura 2, da a conocer como están organizados los elementos que intervienen en el análisis de una actividad matemática, como eje central se encuentran las prácticas matemáticas acompañadas de un contexto en el que se tiene en cuenta objetos como el lenguaje, proposiciones, procedimientos, argumentos y conceptos, que pueden ser contemplados desde las diferentes facetas duales, estos se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, es decir, la relación que se establece entre el proceso que se realiza en la tarea matemática y el objeto que se genera durante este proceso, como lo mencionan Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi (2014) de un proceso de generalización se obtiene un objeto intensivo, así mismo el proceso de particularización surge un objeto extensivo los cuales son objetos particulares. Este nuevo objeto intensivo que se genera puede crear otro nuevo conjunto de elementos en el cual este objeto tiende a relacionarse con otros procesos por el hecho de que las facetas duales y procesos son relativos al contexto en el que se desarrolla la práctica matemática.

Dentro de esta propuesta, de favorecer el desarrollo del razonamiento algebraico de los estudiantes de quinto grado de primaria, se consideran necesarias las herramientas del EOS en configuración de objetos y procesos teniendo en cuenta los objetos primarios, las diferentes facetas duales, los procesos que intervienen en la actividad matemática dentro de la idea de razonamiento algebraico el proceso de generalización y particularización juegan un papel importante ya que permiten caracterizar los rasgos algebraicos que emergen en la solución de una tarea.

### *2.1.2 Razonamiento algebraico*

Diferentes investigadores trabajan múltiples perspectivas del álgebra escolar, Usiskin, Kieran, Drijvers y Hendrikus (citado por Castro, 2012) abordan diferentes enfoques del álgebra como: aritmética generalizada, medio para resolver problemas, estudio de relaciones entre cantidades (incluyendo la modelización y las funciones), estudio de patrones y estructuras, álgebra como lenguaje. En este trabajo se toma la postura del álgebra como una aritmética generalizada que se trabaja a partir de la generalización de patrones y estudio de estructuras para el desarrollo del razonamiento algebraico, como lo mencionan Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi (2014) es posible entender que "El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas" (p.202).

Carpenter, Levi, Franke & Zeringue (citado por Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014) señalan, asimismo, que el razonamiento algebraico implica también:

- desarrollar un pensamiento relacional, es decir, apreciar relaciones numéricas entre los términos de una expresión y entre distintas expresiones o ecuaciones.
- Transformar expresiones matemáticas, sin restringirse al cálculo de una respuesta concreta.
- Desarrollar un conocimiento sobre conjuntos de objetos matemáticos (números o variables), de operaciones entre ellos, de propiedades de estos objetos y sus operaciones (por ejemplo, asociativa, conmutativa, distributiva), y de las propiedades de relaciones cuantitativas (por ejemplo, transitividad e igualdad).

Del mismo modo Kaput (citado por GA, 2006) entiende:

> Por razonamiento algebraico, nos referimos al compromiso de los estudiantes en actos regulares de generalización acerca de los datos, las relaciones y las operaciones matemáticas, estableciendo sus generalizaciones a través de actos públicos de elaborar conjeturas y de argumentación, las cuales se expresan en formas cada vez crecientes de formalización. (p.19)

En consideración con las ideas anteriores, pareciera haber cierta convergencia entre muchos investigadores de la Didáctica del Álgebra por indicar que este modo de razonamiento incluye características que son adquiridas por los estudiantes a través de la implementación de tareas, que se dan de manera natural en el uso de patrones o regularidades, uso de símbolos para generalizar, establecer relaciones numéricas y el estudio de estructuras, es decir, el estudio de las ecuaciones e inecuaciones, donde estos procesos son de importancia en los estudiantes para que puedan tener un acercamiento a ideas algebraicas más generales.

Así, el desarrollo del razonamiento algebraico se puede adquirir a través de actividades o tareas de generalización, planteamiento y resolución de ecuaciones e inecuaciones por ser procesos claves que permiten generar razonamiento en los estudiantes y además porque son rasgos característicos de este. Durante el proceso de desarrollar este razonamiento los estudiantes harán uso de símbolos que permiten generalizar el patrón y las relaciones que se establecen, a través de este proceso los símbolos permiten representar variables y construir ecuaciones e inecuaciones, las variables poseen significados diferentes dependiendo del contexto en que se usa, pues al representarlas sus cantidades pueden variar de valores desconocidos a formar parte de una fórmula, también se establecen relaciones por medio de funciones relacionando elementos entre conjuntos numéricos que se pueden representar mediante gráficas, fórmulas o enunciados.

El razonamiento algebraico propone expresar una idea haciendo uso de objetos algebraicos, donde se ponen en juego procesos cognitivos que posee que el estudiante al solucionar una tarea. Existen dos elementos importantes que dan a conocer los rasgos algebraicos que posee un estudiante, que son: la representación que permite formar conceptos e ideas matemáticas a través de la visualización, el simbolismo porque permite expresar la capacidad que tiene los estudiantes para interpretar y relacionar un problema en lenguaje natural.

Por esto, la idea de promover el razonamiento algebraico en la educación primaria se da con el fin de desarrollar aspectos algebraicos que ya posee el pensamiento de los estudiantes o bien se deben fomentar cambios en la forma de pensar de los estudiantes que les conduzca al razonamiento y  a su vez les permita resolver tareas algebraicas mediante el uso de ciertas herramientas, como variables, diagramas, notaciones que implique un nivel de generalidad de las matemáticas desde la educación primaria, puesto que no se trata de impartir un curso de álgebra a los alumnos de primer grado de escolaridad, sino de desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo del período que se inicia en la educación infantil hasta el bachillerato. (Godino & Font 2003).

Hasta este punto se han mencionado las características que dan diversos autores sobre el razonamiento algebraico, además de algunas nociones del enfoque del EOS, las cuales proponen una tipología de objetos que interviene en las prácticas matemáticas y unos procesos ligados a dichos objetos que ayudan a una caracterización del razonamiento algebraico que permite varios niveles de algebrización.

Desde la perspectiva sobre la concepción del razonamiento algebraico propuesta por Godino et al (2014) existen tres aspectos que fundamentan aquello que se puede considerar algebraico y son la base para caracterizar una tarea como algebraica o no los cuales son la base para designar el nivel de la solución que requiere una tarea explicitado por autores como Radford (2011), Kaput (2008), Puig & Rojano (2004).

1. la presencia de «objetos algebraicos» intensivos (esto es, entidades que tienen un carácter de generalidad o de indeterminación).

2. El tratamiento que se aplica a estos objetos (operaciones, transformaciones basadas en la aplicación de propiedades estructurales).

3. Tipos de lenguajes usados.

Estos tres criterios dan a conocer los rasgos algebraicos presentes en la solución de una tarea y a su vez poder asignar que nivel de razonamiento algebraico se está desarrollando, en el siguiente apartado se dan a conocer estos niveles de algebrización.

### *2.1.3 Niveles de algebrización*

En esta sección se describen las características de las prácticas realizadas al resolver tareas matemáticas que permiten definir o distinguir distintos niveles de algebrización propuestos por Godino, Castro, Aké & Wilhelmi (2014), dichos niveles están enmarcados entre un nivel 0 y un tercer nivel de algebrización en el que la actividad matemática se puede considerar como propiamente algebraica.

El nivel se asigna no a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que se realiza, por lo que dependiendo de la manera en la que se resuelve una tarea, la actividad matemática puede ser clasificada en un nivel u otro. No se trata, por tanto, de niveles exclusivamente matemáticos (centrados en las tareas), sino de estadios del funcionamiento de los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas. Además, el cambio en alguna de las variables de la tarea puede dar lugar a nuevas prácticas matemáticas con progresivo nivel de algebrización.

Los criterios básicos para definir los niveles de algebrización son:

1. Generalización. Generación o inferencia de intensivos.
2. Unitarización. Reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias.
3. Formalización y ostensión. Nombramiento mediante expresiones simbólicoliterales.
4. Transformación. Utilización de los objetos intensivos en procesos de cálculo y en nuevas generalizaciones.

A continuación, se describen cada uno de estos niveles con ejemplos tomados de Godino, Castro, Aké & Wilhelmi (2014)

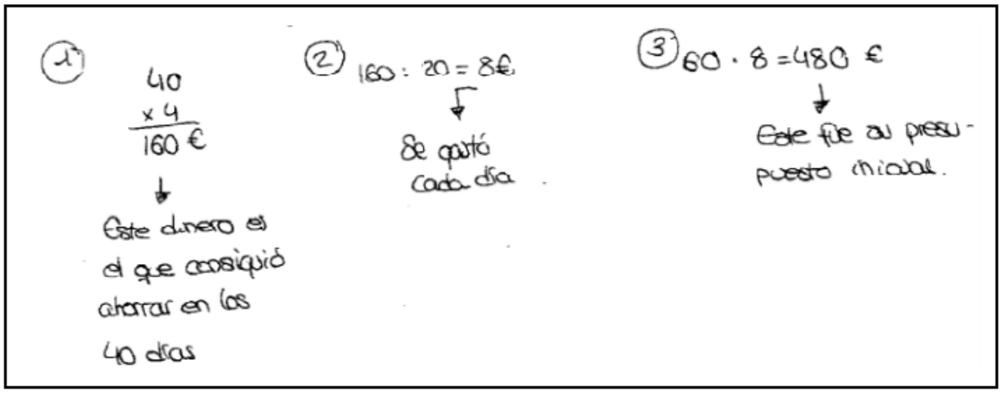
**Nivel 0 de algebrización (ausencia de razonamiento algebraico)**

Se considera este nivel porque intervienen números particulares, operaciones aritméticas aplicadas a dichos números y la igualdad como resultado de la operación, pero este nivel no incluye características algebraicas, es decir, no hay ningún rasgo propio del razonamiento algebraico.

> Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización. (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi 2014, p. 207).

Ejemplo: Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?

**Figura 3** *Respuesta del estudiante*




Nota: Tomado de Godino, Aké, Gonzato, Wilhelmi. (2012)

En la respuesta anterior, todos los objetos que aparecen en el proceso de resolución son cantidades particulares de magnitudes y operaciones aritméticas con los valores numéricos de dichas medidas, no existe ningún rasgo propio al razonamiento algebraico por lo tanto se le considera que posee un nivel cero de algebrización.

**Nivel incipiente de algebrización (nivel 1)**

Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi 2014, p. 208).

Ejemplo: continúa la siguiente secuencia: rojo, azul, azul, rojo, azul, azul, etcétera.

Un alumno razona de la siguiente manera: después de un rojo, siempre siguen dos azules y después de dos azules sigue un rojo. El alumno que razona de esta manera reconoce una regla general compatible con el conjunto finito de elementos dados que le permite ir generando sucesivamente los términos de la secuencia. Consideramos esta actividad de nivel 1 de algebrización.

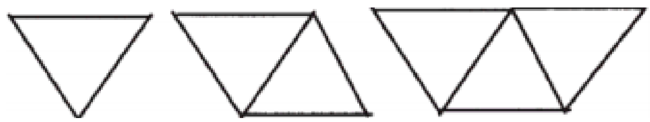
El estudiante al desarrollar un nivel superior a este tendrá la posibilidad de expresarlo mediante la representación simbólica algebraica

**Nivel intermedio de algebrización (nivel 2)**

Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico – literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $\mathrm{Ax} \pm \mathrm{B} = \mathrm{C}$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi 2014, p. 210).

Ejemplo (secuencia de figuras con palillos): en la figura 3, ¿cuántos palillos son necesarios para formar el dibujo situado en la posición cuarta? ¿Y para formar el dibujo que estuviera en la posición 50? ¿Y para la posición 100?

**Figura 4** *Secuencia de figuras con palillos*



1ª 2ª 3ª 4ª

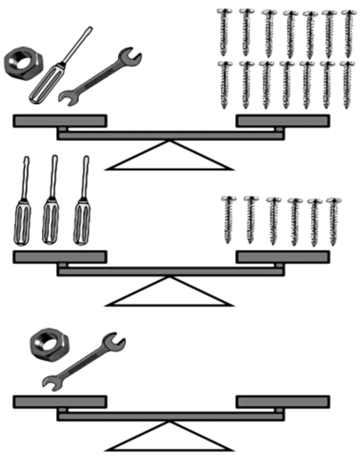
Una de las posibles soluciones en las que puede razonar un estudiante frente al problema sería la siguiente: él reconoce que la secuencia de figuras está formada por triángulos; cada triángulo requiere 3 palillos, luego la figura en la posición n requiere $3\mathrm{n}$ palillos. Pero al poner juntos los triángulos se eliminan palillos; en la figura 2ª se elimina 1, en la 3ª se eliminan 2, en la 4ª se eliminan 3. O sea, la fórmula general será $3\mathrm{n} - (\mathrm{n} - 1)$. Para la figura 50, se necesitan 101 palillos y para la 100, 201. Esta solución incluye variables expresadas en lenguaje simbólico literal, estos objetos están ligados al contexto y aunque no se opere con las variables existe un acercamiento a la generalidad, en este nivel un caso particular tiende a ser representada mediante ecuaciones aritméticas ($\mathrm{Ax} \pm \mathrm{B} = \mathrm{C}$).

**Nivel consolidado de algebrización (nivel 3)**

Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica – literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $\mathrm{Ax} \pm \mathrm{B} = \mathrm{Cx} \pm \mathrm{D}$, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi 2014, p. 211).

Ejemplo (balanza algebraica): ¿cuántos tornillos hay que poner en la tercera balanza (figura 4) para que quede equilibrada?

**Figura 5** *Balanza algebraica*



Solución: $3\mathrm{d} = 6\mathrm{t}$ ($3$ destornilladores $= 6$ tornillos); dividiendo entre 3 ambos miembros $\mathrm{d} = 2\mathrm{t}$. Además, en la primera balanza $\mathrm{p} + \mathrm{d} + \mathrm{l} = 14\mathrm{t}$ (pieza, destornillador, llave = 14 tornillos). Entonces, si se quita el destornillador del platillo izquierdo el equilibrio se mantiene si quitamos un peso equivalente, es decir, 2 tornillos.

Esta explicación de la actividad matemática realizada supone un nivel consolidado de algebrización (nivel 3), ya que se han planteado de manera simbólica las ecuaciones y se aplica una técnica de sustitución para resolver la ecuación requerida.

En la tabla 1, se resumen las características esenciales de los cuatro niveles de algebrización identificados, que se describieron anteriormente, y que permiten distinguir tres niveles de razonamiento algebraico elemental.

**Tabla 1** *Rasgos característicos de los niveles de razonamiento algebraico elemental*

| Niveles | Tipos de objetos | Transformaciones | Lenguajes |
|---|---|---|---|
| 0 | No intervienen objetos intensivos. En tareas estructurales, pueden intervenir datos desconocidos. | Se opera con objetos extensivos. | Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos. |
| 1 | En tareas estructurales, pueden intervenir datos desconocidos. En tareas funcionales, se reconocen los intensivos. | En tareas estructurales, se aplican relaciones y propiedades de las operaciones. En tareas funcionales, se calcula con objetos extensivos. | Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos. |
| 2 | Intervienen indeterminadas o variables. | En tareas estructurales, las ecuaciones son de la forma $\mathrm{Ax} \pm \mathrm{B} = \mathrm{C}$. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión | Simbólico -literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal. |
| 3 | Intervienen indeterminadas o variables. | En tareas estructurales, las ecuaciones son de la forma$\mathrm{Ax} \pm \mathrm{B} = \mathrm{Cx} \pm \mathrm{D}$. Se opera con las indeterminadas o variables. | Simbólico -literal; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto. |

Tomada de Castro, Aké & Wilhelmi (2014) p. 215

Evidentemente en las prácticas realizadas por los estudiantes al resolver una tarea se puede identificar niveles de razonamiento algebraico, como medios que dan a conocer como el estudiante puede interpretar un enunciado, justificar su solución a través de propiedades estructurales de los objetos matemáticos que intervienen en la práctica, sin embargo, estos niveles son útiles para el objetivo de este trabajo.

De acuerdo con el grado de escolaridad es importante mencionar que no todos los niveles anteriormente presentados se van a evidenciar en la propuesta de aula, los niveles utilizados serán el nivel cero, nivel 1, nivel 2.

## 2.2 Referente matemático

Este referente se aborda desde de dos conceptos, el primero describe lo que se entiende por estructura matemática y como a partir de ella se puede relacionar la ecuación como un tipo de estructura, el segundo hace referencia a la generalización de patrones que son objeto de estudio en las sucesiones las cuales ayudan a expresar y formalizar un patrón. Esto en virtud que el diseño de la propuesta de aula es coherente con la idea del razonamiento algebraico propuesto desde el EOS, propone actividades que involucran ecuaciones y generalización de patrones.

La caracterización que aquí se hace de estos conceptos matemáticos se toma como referencia los trabajos realizados por Zill y Dewar (2012), Barría (2016).

### 2.2.1.1 Ecuaciones

Una ecuación es una afirmación de que dos expresiones algebraicas son iguales, en donde al menos una de ellas contiene una variable, entonces la proposición matemática es una ecuación en una variable. Por ejemplo,

$$\sqrt{x-1} = 2, \quad x^2 - 1 = (x+1)(x-1), \quad |x+1| = 5$$

son ecuaciones en la variable x. Una solución o raíz de una ecuación es cualquier número que, sustituido en ella, la convierte en una proposición verdadera. Se dice que un número satisface una ecuación si es una solución de la ecuación. Resolver una ecuación significa hallar todas sus soluciones.

Una ecuación se llama identidad si todos los números del dominio de la variable la satisfacen. Si hay al menos un número en el dominio de la variable que no la satisfaga, entonces se dice que es una ecuación condicional.

La ecuación

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

se satisface con el conjunto de todos los números reales excepto $x = 1$. Como 1 no está en el dominio de la variable, la ecuación es una identidad.

El número 3 está en el dominio de la variable en la ecuación $4x - 1 = 2$, pero no la satisface porque $4(3) - 1 \neq 2$. Así, $4x - 1 = 2$ es una ecuación condicional.

El conjunto de todas las soluciones de una ecuación se llama conjunto solución. En el ejemplo, el conjunto solución de $3x - 2 = x + 2$ se escribe $\{2\}$.

Ecuaciones equivalentes Decimos que dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones, es decir, si sus conjuntos solución son exactamente iguales. Por ejemplo,

$$2x - 1 = 0, \qquad 2x = 1, \qquad y\ x = \frac{1}{2}$$

son ecuaciones equivalentes. Generalmente, resolvemos una ecuación encontrando una ecuación equivalente que tenga soluciones que se determinen fácilmente. Las operaciones descritas a continuación producen ecuaciones equivalentes.

Teorema: Operaciones que producen ecuaciones equivalentes

i) Sume o reste en cada miembro o lado de una ecuación la misma expresión que represente un número real.

ii) Multiplique o divida cada miembro o lado de una ecuación por la misma expresión que represente un número real diferente de cero.

Una ecuación simple

Resuelva $3x - 18 = 0$.

**Solución** Obtenemos esta lista de ecuaciones equivalentes:

$$3x - 18 = 0$$

$$3x - 18 + 18 = 0 + 18 \leftarrow \text{por i) del teorema}$$

$$3x = 18$$

$$\frac{1}{3}(3x) = \frac{1}{3}(18) \leftarrow \text{por ii) del teorema}$$

$$x = 6$$

El conjunto solución de la ecuación es $\{6\}$.

Como no es raro cometer errores aritméticos o algebraicos cuando se resuelve una ecuación, siempre conviene comprobar cada solución sustituyéndola en la ecuación original. Para comprobar la solución del ejemplo 3, se sustituye x con 6 en 3x 2 18 5 0:

$$3(6) - 18 = 0$$

$$18 - 18 = 0$$

$$0 = 0$$

### *2.2.2 Generalización de patrones*

Radford (2010) propone la siguiente definición acerca de la generalización de patrones, generalizar un patrón algebraicamente descansa en la capacidad de notar una comunalidad sobre algunos elementos de una secuencia S, siendo conscientes de que esta comunidad se aplica a todos los términos de S y ser capaz de usarla para proporcionar una expresión directa de cualquier término de la secuencia S (Radford, 2010, p. 42)

Los patrones y su generalización desde una perspectiva matemática reposan en una idea más amplia que es la de sucesión que se explica a continuación.

### *2.2.3 Sucesiones*

La mayoría de la gente ha escuchado las frases “sucesión de cartas”, “sucesión de acontecimientos” y “sucesión de cuotas del auto”. Intuitivamente podemos describir una sucesión como una lista de objetos, acontecimientos o números que vienen uno después del otro, es decir, una lista de cosas dadas en algún orden definido. Los meses del año se enumeran en el orden en que ocurren

Enero, febrero, marzo, ..., diciembre (1)

Y 3, 4, 5, ..., 12 (2)

son dos ejemplos de sucesiones. Cada objeto de la lista se llama término de la sucesión. Las listas (1) y (2) son sucesiones finitas: la sucesión (1) tiene 12 términos y la sucesión (2) tiene 10 términos. Una sucesión como

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ (3)

donde no se indica el último término, se conoce como sucesión infinita. Los tres puntos de (1), (2) y (3) se llaman elipsis e indican que los términos siguientes siguen la misma pauta que la establecida por los ya dados.

En este capítulo, a menos que se especifique otra cosa, usaremos la palabra sucesión para referimos a una sucesión infinita.

Los términos de una sucesión pueden colocarse en correspondencia uno a uno con el conjunto N de los números enteros positivos. Por ejemplo, una correspondencia natural para la sucesión en (3) es

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

$$\uparrow \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

1 2 3 4

Debido a esta propiedad de correspondencia, podemos definir una sucesión matemáticamente.

**Definición:** Una sucesión es una función f cuyo dominio es el conjunto N de los enteros positivos {1, 2, 3, ...} cuyo rango está incluido en el conjunto de los números reales: $N \to R \; \forall \, n \in N: s(n) = a_n$

Tenga en cuenta que, en algunos casos, conviene suponer que el dominio de una sucesión es el conjunto de los números enteros no negativos {0, 1, 2, 3, ...}. Una sucesión finita es también una función cuyo dominio es algún subconjunto {1, 2, 3, ..., n} del conjunto N.

**Terminología** Los elementos del rango de una sucesión son, simplemente, los términos de la sucesión. Supondremos, de aquí en adelante, que el rango de una sucesión es un conjunto de números reales. El número f(1) se toma como primer término de la sucesión, el segundo término es f(2) y, en general, el término n-ésimo es f(n). Más que usar notación de funciones, representamos los términos de una sucesión usando subíndices: $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \ldots$, y así sucesivamente. El término n-ésimo $f(n) = a_n$ se llama también término general de la sucesión. Simbolizamos una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$

con la notación $\{a_n\}$. Si identificamos el término general en (3) como $\frac{1}{n}$ la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, ..., puede escribirse en forma compacta como $\{\frac{1}{n}\}$.

# 3. Capítulo 3. Diseño metodológico y análisis de resultados

Este capítulo se divide en dos sesiones, la primera de ellas se presenta todo lo relacionado con el diseño metodológico dirigido para el desarrollo del trabajo, inicialmente se detalla el tipo de paradigma, el proceso de investigación, se describe la población objeto de estudio y se precisa la forma para la recolección de los datos, también se expone la descripción de la propuesta didáctica. La segunda sesión del capítulo se exhibe los análisis de los resultados obtenidos, fruto de la implementación de la propuesta de aula para lo cual se emplean las categorías teóricas propuestas en el capítulo anterior.

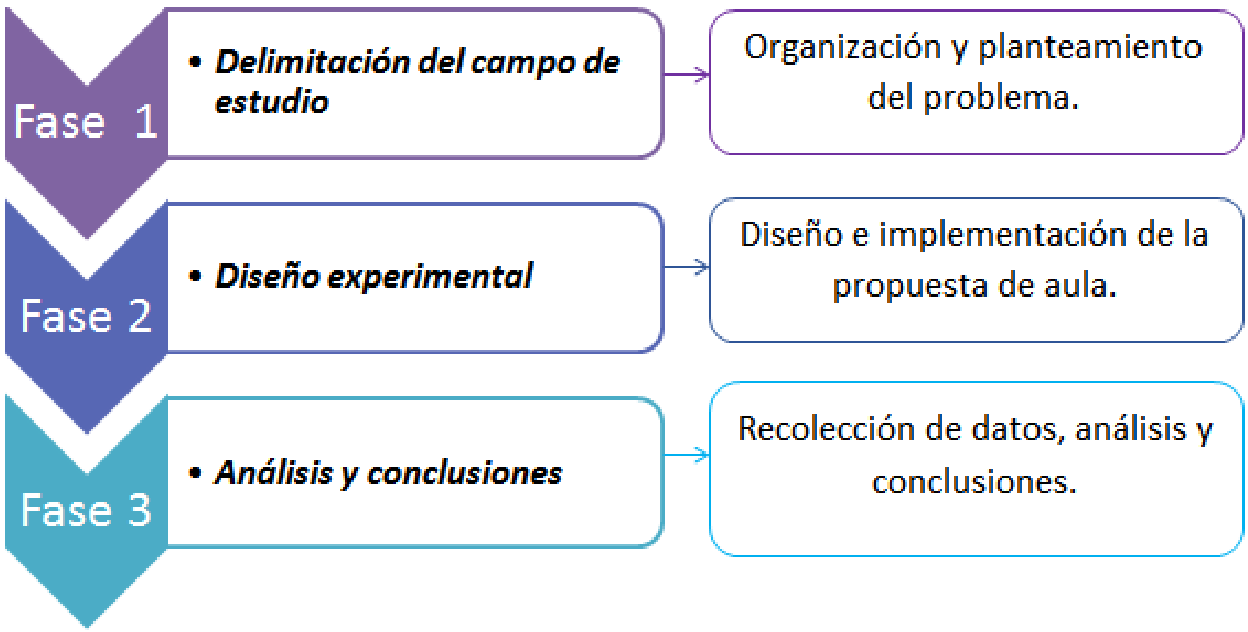
## 3.1 Enfoque del estudio

El presente trabajo se fundamenta bajo el enfoque cualitativo, puesto que la metodología que se utiliza en este tipo de enfoque permite describir comprender e interpretar los fenómenos, a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes (Hernández, Fernández & Baptista, 2014). Es necesario agregar que este trabajo tiene en cuenta un tipo de estudio descriptivo que aborda un estudio de caso, los cuales "… tienen como característica básica que abordan de forma intensiva una unidad, esta puede referirse a un apersona, una familia, un grupo, una organización o una institución" (Muñiz, 2003, p.1), lo cual es coherente con los propósitos de este trabajo dado que el objetivo es favorecer el desarrollo del razonamiento algebraico en un grupo de estudiantes de quinto grado a través de una propuesta de aula.

Considerando lo anterior y de acuerdo con el objetivo de la investigación, el estudio de caso permite un análisis detallado de la problemática expuesta, permitiendo así describir los avances en los niveles del razonamiento algebraico que logran los estudiantes de grado quinto objeto de investigación a partir de la implementación de la propuesta de aula.

## 3.2 Proceso de investigación

A continuación, se indican las fases por las cuales se desarrolla este trabajo con la finalidad de lograr los objetivos propuestos, estas se presentan de forma esquemática en el esquema 3.




**Esquema 1** *Fases empleadas para el desarrollo del trabajo*

**Fase 1. Delimitación del campo de estudio**: en esta primera fase se establece la problemática que gira en torno al álgebra escolar en los grados iniciales, teniendo en cuenta algunas investigaciones en educación matemática que han manifestado múltiples dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela, que se toman como base para plantear la pregunta de investigación que marca la pauta a seguir en el trabajo, además de los objetivos, la justificación del mismo y por último el marco de referencia que da a conocer la teoría empleada y el referente curricular en el que se basan tanto el diseño de la propuesta de aula que se desea implementar con la población como los análisis que se hacen fruto de la implementación de dicha propuesta.

**Fase 2. Diseño experimental**: esta etapa se divide en dos momentos, el primer de ellos se centra en la búsqueda de instrumentos didácticos que ayuden al diseño de la propuesta de aula que permita favorecer el razonamiento algebraico, para lograr esto, en las tareas se abordaran problemas como el de variación y cambio, uso de patrones, variables, incógnitas, ecuaciones, que le permitirá al estudiante moverse por los niveles cero, nivel 1 y nivel 2 de algebrización y así hallar la solución del problema, también ayudarán al objetivo propuesto en los estudiantes de grado quinto. El segundo momento es todo lo relacionado a la recolección de los datos que se hace fundamentalmente a través de la implementación de la propuesta en la cual se vinculan diferentes instrumentos para ello, los cuales se presentan más adelante.

**Fase 3. Análisis y conclusiones**: esta última fase se desarrolla con base a los resultados obtenidos en la implementación de la propuesta de aula, permite realizar un respectivo análisis sobre el desarrollo del razonamiento algebraico de los estudiantes de grado quinto a luz del enfoque del EOS y los niveles de algebrización, y así poder realizar las conclusiones para responder a los objetivos propuestos en este trabajo.

## 3.3 Instrumentos para recolectar la información

Para la recolección de los datos de este estudio cualitativo de tipo– descriptivo con estudio de caso, se emplean los siguientes instrumentos:

- **Grabaciones de audio y video:** por medio de este se registran las interacciones de los estudiantes: estudiante-estudiante y estudiante-investigadora, a través de grabaciones de audio y video para tomarlas como complemento de los demás instrumentos y como insumo en el respectivo análisis.
- **Producciones escritas en las hojas de trabajo de los estudiantes:** en este instrumento se presentan las soluciones que expresan los estudiantes durante el desarrollo de la propuesta de aula, permitiendo la descripción del análisis de los resultados de esta.

Estos instrumentos de recolección de datos se utilizarán de la siguiente manera: como instrumento principal de análisis las producciones escritas por parte de los estudiantes; las grabaciones de audio y video, y las entrevistas son instrumentos de apoyo. Cabe resaltar que las entrevistas no se realizaran a todo el grupo, sino que se selecciona al azar una cantidad de estudiantes mínima para ser entrevistados.

## 3.4 Población objeto de estudio

La población que se estudia está compuesta por estudiantes de quinto grado de Educación Básica Primaria del Instituto Ángeles de Dios ubicado en Cali, Valle del Cauca. Esta institución educativa es de carácter privado con 31 años de reconocimiento y servicio a la comunidad del Valle del Cauca, se caracteriza por su excelente nivel educativo y el tipo de calendario que maneja el colegio es el calendario "A", presta sus servicios en la jornada de la mañana y tarde. Los estudiantes de este grado se encuentran entre las edades de 9 a 11 años, este grado de escolaridad recibe 5 horas semanales distribuidas entre matemáticas, estadística y geometría. En esta institución hay dos grupos de grado quinto y se va a seleccionar solo uno de ellos donde en promedio hay 30 estudiantes, para la implementación de la propuesta se escogen 14 estudiantes al azar.

Teniendo presente la crisis mundial que actualmente se vive, se escoge esta institución educativa por varias razones, entre ellas, por su nivel educativo, la estructura de la propuesta que requiere que su implementación sea de forma presencial, y la institución cumple con el proceso de alternancia como requisito para el regreso gradual de los estudiantes al aula de clase debido a la pandemia por el covid-19, y por último el vínculo cercano que tiene una de las autoras de esta investigación con la institución lo cual facilita el acceso tanto a ella como al grupo de estudiantes con los cuales se va a hacer el estudio. Esto es importante en este trabajo ya que permite cumplir con el tiempo y el cronograma establecido, para la implementación de la propuesta y para el desarrollo total de la investigación.

### 3.5 Descripción de la propuesta de aula

La propuesta de aula que en este trabajo se diseña para el desarrollo del razonamiento algebraico a partir de la generalización de patrones y el estudio de estructuras en este caso las ecuaciones, se organiza en dos situaciones denominadas La Fábrica de Dulces y Dulces en Barras de Colores de acuerdo con la teoría del EOS y los niveles de algebrización. A continuación, se describe detalladamente cada una de las situaciones.

**Situación 1: la fábrica de dulces.** En esta situación se presenta el caso de Luisa quien es la dueña de una fábrica encargada de diseñar cajas llenas de dulces, las cuales son de diferentes tamaños para ofrecerles a sus clientes. La situación se diseña teniendo en cuenta el contexto de la vida diaria (MEN, 1998). De este modo se parte del estudio de una situación y el planteamiento de una serie de preguntas que ayuden al desarrollo del razonamiento algebraico por medio de una tarea funcional donde se hace uso de la sucesión como una función para trabajar la generalización de patrones.

**Situación 2. Dulces en barra de colores.** Aquí se propone una situación de una niña llamada Isabella quien consume muchos dulces en barra y ellos son de colores, en la tienda se le ofrece una promoción donde se le obsequian 2 dulces azules si compra 4 dulces rojos, esta situación se diseña teniendo en cuenta el contexto de la vida diaria (MEN, 1998). Se proponen preguntas para dar cuenta de tareas estructurales (ecuaciones) teniendo presente los objetos ontosemióticos que intervienen en cada solución.

Cada una de las situaciones mencionadas anteriormente tienen como fin de favorecer el desarrollo del razonamiento algebraico teniendo en cuenta los niveles de algebrización y la teoría del EOS, desde la configuración de objetos y procesos el cual permite reconocer cuando una práctica matemática se considera algebraica, para ello se tiene presente la idea de presencia de objetos algebraicos (generalidad, objetos intensivos y extensivo ), transformación (operaciones, uso de propiedades de estructuras numéricas), lenguajes (icónico, gestual, numérico, natural). Lo anterior ayuda al diseño de las situaciones a partir de la descripción de cada nivel de algebrización (nivel 0, nivel 1, nivel 2) y al análisis de las soluciones por parte de los estudiantes.

Por consiguiente, la propuesta se configura como un modelo el cual le permite a los estudiantes elevar sus niveles de algebrización teniendo presente que este desarrollo es progresivo y paulatino.

A continuación, en la Tabla 2 se presenta una síntesis de la configuración de la propuesta

**Tabla 2** *Configuración de la propuesta de aula.*

| **Situación** | **Ítem** | **Propósito** | **Nivel de algebrización[3]** |
|---|---|---|---|
| 1.La fábrica de dulces | 1. Observa las figuras, ¿Qué encuentras común y no común en las cajas de la secuencia? | Identificar por medio de la visualización los diferentes tamaños que pueden tomar las cajas de acuerdo con la cantidad de dulces que contiene cada una de ellas. Se opera con objetos intensivos de primer grado (números particulares). | Nivel 0 |
| | 2. ¿Cuántos dulces aumentan de la primera caja a la segunda, de la segunda caja a la tercera y qué se puede concluir de estos aumentos? | Interpretar las relaciones cuantitativas de cada figura, reconociendo que dicha relación varia a partir del cambio de una figura a otra. | Nivel 0 |
| | 3.Teniendo en cuenta la secuencia de las cajas de dulces, dibuja la caja No5 y No6, ¿cuántas dulces se utilizaron en estas cajas? Explica cómo la construiste. | Identificar el patrón establecido, reconocer su generalidad haciendo uso de la sucesión como una función y expresarla en lenguaje natural numérico icónico o gestual. | Nivel 1 |
| | 4.Luisa le quiere regalar a su mamá de cumpleaños la caja de dulces No20, pero no sabe cuántos dulces se necesitan para llenarla. ¿Cuál es la cantidad de dulces que requiere Luisa para llenar dicha caja? Explica como obtuviste esta cantidad. | Reconocer una regla general y expresarla por medio de la sucesión como una función para hallar cantidades numéricas. Aplica relaciones | Nivel 1 |

[3]Es importante resaltar que no es a la pregunta que se le asigna el nivel, sino que es a las prácticas matemáticas que se espera que los estudiantes desplieguen al resolver dicho ítem.

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td><td>y propiedades genéricas de las operaciones con objetos intensivos de primer grado.</td><td></td></tr>
<tr><td>5. Escribe un mensaje a un compañero de la clase donde le explicas cómo hallar la cantidad de dulces que se necesitan para cualquier caja.</td><td>Expresar a través de un lenguaje natural la expresión que permite hallar cualquier cantidad.</td><td>Nivel 2</td></tr>
<tr><td>6. Expresa la fórmula que encontraste en el punto anterior de manera simbólica</td><td>Identifica y expresa en lenguaje simbólico-literal la fórmula general por medio de una función para hallar cualquier cantidad de dulces.</td><td>Nivel 2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2. Dulces en barra de colores</td><td>1. Si Isabella compró 18 barras de dulces en total, ¿cuántos dulces rojos y cuantos dulces azules compra?</td><td>Establecer cantidades numérica haciendo uso de gráficos, Donde interviene el lenguaje natural, numérico, icónico y gestual.</td><td>Nivel 0</td></tr>
<tr><td>2. Juliana y Andrés van a la tienda. Andrés dice que cuando compró 8 dulces rojos le obsequiaron 6 azules, mientras que Juliana dice que cuando ella compró 8 dulces rojos le obsequiaron 4 dulces azules. Indica quién de los dos tiene la razón y justifica tu respuesta.</td><td>Identificar y establecer relaciones y descomposiciones entre cantidades. Se hace uso de la propiedad de las proporciones que es la razón.</td><td>Transición del nivel 0 al 1</td></tr>
<tr><td>3. La mamá de Isabella decide hacerle una fiesta y ella compra 300 dulces rojos para repartirlos en la fiesta, teniendo en cuenta la promoción ¿Cuántos dulces azules le obsequiaron en la tienda? ¿Cuántos dulces compró en total?</td><td>Uso de la propiedad de las proporciones que es la razón.</td><td>Nivel 1</td></tr>
<tr><td></td><td>4. Ayuda a Isabella a completar la siguiente tabla:
<table>
<tr><th>Dulces rojos</th><th>Dulces azules</th></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>8</td><td>4</td></tr>
<tr><td>12</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>8</td></tr>
<tr><td></td><td>10</td></tr>
</table></td><td>Identificar relaciones entre cantidades y establecer relaciones, descomposiciones entre cantidades,<br>Uso de la propiedad de las proporciones como es la homogeneidad de la suma.</td><td>Nivel 1</td></tr>
</table>

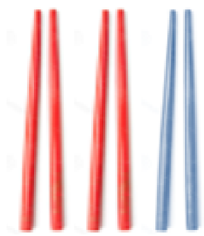
| | | | |
|---|---|---|---|
| | Explica como hiciste para completar los datos que hacían falta en la tabla. | | |
| | | Aplica propiedades de los números: homogeneidad de la suma | Nivel 1 |

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

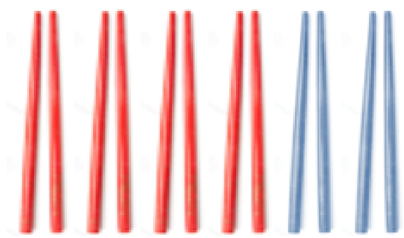
5. Andrés compró 12 dulces rojos y para dar cuenta la cantidad de dulces azules que le obsequian por su compra empleo el siguiente razonamiento:

1) El 12 lo descompone en dos cantidades 4 *dulces rojos* + 8 *dulces rojos*
2) Después halla la cantidad de dulces azules para cada cantidad:

4 dulces rojos obsequian 2 dulces azules:



8 dulces rojos obsequian 4 dulces azules



3) Por último, sumó la cantidad de dulces azules

*2 dulces azules* + *4 dulces azules* = *6 dulces azules*

Obteniendo la cantidad de dulces azules que le obsequian por la compra de 12 dulces rojos.

Emplea el razonamiento que utilizó Andrés para hallar la cantidad de dulces azules al comprar 220 dulces rojos.

</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>6. Juliana para hallar la cantidad de dulces azules que le obsequian por la compra de 32 dulces rojos utilizo un razonamiento diferente:<br><br>Paso 1: $\frac{2\ dulces\ azules}{4\ dulces\ rojos} = \frac{?\ dulces\ azules}{32\ dulces\ rojos}$<br><br>Paso 2: $\frac{32\cancel{dulces\ rojos} \times 2\ dulces\ azules}{4\ \cancel{dulces\ rojos}} = ?$<br><br>Paso 3: $\frac{64\ dulces\ azules}{4} = ?$<br><br>Paso 4: $16\ dulces\ azules\ = x$<br><br>Por lo tanto, Juliana por medio de su estrategia se dio cuenta que por la compra de 32 dulces rojos le obsequian 16 dulces azules.<br><br>Explica con tus propias palabras paso a paso el procedimiento que realizó Juliana para hallar la cantidad de dulces azules.</td>
<td>Describir el procedimiento presentado en el ítem.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>7. Emplear lo anterior para hallar una cantidad de dulces.</td>
<td>Identifica y expresa en lenguaje simbólico-literal</td>
<td>Nivel 2</td>
</tr>
</table>

## 3.6 Metodología de implementación de la propuesta de aula

La propuesta de aula se implementó en dos sesiones, una sesión para cada situación. Las dos situaciones se desarrollaron cada una con una duración de 4 horas aproximadas finalizando el mes de marzo.

La implementación se llevó acabo con un grupo de 14 estudiantes por ser estudio de casos; distribuidos en 7 grupos de trabajo donde cada uno consta de una pareja seleccionada al azar. Se decide emplear esta metodología de trabajo en parejas con el fin de que los estudiantes puedan plantear diversas estrategias, discutir ideas y establecer puntos en común para dar solución a cada una de las situaciones.

Durante la implementación, las investigadoras realizan algunas intervenciones, unas para develar aspectos que son claves para el análisis de los datos, y otras para atender algunas inquietudes de los estudiantes ante cada pregunta. Cabe resaltar que cada uno de los estudiantes contaban con su hoja de actividades para cumplir con el distanciamiento social, al responder cada pregunta se hacía en común acuerdo.

Por último, resulta oportuno mencionar que durante la implementación de toda la propuesta se abordó con las autoras de este trabajo en ausencia del docente de matemáticas de los estudiantes de grado 5-1A.

### 3.7 Análisis de resultados

Para el análisis de los resultados se tiene como foco de atención las tres categorías que son la base para caracterizar los niveles de algebrización como son: el lenguaje, que emplean los estudiantes, las trasformaciones y los tipos de objectos y procesos que se presentan en sus prácticas matemáticas. Así mismo, se analizan en relación con los propósitos para los cuales han sido diseñados cada uno de los ítems de las situaciones propuestas. Para los análisis se colocan imágenes que ilustran las producciones escritas de los estudiantes y cuando se considere necesario se transcriben episodios de diálogos donde se reflejan las interlocuciones de los estudiantes y las investigadoras alrededor de la situación que se está resolviendo. Para ello se hace uso de las siguientes notas convencionales:

- P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, para las parejas de los estudiantes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, respectivamente
- I1 y I2 para las investigadoras 1 y 2
- L1, L2, L3…Ln para cada uno de los diálogos que se transcriben

Los análisis que a continuación se exhiben se realiza para cada uno de los ítems de ambas situaciones. Los resultados obtenidos en ellos que a cada una de las situaciones se le realiza su respectivo análisis, los resultados obtenidos se presentan a través de tablas donde se menciona cada una de las parejas que responden, se describen las respuestas de ellas, se presenta la frecuencia absoluta del tipo de respuesta ofrecidos por las parejas de estudiantes y la frecuencia relativa.

### *3.7.1 Análisis de la situación 1. La Fábrica de Dulces*

A continuación, se presenta el análisis de cada uno de los ítems de la situación 1 (ver anexo 1).

**Tabla 3** *Respuesta de las parejas de estudiantes al ítem 1 de la situación 1*

| 1. Observa las figuras, ¿Qué encuentras común y no común en las cajas de la secuencia? | | | |
|---|---|---|---|
| Pareja | Descripción de la práctica realizada | Frecuencia Absoluta | Frecuencia Relativa |
| P1 P4 P5 P7 | Identifican como común el color de los dulces de las cajas y como no común el tamaño de cada una de las cajas de dulces. | 4 | 57.1% |
| P2 | Reconoce como común que cada caja aumenta 4 dulces, que estos son azules, que las cajas son cuadradas, y lo no común es que la cantidad de dulces son distintos. | 1 | 14.2% |
| P3 | Establece como común la forma circular de los dulces y el color. Como no común identifica la cantidad de dulces que contiene cada caja. | 1 | 14.2% |
| P6 | Identifica como común el color de los dulces de cada caja y como no común la cantidad de dulces de cada una de las cajas y su tamaño. | 1 | 14.2% |

Tal y como reflejan los datos en la Tabla 3, se observan distintas respuestas por parte de las parejas P1, P4, P5 y P7 por medio de la visualización identifican como común el color de los dulces reconociendo que todos los dulces de las cajas tienen el mismo color, y a su vez dan cuenta que el tamaño es lo no común que poseen todas las cajas. Este argumento lo expresan por el motivo de que cada caja ocupa un espacio diferente.

Por su parte P2 reconoce el número que diferencia a una caja de la otra, es decir, la cantidad que hace que las cajas aumenten es 4, menciona que los dulces son de color azul, da cuenta de la forma de cada una de las cajas indicando que son “cuadradas” y expresa que lo no común es que cada caja contiene distinta cantidad de dulces. De lo anterior se puede evidenciar que P2 alude al color, la forma haciendo uso de un lenguaje grafico que le permite designar la forma de las cajas, y es a través del conteo que le permite diferenciar la cantidad de dulces que hay de una caja a otra.

Al igual que P2, P3 utiliza un lenguaje grafico para indicar que la forma de los dulces es circular y es a través de la percepción espacial que se puede observar que cada caja contiene cantidades diferentes de dulces.

P6 fija su atención en el color de los dulces haciendo referencia a que todos tienen el mismo color, pero sus cantidades son diferentes y su tamaño también. Nótese como las parejas al solucionar este ítem perciben aspectos comunes y no comunes de la secuencia, se puede mencionar que todas las parejas por medio de su acción perceptiva reconocen el color de los dulces para todas las cajas.

Cabe resaltar que solo P2 a través de su respuesta expresa un patrón numérico muy importante que luego da pie para la construcción de la fórmula que permite hallar la cantidad de dulces de las cajas, debido a que este expresa numéricamente cuál es la cantidad que aumenta cada caja. A diferencia de P3 y P6 que intentan identificar como lo no común que la cantidad de dulces en las cajas varía, pero no especifican el valor numérico el cual hace que la cantidad de dulces sea distinta en cada caja.

Parejas como P1, P4, P5, P7 y P6 hacen uso de una percepción espacial para centrar su atención en el tamaño de las cajas.

Lo anterior, es la evidencia que las parejas al solucionar el ítem dan cuenta del significado personal que logran construir a través de la visualización lo que permite argumentar e identificar lo común y no común permitió identificar distintos patrones como la forma, el color, cantidades presentes en la secuencia del ítem 1.

Los objetos que emergen son objetos extensivos (cantidades particulares), usan un lenguaje icónico, gestual y natural para expresar su respuesta, las transformaciones que emplean son conversiones del lenguaje icónico al natural. Por consiguiente, la practica matemática se puede asignar a un nivel 0, debido a la ausencia del razonamiento algebraico.

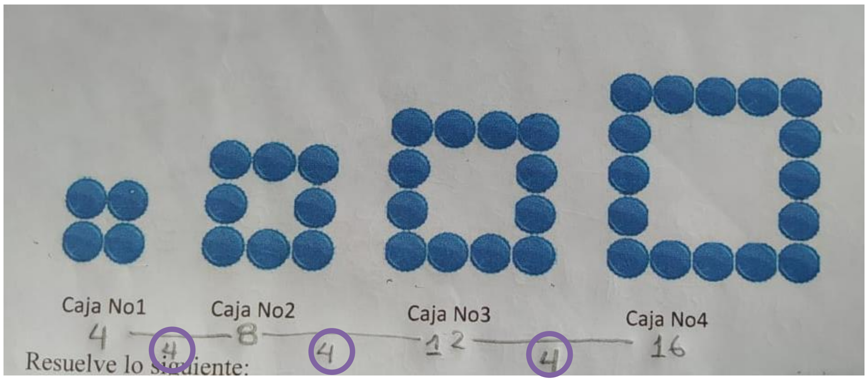
A continuación, se presentan los resultados del ítem 2.

**Tabla 4** *Respuesta de las parejas de estudiantes al ítem 2 de la situación 1*

| 2. ¿Cuántos dulces aumentan de la primera caja a la segunda, de la segunda caja a la tercera y qué se puede concluir de estos aumentos? | | | |
|---|---|---|---|
| Pareja | Descripción de la práctica realizada | Frecuencia Absoluta | Frecuencia Relativa |
| P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7 | Identifican que se aumenta 4 dulces por cada caja concluyendo que este es un patrón que se presenta. | 7 | 100% |

De acuerdo con las respuestas dadas por las parejas de estudiantes al ítem 2, las cuales se exhiben en la Tabla 4 se puede afirmar que todas ellas dan cuentan que aumenta 4 dulces por cada caja de la secuencia lo que muestra evidencia que ellos reconocen la cantidad que varía entre las cajas, es decir, encuentran el patrón numérico que describe el aumento de dulces en cada caja, el cual es 4. Tal y como se ilustra en la Figura 7 a modo de ejemplo a partir de la práctica realizada por P2:

**Figura 6** *Respuesta ítems 2 de P2*




Nótese como en la Figura 7 aparece un mismo 4 en medio de los números de las cajas, los cuales, se han señalado con círculos y nótese como esa misma cantidad aparece de forma consecutiva del paso de una caja a otra caja, lo que significa que es este el patrón hallado que relaciona el aumento en los dulces de cada caja.

En la solución a este ítem los objetos que intervienen son extensivos (cantidades particulares) por lo tanto, se opera con números particulares al asociar el conteo que realiza cada pareja en las cajas de dulces para identificar el patrón. Se hace uso del lenguaje numérico, icónico y natural para expresar la solución. Por lo tanto, en esta práctica matemática no hay ningún rasgo de razonamiento algebraico y de acuerdo con Godino et (2014) esta práctica corresponde a un nivel cero de algebrización.

A continuación, se presentan los resultados del ítem 3.

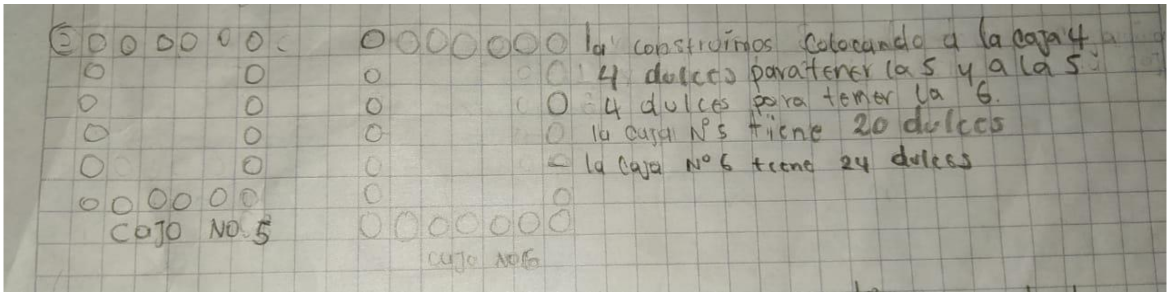
**Tabla 5** *Respuesta de las parejas de estudiantes al ítem 3 de la situación 1*

| 3. Teniendo en cuenta la secuencia de las cajas de dulces, dibuja la caja No5 y No6, ¿cuántas dulces se utilizaron en estas cajas? Explica cómo la construiste. | | | |
|---|---|---|---|
| Pareja | Descripción de la práctica realizada | Frecuencia Absoluta | Frecuencia Relativa |
| P3 P4 P5 P6 P7 | Construye las cajas No5 y No6 teniendo en cuenta la cantidad de dulces de la caja anterior agregándole 4 dulces para obtener la siguiente caja y especifica cuantos dulces se obtiene en cada una de las cajas construidas. | 4 | 57.1% |
| P1 P2 | Construyen la caja No5 y No6, multiplicando el numero de la caja (5 y 6) por 4, e indica la cantidad de dulces que se obtienen en cada caja construida. | 2 | 28.5% |

La información anterior sobre la respuesta al ítem 3 que se presenta en la Tabla 5 indica que las parejas P3, P4, P5, P6 y P7 continúan con la misma estructura de la secuencia aumentando a cada caja 4 dulces reconociendo que las cajas No5 y No6 se construyen conociendo la cantidad de dulces de la caja anterior y adicionándole a esta 4 dulces.

De lo anterior es importante mencionar que todas las parejas tienen presente el aumento y lo consideran como un patrón numérico permanente en cada una de las cajas, lo cual les permite a las parejas P3, P4, P5, P6 y P7 continuar con la idea de construir las cajas sumándole 4 dulces a la cantidad de dulces de la caja anterior. Como se puede observar en la Figura 7 de la respuesta de P6:

**Figura 7** *Respuesta ítems 3 de P6*

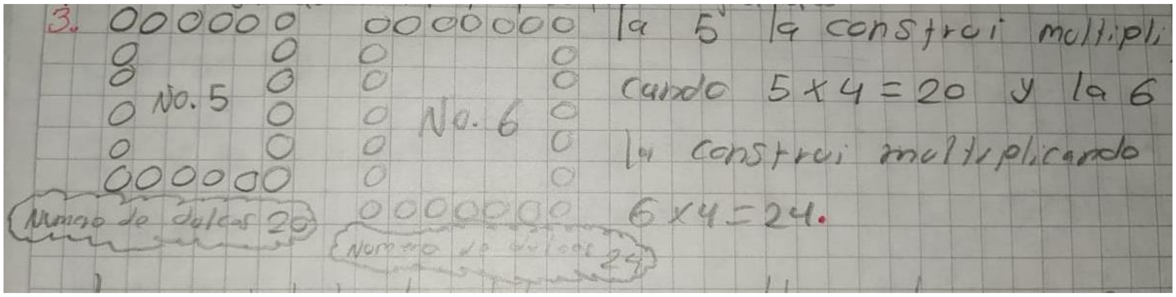



Lo anterior es la muestra de que las parejas construyen las cajas en base a lo que ellos han podido percibir en la secuencia.

Los objetos que intervienen en esta práctica matemática son los particulares, el lenguaje que expresan en sus respuestas es el grafico, natural, icónico y numérico, por último, el tratamiento empleado son las operaciones con números naturales para encontrar la cantidad de dulces de cada caja. De acuerdo con la descripción de los niveles de algebrización esta práctica se asigna a un nivel cero por su ausencia de razonamiento algebraico.

Por otro lado, las parejas P1 y P2 construyen las cajas No5 y No6 haciendo uso de la multiplicación, en la cual tratan de establecer una fórmula que les permite hallar la cantidad de dulces para estas cajas “la construí multiplicando $5 \times 4 = 20$ y la 6 la construí multiplicando $6 \times 4 = 24$”. A continuación, se presenta un ejemplo de respuesta de P1:

**Figura 8** *Respuesta ítems 3 de P1*




Tal y como se muestra en la Figura 8, es a través de esta expresión que P1 y P2 establecen una relación entre el número de la caja y el aumento que es 4 que les permite encontrar la cantidad de dulces para las cajas No5 y No6, lo anterior deja como evidencia que esta pareja reconoce el patrón numérico y lo generaliza logrando así establecer una formula numérica que le permite hallar la cantidad de dulces para las cajas solicitadas.

En virtud que las parejas logran deducir una fórmula y a pesar de que se usa a través de números de cajas particulares, tal y como se indican en los niveles de algebrización y por el hecho de haber la deducción de una fórmula, entonces esto ya se considera de un nivel mayor de generalización y desde esta perspectiva teórica, esta práctica se encuentra en un nivel 1 de algebrización. Los objetos que intervienen en esta solución son objetos intensivos (conjunto y propiedades de números y la igualdad como equivalencia) se aplican relaciones entre cantidades y el uso de las operaciones, en cuanto al lenguaje se utiliza el numérico, natural, simbólico.

A continuación, se presentan los resultados del ítem 4.

**Tabla 6** *Respuesta de las parejas de estudiantes al ítem 4 de la situación 1*

| 4. Luisa le quiere regalar a su mamá de cumpleaños la caja de dulces No20, pero no sabe cuántos dulces se necesitan para llenarla. ¿Cuál es la cantidad de dulces que requiere Luisa para llenar dicha caja? Explica como obtuviste esta cantidad. | | | |
|---|---|---|---|
| Pareja | Descripción de la práctica realizada | Frecuencia Absoluta | Frecuencia Relativa |
| P1 P2 P7 P4 P5 P6 | Reconocen que la cantidad de dulces para la caja No20 se obtienen multiplicando el número de la caja por 4 (el aumento), y especifican la cantidad de dulces de dicha caja. | 6 | 85.7% |
| P3 | Construye la tabla de multiplicar del número 4 desde el 1 hasta el 20 para hallar la cantidad de dulces de la caja No20, indican la cantidad de dulces que debe tener esta caja. | 1 | 14.2% |

Como podemos observar en la Tabla 6, se evidencian las soluciones de las parejas al ítem 4, donde se pone de manifiesto dos formas de prácticas matemáticas, la primera donde las parejas P1, P2, P7, P4, P5 y P6 expresan la forma de encontrar la cantidad de dulces de la caja No20, multiplicando el número de la caja que en este caso es 20 por el patrón hallado que es 4; y una segunda práctica realizada por P3, en la cual se dedica a multiplicar de forma sucesiva, 4 por cada número natural hasta llegar al solicitado, que es el número 20.

Cae resaltar que en la primera práctica matemática las parejas establecen una fórmula que les permite encontrar la cantidad de dulces que se obtiene en una caja en particular, además de esto, es importante destacar que P1 y P2 rectifican y usan la fórmula que hallaron en el ítem anterior para dar respuesta a este ítem, adicionalmente P4, P5, P6 y P7 dan cuenta de la deducción de esta fórmula en este ítem, un ejemplo de esto es el dialogo que surge entre I2 y P5, que se transcribe a continuación:

L1-I2: ¿cómo te distes cuenta la cantidad de dulces para la caja No5 y No6?
L2-P5: a la número cinco le aumente cuatro para tener veinte a las seis otras cuatro para tener veinticuatro
L3-I2: ¿contaste cada uno de los dulces?
L4-P5: Sí
L5-I2: ¿por qué en la pregunta cuatro hiciste multiplicación?
L6-P5: porque si la sumo cuatro más cuatro más cuatro más cuatro me voy a demorar más entonces más bien es multiplicarla cuatro por veinte el resultado es ochenta
L7-I2: ¿el veinte qué representa?
L8-P5: el número de la caja.
L9-I2: ¿el cuatro qué representa?
L10-P5: el aumento de dulces en cada caja

A través de este dialogo P5 trata de establecer una fórmula para hallar la cantidad de dulces de una caja en particular, al reconocer una relación entre el patrón que es 4 y el número de la caja, en este caso la caja No20. Por ende, las prácticas matemáticas de P1, P2, P4, P5, P6 y P7 se encuentran en un nivel 1 de algebrización por cuanto tiene un acercamiento al álgebra por haber deducido la fórmula, en esta práctica se puede identificar la presencia de objetos intensivos (conjunto y propiedades de números y la igualdad como equivalencia), se establecen relaciones entre cantidades y el uso de las operaciones, se hace uso del lenguaje natural, numérico, simbólico para identificar la fórmula general.

Por otro lado, P3 aunque identifica un patrón no logra deducir una fórmula que le permita hallar la cantidad de dulces de una caja en particular sin necesidad de ir caso por caso, es decir, no es necesario realizar la operación de caja en caja. Esta práctica matemática se encuentra en un nivel cero de algebrización por cuanto hay ausencia de razonamiento debido a que todavía se piensa aritméticamente, además de esto, en esta práctica emergen objetos extensivos (casos particulares), se opera con objetos particulares donde intervienen símbolos que refieren a un valor desconocido, y dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre números particulares.

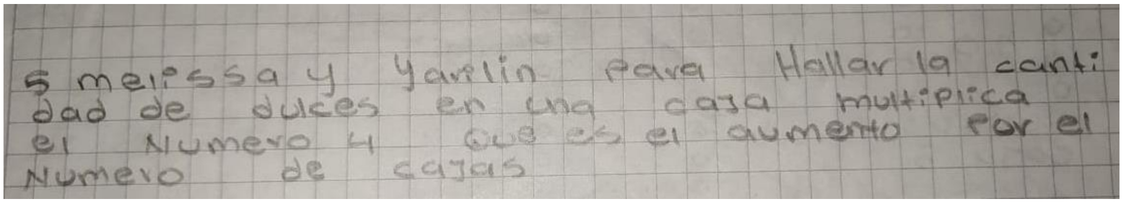
A continuación, se presentan los resultados del ítem 5.

**Tabla 7** *Respuesta de las parejas de estudiantes al ítem 5 de la situación 1*

| 5. Escribe un mensaje a un compañero de la clase donde le explicas cómo hallar la cantidad de dulces que se necesitan para cualquier caja. | | | |
|---|---|---|---|
| Pareja | Descripción de la práctica realizada | Frecuencia Absoluta | Frecuencia Relativa |
| P4<br>P1<br>P3<br>P5<br>P6<br>P2<br>P7 | En los mensajes de cada pareja expresan que la cantidad de dulces para cualquier caja se puede hallar multiplicando el aumento, que es 4 por el número de la caja. | 7 | 100% |

De acuerdo con la información presentada en la Tabla 7, todas las parejas expresan en su mensaje la forma cómo se puede hallar la cantidad de dulces de cualquier número de caja, indicando al multiplicar el aumento, esto es 4, es decir, el patrón numérico por el número de la caja. Lo anterior se puede evidenciar mediante la Figura 9 en donde se expone la respuesta de P3 como un caso representativo de las respuestas de todas las parejas.

**Figura 9** *Respuesta ítems 5 de P3*


5 meissa y Yarlin para Hallar la canti
dad de dulces en una caja multiplica
el Numero 4 que es el aumento por el
Numero de cajas

La Figura 9 muestra como P3 da cuenta de la fórmula general que permite hallar la cantidad de dulces en cualquier número de caja. Tal fórmula general es expresada en un lenguaje natural. Nótese que es justamente P3 que en el ítem anterior no lograba deducir una fórmula para hallar la cantidad de dulces de una caja en particular, sin embargo, en este quinto ítem logra no solamente hallar la fórmula, sino que esta fórmula se expresa en su mayor nivel de generalidad posible en vista de que la fórmula no está puesta sobre un número de caja en particular. Esta acción que refleja P3, como un caso que ilustra la producción de todas las parejas en relación con la fórmula del ítem anterior deja como evidencia que existe una ruptura epistemológica en la producción de la fórmula que logran las parejas en relación con la fórmula del ítem anterior. Tal ruptura se debe a que aparece lo indeterminado, lo que significa que en este ítem la fórmula no refiere a casos particulares, sino que se presenta como una expresión que implica lo indeterminado esto es, pensar en ello y operar con esto, lo cual permite a las parejas encontrar la cantidad de dulces para cualquier caja.

Es importante resaltar que es gracias al ítem que se pueda dar el tránsito de lo particular a lo general, así como también a la interacción que realizan las investigadoras con las parejas de estudiantes es que se logra que estas expresen la fórmula general. A continuación, se muestra un diálogo entre las investigadoras y las parejas como ejemplo de dicha interacción, en el cual se evidencia que por y a través de dicha interacción se hace posible la emergencia de lo indeterminado en los estudiantes.

L1-P3: ¿Cómo así que un mensaje a un compañero?
L2-P1: Profe ¿un mensaje?
L3-I2: ¿Qué dice la pregunta? Vuelvan a leer la pregunta.
L4-P4: Escribe un mensaje a un compañero de la clase donde le explicas cómo hallar la cantidad de dulces que se necesitan para cualquier caja.
L5-I1: Van a escribir en palabras un mensaje dirigido a su compañero donde le explique cómo hallar la cantidad de dulces para cualquier caja.
L6-P5: Profe ¿cuál es el número de la caja? Para poder escribir el mensaje.
L7-I1: ¿La pregunta hace referencia a algún número de caja en especial?
L8-P5: No profe.
L9-I2: Por ejemplo, si la caja es la número cien, ¿ustedes cómo le escribirían el mensaje?
L10-P7: Nosotros le diríamos que multiplique cuatro por cien.
L11-I2: ¿Los demás qué dicen? ¿Se debe escribir así como dicen sus compañeros?
L12-P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7: Sí
L13-I2: Ya que todos están de acuerdo, entonces ¿cómo se puede escribir el mensaje sin conocer el número de la caja?
L14-P2: ¡Ah! Profe nosotros le diríamos que para hallar la cantidad de dulces debe multiplicar cuatro por el número de la caja.
L15-I1: ¿El cuatro qué representa?
L16-P3: El cuatro es el aumento que se hace en cada caja
L17-I1: El número de la caja ¿cuál es?
L18-P6: No lo conocemos.

A través de este diálogo se puede evidenciar que las parejas de estudiantes se encontraban con dudas e inquietudes respecto al ítem, y es en ese momento donde la investigadoras cumplen un papel muy importante en el desarrollo de este, debido a que por medio de la interacción (investigadoras-parejas) y al rol que asumen como mediadoras para dar respuesta a los interrogantes que surgen por parte de las parejas. Al respecto, León (2014) argumenta que "en la mediación pedagógica los ritmos de aprendizaje de cada individuo son respetados, el profesor no está destinado a transmitir una serie de contenidos, sino que se avoca a que el estudiante logre reflexionar acerca de lo que hace o podría hacer con el objeto de aprendizaje" (p.142).

Es importante mencionar que es gracias al rol que toman las investigadoras (profesor mediador) y al propósito de este ítem se logra avanzar hacia un razonamiento algebraico a un nivel más elevado de algebrización, que les permite a las parejas lograr establecer una fórmula general de la cantidad de dulces que se obtienen en cualquier caja expresada en un lenguaje natural. Pues obsérvese que hasta la línea L13 las parejas no han deducido una fórmula para cualquier caso general, nótese como en la línea L6 P5 dice "profe ¿Cuál es el número de la caja? para poder escribir el mensaje" hace visible la necesidad que siente de que se le asigne un número en particular de caja para poder deducir la fórmula, lo que significa que si bien ya el estudiante tiene una fórmula pensada para casos particulares de cajas, y es solo hasta la línea L14 que a través de la interacción con las profesoras investigadoras y las parejas de estudiantes, P2 logra expresar la fórmula general al indicar que "¡Ah! Profe nosotros le diríamos que para hallar la cantidad de dulces debe multiplicar cuatro por el número de la caja" lo que permite que el estudiante pueda establecer una fórmula general para cualquier número de caja.

De acuerdo con el análisis realizado hasta este ítem y considerando la teoría que se ha asumido de razonamiento algebraico por cuanto se define unos niveles de algebrización con unas características particulares en las cuales Godino y sus colaboradores (SF) "En tareas funcionales se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal" (p.6) tal y como se ha observado en las practicas realizadas por las parejas obtienen estas características por cuanto la solución se expresó por medio de un lenguaje natural, donde intervienen de manera implícita objetos intensivos de grado 2 (propiedades y conjuntos numéricos), y se aplican relaciones entre cantidades, por lo tanto, esta práctica se le asigna un nivel 1 de algebrización.

A continuación, se presentan los resultados del ítem 6.

**Tabla 8** *Respuesta de las parejas de estudiantes al ítem 6 de la situación 1*

| 6. Expresa la fórmula que encontraste en el punto anterior de manera simbólica | | | |
|---|---|---|---|
| Pareja | Descripción de la práctica realizada | Frecuencia Absoluta | Frecuencia Relativa |
| P1 P2 P3 P4 P5 P6 | Expresan la fórmula simbólica y manifiestan qué significa cada símbolo utilizado. | 6 | 85.7% |
| P7 | Realiza la misma respuesta del ítem 4, es decir que expresa nuevamente la fórmula en lenguaje natural expuesta en el ítem anterior. | 1 | 14.2% |

De acuerdo con los datos expuesto en la Tabla 6, se puede identificar que las parejas P1, P2, P3, P4, P5, P6, expresan la fórmula simbólica en la cual abordan una expresión matemática de forma general, en la cual cada una de las parejas utiliza un símbolo diferente para representar la cantidad desconocida (número de la caja) que es multiplicado por el aumento de los dulces en cada caja (cuatro).

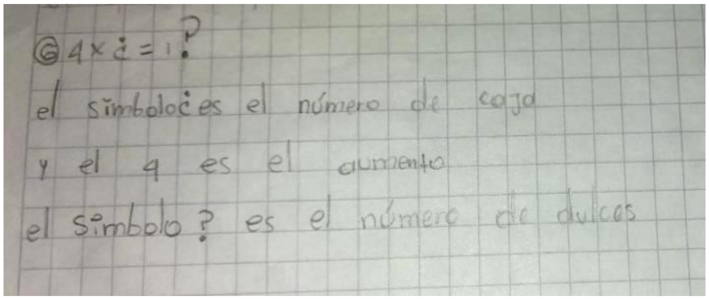
En las prácticas matemáticas desplegadas por las parejas en este ítem se puede evidenciar el transito existente de un lenguaje natural a un lenguaje simbólico literal, debido a que en el ítem anterior expresaban la fórmula general en un lenguaje natural, en cambio en este ítem transforman la fórmula a un lenguaje simbólico literal por la necesidad de representación algebraica que propone el ítem.

Debido a este tránsito surgieron inquietudes por parte de las parejas donde emerge la interacción entre las investigadoras y estas, a continuación, se muestra un dialogo como ejemplo de dicha interacción.

L1-P3: Profe ¿cómo así que de manera simbólica?
L2-I2: Ya no van a utilizar palabras como lo hicieron en la pregunta anterior, sino que van a utilizar símbolos que representen el mensaje que ustedes le escribieron a sus compañeros para indicar como hallar la cantidad de dulces en una caja.
L3-P7: ¿Cómo así que símbolos?
L4-I2: es la forma en cómo se puede representar un objeto o una cosa, en este caso se utiliza el símbolo para representar lo desconocido.
L5-P7: ¿Cómo así? No entiendo.
L6-I1: En la pregunta anterior ¿qué era lo desconocido para ustedes?
L7-P5: Profe no sabíamos cuál era el número de la caja y la cantidad de dulces solo sabemos del cuatro que es el aumento.
L8-I1: Ya que ustedes dicen esto, entonces ¿cómo se puede representar en símbolos el número de la caja y la cantidad de dulces teniendo en cuenta el mensaje que escribieron?
L9-P2: Profe y que símbolos se pueden utilizar.
L10-I2: Los símbolos como interrogante de pregunta, un cuadro, un círculo, los que ustedes quieran.
L11-P6: Profe yo puedo colocar el signo de pregunta porque no conozco la cantidad de dulces y el número de la caja.
L12-I1: Entonces ¿cómo quedaría la fórmula usando los símbolos?
L13-P6: Cuatro por el signo de pregunta.

El anterior diálogo es la evidencia que el profesor debe generar preguntas orientadoras que acercan a los estudiantes a la producción de la fórmula de una forma simbólico-literal. En este caso las investigadoras con el fin de orientar a las parejas realizan preguntas las cuales permiten construir reflexiones de acuerdo con lo que se solicitaba en el ítem. Nótese como a través de la interacción y el rol mediador que toman las investigadoras a través de la tarea orientan a las parejas con el fin de contribuir al desarrollo del razonamiento algebraico en ellos. Gracias a esto y al propósito del ítem es que las parejas logran expresar de manera simbólica la fórmula general que ya habían expresado en un lenguaje natural en el ítem anterior. Un ejemplo de ello, puede ser la respuesta de P6 que se muestra a continuación:

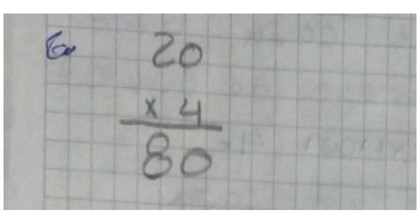
**Figura 10** *Respuesta ítems 6 de P6*




Nótese en la figura 10 como la práctica expuesta de P6 evidencia que la fórmula general queda expresada en un lenguaje simbólico-literal. Como se puede observar en dicha Figura, esta práctica matemática que P6 ha manifestado se trata de una generalización simbólica, donde la fórmula hallada no es transformada operando con la variable. De acuerdo con Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) una práctica matemática que goce de estas características esto es “En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión” (p.210) correspondería con un nivel 2 de algebrización, entonces las practicas realizadas por estas seis parejas corresponden a un nivel 2 de algebrización.

Por otra parte, P7 expresa la misma respuesta del ítem 4, lo que deja como evidencia que no avanza hacia un mayor nivel de razonamiento algebraico al intentar expresar la fórmula general a través de un lenguaje simbólico literal. La Figura 11 presenta la solución expuesta por P7.

**Figura 11** *Respuesta ítems 6 de P7*



La figura 11 deja como evidencia que P7 no logra establecer una fórmula general que permita hallar la cantidad de dulces en cualquier caja, debido a que aun usa una fórmula expresada en un lenguaje numérico para una caja en particular (caja número 20), por tanto, esta pareja no logra avanzar al nivel 2 de algebrización.

### *3.7.2 Análisis de la situación 2. Dulces en barras de colores*

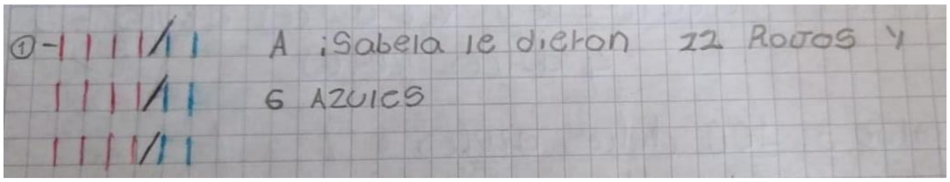
A continuación, se presenta el análisis de cada uno de los ítems de la situación 2.

**Tabla 9** *Respuesta de las parejas de estudiantes al ítem 1 de la situación 2*

| 1. Si Isabella compró 18 dulces en total, ¿Cuántos dulces rojos y cuántos dulces azules compra? | | | |
|---|---|---|---|
| Pareja | Descripción de la práctica realizada | Frecuencia Absoluta | Frecuencia Relativa |
| P2 P7 P3 P1 | Expresan la cantidad de dulces rojos y azules en forma de palillos de color rojo y azul. | 4 | 57.1% |
| P5 | Expresa la cantidad de dulces rojos y azules por medio de una relación numérica al establecer la suma de los dulces rojos y luego la suma de los dulces azules. | 1 | 14.2% |
| P6 P4 | Expresan la cantidad de dulces rojos y azules, pero no manifiestan la forma de cómo hallar esta cantidad. | 2 | 28.5% |

Como se puede evidenciar en la Tabla 9, las parejas de estudiantes realizan tres prácticas diferentes para expresar la cantidad de dulces rojos y azules que obtiene Isabella al comprar 18 dulces, teniendo en cuenta la promoción que se da en la tienda “por la compra de 4 dulces rojos se obsequian 2 dulces azules” la cual le permite deducir dicha cantidad. En la primera práctica realizada por las parejas P2, P7, P3 y P1 expresan la solución en lenguaje natural, icónico. A continuación, se presenta una ilustración donde se pone en evidencia una de las respuestas de estas parejas.

**Figura 12** *Respuesta ítems 1 de P2*

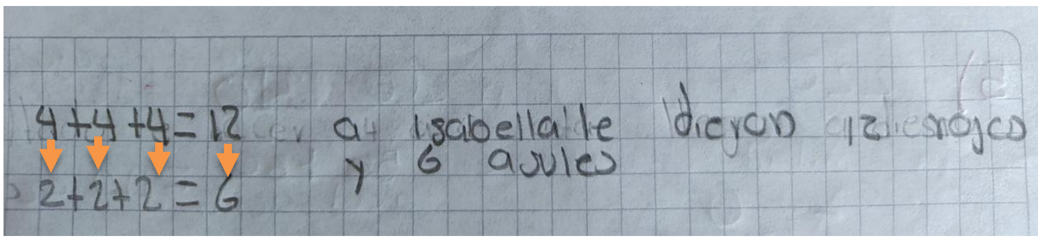



Tal y como se muestra en la Figura 12 esta pareja de estudiantes ante la necesidad de hallar la cantidad de dulces rojos y azules alude a su representación por medio de palillos rojos y azules, los rojos para identificar los dulces rojos y los palillos azules para identificar los dulces azules. Luego, esta pareja se basa en la promoción que da la tienda y decide colocar cuatro palillos rojos seguido de estos pone una raya negra en diagonal para separar los palillos rojos de los azules al final dibuja los dos palillos azules. Después de realizar esta primer línea de palillos decide realizar otras dos de forma consecutiva con el mismo esquema de la primera línea hasta completar los dieciocho dulces que ha comprado Isabella. Nótese como esta pareja de estudiantes ubica cada razón en línea y se separa de la siguiente pasando de un reglón a otro para hacer referencia de la misma razón.

Lo anterior deja evidencia de que P2 establece una razón entre dulces rojos y los dulces azules y es gracias a este razonamiento que ha adquirido P2 sobre la promoción al establecer la razón que le permite encontrar la cantidad total de los dulces rojos y los dulces azules, es así como en la Figura 12, P2 puede decir a través de un lenguaje natural que “a Isabela le dieron 12 dulces rojos y 6 azules” porque tiene como base representación y el esquema realizado con los palillos que le ayuda a realizar un conteo y así llegar a la respuesta.

La segunda práctica expresada en la Tabla 9 describe como P5 encuentra la cantidad de dulces rojos y azules que obtiene Isabella al comprar 18 dulces. A continuación, se presenta la siguiente ilustración de la práctica de P5.

**Figura 13** *Respuesta ítems 1 de P5*

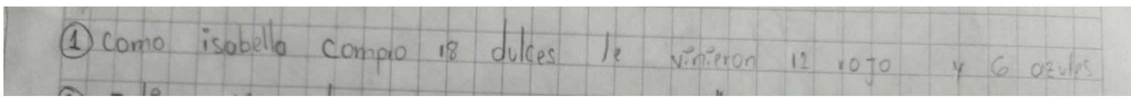



En la Figura 13 se evidencia que P5 emplea un razonamiento para hallar la cantidad de dulces azules y rojos que le dan a Isabella al comprar dieciocho dulces en total, haciendo uso del lenguaje numérico, en el cual representa los dulces rojos con el número cuatro (4) y debajo de estos coloca el número dos (2) que representa los dulces azules. P5 de forma vertical establece una primera razón entre el número cuatro y el número dos, en el cual muestra evidencia de la razón que por cuatro dulces rojos se obsequian dos dulces azules, esta misma razón la establece dos veces de forma consecutiva, luego de forma horizontal alude a estos números y realiza la operación de suma entre ellos para encontrar la cantidad de dulces rojos y la cantidad de dulces azules.

Lo anterior da a conocer que P5 en su práctica establece una relación numérica entre los dulces rojos y azules que le permite hallar la razón que existe en la promoción, también le permite realizar una operación de suma para encontrar la cantidad de dichos dulces y es así como a través de un lenguaje natural puede expresar “a Isabella le dieron 12 rojos y 6 azules” para un total de 18 dulces que compro Isabella en la tienda.

Por otro lado, también se evidencia una tercera práctica donde las parejas expresan la solución haciendo uso del lenguaje natural pero no se conoce el razonamiento empleado para hallar la cantidad de dulces azules y rojos que le dieron a Isabella al comprar los 18 dulces en la tienda, como ejemplo de ello se muestra a continuación una ilustración que refleja dicha práctica.

**Figura 14** *Respuesta ítems 1 de P6*




En la Figura 14 se refleja la respuesta de la pareja P6 en la cual expresa su repuesta solo indicando la cantidad de dulces rojos y azules que obtuvo Isabella, no realiza una representación icónica gestual para dar a conocer como obtuvo esta respuesta.

Estas prácticas matemáticas realizadas por las parejas de estudiantes en este ítem emergen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico. Por lo tanto, a esta práctica matemática se le asigna un nivel 0 de algebrización.

A continuación, se presentan los resultados del ítem 2.

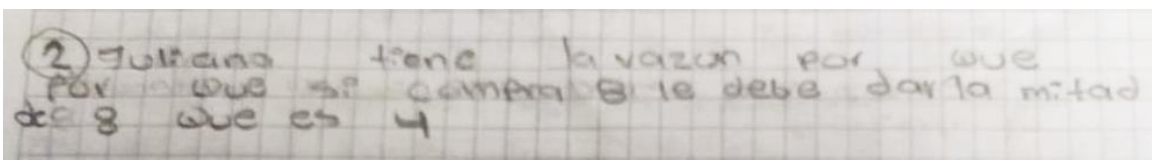
**Tabla 10** *Respuesta de las parejas de estudiantes al ítem 2 de la situación 2*

<table>
<tr><td colspan="4">2. Juliana y Andrés van a la tienda.<br>Andrés dice que cuando compró 8 dulces rojos le obsequiaron 6 azules, mientras que Juliana dice que cuando ella compró 8 dulces rojos le obsequiaron 4 dulces azules. Indica quién de los dos tiene la razón y justifica tu respuesta.</td></tr>
<tr><td>Pareja</td><td>Descripción de la práctica realizada</td><td>Frecuencia Absoluta</td><td>Frecuencia Relativa</td></tr>
<tr><td>P4 P5 P3 P2 P6 P7</td><td>Expresan quien dice la verdad (Juliana) identificando que los dulces azules son la mitad de los dulces rojos.</td><td>6</td><td>85.7%</td></tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| P1 | Expresa quien dice la verdad (Juliana) justificando que compró el doble de la promoción. | 1 | 14.2% |

Los datos expresados en la Tabla 10, muestran que las parejas de estudiantes en su totalidad indican que es Juliana quien tiene la razón al decir que “al comprar ocho dulces rojos se le obsequian cuatro dulces azules”, esto lo mencionan de acuerdo con la promoción de la tienda e identificando que la cantidad de dulces azules son la mitad de los dulces rojos. A continuación, se presenta una ilustración donde se refleja una solución como ejemplo de ello.

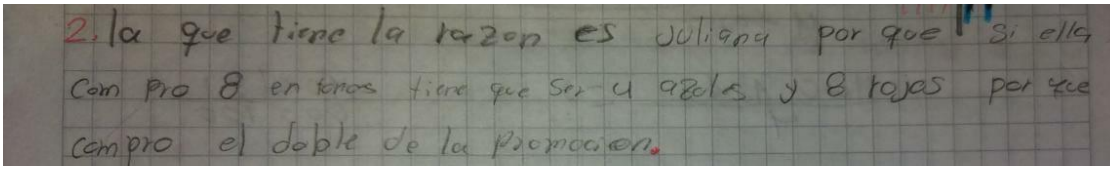
**Figura 15** *Respuesta ítems 2 de P3*




La práctica de P3 expuesta en la Figura 15, establece un argumento que le ayuda a deducir que Juliana es quien dice la verdad justificando “porque si compra 8 le debe dar la mitad”. P3 puede dar respuesta y argumentar sobre este ítem debido que le permite afirmar su conocimiento de lo que ella considera “ser mitad de” o “el doble de algo”. Es importante resaltar que esta afirmación de P3 hace referencia a la razón que existe entre la cantidad de dulces rojos y dulces azules que es la mitad, por cada cantidad de dulces rojos siempre la cantidad de los dulces azules van a ser la mitad de estos.

A continuación, se muestra un ejemplo de la práctica de otra pareja de estudiantes, en este caso P1.

**Figura 16** *Respuesta ítems 2 de P1*


2. la que tiene la razon es Juliana por que si ella Com pro 8 en tonces tiene que Ser 4 azules y 8 rojos por que compro el doble de la promocion.

En la Figura 16, se evidencia la práctica de P1 es consciente de la promoción que por cada cuatros dulces rojos se obsequian dos azules. P1 alude a la razón al establecer que Juliana compro el doble de la promoción. Nótese como P1 reconoce que en la promoción existe una razón que por cuatro dulces rojos se obsequian dos dulces azules y que por lo tanto si Juliana compra dos veces la promoción entonces aparece dos veces dicha razón, es así como P1 en su práctica menciona “la que tiene la razón es Juliana porque compró 8 entonces tiene que ser 4 azules y 8 rojos porque compró el doble de la promoción”. Esta práctica matemática realizada por P1 muestra la promoción como una razón, pero no se establece como “ser la mitad de”.

La práctica de P3 es distinta a la de P1 en el sentido de que P3 reconoce a la razón al identificar que los azules son la mitad de los rojos, en cambio P1 reconoce esa razón por medio de una promoción, pero no ha generado una idea que le permita hallar la cantidad de dulces rojos y azules, sino que por el contrario P1 debe ir de promoción en promoción para hallar esa cantidad de dulces. Sin embargo, en ambas prácticas hay algo en común que es el reconocimiento de la razón.

Es importante resaltar que el propósito de este ítem es que las parejas de estudiantes identifiquen la razón como “la mitad de”, es decir, que la cantidad de los dulces azules son la mitad de la cantidad de los dulces rojos. En el caso de P1 de acuerdo con el propósito del ítem no se ha logrado que esta pareja identifique dicha razón en estos términos.

En estas prácticas matemáticas emergen objetos extensivos, se opera con objetos particulares, se hace uso del lenguaje natural, sin embargo en las prácticas de P2, P3, P4, P5, P6 y P7 hay evidencia clara de que estas parejas ha reconocido la razón general "ser mitad de", por el contrario P1 no ha identificado esta razón por lo que para hallar un caso remoto tendría que irse haciendo un conteo de cuatro en dos, por lo anterior las prácticas de las primeras parejas se le asigna un nivel 1 de algebrización y a P1se le asigna un nivel 0 de algebrización .

A continuación, se presentan los resultados del ítem 3.

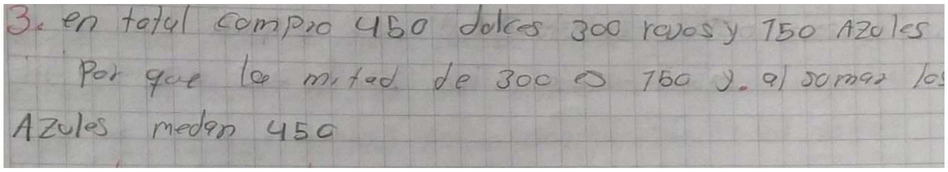
**Tabla 11** *Respuesta de las parejas de estudiantes al ítem 3 de la situación 2*

| 3. La mamá de Isabella decide hacerle una fiesta y ella compra 300 dulces rojos para repartirlos en ella, teniendo en cuenta la promoción ¿Cuántos dulces azules le obsequiaron en la tienda? ¿Cuántos dulces compró en total? | | | |
|---|---|---|---|
| Pareja | Descripción de la práctica realizada | Frecuencia Absoluta | Frecuencia Relativa |
| P7 P6 P1 P2 P3 P5 P4 | Reconocen la cantidad de dulces azules que le obsequian a la mamá de Isabella por la compra de 300 dulces rojos e indican la cantidad total de dulces que se obtiene por la compra, puesto que identifican que los dulces azules son la mitad de los dulces rojos. | 7 | 100% |

En la Tabla 11, se describe que todas las parejas logran identificar la razón como "la mitad de", al encontrar la cantidad de dulces azules que le obsequian a la mamá de Isabella por la compra de 300 dulces rojos y el total de los dulces que lleva para la fiesta.

A continuación, se muestra la práctica realizada por P1 como ejemplo de ello.

**Figura 17** *Respuesta ítems 3 de P1*




Como se evidencia en la Figura 17, la pareja P1 en su práctica expresa que la cantidad de dulces azules que obtiene la mamá de Isabella por su compra son 150, además de ello argumenta como halla esa cantidad, al decir que “150 azules porque la mitad de 300 es 150”.

Nótese como la práctica de P1 en este ítem reconoce a la razón como “la mitad de", caso que en el ítem anterior esta pareja no había logrado identificar la razón de esta forma. De acuerdo con el propósito de este ítem de afirmar los conocimientos que las parejas de estudiantes ya habían adquirido en el ítem anterior sobre dicha razón P1 solo en este instante logra reconocer que los dulces azules son la mitad de los dulces rojos, entonces es importante destacar que es gracias al propósito de este ítem que P1 logra identificar la razón en términos generales debido a que aquí se expresan cantidades particulares mayores que el ítem anterior, lo que obliga que esta pareja halle esta razón.

En estas prácticas realizadas por las parejas de estudiantes emergen objetos intensivos, se aplica propiedades y relaciones como lo es la razón “ser mitad de”, se hace uso del lenguaje numérico y natural, como lo expresa Godino et (2014) “En tareas estructurales, se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente” (p.208) a estas prácticas se le asigna un nivel 1 de algebrización.

A continuación, se presentan los resultados del ítem 4.

**Tabla 12** *Respuesta de las parejas de estudiantes al ítem 4 de la situación 2*

4.

Ayuda a Isabella a completar la siguiente tabla:

| Dulces rojos | Dulces azules |
|---|---|
| 4 | 2 |
| 8 | 4 |
| 12 | |
| | 8 |
| | 10 |

Explica como hiciste para completar los datos que hacían falta en la tabla.

| Pareja | Descripción de la práctica realizada | Frecuencia Absoluta | Frecuencia Relativa |
|---|---|---|---|
| P2 P5 P7 | Completan la tabla identificando la cantidad de dulces rojos y azules en cada una de las filas, expresan que los dulces azules son la mitad de los dulces rojos. | 3 | 42.8% |
| P6 P4 P1 P3 | Completan la tabla identificando la cantidad de dulces rojos y azules en cada una de las filas, expresan que los dulces rojos son el doble de los dulces azules y que a su vez los dulces azules son la mitad de los dulces rojos. | 4 | 57.1% |

Tal y como se evidencia en la Tabla 12, emergen dos prácticas por parte de las parejas de estudiantes, la primera hace referencia a “la mitad de”, y la segunda práctica alude “al doble de y a la mitad de”.

A continuación, se presenta un ejemplo que expresa P2 en la primera práctica.

**Figura 18** *Respuesta ítems 4 de P2*

4. Ayuda a Isabella a completar la siguiente tabla:

| Dulces rojos | Dulces azules |
|---|---|
| 4 | 2 |
| 8 | 4 |
| 12 | 6 |
| 16 | 8 |
| 20 | 10 |
| 24 | 12 |

**Figura 19** *Respuesta ítems 4 de P2*

④- nosotras respondimos de acuerdo a que los dulces azules son la mitad de los rojos

Como se muestra en la Figura18, esta pareja P2 conserva la idea de la razón "ser mitad de", al mencionar que "nosotras respondimos de acuerdo a que los dulces azules son la mitad de los rojos", P2 solo identifica la razón en una sola interpretación en la relación de los dulces rojos a los dulces azules, mientras que las parejas P6, P4, P1, P3 en sus prácticas identifican las dos interpretaciones de la razón, la relación entre los dulces rojos a los dulces azules, y de los dulces azules a los dulces rojos.

Como ejemplo de estas prácticas a continuación, se expone un diálogo entre las investigadoras y P3 como ejemplo de ello.

L1-I1: Con tu compañera ¿cómo resolvieron la pregunta número cuatro?
L2-P3: Digamos estaba cuatro rojos y dos azules, entonces los rojos eran los dobles y los azules la mitad de los dulces.
L3-I1: Cuando te daban solo el número de azules ¿cómo sabias qué número era el rojo? por ejemplo este ocho ¿cómo sabias qué número era el rojo?
L4-P3: Um profe, en los azules cogía el número y lo sumaba dos veces y así sabia el número de los rojos.

Como se observa en el dialogo anterior, P3 conserva la razón "ser mitad de" y además de esto da cuenta de que los dulces rojos son el doble de los dulces azules, tal y como se expresa en la línea L2 "Digamos estaba cuatro rojos y dos azules, entonces los rojos eran los dobles y los azules la mitad de los dulces" luego en la línea L4 manifiesta que para encontrar la cantidad de dulces rojos debía sumar dos veces el número que está en la casilla de los dulces azules estableciendo así una forma de hallar esa cantidad de dulces que en los anteriores ítems no se hacía referencia, por ende es importante resaltar cuán importante es este ítem porque le permite a la parejas de estudiantes establecer nuevas estrategias para solucionar un problema.

En estas prácticas realizadas por las parejas de estudiantes emergen objetos intensivos, se aplican propiedades y relaciones como lo es la razón ser mitad de y ser el doble de, se hace uso del lenguaje numérico y natural, por ende, se le asigna un nivel 1 de algebrización.

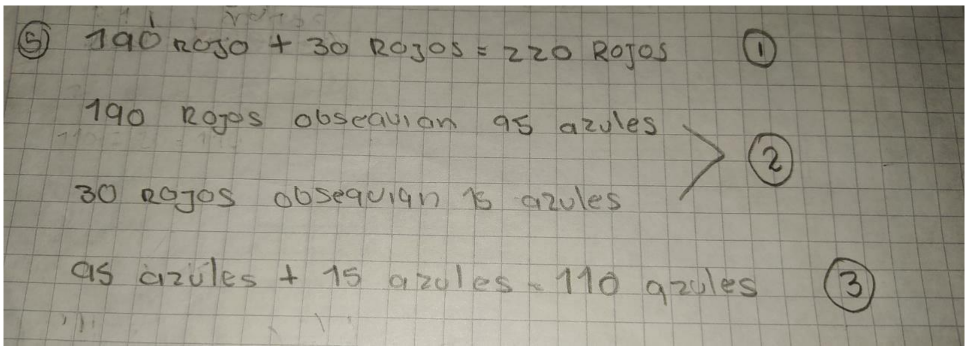
A continuación, se presentan los resultados del ítem 5.

**Tabla 13** *Respuesta de las parejas de estudiantes al ítem 5 de la situación 2*

| 5. Emplea el razonamiento que utilizó Andrés para hallar la cantidad de dulces azules al comprar 220 dulces rojos. (ver anexo 2) | | | |
|---|---|---|---|
| Pareja | Descripción de la práctica realizada | Frecuencia Absoluta | Frecuencia Relativa |
| P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7 | Encuentran la cantidad de dulces azules que se obtienen por la compra de 220 dulces rojos haciendo uso del razonamiento que Andrés emplea. | 7 | 100% |

En la Tabla 13, se describen las prácticas realizadas por las parejas para este ítem teniendo como referencia el procedimiento que empleo Andrés (ver anexo 2) para hallar la cantidad de dulces azules al comprar 12 dulces rojos. En el ítem se les propone a las parejas emplear el mismo razonamiento de Andrés para hallar la cantidad de dulces azules que obsequian al comprar 220 dulces rojos. A continuación, se presenta una práctica realizada por P7 como ejemplo de ello.

**Figura 20** *Respuesta ítems 5 de P7*




Como se refleja en la Figura 20, P7 en su práctica utilizó el razonamiento que empleó Andrés para hallar la cantidad de dulces azules al comprar 220 dulces rojos. En la figura los números 1, 2 y 3 encerrados en círculos son la cantidad de pasos que realiza P7 en su razonamiento. En el primer paso descomponen el número 220 que es la cantidad de los dulces rojos que se compran, en “$190\ rojos + 30\ rojos\ =\ 220\ rojos$”. En el segundo paso halla la cantidad de dulces azules que se obsequiarían al comprar 190 y 30 dulces rojos y expresa “190 rojos obsequian 95 azules” “30 rojos obsequian 15 azules” este paso le permite a P7 encontrar el valor que hasta el momento era desconocido. En el tercer y último paso P7 toma la cantidad de dulces azules y los suma expresando lo siguiente “$95\ azules + 15\ azules = 110\ azules$”.

Este razonamiento permite aplicar propiedades, en este caso la homogeneidad de la suma la cual toma en consideración la descomposición del total de los dulces rojos y a través de la razón planteada en la situación expresan los dulces azules que le corresponden a la cantidad de los dulces rojos.

Por otro lado, es gracias al propósito del ítem y la interacción de las investigadoras con las parejas de estudiantes que se logra la comprensión del razonamiento empleado por Andrés para hallar la cantidad de dulces azules que se obsequian por la compra de 12 dulces rojos. A continuación, se presenta un diálogo que surgió durante el desarrollo de este ítem como ejemplo de la interacción (investigadoras-parejas de estudiantes).

L1-P4: La pregunta cinco no se entiende.
L2-I1: ¿Qué es lo que no entiendes?
L3-P4: ¿Cómo así que razonamiento?
L4-I1: Razonamiento es el procedimiento que Andrés realiza para hallar la cantidad de dulces azules.
L5-P4: ¡Ah!
L6-P7: Profe porque no lo hacemos como se hizo en la otra pregunta, diciendo la mitad de los dulces rojos.
L7-I2: No se puede porque este procedimiento que hizo Andrés permite aplicar propiedades y así encontrar el resultado.
L8-P3: Mmmmm profe entonces en el primer paso descompone los dulces rojos, o sea que los separa.
L9-I2: Sí, en el primer paso descompone la cantidad de dulces rojos solo descompone los rojos porque no se conoce la cantidad de dulces azules… ¿en cuántos números los descompone?
L10-P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7: En dos números.
L11-I1: ¿Cuáles son esos números?
L12-P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7: cuatro y ocho.
L13-I2: Después ¿qué hace?
L14-P7: Encuentra la mitad de los dulces rojos.
L15-I2: ¿Cuántos dulces serian entonces por los cuatros dulces rojos y los ocho rojos?
L16-P7: Por ocho serian cuatro dulces azules y por cuatro son dos dulces.
L17-I1: En el tercer paso ¿qué hace Andrés?
L18-P5: hace una suma entre dos y cuatro que son los dulces azules.
L19-I2: Y ¿cuál es el resultado de esa suma?
L20-P5: Profe al sumar cuatro más dos le da igual a seis.
L21-I1: ¿El seis qué indica?
L22-P5: La cantidad de dulces azules que le obsequian por los dulces rojos.
L23-I1: Realicen los mismos pasos que empleo Andrés en su razonamiento para hallar la cantidad de dulces azules al comprar 220 dulces rojos.

Tal y como se evidencia en el diálogo anterior, las parejas de estudiantes presentaban dudas sobre este ítem, debido a que el razonamiento empleado por Andrés es muy distinto al procedimiento que ellos utilizan para hallar una cantidad de dulces, de esto surge la interacción entre las investigadoras y las parejas de estudiantes de forma general. Nótese como en la línea L6 el estudiante aún tiene presente la razón “ser mitad de” para hallar la cantidad de dulces azules, desde la línea L8 donde el estudiante puede dar cuenta del razonamiento y los pasos que emplea Andrés y que este proceso es distinto al que ellos ya conocían.

Es así como se puede dar cuenta que el papel de mediadoras que toman las investigadoras durante el desarrollo de este ítem es fundamental debido a que orientan y despejan esas dudas existentes por las parejas de estudiantes. Por consiguiente, el propósito del ítem y la interacción que surge entre las investigadoras y las parejas de estudiantes permiten que se desarrolle un razonamiento algebraico progresando hacia un nivel más avanzado de algebrización en virtud que aparecen propiedades del concepto matemático que se presenta en la situación.

Por consiguiente, de acuerdo con Godino et (2014) “En tareas estructurales, se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente” (p.208) en esta práctica matemática se aplican propiedades numéricas como lo es la homogeneidad de la suma y la descomposición de números, emergen objetos intensivos, se hace uso de un lenguaje numérico y natural. Por lo tanto, a esta práctica se le asigna un nivel 1 de algebrización.

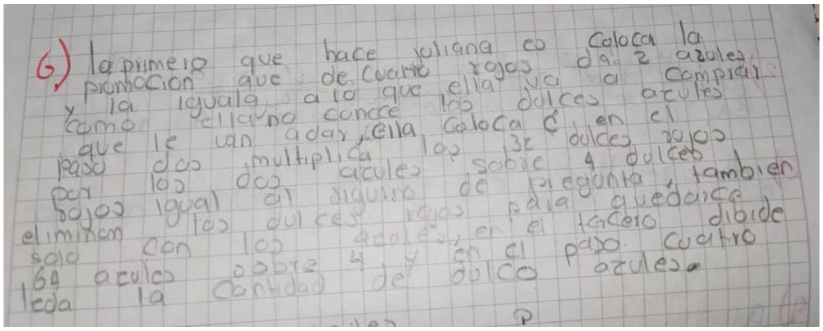
A continuación, se presentan los resultados del ítem 6.

**Tabla 14** *Respuesta de las parejas de estudiantes al ítem 6 de la situación 2*

| 6. Explica con tus propias palabras paso a paso el procedimiento que realizó Juliana para hallar la cantidad de dulces azules. (ver anexo 2) | | | |
|---|---|---|---|
| Pareja | Descripción de la práctica realizada | Frecuencia Absoluta | Frecuencia Relativa |
| P7 P6 P1 P5 P3 P2 | Describen cada uno de los pasos del procedimiento que realizó Juliana para hallar la cantidad de dulces azules. | 6 | 85.7% |
| P4 | No explica el procedimiento que realizó Juliana para hallar la cantidad de dulces azules que se obtienen al comprar 32 dulces rojos. | 1 | 14.2% |

En la Tabla 14, se presentan dos prácticas realizadas por las parejas de estudiantes, en la primera práctica las parejas P7, P6, P1, P5, P3 y P2 explican el procedimiento que empleó Juliana colocando mayor atención en el concepto matemático de la razón. A continuación, se presenta una ilustración de la práctica expresada por P5 como ejemplo de ello.

**Figura 21** *Respuesta ítems 6 de P5*


6) lo primero que hace Juliana es coloca la promoción que de cuatro rojos da 2 azules y la iguala a lo que ella va a compiar como ella no conoce los dulces azules que le van a dar, ella coloca ¿ en el paso dos multiplica los 32 dulces rojos por los dos azules sobre 4 dulces rojos igual al signo de pregunta, tambien elimina los dulces rojos para quedarse solo con los azules, en el tercero dibide 64 azules sobre 4 y en el paso cuatro le da la cantidad de dulces azules.

La Figura 21 evidencia la explicación expresada por P5 del procedimiento que emplea Juliana para dar cuenta de la cantidad de dulces azules que le pueden obsequiar por la compra de 32 dulces rojos. P5 menciona al inicio que “coloca la promoción que de cuatro rojos da 2 azules y la iguala a lo que ella va a comprar como ella no conoce los dulces azules, ella coloca ¿”; nótese como P5 en este primer paso hace referencia a dos razones, la primera es la “promoción” que da la tienda, y la segunda a los 32 dulces rojos con el valor desconocido de los dulces azules. En el segundo paso explica la operación que se realiza “multiplica los 32 dulces rojos por los dos azules sobre 4 dulces rojos igual al signo de pregunta, también elimina los dulces rojos para quedarse solo con los azules” P5 hace referencia a la operación de la regla de tres simple y da cuenta que al eliminar la magnitud de los dulces rojos arriba y debajo de la fracción queda solo la magnitud de los dulces azules. En el tercer paso expresa “en el tercero divide 64 dulces azules sobre 4” en es te paso P5 menciona el número 64 que es el resultado de la multiplicación expresada en el paso anterior, también hace referencia a la fracción cuando menciona “divide” quedando así la fracción resultante del paso dos. En el cuarto paso expresa el resultado de los dulces azules mencionando “le da la cantidad de dulces azules” es decir, el resultado de la división del tercer paso.

Esta pareja al igual que las otras reconocen tres aspectos que son importantes en el procedimiento empleado por Juliana, primero la razón inicial, segundo aparece una nueva razón y esta razón es muy particular en virtud que una de las dos cantidades de esta nueva razón es desconocida y tercero, estas parejas logran entender cada uno de los procedimientos que se fue desarrollando al igualar estas dos razones identificadas.

Por otro lado, es importante mencionar que al dar solución a este ítem por parte de los estudiantes se generaron muchas dudas al no entender el procedimiento que emplea Juliana, es en ese momento donde surge la interacción entre las investigadoras y los estudiantes de forma general para despejar las dudas existentes. A continuación, se presenta un diálogo como ejemplo de dicha interacción.

L1-I1: Como no entendieron el procedimiento de Juliana se va a explicar de nuevo para todos.
L2-P4, P5: Si profe es mejor.
L3-I1: En el primer paso, ¿qué pueden observar?
L4-P3: Profe en el primer paso aparece la promoción de la tienda, que por cuatro dulces rojos dan dos azules.
L5-I2: ¿A qué se iguala?
L6-P5: Profe nombra los treinta y dos dulces rojos que va a comprar y arriba se coloca el signo de pregunta porque no se conoce los dulces azules.
L7-I2: Ok, en el segundo paso ¿qué hace Juliana?
L8-P1: Arriba de la fracción pone los treinta y dos dulces rojos multiplicado por dos dulces azules y abajo pone los cuatro dulces rojos.
L9-I1: ¿Qué más se puede observar en ese paso?
L10-P6: Profe ahí tacha los dulces rojos de arriba y de abajo.
L11-I1: Es decir, que Juliana elimina magnitudes iguales, las palabras dulces rojos que aparecen arriba con los dulces rojos que aparecen abajo. Esto se hace para poder tener la respuesta en la magnitud de los dulces azules, ya que es lo que se quiere encontrar.
L12-I2: ¿Han entendido hasta el momento?
L13-P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7: Sí profe
L14-I1: ¿Qué se hace en el paso tres?
L15-P7: Se pone arriba el sesenta y cuatro dulces azules y abajo el número cuatro.
L16-I1: y ¿de dónde salió el sesenta y cuatro?
L17-P2: Es el resultado de la multiplicación entre treinta y dos por dos.
L18-I1: Por último ¿qué se obtiene?
L19-P5: Los dieciséis dulces azules que le dan a Juliana por su compra.

En el diálogo anterior se manifiesta la explicación general por parte de las investigadoras del procedimiento que realizó Juliana debido a las dudas que surgieron durante la solución de este ítem, se puede evidenciar que en la línea L4 la pareja P3 expresa “Profe en el primer paso aparece la promoción de la tienda, que por cuatro dulces rojos dan dos azules”, como se puede dar cuenta P3 reconoce la promoción y la identifica directamente como un dato conocido que se tiene Juliana, este dato alude a la primera razón. Luego en la línea L6 la pareja P5 menciona “Profe nombra los treinta y dos dulces rojos que va a comprar y arriba se coloca el signo de pregunta porque no se conoce los dulces azules” en esta línea se da cuenta de una segunda razón expresada como una fracción al mencionar que arriba de los 32 dulces rojos se coloca el signo de pregunta que hace referencia a la cantidad desconocida de los dulces azules. Y en la línea L10 reconocen la eliminación de magnitudes iguales que se presentan en la razón expresada al mencionar “Profe ahí tacha los dulces rojos de arriba y de abajo”.

Como se puede notar, es importante resaltar que el papel de mediador que asumen las investigadoras genera un análisis más profundo sobre la explicación del procedimiento que emplea Juliana para así despejar las dudas que los estudiantes manifestaban y poder dar solución al ítem. Gracias a la mediación por parte de las investigadoras, el propósito del ítem, la interacción (investigadoras-estudiantes) se construye en los estudiantes un razonamiento algebraico que les permite conocer procedimientos diferentes donde se emplean conceptos matemáticos (proporcionalidad, regla de tres) que quizás los estudiantes hasta el momento no conocían pero que lo realizan de manera implícita al lograr entender este nuevo procedimiento.

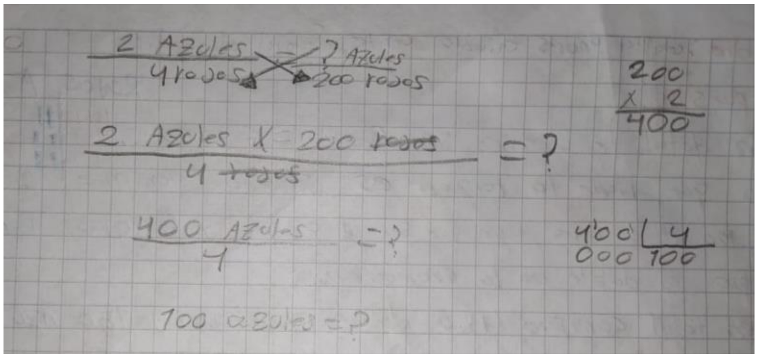
La segunda práctica en este ítem P4 no expresa la explicación del procedimiento empleado por Juliana para hallar la cantidad de dulces azules que le obsequian al comprar 32 dulces rojos.

**Tabla 15** *Respuesta de las parejas de estudiantes al ítem 7 de la situación 2*

| 7. Emplear lo anterior para hallar una cantidad de dulces. | | | |
|---|---|---|---|
| Pareja | Descripción de la práctica realizada | Frecuencia Absoluta | Frecuencia Relativa |
| P3 P2 P4 P1 P7 P6 P5 | Realizan el procedimiento que utiliza Juliana para hallar la cantidad de dulces azules que se obsequian por cualquier cantidad de dulces rojos. | 7 | 100% |

Tal y como se muestra en la Tabla 15, las prácticas matemáticas expresadas por las parejas de estudiantes se evidencian que han entendido el procedimiento empleado por Juliana y lo utilizan para hallar una cantidad cualquiera de dulces azules que se obsequian por la compra de cualquier cantidad de dulces rojos. A continuación, se presenta la práctica expresada por P1 como ejemplo de ello.

**Figura 22** *Respuesta ítems 7 de P1*

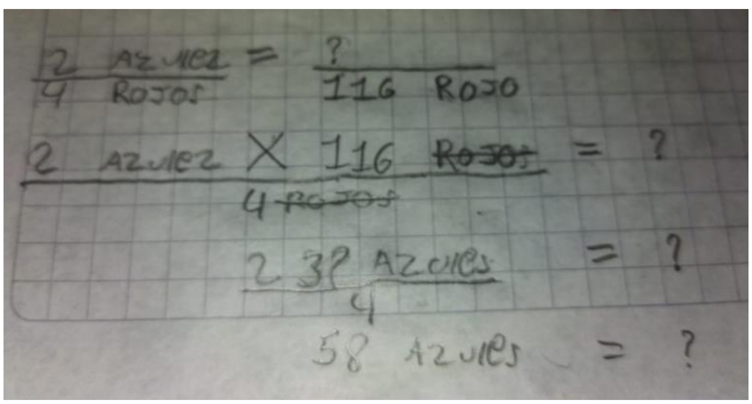



En la Figura 22, se refleja la práctica de P1 al emplear el procedimiento que realizó Juliana para hallar la cantidad de dulces azules al comprar cierta cantidad de dulces rojos. En este caso P1 escoge la cantidad de 200 dulces rojos y establece como valor desconocido la cantidad de dulces azules; como se observa en la figura P1 escribe la razón de la promoción y la iguala a otra razón de la cantidad de dulces rojos y la incógnita de los dulces azules expresados de la siguiente forma $\frac{2\ azules}{4\ rojos} = \frac{?azules}{200\ rojos}$. Nótese como en este primer paso P1 por medio de flechas establece una relación multiplicativa en la que se involucra el proceso de regla de tres que le permite organizar los datos con el propósito de despejar la incógnita. Luego de organizar las cantidades de la siguiente manera $\frac{a\ azules \times 200\ \cancel{rojos}}{4\ \cancel{rojos}} =?$ donde tacha la palabra rojos de arriba y debajo de la fracción haciendo referencia al proceso de eliminación de magnitudes iguales en una razón. Después de esto, coloca el resultado de la multiplicación expresada en la fracción anterior quedando como resultado lo siguiente $\frac{400\ azules}{4} =?$. Y por último P1 resuelve la división que le permite encontrar la cantidad de dulces azules indicando el siguiente resultado $100\ azules =?$.

La práctica matemática expresada por P1 se establece una regla general para hallar cualquier cantidad de dulces azules, debido que aparece el signo de pregunta (?) como lo indeterminado, es decir, aquello que no se conoce.

Por otra parte, se observa que P4 es la pareja que en el ítem anterior no logra explicar con sus propias palabras el procedimiento empleado por Juliana para hallar una cantidad de dulces azules al comprar 32 dulces rojos, y en este ítem decide hacer este procedimiento. A continuación, se presenta una ilustración de la práctica de P4.

**Figura 23** *Respuesta ítems 7 de P4*




En la Figura 23, se refleja la práctica expresada por P4 donde se evidencia que para dar solución a este ítem se tiene presente el procedimiento empleado por Juliana y realiza los mismos pasos y las operaciones necesarias para dar cuenta de la cantidad de dulces azules al comprar 116 rojos, que en este caso P4 elige.

Es importante resaltar que las investigadoras les causo mucha curiosidad la práctica realizada en este ítem por P4, es en ese momento que las investigadoras tienen una interacción con P4 para conocer el razonamiento empleado por esta pareja, dicha interacción se evidencia en el siguiente diálogo.

L1-I1: En la pregunta anterior no explicaste el procedimiento que realizó Juliana, ¿cómo hiciste para dar solución a esta pregunta?
L2-P4: Profe en esa otra pregunta no supe cómo explicarla, pero en esta hice lo mismo que hizo Juliana.
L3-I1: Si hiciste lo que hizo Juliana ¿Qué hiciste primero?
L4-P4: Profe lo primero que hago es colocar la promoción de la tienda y frente a ella se coloca el signo igual, luego coloco una fracción donde arriba pongo el signo de pregunta y debajo pongo ciento dieciséis rojos. Luego coloco la fracción donde arriba pongo la multiplicación de dos azules por ciento dieciséis rojos y debajo pongo cuatro rojos igual al singo de pregunta, después tacho el rojo de arriba de la fracción con el rojo de abajo. Y debajo de esto coloque la fracción donde arriba de esta fracción pongo doscientos treinta y dos azules
L5-I1: ¿De dónde salió el numero doscientos treinta y dos?
L6-P4: Es el resultado de la multiplicación de dos por ciento dieciséis.
L7-I1: ¿Qué más hiciste?
L8-P4: Dividí doscientos treinta y dos entre cuatro y me da cincuenta y ocho.
L9-I1: El numero cincuenta y ocho ¿qué representa?
L10-P4: Son los dulces azules que me dan por comprar ciento dieciséis rojos.
L11-I1: ¿Utilizarías este procedimiento de Juliana para encontrar cualquier cantidad de dulces?
L12-P4: Si la usaría porque tiene en cuenta lo que yo conozco como la promoción y lo que yo no conozco como son los dulces azules, profe y también porque puedo colocar los dulces rojos que yo quiera y haciendo este proceso voy a conocer los dulces azules.

Como se puede observar en el diálogo anterior, P4 expresa el razonamiento que empleo para dar solución a este ítem y se puede dar cuenta que esta pareja si logra entender el procedimiento que empleo Juliana al explicar cada uno de los pasos que desarrollo durante esta práctica, en la línea L4 esta pareja expresa cómo realizó este procedimiento dando explicación de cada una de las acciones realizadas para encontrar la cantidad de dulces azules si comprar 116 dulces rojos. En la línea L1 una de las investigadoras decide preguntarle a P4 lo siguiente "¿Utilizarías este procedimiento de Juliana para encontrar cualquier cantidad de dulces?" con el fin de analizar el razonamiento algebraico que ha podido desarrollar P4 al utilizar este procedimiento, en base a esta pregunta P4 responde lo siguiente "Si la usaría porque tiene en cuenta lo que yo conozco como la promoción y lo que yo no conozco como son los dulces azules, profe y también porque puedo colocar los dulces rojos que yo quiera y haciendo este proceso voy a conocer los dulces azules" este argumento expresado por P4 deja como evidencia el razonamiento algebraico adquirido por esta pareja al intentar mostrar la importancia de utilizar este nuevo procedimiento para hallar cualquier cantidad de dulces azules. Nótese como P4 durante esta expresión da cuenta de lo indeterminado como aquello que no se conoce y que por medio de este procedimiento se puede encontrar.

Es importante mencionar que P4 presentó una dificultad al escribir la explicación del procedimiento empleado por Juliana en sus propias palabras en un lenguaje natural, pero al tener la interacción con esta pareja se pude dar cuenta que P4 comprendió el procedimiento de Juliana y que se le fue más fácil explicarlo de forma verbal.

Las prácticas matemáticas expresadas por estas parejas permiten el desarrollo de un nivel más avanzado de razonamiento algebraico gracias al propósito del ítem, el papel de mediador que asumen las investigadoras con las parejas de estudiantes. durante esta práctica emergen objetos intensivos de grado 2 (proporcionalidad, procedimiento de regla de tres), intervienen indeterminadas o variables y se hace uso del lenguaje simbólico-literal, por consiguiente, esta práctica se le asigna un nivel 2 de algebrización.

# 4. Capítulo 4. Conclusiones y reflexiones didácticas

En este capítulo se presentan las conclusiones del estudio considerando los objetivos general y específicos trazados en él; además de esto de presentan una serie de reflexiones que se derivan del trabajo realizado, reflexiones dirigidas fundamentalmente a los profesores en formación y en ejercicio para la enseñanza del álgebra y el desarrollo del razonamiento algebraico.

## 4.1 Conclusiones

Las conclusiones que aquí se presentan se exponen de acuerdo con cada uno de los objetivos, en relación con el primer objetico especifico, a partir del cual se planteó estudiar desde el enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática el desarrollo del razonamiento algebraico desde los primeros grados de escolaridad, se puede concluir que:

- El enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática estructurado por Godino y sus colaboradores da categorías teóricas importantes para describir el razonamiento algebraico en términos de las practicas matemáticas, los tipos de objetos que emergen, el uso de diferentes lenguajes implicados en las prácticas. Este enfoque teórico brinda herramientas conceptuales y teóricas para entender la forma en cómo evoluciona el razonamiento algebraico de los estudiantes, dando así elementos para interpretar las prácticas de los estudiantes y poder sobre esas interpretaciones ver avances y el desarrollo del razonamiento algebraico que estas prácticas matemáticas contienen.
- Desde marco del EOS se describen facetas y dimensiones duales como extensivo-intensivo que permiten el reconocimiento de objetos que emergen en cada una de las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes, que los conducían a procesos como generalización y particularización, los cuales fueron claves para analizar el nivel del razonamiento algebraico de los estudiantes y poder describir este nivel en cada una de las prácticas.

En relación con el segundo objetivo específico, a partir del cual se planteó articular los elementos conceptuales didácticos y matemáticos estudiados en el diseño de la propuesta de aula para su implementación con estudiantes de grado quinto, se puede concluir que:

- En la propuesta de aula se articularon los referentes conceptuales didácticos y matemáticos obteniendo así un diseño de una propuesta que recoge las dos estructuras que desde este enfoque didáctico se reconoce para el desarrollo del razonamiento algebraico, como es el de la generalización de patrones, el estudio por estructuras colocando especial atención en que cada uno de los ítems de las dos situaciones les permitía a los estudiantes ir avanzando en el lenguaje que empleaban y la existencia de objetos intensivos más generales.
- La propuesta de aula diseñada, las situaciones y cada uno de los ítems sí hicieron posible que los estudiantes fueran avanzando progresiva y paulatinamente en el razonamiento algebraico, debido a que cada uno de los ítems presentados en las situaciones y desarrollados por los estudiantes sí ayudo a elevar sus niveles de algebrización y al avance por cada uno de ellos. Lo anterior se refleja como evidencia cuando los estudiantes en el ítem 2 de la situación 2 la pareja P1 no había logrado identificar la razón "ser mitad de" pero en el ítem 3 donde en este se propone pensar en casos mucho más lejanos como lo es la compra de 300 dulces rojos y permitió que la pareja de estudiante pudiera dar cuente e identificar la razón "ser mitad de".

Y respecto al tercer objetivo específico, donde se planteó analizar los avances en los niveles del razonamiento algebraico que logran los estudiantes de grado quinto a partir de la implementación de la propuesta de aula, se puede concluir que:

- Efectivamente los estudiantes se ubican inicialmente en un nivel cero de algebrización porque durante sus prácticas emergen objetos extensivo, se hace uso del lenguaje natural e icónico, recurren al tanteo para hallar cantidades. Sin embargo, los análisis de la propuesta de aula muestran evidencia de que los estudiantes no se quedan en el nivel cero de algebrización, sino que durante el desarrollo de los ítems ellos van avanzando por cada uno de los niveles debido a que se vuelve más sofisticado los objetos, además del uso del lenguaje natural e icónico hacen uso del lenguaje simbólico-literal, también aparecen propiedades y conceptos matemáticos con los cuales inicialmente no trabajaban.

- Esta investigación deja ver que los estudiantes al transitar de un nivel 0 a un nivel 1 es más asequible, pero llegar a consolidar el segundo nivel de razonamiento fue más complejo y es ahí donde se evidencia mayor interacción con ellos, esto se debe a la exigencia del nivel 2 y a su descripción teórica, debido a que se reconoce lo desconocido y además se simboliza a través de una expresión.

Por lo tanto, todo lo anterior permitió que los estudiantes avanzaran por cada uno de los niveles del razonamiento algebraico que se proponen desde el enfoque del EOS.

Con relación al objetivo general de la investigación, el cual hace referencia a favorecer el desarrollo del razonamiento algebraico de un grupo de estudiantes de grado quinto a partir de una propuesta de aula fundamentada en el enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, se puede concluir que:

- En definitiva, si se favorece el desarrollo del razonamiento algebraico en los estudiantes de grado quinto de educación básica primaria de la institución Instituto Ángeles de Dios a partir de una propuesta de aula fundamentada en el enfoque del EOS. Los análisis muestran que estudiantes en sus prácticas van avanzando progresivamente por cada uno de los niveles de algebrización a través de situaciones de generalización de patrones y estructuras (ecuaciones). Esto se logra por un lado por el diseño de la propuesta de aula y por otro lado por las intervenciones que surgieron en su implementación.

Por otro lado, se puede resaltar el papel mediador del profesor dentro del aula de clase, debido a que éste ayuda a construir los conocimientos de los estudiantes durante su proceso cognitivo mediante preguntas que abran al diálogo y genere posible respuestas en sus estudiantes. El cual se ve reflejado en las intervenciones de las investigadoras durante la implementación de la propuesta que permitió una mayor comprensión de los ítems por parte de los estudiantes, al despejar dudas o inquietudes que surgieron para pasar de un nivel a otro, dicha intervención generó en los estudiantes un razonamiento que les permitía llegar a la solución del problema.

Por último, es importante mencionar dos aspectos que esta investigación le genera a la institución educativa Instituto Ángeles de Dios; primero, conocer el estado académico de los estudiantes en el área de matemáticas, la cual se ve reflejado en el razonamiento que usaban al momento de resolver problemas, crear nuevas conjeturas que lo llevaran a la solución de esos problemas; segundo, beneficia a los profesores porque pueden tomar el trabajo como referencia y crear planes de aula donde se desarrolle el razonamiento algebraico de los estudiantes.

## 4.2 Algunas reflexiones didácticas

Desde los análisis de la propuesta de aula enmarcada desde el enfoque del EOS, es posible establecer algunas reflexiones didácticas que contribuyan a la enseñanza y aprendizaje del álgebra desde el ámbito educativo para maestros en formación y en ejercicio. Se puede señalar que:

- Es necesario cambiar la idea de la enseñanza del álgebra escolar considerando que ésta no solo se enseña en la educación básica Secundaria, sino que también puede desarrollarse en los primeros grados de escolaridad por medio del desarrollo del razonamiento algebraico. Este trabajo es prueba de ello, tal y como se expresa en las conclusiones que favoreció al desarrollo del razonamiento algebraico en estudiantes de quinto grado a través de la propuesta de aula.

- Es importante que los docentes creen situaciones que les permita desarrollar el razonamiento algebraico en sus estudiantes desde actividades significativas, con mayores niveles de generalidad y así involucrar objetos, lenguaje y propiedades numéricas que permitan un acercamiento al trabajo algebraico por parte de los estudiantes.
- Es necesario que los docentes diseñen propuestas de aula intencionadas con objetivos claros que les permitan desarrollar el razonamiento algebraico en sus estudiantes, y desde esta perspectiva la propuesta diseñada en este trabajo puede contribuir en este sentido como un referente de apoyo o un punto de partida para que los profesores en formación y en ejercicio puedan trabajar en ello.
- El desarrollo de este trabajo colaboro a las autoras en diferentes sentidos, uno de ellos fue el desarrollo de competencias investigativas que les permitió acercarse a un trabajo riguroso a un trabajo que cumple con los elementos fundamentales de investigación permitiendo a las investigadoras iniciarse en la investigación de educación matemática. Segundo, como futuras docentes este trabajo contribuye al proceso formativo de las investigadoras de una manera muy importante ya que nos muestra otra realidad al abordar propuestas de aula distintas que ayuden al desarrollo del razonamiento algebraico en estudiantes de educación primaria. Y, por último, permite a las autoras de manera más especifica el reconocimiento de un marco teórico vigente a la investigación en educación matemática.

- Se hace necesario crea nuevos diseños que desarrollen el razonamiento algebraico por medio de los niveles de algebrización mas avanzados, es decir, de un nivel 3 hacia mayores niveles de algebrización, además se recomienda que se centre especial atención de la transición de un nivel a otro.

## Referencias

Aké, L. (2013). Evaluación y desarrollo del pensamiento algebraico elemental en maestros en formación (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Aké, L. (2010). Una aproximación al razonamiento algebraico elemental desde el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático (Tesis maestría). Universidad de Granada, Granada.

Amerom, B. (2002). Learning and teaching of school algebra. En B. Amerom, Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra, (pp. 3-32). Holanda: Freudenthal Instituut.

Blanton, M. L. & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. Journal for Research in Mathematics Education, 36(5), 412-446.

Burgos, M., Godino, J. D. (2019). Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria. Educación Matemática, 31(3), 117-150, doi:10.24844/EM103.05

Butto, C., y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: Abordaje basado en la geometría. Educación Matemática, 16(1), 113-148.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM

Castro, E., & Molina, M. (2007). Desarrollo de Pensamiento Relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. Educación Matemática, 19(2), 67-94.

Castro, W., Godino, J., & Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: un desafío para la formación de maestros. En García, Gloria (Ed.), Memorias del 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 92-99). Armenia: Gaia.

Chevallard Y. (1991), Dimensión instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique, Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble, LSD2-IMAG, Université Joseph-Fourier, Grenoble

Espinosa, M. E. (2004). Tipologías de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Fernández, F. (1997). Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Gaita, C., Ugarte, F., Flores, J. & Martínez, M. (2007). Identificación de niveles de razonamiento algebraico a cargo de maestros de educación básica. En Serna, Luis Arturo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1137-1143). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. Researchs in Didactique dec Mathématiques, 9, 155- 188.

Gobernación de Antioquia [GA]. (2006). Pensamiento variacional y razonamiento algebraico. Módulo 2. Didáctica de las matemáticas. Universidad de Antioquia. Antioquia, Medellín.

Godino, J.D., & Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat-Maestros, director: Juan D. Godino. Recuperado de *http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf*

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S., & Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. Avances de Investigación en Educación Matemática, 8, pp. 117-142.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F, J. García y L. Ordoñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 49-68). Jaén: SEIM.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14(3), 325-355.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22 (2/3): 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education, 39 (1), 127-135.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. Enseñanza de las Ciencias, 32(1), pp. 199-219.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet: URL: *http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm*.

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. Boletim de Educação MatemáticaBOLEMA, 26 (42B), 483-511.

Godino, J.D., Batanero, C. & Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciéncias e Matemática, 10, 7-37.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista Lucio, P. (2014). Metodología de la investigación. (6a.ed. --.). México D.F.: McGraw-Hill.

Kaput, J. (2000). Transforming algebra from a engine of inequity fo an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum: National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science (NCISLA). Dartmouth, MA.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds), Algebra in the early grades (pp. 5-17). New York: Routledge.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning, 390-419. New York: MacmillanKirshner (1989). The visual syntax of algebra. Journal for Research in Mathematics Education. 20(3), 274-284.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. The Mathematics Educator, 8(1), 139-151.

Kieran, C &. Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 7(3), 229-240.

León, G. L. (2014). Aproximaciones a la mediación pedagógica. Revista Electrónica Calidad en la Educación Superior, 5(1), 136-155. Recuperado de: *http://investiga.uned.ac.cr/revistas/index.php/revistacalidad/article/view/348/249*

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The Early development of algebraic Reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds), The teaching and learning of algebra The 12th ICM Study (pp.47-70). Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers.

Martínez, M. v. (2011). Utilización del método geométrico lineal (MGL) para la resolución de problemas de álgebra elemental (Tesis doctoral). Universidad de granada.

Martínez, J. (2014). Caracterización del razonamiento algebraico elemental de estudiantes de primaria según niveles de algebrización (Tesis maestría). Universidad de Medellín. Medellín.

MEN. (1998). Lineamientos Curriculares: Matemáticas. Bogotá: Magisterio.

MEN. (2006). Estándares básicos de competencias. Bogotá: Magisterio.

Molina, M. (2006). Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria (Tesis doctoral). Universidad de granada, Granada.

Moreno, G (2015). Una aproximación al álgebra temprana por medio de una secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos (tesis pregrado). Universidad del Valle. Colombia.

Muñiz M. (2013). Estudios de caso en la investigación cualitativa. División de Estudios de Posgrado Universidad Autónoma de Nuevo León. Facultad de Psicología. México.

Polya, G. (1969). Como plantear y resolver problemas, México, Trillas.

Puig, L., & Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), The teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study (pp. 189224). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2010). The anthropological turn in mathematics education and its implication on the meaning of mathematical activity and classroom practice. Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics, 10, 103-120.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. PNA, 4(2), pp. 37-62 .7

Radford, L. (2011). Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. En, J. Cai, E. Knuth (Eds.), Early algebraization. Advances in mathematics education. (pp. 303 -320). Berlin: Springer-Verlag.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. PNA, 6(4), 117- 133.

Rodríguez-Domingo, S.; Molina, M.; Cañadas, M. C.; Castro, E. (2015). Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. PNA, 9(4): 273-293.

Rueda, C. (2017). Caracterización del razonamiento algebraico de algunos maestros de educación básica secundaria y media. Un estudio de casos (Tesis pregrado). Universidad del Valle. Cali.

Sibaja, A., & Soto, S. (2016). Razonamiento algebraico en 3° grado (Tesis pregrado). Universidad de Antioquia. Medellín.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. Números, revista de didáctica de las matemáticas, 77,5-34.

Zill y Dewar (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica. McGraw-Hill Interamericana, 2012.

# Anexos

## Anexo 1: Situación 1. La fábrica de dulces

Universidad del Valle - Sede Norte del Cauca

Instituto de Educación y Pedagogía

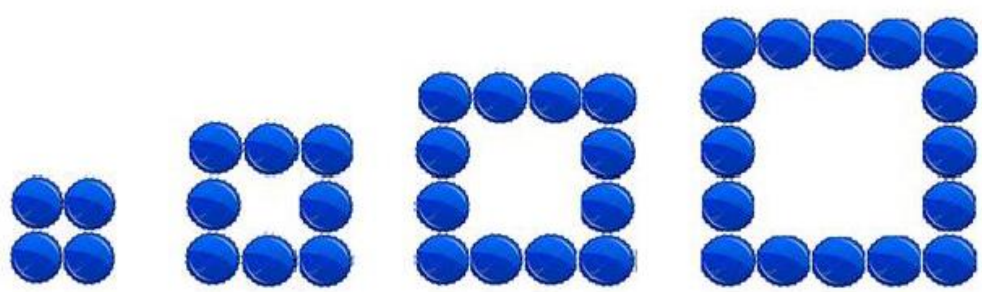
Área de Educación Matemática

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Nombre:_______________________________________________ Grado: _____

**Situación 1. La fábrica de dulces**

Luisa en su fábrica diseña cajas llenas de dulces para ofrecerle a sus clientes, esas cajas son de diferentes tamaños, tal como se aprecia a continuación:



Caja No1 Caja No2 Caja No3 Caja No4

Resuelve lo siguiente:

1. Observa las figuras, ¿Qué encuentras común y no común en las cajas de la secuencia?
2. ¿Cuántos dulces aumentan de la primera caja a la segunda, de la segunda caja a la tercera y qué se puede concluir de estos aumentos?
3. Teniendo en cuenta la secuencia de las cajas de dulces, dibuja la caja No5 y No6, ¿cuántas dulces se utilizaron en estas cajas? Explica cómo la construiste.
4. Luisa le quiere regalar a su mamá de cumpleaños la caja de dulces No20, pero no sabe cuántos dulces se necesitan para llenarla. ¿Cuál es la cantidad de dulces que requiere Luisa para llenar dicha caja? Explica como obtuviste esta cantidad.
5. Escribe un mensaje a un compañero de la clase donde le explicas cómo hallar la cantidad de dulces que se necesitan para cualquier caja.
6. Expresa la fórmula que encontraste en el punto anterior de manera simbólica

**Anexo 2: Situación 2. Duces en barras de colores**

Universidad del Valle - Sede Norte del Cauca

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Nombre:_____________________________________________________ Grado: ______

**Situación 2: Dulces en barras de colores**

Isabella es una niña que le encanta consumir dulces en barra, ella compra sus dulces en la tienda del pueblo, donde se ofrece la siguiente promoción: **por la compra de 4 dulces rojos te obsequiamos 2 dulces azules.**

De acuerdo con la situación anterior responde las siguientes preguntas:

1. Si Isabella compró 18 dulces en total, ¿Cuántos dulces rojos y cuántos dulces azules compra?
2. Juliana y Andrés van a la tienda.

Andrés dice que cuando compró 8 dulces rojos le obsequiaron 6 azules, mientras que

Juliana dice que cuando ella compró 8 dulces rojos le obsequiaron 4 dulces azules.

Indica quién de los dos tiene la razón y justifica tu respuesta.

3. La mamá de Isabella decide hacerle una fiesta y ella compra 300 dulces rojos para repartirlos en la fiesta, teniendo en cuenta la promoción ¿Cuántos dulces azules le obsequiaron en la tienda? ¿Cuántos dulces compró en total?
4. Ayuda a Isabella a completar la siguiente tabla:

| Dulces rojos | Dulces azules |
|---|---|
| 4 | 2 |
| 8 | 4 |
| 12 | |

| | |
|---|---|
| | 8 |
| | 10 |
| 24 | |

Explica cómo hiciste para completar los datos que hacían falta en la tabla.

5. Andrés compró 12 dulces rojos y para dar cuenta la cantidad de dulces azules que le obsequian por su compra empleo el siguiente razonamiento:
   1) El 12 lo descompone en dos cantidades $4 \text{ dulces rojos} + 8 \text{ dulces rojos}$
   2) Después halla la cantidad de dulces azules para cada cantidad:

      4 dulces rojos obsequian 2 dulces azules:

      8 dulces rojos obsequian 4 dulces azules

   3) Por último, sumó la cantidad de dulces azules
      $2 \text{ dulces azules } + \ 4\ dulces\ azules = 6\ dulces\ azules$

      Obteniendo la cantidad de dulces azules que le obsequian por la compra de 12 dulces rojos.

Emplea el razonamiento que utilizó Andrés para hallar la cantidad de dulces azules al comprar 220 dulces rojos.

6. Juliana para hallar la cantidad de dulces azules que le obsequian por la compra de 32 dulces rojos utilizo un razonamiento diferente:

Paso 1: $\dfrac{2\ dulces\ azules}{4\ dulces\ rojos} = \dfrac{?\ dulces\ azules}{32\ dulces\ rojos}$

Paso 2: $\dfrac{32\cancel{dulces\ rojos} \times 2\ dulces\ azules}{4\ \cancel{dulces\ rojos}} = ?$

Paso 3: $\dfrac{64\ dulces\ azules}{4} = ?$

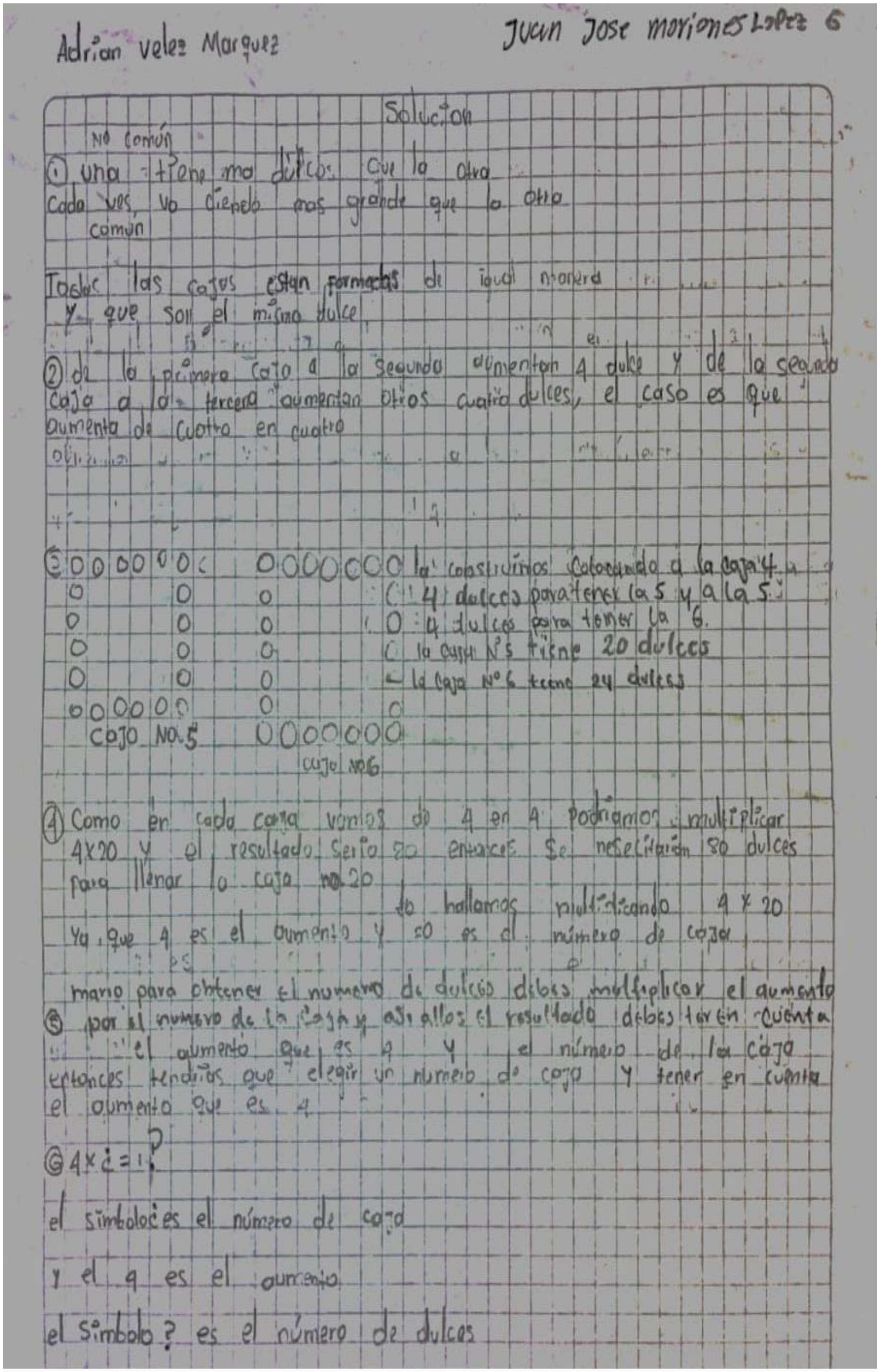
Paso 4: $16\ dulces\ azules\ = x$

Por lo tanto, Juliana por medio de su estrategia se dio cuenta que por la compra de 32 dulces rojos le obsequian 16 dulces azules.

Explica con tus propias palabras paso a paso el procedimiento que realizó Juliana para hallar la cantidad de dulces azules.

7. Emplear lo anterior para hallar una cantidad de dulces.

**Anexo 3: Hoja de trabajo de P6 a la situación 1.**



Adrian velez Marquez

Juan Jose moriones Lopez 6

Solucion

No común

① una tiene mas dulces que la otra
cada ves va ciendo mas grande que la otra
común

Todas las cajas estan formadas de igual manera
y que son el mismo dulce.

② de la primera caja a la segunda aumentan 4 dulce y de la segunda caja a la tercera aumentan otros cuatro dulces, el caso es que aumenta de cuatro en cuatro

③ la construimos colocando a la caja 4
4 dulces para tener la 5 y a la 5
4 dulces para tener la 6.
la caja N°5 tiene 20 dulces
la caja N°6 tiene 24 dulces

cajo No.5

cajo No6

④ Como en cada caja vamos de 4 en 4 podriamos multiplicar 4x20 y el resultado seria 80 entonces se necesitarían 80 dulces para llenar la caja no.20
lo hallamos multiplicando 4 x 20
ya que 4 es el aumento y 20 es el número de caja

mario para obtener el numero de dulces debes multiplicar el aumento
⑤ por el numero de la caja y asi allos el resultado debes tener en cuenta el aumento que es 4 y el número de la caja
entonces tendrias que elegir un numero de caja y tener en cuenta el aumento que es 4

⑥ 4 × ¿ = ¿?

el símbolo ¿ es el número de caja

y el 4 es el aumento

el símbolo ? es el número de dulces

**Anexo 4: Hojas de trabajo de P2 a la situación 2**

P2

26/ marzo / 2021

Solución

1- A ¡Sabela le dieron 22 Rojos y 6 Azules

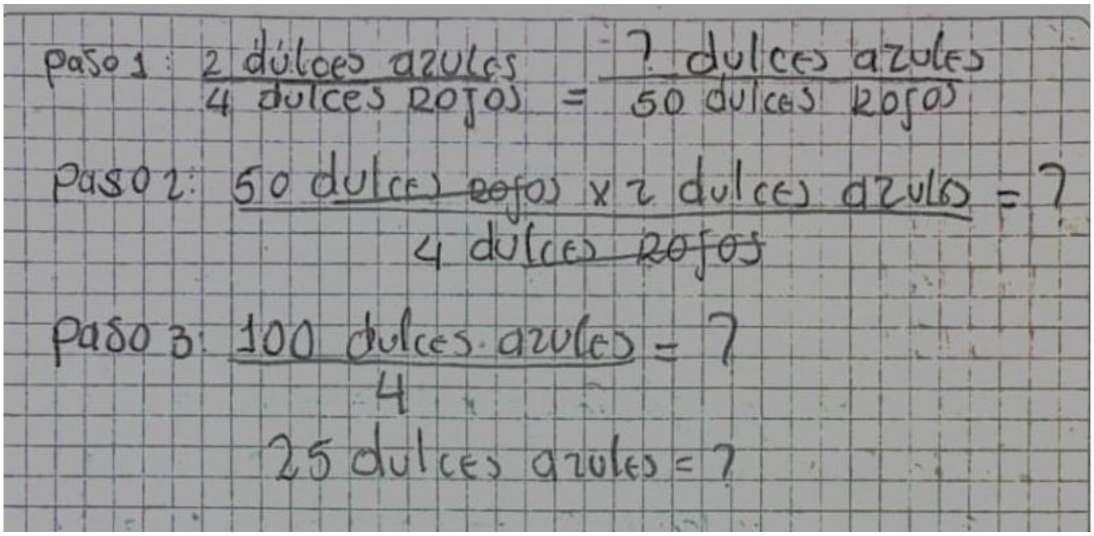
2- Juliana Tiene la razon Porque Compro 8 rojos y 4 azules Porque la Promocion es que si compra 4 dulces rojos el dan 2 Azules y los Azules son la Mita de los rojos

3-150 dulces le obsequiaron en la Tienda y en total son 450 duces entre los rojos y los Azules

4- Nosotros respondimos de acuerdo a que los Dulces azules son la mitad de los rojos

5
1. 140 rojos + 80 rojos = 220
2. 70 Azules + 40 Azules =
3. 110 Azules

6 Juliana primero coloco la Promoción en una Razon y al lado coloca la Razon de 32 Dulces Rojos esta da una cantida descono-cida de azules despues resuelbe la operación Para dar cuenta de que Por 32 rojos le dan 76 Azules



paso 1: $\dfrac{2 \text{ dulces azules}}{4 \text{ dulces rojos}} = \dfrac{? \text{ dulces azules}}{50 \text{ dulces rojos}}$

paso 2: $\dfrac{50 \text{ dulces } \cancel{\text{rojos}} \times 2 \text{ dulces azules}}{4 \text{ dulces } \cancel{\text{rojos}}} = ?$

paso 3: $\dfrac{100 \text{ dulces azules}}{4} = ?$

$25 \text{ dulces azules} = ?$