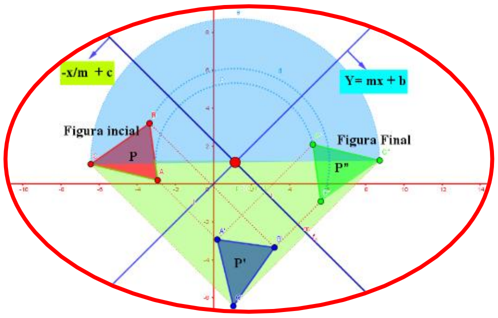
ABORDAJE DE LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS DESDE LA COMPLEMENTARIEDAD DE LOS ENFOQUES SINTÉTICO Y ANALÍTICO EN ESTUDIANTES DE SEGUNDO SEMESTRE DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA



BRAYAN STIVEN SINISTERRA VICTORIA

LUZ VANESSA GARCES MIRANDA

UNIVERSIDAD DEL VALLE SEDE PACÍFICO

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

BUENAVENTURA

2022

ABORDAJE DE LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS DESDE LA COMPLEMENTARIEDAD DE LOS ENFOQUES SINTÉTICO Y ANALÍTICO EN ESTUDIANTES DE SEGUNDO SEMESTRE DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

BRAYAN STIVEN SINISTERRA VICTORIA

LUZ VANESSA GARCES MIRANDA

Trabajo de Grado para optar el título de

LICENCADO EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

DIRECTOR

FREYDER PAREDES CÁCERES

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

BUENAVENTURA

2022

DEDICATORIA

Lleno de regocijo, de amor y esperanza dedico un logro más, a cada uno de mis seres queridos, quienes con sus oraciones, concejos y palabras de aliento hicieron de mí una mejor persona y de una u otra manera me han acompañado y han sido mis pilares para alcanzar todo lo que me propongo. En especial, a mis invaluables padres, Lucy's Arila Victoria y Absalon Sinisterra por su amor, sacrificio, esfuerzo y apoyo incondicional en todos los momentos de mi vida; a mi abuela Mercedes Angulo a quien quiero como una madre y es mi motivación y orgullo para ser quien soy; a Nataly Barreiro por su amor y comprensión. Finalmente, a todas las personas que siempre han creído en mí y me motivan a ser mejor cada día.

Brayan Stiven Sinisterra Victoria.

A mis padres Gustavo Garces y Carmen Miranda, quienes me enseñaron que lo más valioso en una persona es la humildad, por inculcarme valores que hoy en día hacen de mí una mejor persona, por enseñarme con su ejemplo a trabajar con tenencia, constancia y disciplina para alcázar las metas que me propongo, a mis hermanos, Adolfo y Katerine , por estar en los momentos más difíciles que he enfrentado en esta etapa de mi vida y sobre todo por su apoyo incondicional, a mis abuelos y tíos por bríndame su amor y ser mi fuente de inspiración y en especial a mi compañero de trabajo, porque sin su apoyo y dedicación no pudiésemos haber logrado obtener los frutos de este valioso trabajo.

Luz Vanessa Garces Miranda.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, agradecemos a Dios por el amor, la perseverancia, la inteligencia y las bendiciones dadas en todo este proceso de formación, las cuales nos permitieron optar por el título de Licenciados en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.

Infinitas gracias a nuestros familiares, especialmente a nuestros padres quienes, con su esfuerzo, sacrificio y apoyo incondicional de principio a fin, fueron un pilar importante para alcanzar nuestro objetivo de formarnos como profesionales y, sobre todo, como personas integras.

A todos los profesores que intervinieron en nuestro proceso de formación extendemos los agradecimientos, pues con sus enseñanzas y profesionalismo brindaron saberes y experiencias significativas para llegar a este punto final que marca un nuevo comienzo. En especial, agradecemos al profesor Jhon Jair Angulo Valencia para el cual se escatiman las palabras de inmensa gratitud y admiración, no solo por su entrega y pasión en su quehacer docente, sino también por apoyarnos en todo momento tanto en nuestro crecimiento personal, como en el académico.

Así mismo, agradecemos a los evaluadores y a nuestro asesor, Freyder Paredes Cáceres por su dedicación y compromiso en este proceso de formación. A nuestros compañeros, particularmente a Lizeth Daniela Muñoz, Marwin Catherine Gómez y María Alejandra Mina, no solo por sus valiosos consejos y aportes que nos hicieron tomar fuerza y seguir adelante con este proceso de formación, sino también por ser unas mujeres empoderas y resilientes.

Finalmente, agradecemos a la Universidad del Valle por permitirnos ser parte de la familia univalluna, y, a todas aquellas personas que directa o indirectamente fueron de gran apoyo, con sus palabras de aliento, que, en los momentos más difíciles, lograron darles fuerza y valor a estos sujetos habidos por aprender.

A todos los antes mencionados, mil y mil gracias por su dedicación, amor y sacrificio.

RESUMEN

La siguiente indagación se enmarcó en caracterizar la forma en que los estudiantes de segundo semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle Sede Pacifico abordan las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico de la geometría. Para lo cual, se configuraron un conjunto de tareas, las cuales hacen parte de una secuencia que articula el abordaje sintético y analítico de las transformaciones geométricas que bajo la estrategia metodológica Entrevista Basada en Tareas fueron aplicadas y analizadas, de acuerdo con la perspectiva de los Modos de Pensamiento.

De los resultados, se destaca que los enfoques sintético y analítico se complementan deliberadamente en el abordaje de las transformaciones geométricas, lo cual no solamente obedece a los objetos matemáticos que permanecen invariantes y correlacionados en cada transformación, sino también, al uso y desarrollo de procesos algorítmicos y numéricos de las expresiones algebraicas. De modo que, resultó ser una actividad matemática esencial en el desarrollo de la percepción espacial, el estudio de las formas, las propiedades y las relaciones de semejanza en los procesos de tratamiento y discriminación de las figuras geométricas en sus representaciones gráficas y algebraicas.

Palabras claves: transformaciones geométricas, enfoque sintético, enfoque analítico, modos de pensamiento, entrevista basada en tareas.

ABSTRACT

The following inquiry was framed in characterizing the way in which the students of the second semester of bachelor’s degree in Mathematics of the Universidad del Valle Sede Pacífico approach geometric transformations from the complementarity of synthetic and analytical approaches to geometry. For which, a set of tasks were configured, which are part of a sequence that articulates the synthetic and analytical approach of the geometric transformations that under the methodological strategy Task-Based Interview were applied and analyzed, according to the perspective of the Modes of Thought.

Of the results, it is highlighted that the synthetic and analytical approaches deliberately complement each other in the approach to geometric transformations, which is not only due to the mathematical objects that remain invariant and correlated in each transformation, but also to the use and development of algorithmic and numerical processes of algebraic expressions. Thus, it turned out to be an essential mathematical activity in the development of spatial perception, the study of forms, properties, and relations of similarity in the processes of treatment and discrimination of geometric figures in their graphic and algebraic representations.

Keywords: geometric transformations, synthetic approach, analytical approach, modes of thinking, task-based interview.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN 8
INDICE DE TABLAS 13
INDICE DE ILUSTRACCIONES 14
INDICE DE DIAGRAMA 15
INDICE DE IMAGEN 15
INTRODUCCIÓN 18
CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 20
1.1 Descripción del problema 20
1.2 Objetivos 27
1.2.1 General 27
1.2.2 Específicos 27
1.3 Justificación 27
CAPÍTULO II: FUNDAMENTOS TEÓRICOS 33
2.1 Una perspectiva de la formación de profesores 33
2.1.1 Formación de profesores de matemáticas 34
2.2 Perspectiva matemática 39
2.2.1 Algunos aspectos históricos de las Transformaciones Geométricas 40
2.2.2 Transformaciones isométricas 43
2.2.2.1 La traslación. 44
2.2.2.2 La rotación. 47
2.2.2.3 Simetrías. 49
2.2.3 Transformaciones isomórficas 55
2.2.3.1 La homotecia. 55
2.2.4 Algunos teoremas relacionados con las transformaciones geométricas 60
2.3 Perspectiva didáctica 63
2.3.1 Los Modos de Pensamiento 63
2.3.2 Modos de pensar las transformaciones geométricas 66
2.3.3 Tratamiento didáctico de las transformaciones geométricas 69
2.3.4 Conceptualización de secuencias de tareas 78
CAPÍTULO III: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN 80

3.1 Diseño metodológico 80
3.2 Fases de la investigación 82
3.2.1 Fase 1: espectro del fenómeno de estudio 82
3.2.2 Fase 2: ejecución de la estrategia metodología 83
3.2.2.1 Etapa 1: fundamentación conceptual. 84
3.2.2.2 Etapa 2: diseño preliminar y análisis a priori de la secuencia de tareas. 84
3.2.2.3 Etapa 3: construcción de instrumentos de análisis. 85
3.2.2.4 Etapa 4: aplicación prueba piloto de la secuencia de tareas. 87
3.2.2.5 Etapa 5: análisis de resultados prueba piloto. 87
3.2.2.6 Etapa 6: diseño de la secuencia de tareas. 88
3.2.2.7 Etapa 7: implementación de la secuencia de tareas. 88
3.2.2.8 Etapa 8: análisis a posteriori. 88
3.2.3 Fase 3: síntesis de resultados 89
CAPITULO IV: RESULTADOS Y ANÁLISIS 90
4.1 Descripción de la secuencia de tareas 90
4.1.1 Versión preliminar de la secuencia de tareas 90
4.1.1 Versión final de la secuencia de tareas 93
4.2 Análisis a priori de la prueba piloto 100
4.2.1 Definición de los cruces entre las categorías de análisis 111
4.3 Análisis de resultados de la prueba piloto 116
4.3.1 Saberes y dificultades que tienen los estudiantes en el abordaje de la transformación de traslación 117
4.3.2 Saberes y dificultades que tienen los estudiantes en el abordaje de la transformación de rotación 121
4.3.3 Saberes y dificultades que tienen los estudiantes en el abordaje de la transformación de simetría axial 123
4.3.4 Saberes y dificultades que tienen los estudiantes en el abordaje de la transformación de simetría central 127
4.3.5 Saberes y dificultades que tienen los estudiantes en el abordaje de la transformación de homotecia 130
4.4 Análisis a posteriori 136

4.4.1 Elementos que surgen en el abordaje de la transformación de traslación desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico ... 139
4.4.2 Elementos que surgen en el abordaje de la transformación de rotación desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico ... 143
4.4.3 Elementos que surgen en el abordaje de la transformación de simetría central desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico ... 146
4.4.4 Elementos que surgen en el abordaje de la transformación de simetría axial desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico ... 150
4.4.5 Elementos que surgen en el abordaje de la transformación de homotecia desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico. ... 155
4.4.6 Contraste entre los resultados de la prueba piloto y la secuencia de tareas ... 164
CAPITULO V: SÍNTESIS DE RESULTADOS ... 169
5.1 Conclusiones ... 169
5.2 Recomendaciones ... 171
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS ... 173
ANEXOS ... 178
7.1 Producciones escritas de los estudiantes referente a la prueba piloto ... 178
7.2 Producciones escritas de los estudiantes referente a la secuencia de tareas ... 182
7.3 Evidencias fotográficas de las aplicaciones ... 186

INDICE DE TABLAS

Tabla 1. *Caracterización de calificaciones durante los periodos académicos 2020 y 2021 en el curso de Geometría* *23*

Tabla 2. *Ejemplos de verificación de teoremas desde los enfoque sintético y analítico* *62*

Tabla 3*.Caracterización de los modos de pensar las transformaciones geométricas*.................. *67*

Tabla 4. *Aspectos generales de la estrategia entrevista basada en tareas*.................................. *81*

Tabla 5. *Rejilla de análisis**:** caracterización de los modos de pensamiento en relación con las dificultades y fortalezas en el abordaje de las transformaciones geométricas*............................. *86*

Tabla 6. *Modelo de tabla utilizado para la tipificación de respuestas*.. *86*

Tabla 7. *Descripción especifica de ST1* *95*

Tabla 8. *Descripción especifica de ST2* *96*

Tabla 9. *Descripción especifica de ST3* *97*

Tabla 10. *Descripción especifica de ST4* *98*

Tabla 11. *Descripción especifica de ST5* *99*

Tabla 12*. Descripción especifica y análisis a priori de la prueba piloto* *101*

Tabla 13. *Definición de los cruces entre los modos de pensamiento y las dificultades en el abordaje de las transformaciones geométricas* *112*

Tabla 14. *Definición de los cruces entre los modos de pensamiento y las fortalezas en el abordaje de las transformaciones geométricas* *114*

Tabla 15. *Tipificación de respuestas tarea 1 y 2* *117*

Tabla 16*. Tipificación de respuestas tarea 3 y 4* *121*

Tabla 17. *Tipificación de respuestas tarea 5 y 6* *124*

Tabla 18*. Tipificación de respuestas tarea 7 y 8* *128*

Tabla 19*. Tipificación de respuestas tarea 9 y 10* *131*

Tabla 20. *Dificultades y fortalezas presentes en los estudiantes de acuerdo con el modo de abordar las transformaciones geométricas en el desarrollo de la prueba piloto.....................................135*

Tabla 21. *Resultados esperados en cada tarea desde los enfoques sintético y analítico............137*

Tabla 22. *Tipificación de respuestas respecto a ST1..139*

Tabla 23. *Tipificación de respuestas respecto a ST2..143*

Tabla 24. *Tipificación de respuestas respecto a ST3..146*

Tabla 25. *Tipificación de respuestas respecto a ST4..150*

Tabla 26. *Tipificación de respuestas respecto a ST5..155*

Tabla 27. *Dificultades y fortalezas presentes en los estudiantes de acuerdo con el modo de abordar las transformaciones geométricas en el desarrollo de la secuencia de tareas...........................160*

Tabla 28. *Cruces presentados en el abordaje de la transformación de traslación....................164*

Tabla 29. *Cruces presentados en el abordaje de la transformación de rotación.......................165*

Tabla 30. *Cruces presentados en el abordaje de la transformación de simetría central...........166*

Tabla 31. *Cruces presentados en el abordaje de la transformación de simetría axial..............167*

Tabla 32. *Cruces presentados en el abordaje de la transformación de homotecia....................168*

INDICE DE ILUSTRACCIONES

Ilustración 1. *Representación de una traslación y sus elementos...45*

Ilustración 2. *Representación de una rotación y sus elementos..48*

Ilustración 3. *Representación de una simetría axial y sus elementos..51*

Ilustración 4. *Representación de la simetría central y sus elementos..54*

Ilustración 5. *Representación de una homotecia 57*

Ilustración 6. *Dificultad para producir una traslación a partir del vector 70*

Ilustración 7. *Fortalezas de los estudiantes para reconocer los elementos de una traslación.....71*

Ilustración 8. *Dificultad para efectuar una simetría central 72*

Ilustración 9. *Fortalezas para determinar el centro de simetría en una simetría central 72*

Ilustración 10. *Dificultades para reconocer e identificar una simetría axial 73*

Ilustración 11. *Fortalezas para determinar el eje simétrico en una de simetría axial 74*

Ilustración 12. *Dificultad para producir la rotación a una figura 75*

Ilustración 13. *Fortaleza para reconocer de la rotación. 75*

Ilustración 14. *Dificultada para efectuar la homotecia a una figura. 76*

Ilustración 15. *Fortaleza para reconocer e identificar los elementos de una homotecia 77*

INDICE DE DIAGRAMA

Diagrama 1. *Contenido diciplinar del curso geometría 37*

Diagrama 2. *Explicación general de las transformaciones isométricas 43*

Diagrama 3. *Síntesis de la construcción conceptual de la transformación de traslación 46*

Diagrama 4. *Síntesis de la construcción conceptual de la transformación de rotación 49*

Diagrama 5*. Síntesis de la construcción conceptual de la transformación de simetría axial 52*

Diagrama 6. *Síntesis de la construcción conceptual de la transformación de simetría central. ..55*

Diagrama 7. *Síntesis de la construcción conceptual de la transformación de homotecia 59*

INDICE DE IMAGEN

Imagen 1. *Respuesta de un estudiante respecto a T1_P1 ....118*

Imagen 2. *Respuesta de un estudiante respecto a T1_P1 ....119*

Imagen 3. *Respuesta de un estudiante respecto a T2 ....119*

Imagen 4. *Respuesta de un estudiante respecto a P1, P2, P3 Y P4 de T2 ....120*

Imagen 5. *Respuesta de un estudiante respecto a T3_P1 ....122*

Imagen 6. *Respuesta de un estudiante respecto a T3_P3*..122

Imagen 7. *Respuesta de un estudiante respecto a T4_P1*..123

Imagen 8. *Respuesta de un estudiante respecto a P2, P3 y P4 de T4*......................................123

Imagen 9. *Respuesta de un estudiante respecto a P1 de T5*..124

Imagen 10. *Respuesta de un estudiante respecto a T5_P2*..125

Imagen 11. *Respuesta de un estudiante respecto a T5_P3*..126

Imagen 12. *Respuesta de un estudiante respecto a T6*..126

Imagen 13. *Respuesta de un estudiante respecto a P1, P2 y P3 de T6*....................................127

Imagen 14. *Respuesta de un estudiante respecto a T7_P1*..129

Imagen 15. *Respuesta de un estudiante respecto a T7_P3*..129

Imagen 16. *Respuesta de un estudiante respecto a T8*..130

Imagen 17. *Respuesta de un estudiante respecto a T9_P1*..132

Imagen 18. *Respuesta de un estudiante respecto a P2, P3 y P4 de T9*....................................132

Imagen 19. *Respuesta de un estudiante respecto a T10*..133

Imagen 20. *Respuesta de un estudiante a P1 de ST1*..140

Imagen 21. *Respuesta de un estudiante a P2 de ST1*..140

Imagen 22. *Respuesta de un estudiante a P2 de ST1*..141

Imagen 23. *Respuesta de un estudiante a P3 de ST1*..142

Imagen 24. *Respuesta de un estudiante a P3 de ST1*..142

Imagen 25. *Respuesta de un estudiante a P4 de ST1*..143

Imagen 26. *Respuesta de un estudiante a P1 de ST2*..144

Imagen 27. *Respuesta de un estudiante a P1 de ST2*..145

Imagen 28. *Respuesta de un estudiante a P3 de ST2*..146

Imagen 29. *Respuesta de un estudiante a P1 de ST3*..147

Imagen 30. *Respuesta de un estudiante a P1 de ST3* *148*

Imagen 31. *Respuesta de un estudiante a P2 de ST3* *148*

Imagen 32. *Respuesta de un estudiante a P3 de ST3* *149*

Imagen 33. *Respuesta de un estudiante a P1 de ST3* *150*

Imagen 34. *Respuesta de un estudiante a P1 de ST4* *151*

Imagen 35. *Respuesta de un estudiante a P1 de ST4* *152*

Imagen 36. *Respuesta de un estudiante a P2 de ST4* *153*

Imagen 37. *Respuesta de un estudiante a P2 de ST4* *154*

Imagen 38. *Respuesta de un estudiante a P3 de ST4* *155*

Imagen 34. *Respuesta de un estudiante a P1 de ST5* *156*

Imagen 35. *Respuesta de un estudiante a P2 de ST5* *157*

Imagen 35. *Respuesta de un estudiante a P2 de ST5* *157*

Imagen 36. *Respuesta de un estudiante a P3 de ST5* *158*

Imagen 37. *Respuesta de un estudiante a P3 de ST5* *158*

INTRODUCCIÓN

La siguiente propuesta de indagación, requisito parcial para optar por el título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, describe una propuesta relacionada con la caracterización de la forma en que los estudiantes de segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle Sede Pacífico abordan las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico de la geometría, teniendo en cuenta los Modos de Pensamiento propuesta por Sierpinska (2000). En este sentido, la propuesta se organizó de la siguiente forma:

En el primer capítulo, se presenta la problemática de investigación en la que se describen algunas dificultades que se encuentran en la enseñanza de la geometría, tanto en el ámbito escolar como en el universitario, particularmente, en el abordaje de las transformaciones geométricas; de lo cual resultó la pregunta de investigación. Seguido de ello, se formulan los objetivos, en los que se comunica lo que se espera con la investigación de inicio a fin, y, por último, se presenta la justificación en la que se dan los argumentos que sustentan la propuesta de este trabajo.

En el segundo capítulo, se presenta la fundamentación teórica a partir de tres perspectivas que, relacionadas entre sí, orientan el desarrollo de esta investigación; la primera, referida a una descripción de la formación de profesores de matemáticas a través del modelo de conocimiento para enseñar propuesto por Ball et al (2008) y el proyecto educativo de Licenciatura en Matemática de la Universidad del Valle. La segunda, enfatiza los elementos asociados a la construcción conceptual y la forma en que se conciben las transformaciones geométricas. La tercera, pone de manifiesto las formas de abordar las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoque sintético y analítico, teniendo como referente los Modos de Pensamiento propuestos por Sierpinska (2000). Todo ello, se concreta en la conceptualización del diseño y análisis de una secuencia de tarea sin desconocer las dificultades y fortalezas que han sido reportadas por diferentes investigaciones en relación con el objeto de estudio.

En el tercer capítulo, se describen las características de la investigación, así como el diseño metodológico, en el que se opta por un estudio fundamentado en la Entrevista Basado en Tareas propuesta por Camargo (2021), la cual permitió profundizar los modos de abordar el objeto matemático en estudio. De igual manera, se presentan las diferentes fases de la investigación, junto con su intencionalidad y la forma en que a partir de ocho etapas se llevó a cabo el proceso de análisis a la secuencia de tareas.

En el cuarto capítulo, se hace una descripción tanto de la prueba piloto (diseño preliminar de la secuencia) como de la secuencia de tareas que se diseñó y las particularidades de su implementación. Asimismo, se precisan los análisis y resultados que se obtuvieron de la indagación, teniendo como referentes los objetivos propuestos, el marco teórico y la metodología. De lo cual, es importante destacar que los enfoques analítico y sintético se complementan deliberadamente en el abordaje de las transformaciones geométricas usando como mediadores otros objetos matemáticos en sus representaciones gráficas y algebraicas.

En el capítulo cinco, se detallaron un conjunto de conclusiones en las que se presentó las ideas desarrolladas en la investigación en relación con la forma en que los estudiantes abordan las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico, teniendo en consideración el logro de los objetivos propuestos. De igual modo, se describieron algunas recomendaciones que pueden ser objeto de estudio de futuros trabajos de indagación en el campo de la Educación en Matemática.

Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas y los anexos que incluyen algunas producciones escritas de los estudiantes y fotografías relacionadas con la implementación de la secuencia de tareas.

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo, se presentan algunos elementos centrales de la propuesta de indagación; los cuales, asociados a la descripción, justificación y formulación del problema, no solo muestran una ruta en coherencia de las dificultades que emergen en los procesos enseñanza y aprendizaje de la geometría y, en particular en el abordaje de las transformaciones geométricas, sino también, las razones del estudio y, sobre todo, lo que se pretende alcanzar.

1.1 Descripción del problema

La enseñanza de la geometría es parte de las matemáticas que está presente en la formación académica de los estudiantes en sus diferentes niveles de educación (básica-media-superior) y, específicamente, en la formación de profesores de matemáticas, dado que, no solo es un campo de conocimiento basado en la intuición del espacio que evoca objetos geométricos (puntos, rectas, figuras, entre otros) para movilizar procesos de pensamiento tales como argumentar, visualizar, abstraer, conjeturar, razonar, probar y/o demostrar (Godino y Ruiz, 2002), sino que también, sienta las bases sobre las cuales se edifica el desarrollo del conocimiento matemático permitiendo representar y resolver problemas relacionados con la vida cotidiana, las matemáticas mismas y otras ciencias (MEN, 2006).

Particularmente, la enseñanza de la geometría en la educación básica y media esta orientada, entre otras cosas, hacia el desarrollo de la percepción espacial, el estudio de las formas, de las propiedades y las relaciones de semejanza (y congruencia) bajo el efecto que producen las distintas transformaciones geométricas (traslación, rotación, simetrías y homotecia) sobre las figuras, que a su vez, posibilitan la exploración del espacio mediante la interacción del estudiante en diferentes contextos (MEN, 1998).

Sin embargo, la situación que se presenta en las aulas de clase es distinta; por un lado, la geometría en la escuela se ha reducido a proponer situaciones enmarcadas en la solución de ejercicios que se enfocan en la descripción de elementos de figuras estáticas para el estudio de aspectos métricos como el cálculo de perímetro, área, volumen, entre otros conceptos; lo cual implica especial atención por parte de los estudiantes para identificar y recordar los procesos del profesor en la búsqueda de la solución. (Abrate et al., 2006)

Por otro lado, la enseñanza de la geometría a nivel escolar suele presentarse de forma desarticulada al momento de abordar la geometría sintética y la geometría analítica como enfoques diferentes, una independiente de la otra; proponiendo la enseñanza de la geometría sintética desde primer grado hasta noveno, y la geometría analítica en los grados décimo y once (MEN, 2006). Esta desconexión curricular que induce una disyunción entre estos enfoques geométricos, de acuerdo con Gascón (2002) también es producto del análisis epistemológico superficial que oculta la continuidad y complementariedad que existe entre éstos, en el abordaje de los diversos objetos de conocimiento.

Lo anterior, pone de manifiesto que los contenidos de geometría se presentan como un producto acabado de la actividad matemática en la que los estudiantes no solo desarrollan procesos mecánicos, sino que también adquieren conceptos distorsionados o erróneos que los conllevan a una comprensión superficial de un determinado objeto geométrico (Gascón, 2003). De igual forma, deja entrever que en el abordaje de estos objetos de conocimiento no se considera la articulación de los enfoques sintético y analítico de la geometría, en función de favorecer los procesos implícitos de la construcción y el razonamiento que se derivan de su aprendizaje.

En este sentido, se considera que el docente de secundaria en su quehacer pedagógico debería proveer al estudiante situaciones de aprendizaje que propicien los procesos cognitivos matemáticos necesarios para el reconocimiento de las formas y propiedades geométricas desde lo sintético, lo transformacional y lo analítico; puesto que, el saber geométrico que desarrollen los estudiantes en la escuela será el punto de partida en el que se fundamenta el aprendizaje de la geometría en la educación superior.

Sin embargo, los resultados de los datos que arrojan las pruebas nacionales relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas revelan que, en la mayoría de las instituciones educativas de Colombia y de Buenaventura en particular, se encuentran estudiantes con desempeños promedio por debajo de los esperados, tanto en el sector oficial como en el privado, con algunas acentuaciones en lo rural (Alonso, Ocampo y Urbano, 2019).

De manera que, los estudiantes que ingresan a la universidad presentan dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, particularmente en geometría, las cuales, no solamente son proveniente de experiencias, falta de conocimientos y concepciones sobre la enseñanza de la geometría en su tránsito por la educación básica y media (Linares, 2007); sino que, de acuerdo con Gascón (1997) son el reflejo de los efectos que producen los cambios en el contrato didáctico en la transición de la educación secundaria a la universidad, en tanto que, la forma de aprender y abordar los diversos objetos geométricos en la universidad se presentan con un mayor rigor de abstracción que en la secundaria. Aunado a la falta de hábito referente al uso del lenguaje matemático y de los procesos de prueba y/o demostración en este campo (Escudero, 2002).

De modo que, situando lo anterior desde el programa de Licenciatura en Matemática de la Universidad del Valle Sede Pacífico, estas dificultades tienen sus repercusiones en los cursos de matemáticas que se orientan en los primeros semestres; particularmente, en el curso de geometría en tercer semestre, dado que, según los reportes de secretaria académica en relación con de los desempeños de los estudiantes, revelan que en los periodos académicos 2020 y 2021, los índices de reprobación se encuentran en un 52% o 22%, mientras que, los porcentajes de aprobación son del 48% o 78%, es decir, que la mayoría de los estudiantes que aprueban el curso lo hacen con un nivel de desempeño básico de 26% o 61%, lo cual, muestra por un lado, que solo el 17% o 22% lo hicieron con calificaciones altas y, por otro, que ningún estudiante alcanzó calificaciones con desempeños de nivel superior, tal y como se muestra en la *tabla 1*.

Tabla 1. *Caracterización de calificaciones durante los periodos académicos 2020 y 2021 en el curso de Geometría*

Estudiantes matriculados por periodo académico		**Calificaciones**				**Promedio de calificaciones por periodos**
		Bajo [1 - 2,9]	**Básico [3 - 3,9]**	**Alto [4 - 4.5]**	**Superior [4,6 - 5]**	
Junio/2020 - Octubre/2020	27	52%	26%	22%	0%	2,9
Junio/2021 – septiembre 2021	18	22%	61%	17%	0%	3,4

Nota: elaboración propia, a partir de los reportes académicos al programa de Licenciatura en Matemática de la universidad del valle sede pacífico.

Lo anterior, no solo pone de manifiesto los índices porcentuales de los estudiantes que aprobaron (básico, alto y medio) y reprobaron (bajo) en cada periodo académico, con su respectivo promedio general por periodo, sino que también, entre otras cosas, son el reflejo del impacto causado por la pandemia del Covid-19 decretada por la Organización Mundial de Salud (OMS, 2020). Dado que, la Universidad del Valle Sede Pacífico fue directamente obligada a modificar sus prácticas pedagógicas para adecuarse a lo que ellos llaman, la educación presencial asistida por tecnología, con el propósito de darle continuidad a la actividad académica.

Como consecuencia, este hecho agudizó algunas dificultades que se derivan de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los diferentes cursos, en este caso, en Geometría, cuyo propósito, entre otras cosas, es hacer un acercamiento a las nociones de distancia, propiedades y teoremas de los triángulos, cuadriláteros y circunferencias, así como también, al estudio de las transformaciones isométricas e isomórficas; proponiendo su abordaje con un mayor rigor de abstracción matemática desde el enfoque analítico sin desconocer algunos elementos asociados al enfoque sintético.

Desde este panorama, muchas de las dificultades tuvieron su procedencia en el manejo didáctico de los recursos tecnológicos, los ambientes poco favorables para recibir las clases; el manejo de la didáctica y pedagogía virtual del docente; el acceso limitado a las tecnologías e internet, entre otros factores, que de una u otra forma, incidieron en el rendimiento y continuidad de algunos estudiantes en el programa académico.

Lo anterior significa, que las dificultades que presentaron los estudiantes en el curso de geometría, entre otras cosas, no solo son el reflejo de la forma en que se enseñan los diferentes objetos geométricos en la escuela; la cual, prioriza su abordaje desde el enfoque sintético, sino que también, están asociadas a los efectos causados por la emergencia sanitaria en el ámbito educativo.

Ahora bien, considerando el objeto de conocimiento; transformaciones geométricas, entre las que sobresalen las isométricas (traslación, rotación y simetrías) y las isomórficas (homotecia), se reconoce que requieren de un conjunto de elementos asociados a los enfoques sintético y analítico que permitan que el estudiante pueda comprenderlas, sin embargo, en sus procesos de enseñanza y aprendizaje suscitan algunas dificultades.

Por un lado, los estudios realizados por Jaime y Gutiérrez (1996); Malana y Landerosa (2000); Díaz y Bazán (2011); Montes (2012) y Julio (2014) explicitan algunas dificultades referentes al abordaje de las transformaciones isométricas desde el contexto escolar con implicaciones en el ámbito universitario:

- En lo que respecta a la traslación, revelan que los estudiantes presentan dificultades para diferenciar la distancia entre el objeto y su imagen; utilizar el lenguaje gráfico y simbólico; predecir la figura trasladada; determinar el vector de traslación teniendo en cuenta el objeto y su imagen, entre otras, que inciden en su aprendizaje;
- En cuanto a la rotación, expresan que los estudiantes tienen dificultad para interpretar el efecto que tiene esta isometría sobre una figura respecto a un punto fuera de ella; el uso de

las medidas entre la figura y su imagen; reconocer el centro de rotación como punto unido en la transformación; determinar el ángulo con el que se realiza el giro, entre otras, que obstaculizan la comprensión de esta transformación;

- Con respecto a las simetrías, declaran que los estudiantes no reconocen la perpendicularidad del segmento que une un punto y su imagen con respecto del eje de simetría; no construyen la imagen paralela a la figura original, cuando ésta no sea paralela al eje de simetría; no desplazan en forma horizontal o vertical la figura, cuando el eje de simetría esté inclinado; ni determinan el eje simétrico considerando el objeto y su imagen, entre otras.

Por otro lado, las indagaciones de Malana y Landerosa (2000); Ortiz y Angulo (2010); Díaz y Bazán (2011); Julio (2014); Gonzales y Arias (2017); describen que algunas dificultades desde el contexto escolar con implicaciones en el ámbito universitario relacionadas con las transformaciones isomórficas, las cuales tienen que ver con que, los estudiantes no reconocen las relaciones de semejanza con respecto a la variación del coeficiente homotético que determina la ampliación o reducción de las figuras; no justifican el cambio que produce efectuar dicha transformación en una figura; no determinan el coeficiente y el centro homotético; ni determinan las propiedades que permanecen invariantes, entre otras, que son posiblemente producto de la forma como se enseña la geometría transformacional, reducida al manejo de regla y compás.

Lo antes mencionado, refleja que a la enseñanza de las transformaciones geométricas se le ha dado un tratamiento enfocado en el componente sintético, que se encuentra desligado del componente analítico, lo cual conlleva a que los estudiantes solo puedan reconocer, aplicar y describir los efectos que producen las distintas transformaciones en el plano a través del uso de algún software de geometría dinámica o a papel y lápiz, sin detenerse en los procesos de análisis de variación, que entre otras cosas, posibilitan relacionar una representación geométrica con una expresión algebraica (Thaqi, 2009).

De ahí que, en el aprendizaje de las transformaciones geométricas se puede involucrar e integrar la enseñanza del pensamiento algebraico, dado que, permite el reconocimiento de situaciones de cambio que conllevan a la formulación y modelación a partir de expresiones algebraicas que den cuenta de la representación y resolución de situaciones geométricas (MEN, 2006). Sin embargo, la enseñanza de este pensamiento se limita a un tratamiento mecánico y memorístico, priorizando los procesos algebraicos y procedimentales que no representan un conocimiento útil y significativo para los estudiantes (Velásquez et al., 2007).

De esta manera, proponer situaciones problemas de transformaciones geométricas desde el enfoque sintético podrían abordarse con profundidad estableciendo una conexión con el enfoque analítico e igualmente, de forma recíproca. Esto significa, que el aprendizaje relativo al objeto en cuestión se dota de sentido y significado mediante la articulación de los enfoques sintético y analítico, puesto que, por ejemplo, no solo es posible abordar el componente geométrico característico de las propiedades de una figura, sino que también, posibilita transmutar esas propiedades y representaciones geométricas en términos algebraicos, permitiendo integrar conceptos relacionados con aspectos de los pensamientos espacial, métrico, numérico, variacional, entre otros procesos, que contribuyen al desarrollo del pensamiento matemático.

De este modo, se reconoce que en el abordaje de las transformaciones geométricas debe existir una complementariedad entre los enfoques analítico y sintético para la comprensión de este objeto de conocimiento. Por ello, surge la siguiente pregunta de indagación:

¿De qué manera los estudiantes de segundo semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle Sede Pacífico abordan las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico de geometría?

1.2 Objetivos

1.2.1 General

Caracterizar el abordaje de las transformaciones geométricas de los estudiantes de segundo semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle Sede Pacífico desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico de la geometría.

1.2.2 Específicos

- Categorizar los saberes y dificultades de los enfoques sintético y analítico relacionados con el abordaje de las transformaciones geométricas que tienen los estudiantes antes de tomar el curso de geometría.
- Favorecer, mediante el diseño y aplicación de una secuencia de tarea, la articulación entre los enfoques sintético y analítico para el abordaje de las transformaciones geométricas en estudiantes de segundo semestre.
- Determinar, a partir de las producciones escritas de los estudiantes, la forma en que abordan las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico.

1.3 Justificación

En el campo de la Educación Matemática, la enseñanza de la geometría proporciona a los estudiantes un cúmulo de conocimientos geométricos que les debería permitir interpretar, apreciar, describir y entender la relación con su contexto sociocultural para favorecer el desarrollo de los procesos de visualización, resolución de problemas, argumentación, exploración, modelación y demás actividades propias de las matemáticas que contribuyen al desarrollo del pensamiento matemático.

De manera que, la importancia que tiene la geometría en la formación de los estudiantes no solo radica en que propicia el desarrollo de los procesos antes mencionados, sino que también, en el ámbito universitario la geometría actúa como soporte conceptual para el tratamiento a posteriori de diversos objetos matemáticos en asignaturas tales como Álgebra lineal, Cálculo, Ecuaciones diferenciales, entre otros, que requieren de elementos geométricos necesarios para su comprensión.

En este sentido, la enseñanza de la geometría en la formación de docentes de matemáticas en diferentes universidades se enfatiza en el tratamiento de conceptos y procedimientos para establecer conjeturas, construir modelos, razonar inductiva y deductivamente, así como también, en la realización de pruebas y demostraciones de las propiedades de los diversos objetos de conocimiento mediante el desarrollo de teoremas (Barrantes y Blanco, 2005), considerando los aspectos sintéticos y analíticos de la geometría para su abordaje en función de favorecer el desarrollo del pensamiento espacial y matemático.

De este modo, en esta indagación se consideró necesario estudiar los enfoques sintético y analítico de una manera no disyunta para favorecer el abordaje de los diferentes objetos geométricos. Por ello, dentro de la Educación Matemática la problemática de la articulación entre estos enfoques ha sido considerada en múltiples investigaciones (Gascón, 2002; Acosta, 2004; Santos, Espinosa y Reyes, 2008; Bernat, 2011 entre otros), en las cuales, se pone de manifiesto las limitaciones y potencialidades de cada una de esas aproximaciones, así como también, la importancia que tiene abordar un objeto geométrico desde la complementariedad de estos enfoques para de esta forma propiciar un aprendizaje íntegro y funcional.

Esto significa, que en el abordaje exclusivamente analítico de un concepto se presentan limitaciones en la utilización de los métodos para describir el objeto geométrico mediante expresiones algebraicas de forma tal que el estudiante no puede caracterizar e identificar sus propiedades geométricas. Así mismo, el abordaje de los conceptos desde el enfoque sintético resulta inevitable el foco analítico para producir una expresión algebraica fundamentada en las propiedades geométricas.

Desde el punto de vista de Klein (1908) el enfoque analítico no puede prescindir en absoluto de la representación geométrica, ni, por el contrario, el enfoque sintético puede ir más lejos sin expresar los resultados mediante expresiones algebraicas. Por tanto, estos enfoques deben presentarse de manera articulada dada su complementariedad (p. 74). De ahí que, resulte importante estudiar la complementariedad de estos enfoques mediante el abordaje de un determinado objeto geométrico.

Dentro de la variedad de objetos que se movilizan en geometría, en esta indagación las transformaciones geométricas son el foco de atención porque en ellas se pueden plantear y resolver situaciones problemas usando modelos o representaciones geométricas de índole sintética o analítica que permiten la integración del pensamiento espacial con otros pensamientos tales como; el algebraico, dado que no solo posibilita el estudio de la variación que se produce al efectuar una transformación, sino que también, permite modelar situaciones problemas mediante expresiones algebraicas que den cuenta de la transformación; y, el métrico, puesto que favorece la interacción dinámica del proceso de medir y relacionar los atributos de las figuras transformadas (MEN, 1998).

Lo anteriormente expuesto, pone de manifiesto que en el abordaje de las transformaciones geométricas se moviliza la comprensión de algunas propiedades de las figuras y conceptos con los que guarda estrecha relación, tales como: semejanza, proporcionalidad, función lineal, paralelismo, perpendicularidad, invarianza, perímetro, área, colinealidad, ecuaciones, expresiones algebraicas, entre otros, que dan cuenta de la importancia de potenciar su aprendizaje.

En este sentido, De Villiers (1993) resalta el poder de las transformaciones geométricas para estudiar la relación de la geometría con el álgebra debido a que su abordaje requiere y moviliza conceptos de esta área de conocimiento. Análogamente, Thaqi (2009) indica que las transformaciones geométricas son un contenido fundamental en el aprendizaje de las matemáticas, de manera que su estudio y tratamiento es esencial e importante dado que estas son aplicaciones de funciones en geometría.

Desde este panorama, diversas investigaciones entre las que sobresalen las de Guisin (2000); Ortiz y Angulo (2010); Montes (2012); Julio (2014); Gonzales y Arias (2017), entre otras, resaltan la trascendencia de estudiar las transformaciones geométricas, porque proporcionan elementos conceptuales y metodológicos para su abordaje focalizado desde el enfoque sintético, con algunas yuxtaposiciones de actividades en lo analítico. Esto refuerza la iniciativa de profundizar en el abordaje de este objeto geométrico teniendo como foco la complementariedad de los enfoques sintético y analítico de la geometría.

A modo de ejemplo, si se les propone a los estudiantes que apliquen a una figura geométrica dos reflexiones axiales seguidas por medio de dos ejes simétricos perpendiculares entre sí y, luego se les pide determinar una expresión algebraica que dé cuenta de la forma en la que se puede llegar de la figura inicial a la figura final considerando solo el punto de intersección de los ejes simétricos perpendiculares, es posible movilizar elementos del enfoque sintético ya que permiten describir, explorar y reconocer las propiedades que permanecen invariantes en las transformaciones y, de igual forma, aspectos del enfoque analítico porque posibilita modelar mediante expresiones algebraicas la variación y relación entre las transformaciones para dar el paso de la representación geométrica a una algebraica y viceversa.

De este modo, se refleja una aproximación al estudio de la complementariedad entre los enfoques sintético y analítico en el desarrollo de tareas o situaciones de aprendizaje que involucren el abordaje de las transformaciones geométricas; pues, entre otras cosas, el uso de ecuaciones o expresiones algebraicas que surgen en este proceso no son suficientes para caracterizar el objeto geométrico por lo que se requiere también, del empleo de elementos sintéticos que posibiliten describir el objeto, comprender sus relaciones métricas y generalizar la problemática inicial mediante pruebas y/o demostraciones.

En este orden de ideas, se espera que el análisis de dichas situaciones permita encontrar el conjunto de elementos y características que estas deben tener para propiciar el abordaje de las transformaciones geométricas desde la complementariedad entre los enfoques analíticos y sintéticos en estudiantes de segundo semestre de la Universidad del Valle Sede Pacífico.

Cabe resaltar que, tanto las dificultades presentadas por los estudiantes cuando toman el curso de geometría en su tercer semestre, como las dificultades con las que ingresan los estudiantes provenientes de diferentes Instituciones Educativas a esta Universidad, proporcionaron los argumentos para seleccionar el segundo semestre como el momento del programa académico en el cual situar esta investigación.

De manera que, la geometría de la Universidad se propone como el campo diciplinar en el cual se desarrollen estas reflexiones, por lo tanto, se requiere de una metodología de investigación que permita tener en cuenta las condiciones particulares de esta indagación; en tanto que, la revisión y análisis de las diversas estrategias investigativas muestran que las Entrevistas Basadas en Tareas (Camargo, 2021) son una alternativa potente para profundizar e indagar sobre la forma en que los estudiantes abordan el objeto en cuestión, en la que la intervención con ellos mientras resuelven las tareas y las condiciones particulares de estos se conjugan con los aportes teóricos de investigaciones en educación matemática para diseñar e implementar una secuencia de tareas.

Lo hasta aquí mencionado, no solo configura el conocimiento especializado que deben desarrollar los estudiantes en su formación para docentes de matemáticas (Ball et al, 2008), referente a las transformaciones geométricas, sino que también, desencadena un cumulo de razones epistemológicas y didácticas en función de modificar la forma en la que se estudian las transformaciones geométricas y, por ello, en esta indagación se pretende profundizar su abordaje desde la complementariedad entre los enfoques analíticos y sintéticos de la geometría.

En consonancia con lo anterior, la puesta en acción de la investigación que se acaba de explicitar requiere de la fundamentación de una serie de elementos teóricos y metodológicos que apoyen el desarrollo de esta; de modo que, la presentación de dichos elementos es el propósito del siguiente capítulo.

CAPÍTULO II: FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En este capítulo, se presentan algunas aproximaciones conceptuales que permitan hacer un análisis y dar respuesta al problema de indagación. Por ello, esta indagación se fundamenta teóricamente desde tres encuadres que se complementan entre sí; en el primero, se presenta una perspectiva de la formación de profesores**,** haciendo énfasis en la formación de docentes de matemáticas y, particularmente, en la Universidad del Valle sede pacifico; en el segundo, se exhibe una perspectiva matemática relacionada con las transformaciones geométricas; y finalmente, se describe mediante una perspectiva didáctica los modos de pensar y abordar las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico de la geometría; concretando todos estos elementos en la conceptualización de secuencias de tareas.

2.1 Una perspectiva de la formación de profesores

La formación de docentes es uno de los aspectos sobre los cuales diversas investigaciones ponen especial énfasis, debido a que, se encuentra directamente relacionada con el proceso de calidad educativa y el desarrollo de la sociedad. De modo que, en la formación de docentes se deben propiciar espacios para que el futuro educador no solo se apropie de los fundamentos y saberes básicos referentes a un área de conocimiento, sino que también, desarrolle las competencias profesionales necesarias para efectuar su labor como profesional de la educación.

De manera particular, en Colombia la formación de docentes está dirigida a aprender a enseñar, a posibilitar el aprendizaje de diversos conocimientos, competencias, contenidos conceptuales, actitudinales y procedimentales, con el fin de crear posibilidades vitales para la constitución de los sujetos sociales a través de la educación. Ante esto, la ley General de Educación, (Ley 115 de 1994) estableció entre otras cosas que, se debe:

> Formar un educador de la más alta calidad científica y ética; desarrollar la teoría y la práctica pedagógica como parte fundamental del saber del educador; fortalecer la

investigación en el campo pedagógico y en el saber específico; y, preparar educadores a nivel de pregrado y de posgrado para los diferentes niveles y formas de prestación del servicio educativo (Artículo 109).

En este sentido, la formación docente debe posibilitar la interpretación y comprensión de la realidad educativa nacional y regional, además de estudiar las implicaciones sociales, culturales, cognitivas, personales y disciplinares de la educación desde sus distintos niveles y desarrollos para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje en función de atender y enfrentar los retos de una sociedad con avances científicos y tecnológicos.

En este orden de ideas, la ley 115 de 1994, entre otros aspectos, ratifica a las universidades e instituciones profesionales de Educación Superior con la responsabilidad y autonomía a través de licenciaturas, la formación de docentes para la enseñanza en diferentes niveles educativos, áreas o poblaciones, según el énfasis de la formación.

Por ello, la Universidad del Valle ofrece programas de licenciaturas, particularmente, en matemáticas desde la facultad de educación y pedagogía; enfatizando, no solo los saberes propios de la disciplina, sino también, otros aspectos didáctico-pedagógico asociados a las formas de enseñar estos saberes matemáticos.

En tanto que, de acuerdo con la resolución No. 239 del 2020 decretada por el Consejo Académico de la Universidad Valle, el programa de Licenciatura en Matemáticas propicia una formación integral al futuro educador dotándolo de conocimientos, habilidades y sensibilidades necesarias para desempeñarse de manera idónea, pertinente y oportuna como pedagogo matemático en los niveles de educación básica, secundaria y media.

2.1.1 Formación de profesores de matemáticas

La formación de profesores de matemáticas ha sido un tópico de interés en diversas investigaciones en el campo de la Educación Matemática en las que se intenta describir el tipo de conocimiento que los estudiantes para profesores deben desarrollar para atender los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las diferentes Instituciones Educativas. En este sentido, la formación de docentes en matemáticas debe permitir comprender ideas matemáticas, conectarlas, y comunicarlas, así como también, desarrollar formas de razonar matemáticamente para resolver problemas y potenciar el discurso matemático (Llinares, 2007).

De manera que, para ser profesor de matemáticas no solo se necesita saber matemática, sino que también se requiere de un conocimiento profesional que incluye aspectos diversos, desde el conocimiento didáctico pedagógico del contenido al conocimiento del currículo; vinculado a los procesos de enseñanza y aprendizaje (Ponte, 2001, p.11). Eso significa, que en los distintos programas de formación de profesores el desarrollo de estos elementos debe ser el foco de atención.

De este modo, Shulman (1986-1987) reconoce a través de la observación del trabajo de profesores en aulas de matemáticas, la necesidad de conceptualizar el conocimiento matemático para enseñar (MKT). Teniendo como base lo anterior, Ball et al (2008) proponen un modelo en el que presentan un conjunto de seis dominios de conocimiento que deben adquirir los estudiantes en el transcurso de su formación para docentes, los cuales se explicitan a continuación:

- *Conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS),* hace referencia a la forma en que los estudiantes aprenden matemáticas. Es decir, se entrelaza los conocimientos acerca de cómo piensan los estudiantes y los saberes acerca de las matemáticas.
- *Conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT),* alusivo al conocimiento pedagógico y didáctico específico que requiere un profesor para actuar en la enseñanza, lo cual, le permite configurar un conjunto de estrategias metodológicas para favorecer el aprendizaje de las matemáticas, teniendo como base el razonamiento de los estudiantes.
- *Conocimiento del contenido y el currículo (KCC),* se refiere a la comprensión de las matemáticas dentro del currículo, ya que juega un papel central en la planificación, la

organización y la ejecución de los contenidos que se pretenden enseñar a un nivel de escolaridad determinado.

- *Conocimiento común del contenido (CCK),* se caracteriza por ser el conocimiento matemático que posee cualquier persona en el ámbito científico o profesional que le permite aplicarlo en cualquier contexto, de modo que, no es un conocimiento exclusivo de los profesores de matemáticas.
- *Conocimiento en el horizonte matemático (HCK),* es alusivo a la conciencia sobre la génesis y relación de los contenidos matemáticos, no solo a lo largo de todo el currículo, sino también, en la trayectoria de un contenido matemático a lo largo de las diversas etapas educativas, lo cual, permite establecer las conexiones intra y extra-matemáticas.
- *Conocimiento especializado del contenido (SCK),* tiene que ver con el conocimiento matemático exclusivo para el profesor de matemáticas que le permite hacer usos específicos, adaptaciones y secuenciaciones realizadas para transformar el contenido en enseñable o efectuar la trasposición didáctica del contenido.

El modelo anterior concuerda con el proyecto educativo de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle Sede Pacifico inscripto en la facultad de Educación y Pedagogía en el Área de Educación Matemática; dado que, se compone por cinco líneas de formación que soportan el camino que los estudiantes deben transitar y aprobar durante diez semestres para poder obtener su título como profesional en esta área de conocimiento. Estas líneas de formación son: Matemáticas; Didáctica de las Matemáticas; Historia y Epistemología de las Matemáticas; Lenguaje, Razonamiento y Comunicación de Saberes Matemáticos y; Tecnologías de la Información y Comunicación en Educación Matemática (Proyecto Educativo del Programa, 2019).

La primera, es el espacio en el que se aborda y reflexiona desde la perspectiva disciplinar los conocimientos matemáticos; la segunda, busca concretar la necesaria articulación interdisciplinaria entre los conocimientos matemáticos, su estructuración curricular, la pedagogía y didáctica en su enseñanza; la tercera, estudia los procesos de construcción y consolidación teórica de los diversos objetos matemáticos; la cuarta, aborda la relación entre pensamiento-lenguaje-cultura, para dar cuenta de las posibilidades de elaboración y transformación del conocimiento matemático en diferentes contextos y; la quinta, estudia la integración de tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde la perspectiva didáctica.

Lo anterior, pone de manifiesto el entramado de conocimientos que adquieren los estudiantes para atender los retos que la educación matemática enfrenta, conceptualizar y encarar el mejoramiento de las prácticas educativas y la formación matemática y científica en las Instituciones Educativas colombianas y en particular, las del distrito de Buenaventura, de tal forma que esto posibilite dar algunas alternativas de solución a los problemas que surgen alrededor de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Centrando la atención en la línea de formación de matemáticas se considera el curso de geometría que se orienta a estudiantes de tercer semestre del mismo programa académico, como el contenido geométrico especializado que le permite a los estudiantes para profesores desarrollar un cumulo de procesos que se derivan del aprendizaje de los diferentes objetos matemáticos que en éste se abordan. Estos objetos de conocimientos se muestran en el diagrama 1; resaltando las transformaciones geométricas por ser el foco de estudio en esta indagación.

Diagrama 1. Contenido diciplinar del curso geometría

GEOMETRÍA

- Relaciones métricas de los triángulos.
- Línea notable de un triángulo.
- Lugares geométricos (Circunferencia, parábola, elipse e hipérbola)
- Distancia entre dos puntos, colinealidad de puntos.
- Relaciones métricas de la circunferencia.
- Áreas sombreadas
- Transformaciones geométricas (traslación, rotación, simetrías y homotecia).

Fuente. Elaboración propia.

De acuerdo con lo anterior, se reconoce que en dicho curso se intenta aproximar a los estudiantes a una comprensión rigurosa de las nociones, propiedades y teoremas asociados a los triángulos, cuadriláteros y circunferencias. Así como también, al estudio de la invarianza de las transformaciones isométricas e isomórficas en sus diversos registros de representación, enfatizando el lenguaje algebraico o analítico.

Desde este panorama, se vislumbra que el programa académico brinda una diversidad de posibilidades en la formación académica de los estudiantes; dado que el conocimiento geométrico les permitirá interpretar, apreciar, describir y entender la relación estrecha y directa con su contexto sociocultural, lo cual favorece la emergencia de propiciar los procesos de visualización, resolución de problemas, argumentación, exploración, modelación y demás actividades propias de las matemáticas que contribuyen al desarrollo del pensamiento matemático.

Por ello, la vinculación que se percibe entre lo algebraico y geométrico en el estudio y tratamiento de los diversos objetos matemáticos en este curso; destacando el aprendizaje de las transformaciones geométricas, configuran un acercamiento a las diferentes maneras o modos de abordar y pensar este objeto de conocimiento en sus diferentes representaciones, específicamente el lenguaje gráfico y analítico.

De esta manera, se aclara que para efectos de esta investigación solo se tendrá en cuenta el conocimiento especializado del contenido referente a las transformaciones geométricas; puesto que, los estudiantes para profesores de matemáticas en el abordaje de este objeto matemático, ponen a su disposición el saber adquirido a través de experiencias cotidianas y escolares en conjunto con el conocimiento diciplinar propio de su formación, los cuales, le permite relacionar diferentes objetos matemáticos o aspectos de un contenido en específico para la resolución de problemas geométricos.

En este sentido, se hace necesario fundamentar el conocimiento diciplinar (especializado) del objeto matemático en estudio, las transformaciones geométricas. Las cuales, los estudiantes para profesores de matematicas deben comprender, abordar y dominar para posteriormente ponerlo al servicio de la enseñanza; por ello, la conceptualización de dicho objeto geométrico es el propósito de la siguiente perspectiva.

2.2 Perspectiva matemática

En esta parte, se describen algunos elementos conceptuales relacionados con las transformaciones isométricas (traslación, rotación y simetrías) e isomórfica (homotecia), tomando en consideración algunos aspectos históricos que no solo muestran su importancia en las matemáticas, la vida cotidiana y otras ciencias, sino que también, se resaltan las diferentes formas de concebir las transformaciones geométricas. De igual forma, a partir de las ideas expuestas por: Alsina, Pérez, y Ruiz (1989); Castillo (1993); Guisin (2000); Lima (2001); Guerrero (2006) y; Garzón y Valoyes (2005) se hace una descripción detallada de los elementos, características, condiciones y propiedades que configuran cada una de las transformaciones geométricas desde los enfoques sintético y analítico.

2.2.1 Algunos aspectos históricos de las Transformaciones Geométricas

Las transformaciones geométricas han estado presentes a lo largo de la historia en todas las culturas del mundo, por lo que en ese entonces muchos artistas realizaban sus creaciones basadas en repeticiones de un mismo elemento geométrico. Todas las culturas han utilizado las transformaciones geométricas en sus manifestaciones artísticas para crear obras de artes concebidas como la composición entre figuras dos o más geométricas.

Por otra parte, los avances de las geometrías desde la Euclidiana hasta las geometrías de Hilbert y de Klein, han logrado dar un salto importante en la evolución histórica de la organización de los efectos de la actividad matemática en general.

De manera particular, en la historia de la geometría, la noción de transformación ha trascendido por un largo recorrido histórico para llegar a ser conceptualizada en la actualidad como geometría, en este sentido, los primeros aportes importantes los mencionó Euclides en su obra Los Elementos, en la que se reconoce el principio de coincidencia por el método de superposición para describir la igualdad entre triángulos en la proposición 4, en la cual, se menciona que, si dos triángulos tienen dos lados respectivos iguales, y tienen los ángulos comprendidos iguales, también tendrán las bases iguales, y los triángulos serán iguales, y los ángulos restantes serán iguales, concretamente los opuestos a los lados iguales. (Euclides, Libro I, proposición 4).

En este sentido, se considera que, en la primera parte de los Elementos, Euclides implícitamente ya había desarrollado la tesis de que, dos figuras situadas en el mismo plano serían iguales si y solo si fuese posible hacer que una figura coincida con la otra por medio de traslaciones, rotaciones y reflexiones en rectas. Esto deja entrever que Euclides concebía aquellas propiedades de las figuras de un plano que son invariantes respecto a las isometrías, por lo que se identifica la correspondencia entre los elementos constitutivos de una figura a otra.

Lo anterior deja ver que, en ese entonces para Euclides la idea no iba más allá de la congruencia entre figuras, por lo que la invarianza entre estas solo se concebía como una simple analogía. Al respeto, Moriena (s.f) manifiesta:

> El uso del método de superposición de las figuras ha dado lugar al debate alrededor del recurso de aplicación de un movimiento o de la idea de desplazamiento natural para superponer las figuras. Estos desplazamientos intervienen en figuras y no en transformaciones que operan sobre el espacio como conjuntos de puntos. (p, 4).

Es decir que, aún no existía la noción del concepto de transformación, puesto que solo se establecía una correspondencia biunívoca entre los elementos de dos figuras utilizando la superposición para determinar la congruencia de ambas.

De este modo, Lemonidis (1990,1991) reconoce que, en la época del renacimiento alguno de los elementos históricos más influyentes en la creación de ideas de algunos artistas estaba basado en la creación de objetos artísticos como los frisos, los mosaicos y las teselaciones, los cuales son obtenidos a partir de ciertos movimientos rígidos realizados a figuras geométricas aplicadas en el plano, esto sin lugar a duda dio un impulso para que de cierta forma se iniciara a tener una noción de las distintas transformaciones que se pudiesen llegar a aplicar a una figura geométrica. En este orden de ideas, Loboa y Larrahondola (2016) mencionan que, en la época del renacimiento los artistas se inclinaron hacia la representación de la realidad en sus pinturas, por lo que se encontraron con la dificultad que tenía realizar sombras o poder representar un objeto tridimensional en un lienzo bidimensional en términos de la proyección de figuras geométricas.

En este sentido, a partir del surgimiento de la geometría proyectiva se hace un acercamiento a la idea de transformación en geometría y de la utilización de propiedades invariantes en la que se destaca la transformación geométrica como la transferencia de propiedades de una figura a otra. De esta manera, Jahn (1998) señala que:

> En este período histórico las transformaciones geométricas aparecen como instrumentos implícitos de transferencia de propiedades. Las únicas transformaciones utilizadas son las proyecciones, pero quedan en el contexto de las cónicas, y no son consideradas como objetos de estudio en sí mismas, sino como simples relaciones entre dos figuras donde prima la noción de invariante (p,36).

Lo anterior refleja, que la idea de transformaciones en ese momento aún no estaba establecida formalmente, puesto que solo se tenía la noción de que estas se veían plasmadas en las distintas pinturas realizadas por algunos artistas de la época. Sin embargo, con la aparición de la geometría analítica presentada por Fermat y Descartes en el siglo XVII, mediante sus trabajos relacionados a las curvas y la noción de alguna ecuación asociada a este, se empezó a considerar de forma amplia las transformaciones geométricas, pues, en esta geometría se reemplazan las propiedades geométricas de las figuras por propiedades algebraicas sobre las coordenadas de sus puntos.

De modo que, se asocia el desplazamiento de un punto en plano con la rotación, la translación y simetría que se efectúa bajo unas propiedades que permanecen invariantes en la figura o punto desplazado. Por esta razón, Klein consideraba que las propiedades geométricas se clasifican y se caracterizan por las transformaciones que las dejan invariantes y a cada tipo de transformación le corresponde una geometría. Es decir que, para Klein, cada geometría da lugar a un grupo, formado por las transformaciones que dejan invariante los elementos geométricos. Ante ello, Piaget y García (1983) indican que;

> la noción de transformación tiene su origen innegable en la Geometría Analítica”. Sin embargo, fue a finales del siglo XIX donde algunos matemáticos conciben en la geometría la necesidad de buscar la clasificación de las propiedades invariantes de una figura. En esta búsqueda aparece la noción de grupo, referenciada como el

estudio de las sustituciones de las raíces de una ecuación algebraica, desarrollada por Galois (1811- 1832). (p,45)

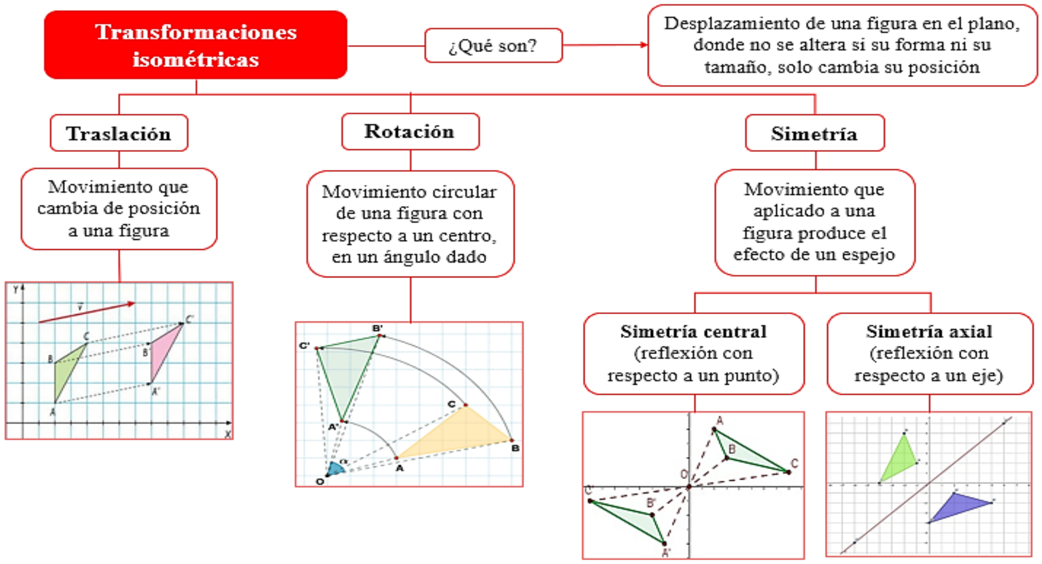
Finalmente, a partir del siglo XIX se logra establecer un vínculo en lo que se concebía como Transformaciones geométricas desde la teoría de Klein (1872), entendiendo que aquellas en las que las propiedades de las figuras geométricas transformadas permanecen invariantes como isométricas y aquellas en que las figuras transformadas son proyecciones de la inicial como isomórficas. Es así como las transformaciones logran ser concebidas como uno de los conceptos fundamentales de la geometría que hoy se conoce y permiten estudiar un entramado de objetos matemáticos con los que guardan estrecha relación.

2.2.2 Transformaciones isométricas

Las transformaciones isométricas representan una función que hace corresponder a cada punto del plano, otros puntos de este. En otras palabras, es una operación geométrica que permite descubrir una nueva figura a partir de una ya dada; esta nueva figura congruente es llamada homóloga o transformada de la original, en la que se conserva la forma y tamaño, pero no su posición u orientación (Godino y Ruiz, 2002).

Por tanto, son movimientos rígidos, las traslaciones, rotaciones y simetrías (central y axial), los cuales, mediante la correspondencia entre lados y vértices se puede determinar el vector director, el ángulo de rotación y el eje o el centro de simetría, para identificar la transformación que subyace (Julio, 2014). A continuación, se muestra un diagrama en el que se explica en forma general las transformaciones isométricas:

Diagrama 2. *Explicación general de las transformaciones isométricas*



Fuente. Elaboración propia.

Por consiguiente, el concepto de las transformaciones isométricas (traslación, rotación y simetrías), en lo que sigue se abordan a partir de las ideas de Jaime (1993), Godino y Ruiz (2002), Morera (2013) y Julio (2014), destacando algunas características y propiedades que las identifican:

2.2.2.1 La traslación.

La traslación es un movimiento rígido en el plano, en la que una figura es sometida a una transformación por medio de un vector, conservando su forma y tamaño, pero no la posición. Es decir, que es el deslizamiento en línea recta (vertical, horizontal o diagonal) de una figura geométrica determinado por un vector.

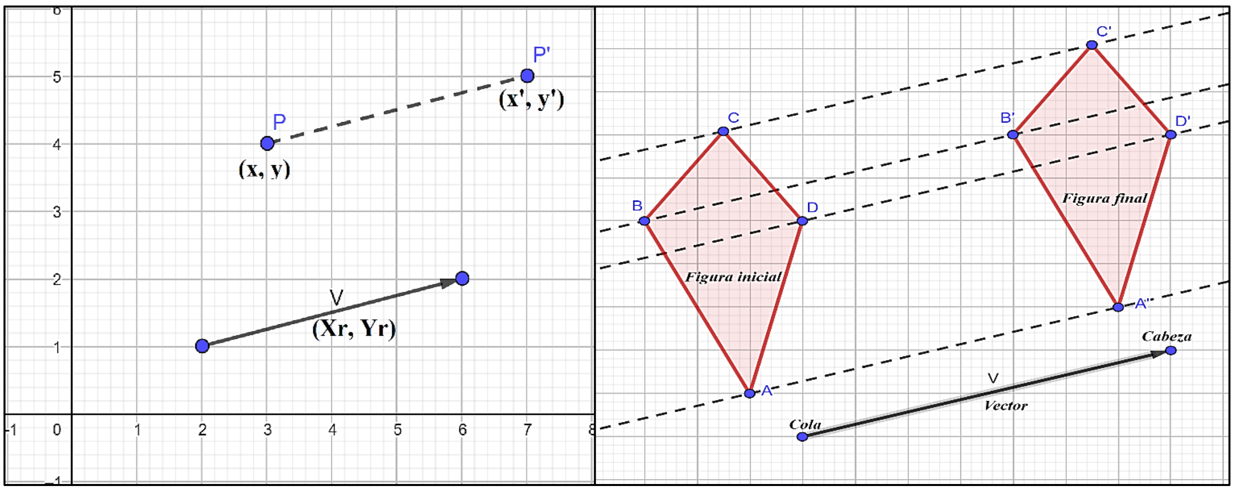
Definición 1: dado un vector $\vec{v}$, se llama traslación de vector $\vec{v}$, y se denota por $t_{\vec{v}}$, a la transformación geométrica que asocia a cada punto P del plano otro punto $p' = t_{\vec{v}}(p)$ de forma que se verifique $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$.

Demostración 1: sea $\mathrm{P}\,(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ el vértice de una figura geométrica, si se le aplica una traslación mediante el vector $\vec{\mathrm{V}}\,(\mathrm{x_r}, \mathrm{y_r})$ el vértice la figura resultante será $\mathrm{P'}(\mathrm{x'}, \mathrm{y'})$. De este modo, $\mathrm{P'} = \mathrm{P} + \vec{\mathrm{V}}$, sustituyendo; $(\mathrm{x'}, \mathrm{y'}) = (\mathrm{x}, \mathrm{y}) + (\mathrm{x_r}, \mathrm{y_r})$, simplificando; $(\mathrm{x'}, \mathrm{y'}) = (\mathrm{x} + \mathrm{x_r}, \mathrm{y} + \mathrm{y_r})$.

Por tanto, para encontrar las coordenadas del punto $\mathrm{P}'(\mathrm{x}', \mathrm{y}')$ se utiliza: $\mathrm{x}' = \mathrm{x} + \mathrm{x_r} \wedge \mathrm{y}' = \mathrm{y} + \mathrm{y_r}$.

De esta manera, se reconoce que la traslación es un tipo de isometría que no deja ningún punto invariante ya que si se tienen dos puntos *P y P'* en el plano y un vector $\vec{v}$ de magnitud y dirección conocidas. Entonces, los puntos *P y P'* están relacionados mediante una traslación si el segmento $\overrightarrow{PP'}$ tiene la misma dirección y longitud del vector $\vec{v}$.

Ilustración 1. *Representación de una traslación y sus elementos*



Fuente. Elaboración propia.

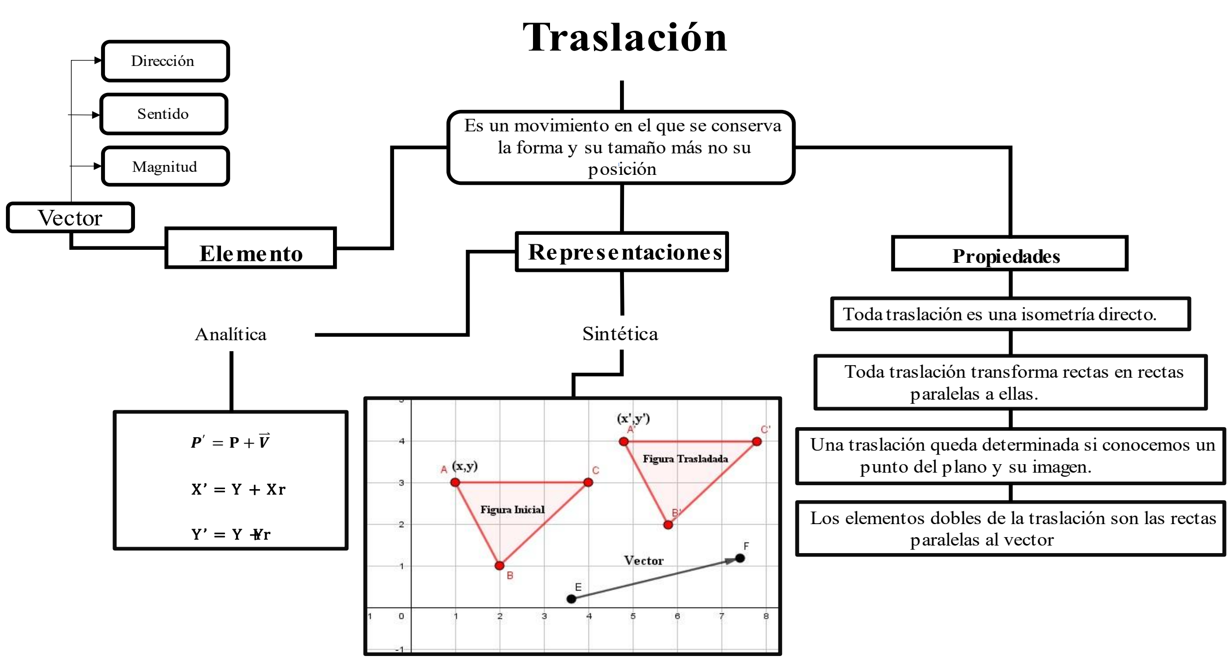
En este sentido, se reconoce la dirección, la magnitud desplazamiento y el sentido como elementos esenciales en una traslación, en la que el primero, da cuenta de la trayectoria horizontal, vertical u oblicua del movimiento de una figura; el segundo, referido a la cantidad de unidades de medidas a la que fue traslada una figura; y, el ultimo, alusivo a la posición (derecha, izquierda, arriba y abajo) de la figura final con respecto a la inicial. Esto quiere decir, que una figura se desplaza en relación con el vector de traslación, el cual indica la dirección y el sentido de la figura final.

De igual forma, se destacan algunas condiciones que se deben tener en cuenta para aplicar y reconocer la transformación de traslación:

- La figura final y la inicial deben tener la misma forma y tamaño.
- La figura final debe conservar el sentido de la figura inicial.
- El movimiento de las figuras debe tener igual orientación a la mostrada por el vector determinado por la posición de su cabeza y cola.
- La magnitud del vector debe ser igual a la distancia que haya entre cada vértice de la figura inicial y su imagen.
- Las rectas que unen cada vértice de la figura inicial con su correspondiente en la figura final deben formar un paralelogramo, dado que, el desplazamiento se da en forma paralela al vector.

Lo anterior, configura un conjunto de propiedades, elementos y condiciones que se deben considerar y cumplir para dar cuenta de una traslación, las cuales se sintetizan en el siguiente diagrama:

Diagrama 3. *Síntesis de la construcción conceptual de la transformación de traslación*



Fuente. Elaboración propia.

2.2.2.2 La rotación.

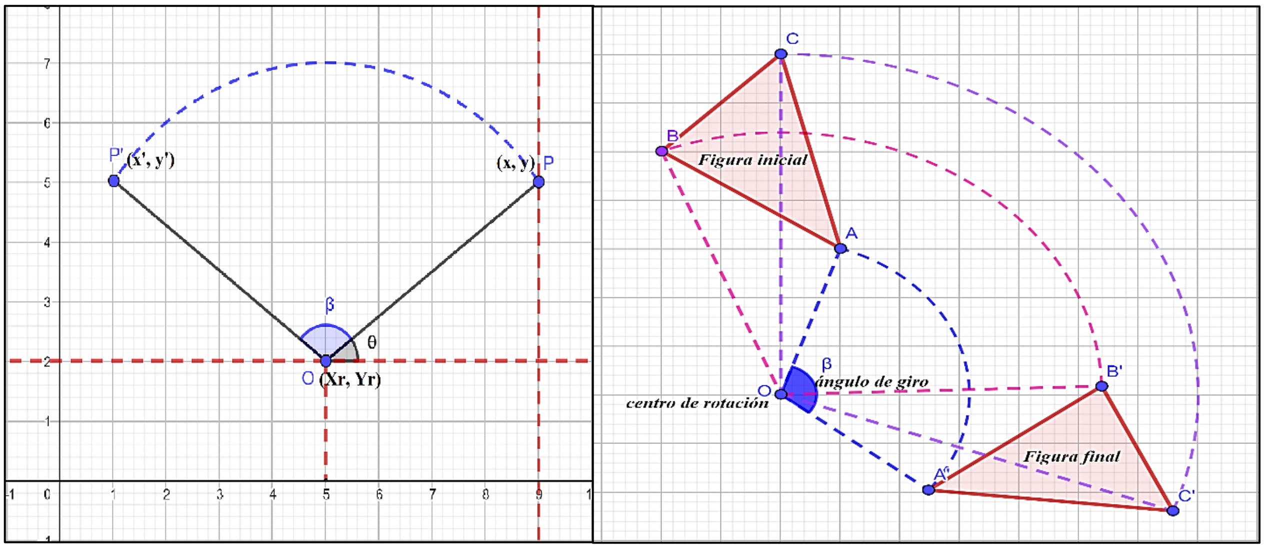
Las rotaciones son los movimientos rígidos que resultan de fijar un punto del plano y hacer girar el plano sobre sí mismo, dejando fijo dicho punto. En otras palabras, la rotación es una transformación en la que todos los puntos del plano se desplazan en arcos de circunferencia.

Definición 2: sea un punto P en R^2 con respecto a un punto O en R^2 y a un ángulo orientado $\measuredangle\beta$, mediante la función $R^2 \to R^2$ tal que $\beta(P) = P'$ sí y solo si la distancia del punto O al punto P es igual a la distancia de O al punto P′ y el ángulo $\measuredangle POP' = \measuredangle\beta$, para todo P que pertenece a R^2. Es decir, que $\overline{OP}$ ha sido rotado con un ángulo $\measuredangle\beta$, de tal forma que coincide con $\overline{OP'}$. Por tanto, los puntos $P\ y\ P'$ están relacionados mediante una rotación o giro. En este orden de ideas, el punto O es el centro por el cual se va a rotar la figura, y $\measuredangle\beta$ es el ángulo de rotación.

Demostración 2: si el centro es $O(x_r, y_r)$, se tiene que r es la distancia del punto $P(x, y)$ hasta el centro de rotación O $(r = \overline{OP})$, de modo que, θ define la posición angular del punto P desde la horizontal y β es el ángulo de rotación de P para producir un nuevo punto $P'(x', y')$ (la imagen de P). De ahí que, usando las razones trigonométricas $(\sin(\theta) = \frac{y}{r}\ y\ \cos(\theta) = \frac{x}{r})$ y despejando x e y de estas, se tiene que las ecuaciones de transformación del sistema original al nuevo sistema de coordenadas está dado por: $x' = r \cdot cos\ (\theta + \beta) + x_r\ \land\ y' = r \cdot sen(\theta + \beta) + y_r$ si el centro de rotación esta fuera del origen del plano cartesiano, mientras que, si está en el origen las expresiones algebraicas que determinan la rotación son : $x' = r \cdot cos\ (\theta + \beta)\ \land\ y' = r \cdot sen(\theta + \beta)$.

De este modo, se reconoce algunas propiedades y elementos centrales para llevar a cabo una transformación de rotación, como lo son: el el punto por el cual se va a rotar la figura (centro de rotación); la dirección por la cual se va a hacer la rotación, si su dirección es en contra de las manecillas del reloj dicha rotación es antihorario y si es a favor de las manecillas la rotación es horaria (sentido del giro); y la medida de amplitud en que se va a hacer rotar una figura, el cual se determina mediante la intercepción del segmento que une un punto de la figura inicial al centro de rotación, con el segmento que une la imagen del punto al centro de rotación (magnitud de rotación).

Ilustración 2. *Representación de una rotación y sus elementos*



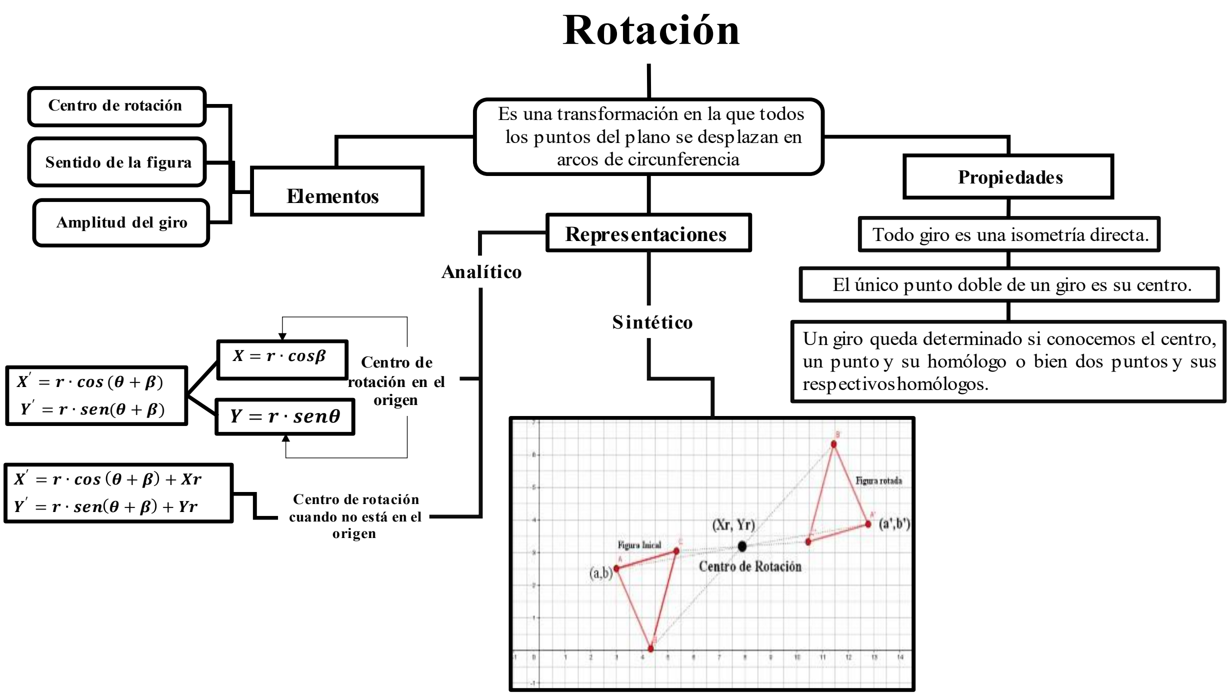
Fuente. Elaboración propia.

De ahí que, se destacan algunas condiciones que se deben cumplir al aplicar y reconocer la transformación de rotación:

- La figura final y la inicial deben tener la misma forma y tamaño, pero no su sentido.
- La distancia que hay entre el punto a rotar y el centro de rotación, es igual a la distancia que hay entre el punto rotado y el centro. De modo que, dicha distancia constituye el radio de la circunferencia.
- La intercepción del segmento que se forma entre el centro de rotación y un vértice de la figura inicial con la del segmento compuesto por el centro de rotación con el vértice homólogo en la figura final, determinan la magnitud o amplitud del ángulo de rotación.

Lo hasta aquí mencionado, vislumbra un cumulo de propiedades y elementos que se deben considerar y cumplir para dar cuenta de una rotación, lo cual se sintetiza en el siguiente diagrama:

Diagrama 4. *Síntesis de la construcción conceptual de la transformación de rotación*



Fuente. Elaboración propia.

2.2.2.3 Simetrías.

Las simetrías son un tipo de transformaciones en el plano, que al aplicarse sobre una figura geométrica esta produce un efecto igual al del espejo respecto a una recta o una figura invertida respecto a un punto. De esta manera, se reconoce la simetría se clasifica en axial y central, las cuales se explicitan y describen a continuación:

2.2.2.3.1 *Simetría axial*.

La simetría axial es un movimiento rígido en el plano que se hace con respecto a una recta llamada eje de simetría. Es decir, que esta transformación describe el reflejo de figura a partir de un eje simétrico, el cual, es la mediatriz de cada uno de los segmentos determinado por cada punto del objeto inicial y su imagen.

Definición 4: la simetría axial de un punto P en R^2 con respecto a una recta l, mediante la función l: $R^2 \rightarrow R^2$ tal que (P) = P′ sí y solo si la recta l es mediatriz del segmento$\overline{PP'}$; es decir que $\overline{PP'} \perp l$ y la distancia de P a l es igual a la distancia de l a P', para todo P que pertenece a R^2.

Definición 5: Sea la recta l el eje de la simetría axial en la que $ax + bx + c = 0$ es la ecuación de l y sean los puntos P y su imagen P', se verifica que si P pertenece al eje de simetría l se tiene que $(P) = P'$. Mientras que, si P no pertenece al eje de simetría l se tiene que l es la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$.

Demostración 3: sea $P(a, b)$ un vértice de una figura geométrica y $P'(a', b')$ su imagen resultante de la aplicación de una simetría axial a través del eje de simétrico $y = mx + c$. Por definición se sabe que, la recta que pasa por los puntos P y P' es perpendicular al eje de simetría, por lo cual, el producto de sus pendientes es -1. De modo que, considerando la ecuación punto-pendiente (expresión matemática que permite determinar la ecuación de una línea recta, dado su punto y pendiente: $y = m(x - x_1) + y_1$) se decreta la ecuación de la recta que pasa por P y P', la cual, si se calcula utilizando el punto P y el inverso multiplicativo negativo de la pendiente del eje de simetría se obtiene la ecuación $y = -\frac{1}{m}(x - a) + b$.

Por consiguiente, entendiendo que el punto de intersección $O(h, k)$ entre el eje de simetría y la recta perpendicular a dicho eje que pasa por P y P', es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, el cual, utilizando la ecuación de punto medio se determinan; $h = \frac{a+a\prime}{2}$ y $k = \frac{b+b\prime}{2}$. Así mismo, las rectas perpendiculares comparten un punto común-intersección (x, y), cuyas coordenadas se obtienen igualando sus ecuaciones, descritas como una función de la variable x como su equivalente descrito como una función de y.

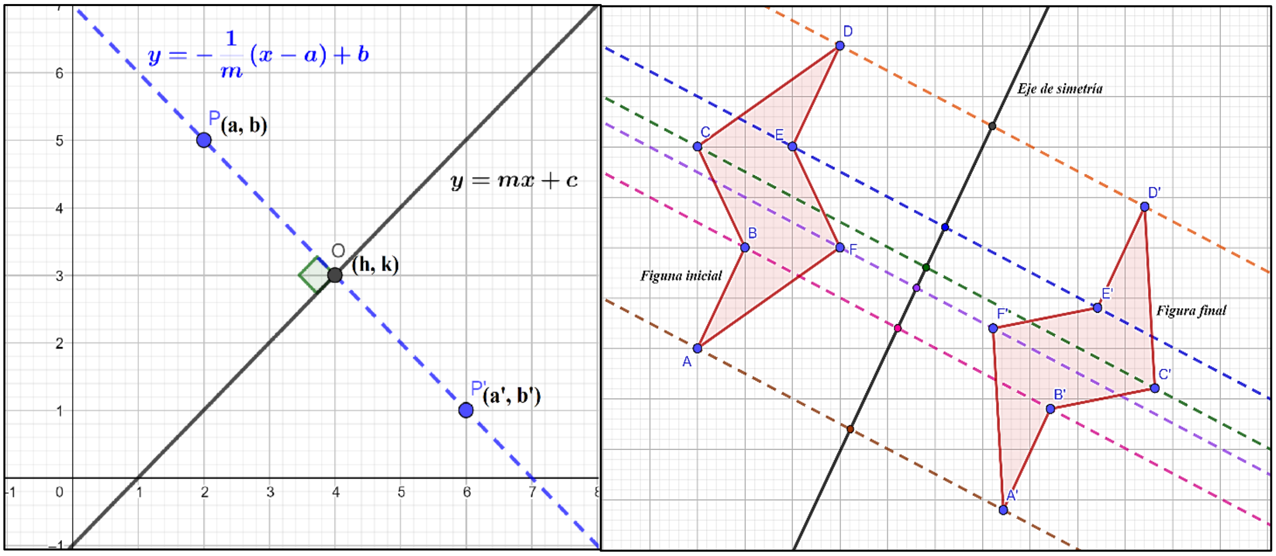
Así pues, la coordenada x del punto de intersección igualas la ecuación de las rectas $mx + c = -\frac{1}{m}(x-a) + b$ y siguiendo el procedimiento matemático se tiene $x = \frac{a+bm-cm}{m^2+1}$. De la misma manera, para obtener la coordenada y, es necesario, que en las dos ecuaciones x actúe como variable dependiente de y. Dicho procedimiento se suprime y se deja al lector la tarea de verificarlas ecuaciones: $x = \frac{y-c}{m}$ y $x = a + bm - ym$, las cuales, igualadas y siguiendo el procedimiento matemático se tiene $y = \frac{am+bm^2+c}{m^2+1}$.

Esto deja entrever, que tanto el punto de intersección (x, y) de las dos rectas como el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ con coordenadas (h, k) es el mismo. Por ello, igualando las expresiones definidas para dichos puntos de intersección de la siguiente manera $\frac{a+a\prime}{2} = \frac{a+bm-cm}{m^2+1}$ y $\frac{b+b\prime}{2} = \frac{am+bm^2+c}{m^2+1}$ y siguiendo los procedimientos matemáticos permite, obtener las coordenadas del punto P' en términos de las coordenadas del punto P y los datos del eje simétrico (pendiente m y punto de intersección c). Por lo tanto, las ecuaciones de transformación del sistema inicial al nuevo sistema de coordenadas están dadas por; $a' = \frac{a+2bm-2cm-am^2}{m^2+1}$ y $b' = \frac{2am+bm^2+2c-b}{m^2+1}$.

Cabe resaltar que, siendo m la pendiente del eje de simetría, esta será indefinida cuando el eje simétrico sea paralelo al eje y, por lo cual, las ecuaciones anteriores no serán definidas. De modo que, en este caso, para obtener las coordenadas del punto P' bastará con usar las expresiones de la *demostración 4*, empleando como centro de reflexión el punto $y = b$ y $x = h$.

En este orden de ideas, se identifican algunos elementos fundamentales que intervienen en una transformación de simetría axial, tales como; el eje de simetría, que actúa como la línea recta por la cual se genera el reflejo de una figura y, el sentido de la figura, la cual indica que la figura final se produce en sentido contrario u opuesta a la inicial.

Ilustración 3. *Representación de una simetría axial y sus elementos*



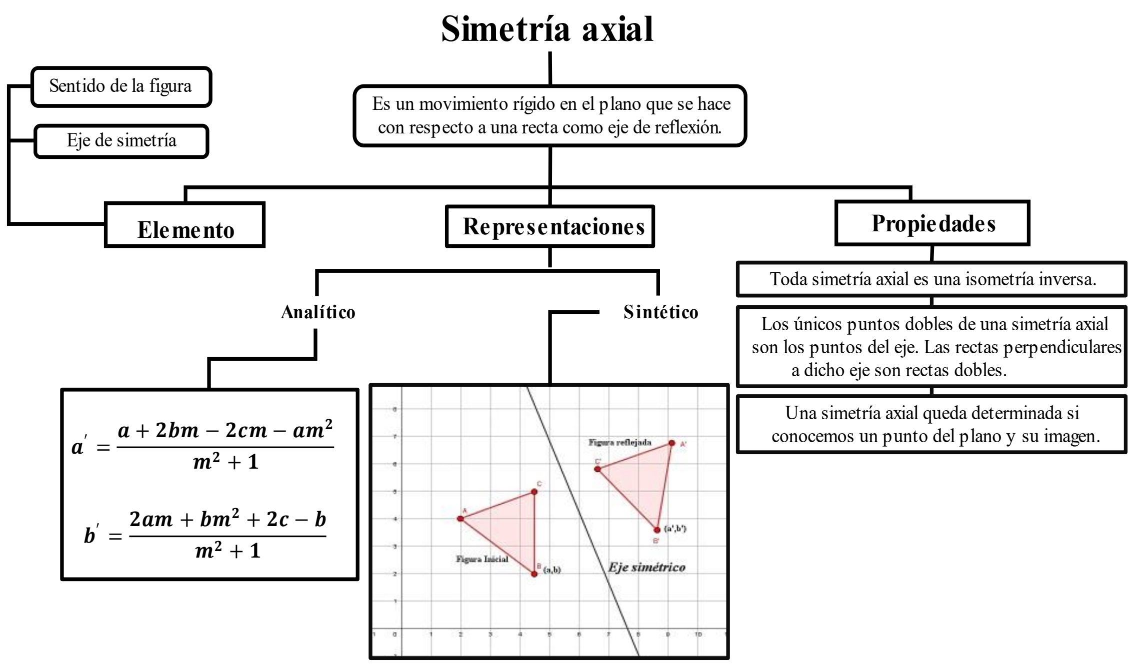
Fuente. Elaboración propia.

Del mismo modo, en lo que sigue se resaltan algunas condiciones que se deben considerar para reconocer y efectuar una simetría axial:

- La figura final y la inicial deben tener la misma forma y tamaño, pero con sentido contrario.
- El punto inicial y la figura final debe ser equidistante (están a la misma distancia) del eje de simetría.
- El segmento que une un punto con su imagen debe ser perpendicular al eje de simetría.
- Dos o más rectas que vinculan los vértices de la figura inicial con sus correspondientes en la figura final, al compararse estas deben ser paralelas.
- El eje de simetría debe pasar por los puntos medios de las rectas que vinculan los vértices de la figura inicial con sus correspondientes en la figura final.

Lo anteriormente expuesto, deja entrever un cumulo de propiedades y elementos que se deben considerar y cumplir para dar cuenta de una simetría axial, lo cual se resume en el siguiente diagrama:

Diagrama 5. *Síntesis de la construcción conceptual de la transformación de simetría axial*



Fuente. Elaboración propia.

2.2.2.3.2 *Simetría central.*

La simetría central es una transformación en el plano en la cual cada punto de la figura geométrica se relaciona con otro, de tal forma, que éstos equidisten de un punto llamado centro de simetría y estén a lados opuesto del mismo.

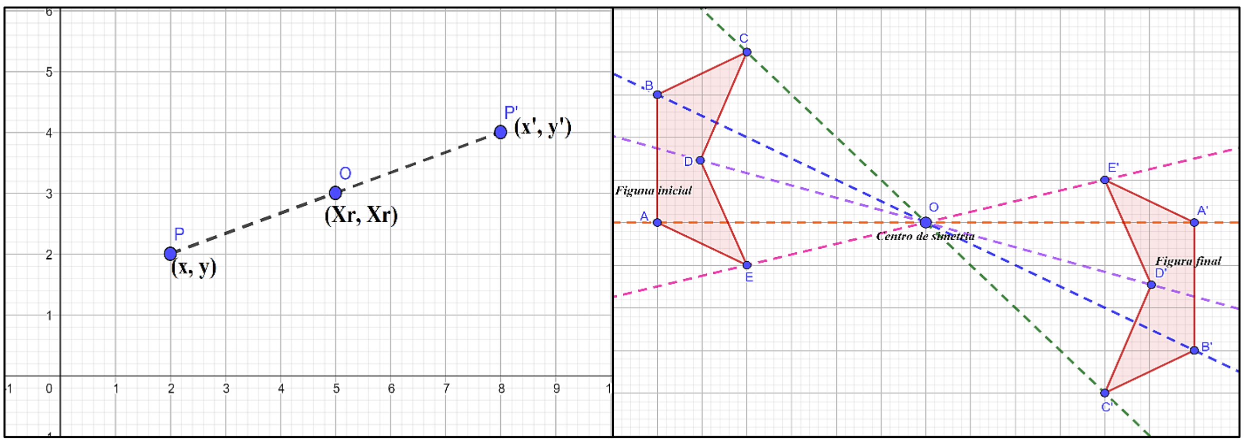
Definición 6: sean dados un punto O en el plano y el segmento $\overline{PP'}$, se cumple $\overline{OP} = \overline{OP'}$. Es decir, que el punto O es el punto medio de $\overline{PP'}$. Entonces, los puntos P *y* P' se encuentran relacionados mediante una reflexión central alrededor del punto O del cual equidistan.

Definición 7: la simetría central es una transformación que corresponde a un semigiro con centro en O y ángulo $\measuredangle\beta$. Es decir, es un caso especial de la transformación de rotación con un ángulo de giro de 180º.

Demostración 4: sea $P(x, y)$ el vértice una figura geométrica, si se le aplica una simetría central el vértice la figura resultante será $'(x', y')$. Dado que P y P' equidistan del centro de simetría, se tiene que el centro simétrico $O(x_r, y_r)$ es el punto medio de $\overline{PP'}$; $x_r = \frac{x+x\prime}{2} \wedge y_r = \frac{y+y\prime}{2}$, despejando obtenemos las ecuaciones que permiten encontrar las coordenadas del punto $P'(x', y')$; $x' = 2x_r - x \wedge y' = 2y_r - y$.

En este sentido, se distinguen algunas propiedades y elementos centrales para llevar a cabo la transformación de simetría central, tales como: el punto alrededor del cual se produce el movimiento (centro de simetría), la orientación del movimiento que se da a partir de un ángulo de 180° respecto al centro de rotación y a la figura inicial, y, el sentido de la figura en la que los vértices de la figura inicial se invierten en la figura final después del movimiento.

Ilustración 4. *Representación de la simetría central y sus elementos*



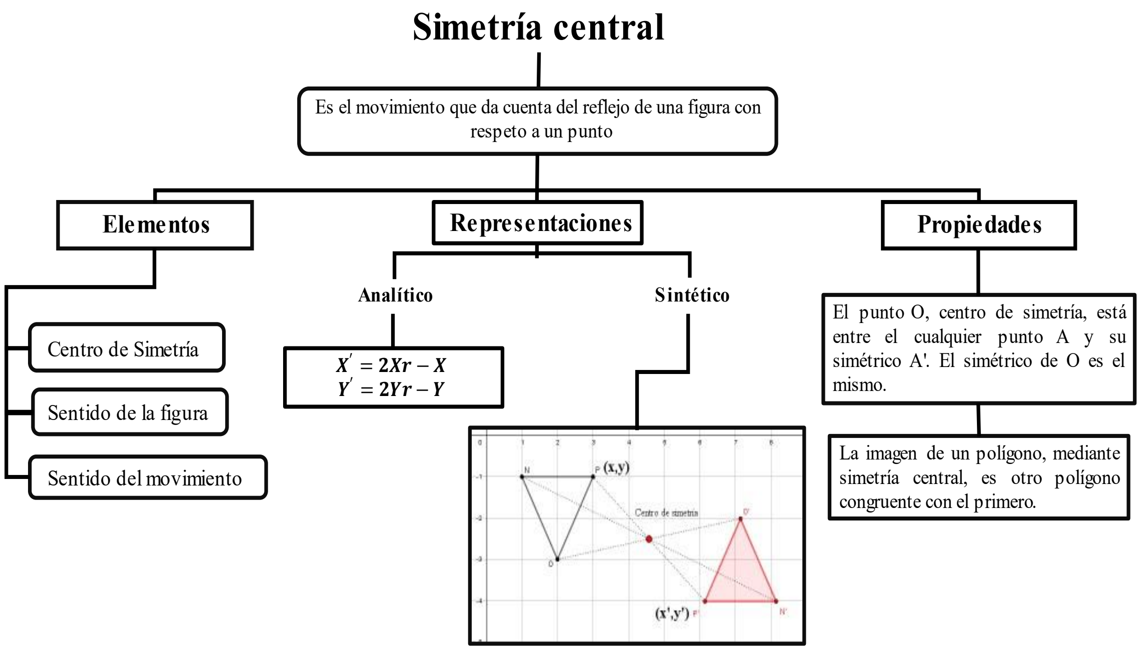
Fuente. Elaboración propia.

Así mismo, se subraya a continuación, algunas condiciones fundamentales que se deben tener en cuenta para aplicar y reconocer una transformación de simetría central:

- La figura final y la inicial deben tener la misma forma y tamaño, pero sentido invertido.
- Los vértices de la figura inicial con sus correspondiente en la figura final y el centro de simetría son colineales (pertenecen a la misma recta).
- Los vértices de la figura inicial con sus correspondiente en la figura final son equidistantes (están a igual distancia) del centro de simetría.
- Todas las líneas que conectan los vértices de la figura inicial con sus correspondiente en la figura final se intercepten en el punto llamado centro de simetría.

Lo anterior, explicita un conjunto de propiedades y elementos que se deben considerar y cumplir para dar cuenta de una simetría central, lo cual se resume en el siguiente diagrama:

Diagrama 6. *Síntesis de la construcción conceptual de la transformación de simetría central.*



Fuente. Elaboración propia.

2.2.3 Transformaciones isomórficas

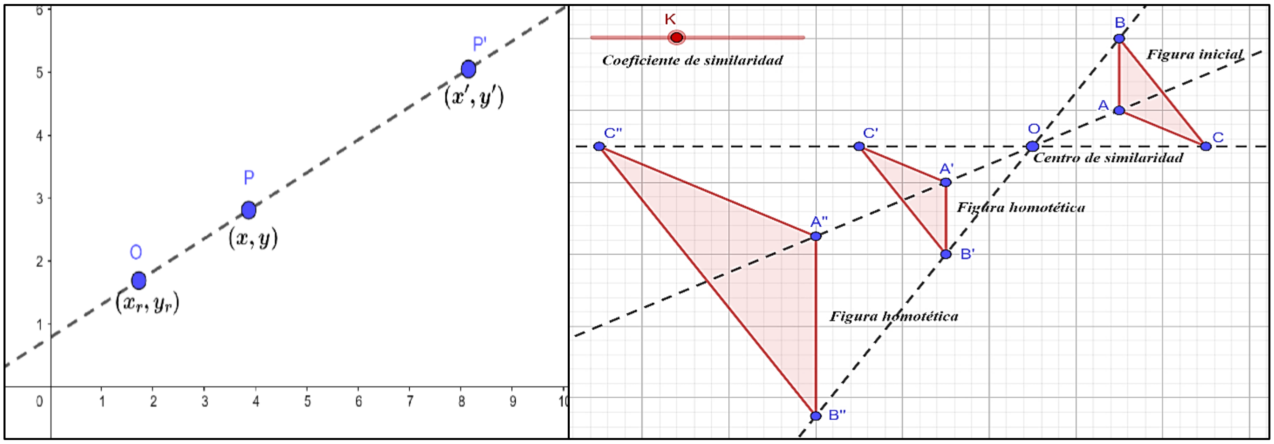
Es un tipo de transformación en el que se conserva la forma de la figura a la que se aplica la transformación, pero no necesariamente sus medidas. En estas transformaciones, se destaca la homotecia, dado que, existe una proporcionalidad entre las medidas de las figuras involucradas. De esta manera, en lo que sigue se aborda dicho concepto a partir de las ideas de Jaime (1993), Barreto (2010) y Julio (2014), destacando algunas características y propiedades que las identifican:

2.2.3.1 La homotecia.

La homotecia es una transformación isomórfica en la que sólo se conserva la forma más no siempre el tamaño de la figura; es decir, en ellas los ángulos de la figura inicial y de la transformada son congruentes y las longitudes proporcionales. De modo que, la homotecia es una transformación mediante la cual a un punto cualquiera P, le corresponde otro y sólo P' tal que la recta que une el punto P' con el punto P pasa obligatoriamente por un punto fijo O, que se llama centro de similaridad. Por consiguiente, $(P') = k(P)$ donde k es un número fijo denotado como razón de homotecia o coeficiente de similaridad, cuya variación de la transformación de homotecia depende del valor que tome k. De modo que:

- Si $k = 1$, la figura homotética coincide con la original (función identidad).
- Sí $k \neq 1$, solamente el centro O permanece invariante, es decir solamente el punto O es fijo.
- Si $k = -1$, la homotecia coincide con una simetría central o una rotación con un ángulo de 180º (π radianes).
- Si $|k| > 1$, el tamaño de la figura resultante se amplía con respecto a la figura inicial, por lo que la homotecia es una dilatación.
- Si $|k| < 1$, el tamaño de la figura resultante se reduce con respecto a la figura inicial, por lo que la homotecia es una contracción.
- Si $k < 0$, la transformación es una composición de una simetría centra con homotecia sin inversión.
- Si $-1 < k < 0$, el tamaño de la figura transformada será menor y estará rotada con respecto a la original.
- Si $k < -1$, el tamaño de la figura transformada será mayor y estará rotada con respecto a la original.

Ilustración 5. *Representación de una homotecia*



Fuente. Elaboración propia.

Definición 8: dado un centro *O* y razón *k*, se llama homotecia a la transformación que hace corresponder a un punto *P* y otro *P*', alineado con *P* y *O*, tal que $\overline{OP'} = k \cdot \overline{OP}$, en la que *O* es el centro de la homotecia y *k* es el coeficiente de similaridad que multiplica todas las distancias por un mismo factor que se denomina razón de la homotecia.

Demostración 5: sea $P(x, y)$ un vértice de una figura inicial y $P'(x', y')$ el de la figura homotética con centro en $O(x_r, y_r)$ y razón *k*, por definición se sabe que $\overline{OP'} = k \cdot \overline{OP}$, entonces;

$$\sqrt{(x_r - x')^2 + (y_r - y')^2} = k\sqrt{(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x_r - x')^2 + (y_r - y')^2}\right)^2 = \left(k\sqrt{(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2}\right)^2$$

$$(x_r - x')^2 + (y_r - y')^2 = k^2[(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2]\ (1)$$

Ahora bien, considerando que tanto el punto *P* como *P'* tienen la misma inclinación respecto al centro *O*, significa que pasan por la misma recta, por lo que sus pendientes (*m*) también son iguales: $m_{\overline{OP}} = m_{\overline{OP'}} \rightarrow \frac{y_r - y}{x_r - x} = \frac{y_r - y'}{x_r - x'} \rightarrow y_r - y' = \frac{(y_r - y)(x_r - x')}{x_r - x}(2)$. De esta manera, sustituyendo la ecuación (1) en (2) se tiene:

$$(x_r - x')^2 + \left(\frac{(y_r - y)(x_r - x')}{x_r - x}\right)^2 = k^2[(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2]$$

$$(x_r - x')^2 + \frac{(y_r - y)^2(x_r - x')^2}{(x_r - x)^2} = k^2[(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2]$$

$$\frac{(x_r - x)^2(x_r - x')^2 + (y_r - y)^2(x_r - x')^2}{(x_r - x)^2} = k^2[(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2]$$

$$(x_r - x')^2[(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2] = k^2[(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2](x_r - x)^2$$

$$(x_r - x')^2 = k^2(x_r - x)^2 \ \rightarrow \ \sqrt{(x_r - x')^2} = \sqrt{k^2(x_r - x)^2}$$

$$x_r - x' = k(x_r - x) \ \leftrightarrow \ -(x_r - x') = -k(x_r - x)$$

$$-x_r + x' = -kx_r + kx \ \rightarrow \boldsymbol{x' = kx - kx_r + x_r}$$

De esta manera, se determinan las ecuaciones o expresiones algebraicas que permiten determinar las coordenadas del punto $P'(x', y')$, en tanto que, $x' = kx - kx_r + x_r$ y análogamente, $\boldsymbol{y' = ky - ky_r + y_r}$**.**

Por consiguiente, se reconocen los siguientes cuatro elementos esenciales que intervienen en una homotecia, así como se muestra en la ilustración cinco:

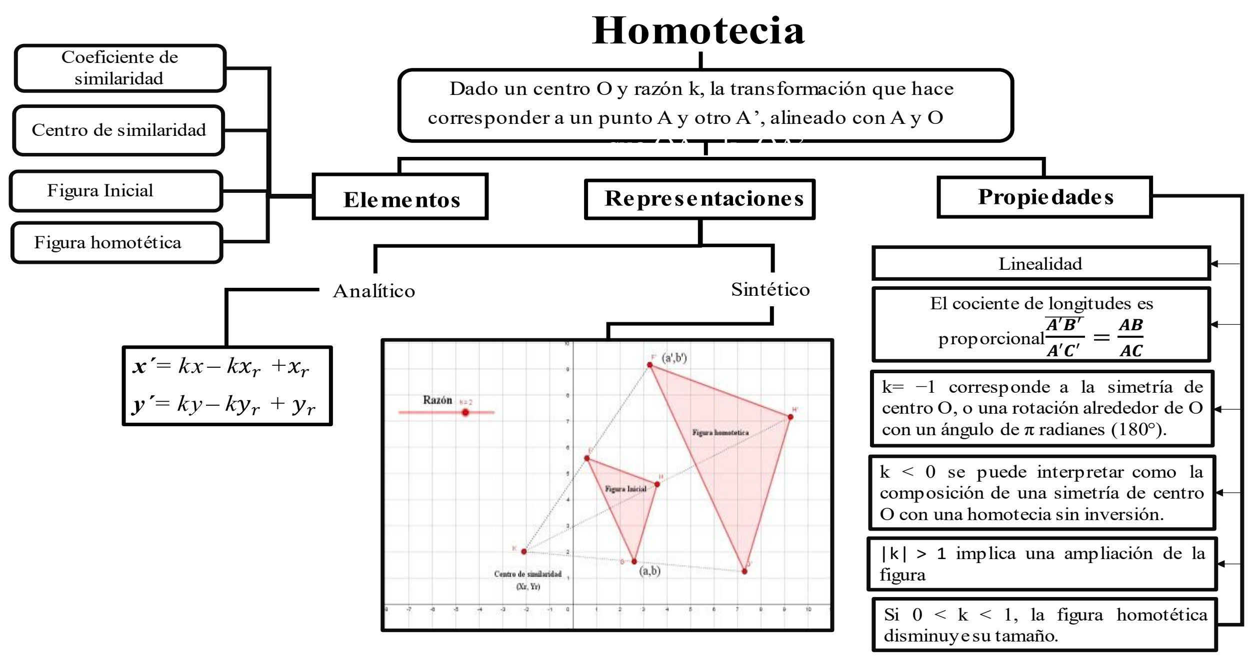
- *Centro de similaridad:* es el punto homotético de donde se desprende la proyección de las figuras, de tal forma que, el tamaño de cada figura es proporcional la distancia que hay de estas al centro.
- *Coeficiente de similaridad o razón de homotecia*: Es la relación que se presenta entre las distancias que hay desde el centro de similaridad hasta un punto de la figura inicial, y la distancia del centro de similaridad hasta el punto homotético correspondiente: $k = \frac{\overline{OP\prime}}{\overline{OP}}$.
- *Figura inicial*: Es la figura a la cual se le realizará la homotecia.
- *Figura homotética*: es la figura que resultad después de aplicar la homotecia a la figura inicial.

De manera similar, se destacan algunas condiciones que se deben cumplir al aplicar una transformación de homotecia y así mismo, poder reconocer la misma:

- La figura inicial y la figura homotética deben tener la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño.
- La figura inicial y la figura homotética debe ser semejantes; dado que, sus lados homólogos son proporcionales y sus ángulos correspondientes son congruentes.
- Los lados homólogos o correspondientes de las figuras deben ser paralelos.
- Los vértices de la figura inicial con su correspondiente en la figura homotética deben estar alineados con el centro de similaridad.
- La distancia del centro de similaridad a cada vértice de la figura resultante debe ser igual al producto entre el coeficiente de similaridad y la distancia que hay entre cada vértice correspondiente de la figura inicial.
- Todas las líneas rectas que unen a cada vértice de la figura inicial con su correspondiente en la figura homotética deben interceptarse en el centro de similaridad.

Lo anterior, explicita un conjunto de propiedades, elementos y condiciones que se deben cumplir para dar cuenta de una transformación de homotecia, las cuales se sintetizan en el siguiente diagrama:

Diagrama 7. *Síntesis de la construcción conceptual de la transformación de homotecia*



Fuente. Elaboración propia.

2.2.4 Algunos teoremas relacionados con las transformaciones geométricas

Considerando los aspectos descriptos anteriormente, en lo que sigue se detallan algunos teoremas básicos de la traslación, rotación, simetrías (axial y central) y homotecia, así como también, las relaciones entre estas, visto desde las ideas de Jaime (1993) y Julio (2014):

- La compuesta de dos o más traslaciones con vectores diferentes es una traslación, cuyo vector es la suma de los anteriores.
- La composición de dos simetrías centrales con distinto centro es una traslación.
- La composición de dos rotaciones con centro común es una rotación con el mismo centro y la amplitud angular será la suma de los ángulos con qué se hizo cada rotación si y solo si el sentido del giro es el mismo, de lo contrario, la amplitud angular será la sustracción de los ángulos con qué se hizo cada rotación.
- La composición de dos simetrías axiales por medio de dos ejes simétricos perpendiculares entre sí es una simetría central con centro en el punto de intercepción de las rectas.

- La composición de dos simetrías axiales por medio de dos ejes simétricos paralelos es una traslación, cuyo vector es perpendicular a las rectas y su medida es dos veces la distancia entre estas.
- La composición de dos simetrías axiales con ejes secantes es una rotación cuyo centro queda determinado por la intersección de los dos ejes y con un ángulo igual al doble de la medida que el ángulo que forman entre ellos.
- La composición de dos homotecias con distinto centro es una homotecia.
- Sean dos homotecias con el mismo centro y razones diferentes, su compuesta es otra homotecia con el mismo centro y la razón de homotecia es el producto de las dos razones diferentes.

Lo anterior, pone de manifiesto un cúmulo de procesos que permiten conjeturar los resultados de aplicar diferentes transformaciones geométricas a un par o conjunto de figuras, lo cual poniendo en juego los diversos conceptos (semejanza, proporcionalidad, función lineal, paralelismo, perpendicularidad, invarianza, perímetro, área, colinealidad, entre otros) con los que guarda estrecha relación el objeto de conocimiento, posibilita no solo darle sentido, sino también, verificar y demostrar dicha conjetura, desde articulación los enfoque sintético y analítico de la geometría.

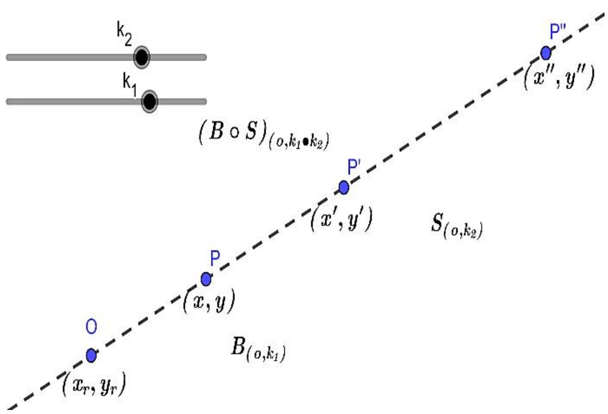
Por ende, establecer diversas relaciones entre las transformaciones geométricas propicia que, en su abordaje se comprendan tanto las propiedades que permanecen invariantes en una figura, como las características y elementos propios de cada transformación isometría e isomórfica. A modo de ejemplo, se propone a continuación, el abordaje desde la complementariedad de los enfoque sintético y analítico el desarrollo yo verificación de dos teoremas, para de esta forma dar cuenta de lo que antes se ha explicitado:

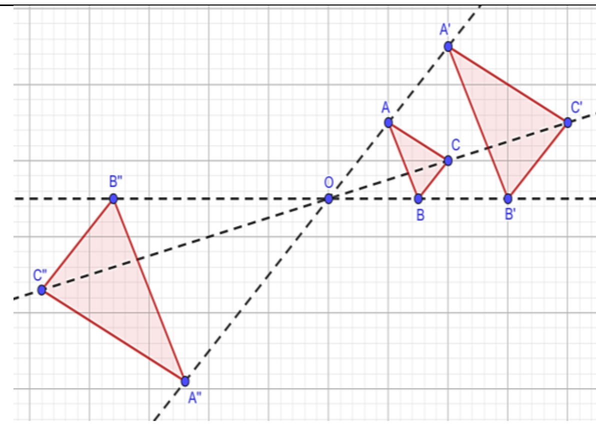
Tabla 2. *Ejemplos de verificación de teoremas desde los enfoque sintético y analítico*

Teorema: sean dos homotecias con el mismo centro $B_{(O,k_1)}, S_{(O,k_2)}$ y razones $k_1\ y\ k_2$. Su compuesta es otra homotecia $N_{(O,k_1 \cdot k_2)}$, con el mismo centro y razón $k_1 \cdot k_2$, es decir $B_{(O,k_1)} \circ S_{(O,k_2)} = N_{(O,k_1 \cdot k_2)}$.

Abordaje analítico: Sea P un punto en el plano y la homotecia $B_{(O,k_1)}(P) = P'$, tal que $\frac{\overline{OP\prime}}{\overline{OP}} = k_1$ (1). Sea la homotecia $S_{(O,k_2)}(P') = P''$, tal que $\frac{\overline{OP\prime\prime}}{\overline{OP\prime}} = k_2$ (2). Entonces, despejando $\overline{OP'}$ en (1) y sustituyendo en (2) se obtiene $\frac{\overline{OP\prime\prime}}{k_1 \cdot \overline{OP}} = k_2$, de donde $\frac{\overline{OP\prime\prime}}{k_1 \overline{OP}} = k_1 \cdot k_2$. Por tanto, se determina la homotecia $N_{(O,k_1 \cdot k_2)}$ que verifica $B_{(O,k_1)} \circ S_{(O,k_2)} = N_{(O,k_1 \cdot k_2)}$.

Abordaje sintético:



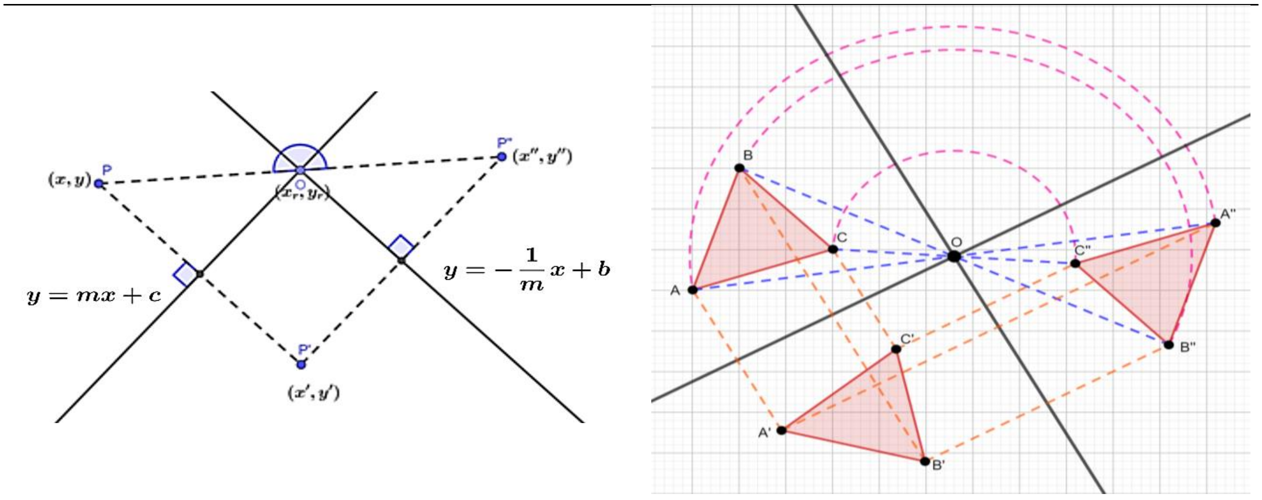


Teorema: la composición de dos simetrías axiales por medio de dos ejes simétricos perpendiculares entre sí es una simetría central con centro en el punto de intercepción de las rectas.

Abordaje analítico: la reflexión axial aplicada a un punto *P* a través de eje simétrico $y = mx + c$ se forma la figura simétrica *P'*, cuyas coordenadas se determina empleando las expresiones algebraicas, $x' = \frac{x+2ym-2cm-xm^2}{m^2+1}$ y, $y' = \frac{2xm+ym^2+2c-y}{m^2+1}$. Por consiguiente, se aplica una reflexión axial al punto *P'* con eje simétrico perpendicular al anterior $y = -\frac{1}{m}x + b$ y se obtiene *P''* coordenadas empleando las expresiones algebraicas son: $x'' = \frac{x'(m^2-1)-2m(y'+b)}{m^2+1}$ y $y'' = \frac{(2b-y')m^2-2x'm+y'}{m^2+1}$. De esta manera, se puede llegar de la figura inicial (P) a la figura final (P'') con la sola aplicación de las ultimas expresiones algebraicas.

De igual forma, se verifica que se puede llegar de P a P'' por medio de una reflexión central con centro en $O(x_r, y_r)$, el cual es el punto de intersección entre los ejes simétricos, con coordenadas $x_r = \frac{(b-c)m}{m^2+1}$ y $y_r = \frac{bm^2+c}{m^2+1}$. En este sentido, de la ecuación de simetría central se determinan las coordenadas del punto *P''* $\mathrm{X}'' = 2\mathrm{Xr} - \mathrm{x}$ y $\mathrm{Y}'' = 2Yr - y$, las cuales son, $x'' = \frac{2m(b-c)-x(m^2+1)}{m^2+1}$ y $y'' = \frac{2(bm^2+c)-y(m^2+1)}{m^2+1}$. Para la verificación o prueba de lo anterior, se toman los datos iniciales (con valores numéricos) y se procede aplicar los algoritmos indicados.

Abordaje sintético:



Fuente. Elaboración propia.

2.3 Perspectiva didáctica

Considerando la problemática de la indagación, se adopta la teoría Modos de Pensamiento propuesta por Sierpinska (2000), como fundamento didáctico que no solo permite describir, interpretar y caracterizar los Modos de Pensar que priorizan los estudiantes en el abordaje de las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analito de la geometría, sino que también actúan como herramienta heurística en el desarrollo de secuencias de tareas; concebidas desde la perspectiva de Gómez, Mora y Velasco (2018).

De igual forma, se presentan algunas dificultades que han sido identificadas y reportadas por diversas investigaciones en educación matemática referente al abordaje de cada transformación geométrica, las cuales proporcionan una mirada general de los aspectos que se deben atender y considerar en la secuencia de tareas.

2.3.1 Los Modos de Pensamiento

Los Modos de Pensamiento son un constructo teórico de la Didáctica de las Matemáticas formulado por Sierpinska (2000), quien, a partir de un estudio enfocado en los procesos de razonamiento en conceptos del Álgebra Lineal proporciona los elementos que se requieren para comprender un determinado objeto matemático, de tal forma que permitan la superación del obstáculo epistemológico producido al confrontar el pensamiento práctico con el teórico en el abordaje y comprensión de objetos matemáticos.

De modo que, el pensamiento práctico, es referido a la acción inmediata que se produce entre el sujeto y el objeto, haciendo énfasis en la percepción espacial; mientras que, el pensamiento teórico, hace alusión a la manera de reflexionar sobre la forma en que el sujeto acede al objeto, considerando los medios semióticos de representación y la producción de sistemas conceptuales, con los cuales se relaciona el objeto matemático. Es decir, que "el pensamiento práctico es la base en contra de la cual el pensamiento teórico adquiere razón de ser y sin la cual pierde su significado epistemológico" (Sierpinska, 2002, p.14).

En este sentido, las formas prácticas y teóricas de pensar constituyen la base para los Modos Sintético y Analítico, que de acuerdo con Sierpinska (2002) se diferencian en que, "en el primero, los objetos son descritos de manera natural, representados con la figura correspondiente sin necesidad de definir las propiedades, mientras que, en el segundo, los objetos son construidos por la definición de sus propiedades, relaciones numéricas o simbólicas" (p. 233). Esto significa, que los enfoques sintético y analítico son modos de pensamiento en la que su complementariedad favorece la compresión de un objeto matemático.

Dado que, el enfoque sintético utiliza los métodos de Euclides, Apolonio y sus sucesores (hasta Descartes) para abordar problemas mediante representaciones gráficas construibles geométricamente con regla y compás; para describir algunos objetos matemáticos se requiere del enfoque analítico que teniendo como referencia el método de coordenadas y la utilización de herramientas del álgebra complementan su abordaje a treves de expresiones algebraicas. Ante esto, González (2007) expresan que:

> La fusión del Análisis Geométrico griego y la síntesis algebraica de Vieta, Fermat y Descartes dan luz la Geometría Analítica, una herramienta revolucionaria dotada

> del potencial de la mecánica algorítmica operatoria de cálculo, propia de las ecuaciones del Álgebra, que reemplaza la rigidez de las ingeniosas construcciones geométricas del Álgebra Geométrica de los griegos por sistemáticas operaciones algebraicas que permiten mediante un proceso analítico-sintético de resolución de problemas, no sólo reconstruir la Geometría clásica con más claridad, flexibilidad, operatividad y versatilidad, sino crear, además, una potente heurística geométrica, como poderoso instrumento de exploración e investigación. (p. 25)

De esta forma, considerando la complementariedad de estos enfoques geométricos, Sierpinska (2000) propone tres modos de pensamiento: el sintético-geométrico, el analítico-aritmético y el analítico-estructural, relacionados con el uso del lenguaje gráfico, algebraico y abstracto respectivamente.

El primero, permite describir directamente el objeto, mediante el uso de representaciones gráficas, en la que se evoca puntos, líneas, planos, figuras y cuerpos geométricos. Es decir, que en este modo el estudiante tiene su primer acercamiento al objeto matemático a través de una percepción visual, gráfica, concreta y de construcción;

El segundo, posibilita que los objetos matemáticos se describan mediante relaciones numéricas o/y ecuaciones algebraicas. Esto quiere decir, que en este modo de pensar los estudiantes consideran otros elementos (algebraicos y numéricos) que no son de tipo espacial para acceder a la comprensión del objeto matemático;

El tercero, admite que los objetos matemáticos sean representados a través de las propiedades y axiomas en los sistemas matemáticos que posee el objeto para acceder a su comprensión. Es decir, que este modo sintetiza los elementos algebraicos de las representaciones analíticas dentro de conjuntos estructurales que permiten generalizar los procesos de los modos anteriores mediante sistemas axiomáticos.

Lo anterior, deja entrever, que cada uno de estos modos de pensamiento constituyen y conducen a formas distintas de abordar y comprender un objeto matemático por parte de los aprendices, "aunque la coordinación y tránsito entre ellos, permite, por un lado, un pensamiento más versátil, y por otro, ver diferentes facetas del objeto matemático, ofreciendo diferentes aspectos según el registro donde se ubique" (Parraguez, 2012, p. 17).

De ahí que, la complementariedad de los enfoques sintético y analítico vistos como formas de pensar o abordar un objeto matemático enriquecen su aprendizaje y comprensión cuando se logra alcanzar la abstracción de este.

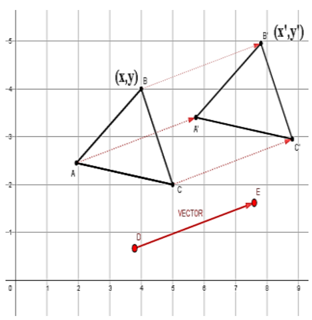
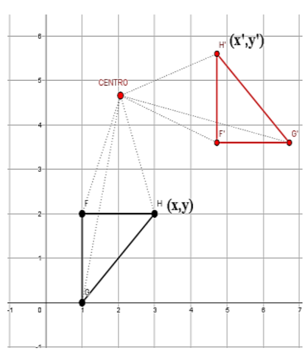
2.3.2 Modos de pensar las transformaciones geométricas

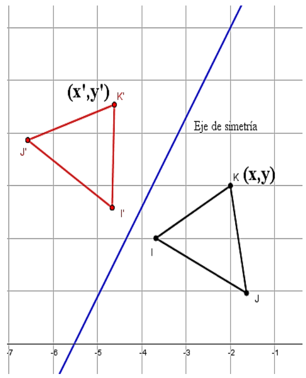
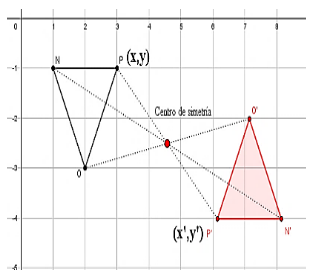
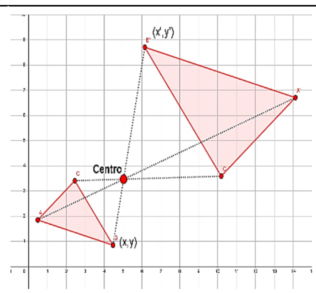
El abordaje de las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico, de acuerdo con Sierpinska (2000) permite que, en primer lugar, desde el modo sintético-geométrico el estudiante pueda reconocer y describir cada transformación a través de una representación geométrica; en segundo lugar, el estudiante en el modo analítico-aritmético establece relaciones operacionales y procedimentales con números que satisfacen las condiciones de un sistema de coordenadas mediante una representación algebraica; y por último, en el modo analítico-estructural el estudiante sintetiza los elementos algebraicos de las representaciones analíticas dentro de conjuntos estructurales matriciales que permiten generalizar los procesos de los modos anteriores mediante el estudio de las transformaciones compuestas.

En este sentido, los modos de pensar proporcionan al aprendiz, herramientas heurísticas para la interpretación de las situaciones de diferentes maneras dependiendo de la construcción cognitiva presente en ella, es decir, cada individuo encuentra útil uno u otro modo de pensar dependiendo de su propia formación y de los objetivos que esté buscando (Parraguez, 2012); destacando que las propiedades y/o elementos invariantes en el abordaje de cada transformación geométrica permitirá el tránsito de un modo de pensar a otro, constituyendo a la complementariedad entre lo sintético y lo analítico.

De esta manera, considerando la problemática de estudio y los aspectos histórico-epistemológicos explicitados en la perspectiva matemática, se plantea la caracterización de las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoque sintético y analítico, entendidos como modos de pensar o abordar este objeto geométrico.

Tabla 3.*Caracterización de los modos de pensar las transformaciones geométricas*

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS	CARACTERIZACIÓN DE LOS MODOS DE PENSAR LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS		
	Sintético-Geométrico	**Analítico-Aritmético**	**Analítico-Estructural**
Traslación		Dado un vector $\vec{v} = (x_r, y_r)$, se le llama traslación de $\vec{v}$ a la transformación geométrica que asocia a cada punto $P\ (x, y)$ del plano otro punto $P'(x', y') = P + \vec{v}$. De tal forma que: $P' = (x + x_r, y + y_r)$	La traslación es una operación isométrica que se efectúa matricialmente con la ecuación: $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_r & 1 & 0 \\ y_r & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ Donde, $P\ (x, y)$ representa a la figura inicial, $P'(x', y')$ figura trasladada y $\vec{v} = (x_r, y_r)$ el vector de traslación.
Rotación		Dado un punto C del plano y un ángulo $\alpha \in R$, se llama giro de centro C y amplitud α, y se denota por $G\ (C, \alpha)$, a la transformación que asocia a cada punto P del plano otro punto P ‘G $(C, \alpha)\ (P)$ de forma que se verifiquen las dos condiciones siguientes: $X' = r \cdot cos\ (\theta + \beta)$ $Y' = r \cdot sen(\theta + \beta)$	La ecuación matricial de un giro de eje O y ángulo α, cuando tomamos el sentido creciente de dicho eje, es: $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ M & Cos\alpha & -sen\alpha \\ N & sen\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$

Simetría axial		Dada una recta ***l*** en el plano, se llama simetría respecto del eje ***l*** a la transformación geométrica que asocia a cada punto *P* del plano otro punto *P'* (x', y') de forma que la recta *l* es la mediatriz del segmento *PP* '. Donde: $X' = \frac{x+2ym-2bm-xm^2}{m^2+1}$ $\mathrm{Y}' = \frac{2\mathrm{xm}+\mathrm{ym}^2+2\mathrm{b}-\mathrm{y}}{\mathrm{m}^2+1}$	La ecuación matricial de la simetría axial cuyo eje ***l*** forma un ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ con el semieje positivo OX, se tiene que: $\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\M & Cos2\alpha & sen2\alpha\\N & sen2\alpha & -cos2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$ Dónde los parámetros *M* y *N* se obtienen imponiendo que un punto cualquiera del eje, *A* $(a_1,\ a_2)$, sea un punto doble: $\begin{pmatrix}1\\a_1\\a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\M & Cos2\alpha & sen2\alpha\\N & sen2\alpha & -cos2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$
Simetría central		Dados dos puntos O y P en el espacio, y un tercero P' de modo que se cumple que $\overline{OA} = \overline{OA'}$, donde O es invariante y punto medio de, diremos entonces que los puntos P y P' se encuentran relacionados mediante una simetría central o alrededor del punto O, de forma que: $P' = (2x_r - x, 2y_r - y)$	La ecuación matricial de la simetría central de centro $C(x_r, y_r)$ $\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\x_r & Cos2\alpha & -sen2\alpha\\y_r & sen2\alpha & cos2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$
Homotecia		Se llama homotecia de centro *C* y razón k, y se denota por $H_{(C\ ,k),}$a la transformación geométrica que asocia a cada punto *P* del plano otro punto *P* '= $H_{(C\ ,k),}(P)$ de forma que: $x' = kx - ka + a$ $y' = ky - kb + b$	La ecuación matricial de la homotecia de centro *C* y razón *k* e, dónde los parámetros *M* y *N* se obtienen imponiendo que el centro $C\ (a, b)$ de la homotecia sea un punto doble: $\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\a & k & 0\\b & 0 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$

Fuente. Elaboración propia.

Lo anterior, refleja que la caracterización de los Modos de Pensamiento para las transformaciones geométricas proporciona elementos conceptuales y procedimentales para el diseño de secuencias de tareas que permitan a los estudiantes construir las diferentes representaciones del objeto matemático y favorecer su abordaje desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico.

En este sentido, es importante aclarar que para efectos de esta investigación solo se consideran los modos sintético-geométrico y analítico-aritmético, dejando de lado el modo analítico-estructural, pues, el interés de la investigación versa en torno a caracterizar el abordaje de las transformaciones geométricas de los estudiantes de segundo semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle sede pacifico desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico.

Además, de acuerdo a la ubicación semestral (segundo semestre), se considera que los estudiantes aún no han desarrollado el conocimiento matemático especializado necesario que se requiere para aproximarlos al abordaje de las transformaciones geométricas en su modo analito-estructural, el cual permite entre otras cosas, como se ha mencionado antes, conjeturar teoremas o métodos generalizables para resolver diferentes clases de problemas relacionados con las transformaciones geométricas en el espacio y con diferentes sistemas axiomáticos (Geometría Euclidiana/Geometría no-euclidiana).

2.3.3 Tratamiento didáctico de las transformaciones geométricas

El estudio de las transformaciones geométricas es importante para el desarrollo del pensamiento matemático, y por ello, esta presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en los diferentes niveles de educación. Además, ha sido abordada por diversos investigadores en el campo de la educación matemática centrando la atención desde el enfoque sintético con algunas yuxtaposiciones en el enfoque analítico.

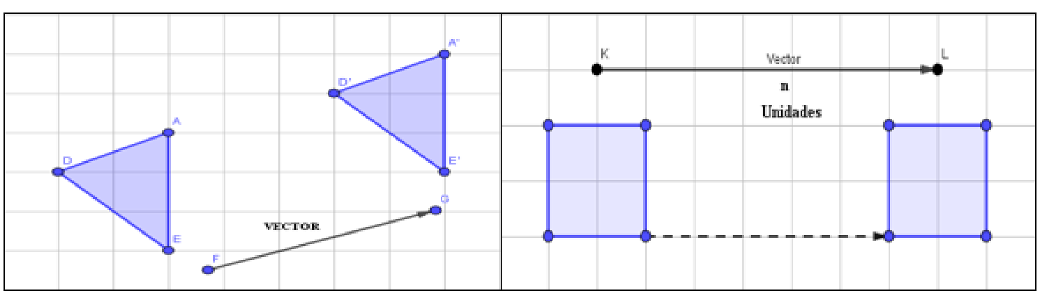
Entre estas investigaciones, se resaltan las de Jaime y Gutiérrez (1996); Álvarez y Fernández (2009); Montes (2012); Atehortúa, Gallego y Muñoz (2012); Borja (2012); Julio (2014); Loboa y Larrahondo (2016); Castro, Obregón y Jaramillo (2019), entre otras, que, de una forma u otra, brindan elementos conceptuales, procedimentales y metodológicos que permitan la comprensión y abordaje de las transformaciones isométricas (traslación, rotación y simetría) e isomórficas (homotecia). De igual forma, ponen de manifiesto conjunto de dificultades y fortalezas que presentan los estudiantes en el abordaje del objeto matemático en mención.

En este sentido, a continuación, se describen algunas de estas dificultades y fortalezas en relación con cada transformación geométrica, las cuales proporcionan insumos relevantes para el diseño de una secuencia de tareas.

En primer lugar, en lo que respecta al abordaje de la transformación de traslación, se reconoce que los estudiantes presentan dificultades en:

- Establecer que la imagen conserva la forma y tamaño de la figura inicial;
- Utilizar expresiones algebraicas para determinar la figura trasladada;
- Predecir la figura trasladada a partir de su magnitud, sentido y dirección;
- Determinar usando expresiones algebraicas el vector de traslación teniendo en cuenta el objeto y su imagen;
- Asociar el vector con la distancia que haya entre cada vértice de la figura inicial y su imagen;
- Asociar la dirección del movimiento (vertical, horizontal, inclinado) con el vector de traslación.

Ilustración 6. *Dificultad para producir una traslación a partir del vector*



Fuente. Elaboración propia.

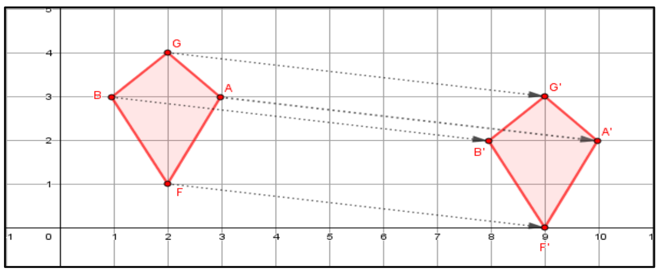
Nótese en la ilustración anterior, que a pesar de que la figura traslada conserva su forma y tamaño, la traslación de esta no se asocia a la magnitud, dirección y sentido que indica el vector.

Es decir, que la distancia que hay entre cada vértice de la figura inicial y su imagen no es congruente con el vector de traslación.

De forma similar, se identifica que los estudiantes en el abordaje de la traslación tienen fortalezas en:

- Comparar una figura respecto de su imagen en términos de tamaño, forma y posición;
- Reconocer los elementos que intervienen en una traslación: sentido, dirección y magnitud.

Ilustración 7. *Fortalezas de los estudiantes para reconocer los elementos de una traslación*



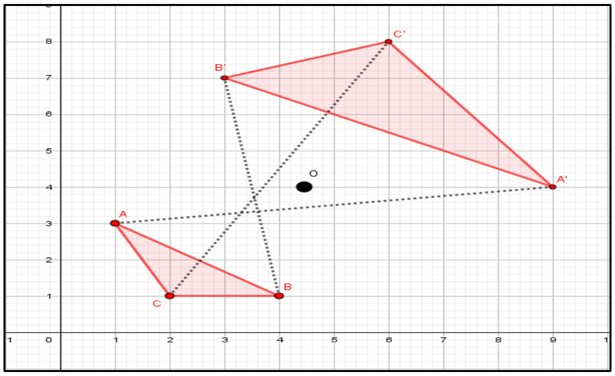
Fuente. Elaboración propia

La ilustración anterior, refleja la forma en que los estudiantes reconocen la trayectoria del desplazamiento, la cantidad de unidades de medidas a la que fue traslada la figura y la posición final de esta, conservando su forma y tamaño.

En segundo lugar, en lo que refiere al abordaje de la transformación de simetría central se resalta que los estudiantes presentan dificultades en:

- Describir características del cambio en las figuras;
- Establecer la equidistancia existente entre los vértices de la figura inicial y sus correspondiente a la figura final con el centro de simetría;
- Reconocer las líneas que conectan los vértices de la figura inicial y su correspondiente en la figura final se interceptan en el centro de simetría;
- Producir la simetría central de una figura o segmento a partir de su centro de simetría.

Ilustración 8. *Dificultad para efectuar una simetría central*



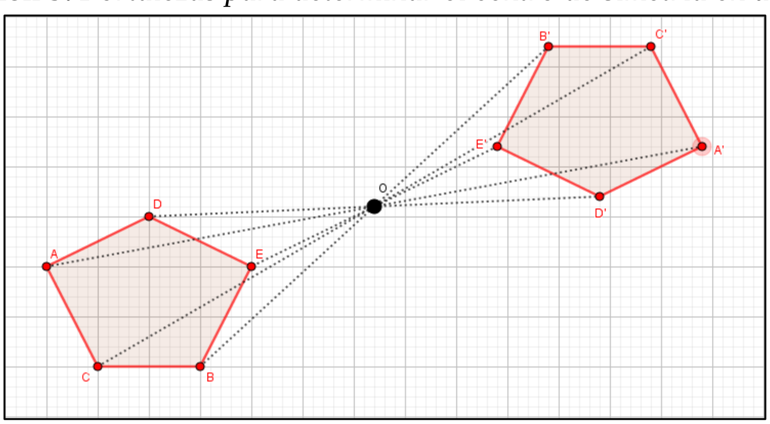
Fuente. Elaboración propia.

Como se puede apreciar en la imagen anterior, al efectuar la simétrica central a la figura inicial, en la figura resultante no se conserva el tamaño ni la equidistancia y colinealidad que debe existir entre los vértices de la figura inicial y sus correspondiente a la figura final con el centro de simetría.

Por otra parte, se destaca que los estudiantes en relación con el abordaje de la transformación de simetría central tienen fortalezas en:

- Comparar una figura respecto de su imagen en términos de tamaño, forma y orientación;
- Identificar los elementos que intervienen en una simetría central;
- Determinar el centro de simetría como el punto medio de cada segmento que une los vértices de la figura inicial con su correspondiente en la final.

Ilustración 9. *Fortalezas para determinar el centro de simetría en una simetría central*



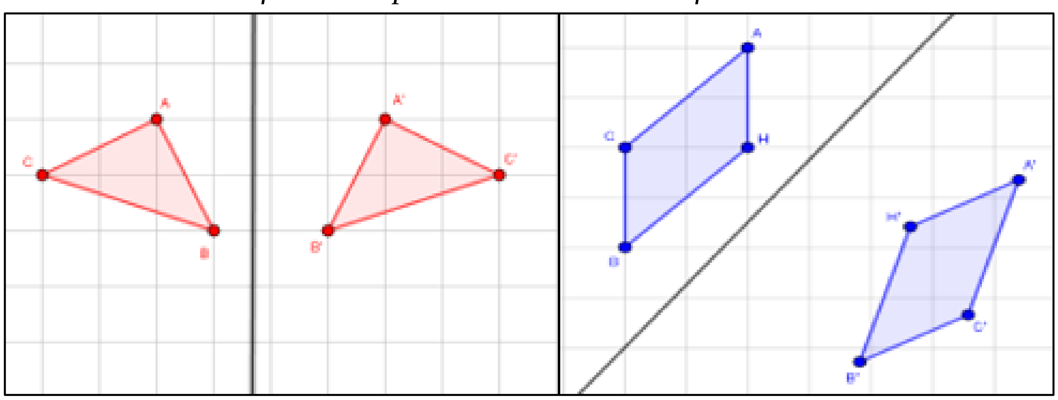
Fuente. Elaboración propia.

Nótese en la ilustración anterior, que los estudiantes relacionan cada vértice de la figura inicial y su correspondiente en la figura resultante mediante rectas, las cuales se interceptan en un mismo punto, el cual es el centro de simetría alrededor del cual se efectuó la transformación.

En tercer lugar, a lo que respecta la transformación de simetría axial se destaca que los estudiantes presentan dificultades para:

- Ubicar en el plano la figura transformada de la original;
- Reconocer e identificar que la figura inicial y su imagen son equidistante al eje de simetría;
- Determinar la perpendicularidad del segmento que une cada un punto de la figura inicial y su correspondiente en la imagen con respecto del eje de simetría;
- Aplicar a una figura una simetría axial usando expresiones algebraicas.

Ilustración 10. *Dificultades para reconocer e identificar una simetría axial*



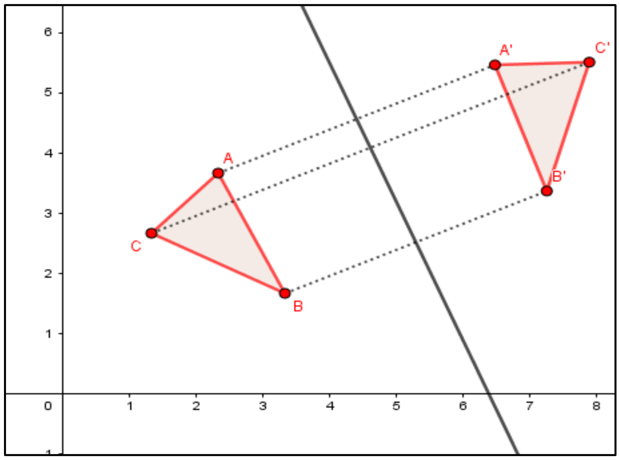
Fuente. Elaboración propia.

En la ilustración anterior, se puede notar como los estudiantes no consideran la perpendicularidad que debe existir del segmento que une cada un punto de la figura inicial y su correspondiente en la imagen con respecto del eje de simetría. Así como también, que cada vértice de la figura inicial y el correspondiente en su imagen debe estar a la misma distancia del eje de simetría.

De igual forma, se reconoce que los estudiantes en con respecto al abordaje de la transformación de simetría axial tienen fortalezas en:

- Reconocer los cambios de las figuras geométricas (forma, tamaño y posición);
- Determinar el eje de simetría como aquel que equidista los vértices de la figura inicial con su correspondiente en la final.

Ilustración 11. *Fortalezas para determinar el eje simétrico en una de simetría axial*



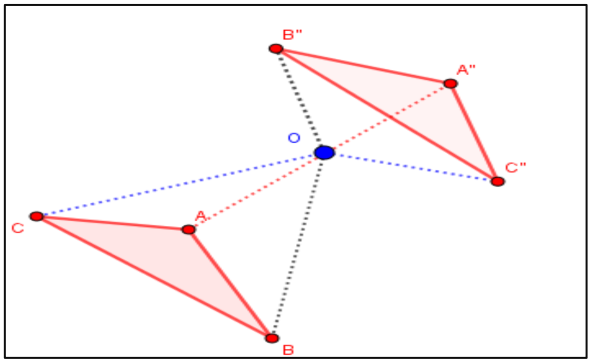
Fuente. Elaboración propia.

En la ilustración se muestra como los estudiantes asocian el eje de simetría como la línea recta por la cual se genera el reflejo de una figura, cuyo sentido indica que la figura final se produce en sentido contrario a la inicial, en tanto que los segmentos que unen los vértices de la figura inicial con su correspondiente en la figura final son perpendiculares al eje de simetría. De igual manera, reconocen que la forma y tamaño de las figuras se conservan.

En cuarto lugar, en lo que concierne la transformación de rotación se destaca que los estudiantes presentan dificultades para:

- Identificar la distancia que hay entre el punto a rotar y el centro de rotación, es igual a la distancia que hay entre el punto rotado y el centro;
- Aplicar mediante expresiones algebraicas la rotación de una figura;
- Determinar los ángulos iniciales que se forman en cada vértice el centro y la horizontal de la figura inicial;
- Reconocer el centro de rotación, el ángulo de giro y el de la rotación.

Ilustración 12. *Dificultad para producir la rotación a una figura*



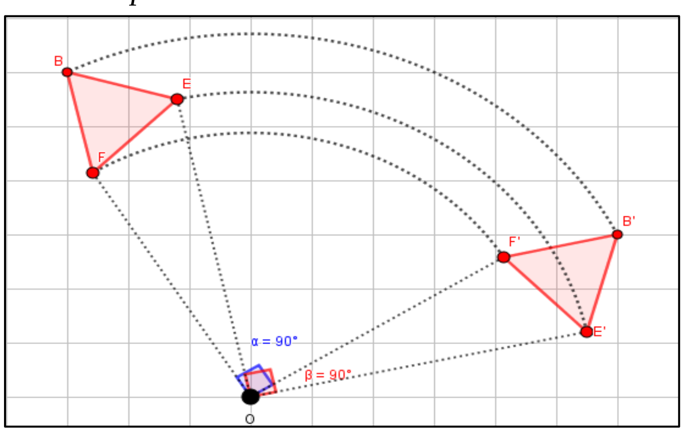
Fuente. Elaboración propia.

En la ilustración, se refleja que independientemente de que tanto la figura inicial como la figura final tengan la misma forma y tamaño, en la rotación producida la distancia entre el centro con cada vértice de la figura inicial y su correspondiente no son equidistante.

Por otra parte, se reconoce que los estudiantes en relación con el abordaje de la transformación de rotación tienen fortalezas en:

- Reconocen la amplitud angular con el que se rotó la figura;
- Identifica las propiedades invariantes que corresponden a una transformación de rotación;
- La figura final y la inicial conserva la misma forma y tamaño, pero no su sentido.

Ilustración 13. *Fortaleza para reconocer de la rotación.*



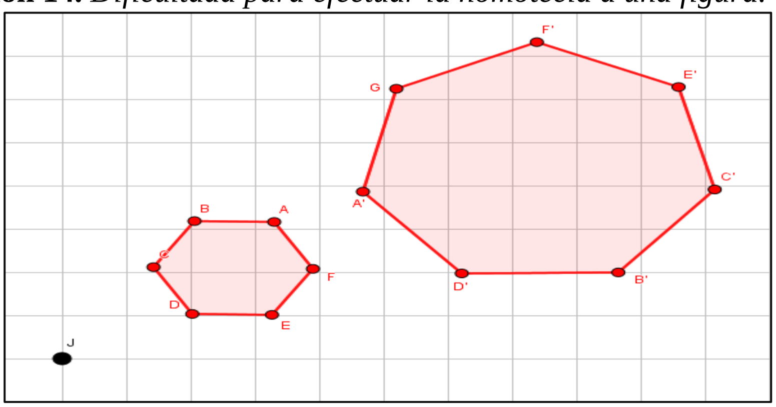
Fuente. Elaboración propia.

Considerando la anterior ilustración, se puede apreciar que los estudiantes reconocen que el tamaño y la forma de la figura se conservan variando solo su orientación y sentido, así mismo, se destaca que a partir de las figuras dadas y trazando segmentos desde el centro a cada uno de los vértices de la figura final con su correspondiente en la inicial, determinan el ángulo con el que fue rotada la figura inicial.

finalmente, en lo que concierne la transformación de homotecia destaca que los estudiantes presentan dificultades para:

- Reconocer la relación que se presenta entre las figuras (inicial y homotética) a partir de la constante de proporcionalidad (coeficiente de similaridad k);
- Emplear expresiones algebraicas para efectuar la homotecia de una figura;
- Determinar el coeficiente y el centro homotético de una figura homotética.

Ilustración 14. *Dificultada para efectuar la homotecia a una figura.*



Fuentes. Elaboración propia.

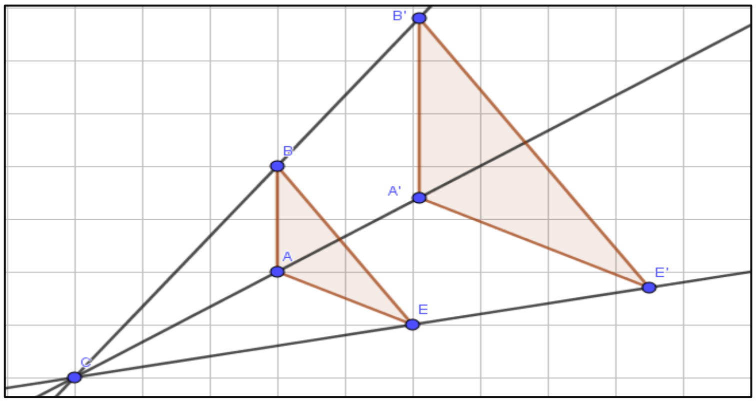
La ilustración anterior, deja entrever que los estudiantes al aplicar la homotecia a una figura no consideran la proporcionalidad entre sus lados homólogos ni tampoco que la figura resultante debe tener la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño.

No obstante, se reconoce que los estudiantes en con respecto al abordaje de la transformación de homotecia tienen fortalezas en:

- Establece la relación de semejanza entre la figura inicial y la figura resultante.
- Describe características del cambio en las figuras en términos de su tamaño.

- Utiliza rasgos de la definición para argumentar el efecto que produce en una figura al ser aplicada una transformación isomórfica.

Ilustración 15. *Fortaleza para reconocer e identificar los elementos de una homotecia*



Fuente. Elaboración propia.

La anterior ilustración, muestra que los estudiantes determinan y reconocen el centro de similaridad como el punto de intercepción entre las rectas colineales que asocian cada vértice de la figura inicial con su correspondiente en la figura final. De la misma manera, se destaca que los estudiantes reconocen que en una homotecia se debe conservar la forma, aunque su tamaño varie de acuerdo con la razón de homotecia o semejanza entre las figuras.

Ahora bien, lo que hasta aquí se ha mencionado da cuenta de las dificultades y fortalezas que han sido reportadas por diversas investigaciones, las cueles están asociadas a la forma en que los estudiantes abordan cada transformación geométrica. De igual manera, se vislumbra que estas dificultades en su mayoría están relacionadas al tratamiento sintético de este objeto. Sin embargo, también se destaca que los elementos o aspectos antes presentados son insumo necesario que se deben consideran como punto de partida y análisis en la construcción del diseño de cada una de las tareas de la secuencia a implementar.

Por ello, el propósito del siguiente apartado es conceptualizar la secuencia de tarea en conjunto con los elementos que la componen y se deben consideran para favorecer el abordaje del objeto matemático en cuestión.

2.3.4 Conceptualización de secuencias de tareas

Considerando que este trabajo, entre otras cosas, busca proponer y diseñar secuencias de tareas que apunten a explicitar la complementariedad entre los enfoques sintético y analítico de la geometría para el abordaje de las transformaciones geométricas, es necesario no solamente precisar la conceptualización de secuencias de tareas, sino también, determinar los elementos requeridos para el diseño de estas; por ello, se opta por la perspectiva de secuencias de tareas propuesta por Gómez, Mora y Velasco (2018).

En este orden de ideas, se considera que el desarrollo de tareas por parte de los estudiantes favorece el abordaje de un determinado objeto matemático, en la que el profesor proporciona oportunidades de aprendizaje que permitan a los estudiantes lograr expectativas y superar limitaciones. Desde este panorama, una tarea es el recurso a través del cual el profesor-investigador ofrece oportunidades a los estudiantes para que logren los determinados aprendizajes que se ha establecido y superen las dificultades que ha conjeturado que ellos tendrán. De esta manera, una secuencia de tareas comprende en orden de complejidad un conjunto de tareas transversales que median el abordaje de un objeto matemático.

Por lo anterior, Gómez, et. al (2018) proponen, que una tarea incluye, además de su formulación, elementos como sus requisitos y metas, el uso de materiales y recursos, formas de agrupar a los estudiantes, estrategias de interacción entre los estudiantes y con el profesor, y su temporalidad, los cuáles se describen a continuación:

- ***Requisitos:*** conocimientos y saberes geométricos previos necesarios de los enfoques sintético y analítico relacionados con las transformaciones geométricas, que le permiten a los estudiantes de segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle sede pacífico desarrollar la secuencia de tarea.

- ***Metas:*** explicita los propósitos de la secuencia de tarea en función de favorecer el abordaje de las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico de geometría.
- ***Formulación de la tarea:*** proporciona la descripción e instrucción sobre qué deben hacer los estudiantes para que estos, produzcan y presenten la resolución de la tarea que pone en juego sus formas de pensar o abordar el objeto matemático que se moviliza.
- ***Materiales y recursos:*** se precisan aquellas herramientas que los estudiantes pueden usar para abordar la tarea y que contribuyen al logro del propósito de estas.
- ***Agrupamiento***: alude a las formas de organizar a los estudiantes, ya sea de manera individual, en parejas, o grupos pequeños para resolver las tareas (Camargo, 2021).
- ***Interacción:*** es el diálogo que promueve el investigador con los estudiantes mientras resuelven las tareas. De manera que, en la interacción no solo intervienen los estudiantes y el investigador sino también los recursos disponibles en el escenario y las tareas mismas. En tanto que, los investigadores pueden hacer preguntas que induzcan a los estudiantes a exhibir de manera clara, completa y precisa lo que piensan, las estrategias que emplean, las razones para emplearlas; propiciando riquezas en sus producciones escritas y verbales (Camargo, 2021).
- ***Temporalidad***: hace referencia a la descripción del orden de cada etapa en que se desarrollará la secuencia de tarea. Además, se especifica la parte de la secuencia que se va a abordar, los materiales y recursos que se van a usar, el agrupamiento y la interacción que tendrán en cuenta y el tiempo que se va a dedicar.

Los elementos descritos anteriormente, posibilitan configurar las secuencias de tareas para favorecer la complementariedad de los enfoques sintético y analítico en el abordaje de las transformaciones geométricas.

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo, se describen las características y el diseño metodológico de la investigación, fundamentada en la entrevista basada en tareas (Camargo, 2021). De igual manera, se presentan las diferentes fases de esta investigación, junto con su intencionalidad y la forma en que desarrolló la misma, para dar cuenta de los objetivos propuestos.

3.1 Diseño metodológico

El enfoque metodológico de la investigación es de carácter cualitativo con alcance descriptivo, dado que permitió describir, interpretar y caracterizar la forma en que los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle Sede Pacifico abordan las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico. Como lo hace notar Fernández y Baptista (2014) y Páramo (2019) la investigación cualitativa es el conjunto de técnicas que posibilitan comprender, describir, explicar y caracterizar fenómenos educativos susceptibles de ser explicados de manera inmediata; en tanto que, las características y propiedades del fenómeno de estudio se detallan mediante el alcance descriptivo.

Dentro de este enfoque, se optó por un estudio fundamentado en la entrevista basada en tareas a partir de las ideas propuestas por Camargo (2021), pues, permitió profundizar e indagar sistemáticamente sobre las formas y procesos de pensamiento propios de la actividad matemática a los que recurren los estudiantes para el desarrollo de estas tareas. De modo que, considerando al mismo tiempo, las ideas de Gómez, Mora y Velasco (2018), se propuso una secuencia de tareas en orden de complejidad que estimuló en los estudiantes, el desarrollo de discusiones verbales, la producción de textos enriquecidos, el uso variado de representaciones y de estrategias heurísticas que posibilitaron el abordaje de las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico.

De acuerdo con lo anterior, Camargo (2021) plantea que, la estrategia “entrevista basada en tareas” consiste en llevar a cabo una indagación sistemática sobre la actividad que llevan a cabo individuos, o sobre la evolución de esta, interactuando con ellos mientras resuelven las tareas que se les proponen y que han sido pre-planeadas de acuerdo con los propósitos de la investigación. Lo cual, posibilita describir, interpretar y caracterizar fenómenos asociados a la forma en que los estudiantes abordan un objeto matemático. Desde este panorama, en la siguiente tabla se explicitan algunos aspectos generales de la estrategia entrevista basada en tareas:

Tabla 4. *Aspectos generales de la estrategia entrevista basada en tareas*

Tipo	Estrategia	Descripción	Participantes	Requisitos	Producto
Clínica	Entrevista basada en tareas	Estudio sobre la actividad que llevan a cabo individuos o grupos de individuos mientras resuelven problemas e interactúan con un investigador.	Equipo de investigación. Entrevistadores. Entrevistados. Tareas.	La entrevista se lleva a cabo en el escenario de realización de la tarea. Los investigadores retan a los entrevistados a “pensar en voz alta” para obtener de manera clara, completa y precisa lo que piensan.	Descripciones finas o reportes detallados del proceso seguido por los entrevistado. Pruebas de hipótesis o inferencias causales sobre el pensamiento de las personas. causales sobre el pensamiento de Protocolos de entrevista.

Fuente: tomado de Camargo (2021).

Por lo anterior, cabe notar que para la selección de los entrevistados (estudiantes para profesores de matemáticas) se tuvo en cuenta, los siguientes criterios:

- Estudiante activo de la Universidad del Valle Sede Pacifico.
- Estudiante del programa académico, Licenciatura en Matemática.
- Estudiante de segundo semestre.
- Estudiante que no haya visto el curso de geometría.

Para lo cual, se hizo una revisión a la lista de estudiantes matriculados en los diferentes cursos que se orientan en segundo semestre en el presente periodo académico (octubre/2021-

marzo/2022), de igual forma, se realizó la comparación de las listas con la de aquellos estudiantes que habían visto el curso de geometría; es así como, por las razones anterior se seleccionaron los entrevistados.

Ahora bien, con base en los aspectos anteriores, se determinaron no solo las fases de la investigación en la que se describe la forma como se desarrolló, sino también, las etapas en que se ejecutó la estrategia investigativa, que, a su vez, dan cuenta de los objetivos específicos propuestos.

3.2 Fases de la investigación

De manera general, el proceso investigativo se llevó a cabo mediante tres fases, las cuales exhiben la forma como se organizó, desarrolló y analizó la problemática de investigación, y, a su vez, se da cuenta de los objetivos propuestos y de la pregunta de investigación, tal y como se describen a continuación**:**

3.2.1 Fase 1: espectro del fenómeno de estudio

Esta fase permitió la construcción del planteamiento del problema, la fundamentación teórica y la metodología de investigación.

En relación al primer aspecto, se efectuó la búsqueda y revisión de artículos y tesis de pregrado, maestría y doctorado que brindaron insumos para la identificación de dificultades y necesidades presentes en el abordaje de las transformaciones geométricas considerando los enfoques sintético y analítico de la geometría en el contexto de la educación escolar y universitaria, las cuales, permitieron plantear la pregunta de investigación, trazar los objetivos y justificar la pertinencia de su indagación.

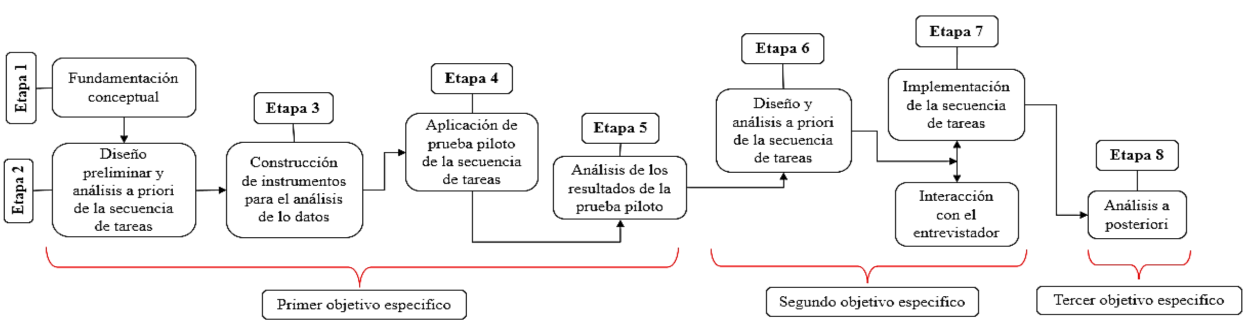
En cuanto al segundo aspecto, dada la naturaleza y los objetivos de la investigación, se hizo necesario aludir a tres perspectivas fundamentales, los cuales se especificaron en la fundamentación teórica; la primera, referida al conocimiento matemático que deben desarrollar los estudiantes en su formación para docentes de matemáticas; la segunda, alusiva a los elementos conceptuales y procedimentales centrados en la forma como se conciben las transformaciones geométricas; y finalmente, la tercera perspectiva consistió, por un lado, en describir la forma en los que los estudiantes abordan el objeto de estudio desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico a partir de la propuesta de Sierpinska (2000), y por otro lado, se hizo una conceptualización sobre la secuencia de tarea y los elementos que se deben tener en cuenta para su diseño, a través de la propuesta de Gómez, Mora y Velasco (2018).

Finalmente, el último aspecto, se abordó a partir la descripción de la forma como se va a llevar a cabo la investigación, es decir, mediante un enfoque cualitativo de alcance descriptivo y una aproximación a la estrategia investigativa entrevista basada en tareas.

3.2.2 Fase 2: ejecución de la estrategia metodológica

En esta fase, se establecieron las etapas como un plan de ejecución de la estrategia metodológica entrevista basada en tareas, de las cuales, las primeras cinco dan cuenta del primer objetivo específico, las dos siguientes del segundo y la última, del tercero (*ver diagrama 7*), de modo que, el desarrollo de estas etapas permitieron caracterizar el abordaje de las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoque sintético y analítico; y, por ende, dar respuesta a la pregunta de investigación. A continuación, se describe la forma en la que se desarrollaron cada una de estas etapas:

Diagrama 1. *Plan de ejecución estrategia entrevista basada en tareas*



Fuente. Una adaptación de Camargo (2021).

3.2.2.1 Etapa 1: fundamentación conceptual.

Esta primera etapa se asocia con la construcción de la fundamentación teórica en el capítulo dos; haciendo énfasis en la conceptualización de la secuencia de tareas, desde la postura de Gómez, Mora y Velasco (2018), quienes plantean que, la *tarea* es el recurso a través del cual el investigador ofrece oportunidades a los estudiantes para que logren los objetivos de aprendizaje que ha establecido y superen las dificultades que ha conjeturado que ellos tendrán. En este escenario, se consideró una *secuencia de tareas* como una ordenación de tareas que puede incluir una o más tareas transversales que median el abordaje de un objeto matemático.

Así mismo, Gómez, Mora y Velasco (2018) proponen un conjunto de siete elementos (descripción de la formulación de la tarea, descripción de los requisitos, descripción de las metas, descripción de los materiales y recursos, descripción del agrupamiento, descripción de la interacción y descripción de la temporalidad) en los que se fundamentó el diseño de la secuencia de tarea, de modo que, en el capítulo cuatro se presenta la descripción de cada uno de estos elementos ya sea de manera general (para las secuencias) o de manera específica (para las tareas).

3.2.2.2 Etapa 2: diseño preliminar y análisis a priori de la secuencia de tareas.

En esta etapa, se realizó una versión preliminar de la secuencia de tareas, para los estudiantes de segundo semestre de Licenciatura en Matemáticas, teniendo como referente los modos de pensamiento (Sierpinska, 2000) y los elementos propuestos por Gómez, et. al (2018); destacando, que para cada transformación geométrica se propuso dos tareas, una desde el enfoque sintético y otra, desde el enfoque analítico. De igual forma, se realizó el análisis a priori de la secuencia de tareas, estableciendo las posibles respuestas y dificultades que pudieran tener los estudiantes, las cuales, fueron clasificadas de acuerdo con los modos de pensamiento. Todo lo anterior, se muestra de manera detallada en el capítulo cuatro.

3.2.2.3 Etapa 3: construcción de instrumentos de análisis.

En esta etapa, se dio paso a la construcción de una tabla con descriptores que permitió determinar bajo que parámetros se debían analizar los datos; teniendo como base los aspectos que se explicitaron en el capítulo dos (fundamentación teórica), los cuales constituyen en foco de dicho análisis.

Para ello, se consideró como categorías de análisis la caracterización los modos de pensamiento propuestos por Sierpinska (2000) en relación con las dificultades y fortalezas presentes en el abordaje de las transformaciones geométricas; destacando, que solo se hizo énfasis en los modos sintético-geométrico y analítico-aritmético. En este sentido, se elaboraron dos rejillas con la intención de obtener insumos que permitieran el análisis de la información suministrada tanto por la aplicación de la prueba piloto como por la secuencia de tareas, para de esta forma, dar solución a la pregunta de investigación.

Dicha relación se muestra en las tablas cinco y seis, de modo que, para su comprensión, por una parte, fue necesario denotar con las letras iniciales de sus nombres las transformaciones geométricas (**T**: traslación, **R**: rotación, **SC**: simetría central, **SA**: simetría axial y **H**: homotecia), los modos de pensamiento (**SG**: sintético-analítico y **AA**: analítico-aritmético), las dificultades según el tipo (**D1, D2 y D3**) y las fortalezas según el tipo (**F1, F2 y F3**).

Por otra parte, fue indispensable definir de forma específica los cruces entre las categorías de análisis, los cuales teniendo como base los modos de pensamiento con el resultado del análisis a priori de la prueba piloto y las dificultades y fortalezas que se explicitaron en el capítulo dos, en el tratamiento didáctico del objeto matemático.

Cabe notar, que las definiciones de estos cruces se describen de manera detallada en el siguiente capitulo, a partir del análisis a priori.

Tabla 5. *Rejilla de análisis***:** *caracterización de los modos de pensamiento en relación con las dificultades y fortalezas en el abordaje de las transformaciones geométricas*

Modos de Pensamiento		**Dificultades en el abordaje de las transformaciones geométricas**			**Fortalezas en el abordaje de las transformaciones geométricas**		
		D1	**D2**	**D3**	**F1**	**F2**	**F3**
Traslación	**SG**	D1TSG	D2TSG	D3TSG	F1TSG	F3TSG	F3TSG
	AA	D1TAA	D2TAA	D3TAA	F1TAA	F2TAA	F3TAA
Rotación	**SG**	D1RSG	D2RSG	D3RSG	F1RSG	F2RSG	F3RSG
	AA	D1RAA	D2RAA	D3RAA	F1RAA	F2RAA	F3RAA
Simetría Central	**SG**	D1SCSG	D2SCSG	D3SCSG	F1SCSG	F2SCSG	F3SCSG
	AA	D1SCAA	D2SCAA	D3SCAA	F1SCAA	F2SCAA	F2SCAA
Simetría Axial	**SG**	D1SASG	D2SASG	D3SASG	F1SASG	F2SASG	F3SASG
	AA	D1SAAA	D2SAAA	D3SAAA	F1SAAA	F2SAAA	F3SAAA
Homotecia	**SG**	D1HSG	D2HSG	D3HSG	F1HSG	F2HSG	F3HSG
	AA	D1HAA	D2HAA	D3HAA	F1HAA	F2HAA	F3HAA

Fuente. Elaboración propia.

Del mismo modo, para los resultados obtenidos a partir de la aplicación tanto de la prueba piloto como de la secuencia de tareas se diseñó una tabla (como se muestra en el modelo de tabla 7), la cual denota una caracterización de las producciones de los estudiantes frente a las preguntas (o incisos) de cada tarea propuesta en la secuencia; por lo que, para identificar el tipo de pregunta a la que se hace referencia se utilizó la siguiente convención: **T1_P1** (pregunta 1 de la tarea 1), en la que **T1** refiere a la primera tarea de la secuencia y **P1** alude a la primera pregunta perteneciente a la tarea alusivas al enfoque sintético o al analítico.

En este orden de ideas, dicho modelo permitió mostrar la cantidad de estudiantes que reportan respuestas con características comunes, así como también, el número total de estudiantes que se enfrentaron a la secuencia de tareas.

Tabla 6. *Modelo de tabla utilizado para la tipificación de respuestas*

Tipos de repuestas	**Respuestas por preguntas**

	Sintético (Tn)			**Analítico (Tn)**		
	P1	**P2**	**Pn**	**P1**	**P2**	**Pn**
Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de elementos propios de los enfoques sintético y/o analítico.						
Estudiantes que responden correctamente, pero con argumentos no válidos.						
Estudiantes que responden correctamente pero no justifican lo que comunican.						
Estudiantes que responde incorrectamente.						
Estudiantes que no reportan respuesta o manifiestan no saber qué y cómo responder.						
Total						

Fuente. Elaboración propia.

Cabe notar, que la caracterización de los tipos respuestas varía de acuerdo con las preguntas de cada tarea propuesta en la secuencia.

3.2.2.4 Etapa 4: aplicación prueba piloto de la secuencia de tareas.

En esta fase, se aplicó una prueba piloto de caracterización de saberes a los estudiantes de segundo semestre de Licenciatura en Matemática de la Universidad del Valle sede pacífico, utilizando el diseño preliminar impreso de la secuencia de tareas realizada en la etapa dos, como instrumento de recolección de información necesaria para de esta forma contribuir al cumplimiento del primer objetivo específico.

3.2.2.5 Etapa 5: análisis de resultados prueba piloto.

Esta etapa, se desarrolló mediante una triangulación entre la fundamentación teórica, el análisis a priori y la información obtenida en la prueba piloto (respuestas escritas dadas por los estudiantes). De este modo, el análisis de los resultados no solo permitió identificar las dificultades que presentan los estudiantes antes de tomar el curso de geometría en su tercer semestre, referente al abordaje de las transformaciones geométricas desde de los enfoques sintético y analítico, sino también, categorizar a partir de los modos de pensar que propone Sierpinska (2000), los saberes que movilizan los estudiantes en el abordaje de dichas tareas.

3.2.2.6 Etapa 6: diseño de la secuencia de tareas.

Atendiendo al segundo objetivo específico de investigación, se diseñó las secuencias de tareas a partir de la descripción de cada uno de los elementos propuestos por Gómez, Mora y Velasco (2018); cada secuencia de tarea tiene una descripción e intencionalidad en función de favorecer la articulación entre los enfoques sintético y analítico para el abordaje de las transformaciones geométricas, teniendo como referente teórico los modos de pensamiento planteados por Sierpinska (2000).

De igual forma, para este diseño se tuvo en consideración el análisis de los resultados de la prueba piloto, de tal forma, que esta posibilitara superar en el mayor de los casos las dificultades que se identificaron, y, a la vez, permitiera profundizar en la manera en que los estudiantes abordan dicho objeto de conocimiento.

Por ello, se realizó el análisis a priori para decantar las posibles respuestas y dificultades diferentes a las que ya se han identificado que pudieran suscitar en el desarrollo de la secuencia de tareas.

3.2.2.7 Etapa 7: implementación de la secuencia de tareas.

En esta etapa, se implementó la secuencia de tareas diseñada en la etapa anterior a los estudiantes de segundo semestre del programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle Sede Pacifico, la cual, tuvo como propósito caracterizar la forma en que abordan las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoque sintético y analítico.

3.2.2.8 Etapa 8: análisis a posteriori.

Posterior a la implementación de la secuencia de tareas se observó, organizó, analizó y documentó mediante un contraste entre los resultados de la prueba piloto, el análisis a priori de la secuencia y la fundamentación teórica, considerando los siguientes aspectos en que se indagó**:**

- El modo de pensamiento que priorizan los estudiantes al responder a las preguntas planteadas en la secuencia de tareas.
- Las dificultades y fortalezas que tuvieron los estudiantes al transitar entre los enfoques sintético y analítico en el abordaje de las tareas.
- Los saberes geométricos que dominan y consideran los estudiantes en la resolución de la secuencia de tareas propuesta.

De modo que, estos aspectos se analizaron a partir de las producciones escritas de los estudiantes e interacciones con los entrevistadores; clasificándolas según las categorías definidas. Lo cual, permitió determinar la forma en que los entrevistados abordan las transformaciones geometrías desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico. Cabe notar, que los resultados de este análisis podrán verse detalladamente en el siguiente capítulo.

3.2.3 Fase 3: síntesis de resultados

En esta fase final, primero, se formularon las conclusiones y recomendaciones contrastando lo desarrollado a lo largo del trabajo, el marco de referencia, los objetivos y la pregunta de investigación; y segundo, se realizó un informe final en el que se sistematizó todos los elementos asociados con el desarrollo de esta indagación.

CAPITULO IV: RESULTADOS Y ANÁLISIS

En este capítulo, se efectúa la descripción de manera detallada de la secuencia de tareas tanto en su versión preliminar con en la final. De igual modo, se presenta la caracterización de la forma en que los estudiantes abordan las trasformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoque sintético y analítico, para lo cual se realizó; en primer lugar, un análisis a priori de la versión preliminar (prueba piloto) como también un análisis de los resultados de su aplicación; y, en segundo lugar, un análisis a posteriori de la implementación de la secuencia de tares, a partir de las producciones escritas de los estudiantes y el contraste con los resultados de la prueba piloto, teniendo como base la fundamentación teórica.

4.1 Descripción de la secuencia de tareas

En esta sección, se presentan la secuencia de tareas diseñada tanto en su versión preliminar como en su versión final relativas al abordaje de las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico; describiendo cada uno de los elementos que constituyen su diseño ya sea de manera general o especifica, junto con su intencionalidad.

Análogamente, se destaca que mediante el diseño de la secuencia de tareas se pretendió favorecer no solo la articulación entre los enfoques sintético y analítico, sino también, la coordinación entre los registros de representación de cada uno estos enfoques en relación con el abordaje de las transformaciones geométricas en estudiantes de segundo semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle Sede Pacífico.

4.1.1 Versión preliminar de la secuencia de tareas

La versión preliminar de la secuencia de tareas fue el instrumento aplicado como prueba piloto, la cual tuvo dos intenciones; por un lado, identificar los saberes y dificultades del enfoque sintético y analítico que tienen los estudiantes en relación con el abordaje de las transformaciones geométricas antes de tomar el curso de geometría; y, por otro lado, determinar a partir de lo anterior, los aspectos y elementos que se deben considerar y ajustar en el diseño de la versión final de la secuencia de tareas.

En este sentido, el diseño preliminar de la secuencia constó de diez tareas; para cada transformación geométrica se propuso dos tareas, una desde lo sintético y otra, desde lo analítico. De modo que, siguiendo las ideas de Gómez y Velazco (2008) la descripción se hace de manera general teniendo en cuenta los aspectos en común de los elementos que componen las tareas de las secuencias; luego, de manera específica, considerando aspectos de los elementos que están presentes en cada tarea particular de la secuencia.

Descripción general de los requisitos: para el desarrollo de la prueba piloto se tuvo en consideración los aprendizajes básicos que los estudiantes deberían haber desarrollado durante su formación académica en la educación básica, secundaria y media. En este sentido, de acuerdo con el MEN (1998-2006), los estudiantes deben:

- Tener conocimientos previos de algunos conceptos básicos, tanto del enfoque sintético como del enfoque analítico, que serán necesarios para desarrollar cada una de las tareas propuestas.
- Reconocer las representaciones gráficas y algebraicas de los objetos matemáticos presentes en cada tarea de la prueba piloto.
- Realizar tratamientos con expresiones algebraicas y procedimientos relativos a la construcción de representaciones geométricas mediante el uso de herramientas convencionales (regla, transportador y compas).

Descripción general de las metas: con el desarrollo de la versión preliminar de la secuencia de tareas (prueba piloto) se pretende identificar las dificultades y fortalezas de los enfoque sintético y analítico que tienen los estudiantes en el abordaje de cada una de las transformaciones geométricas. Sin embargo, de manera implícita se intenta lograr y aproximar a los estudiantes a las siguientes expectativas de aprendizaje:

- Conseguir que los estudiantes realicen de forma correcta la coordinación entre los registros de representación gráfica y algebraica para desarrollar las tareas de la prueba piloto.
- Lograr que los estudiantes identifiquen y reconozcan que los procedimientos del enfoque sintético son necesarios para dar solución a una tarea propuesta desde el enfoque analítico. Asimismo, que la inclusión de elementos propios del enfoque analítico facilita el abordaje y solución de una tarea planteada desde el enfoque sintético.

Descripción general de la formulación de las tareas: los enunciados de cada tarea propuesta incluyen: el planteamiento de la situación problema y solicitud a partir de un conjunto de preguntas, de la descripción de procedimientos geométricos y/o analíticos que den cuenta de la solución del problema propuesto.

Descripción general de los materiales y recursos: todas las tareas de la prueba piloto no solo recurren al uso del papel y lápiz, sino también, al empleo de herramientas convencionales como la regla, transportador y compas, cuyo uso depende del problema que se intente abordar en cada tarea de la prueba piloto.

Descripción general del agrupamiento: la prueba piloto está planteada para que los estudiantes trabajen de manera individual, en tanto que se pueda deducir la forma en que piensan y abordan cada tarea a partir de sus producciones escritas.

Descripción general de la interacción: La interacción que se mantuvo con los estudiantes en el desarrollo de cada tarea de la prueba piloto, se limitó a la aclaración de dudas concretas referentes a las preguntas planteadas en las tareas.

Descripción general de la temporalidad: para la implementación de la prueba piloto se consideró su desarrollo mediante dos sesiones con espacios de 15 minutos entre estas, por ello, se estipuló un tiempo aproximado de 4 horas para dar respuestas a cada una de las tareas planteadas.

Ahora bien, la presentación y descripción especifica de los elementos que componen cada tarea de la prueba piloto se muestran de manera detallada en el análisis a priori de la misma.

4.1.1 Versión final de la secuencia de tareas

Esta sección presenta la descripción de los elementos considerado para cada una de las tareas diseñadas en cada secuencia. En principio, la descripción se hace de manera general, es decir, teniendo en cuenta aspectos en común de los elementos que componen las tareas; luego, de manera específica, es decir, considerando aspectos de los elementos que están presentes en cada tarea particular de la secuencia.

En este sentido, para la restructuración del diseño final de la secuencia de tareas se propuso cinco tareas; para cada transformación geométrica se propuso una tarea, desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico, teniendo como insumo para este diseño los resultados encontrados en la prueba piloto. De esta manera, siguiendo las ideas de Gómez y Velazco (2008) para este diseño se tuvo en cuenta los siguientes elementos:

Descripción general de los requisitos: para el desarrollo de la secuencia de tareas se tuvo en consideración los aprendizajes básicos propuestos por el MEN (1998-2006) con los estudiantes deberían haber desarrollado durante su formación académica en la educación básica, secundaria y media, los cuales fueron explicitados en la descripción de la prueba piloto.

Sin embargo, considerando las dificultades encontradas en la prueba piloto, se optó por proporcionar en la secuencia de tareas una conceptualización de los elementos que permiten reconocer y efectuar una transformación geométrica desde los enfoques sintético y analítico. De manera que, esta conceptualización constituye los aprendizajes y conocimientos necesarios y requeridos que permiten dar respuesta o solución a las tareas propuestas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico de la geometría.

Descripción general de las metas: con el desarrollo de la secuencia de tareas se intenta favorecer la articulación entre los enfoques sintético y analítico en el abordaje de las transformaciones geométricas. En este sentido, se pretenden lograr las siguientes expectativas de aprendizaje:

- Conseguir que los estudiantes realicen de forma correcta la coordinación entre los registros de representación gráfica y algebraica para desarrollar las tareas de la secuencia. En otras palabras, que los estudiantes transiten por los modos sintético-geométrico y analítico-aritmético.
- Lograr que los estudiantes identifiquen y reconozcan que los procedimientos del enfoque sintético son necesarios para dar solución a una tarea propuesta desde el enfoque analítico. Asimismo, que la inclusión de elementos propios del enfoque analítico facilita el abordaje y solución de una tarea planteada desde el enfoque sintético.
- Conseguir que los estudiantes aborden las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico, usando como mediadores no solo sus respectivos registros de representación, sino también, los diferentes objetos matemáticos que se movilizan en cada enfoque.

Descripción general de la formulación de las tareas: los enunciados de cada tarea propuesta incluyen: el planteamiento de la situación problema y la solicitud de procedimientos geométricos y/o analíticos que den cuenta de la solución de la solución de cada pregunta planteada en la tarea de la secuencia.

Descripción general de los materiales y recursos: todas las tareas de la secuencia no solo recurren al uso del papel y lápiz, sino también, al empleo de herramientas convencionales como la regla, transportador y compas, cuyo uso depende de la transformación geométrica que el problema propuesto incluya para el abordaje en cada tarea.

Descripción general del agrupamiento: la secuencia de tareas está planteada para que los estudiantes la desarrollen de forma individual. De manera tal que se pueda deducir la forma en que piensan y abordan cada tarea a partir de sus producciones escritas.

Descripción general de la interacción: La interacción que se mantuvo con los estudiantes en el desarrollo de cada tarea de la prueba piloto, se limitó a la aclaración de dudas concretas bien sea referentes a las preguntas planteadas en las tareas o a la conceptualización de los objetos matemáticos que se ponen en juego en la secuencia.

Descripción general de la temporalidad: para la implementación de la secuencia se consideró su desarrollo mediante dos sesiones con espacios de 15 minutos entre estas, por ello, se estipuló un tiempo aproximado de 4 horas para dar respuestas a cada una de las tareas planteadas en la secuencia.

Ahora bien, en las tablas que siguen se detallan de forma específica los elementos que componen el diseño de la secuencia de tareas.

Tabla 7. *Descripción especifica de ST1*

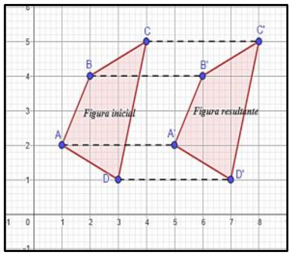
<table>
<tr><th colspan="2">Tareas 1</th></tr>
<tr><th colspan="2">Metas</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Reconocen y describen la magnitud, sentido y dirección de la transformación de traslación a partir de su representación gráfica.
▪ Describen relaciones operacionales y procedimentales que permiten determinar bajo un sistema de coordenadas los vértices de la figura inicial, la figura resultante o el vector de traslación, haciendo uso de expresiones algebraicas que dan cuenta de la transformación de traslación.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Materiales y recursos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Hoja de papel cuadriculado, lápiz, borrador y regla.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Requisitos</th></tr>
<tr><td>Abordaje sintético</td><td>Abordaje analítico</td></tr>
</table>

La traslación es un desplazamiento en línea recta sin girar que se aplica a una figura, en la que los puntos de la figura se mueven la misma distancia y en la misma dirección.

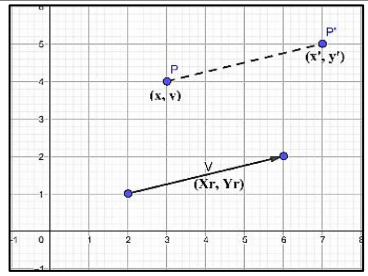
Elementos que intervienen:

- Dirección: horizontal, vertical u oblicua
- Sentido: derecha, izquierda, arriba, abajo.
- Magnitud: número de unidades que se desea trasladar la figura.

Nótese que en la traslación del cuadrilátero $ABCD$ (como se muestra en la ilustración), la dirección es horizontal, el sentido es hacia la derecha y la magnitud es de 4 unidades.



Dado un vector $\vec{v}$, se llama traslación de vector $\vec{v}$, y se denota por $t_{\vec{v}}$, a la transformación geométrica que asocia a cada punto P del plano otro punto $p' = t_{\vec{v}}(p)$ de forma que se verifique $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$.



Elementos que intervienen:

- Figura inicial: se determina considerando el vector y la figura resultante, así: $P(x, y) = P'(x', y') - \vec{V}(x_r, y_r)$
- Vector: se determina considerando la figura inicial y la resultante, así: $\vec{V}(x_r, y_r) = P'(x'.y') - P(x.y)$.
- Figura resultante: se determina considerando la figura inicial y el vector, así: $P'(x'.y') = P(x, y) + \vec{V}(x_r, y_r)$.

Formulación de la tarea

Al trasladar ΔABC de vértices $A(-5,3), B(-2,6)\ y\ C(-1,3)$ se obtuvo $\Delta A'B'C'$ de vértices $A'(1,3), B'(a,6)\ y\ C'(5,b)$. De manera similar, se trasladó $\Delta A'B'C'$ y se obtuvo $\Delta A''B''C''$ de vértices $A''(1,c), B''(4,0)\ y\ C''(d,-3)$. Determinar:

1. La dirección, la magnitud y el sentido de las traslaciones que se deben efectuar en el triángulo ABC para obtener el $\Delta A''B''C''$.
2. ¿Cuáles son las coordenadas numéricas del vector de traslación que transforma el triángulo ABC en $\Delta A''B''C''$?
3. ¿Cuáles son las coordenadas numéricas de las abscisas (a y d) y ordenadas (b y c) de los vértices $B', C', A''\ y\ C''$?
4. Verifica gráficamente que se cumpla la transformación.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 8. *Descripción especifica de ST2*

Tarea 2

Metas

- Determinan y describen mediante la representación gráfica de la transformación de rotación y el uso de regla y transportador, el centro de rotación, el ángulo de giro y el sentido de la rotación.
- Efectúa la transformación de rotación empleando desde un sistema de coordenadas ecuaciones algebraicas que le permiten determinar los puntos cartesianos del segmento resultante y el ángulo de giro.

Materiales y recursos

Hoja de papel cuadriculado, lápiz, compas, transportador, reglas y calculadora científica.

Requisitos

Abordaje sintético

La rotación es una transformación realizada sobre una figura en la que cada punto de esta se desplaza circularmente con un mismo ángulo y desde un mismo centro de rotación:

- Centro de rotación: punto fijo del cual se realiza la rotación.
- Ángulo de giro: medida del ángulo que indica cuanto gira cada punto de la figura.

Abordaje analítico

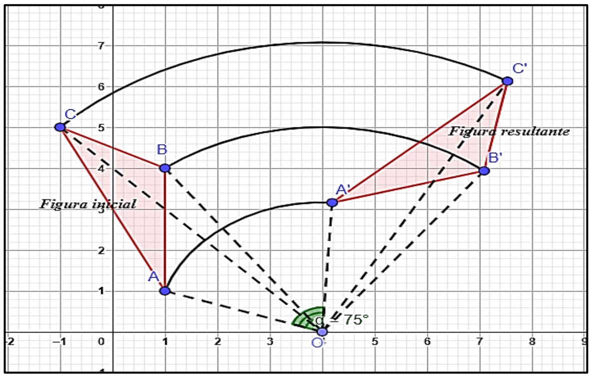
Sea un punto $P(x, y)$ con respecto a un punto $O(x_r, y_r)$ y a un ángulo orientado $\measuredangle\beta$, tal que $\beta(P) = P'$ sí y solo si la distancia del punto O al punto P es igual a la distancia de O al punto $P'(x', y')$ y el ángulo $\measuredangle POP' = \measuredangle\beta$.

Elementos que intervienen:

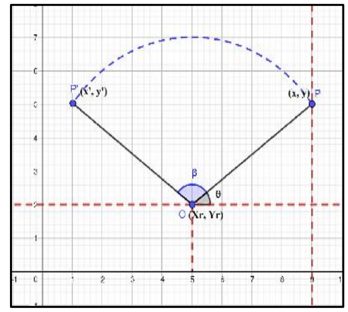
- Centro de rotación: es el punto por el cual se va a rotar la figura y se determina así: $O(x_r, y_r) = \{[x' - r \cdot cos\ (\theta + \beta)], [y' - r \cdot sen(\theta + \beta)]\}$

- Sentido de giro: orientación antihoraria (negativa) u horaria (positiva) del giro.

Obsérvese en la ilustración que cada vértice de la figura resultante ($\Delta \boldsymbol{A'B'C'}$) se obtuvo al girar utilizando el transportador la figura inicial ($\Delta \boldsymbol{ABC}$) con un ángulo de 75º alrededor del punto $\boldsymbol{O}$, en sentido horario.



- Radio: distancia que hay entre cada vértice de la figura inicial y el centro de rotación, el cual se calcula así: $\overline{OP} = \sqrt{(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2}$
- Ángulos iniciales: es el formado por la horizontal y la línea que une el centro y cada vértice de la figura inicial, el cual se calculada empleando: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y - y_r}{x - x_r}\right)$



- Ángulo de rotación: es la amplitud o medida angular a la que se desea rotar la figura inicial($\measuredangle\beta$). Figura resultante: se determina considerando el centro de rotación, ángulo de rotación, el ángulo inicial y los vértices de la figura a transformar. Esto es: $P'(x', y') = \{[r \cdot cos\ (\theta + \beta) + x_r], [\ r \cdot sen(\theta + \beta) + y_r]\}$

Formulación de la tarea

Dado el segmento $\overline{\mathbf{BS}}$ cuyos extremos tienen por coordenadas $\mathbf{B(1, -2)}$ **y** $\mathbf{S(-1, -1)}$. Se efectúa una rotación de este, 120º alrededor del punto $\mathbf{P(-2, -2)}$ en sentido horario, obteniendo $\overline{\mathbf{B'S'}}$ el cual se rota 30º alrededor del mismo punto P en sentido antihorario, resultando $\overline{\mathbf{B''S''}}$.

1. ¿Cuáles son las coordenadas numéricas de los extremos $\mathbf{B''}$ **y** $\mathbf{S''}$ del segmento $\overline{\mathbf{B''S''}}$?
2. Determine ¿Cuál es el ángulo de giro que permite rotar el segmento $\overline{\mathbf{BS}}$ hasta $\overline{\mathbf{B''S''}}$?
3. Si el sentido de la rotación del segmento $\overline{\mathbf{B'S'}}$ hubiese sido horario ¿Cuál sería el ángulo de giro que permitiría rotar el segmento $\overline{\mathbf{BS}}$ hasta $\overline{\mathbf{B''S''}}$?
4. Verifique a través de una representación gráfica las respuestas de los incisos anteriores.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 9. *Descripción especifica de ST3*

Tareas 3

Metas

- Distingue a partir del uso de representación gráfica los elementos, tales como: el centro de simetría, la orientación del movimiento y el sentido de la figura transformada. De manera que permitan reconocer a una transformación de simetría central.
- Determina a partir del uso de ecuaciones algebraicas elementos tales como: el centro de simetría y los vértices faltantes de la figura inicial para dar cuenta de la transformación de simetría central.

Materiales y recursos

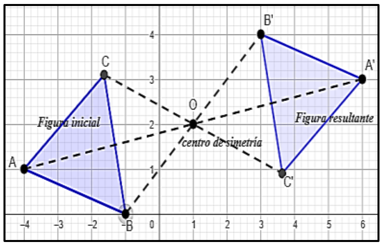
Hoja papel cuadriculado, lápiz, transportador y reglas.

Requisitos

Abordaje sintético	Abordaje analítico
La simetría central es una transformación en el plano en la cual cada punto de la figura geométrica se relaciona con otro, de tal forma, que éstos equidisten de un punto llamado centro de simetría y estén a lados opuesto del mismo. Elementos que intervienen:	La simetría central es una transformación que corresponde a un semigiro (rotación de 180º), en la que dado un punto $O(x_r, y_r)$ en el plano y el segmento $\overline{PP'}$, se cumple $\overline{OP} = \overline{OP'}$. De modo que, los puntos $P(x, y)$ y $P'(x', y')$ se encuentran relacionados alrededor del punto medio O del cual equidistan.

- Figura inicial: es la figura a la cual se le aplicará el movimiento.
- Centro de simetría: es el punto medio alrededor del cual se produce el movimiento.
- Figura resultante: la figura con orientación invertida obtenida después del movimiento.

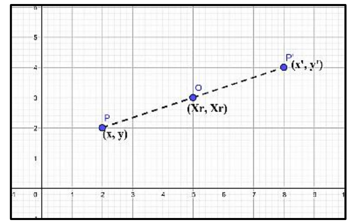
Nótese en la ilustración, todos estos elementos; destacando que los trazos entre cada vértice de la figura inicial y su correspondiente en la figura resultante coinciden en O.



Elementos que intervienen:

- Figura inicial: se determina teniendo en cuenta el centro simétrico y la figura resultante, así: $P(x,y) = [(2x_r - x'),(2y_r - y')]$.
- Centro de simetría: es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ y se determina usando: $O(x_r,y_r) = \left[\left(\frac{x+x'}{2}\right),\left(\frac{y+y'}{2}\right)\right]$.

Figura resultante: es la figura simetría de la inicial, la cual se halla empleando: $P'(x',y') = [(2x_r - x),(2y_r - y)]$.



Formulación de la tarea

se sabe que el triángulo $\boldsymbol{B'R'A'}$ de vértices $\boldsymbol{B'(1,-1)}, \boldsymbol{R'(-2,-3)}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{A'(-6,-2)}$ es la figura resultante después de aplicar una simetría central al triángulo $\boldsymbol{BRA}$, del cual se conoce solo el vértice $\boldsymbol{B(-3,1)}$. De acuerdo con lo anterior, determinar:

1. ¿Cuáles son las coordenadas numéricas del centro simétrico alrededor del cual se transformó la figura inicial?
2. ¿Cuáles son las coordenadas numéricas de los vértices faltantes (*R* y *A*) de la figura inicial?
3. **3.** ¿Gráficamente, los resultados obtenidos en 1 y 2 se verifican?

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 10. *Descripción especifica de ST4*

Tareas 4

Metas

- Identifican los elementos fundamentales que intervienen en una transformación de simetría axial tales como; el eje de simetría y el sentido de la figura, a través de la representación gráfica y el uso de herramientas convencionales como la regla.
- Describen la transformación de simetría axial a partir de relaciones operacionales y procedimentales que permiten determinar bajo un sistema cartesiano de expresiones algebraicas, el eje de simetría, las coordenadas numéricas de los extremos del segmento resultante.

Materiales y recursos

Hoja de papel cuadriculado, lápiz y reglas.

Requisitos

Abordaje sintético

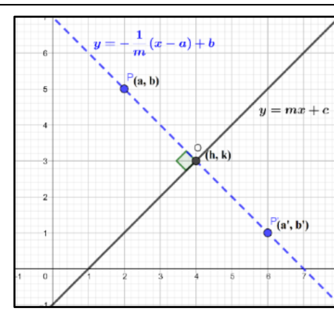
La simetría axial es una transformación que se le aplica a una figura con respecto a una recta, de tal forma que cada punto de la figura inicial y su punto correspondiente en la imagen, están a distinto lado de la recta, pero a la misma distancia de esta.

Elementos que intervienen:

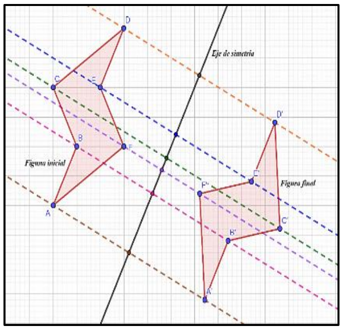
- Figura inicial: figura a la cual se aplicará la transformación.

Abordaje analítico

La simetría axial es una transformación isométrica mediante la cual un punto $P(a,b)$ se refleja en el plano con respecto a una recta l teniendo como resultante $P'(a',b')$, tal que, se verifica que si P pertenece al eje de



- Eje de simetría: es la línea recta por la cual se genera el reflejo de la figura inicial
- Figura simétrica: es la imagen reflejo de la figura inicial, en la que las líneas que unen cada vértice de la figura inicial y su correspondiente en la figura simétrica son perpendiculares al eje de simetría.



simetría l se tiene que $(P) = P'$. De manera que, que $y = mx + c$ es la ecuación de la recta que refleja al punto P.

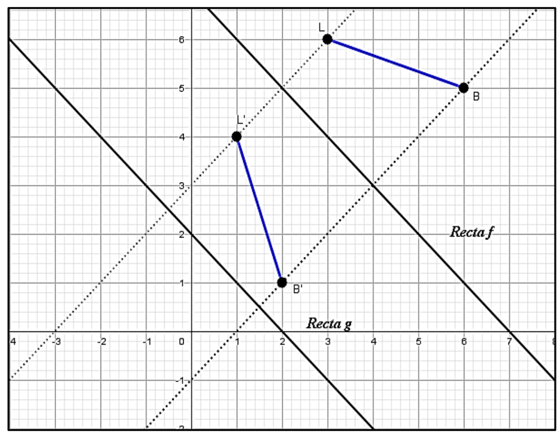
Elementos que interviene:

- Figura inicial: se determina considerando las coordenadas de la figura resultante y el eje simétrico.
- Eje de simetría: se calcula utilizando la ecuación $y = m(x - x_1) + y_1$, de modo que, se teniendo en cuenta un punto medio determinado por la recta que une un vértice de la figura inicial y su correspondiente en la figura resultante
- Figura resultante: es la figura simetría de la inicial y se determinan las coordenadas de sus vértices empleando: $P'(a', b') = \left[\left(\frac{a+2bm-2cm-am^2}{m^2+1}\right).\left(\frac{2am+bm^2+2c-b}{m^2+1}\right)\right]$

Formulación de la tarea

Sea el segmento $\overline{BL}$ con coordenadas $B(6,5)\ y\ L(3,6)$ se aplicó una simetría al segmento $\overline{BL}$ con respecto a la recta ***f***, obteniendo su resultante $\overline{B'L'}$ con coordenadas B' (2, 1) y L' (1,4) y luego al segmento $\overline{B'L'}$ se aplica la simetría por medio de la recta ***g*** obteniendo la resultante $\overline{B''L''}$. De acuerdo con lo anterior:

1. Encuentre la ecuación de la recta ***g*** con el que se determina la simetría del segmento $\overline{B''L''}$
2. Determina algebraicamente ¿cuáles son las coordenadas numéricas del segmento resultante $\overline{B''L''}$.
3. Existe otra transformación que permita que el segmento $\overline{BL}$ tome la posición del segmento $\overline{B''L''}$. Si lo hay, menciona cual es y describe gráficamente el movimiento.



Fuente. Elaboración propia.

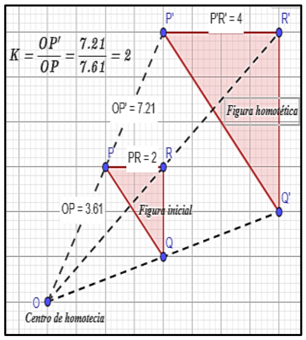
Tabla 11. *Descripción especifica de ST5*

Tareas 5	
Metas	
▪ Reconoce y describe a partir de su representación gráfica los elementos que intervienen en una transformación de homotecia, tales como: la razón de homotecia, el centro homotético y la figura resultante. ▪ Determina mediante el uso de expresiones algebraicas bajo un sistema de coordenadas y el desarrollo de procesos algorítmicos, numéricos y operacionales las coordenadas numéricas del segmento inicial, el resultante, la razón de homotecia y el centro.	
Materiales y recursos	
Hoja de papel cuadriculado, lápiz y reglas.	
Requisitos	
Abordaje sintético	Abordaje analítico
La homotecia es una transformación isomórfica que teniendo como base un punto fijo o centro permite ampliar o reducir el tamaño de una figura o segmento multiplicando las distancias por un mismo factor de conversión,	La homotecia es una transformación mediante la cual a un punto cualquiera $P(x, y)$, le corresponde otro y sólo $P'(x', y')$ tal que la recta que une el punto P' con el punto P pasa obligatoriamente por el centro de homotecia $O(x_r, y_r)$. De modo que, $(P') = k(P)$ en la

manteniendo una proporción entre los lados correspondientes.

Elementos que intervienen:

- Figura inicial: figura dado a la cual se aplicará la transformación.
- Punto fijo: punto por el que se desprenden las proyecciones de las figuras, de manera que, cada vértice de una figura y su imagen se encuentran alineados a este.
- Factor de conversión: es la razón de homotecia por la cual se multiplican las distancias, permitiendo ampliar o reducir la figura. Esto es: $k = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}$

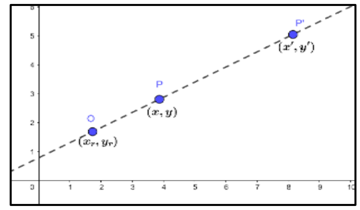


- Figura resultante: es la figura homotética ampliada o reducida mediante el factor de conversión, así: $\overline{OP'} = k \cdot \overline{OP}$.

que k es un número fijo denotado como razón de homotecia.

Elementos que intervienen:

- Centro de homotecia: se calcula considerando un vértice de la figura inicial (P), su correspondiente en la figura resultante (P') y la razón (K), de la manera siguiente: $O(x_r, y_r) = \left[\left(\frac{x'-Kx}{1-k}\right), \left(\frac{y'-Ky}{1-k}\right)\right]$
- Razón de homotecia: se determina teniendo en cuenta un vértice de la figura inicial (P), su correspondiente en la figura resultante (P') y el centro de homotecia de la siguiente manera: $k = \frac{x'-x_r}{x-x_r}$ o $k = \frac{y'-y_r}{y-y_r}$



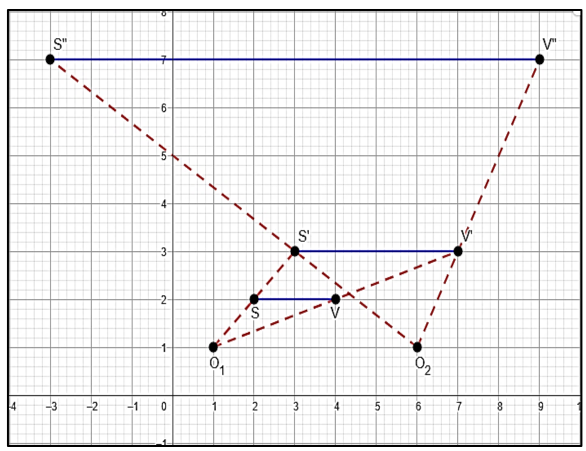
- Figura homotética: es la figura homóloga de la inicial, la cual se halla empleando; $P'(x', y') = [(kx - kx_r + x_r), (ky - ky_r + y_r)]$, de modo que, solo se considera los vértices de la figura inicial, el centro homotético y la razón de homotecia.

Formulación de la tarea

Al segmento $\overline{SV}$ d e extremos $S(2,2)$ y $V(4,2)$ se aplicó una homotecia con $K_1 = 2$ y centro $O_1(1,1)$ y a la figura resultante otra homotecia con $K_2 = 3$ y centro $O_2(6,1)$, tal y como se muestra ilustración:

Considerando lo anterior:

1. Verifique algebraicamente ¿cuáles son las coordenadas numéricas de los extremos segmentos homotéticos $\overline{S'V'}$ y $\overline{S''V''}$?
2. Determine un valor de K_3 que lleve el segmento inicial $(\overline{SV})$ hasta el segmento final $(\overline{S''V''})$.
3. Determine las coordenadas numéricas del centro homotético O_3 que permita llegar del segmento inicial $(\overline{SV})$ hasta el segmento final $(\overline{S''V''})$.

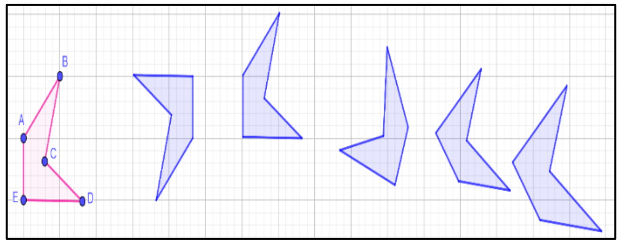
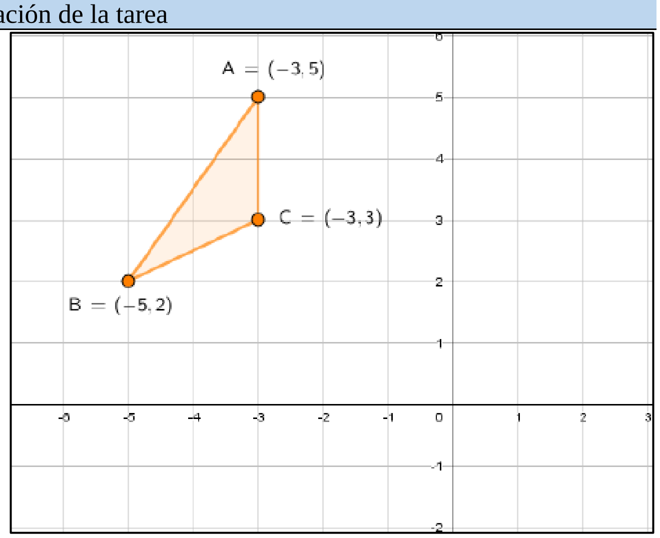


Fuente. Elaboración propia.

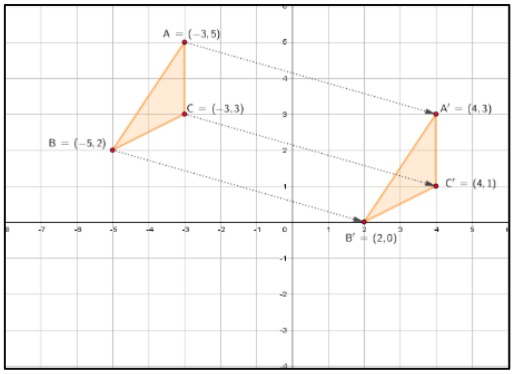
4.2 Análisis a priori de la prueba piloto

En lo que sigue, se muestra el análisis a priori de la versión preliminar de la secuencia de tareas (prueba piloto) en el que se establecen las posibles respuestas y dificultades que pudieran presentar los estudiantes en el desarrollo de cada pregunta de las tareas; precisando el modo de pensamiento que se favorece en estas. Posterior a ello, se construyen y explicitan las categorías de análisis, caracterizando las dificultades y fortalezas que presentan los estudiantes en el abordaje de cada transformación geométrica respecto al modo de pensamiento que priorizan.

Tabla 12. *Descripción especifica y análisis a priori de la prueba piloto*

<table>
<tr><th colspan="2">Tarea 1</th></tr>
<tr><td colspan="2">Metas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Identificar los elementos y condiciones que se deben cumplir para reconocer y aplicar una transformación de traslación a una figura dada.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Formulación de la tarea</td></tr>
<tr><td>Considerando la siguiente ilustración, encierre con un círculo las figuras que identifiques como una traslación de polígono ABCDE.
P1 ¿Por qué escogiste esta(s) opción(es)? Explica
P2 ¿Qué condiciones crees que fueron necesarias para trasladar el polígono?</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Respuesta correcta</td></tr>
<tr><td colspan="2">El estudiante puede utilizar la definición para verificar las características que representa a la figura trasladada de manera que, el tamaño y forma de la figura inicial se conserve en la trasladada y así mismo reconozca cuál de las figuras ilustradas conserva el mismo sentido mas no su misma posición. Concluyendo que solo la figura 2 corresponde a la trasladada de la figura inicial.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Posibles dificultades</td></tr>
<tr><td colspan="2">▪ No reconoce una traslación en términos de la conservación de la forma y el tamaño de las figuras.
▪ No determina la magnitud, sentido y dirección de la figura trasladada.
▪ No Efectúan y verifica la traslación de una figura mediante su representación gráfica.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Tarea 2</th></tr>
<tr><td colspan="2">Metas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Determinar a partir del uso de una expresión algebraica elementos que intervienen en una figura traslada tales como; el vector de traslación, los vértices de la figura trasladada y su representación gráfica en el plano cartesiano.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Formulación de la tarea</td></tr>
<tr><td>Considere los puntos A’ (4, b), B’(2,0) y C’(a, 1) en el plano cartesiano, los cuales representan la imagen congruente de la figura que se muestra en la siguiente ilustración.
Determinar, utilizando la expresión $\vec{V}(x_r, y_r) = A'(x', y') - A(x, y)$
a) ¿Cuáles son las coordenadas del vector de traslación que transformó cada uno de los vértices de la figura inicial?
b) ¿Cuáles serán las nuevas coordenadas del triángulo?
c) Realiza la representación gráfica de la figura resultante, mostrando el recorrido de cada uno de los vértices del triángulo.
d) ¿Qué elementos crees que deben considerarse para efectuar una traslación?</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Respuesta correcta</td></tr>
</table>

El estudiante remplaza en la expresión $\vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x_r}, \boldsymbol{y_r}) = \boldsymbol{A'}(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, las coordenadas (x, y) que representa a uno de los vértices de la figura inicial, considerando cuales de estas conservan los datos requeridos para encontrar las coordenadas del vector. Tal como se presenta a continuación:



$$\vec{V}(x_r, y_r) = B(x', y') - B(x, y)$$

Coordenadas de uno de los vertices de la figura:

$B'(2,0)$

B (-5,2)

Reemplazo en la ecuación las coordenadas

$$\vec{V}(x_r, y_r) = (2, 0) - (-5, 2)$$

$$\vec{V}(x_r, y_r) = ((2 - (-5)), (0 - 2))$$

$$\vec{V}(x_r, y_r) = (7, -2)$$

Se concluye que el punto (7,-2) corresponde a las coordenadas del vector con el que la figura será trasladada.

El estudiante reescribe la expresión matemática para interpretar las nuevas coordenadas de la figura final corresponde a $\boldsymbol{A'}(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}) = \vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x_r}, \boldsymbol{y_r}) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Como se ve a continuación:

Coordenadas conocidas de la figura trasladada

$\boldsymbol{B'}\ (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{0})$

Encontrando la coordenada del vértice de la figura trasladada.

$$\boldsymbol{A'} = (\boldsymbol{7}, \boldsymbol{-2}) + (\boldsymbol{-3}, \boldsymbol{5})$$

$$\boldsymbol{A'} = ((\boldsymbol{7} + (\boldsymbol{-3})), (\boldsymbol{-2} + \boldsymbol{5}))$$

$$\boldsymbol{A'} = (\boldsymbol{4}, \boldsymbol{3})$$

Se efectúa el mismo procedimiento para encontrar las coordenadas del vértice C' de la figura trasladada. Siendo esta C' (4,1)

El estudiante ubica en el plano cartesiano las coordenadas encontradas que representa a la figura trasladada y comprobar la definición de traslación a partir del cambio de posición de la figura, como se muestra a continuación:

El estudiante reconoce la dirección, la magnitud desplazamiento y el sentido que representa los elementos del vector con que se traslada a la figura.

Posibles dificultades
▪ No reconoce la distancia entre las coordenadas de los vértices de la figura inicial y su correspondiente en la figura final. ▪ No determina usando ecuaciones algebraicas el vector de traslación a partir de un vértice de la figura inicial y su correspondiente en la figura resultante. ▪ No establece mediante el uso de ecuaciones algebraicas las coordenadas numéricas de la figura trasladada o inicial.
Tarea 3
Metas
Reconoce y determinación de los elementos tales como, el centro, el sentido y la amplitud de giro, que se deben considerar en una rotación.
Formulación de la tarea

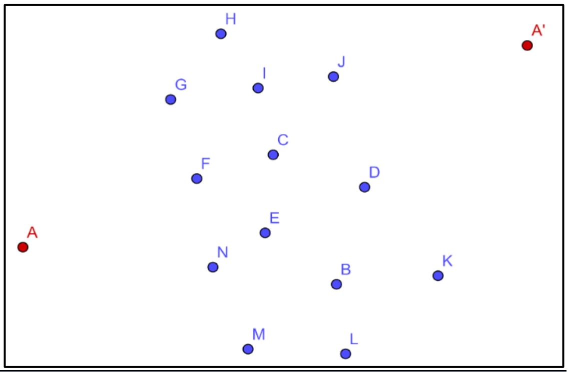
Considerando que en la siguiente figura el punto $\boldsymbol{A'}$ es la imagen de A por medio una rotación, responda:

P1 Observa detenidamente los puntos que allí se presentan e intenta determinar ¿Cuál de ellos puede ser el centro de rotación? ¿Por qué?

P2 ¿Qué relación encuentras entre los puntos $\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{A}$ y el centro que determinaste?

P3 ¿Cuál es la amplitud del ángulo con el que se rotó el punto A con el centro de rotación encontrado en el primer inciso?

P4 ¿Qué elementos se deben considerar en una rotación?



Respuestas correctas

El estudiante recurre a la condición de equidistancia que debe existir entre el punto inicial A, el centro de rotación y el punto rotado A'. Para ello deberá recurrir a utilizar la regla para lograr comprobar las condiciones que debe satisfacer entre estos puntos y el centro de rotación.

Para de esta manera logre concluir que de todos los puntos el que satisface estas condiciones es el punto C.

El estudiante recurrirá al uso de transportador para determinar la amplitud del ángulo con el que se rotó el punto A.

Concluye que, amplitud del ángulo con el que fue rotado corresponde a 180°.

El estudiante reconoce que, al rotar a una figura en esta intervienen elementos como; la amplitud del ángulo, centro de rotación y el sentido de la figura.

Posibles dificultades

- Reconocen una rotación en términos de la conservación de la forma y el tamaño de las figuras, pero no su sentido.
- Identifican y determinan el centro de rotación, la amplitud de giro y el sentido de la figura en una rotación.
- Reconocen la distancia que hay entre el punto a rotar y el centro de rotación, es igual a la distancia que hay entre el punto rotado y el centro.
- Determina el ángulo de giro formado por el punto inicial, el centro y el punto resultante.

Tarea 4

Metas

Determina las coordenadas de la figura resultante con respecto a una inicial a partir del uso de expresión algebraica.

Formulación de la tarea

Dado el triángulo con coordenadas $\boldsymbol{E(1,2), F(3,2)\ y\ G(5,4)}$ rotarlo con un ángulo $\boldsymbol{\beta = 60°}$, sabiendo que el centro de rotación está en $\boldsymbol{H(1,2)}$. Para ello, considere los siguientes pasos:

P1 Primero, se buscan los radios de cada vértice al centro, usando $\boldsymbol{r = \sqrt{(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2}}$

P2 Segundo, se determinar los ángulos iniciales formado por el vértice, el centro y la horizontal mediante; $\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y - y_r}{x - x_r}\right)}$.

P3 Tercero, determina las componentes de cada vértice de la figura resultante sustituyendo los valores encontrados en las ecuaciones; $\boldsymbol{x' = r \cdot cos\,(\theta + \beta) + x_r\ \wedge\ y' = r \cdot sen(\theta + \beta) + y_r}$.

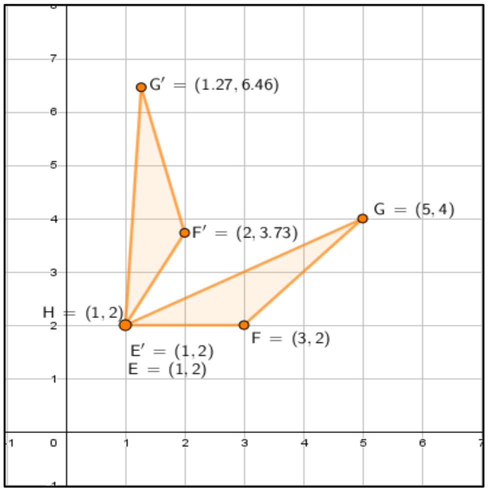
P4 Cuarto, representa geométricamente la transformación de rotación a partir de lo pasos anteriores.

Posibles respuestas

El estudiante localiza en el plano cartesiano los vértices que representa a la figura y a su vez, las coordenadas del centro de rotación.

El estudiante se ubica en la ecuación que permite determinar radio de cada vértice al centro y remplaza las coordenadas que representa cada uno los vértices de la figura inicial y el centro de rotación, tal como se presenta de la siguiente manera:

Ecuación del radio:



$$r = \sqrt{(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2}$$

Donde:
Puntos del plano (3, 2) ∈ vértice de la figura
Coordenadas del centro de rotación: *H* (1,2)
Reemplazando en la ecuación se obtiene:

$$r = \sqrt{(3-1)^2 + (2-2)^2}$$
$$r = \sqrt{(2)^2}$$
$$r = \sqrt{4}$$
$$r = 2$$

Se efectúa el mismo procedimiento para encontrar cada uno de los radios de cada vértice de la figura E y G.

El estudiante reemplaza en la ecuación, que permite determinar el ángulo con que se rotará a la figura y el valor de las coordenadas del centro *H (1,2)* y cada uno de los vértices de la figura a partir de la siguiente expresión:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y - y_r}{x - x_r}\right)$$

Datos
Vértice de la figura: $E(1,2)$
Coordenadas del centro de rotación: H (1,2)
Sustituye en la ecuación anterior
Coordenadas del centro de rotación: H (1,2)

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2-2}{1-1}\right)$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$\theta = 0°$$

Se efectúa el mismo proceso para los vértices G' y F' que componen a la figura.

El estudiante, reemplaza en las ecuaciones $x' = r \cdot cos\,(\theta + \beta) + x_r \;\wedge\; y' = r \cdot sen(\theta + \beta) + y_r$ para determina las componentes de cada vértice de la figura resultante sustituyendo los valores encontrados en las ecuaciones anteriores que determinan los puntos (*x', y'*). Como se muestra a continuación:

Donde:
Puntos del plano *E*= (1,2) ∈ uno de los vértices e la figura inicial
Coordenadas del centro de rotación: *H* (1,2)
Radio del vértice de la figura: 0
Ángulo de rotación
$\beta = 60°$ y $\theta = 0°$
Reemplazando en la ecuación se obtiene:

$$E' = (r \cdot cos\,(\theta + \beta) + x_r\,;\; r \cdot sen(\theta + \beta) + y_r\,)$$
$$E' = (0 \cdot cos\,(0 + 60°) + 1\,;\; 0 \cdot sen(0 + 60°) + 2\,)$$
$$E' = (1, 2)$$

Y así con el resto de los vértices G' y F'

El estudiante ubica en el plan cartesiano las coordenadas encontradas de la figura rotada.

Posibles dificultades

- Determina bajo un sistema de coordenadas la distancia entre el vértice y el centro.
- Determina bajo un sistema de coordenadas los ángulos iniciales formado entre el vértice de la figura inicial, el centro de rotación y su horizontal.
- Determina bajo un sistema de coordenadas la magnitud angular con la que fue rotada una figura.

- Determina las coordenadas numéricas de la figura rotada o inicial haciendo uso de expresiones algebraicas.

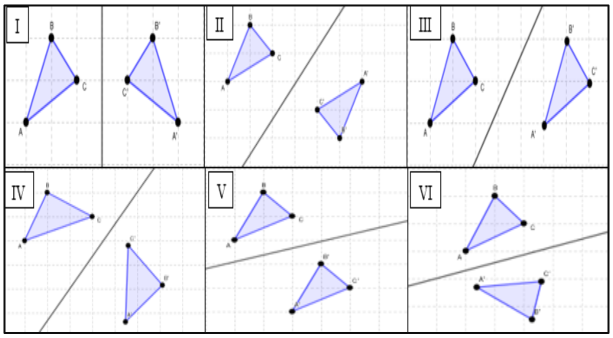
Tarea 5

Metas

Identificar los elementos y condiciones que se deben cumplir para reconocer y aplicar una transformación de simetria axial.

Formulacion de la tarea

La siguiente ilustración muestra un conjunto de figuras, a las cuales se les aplicó un movimiento teniendo como referencia una recta.



Observa detenidamente las figuras e indica:

P1 ¿Cuál o cuáles corresponden a una simetría axial respecto a la recta y cuáles no corresponden? Justifica en cada caso.

P2 Si trazas un segmento para dar cuenta de una correspondencia punto a punto en una de las representaciones de la simetría axial y en una que consideres que no lo es, ¿dichos segmentos en cada caso son perpendicular a la recta? ¿los puntos medios de estos segmentos coinciden con la recta?

P3 ¿Qué se debe considerar para reconocer que a una figura se le aplicó una simetría axial?

Respuestas correctas

El estudiante utiliza la definición para verificar las condiciones que cumple una figura al ser aplicada en ella una simetría axial de manera que, el tamaño y forma de la figura inicial y la final se conserve, pero su sentido sea contrario, exista una equidistancia entre cada punto de la figura inicial y la final con el eje de simetría, de igual forma, el segmento que une un punto con su imagen sea perpendicular al eje de simetría.

El estudiante utiliza la regla para trazar segmentos que corresponda a cada punto de la figura inicial con respecto a su imagen y así comprobar existe una perpendicularidad entre estos puntos.

El estudiante concluye que, solo las figuras I, IV y VI corresponde a una simetría axial.

Posibles dificultades

- Reconoce una simetría axial en términos de la conservación de la forma y el tamaño de las figuras con orientación invertida con respecto a una recta.
- Determinan el eje de simetría con el que se reflejó la figura inicial para obtener la figura resultante.
- Efectúan ni validan una simetría axial haciendo uso de una representación gráfica.

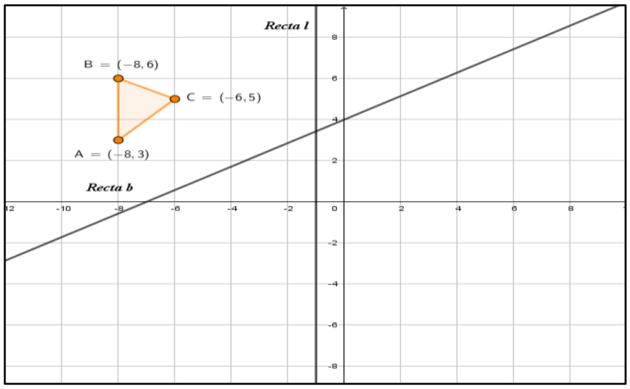
Tarea 6

Metas

- Identificar una transformación de simetría axial a partir de un conjunto de figuras.
- Vislumbrar la forma en que los estudiantes determinan las coordenadas de la figura reflejada respecto a ejes simétricos secantes teniendo en cuenta los elementos presentes en una representación gráfica.

Formulación de la tarea

Considere los puntos, $\boldsymbol{A(-8,3)}$, $\boldsymbol{B(-8,6)}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{C(-6,5)}$ de un triángulo en el plano cartesiano.



P1 ¿Cómo hallamos la reflexión del ΔABC con respecto a la recta *l*?

P2 ¿Cómo hallamos la simetría axial de la figura obtenida ΔA'B'C' con respecto a la recta *b*?

P3 Después del proceso anterior ¿Qué concluyes?

P4 Existe algún movimiento que permita que el ΔABC tome la posición del triángulo A″B″C″. ¿Cuál?

P5 ¿Cómo hallamos las ecuaciones de las rectas *l* y *b*, si se tiene en consideración cada triángulo con su simétrico o reflejado?

Respuesta correcta
El estudiante reconoce la ecuación que representa a la recta (eje de simetría) la que será reflejada la figura. Siendo Y = mx + b la ecuación que satisface a la recta, sabiendo que *m* corresponde a la pendiente de la recta y c el punto de intercepción que toca la recta con respecto al eje de simetría. De esta manera b Donde: m = 0 b = -1 Ecuación de la recta x = -1 A partir de lo anterior el estudiante, reconoce algunos elementos que se asocian a la ecuación que permite determinar la imagen de una figura. Tal como se aprecia a continuación: $\mathbf{A'(x',y') = (\frac{x+2ym-2bm-xm^2}{m^2+1}, \frac{2xm+ym^2+2b-y}{m^2+1})}$ Donde: (x, y) ∈ coordenadas de la figura original. El estudiante reemplaza en la ecuación los elementos requeridos en la ecuación anterior de tal manera que, encuentre los vértices de la figura simétrica.

Posibles dificultades
▪ Determinan bajo un sistema de coordenadas la equidistancia entre los vértices de la figura inicial y su correspondiente en la final respecto del eje de simetría. ▪ Establecen ni determinan la ecuación algebraica del eje simétrico por medio del cual una figura es reflejada. ▪ Determinan las coordenadas numéricas de la figura reflejada o inicial haciendo uso de expresiones algebraicas.

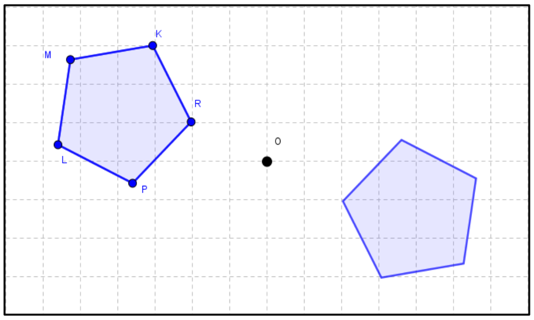
Tarea 7
Metas
▪ Identifica las condiciones y elementos; tales como, el centro de simetría, la equidistancia de las figuras respecto al centro y la inversión de dichas figuras que intervienen en una figura al aplicar en ella una simetría central.

T7: considerando la siguiente figura, nombra los vértices en el polígono de la derecha de tal manera que el movimiento realizado al pentágono RPLMK sea una simetría central con centro en O.

P1 Con la regla, traza las rectas que une a los vértices P, P'; R, R'; K, K'; L, L'; M,M' . ¿Qué ocurre con estos segmentos?

P2 Compara la longitud de los segmentos $\overline{RO}$ y $\overline{OR'}$; $\overline{PO}$ y $\overline{OP'}$ ¿Qué concluyes?

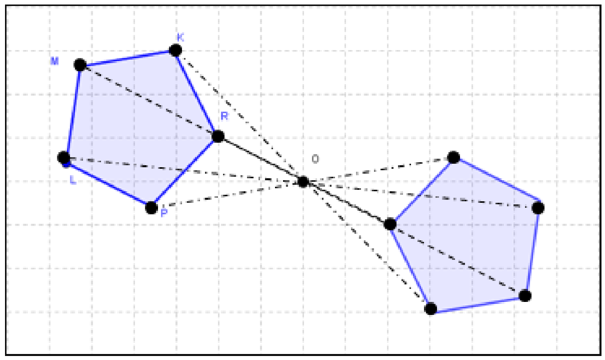
P3 ¿Qué expresión o ecuación utilizarías para determinar las coordenadas del centro de simetría?



Respuesta correcta

El estudiante deberá reconocer las condiciones que debe cumplir una figura al ser aplicada en ella una simetría central, para ello deberá verificar que, ambas figuras conservan el mismo tamaño y forma, pero su sentido debe ser invertido.

Por otro lado, deberá identificar que los vértices de la figura inicial con sus correspondiente en la figura final y al centro de simetría deben ser colineales lo que quiere decir que pertenecen a una misma recta que se intercepten en el punto llamado centro de simetría y los vértices de ambas figuras.



El estudiante hará uso de la regla para medir las longitudes que existe entre los segmentos que unen a cada vértice y así comprobar la equidistancia que existe entre estos.

El estudiante reconoce la definición de simetría central para reconocer los elementos que intervienen en esta y así aludir la ecuación que satisface a esta transformación. Como se aprecia a continuación:

P' (x', y') = (2Xr + x, 2Yr + y)
Donde Xr corresponde a las coordenadas del centro de reflexión.
(x, y) coordenadas de la figura inicial.

El estudiante reescribe la ecuación que permite encontrar a la imagen de la figura inicial de tal manera que:

$$x' = 2Xr + x$$

$$\frac{x' - x}{2} = Xr$$

Se efectúa del mismo modo el procedimiento anterior para encontrar las coordenadas del centro de simetría Yr $= \frac{x' - x}{2}$

Posibles dificultades

- Reconoce una simetría central en términos de la conservación de la forma y el tamaño de las figuras con orientación invertida alrededor de un punto.
- Identifica el centro se simetría, la orientación y sentido en el que se produce la transformación de una figura.
- Determina el centro simétrico considerando a este como el punto medio entre los vértices de la figura inicial y con sus correspondiente en la figura final.

Tarea 8

Metas

- Reconocer la forma en que los estudiantes a partir de algunos de los vértices de la figura inicial determinan las coordenadas de los vértices de la figura final, de tal manera, que en este proceso hicieran uso de alguna expresión algebraica.

Formulación de la tarea
T8: Sean $\boldsymbol{M'(1,-1), N'(a,-3)\ y\ O'(-6,b)}$ los vértices del triángulo F'. determinar las coordenadas de los vértices de la figura inicial F y su imagen F', así como también, el centro simétrico, sabiendo que $\boldsymbol{M(-3,1)}$ es un vértice del triángulo F y que F' es una simetría central de F. Realice la gráfica de la situación.

Respuesta correcta

El estudiante ubica en el plano cartesiano los elementos dados y reconoce los datos desconocidos en la situación. Se recurre a utilizar la definición de simetría central y reconoce la ecuación que satisface a dicha transformación y la aplica de la siguiente manera:

2

Puntos del plano $(x, y) \in \mathbb{Z}$

Coordenadas conocidas de los vértices de las figuras F y F':

$\boldsymbol{M(-3,1)}$

$\boldsymbol{M'(1,-1)}$

$\boldsymbol{N'(a,-3)\ y\ O'(-6,b)}$

Coordenadas del centro de simetría: H (Xr, Yr)

Ecuación para encontrar la simetría central de una figura:

Ecuación 1: $\boldsymbol{N'(X',Y') = (2Xr - x, 2y_r - y)}$

Reinscribe la ecuación anterior para encontrar las coordenadas que representa al centro de simetría tal como se aprecia a continuación:

$\boldsymbol{x' = (2Xr - x)}$

$\boldsymbol{y' = 2y_r - y}$

Encontrando la coordenada Xr del centro de simetría.

$$\boldsymbol{x' = 2Xr - x}$$
$$\boldsymbol{x' + x = 2Xr}$$
$$\boxed{\boldsymbol{\frac{x' + x}{2} = Xr}}$$

Encontrando la coordenada Yr del centro de simetría.

$$\boldsymbol{y' = 2Yr - y}$$
$$\boldsymbol{y' + y = 2Xr}$$
$$\boxed{\boldsymbol{\frac{y' + y}{2} = Yr}}$$

A partir de lo anterior se determina las coordenadas que representan al centro de simetría:

Coordenadas conocidas de los vértices de las figuras:

$\boldsymbol{M(-3,1)}$

$$\boldsymbol{M'(1,-1)}$$

Reemplazo en la ecuación los datos conocidos para encontrar las coordenadas del centro de simetría. Como se muestra a continuación:

$$Xr = \frac{\mathbf{1+(-3)}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{2}} = -1$$

$$Yr = \frac{\mathbf{-1+1}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{2}} = 0$$

Coordenadas del centro de simetría

H (Xr, Yr) = (-1,0)

A partir de los datos encontrados y la ecuación 1 el estudiante determina las coordenadas de las figuras F y F'.

Datos:

H (-1,0) Centro de simetría

N' (a', -3) coordenadas de uno de los vértices de la figura simétrica F'.

N (x, y) coordenadas de uno de los vértices de la figura inicial F.

$$\boldsymbol{N'(X',Y') = (2Xr - x, 2y_r - y)}$$
$$\boldsymbol{N'(X',-3) = (2(-1) - x, 2y_r - y)}$$
$$\boldsymbol{y' = 2y_r - y}$$
$$\boldsymbol{-3 = 2(0) - y}$$
$$\boldsymbol{-3 = -y}$$

$$\mathbf{3 = y}$$

Coordenadas de uno de los vértices de la figura inicial:

N (x, y) = (-1,3)

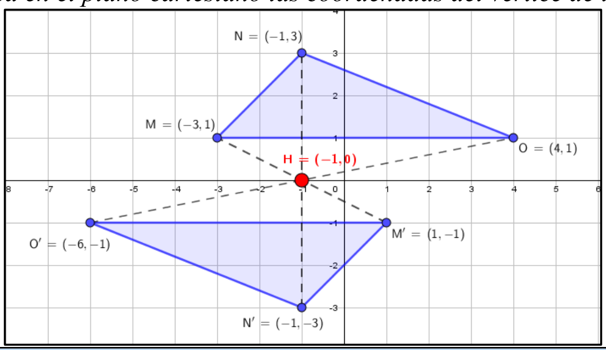
$$\boldsymbol{x' = 2x_r - x}$$
$$\boldsymbol{x' = 2(-1) - (-1)}$$
$$\boldsymbol{x' = -2 + 1}$$
$$\boldsymbol{x' = -1}$$

De esta manera se reemplaza los datos encontrados para verificar las coordenadas encontradas.

$$\boldsymbol{N'(X', -3) = (2(-1) - (-1)), (2(0) - 3))}$$
$$\boldsymbol{N'(x', y') = (-1, -3)}$$

Se efectúa el mismo procedimiento para encontrar las coordenadas O' y O que representa los vértices de las figuras F y F'.

El estudiante ubica en el plano cartesiano las coordenadas del vértice de las figuras F y F'.



Posibles dificultades

- Determina la equidistancia que debe existir del centro simétrico a los vértices de la figura inicial como del centro simétrico a los vértices correspondiente en la figura resultante.
- Establece las coordenadas numéricas del centro de simetría a parir de expresiones algebraicas.
- Determina las coordenadas numéricas de la figura simétrica o inicial haciendo uso de expresiones algebraicas.

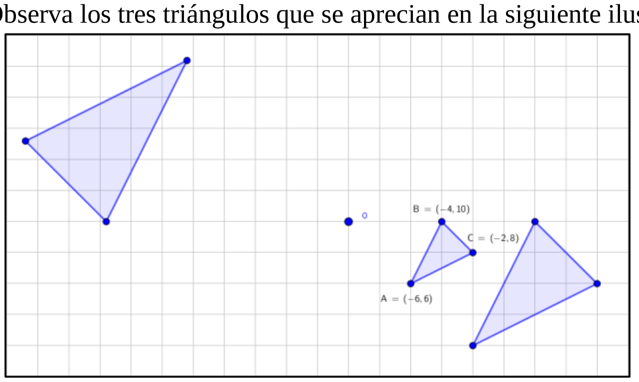
Tarea 9

Metas

- Identifica y describen las características y elementos (centro homotético, coeficiente de similaridad, semejanza, proporción entre sus lados) perteneciente a una homotecia.

Formulación de la Tarea

Observa los tres triángulos que se aprecian en la siguiente ilustración:



P1 Identifica las características en común que puedan tener. Para ello, puedes ayudarte con el compás, el transportador o la regla.

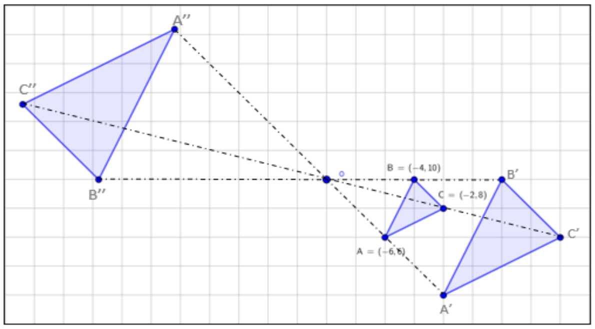
P2 ¿Consideras que los triángulos son semejantes? ¿Por qué? ¿Cuál sería la razón de semejanza?

P3 Describe el movimiento que deben hacer los vértices del triángulo ΔBCD para llegar a las posiciones de cada uno de los otros triángulos

P4 ¿Qué se debe tener en cuenta para efectuar una transformación de homotecia?

Respuesta correcta

Se reconoce que la figura inicial y las figuras homotética deben tener la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño, de igual forma que exista una a proporcionalidad entre los lados homólogo de ambas figuras y la congruencia entre sus ángulos, para lograr reconocer la semejanza que existe entre estas y a su vez, que las líneas rectas que unen a cada vértice de la figura inicial con su correspondiente en la figura homotética deben estar alineados con el centro de similaridad.



El estudiante podrá dar argumentos que permita validar las características que cumplen estas figuras a partir del uso de la regla y el transportador de tal manera que, logre verificar las condiciones que satisfacen a estas figuras.

Identifica a partir de las medidas de los lados de los segmentos de cada triangulo la semejanza entre los triángulos ilustrados para ello recure a reconocer la razón entre estas a partir de la expresión $\mathbf{k} = \frac{\overline{\mathbf{OA'}}}{\overline{\mathbf{OA}}}$ donde k representa el coeficiente de similaridad y la razón entre las dos magnitudes.

El estudiante reconoce a una figura transformada a partir de una homotecia debe existir una distancia entre el centro de similaridad con respecto al centro de similaridad y a su vez que la figura inicial con respecto a su imagen debe ser semejantes entre sí.

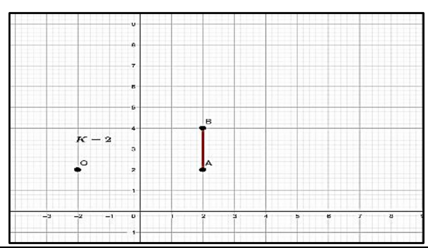
Posibles dificultades
▪ Reconoce la homotecia de una figura o segmento en términos de la conservación de la forma, pero no necesariamente el tamaño. ▪ Establece la razón de semejanza u homotética entre las figuras a partir de la proporcionalidad geométrica entre sus lados homólogos. ▪ Efectúa validad la homotecia de una figura o un segmento gráficamente.
Tarea 10
Metas
▪ Determina las coordenadas de los vértices de la figura final, el coeficiente de similaridad y la razón de homotecia a partir del uso de expresiones algebraicas.
Formulación de la Tarea

En la siguiente ilustración se muestra el segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$, centro (O) y coeficiente (K) de similaridad. Utilizando las expresiones.$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{kx} - \boldsymbol{kxr} + \boldsymbol{xr}$ y $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{ky} - \boldsymbol{kyr} + \boldsymbol{yr}$ Donde; $\boldsymbol{x}'$ y $\boldsymbol{y}'$ corresponden a las coordenadas del punto homotético, k es el coeficiente de similaridad, y, $\boldsymbol{xr}$ y $\boldsymbol{yr}$ son las coordenadas del centro de similaridad. Determine:

P1 ¿Cuáles son las coordenadas del segmento homotético cuyos puntos son A' y B'?

P2 Si solo se tiene el segmento y el centro de similaridad, explica ¿cómo encontrarías el coeficiente de similaridad?

P3 Explica ¿cómo hallarías el centro de similaridad si solo consideras los segmentos $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y $\overline{\boldsymbol{A'B'}}$?



Respuestas correctas

El estudiante, reemplaza en las ecuaciones $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{kx} - \boldsymbol{kxr} + \boldsymbol{xr}$ y $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{ky} - \boldsymbol{kyr} + \boldsymbol{yr}$ para determina las componentes de cada vértice de la figura resultante sustituyendo los valores encontrados en las ecuaciones anteriores. Para ello deberá visualizar los elementos que se identifican en la ilustración que se presenta. Como se muestra a continuación:

Donde:
Puntos del plano B (2,4) y A (2,2) ∈ *uno de los vértices del segmento*
Coordenadas de las coordenadas del centro de similaridad $\boldsymbol{xr}$ y $\boldsymbol{yr}$: O (-2, 2)
coeficiente de similaridad *k*: 2
Reemplazando en la ecuación se obtiene:

$$B' = (kx - kxr + xr \text{ y } ky - kyr + yr)$$

$$B' = [(2(2) - 2(-2) + (-2)], [2(4) - (2)(2) + 2)] B' = (2(2) - 2(-2) + (-2), 2(4) - (2)(2) + 2) B' = (2(2) - 2(-2) + (-2), 2(4) - (2)(2) + 2)$$

$$B' = (4+4-2,\ 8 - 4 + 2)$$

$$B' = (6,6)$$

Del mismo modo para el caso de A'.
Donde A'= (6,2)

De la anterior información el estudiante reconocerá a partir del centro de simetría y la definición de puntos homólogos, logrará ubicar en el plano las coordenadas de los segmentos homotético. Como se ilustra en la siguiente ilustración.

El estudiante deberá reescribir a la ecuación dada, para encontrar el valor correspondiente al coeficiente de similaridad. Como se muestra a continuación:

$$x' = kx - kxr + xr$$
$$x' - xr = kx - kxr$$
$$x' - xr = k(x - xr)$$
$$\frac{(x' - xr)}{(x - xr)} = k$$

Luego de ello podrá reemplazar los valores que permitan verificar el valor correspondiente a este dato.
Es decir:

$$k = \frac{(6 - (-2))}{(2 - (-2))}$$
$$k = \frac{8}{4}$$
$$k = 2$$

Posibles dificultades
▪ Determinan el coeficiente de similaridad o razón de homotecia a partir del uso de expresiones algebraicas. ▪ Determina el centro de homotecia o similaridad mediante el uso de expresiones algebraicas. ▪ Determinan las coordenadas numéricas de la figura homotética o inicial haciendo uso de expresiones algebraicas.

Fuente. Elaboración propia.

4.2.1 *Definición de los cruces entre las categorías de análisis*

Considerando la posibles dificultades que se prevé que tengan los estudiantes en el desarrollo de la prueba piloto y aquellas dificultades reportadas por diferentes investigaciones descritas en el capítulo dos (tratamiento didáctico de las transformaciones geométricas), a continuación, se categorizan las dificultades y fortalezas en el abordaje cada transformación geométrica respecto a los modos de pensamiento sintético-geométrica y analítico-aritmético que recurren y transitan los estudiantes.

Tabla 13. *Definición de los cruces entre los modos de pensamiento y las dificultades en el abordaje de las transformaciones geométricas*

Definición de los cruces en la transformación de traslación	
D1TSG	Estudiantes que no reconocen una traslación en términos de la conservación de la forma y el tamaño de las figuras.
D1TAA	Estudiantes que no diferencian la distancia entre las coordenadas de los vértices de la figura inicial y su correspondiente en la figura final.
D2TSG	Estudiantes que no determinan ni reconocen la magnitud, sentido y dirección de la figura trasladada.
D2TAA	Estudiantes que no determinan usando ecuaciones algebraicas el vector de traslación a partir de un vértice de la figura inicial y su correspondiente en la figura resultante.
D3TSG	Estudiantes que no efectúan ni verifica la traslación de una figura mediante su representación gráfica.
D3TAA	Estudiantes que no determinan mediante el uso de ecuaciones algebraicas las coordenadas numéricas de la figura trasladada o inicial.
Definición de los cruces en la transformación de rotación	
D1RSG	Estudiantes que no reconocen una rotación en términos de la conservación de la forma y el tamaño de las figuras, pero no su sentido.
D1RAA	Estudiantes que no determinan bajo un sistema de coordenadas la distancia entre el vértice y el centro.
	Estudiantes que no determinan bajo un sistema de coordenadas los ángulos iniciales formado entre el vértice de la figura inicial, el centro de rotación y su horizontal.
D2RSG	Estudiantes que no identifican ni determinan el centro de rotación, la amplitud de giro y el sentido de la figura en una rotación.
D2RAA	Estudiantes que no determinan bajo un sistema de coordenadas la magnitud angular con la que fue rotada una figura.
D3RSG	Estudiantes que no reconocen la distancia que hay entre el punto a rotar y el centro de rotación, es igual a la distancia que hay entre el punto rotado y el centro.
	Estudiantes que no determina el ángulo de giro formado por el punto inicial, el centro y el punto resultante.
D3RAA	Estudiantes que no determinan las coordenadas numéricas de la figura rotada o inicial haciendo uso de expresiones algebraicas.
Definición de los cruces en la transformación de simetría central	
D1SCSG	Estudiantes que no reconocen una simetría central en términos de la conservación de la forma y el tamaño de las figuras con orientación invertida alrededor de un punto.
D1SCAA	Estudiantes que no determinan la equidistancia que debe existir del centro simétrico a los vértices de la figura inicial como del centro simétrico a los vértices correspondiente en la figura resultante.

D2SCSG	Estudiantes que no establecen ni identifican el centro se simetría, la orientación y sentido en el que se produce la transformación de una figura.
D2SCAA	Estudiantes que no establecen las coordenadas numéricas del centro de simetría a parir de expresiones algebraicas.
D3SCSG	Estudiantes que no determinan el centro simétrico considerando a este como el punto medio entre los vértices de la figura inicial y con sus correspondiente en la figura final.
	Estudiantes que no determinan ni verifican la simetría central mediante su representación gráfica
D3SCAA	Estudiantes que no determinan las coordenadas numéricas de la figura simétrica o inicial haciendo uso de expresiones algebraicas.
Definición de los cruces en la transformación de simetría axial	
D1SASG	Estudiantes que no reconocen una simetría axial en términos de la conservación de la forma y el tamaño de las figuras con orientación invertida con respecto a una recta.
D1SAAA	Estudiantes que no determinan bajo un sistema de coordenadas la equidistancia entre los vértices de la figura inicial y su correspondiente en la final respecto del eje de simetría.
D2SASG	Estudiantes que no determinan el eje de simetría con el que se reflejó la figura inicial para obtener la figura resultante.
	Estudiantes que no establecen ni reconocen la perpendicularidad que debe existir entre el eje de simetría y los segmentos formados por cada vértice de la figura inicial con los vértices correspondientes en la figura resultante.
D2SAAA	Estudiantes que no establecen ni determinan la ecuación algebraica del eje simétrico por medio del cual una figura es reflejada.
D3SASG	Estudiantes que no efectúan ni validan una simetría axial haciendo uso de una representación gráfica.
D3SAAA	Estudiantes que no determinan las coordenadas numéricas de la figura reflejada o inicial haciendo uso de expresiones algebraicas.
Definición de los cruces en la transformación de homotecia	
D1HSG	Estudiantes que no reconocen la homotecia de una figura o segmento en términos de la conservación de la forma, pero no necesariamente el tamaño.
	Estudiantes que no reconocen ni identifican una homotecia alineando los vértices de la figura inicial y su correspondiente en la figura resultante con el centro de similaridad.
D1HAA	Estudiantes que no determinan el coeficiente de similaridad o razón de homotecia a partir del uso de expresiones algebraicas.
D2HSG	Estudiantes que no establecen la razón de semejanza u homotética entre las figuras a partir de la proporcionalidad geométrica entre sus lados homólogos.
	Estudiantes que no determinan el centro de similaridad mediante la intercepción de las rectas que unen a cada vértice de la figura inicial con su correspondiente en la figura homotética.

D2HAA	Estudiantes que no determinas el centro de homotecia o similaridad mediante el uso de expresiones algebraicas.
D3HSG	Estudiantes que no efectúan ni validad la homotecia de una figura o un segmento gráficamente.
D3HAA	Estudiantes que no determinan las coordenadas numéricas de la figura homotética o inicial haciendo uso de expresiones algebraicas.

Fuente. Elaboración propia.

La tabla anterior, muestra la categorización y definición de los cruces en cada transformación geométrica asociadas con las dificultadas que pueden surgir de acuerdo con el modo de pensamiento Sintético-Geométrico y Analítico-Aritmético en que se aborde. De manera que, si en el abordaje de las transformaciones no surge alguno de estos tipos de dificultades, significa que los estudiantes tienen fortalezas en ello. Por esta razón, en la tabla siguiente se detallan las definiciones de los cruces en términos de fortalezas o saberes que se pueden vislumbrar en el abordaje de cada transformación geométrica en relación con los modos de pensamiento.

Tabla 14. *Definición de los cruces entre los modos de pensamiento y las fortalezas en el abordaje de las transformaciones geométricas*

Definición de los cruces en la transformación de traslación	
F1TSG	Estudiantes que reconocen una traslación en términos de la conservación de la forma y el tamaño de las figuras.
F1TAA	Estudiantes que diferencian la distancia entre las coordenadas de los vértices de la figura inicial y su correspondiente en la figura final.
F2TSG	Estudiantes que determinan reconocen la magnitud, sentido y dirección de la figura trasladada.
F2TAA	Estudiantes que determinan usando ecuaciones algebraicas el vector de traslación a partir de un vértice de la figura inicial y su correspondiente en la figura resultante.
F3TSG	Estudiantes que efectúan y verifica la traslación de una figura mediante su representación gráfica.
F3TAA	Estudiantes que determinan mediante el uso de ecuaciones algebraicas las coordenadas numéricas de la figura trasladada o inicial.
Definición de los cruces en la transformación de rotación	
F1RSG	Estudiantes que reconocen una rotación en términos de la conservación de la forma y el tamaño de las figuras, pero no su sentido.
F1RAA	Estudiantes que determinan bajo un sistema de coordenadas la distancia entre el vértice y el centro.

	Estudiantes que determinan bajo un sistema de coordenadas los ángulos iniciales formado entre el vértice de la figura inicial, el centro de rotación y su horizontal.
F2RSG	Estudiantes que identifican y determinan el centro de rotación, la amplitud de giro y el sentido de la figura en una rotación.
F2RAA	Estudiantes que determinan bajo un sistema de coordenadas la magnitud angular con la que fue rotada una figura.
F3RSG	Estudiantes que reconocen la distancia que hay entre el punto a rotar y el centro de rotación, es igual a la distancia que hay entre el punto rotado y el centro.
	Estudiantes que determina el ángulo giro es el formado por el punto inicial, el centro y el punto resultante.
F3RAA	Estudiantes que determinan las coordenadas numéricas de la figura rotada o inicial haciendo uso de expresiones algebraicas.
Definición de los cruces en la transformación de simetría central	
F1SCSG	Estudiantes que reconocen una simetría central en términos de la conservación de la forma y el tamaño de las figuras con orientación invertida alrededor de un punto
F1SCAA	Estudiantes que determinan la equidistancia que debe existir del centro simétrico a los vértices de la figura inicial como del centro simétrico a los vértices correspondiente en la figura resultante.
F2SCSG	Estudiantes que establecen e identifican el centro se simetría, la orientación y sentido en el que se produce la transformación de una figura.
F2SCAA	Estudiantes que establecen las coordenadas numéricas del centro de simetría a parir de expresiones algebraicas.
F3SCSG	Estudiantes que determinan el centro simétrico considerando a este como el punto medio entre los vértices de la figura inicial y con sus correspondiente en la figura final.
	Estudiantes que determinan y verifican la simetría central mediante su representación gráfica
F3SCAA	Estudiantes que determinan las coordenadas numéricas de la figura simétrica o inicial haciendo uso de expresiones algebraicas.
Definición de los cruces en la transformación de simetría axial	
F1SASG	Estudiantes que reconocen una simetría axial en términos de la conservación de la forma y el tamaño de las figuras con orientación invertida con respecto a una recta.
F1SAAA	Estudiantes que determinan bajo un sistema de coordenadas la equidistancia entre los vértices de la figura inicial y su correspondiente en la final respecto del eje de simetría.
F2SASG	Estudiantes que determinan el eje de simetría con el que se reflejó la figura inicial para obtener la figura resultante.
	Estudiantes que establecen y reconocen la perpendicularidad que debe existir entre el eje de simetría y los segmentos formados por cada vértice de la figura inicial con los vértices correspondientes en la figura resultante.

F2SAAA	Estudiantes que establecen y determinan la ecuación algebraica del eje simétrico por medio del cual una figura es reflejada.
F3SASG	Estudiantes que efectúan y validan una simetría axial haciendo uso de una representación gráfica.
F3SAAA	Estudiantes que determinan las coordenadas numéricas de la figura reflejada o inicial haciendo uso de expresiones algebraicas.
Definición de los cruces en la transformación de homotecia	
F1HSG	Estudiantes que no reconocen la homotecia de una figura o segmento en términos de la conservación de la forma, pero no necesariamente el tamaño.
	Estudiantes que no reconocen ni identifican una homotecia alineando los vértices de la figura inicial y su correspondiente en la figura resultante con el centro de similaridad.
F1HAA	Estudiantes que no determinan el coeficiente de similaridad o razón de homotecia a partir del uso de expresiones algebraicas.
F2HSG	Estudiantes que no establecen la razón de semejanza u homotética entre las figuras a partir de la proporcionalidad geométrica entre sus lados homólogos.
	Estudiantes que no determinan el centro de similaridad mediante la intercepción de las rectas que unen a cada vértice de la figura inicial con su correspondiente en la figura homotética.
F2HAA	Estudiantes que no determinas el centro de homotecia o similaridad mediante el uso de expresiones algebraicas.
F3HSG	Estudiantes que no efectúan ni validad la homotecia de una figura o un segmento gráficamente.
F3HAA	Estudiantes que no determinan las coordenadas numéricas de la figura homotética o inicial haciendo uso de expresiones algebraicas.

Fuente. Elaboración propia.

Lo anterior, proporciona desde la fundamentación teórica los elementos sobre los cuales versa el análisis de la información suministrada tanto por la aplicación de la prueba piloto como de la secuencia de tareas, para de esta forma, dar solución a la pregunta de investigación.

4.3 Análisis de resultados de la prueba piloto

La aplicación de la prueba piloto diseñada en este trabajo de indagación fue llevada a cabo en dos sesiones con un receso de 15 minutos (4:00 pm - 4:15 pm) entre estas, la cual fue implementada el 21 de diciembre de 2021 y tuvo una duración aproximada de 4 horas (inicio de la sesión 2:00 pm y cierre de la sesión 6:15 pm). Cabe resaltar, que en esta intervención no se consideró la interacción entre los entrevistados (estudiantes) y los entrevistadores (investigadores), así mismo, que el espacio con que se contó para la aplicación fue concretado y organizado en conjunto con el profesor encargado de uno de los cursos que se orientan a los estudiantes de segundo semestre.

De este modo, en lo que sigue, se presentan los resultados mediante un modelo de tabla que caracteriza las producciones escritas de los estudiantes en relación con las preguntas de cada tarea propuesta en la secuencia referente a cada tipo de transformación geométrica, teniendo en cuenta que, las tareas impares (1, 3, 5, 7 y 9) corresponden al enfoque sintético y las pares (2, 4, 6, 8 y 10) al enfoque analítico, es decir, que para cada transformación geométrica se propuso una tarea referente a cada enfoque geométrico y de esta forma, se efectúa la caracterización de las respuestas. Posterior a ello, se realiza el análisis de los resultados en función de categorizar los saberes y dificultades que presentan los estudiantes en el abordaje de las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico.

4.3.1 Saberes y dificultades que tienen los estudiantes en el abordaje de la transformación de traslación

La traslación es una transformación geométrica para la cual se propuso dos tareas, la primera desde el enfoque sintético y la segunda, desde el enfoque analítico. En relación con la primera, el propósito giraba en torno a que los dicentes identificaran los elementos y condiciones que se deben cumplir para reconocer y aplicar una transformación de traslación a una figura dada. De manera similar, la segunda pretendía que los estudiantes a partir del uso de una expresión algebraica determinaran el vector de traslación, los vértices de la figura trasladada y su representación gráfica en el plano cartesiano.

En este orden de ideas, el tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes con respecto a las preguntas de las tareas (T1 y T2) se reportan en la tabla 10.

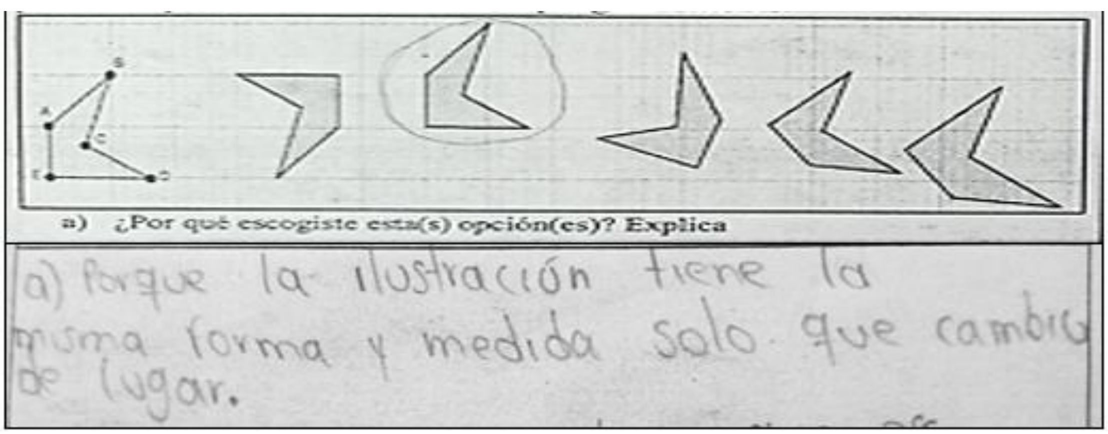
Tabla 15. *Tipificación de respuestas tarea 1 y 2*

Tipos de repuestas	Respuestas por preguntas					
	Sintético (T1)		Analítico (T2)			
	P1	**P2**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de elementos propios de los enfoques sintético y/o analítico.	7	1	1	1	1	1
Estudiantes que responden correctamente, pero con argumentos no válidos	5	1	0	0	0	0
Estudiantes que responden correctamente pero no justifican lo que comunican.	5	3	0	0	0	0
Estudiantes que responden incorrectamente.	3	9	6	3	6	2
Estudiantes que no reportan respuesta o manifiestan no saber qué y cómo responder.	0	6	13	16	13	17
Total	20	20	20	20	20	20

Fuente. Elaboración propia.

Como se puede apreciar en la tabla anterior, un número significativo de estudiantes (7 de 20) respondieron correctamente a T1_P1 del enfoque sintético; dejando ver fortalezas relacionadas con el reconocimiento de dicha transformación y en la comparación de la figura inicial con respecto a la figura trasladada, en términos de forma, tamaño y posición, la cuales, de acuerdo con Sierpinska (2000) están asociadas con el modo sintético-geométrico el cual posibilita describir el objeto a través de su representación gráfica y la precepción visual. Lo anterior, se muestra en la siguiente imagen.

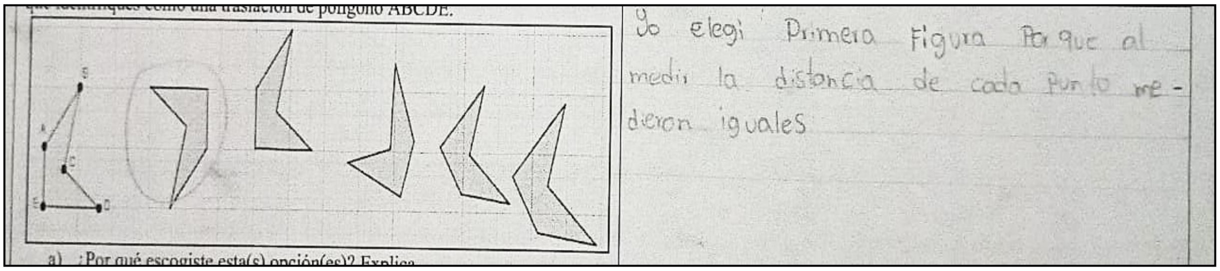
Imagen 1. *Respuesta de un estudiante respecto a T1_P1*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

No obstante, se reconoce que los estudiantes tienen dificultades en la determinación mediante regla y compas de la distancia entre los vértices de la figura inicial y sus correspondientes en la figura final; lo cual según Montes (2012) es el proceso desde lo sintético que permite determinar el vector o la cantidad de unidades de medidas con la que fue traslada la figura. Así mismo, los resultados reflejan que 3 de 20 estudiantes no identifican que la figura final debe conservar el sentido de la figura inicial, constituyendo así, la no diferenciación de esta transformación geométrica con respecto a las demás. Tal y como se ilustra en la imagen siguiente.

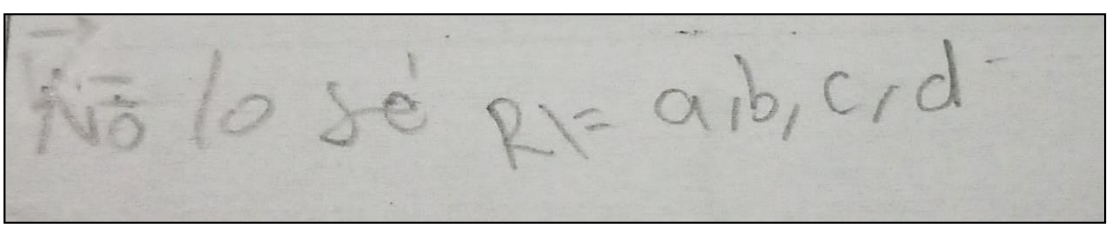
Imagen 2. *Respuesta de un estudiante respecto a T1_P1*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

Por otra parte, en la tabla se puede observar que en la tarea dos (T2) relativa al enfoque analítico, la mayoría de los estudiantes (19 de 20) no proporcionaron respuestas, reflejando de esta manera dificultades en el uso de expresiones algebraicas que le permitirían determinar no solo el vector de traslación sino también, las coordenadas de los vértices de la figura resultante, de modo que, según Sierpinska (2000) no reconocen ni consideran otros elementos que no son de tipo espacial sino analítico-aritmético, tales como las relaciones operacionales y procedimentales mediante el uso de ecuaciones o expresiones algebraicas . Lo anterior, se refleja en la imagen 3.

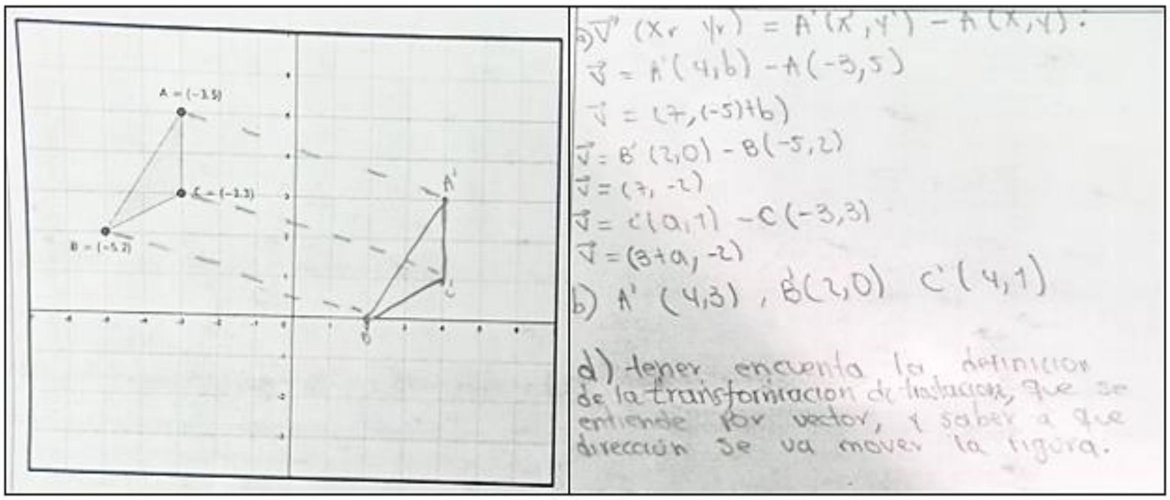
Imagen 3. *Respuesta de un estudiante respecto a T2*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

En este sentido, es importante mencionar que solo un estudiante hace uso notablemente de la expresión algebraica proporcionada para dar respuesta a las preguntas de T2, lo cual le permitió identificar, a partir de una ilustración presentada, las coordenadas numéricas tanto de los vértices de la figura inicial como uno de los vértices de la figura final para de esta forma, obtener no solo el vector de traslación sino los valores numéricos de las coordenadas faltantes de la figura final. La respuesta de este estudiante se reporta en la imagen 4.

Imagen 4. *Respuesta de un estudiante respecto a P1, P2, P3 Y P4 de T2*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

La imagen 4, tal y como manifiesta Sierpinska (2000) no solo refleja la forma en que el estudiante describe directamente el objeto mediante su representación gráfica en la que evoca los elementos propios (vector, orientación, forma, tamaño, posición) que se consideran para reconocer esta transformación isométrica, sino también, a través del uso de expresiones algebraicas; estableciendo relaciones numéricas y procedimentales para determinar el vector de traslación y la figura resultante.

4.3.2 Saberes y dificultades que tienen los estudiantes en el abordaje de la transformación de rotación

La rotación es una transformación isométrica para la cual se propuso dos tareas, la primera desde el enfoque sintético y la segunda, desde el enfoque analítico. En cuanto a la primera, la intención estaba centrada en el reconocimiento y determinación de los elementos tales como, el centro, el sentido y la amplitud de giro, que se deben considerar en una rotación. De manera análoga, la segunda pretendía que los estudiantes a través de un paso a paso del uso de una expresión algebraica pudieran determinar las coordenadas de la figura resultante con respecto a una inicial, así como su representación gráfica en el plano cartesiano a partir de la relación entre dichos elementos.

En este orden de ideas, el tipo de respuestas que reportan los estudiantes referentes a las preguntas de cada tarea (T3 y T4) se refleja en la tabla siguiente.

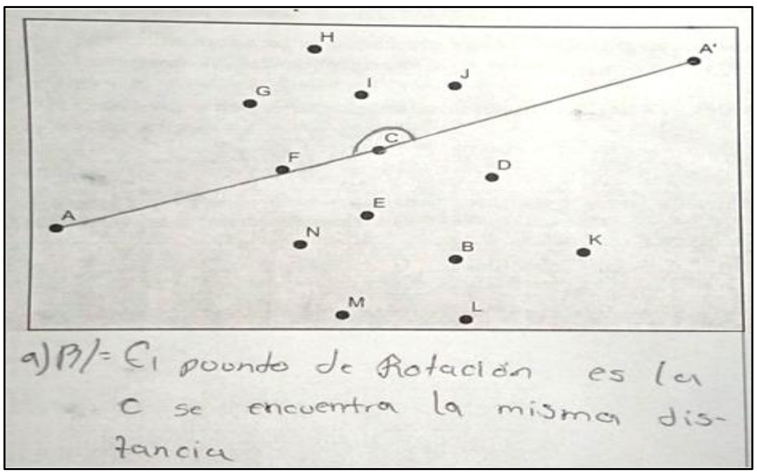
Tabla 16. *Tipificación de respuestas tarea 3 y 4*

Tipos de repuestas	**Respuestas por preguntas**							
	Sintético (T3)				**Analítico (T4)**			
	P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de elementos propios de los enfoques sintético y/o analítico.	3	1	0	2	3	0	0	0
Estudiantes que responden correctamente, pero con argumentos no válidos	1	1	0	2	0	0	0	0
Estudiantes que responden correctamente pero no justifican lo que comunican.	3	2	2	2	0	0	0	0
Estudiantes que responden incorrectamente.	6	7	5	5	3	3	2	2
Estudiantes que no reportan respuesta o manifiestan no saber qué y cómo responder.	7	9	13	10	14	17	18	18
Total	20	20	20	20	20	20	20	20

Fuente. Elaboración propia.

La tabla anterior, pone de manifiesto que solo 3 de 20 estudiantes respondieron correctamente a la T3_P1 desde el enfoque sintético, los cuales dejan entrever que presentan fortalezas en determinar mediante regla y compas que la distancia que hay entre el punto a rotar y el centro de rotación, es igual a la distancia que hay entre el punto rotado y el centro, así como también, en la determinación del centro de rotación. Esto deja ver, de acuerdo con Sierpinska (2000) que dichas fortalezas están relacionadas con el modo SG, pues posibilita acceder a la compresión del objeto a través de la percepción visual. Lo anterior, se muestra en la imagen siguiente.

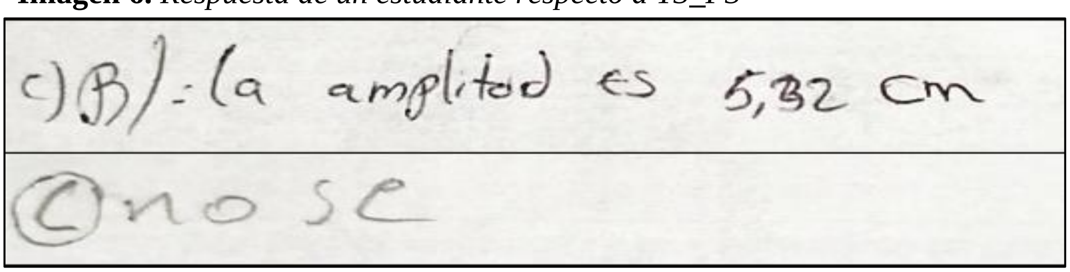
Imagen 5. *Respuesta de un estudiante respecto a T3_P1*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

No obstante, la tabla también muestra que 18 de 20 estudiantes no reportan respuestas, asimismo, se resalta que 2 de 20 estudiantes responden incorrectamente, lo cual quiere decir, que estos presentan dificultades en el cálculo de la amplitud del ángulo con el que se rotó el punto y en establecer la relación entre el punto inicial, el final y el centro, además, confunden las unidades de longitud con las unidades angulares. Así como a continuación se presenta en la imagen.

Imagen 6. *Respuesta de un estudiante respecto a T3_P3*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

Por otra parte, en la tarea T4 relativa al enfoque analítico se aprecia que 3 de 20 estudiantes respondieron correctamente haciendo uso de elementos propios de este enfoque, en tanto que, se destacan fortalezas en procesos procedimentales concernientes según Sierpinska (2000) a relaciones numéricas y algebraicas mediante el empleo de una ecuación matemática proporcionada en T4_P1, lo cual se puede observar en la imagen siguiente.

Imagen 7. *Respuesta de un estudiante respecto a T4_P1*

Tarea 4. dado el triángulo con coordenadas $E(1,2), F(3,2)$ y $G(5,4)$ rotarlo	*Escribe tus respuestas y procedimientos en este espacio*
con un ángulo $\beta = 60°$, sabiendo que el centro de rotación esta en $H(1,2)$. Para ello, considere los siguientes pasos:	$\sqrt{(1-1)^2+(2-2)^2} = 0$
• Primero, se buscan los radios de cada vértice al centro, usando $r = \sqrt{(x-x_r)^2+(y-y_r)^2}$	$\sqrt{(3-1)^2+(2-2)^2} = 2$
	$\sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2} = \sqrt{20}$

Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

Sin embargo, respecto a P2, P3 y P4 de T4 llama la atención que ningún estudiante reportó respuesta o en efecto, ponían de manifiesto no saber qué y cómo responder, lo cual desde el punto de vista de Gascón (2002-2003) obedece al abordaje que se ha dado a esta transformación centralizado en el enfoque sintético en aras de solo configurar la descripción de los elementos y propiedades que la determinan. Esto se vislumbra en la imagen 8.

Imagen 8. *Respuesta de un estudiante respecto a P2, P3 y P4 de T4*

Temas no conocidos

Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

4.3.3 Saberes y dificultades que tienen los estudiantes en el abordaje de la transformación de simetría axial

La simetría axial es una transformación isométrica para la cual se propuso dos tareas; la primera, desde el enfoque sintético con el propósito de reconocer que elementos consideran los estudiantes para identificar una transformación de simetría axial a partir de un conjunto de figuras;

y, la segunda, desde el enfoque analítico con la intención de vislumbrar la forma en que los estudiantes determinan las coordenadas de la figura reflejada respecto a ejes simétricos secantes teniendo en cuenta los elementos presentes en una representación gráfica, asimismo, percibir la manera en que establecen las ecuaciones de las rectas y relacionan otra transformación geométrica que dé cuenta de este movimiento.

En tal sentido, en la tabla siguiente se reflejan el tipo de respuestas que reportan los estudiantes referentes a las preguntas de cada tarea (T5 y T6).

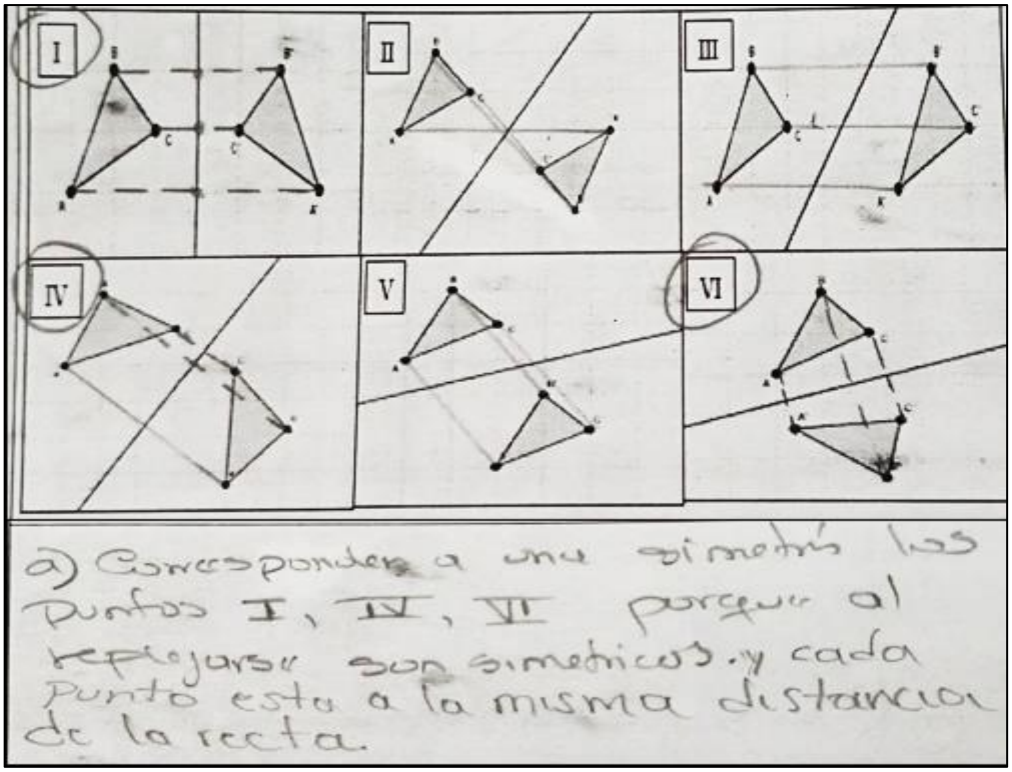
Tabla 17. *Tipificación de respuestas tarea 5 y 6*

Tipos de repuestas	Respuestas por preguntas							
	Sintético (T5)			Analítico (T6)				
	P1	P2	P3	P1	P2	P3	P4	P5
Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de elementos propios de los enfoques sintético y/o analítico.	3	2	0	0	0	0	0	0
Estudiantes que responden correctamente, pero con argumentos no válidos	1	0	1	2	1	1	2	1
Estudiantes que responden correctamente pero no justifican lo que comunican.	0	1	1	0	1	0	0	1
Estudiantes que responden incorrectamente.	8	1	2	7	3	0	2	2
Estudiantes que no reportan respuesta o manifiestan no saber qué y cómo responder.	8	16	16	11	15	19	16	16
Total	20	20	20	20	20	20	20	20

Fuente. Elaboración propia.

Como se refleja en la tabla anterior, solo 4 de 20 estudiantes responden correctamente a P1. En estas, se destaca la manera en que los estudiantes asocian dicha transformación al reflejo que se da mediante un espejo, en la que cada figura conserva su forma y tamaño, pero con orientación invertida, además deducen la correspondencia punto a punto que se da entre estas. De igual modo, 2 de 20 estudiantes muestran fortalezas en la determinación de la perpendicularidad que debe existir entre el segmento que une cada punto de la figura con su imagen y el eje de simetría, para de esta manera reconocer una simetría axial (Julio, 2014). Notándose esto, en la imagen 9.

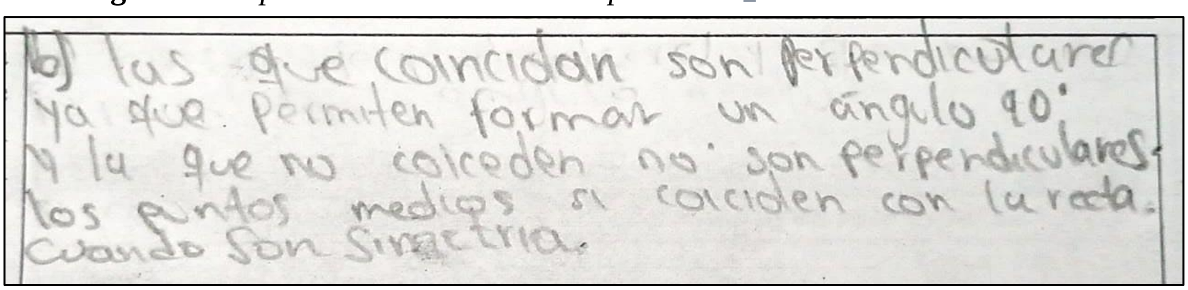
Imagen 9. *Respuesta de un estudiante respecto a P1 de T5*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

Nótese en la imagen 9, que para el estudiante reconocer cuales de las ilustraciones representan una simetría axial, primero trazan segmentos para dar cuenta de la correspondencia punto a punto entre las figuras y, segundo, consideran solo aquellas ilustraciones en las que los segmentos trazados son perpendiculares al eje de simetría y el punto medio coincide con las rectas. Esta inferencia, se deja entrever en la imagen siguiente.

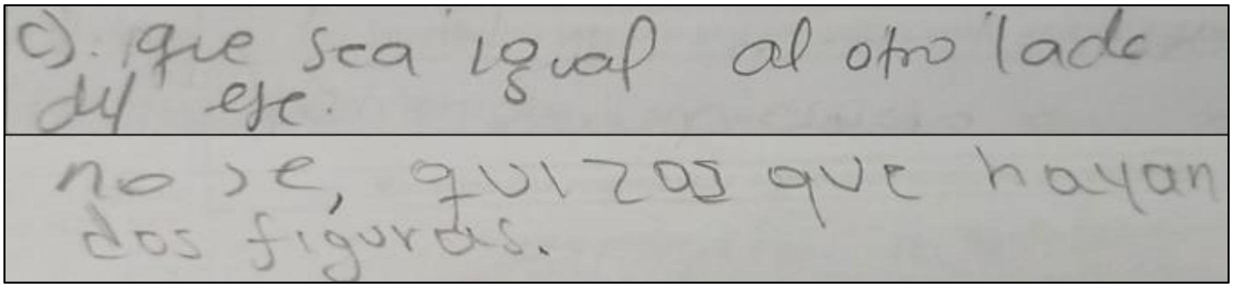
Imagen 10. *Respuesta de un estudiante respecto a T5_P2*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

Por el contrario, 18 de 20 estudiantes en relación con T5_P3 responden incorrectamente o no proporcionan respuestas, de este modo, se aprecia que estos estudiantes presentan dificultades en la identificación de la simetría axial, lo cual, en concordancia con Díaz y Bazán (2011) son producto de no considerar que las rectas que vinculan los vértices de la figura inicial con sus correspondientes en la figura final, al compararse son paralelas, y que el eje de simetría debe pasar por los puntos medios de dichas rectas. Un ejemplo de lo anterior se muestra a continuación.

Imagen 11. *Respuesta de un estudiante respecto a T5_P3*

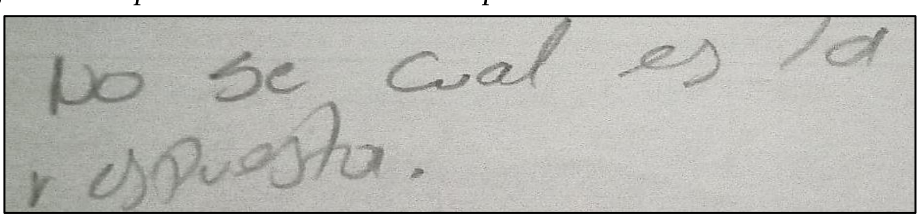

c). que sea igual al otro lado del eje.

no se, quizas que hayan dos figuras.

Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

Referente a T6 centrada en el enfoque analítico 18 de 20 estudiantes no reportaron respuesta correcta en relación con cada pregunta, lo cual significa que estos tienen dificultades para aplicar una simetría axial a una figura dada respecto de ejes simétricos secantes ya sea haciendo uso de regla y compás o a partir de expresiones algebraicas que den cuenta de dicha transformación. De modo similar, presentan dificultad en establecer las ecuaciones de los ejes simétricos con los que se pedía reflejar la figura dada. Este hecho, se observa en la siguiente imagen.

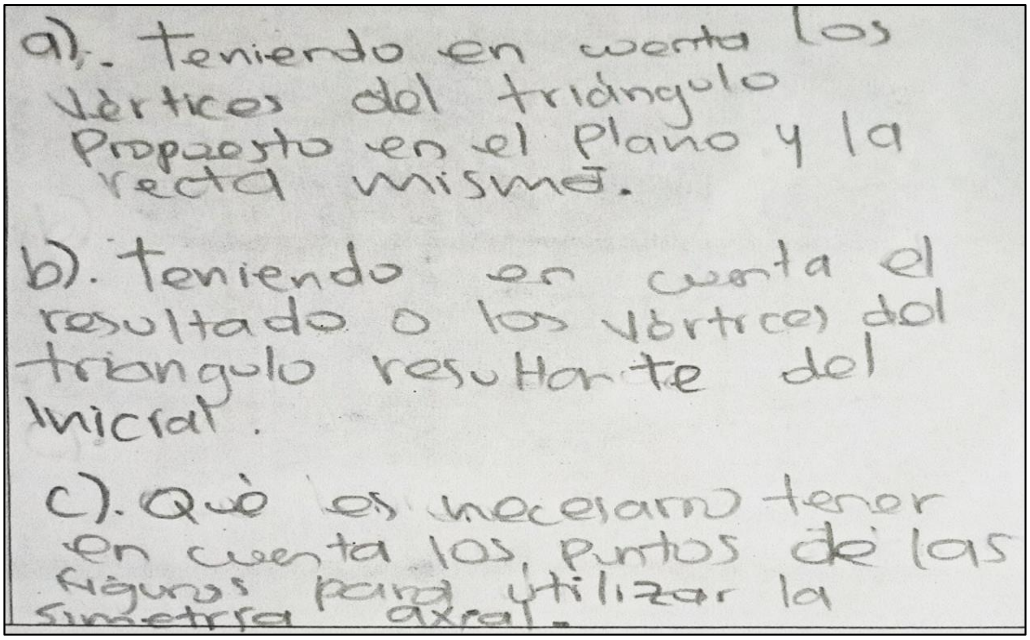
Imagen 12. *Respuesta de un estudiante respecto a T6*


No se cual es la respuesta.

Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

Por otra parte, se destaca que al menos 2 de 20 estudiantes respecto a P1, P2 y P3 de T6 describen a partir de T5 y la ilustración propuesta en T6 los elementos que se deben considerar para aplicar una simetría axial, sin embargo, teniendo en cuenta a Sierpinska (2000) estos estudiantes no asocian el uso de expresiones algebraicas para determinar las coordenadas numéricas de los vértices de la figura resultante ni las ecuaciones de los ejes simétricos mediante los cuales se efectúa dicha transformación. La imagen 13 deja ver este panorama.

Imagen 13. *Respuesta de un estudiante respecto a P1, P2 y P3 de T6*


a).- Teniendo en cuenta los vèrtices del triángulo Propuesto en el Plano y la recta mismá.

b). teniendo en cuenta el resultado o los vèrtices del triangulo resultante del inicial.

c). Què es necesario tener en cuenta los, Puntos dè las figuras para utilizar la simetría axial.

Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

4.3.4 Saberes y dificultades que tienen los estudiantes en el abordaje de la transformación de simetría central

En la secuencia de tareas se propuso para la transformación de simetría central dos tareas, cada una desde un enfoque distinto de la geometría. La primera, alusiva al enfoque sintético buscando que los estudiantes pusieran de manifiesto aquellas condiciones y elementos que se deben tener en cuenta para reconocer y aplicar una simetría central; tales como, el centro de simetría, la equidistancia de las figuras respecto al centro y la inversión de dichas figuras. La segunda, intentaba decantar la forma en que los estudiantes a partir de algunos de los vértices de la figura inicial determinan las coordenadas de los vértices de la figura final, de tal manera, que en este proceso hicieran uso de alguna expresión algebraica.

De esta manera, en la tabla que sigue se reportan el tipo de respuestas que proporcionan los estudiantes respecto a las preguntas de cada tarea (T7 y T8).

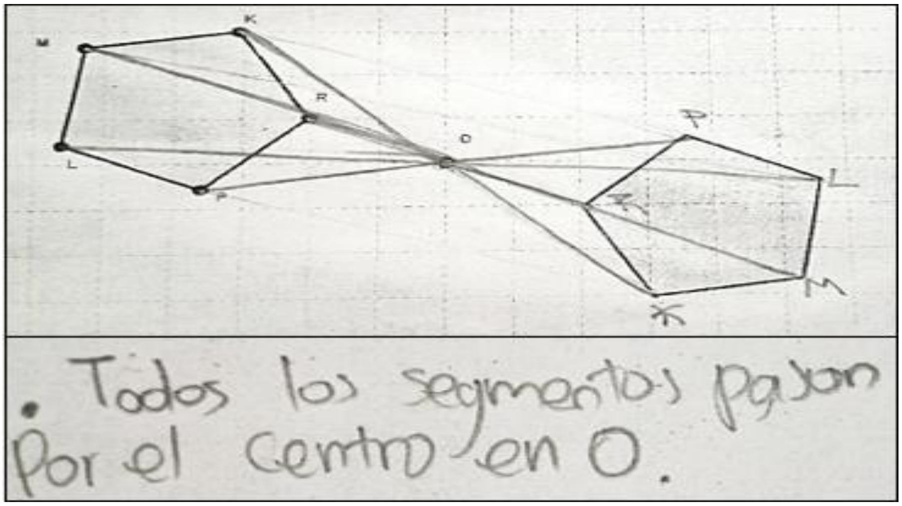
Tabla 18. *Tipificación de respuestas tarea 7 y 8*

Tipos de repuestas	**Respuestas por preguntas**						
	Sintético (T7)			**Analítico (T8)**			
	P1	**P2**	**P3**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de elementos propios de los enfoques sintético y/o analítico.	3	2	0	0	0	0	0
Estudiantes que responden correctamente, pero con argumentos no válidos	1	0	0	0	0	0	0
Estudiantes que responden correctamente pero no justifican lo que comunican.	1	0	0	0	0	0	0
Estudiantes que responden incorrectamente.	5	4	2	0	0	0	0
Estudiantes que no reportan respuesta o manifiestan no saber qué y cómo responder.	10	14	18	20	20	20	20
Total	20	20	20	20	20	20	20

Fuente. Elaboración propia.

En la anterior tabla, se logra percibir que respecto a T7 del enfoque sintético los estudiantes (3 de 20) proporcionan respuestas correctas en relación con P1; dejando entrever fortalezas no solo referidas al nombrar los vértices de la figura final, sino también al reconocer que, al trazar cada segmento con su vértice correspondiente en la figura inicial, estos pasan por el centro de simetría, del cual equidistan cada vértice y su simétrico. En este sentido, el modo en que los estudiantes piensan la transformación de simetría central se encuentra asociado con el modo SG (Sierpinska, 2000). Lo anterior, se pone de manifiesto en la imagen siguiente.

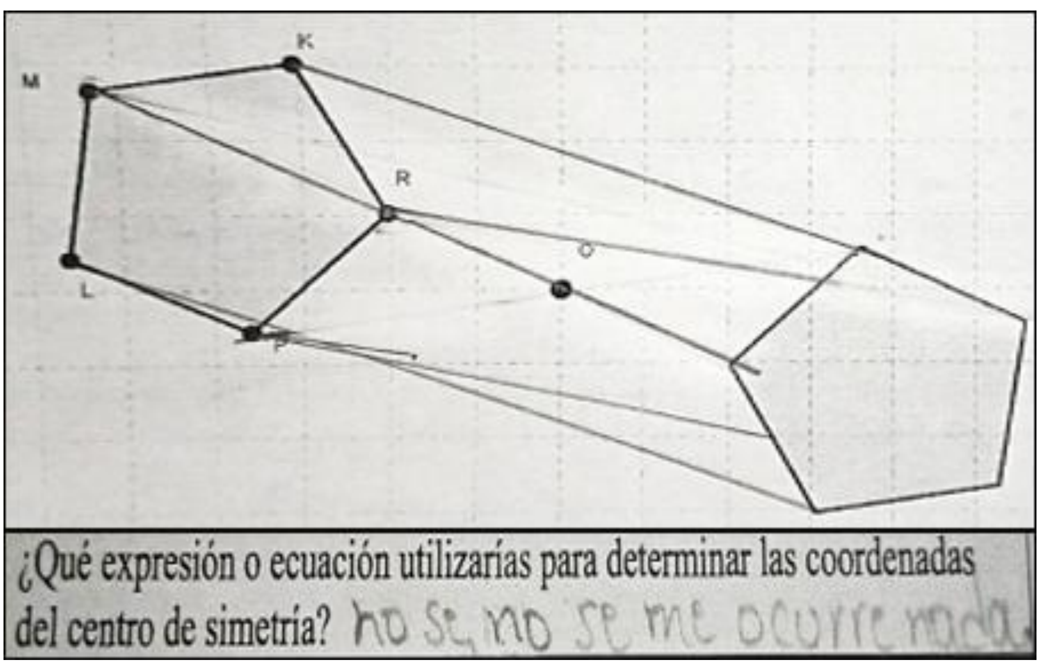
Imagen 14. *Respuesta de un estudiante respecto a T7_P1*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

Ahora bien, en relación con T7_P3 ningún estudiante pudo explicar y proponer una expresión algebraica que permitiera determinar el centro de simetría haciendo uso de la regla, de modo que, la dificultad de acuerdo con Montes (2012) gira en torno a no asociar la equidistancia que hay entre cada punto de la figura inicial y la final con respecto al centro simétrico como el punto medio de las rectas que unen cada vértice y su correspondiente. Tal como se aprecia en la próxima imagen.

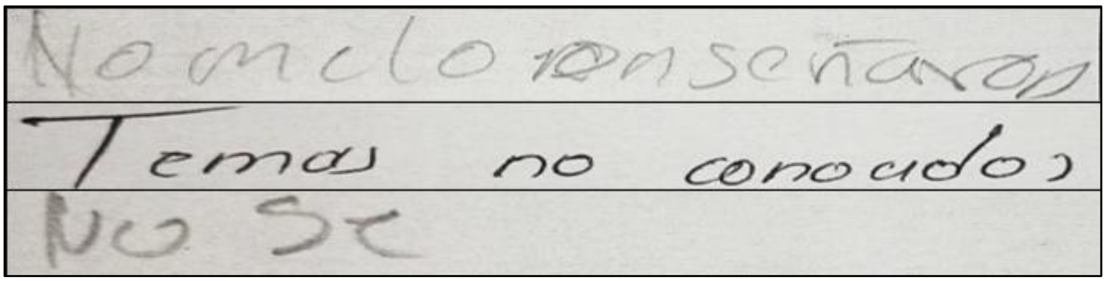
Imagen 15. *Respuesta de un estudiante respecto a T7_P3*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

Por otra parte, es importante anotar que la cantidad total (20) de estudiantes que desarrollaron la secuencia no reportaron respuesta o manifestaban no saber qué y cómo responder a las preguntas 1, 2 y 3 en relación con T8 desde el enfoque analítico, de manera que, considerando las ideas de Gascón (2002) y Sierpinska (2000) dicha dificultad está asociada al abordaje centralizado de la simetría central en el SG, dejando de lado el modo AA el cual le permite dar cuenta de la transformación empleando expresiones algebraicas o ecuaciones. Lo anterior, se refleja en la imagen próxima.

Imagen 16. *Respuesta de un estudiante respecto a T8*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

4.3.5 Saberes y dificultades que tienen los estudiantes en el abordaje de la transformación de homotecia

La homotecia es una transformación isomórfica para la cual se planteó dos tareas, una desde el enfoque sintético y otra desde el analítico. En relación con la primera, su foco estuvo centrado en cómo a partir del uso de regla y compás los estudiantes identificaban y describían las características y elementos (centro homotético, coeficiente de similaridad, semejanza, proporción entre sus lados) perteneciente a una homotecia. En cuanto a la segunda, se buscó enfatizar la manera en que los estudiantes mediante el uso de expresiones algebraicas determinaban las coordenadas de los vértices de la figura final, el coeficiente de similaridad y la razón de homotecia.

En este sentido, el tipo de respuestas proporcionadas por los estudiantes para cada pregunta de las tareas (T9 y T10) se vislumbra en la siguiente tabla.

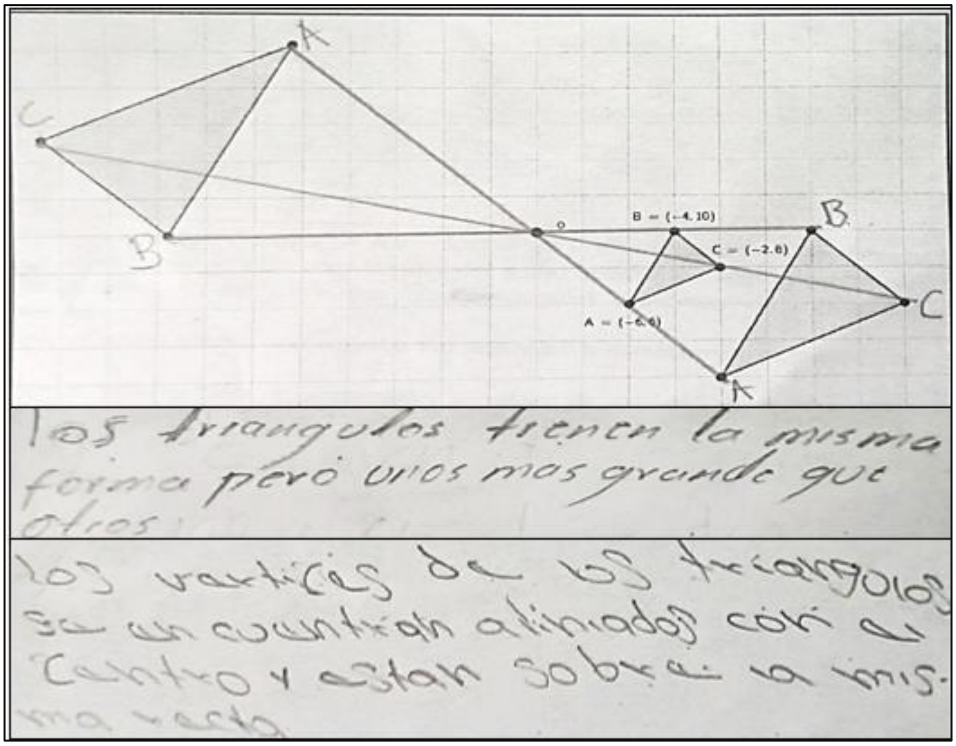
Tabla 19. *Tipificación de respuestas tarea 9 y 10*

Tipos de repuestas	Respuestas por preguntas						
	Sintético (T9)				Analítico (T10)		
	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3
Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de elementos propios de los enfoques sintético y/o analítico.	0	0	0	0	0	0	0
Estudiantes que responden correctamente, pero con argumentos no válidos	2	0	0	0	0	0	0
Estudiantes que responden correctamente pero no justifican lo que comunican.	0	0	0	0	0	0	0
Estudiantes que responden incorrectamente.	2	3	3	3	1	0	0
Estudiantes que no reportan respuesta o manifiestan no saber qué y cómo responder.	16	17	17	17	19	20	20
Total	20	20	20	20	20	20	20

Fuente. Elaboración propia.

Como se puede apreciar en la tabla anterior, 2 de 20 estudiantes respondieron correctamente a P1 del enfoque sintético, pero con argumentos no válidos, lo cual de alguna u otra manera deja ver destrezas en la comparación de las figuras en términos de forma y tamaño (ampliada o reducida), es decir, que reconocen este tipo de transformación en el plano como aquella en las que la figura conserva su forma, pero varia en tamaño, cuya variación según Julio (2014) está determinada por el coeficiente de similaridad o razón de homotecia. Lo anterior, de acuerdo con Sierpinska (2000) se asocia con el modo SG dado que se describe el objeto a partir de su representación gráfica de la que se deducen sus elementos y características. Lo antes mencionado, se muestra en la siguiente imagen.

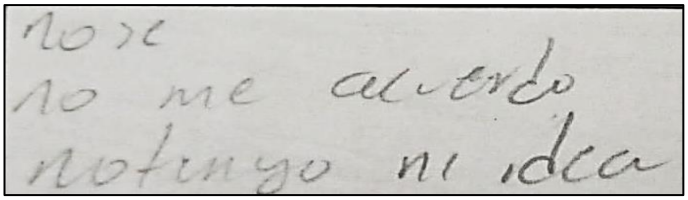
Imagen 17. *Respuesta de un estudiante respecto a T9_P1*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

Sin embargo, en P2, P3 y P4 de T9 se hacen notorias las dificultades que tienen los estudiantes (20) en cuanto a establecer la relación que tiene la homotecia con otros objetos matemáticos (como lo es el caso de la semejanza y la proporcionalidad), así como también, en la determinación de la ampliación o reducción que sufre una figura cuando se le aplica una transformación de homotecia. Por ello, en dichas preguntas todas las respuestas que se reportan son incorrectas (3 de 20) y en las demás (17 de 20), ponen de manifiesto no saber qué y cómo responder. Esto se observa en la imagen a continuación.

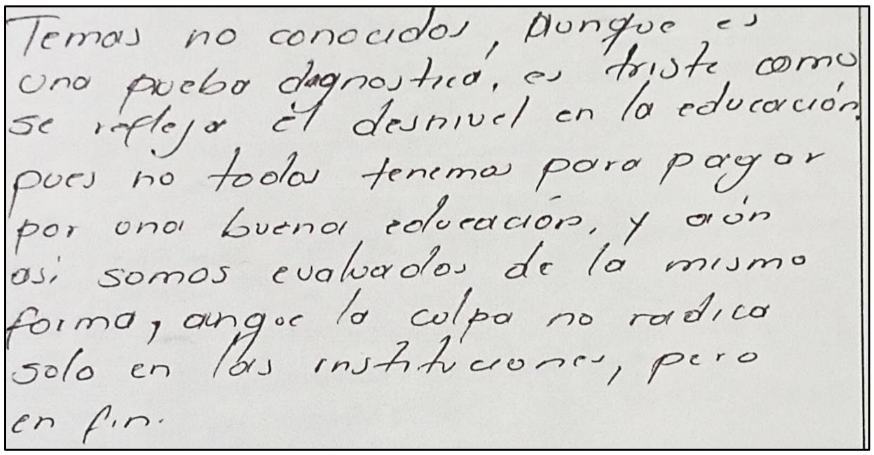
Imagen 18. *Respuesta de un estudiante respecto a P2, P3 y P4 de T9*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

Por otra parte, en la tabla se vislumbra que un número significativo de estudiantes (20) que desarrollaron la secuencia no reportaron respuesta o manifestaban no saber qué y cómo responder a las preguntas 1, 2 y 3 de T10 desde el enfoque analítico (ver imagen 19). Esto deja entrever, que poseen dificultades en relacionar y emplear expresiones algebraicas que no solo dan cuenta de la transformación de homotecia, sino también permiten determinar las coordenadas numéricas de los vértices de la figura resultante, el centro de homotecia y el coeficiente de similaridad.

Imagen 19. *Respuesta de un estudiante respecto a T10*


Temas no conocidos, aunque es
una prueba diagnostica, es triste como
se refleja el desnivel en la educación
pues no todos tenemos para pagar
por una buena educación, y aún
así somos evaluados de la misma
forma, aunque la culpa no radica
solo en las instituciones, pero
en fin.

Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

Nótese en la imagen anterior que, el estudiante además de manifestar no saber del objeto matemático cuestión, muestra su descontento en relación con la formación en geometría recibida en sus años de escolaridad, lo cual ratifica como se ha mencionado antes, no solo una enseñanza enfocada en aspectos métricos, operacionales y mecánicos, sino también una desarticulación de los enfoques sintético y analítico en la geométrica.

Ahora bien, de manera general el desarrollo de las tareas propuestas por parte de los estudiantes permitió identificar los saberes y dificultades que presentan los estudiantes en el abordaje de cada una de las transformaciones geométricas desde los enfoques sintético y analítico de la geometría.

En lo que respecta al abordaje de la transformación de traslación, desde lo sintético se destaca que los estudiantes presentan dificultades para determinar y reconocer la magnitud, sentido y dirección de la figura trasladado, así como también, para producir una traslación gráficamente, sin embargo, un gran número de estudiantes reconocen la traslación en términos de la conservación de la forma y tamaño, pero no la posición. De manera similar, se reflejan una cantidad considerable de estudiantes tienen dificultades asociadas la determinación del vector y coordenadas numéricas de la figura resultante haciendo uso de expresiones algebraicas.

En cuanto al abordaje de la transformación de rotación, se pudo apreciar que las dificultades presentando por los estudiantes desde lo sintético están relacionadas con la determinación del centro de rotación, la amplitud de giro y sentido de la figura. De igual forma, se destacan que se presenta dificultades en el uso de expresiones algebraicas para efectuar una rotación, determinar el centro y ángulo de rotación.

En lo que respeta al abordaje de la transformación de simetría central, se reconoce que una cantidad mínima de estudiantes tienen fortalezas para determinar el centro simétrico considerando a este como el punto medio del cual equidistan los vértices de la figura inicial con sus correspondiente en la figura final. Por otra parte, los resultados dejan entrever que los estudiantes en su mayoría no establecen ni determinan mediante expresiones algebraicas, las coordenadas numéricas del centro y la figura resultante.

En relación con la transformación de simetría axial, se destaca que una cantidad mínima de estudiantes establecen la perpendicularidad entre el eje de simetría y los segmentos formados por cada vértice de la figura inicial con su correspondiente en la resultante, lo cual le permanente reconoce una simetría axial. No obstante, se reconoce que los estudiantes presentan dificultades asociadas con la determinación del eje de simetría y las coordenadas de la figura resultante haciendo uso de expresiones algebraicas.

En lo que refiere al abordaje de la transformación de homotecia, solo se presentaron dificultades. Por un lado, desde lo sintético se reconoce que los estudiantes no reconocen ni identifican una homotecia alineando los vértices de la figura inicial y sus homólogos en la resultante con el centro de similaridad. De igual manera, no reconocen ni validan el centro y la razón de homotecia gráficamente. Por otro lado, desde lo analítico se destaca que los estudiantes no efectúan ni describen una transformación de homotecia y sus elementos, a partir del uso de expresiones algebraicas.

Lo anterior, da cuenta de los saberes y dificultades de los enfoque sintético y analítico que tiene los estudiantes en relación con el abordaje de cada una de las trasformaciones, lo cual se detalla en una tabla que resume los hallazgos encontrados en los resultados de la prueba piloto.

Tabla 20. *Dificultades y fortalezas presentes en los estudiantes de acuerdo con el modo de abordar las transformaciones geométricas en el desarrollo de la prueba piloto*

Prueba piloto							
Modos de Pensamiento		**Dificultades en el abordaje de las transformaciones geométricas**			**Fortalezas en el abordaje de las transformaciones geométricas**		
		D1	**D2**	**D3**	**F1**	**F2**	**F3**
Traslación	**SG**	65%	95%	95%	35%	5%	5%
	AA	95%	95%	95%	5%	5%	5%
Rotación	**SG**	90%	85%	95%	10%	15%	5%
	AA	85%	90%	100%	15%	10%	0%
Simetría Central	**SG**	90%	85%	85%	10%	15%	15%
	AA	100%	100%	100%	0%	0%	0%
Simetría Axial	**SG**	85%	90%	85%	15%	10%	15%
	AA	100%	100%	100%	0%	0%	0%
Homotecia	**SG**	100%	100%	100%	0%	0%	0%
	AA	100%	100%	100%	0%	0%	0%

Fuente. Elaboración propia.

En la tabla anterior, se puede apreciar que la mayor parte de las dificultades presentadas por los estudiantes se focalizan en modo AA relativo al enfoque analítico, lo cual ratifica lo que antes se había menciona sobre el abordaje de las transformaciones desde un tratamiento sintético-geométrico, desconociendo en gran medida el tratamiento de expresiones algebraicas para su abordaje.

De igual manera, se hace necesario resaltar que las dificultades encontradas son coherentes al análisis a priori, pues este se realizó considerando las dificultades que han sido reportada por diversas investigaciones en coherencia con la forma en que históricamente se ha abordado desde el enfoque sintético, con algunas yuxtaposiciones de actividades en lo analítico.

En este sentido, es importante manifestar que lo anterior resulta como un insumo necesario en la construcción de la versión final de la secuencia de tareas en aras de garantizar los aprendizajes básicos que los estudiantes deben tener antes de tomar el curso de geometría en su tercer semestre del programa académico.

4.4 Análisis a posteriori

La secuencia de tareas diseñada en este trabajo de indagación se implementó en una única sesión, el 8 de febrero de 2022, iniciando a las 2 pm y finalizando a las 6:15 pm, en la cual los estudiantes tuvieron un receso de 15 minutos (4:00 pm - 4:15 pm). De esto, es importante destacar que en esta intervención la interacción entre los entrevistados (estudiantes) y los entrevistadores (investigadores) solo se limitó a la aclaración de dudas respecto a las preguntas de las tareas o referente a la conceptualización del objeto de estudio, así como también, que el espacio con que se contó para la aplicación fue concretado y organizado en conjunto con el profesor encargado de orientar el curso en dicha fecha y horario.

De este modo, para el análisis de los resultados obtenidos de la aplicación de la secuencia de tareas, se diseñó una tabla (como se muestra en el modelo de tabla 7) para tipificar y caracterizar las producciones escritas de los estudiantes frente a las preguntas de cada tarea de la secuencia. Esto quiere decir que, para identificar el tipo de pregunta a la que se hace referencia se utilizó la siguiente convención: **ST1_P1** (pregunta 1 de la tarea 1 de la secuencia), en la que **ST1** refiere a la primera tarea de la secuencia y **P1** alude a la primera pregunta perteneciente a la tarea en cuestión.

En este sentido, es importante aclarar que el análisis se centrará sobre el abordaje de las cinco transformaciones geométricas propias del pensamiento espacial (traslación, rotación. simetría central, simetría axial y homotecia), enfatizando en los siguientes aspectos:

- El modo de pensamiento que priorizan los estudiantes al responder a las preguntas planteadas en la secuencia de tareas.
- Las dificultades y fortalezas que tuvieron los estudiantes al transitar entre los enfoques sintético y analítico en el abordaje de las tareas.
- Los saberes geométricos que dominan y consideran los estudiantes en la resolución de la secuencia de tareas propuesta.

De modo que, estos aspectos se analizaron a partir de las producciones escritas de los estudiantes referentes al desarrollo de las cinco tareas propuestas en la secuencia, cada una asociada a un tipo de transformación geométrica desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico. Por ello, en la tabla siguiente se describen los resultados esperados de cada tarea desde su abordaje en los enfoques sintético y analítico de la geometría.

Tabla 21. *Resultados esperados en cada tarea desde los enfoques sintético y analítico*

	Secuencia de tareas	
Tareas (ST)	**Resultados esperados desde lo sintético**	**Resultados esperados desde lo analítico**
ST1	Los estudiantes reconocen y describen la magnitud, sentido y dirección de la transformación de traslación a partir de su representación gráfica.	Los estudiantes describen relaciones operacionales y procedimentales que permiten determinar bajo un sistema de coordenadas los vértices de la figura inicial, la figura resultante o el vector de traslación, haciendo uso de expresiones o

		ecuaciones algebraicas que dan cuenta de la transformación de traslación.
ST2	Los estudiantes determinan y describen mediante la representación gráfica de la transformación de rotación y el uso de regla y transportador, el centro de rotación, el ángulo de giro y el sentido de la rotación.	Los estudiantes efectúan la transformación de rotación empleando desde un sistema de coordenadas ecuaciones algebraicas que le permiten determinar los puntos cartesianos del segmento resultante y el ángulo de giro.
ST3	Los estudiantes distinguen a partir de su representación gráfica y el uso de regla, los elementos centrales para reconocer y llevar a cabo la transformación de simetría central, tales como: el centro de simetría, la orientación del movimiento y el sentido de la figura transformada.	Los estudiantes determinan estableciendo relaciones operacionales y procedimentales mediante el uso de ecuaciones algebraicas de un sistema de coordenadas, el centro de simetría y los vértices faltantes de la figura inicial para dar cuenta de la transformación de simetría central.
ST4	Los estudiantes identifican los elementos fundamentales que intervienen, permiten reconocer y efectuar una transformación de simetría axial, tales como; el eje de simetría y el sentido de la figura, a través de la representación gráfica y el uso de herramientas convencionales como la regla.	Los estudiantes describen la transformación de simetría axial describen relaciones operacionales y procedimentales que permiten determinar bajo un sistema cartesiano de expresiones algebraicas, el eje de simetría, las coordenadas numéricas de los extremos del segmento resultante.
ST5	Los estudiantes reconocen y describen a partir de su representación gráfica los elementos que intervienen en una transformación de homotecia, tales como: la razón de homotecia, el centro homotético y la figura resultante.	Los estudiantes determinan mediante el uso de expresiones algebraicas bajo un sistema de coordenadas y el desarrollo de procesos algorítmicos, numéricos y operacionales las coordenadas numéricas del segmento inicial, el resultante, la razón de homotecia y el centro homotético de acuerdo con la información suministrada.

Fuente. Elaboración propia.

De acuerdo con lo anterior, en lo que sigue se describen de manera detallada, los elementos que surgen en el abordaje de cada una de las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoque sintético y analítico.

4.4.1 Elementos que surgen en el abordaje de la transformación de traslación desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico

En aras de determinar los elementos que resultan en el abordaje de la transformación de traslación desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico, se propuso el desarrollo de una tarea que constó de cuatro preguntas; las respuestas que se obtuvieron de esta tarea se reportan en la siguiente tabla.

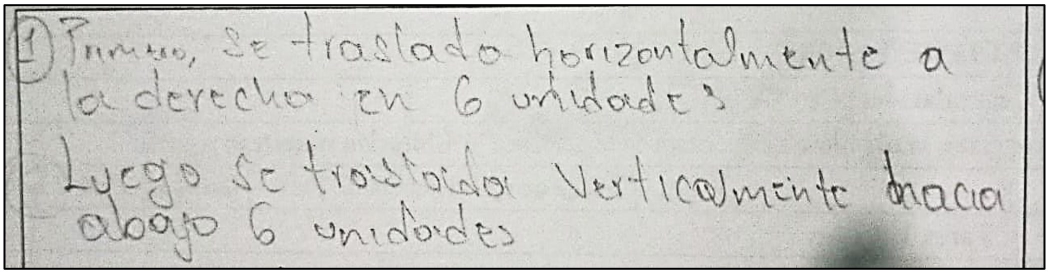
Tabla 22. *Tipificación de respuestas respecto a ST1*

Tipos de respuestas	Respuestas por preguntas			
	P1	**P2**	**P3**	**P4**
Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de expresiones o ecuaciones algebraicas.	0	10	8	0
Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de elementos sintéticos o geométricos.	12	3	6	12
Estudiantes que responden incorrectamente.	5	4	3	5
Estudiantes que no reportan respuesta o manifiestan no saber qué y cómo responder.	3	3	3	3
Total	20	20	20	20

Fuente. Elaboración propia.

Como se puede notar en la tabla anterior, un número significativo de estudiantes (12 de 20) responden correctamente a la P1, mostrando fortalezas en la descripción de la traslación a partir de la representación gráfica de la situación, en la que asocian dicha transformación al desplazamiento en línea recta en dirección horizontal y vertical, sentido a la derecha y abajo y con un número determinado de unidades en que se trasladó la figura. Lo anterior, de acuerdo con Sierpinska (2000) configura un abordaje focalizado en el modo SG, en el cual, estos estudiantes no solo relacionan la transformación a los cambios de dirección, sentido y magnitud, sino que también, a la conservación de la forma y el tamaño de la figura. Este hecho, se refleja en la imagen siguiente.

Imagen 20. *Respuesta de un estudiante a P1 de ST1*

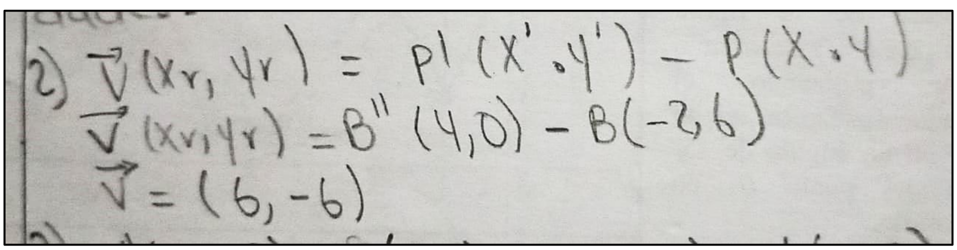


1) Primero, se trasladó horizontalmente a la derecha en 6 unidades
Luego se trasladó verticalmente hacia abajo 6 unidades

Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

En cuanto a P2 de ST1, 13 de los 20 estudiantes contestaron de manera correcta. De estos, solo 10 respondieron haciendo uso de expresiones algebraicas, lo cual les permitió a través de la identificación en el enunciado de la tarea de las coordenadas numéricas tanto de un punto de la figura inicial como de su correspondiente en la figura final, el cálculo aritmético de las coordenadas del vector de traslación. Lo anterior, pone de manifiesto destrezas en el tratamiento de procesos algorítmicos, numéricos y algebraicos que describen de manera analítica uno de los elementos fundamentales que se consideran para identificar y efectuar una traslación desde el modo AA como lo propone Sierpinska (2000). En este orden de ideas, la imagen 21 da cuenta de este hecho.

Imagen 21. *Respuesta de un estudiante a P2 de ST1*

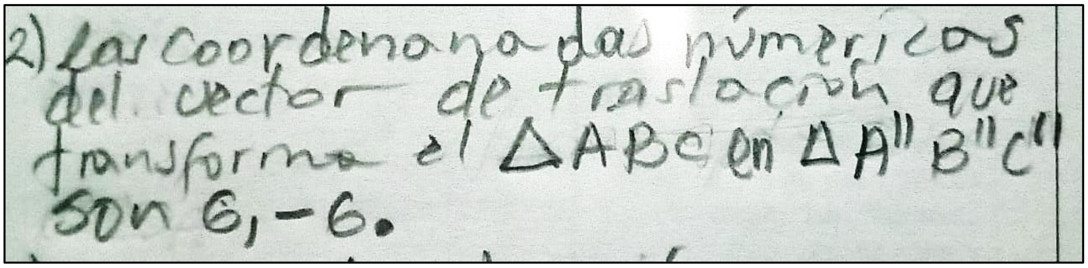


2) $\vec{V}(x_r, y_r) = P'(x', y') - P(x, y)$
$\vec{V}(x_r, y_r) = B''(4,0) - B(-2,6)$
$\vec{V} = (6,-6)$

Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

De manera similar, se destaca que 3 de los 13 estudiantes que respondieron de forma acertada a P2, lo hicieron sintéticamente. Esto quiere decir, que determinaron geométricamente las coordenadas numéricas del vector mediante la representación gráfica de la figura inicial y sus traslaciones en un plano cartesiano, puesto que asociaron el vector, no solo a la dirección y el sentido en que se dio la transformación sino también a las unidades en que se desplazó cada vértice de la figura inicial hasta obtener la figura resultante. Tal y como se muestra a continuación.

Imagen 22. *Respuesta de un estudiante a P2 de ST1*

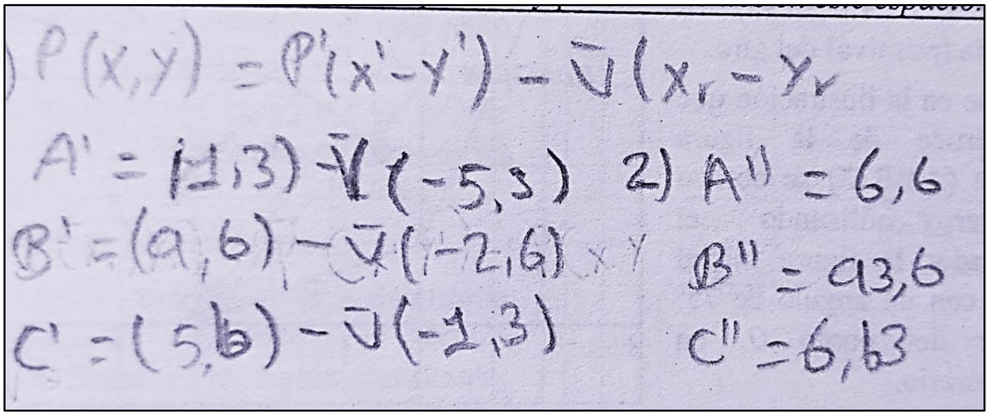


2) Las coordenanadas numéricas
del. vector de traslación que
transforma el ΔABC en $\Delta A''B''C''$
son 6, −6.

Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

Nótese en la imagen anterior, que estos estudiantes recurren a P1 para determinar las coordenadas numéricas del vector de traslación, describiendo a este en términos de dirección, sentido y magnitud como aquel que produce el desplazamiento de la figura inicial. En otras palabras, estos estudiantes considerando que a la figura inicial primero se desplazó horizontalmente 6 unidades a la derecha y, luego, se trasladó verticalmente 6 unidades hacia abajo, lo cual representa la abscisa (6) y ordenada (-6) del vector de traslación.

En relación con P3 de ST1 se reconoce que 6 de 20 estudiantes tienen dificultades para efectuar la transformación de traslación. De estos, la mitad (3 de 6) reportaron respuesta incorrecta, en las que se puede apreciar que no tienen dominio en el uso de expresiones algebraicas que teniendo en cuenta las coordenadas de la figura inicial y el vector, permiten determinar las coordenadas numéricas de la figura resultante realizando procesos algorítmicos, operacionales, numéricos y algebraicos, en los que también muestran dificultad. Todo ello, se deja ver en la imagen siguiente.



$P(x,y) = P'(x'-y') - \bar{v}(x_r - y_r$

$A' = (1,3) - \bar{v}(-5,3)$ 2) $A'' = 6,6$

$B' = (9,6) - \bar{v}(-2,6)$ x y $B'' = 93,6$

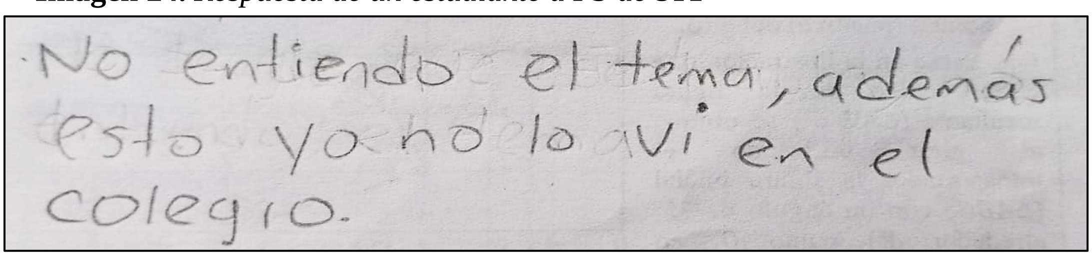
$C' = (5,6) - \bar{v}(-1,3)$ $C'' = 6,63$

Imagen 23. *Respuesta de un estudiante a P3 de ST1*

Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

Del mismo modo, se reconoce que la misma cantidad de estudiantes (3 de 6) no reportan respuesta o manifiestan no saber qué y cómo responder pese a que se suministró la información necesaria y requerida para dar respuesta a los interrogantes de esta tarea. Este hecho, muestra la no disponibilidad de los entrevistados para responder a las tareas o, en efecto, la no compresión de la información proporcionada para al menos dar respuesta a la pregunta planteada (ver imagen 24).

Imagen 24. *Respuesta de un estudiante a P3 de ST1*

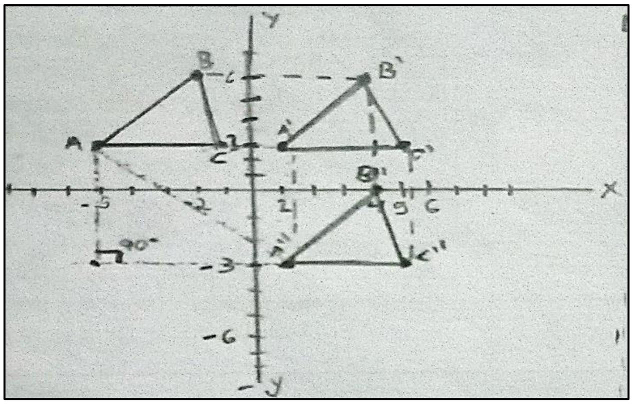


No entiendo el tema, además esto yo no lo vi en el colegio.

Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

Por otra parte, con respecto a P4 de ST1, 12 de los 20 estudiantes entrevistados respondieron correctamente empleando elementos sintéticos propios de la traslación. Esto quiere decir, que estos estudiantes validaron sus respuestas de P1, P2 y P3 mediante la construcción de una representación gráfica de las transformaciones de traslación efectuadas a la figura inicial, de modo que, recurrieron a la descripción del objeto en términos de que conservara la forma y el tamaño, además de considerar la dirección, sentido y magnitud del movimiento como el vector de traslación. Una respuesta que refleja lo anterior se muestra en la imagen siguiente.

Imagen 25. *Respuesta de un estudiante a P4 de ST1*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

4.4.2 Elementos que surgen en el abordaje de la transformación de rotación desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico

Para decantar los elementos que emergen en el desarrollo de ST2, la cual constó de cuatro preguntas relacionada con el abordaje de la transformación de rotación desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico; el tipo de respuestas que reportan los estudiantes referentes a las preguntas de dicha tarea se refleja en la tabla siguiente para su posterior análisis.

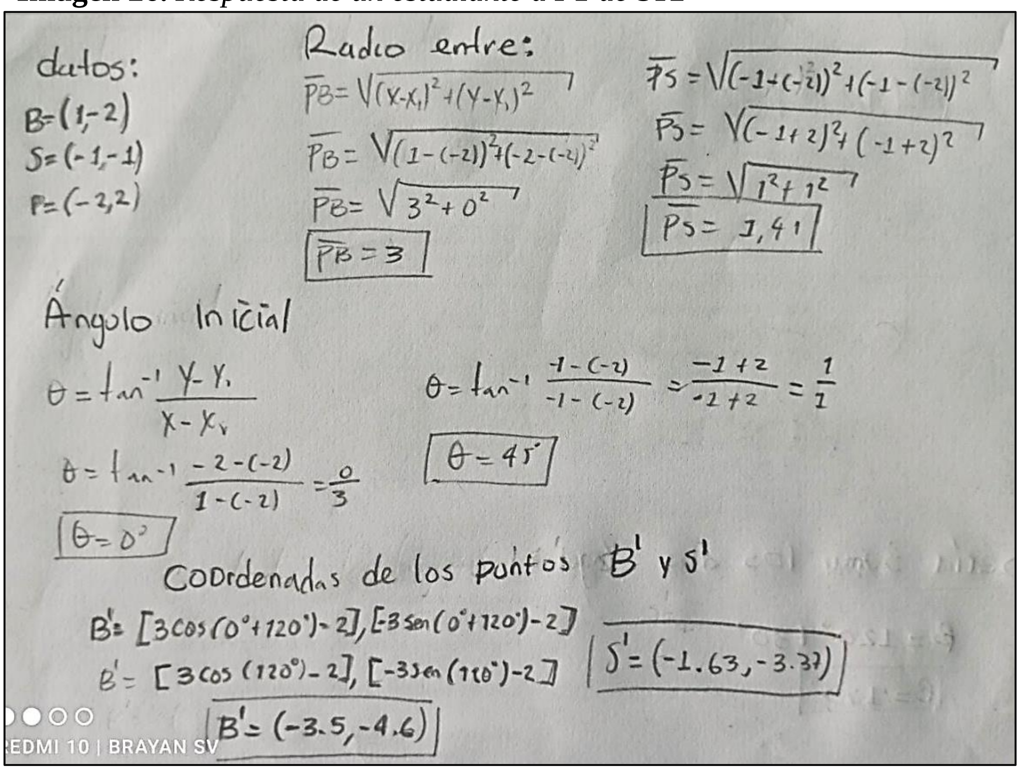
Tabla 23. *Tipificación de respuestas respecto a ST2*

Tipos de respuestas	Respuestas por preguntas			
	P1	**P2**	**P3**	**P4**
Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de expresiones o ecuaciones algebraicas.	7	4	2	0
Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de elementos sintéticos o geométricos.	5	11	9	10
Estudiantes que responden incorrectamente.	4	3	6	5
Estudiantes que no reportan respuesta o manifiestan no saber qué y cómo responder.	4	2	3	5
Total	20	20	20	20

Fuente. Elaboración propia.

En la tabla anterior, se puede apreciar que 12 de 20 estudiante respondieron correctamente a la ST2_P1, de los cuales, se reconoce que 7 de estos lo hicieron mediante el uso de expresiones algebraicas en la que consideraron el centro de rotación, las coordenadas numéricas de los extremos del segmento inicial, el ángulo inicial y el ángulo con el que se deseaba rotar el segmento. Este hecho, deja ver fortalezas en el dominio de procedimientos numéricos y algebraicos que permiten obtener las coordenadas numéricas del segmento resultante, dando cuenta no solo de la transformación sino también, de su abordaje priorizando el modo AA. Una respuesta que refleja lo anterior se muestra en seguida en la imagen.

Imagen 26. *Respuesta de un estudiante a P1 de ST2*

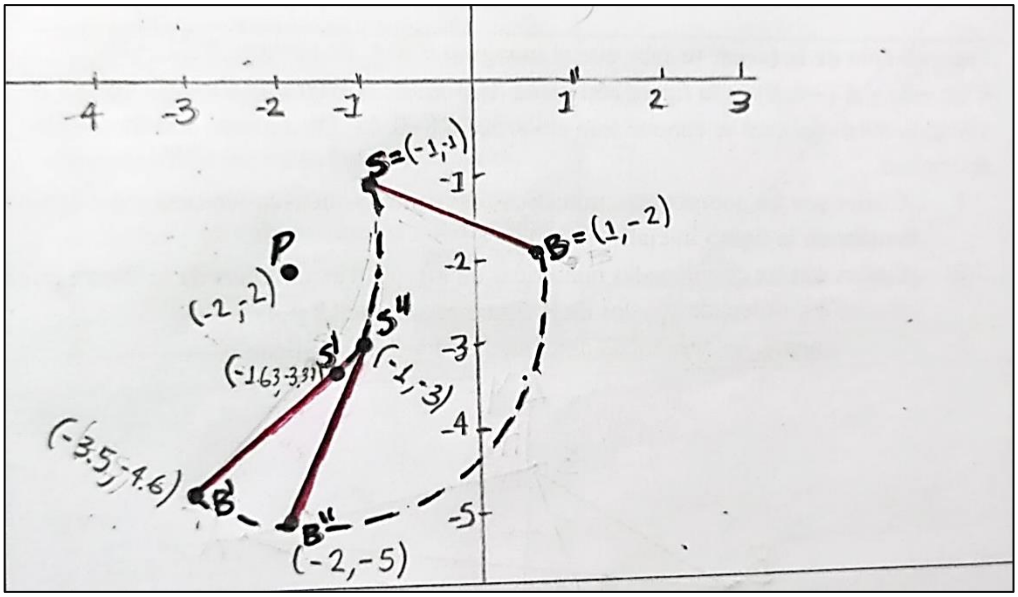


Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

Del mismo modo, se destaca que solo 5 de los 12 estudiantes que respondieron de manera acertada, determinaron las coordenadas numéricas del segmento resultante a través del uso de regla y transportador como herramienta heurística que le permiten describir la transformación mediante la representación gráfica de esta. Esto refleja el abordaje de dicha transformación desde el modo

SG, en el cual estos estudiantes describieron el objeto en términos de su forma, tamaño y sentido, para así, efectuar gráficamente la rotación del segmento considerando el centro y ángulo de giro, tal y como se presenta a continuación.

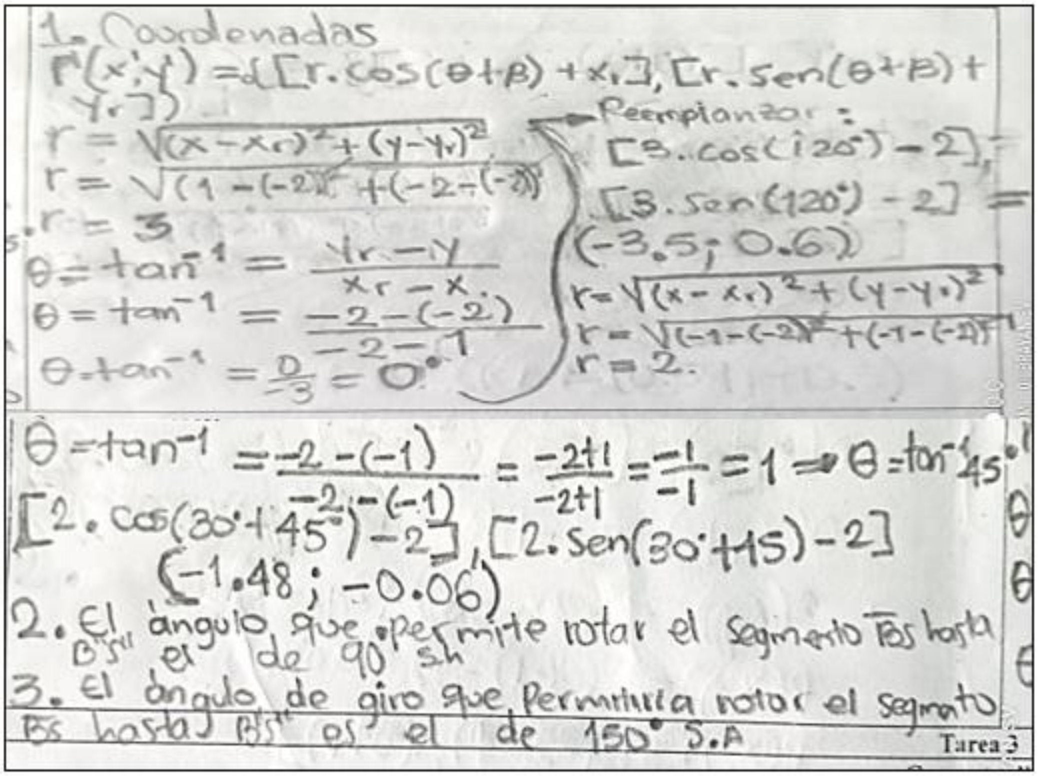
Imagen 27. *Respuesta de un estudiante a P1 de ST2*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

Por otro lado, es relevante notar que 6 de 20 estudiantes no contestaron de manera acertada a ST2_P3, lo cual indica que persisten dificultades asociadas a la determinación del ángulo de rotación considerando, por un lado, la representación gráfica de la transformación mediante la regla y el transportador y, por otro, el uso de expresiones algebraicas en la que se tiene en cuenta un extremo del segmento inicial, su correspondiente en el final y el centro de rotación. Lo anterior, se pone de manifiesto en siguiente imagen.

Imagen 28. *Respuesta de un estudiante a P3 de ST2*



Fuente. *Producciones escritas de los estudiantes.*

4.4.3 *Elementos que surgen en el abordaje de la transformación de simetría central desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico*

Con la intención de determinar los elementos que emergen en el abordaje de la transformación de simetría central desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico, se planteó el desarrollo de tres preguntas, cuyas respuestas que se obtuvieron se vislumbran en la siguiente tabla.

Tabla 24. *Tipificación de respuestas respecto a ST3*

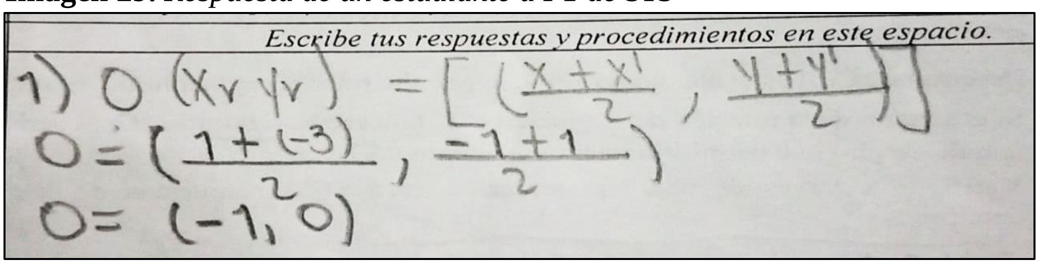
Tipos de respuestas	Respuestas por preguntas		
	P1	**P2**	**P3**
Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de expresiones o ecuaciones algebraicas.	12	9	0
Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de elementos sintéticos o geométricos.	5	3	12
Estudiantes que responden incorrectamente.	2	4	4

Estudiantes que no reportan respuesta o manifiestan no saber qué y cómo responder.	1	4	4
Total	20	20	20

Fuente. Elaboración propia.

La tabla anterior, muestra que 17 de 20 estudiantes respondieron de manera acertada a la ST3_P1, de lo cual se reconoce que 12 de estos estudiantes, reportaron respuesta haciendo uso de expresiones algebraicas que permitieron determinar las coordenadas numéricas del centro simétrico alrededor del cual se transformó la figura inicial. De este modo, se vislumbra que estos estudiantes tienen fortalezas en procesos procedimentales y algebraicos propios de modo AA de abordar dicha transformación, en relación con la determinación del centro simétrico, considerando a este, como el punto medio entre al menos un vértice de a figura inicial y su correspondiente en la figura resultante, tal y como se aprecia en la siguiente imagen.

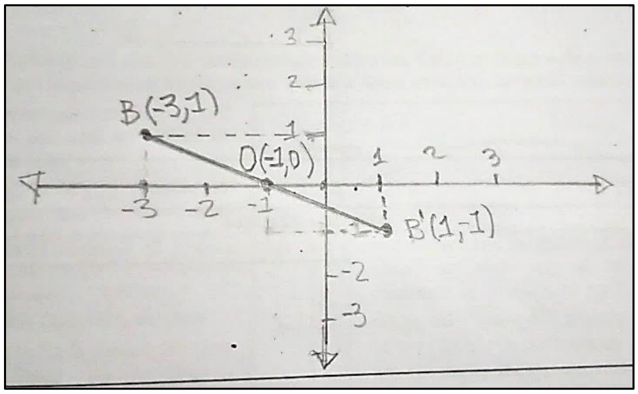
Imagen 29. *Respuesta de un estudiante a P1 de ST3*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

De igual manera, se destaca que 5 de los 17 estudiantes que respondieron de manera acertada, reportaron sus respuestas haciendo uso de representaciones gráficas, lo cual les permitió mediante el trazo del segmento formado entre un vértice de la figura inicial y su correspondiente en la resultante, determinar y ubicar en el plano el centro de simetría como el punto medio (del segmento) alrededor del cual la figura inicial fue transformada. Este hecho, refleja notoriamente el abordaje de dicha transformación desde el modo SG en función de determinar el centro de simétrico como uno de los elementos centrales de esta. Lo anterior, se aprecia en la siguiente imagen.

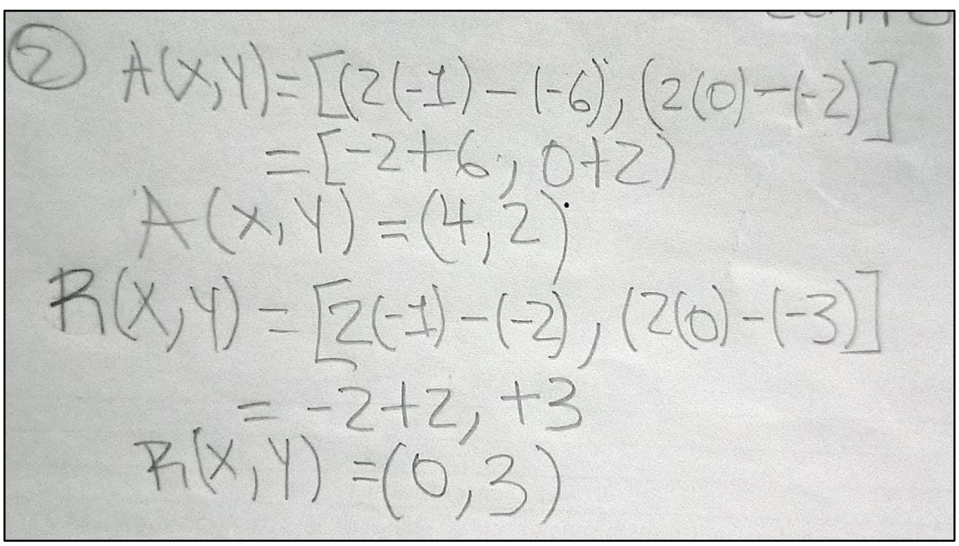
Imagen 30. *Respuesta de un estudiante a P1 de ST3*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

Ahora bien, en lo que respecta a la ST3_P2, se puede apreciar en la tabla que, 12 de 20 estudiantes respondieron correctamente, de los cuales solo 9 lo hicieron empleando expresiones algebraicas en función de determinar las coordenadas numéricas de los vértices faltantes de la figura inicial, en la que tuvieron en cuenta las coordenadas tanto del centro simétrico como la de la figura resultante. Esto deja entrever, fortalezas desde el modo AA asociados a los procesos numéricos, procedimentales, algorítmicos y algebraicos que dan cuenta de la transformación de simetría central; hecho que me muestra en la imagen siguiente.

Imagen 31. *Respuesta de un estudiante a P*2 de ST3

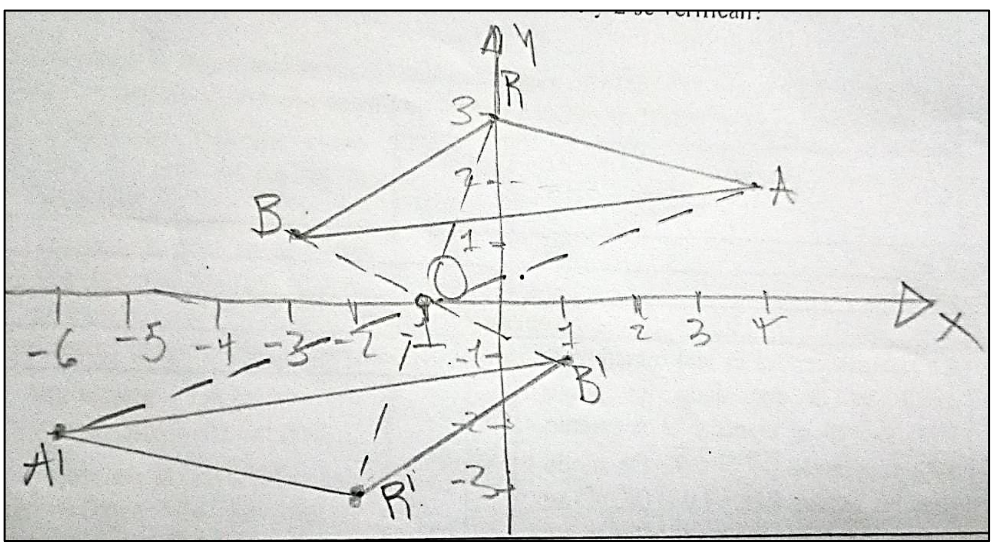


Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

De igual manera, se resalta que 3 de estos 12 estudiantes reportaron respuesta correcta, en la que determinan gráficamente las coordenadas numéricas faltantes de la figura inicial estableciendo mediante el empleo de regla que debe exila misma longitud tanto del centro simétrico a los vértices de la figura inicial como del centro simétrico a los vértices correspondiente en la figura resultante.

De este modo, se destaca que 12 de 20 estudiantes responden de manera acertada, lo cual les fue posible al efectuar y verificar gráficamente los resultados dados en P1 y P2. En estes sentido, se reconoce que estos estudiantes tienen fortalezas no solo en el reconocimiento de la transformación en términos de la conservación de la forma y el tamaño, sino también en la determinación del centro simétrico, la orientación y sentido de la figura. Además, es importante mencionar que se vislumbra una coordinación entre el lenguaje gráfico y el algebraico, dando cuenta de una u otra manera de los modos AA y SG. En la imagen siguiente se refleja lo anterior.

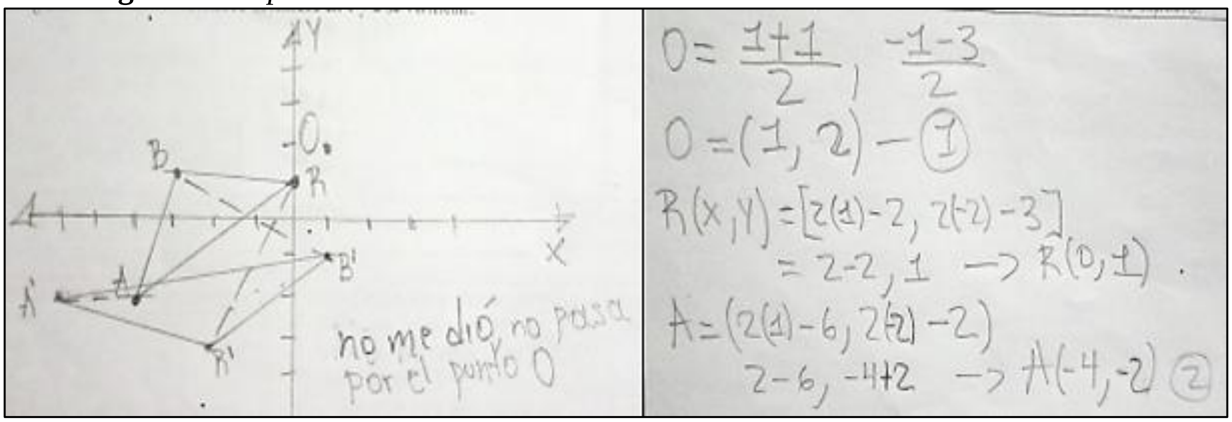
Imagen 32. *Respuesta de un estudiante a P3 de ST3*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

Por otra parte, es importante mencionar que 4 de 20 estudiantes reportaron respuesta incorrecta tanto en P2 como en P4, lo cual deja entrever, por un lado, dificultades asociadas a la determinación de las coordenadas numéricas de los vértices faltantes a partir del uso de expresiones algebraicas y, por otro lado, dificultades relacionadas con la aplicación y reconocimiento gráfico de los elementos que intervienen en una transformación de simetría central. En este orden de ideas, se refleja la no coordinación y dominio de los modos SG y AA en el abordaje de dicho objeto, tal y como se mutra a continuación.

Imagen 33. *Respuesta de un estudiante a P1 de ST3*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

4.4.4 *Elementos que surgen en el abordaje de la transformación de simetría axial desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico*

En las respuestas dadas por los estudiantes referente a esta tarea (ST4) conformada por tres preguntas, se destacan algunos elementos que emergen en el abordaje de la transformación de simetría axial desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico. De esta manera, las respuestas proporcionadas por preguntas se vislumbran en la siguiente tabla.

Tabla 25. *Tipificación de respuestas respecto a ST4*

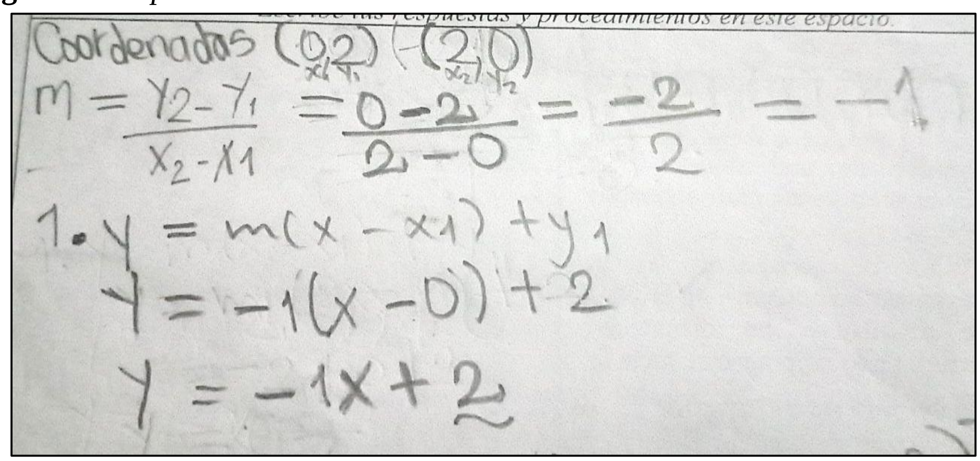
Tipos de respuestas	Respuestas por preguntas		
	P1	**P2**	**P3**
Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de expresiones o ecuaciones algebraicas.	10	6	2
Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de elementos sintéticos o geométricos.	0	9	8
Estudiantes que no responden incorrectamente.	6	3	5
Estudiantes que no reportan respuesta o manifiestan no saber qué y cómo responder.	4	2	5
Total	20	20	20

Fuente. Elaboración propia.

De acuerdo con la tabla anterior, se puede inferir que, 10 de 20 estudiantes respondieron de manera acertada a la ST4_P1, haciendo uso de expresiones algebraicas que le permitieron determinar la ecuación de la recta mediante la cual, el segmento inicial fue transformado o reflejado, de este modo se reconoce que estos estudiantes tienen dominio en procesos procedimentales y algebraicos del modo AA para determinar el eje de simetría considerando que esta debe pasar por los puntos medios entre cada extremo del segmento inicial con su correspondiente en el segmento resultante.

De la misma manera, se destaca que algunos de estos estudiantes determinaron algebraicamente la ecuación de la recta a partir de los puntos de cortes de esta con los ejes del plano cartesiano, para lo cual fue necesario recurrir a las nociones de pendiente y punto pendiente como aspectos implícitos del modo AA que posibilitan determinar el eje de simetría. Tal como se aprecia a continuación en la imagen.

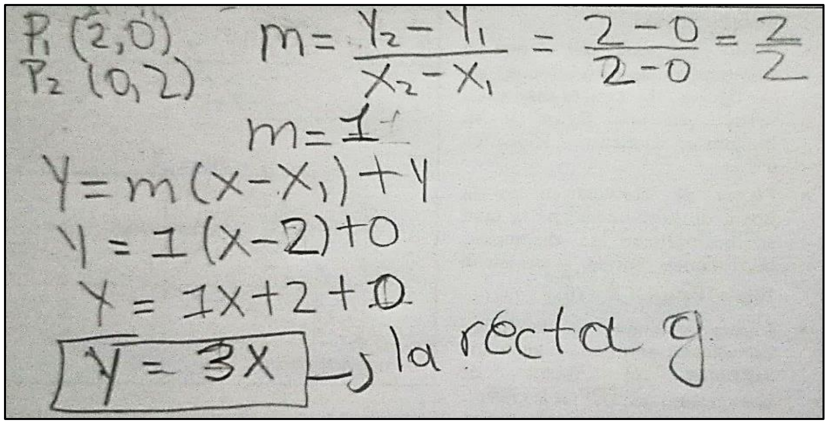
Imagen 34. *Respuesta de un estudiante a P1 de ST4*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes

No obstante, 10 de 20 estudiantes respondieron de manera incorrecta a la ST4_P1, lo anterior deja entrever que persisten dificultades en el reconocimiento de elementos que permiten determinar la ecuación de la recta con la que fue reflejado el segmento, además de los procesos algorítmicos, algebraicos y numéricos que se encuentran implícitos del modo AA para la determinación del eje simétrico. Lo anterior, se aprecia en la siguiente imagen.

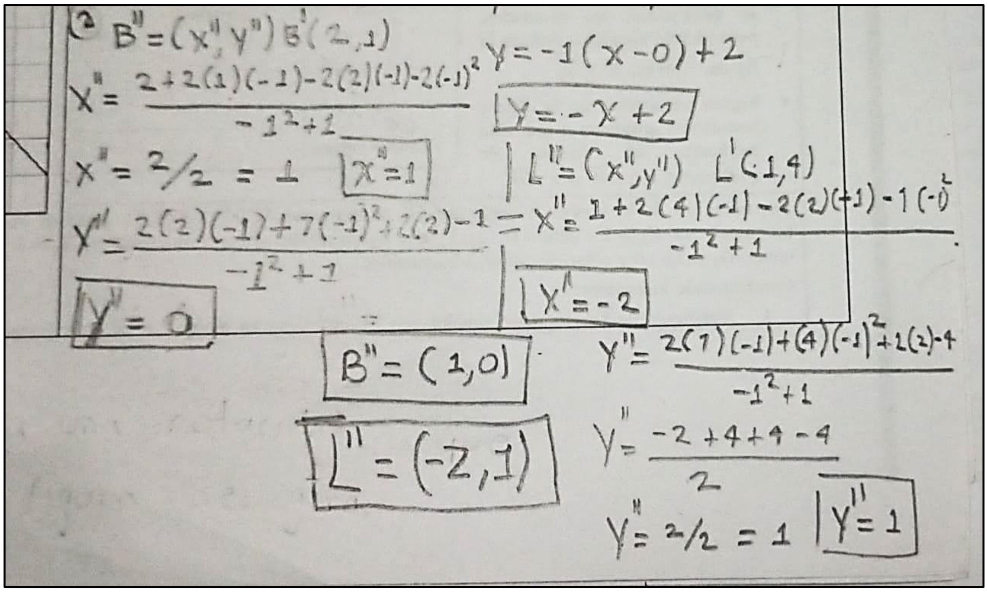
Imagen 35. *Respuesta de un estudiante a P1 de ST4*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes

Ahora bien, en lo que respecta a P2 de ST4, se refleja en la tabla que un número significativo de estudiantes (15 de 20) estudiantes respondieron correctamente, de los cuales solo 6 de 15 estudiantes respondieron haciendo uso de expresiones algebraicas en la que establecen relaciones operacionales y procedimentales que le permiten determinar las coordenadas numéricas del segmento resultante. En este orden de ideas, el abordaje de esta pregunta deja entrever dominio y fortalezas en producir a partir de la figura o segmento y eje de simetría la transformación de simetría axial. Esto se vislumbra en la siguiente imagen.

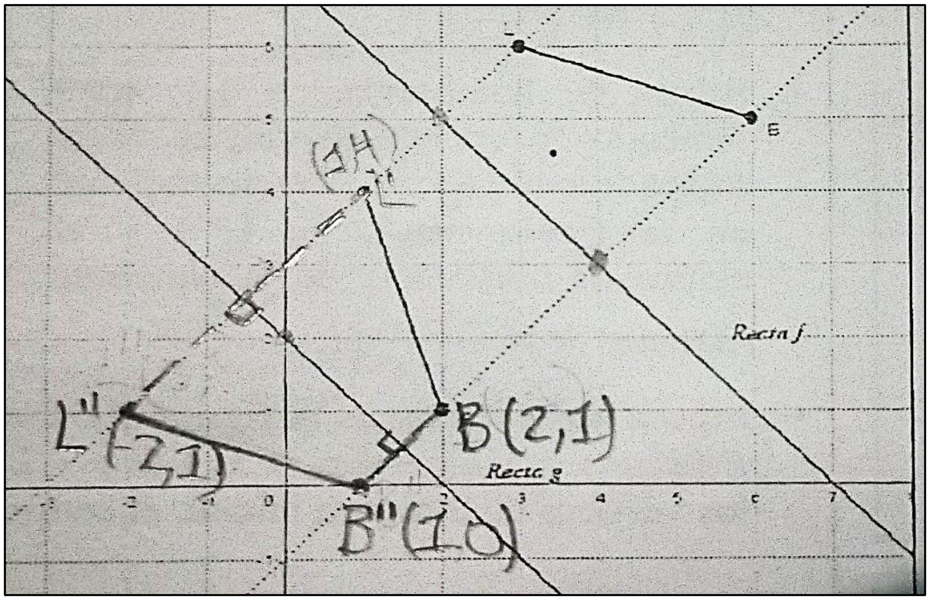
Imagen 36. *Respuesta de un estudiante a P2 de ST4*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

Por otro lado, es importante notar que 9 de estos 15 estudiantes dieron respuesta acertada a P2 mediante el uso de elementos sintéticos o geométricos como la representación grafica que permitió determinar los extremos numéricos del segmento resultante, de tal forma que cada extremo del segmento inicial y su correspondiente en el resultante estén a la misma distancia del eje de simetría, asimismo, que la recta que une cada extremo del segmento inicial y su correspondiente en el resultante sea perpendicular al eje de simetría. Tal como se aprecia a continuación en la imagen.

Imagen 37. *Respuesta de un estudiante a P2 de ST4*

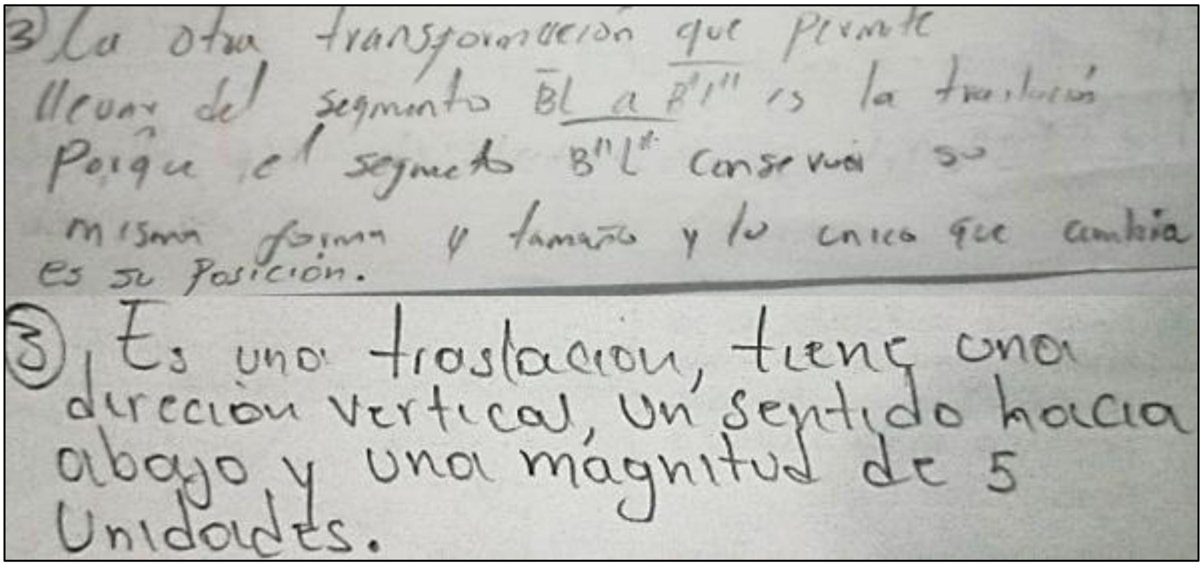


Fuente. Producciones escritas de los estudiantes

No obstante, en la tabla también se puede notar que en relación con P2 de ST4, 5 de 20 estudiante reportan respuesta de manera incorrecta o manifiestan no saber qué y cómo responder, lo cual deja entrever que persisten dificultades para reconocer, efectuar y determinar mediante el uso de expresiones algebraicas o representaciones gráficas, los elementos que dan cuenta de una transformación de simetría axial.

En relación con P3, en la tabla se pone de manifiesto que un número significativo (8 de 20) de estudiantes responden correctamente a través del uso de elementos sintéticos o geométricos. Esto quiere decir, que estos estudiantes describieron gráficamente la traslación como la otra transformación geométrica que permite desplazar el segmento inicial hasta el segmento resultante, lo cual no solo fue posible al identificar que el tamaño y la forma de los segmentos son iguales, sino también al determinar la dirección, el sentido y la magnitud del movimiento, tal y como se muestra en la siguiente imagen.

Imagen 38. *Respuesta de un estudiante a P3 de ST4*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

4.4.5 *Elementos que surgen en el abordaje de la transformación de homotecia desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico*.

En el desarrollo de la tarea cinco (ST5) que consta de tres preguntas, deja entrever algunos elementos que surgen en el abordaje de la transformación de homotecia desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico. Lo cual, se vislumbra en el tipo de respuestas que se obtuvieron por parte de los estudiantes en la realización de esta tarea, tal y como se detalla en la tabla siguiente.

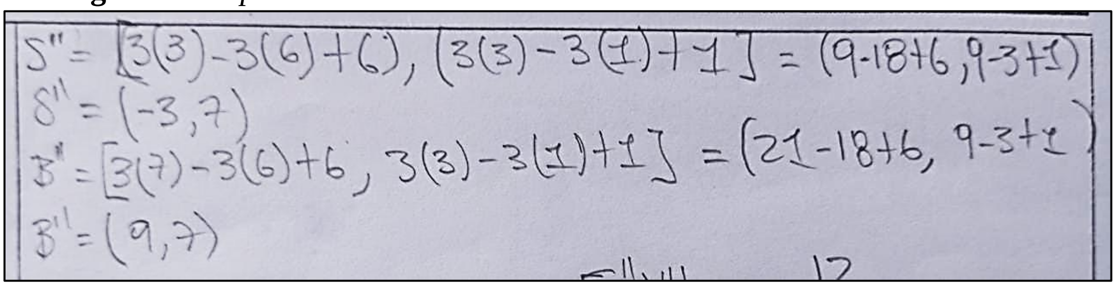
Tabla 26. *Tipificación de respuestas respecto a ST5*

Tipos de respuestas	Respuestas por preguntas		
	P1	**P2**	**P3**
Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de expresiones o ecuaciones algebraicas.	10	4	8
Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de elementos sintéticos o geométricos.	5	11	6
Estudiantes que responden incorrectamente.	2	3	2
Estudiantes que no reportan respuesta o manifiestan no saber qué y cómo responder.	3	2	4
Total	20	20	20

Fuente. Elaboración propia.

En la tabla anterior, se refleja que un número significativo de estudiante (15 de 20) respondieron correctamente a ST5_P1. De estos, solo 10 respondieron correctamente haciendo uso notablemente de las expresiones algebraicas proporcionadas, lo cual fue posible al identificar, a partir de la ilustración presentada en ST5, el valor numérico del coeficiente de similaridad, las coordenadas del centro de homotecia y de cada extremo del segmento inicial, para de esta manera, operar y obtener las coordenadas numéricas de los extremos del segmento homotético. Esto, se puede apreciar en la respuesta de 1 de los 10 estudiantes como se muestra a continuación en la imagen.

Imagen 39. *Respuesta de un estudiante a P1 de ST5*

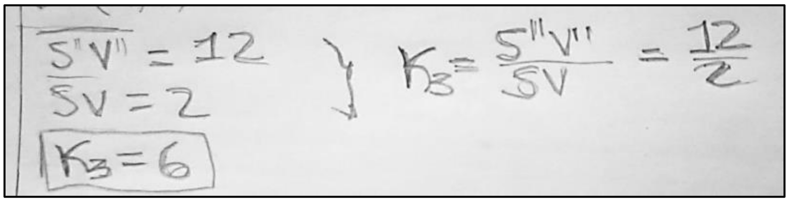


Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

En este sentido, se destaca la forma en que los estudiantes relacionan la información proporcionada en la representación gráfica de la transformación con el uso de expresiones algebraicas para dar cuenta de esta. Esto quiere decir, que de acuerdo con Sierpinska (2000) existe una coordinación entre el lenguaje gráfico y el algebraico, lo cual posibilita el tránsito del modo SG al modo AA, en el que primero se describe el objeto a partir de su representación gráfica y luego, se contrastan los resultados mediante relaciones numéricas con el uso de ecuaciones algebraicas.

Por otra parte, es importante notar que, 11 de 20 estudiantes contestaron correctamente a ST5_P2 mediante el uso de elementos sintéticos o geométricos en la que reconocen la proporcionalidad existente entre el segmento inicial y el resultante como la razón de homotecia por la cual se encuentra multiplicada la distancia del segmento inicial para obtener el resultante. De modo que, estos estudiantes para determinar el valor número de K_3 miden la longitud de cada segmento (el inicial y el final) con la regla o en efecto toman cada cuadricula como la unidad de medida referencia y posterior a eso, dividen estas longitudes, tal y como se mutra en la siguiente imagen.

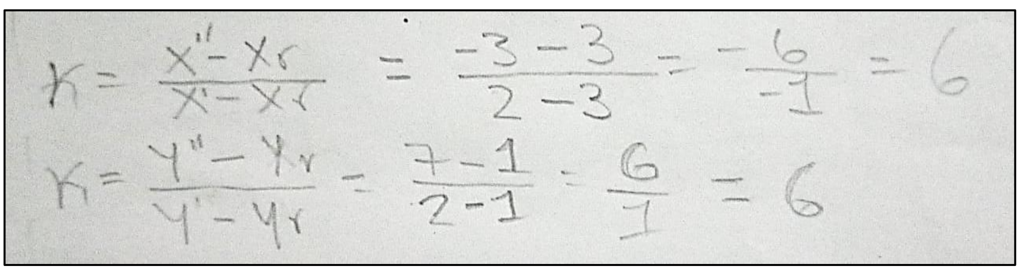
Imagen 40. *Respuesta de un estudiante a P2 de ST5*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

No obstante, 4 de los 20 estudiantes en relación con ST5_P2 determinaron la razón de homotecia mediante el empleo de expresiones algebraicas, lo cual deja entrever fortalezas en el dominio de procedimientos algorítmicos, numéricos y algebraicos propios del modo AA. En la imagen siguiente, se aprecia este hecho.

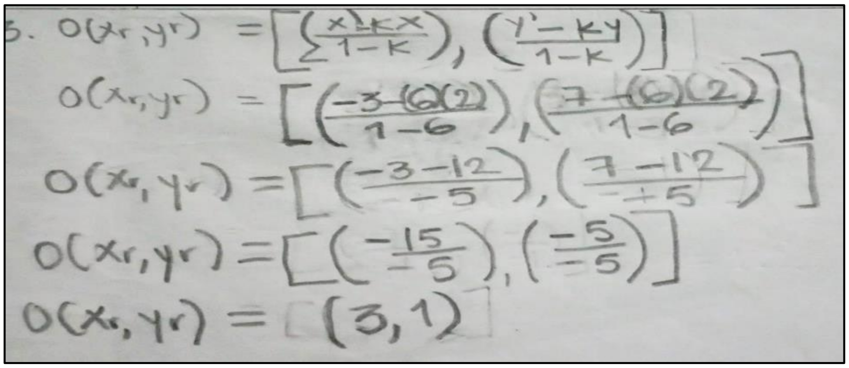
Imagen 41. *Respuesta de un estudiante a P2 de ST5*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

En lo que refiere a P3 de ST5, 14 de 20 estudiantes respondieron correctamente, de los cuales solo 6 muestran fortalezas en la determinación del centro de similaridad haciendo uso de expresiones algebraicas, en la que se considera las coordenadas numéricas de un extremo del segmento inicial, su correspondiente en la final y la razón de homotecia encontrada en P2, lo cual deja ver, un dominio en procesos operacionales, algorítmicos y algebraicos propios del abordaje de esta transformación desde el modo AA, lo cual se vislumbra en la siguiente imagen.

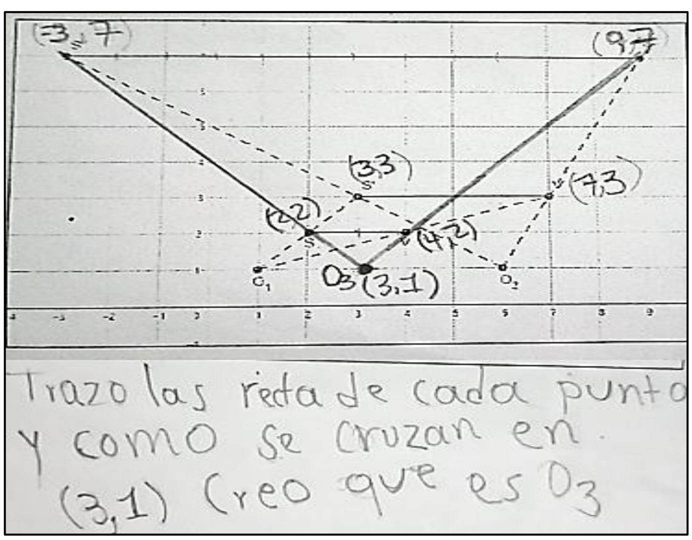
Imagen 42. *Respuesta de un estudiante a P3 de ST5*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

De forma similar, se reconoce que en relación con P3 de ST5, 6 de 20 estudiantes reportan respuestas acertadas haciendo uso de elementos sintéticos. Esto quiere decir, que dichos estudiantes presentan fortalezas geométricas en la determinación del centro de similaridad, cuyas coordenadas numéricas fueron determinadas infiriendo y considerando a este como el punto de intercepción entre las rectas que unen cada extremo del segmento inicial con su correspondiente en el segmento resultante, tal y como se muestra a continuación.

Imagen 43. *Respuesta de un estudiante a P3 de ST5*



Fuente. Producciones escritas de los estudiantes.

De manera general, a partir de las producciones escritas de los estudiantes en el desarrollo de la secuencia de tareas, se refleja e identifica el abordaje de las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico. En tanto que, se puede solucionar un problema articulando los modos sintético-geométrico y analítico-aritmético teniendo como mediadores las representaciones gráficas y algebraicas respectivamente.

En este orden de ideas, se destaca que al formular un problema de transformaciones geométricas cada estudiante es libre de elegir y determinar el modo de pensamiento para su abordaje, aunque este pueda ser resuelto tanto sintética como analíticamente, dado que la solución en ambos enfoques están correlacionados e involucrados los mismos objetos geométricos, cuya diferencia radica en el tipo de representación y tratamiento que se da en cada enfoque; el sintético fundamentado en un sistema teórico relativo a la geometría Euclidiana y, el analítico en un sistema práctico alusivo a la geometría cartesiana.

De esta manera, se hace necesario poner de manifiesto que los enfoques analítico y sintético se complementan deliberadamente y que, para abordar las transformaciones geométricas desde un modo de pensamiento u otro, se requiere tener conocimientos en el desarrollo de procesos numéricos, algorítmicos, procedimentales, geométricos y algebraicos que contribuyen a la solución de situaciones problemas.

Es así como, en el desarrollo de la secuencia de tareas, se pudo apreciar y decantar que el abordaje exclusivamente analítico presenta limitaciones en la utilización de expresiones algebraicas para describir, caracterizar e identificar los elementos y propiedades geométricas de las transformaciones. Del mismo modo, se reconoce que en el abordaje sintético resulta inevitable el foco analítico para producir una expresión algebraica fundamentada en las propiedades geométricas que dan cuenta de la transformación.

Por esta razón, los resultados reflejan la forma en que se abordan de las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico, pues reconoce que el enfoque analítico o modo AA no puede prescindir en absoluto de la representación geométrica, ni, por el contrario, el enfoque sintético o modo SG puede describir y profundizar el objeto sin expresar los resultados mediante expresiones algebraicas.

Ahora bien, en lo que concierne a la forma en que los estudiantes abordan cada transformación geométrica se reconocen e identifican los tipos de dificultades y fortalezas en relación con el modo AA o SG priorizan o consideran los estudiantes para dar solución al problema propuesto en cada una de las tareas de la secuencia. En este sentido, en la tabla siguiente se detalla un resumen de los hallazgos encontrado en la implementación de la secuencia de tareas.

Tabla 27. *Dificultades y fortalezas presentes en los estudiantes de acuerdo con el modo de abordar las transformaciones geométricas en el desarrollo de la secuencia de tareas*

		Secuencia de tareas					
Modos de Pensamiento		**Dificultades en el abordaje de las transformaciones geométricas**			**Fortalezas en el abordaje de las transformaciones geométricas**		
		D1	**D2**	**D3**	**F1**	**F2**	**F3**
Traslación	**SG**	40%	25%	40%	60%	75%	60%
	AA	50%	50%	60%	50%	50%	40%
Rotación	**SG**	50%	45%	50%	50%	55%	50%
	AA	65%	70%	65%	35%	30%	35%
Simetría Central	**SG**	40%	75%	40%	60%	25%	60%
	AA	40%	40%	55%	60%	60%	45%
Simetría Axial	**SG**	60%	55%	55%	40%	45%	45%
	AA	50%	50%	70%	50%	50%	30%
Homotecia	**SG**	40%	45%	75%	60%	55%	25%
	AA	80%	60%	50%	20%	40%	50%

Fuente. Elaboración propia.

Teniendo en cuenta lo presentado en la tabla anterior, se reconocen los índices porcentuales de las dificultades y fortalezas que se reflejan en el abordaje de cada transformación geométrica con respecto a los modos de pensamientos.

En primer lugar, con respecto al abordaje de la transformación de traslación, se destaca que solo el 25% de los estudiantes presentan el cruce D2TSG, es decir que tienen dificultades asociadas a la determinación y reconocimiento de la magnitud, dirección y sentido de la figura trasladada. Mientras que, el 60% de los estudiantes no solo reconocen la traslación en términos de la conservación de la forma y el tamaño (F1TSG) sino que también, efectúan y verifican gráficamente la traslación de una figura (F3TSG).

Por otra parte, es importante notar que los cruces D1TAA y D2TAA están presentes en un 50% de los estudiantes; esto quiere decir que emergieron dificultades relacionadas con la diferenciación de la distancia entre los vértices de la figura inicial y su correspondiente en la final, así como también, en la determinación del vector de traslación a partir del uso de expresiones algebraicas. Cabe resaltar que con respeto al cruce F3TAA solo se refleja en el 40% de los estudiantes, lo cual significa que el 60% de estos presentaron dificultades para determinar las coordenadas de la figura resultante mediante el uso de expresiones algebraicas.

En este sentido, se infiere que en el abordaje de la traslación los estudiantes priorizan el modo SG, en tanto que se presenta mayor índice porcentual de las dificultades desde el modo AA y, de manera reciproca, índices porcentuales inferiores en las fortalezas desde modo AA con respeto al modo SG.

En segundo lugar, referente al abordaje de la transformación de rotación, se resalta que los cruces D1RSG y D3RSG se identifican en el 50% de los estudiantes, los cuales no pudieron determinar ni efectuar gráficamente una rotación reconociendo la conservación de su forma y tamaño, además de los elementos propios de la rotación como lo son el centro, la amplitud angular y el sentido de giro. Sin embargo, los estudiantes muestran fortalezas inferiores al 35% relacionadas con la determinación bajo un sistema de coordenadas el centro, la magnitud angular y las coordenadas numéricas de la figura resultantes.

Lo anterior deja entrever que, en el abordaje de la rotación los estudiantes priorizan o tienen mayores fortalezas en el modo SG, en tanto que se aprecia mayor índice porcentual en las dificultades desde el modo AA e inferiores índices porcentuales en las fortalezas desde modo AA con respeto al modo SG.

En tercer lugar, con relación al abordaje de la transformación de simetría central se reconoce que en el 75% de los estudiantes emergen dificultades para establecer y determinar el centro simétrico, la orientación y el sentido en que se produce la transformación (D2SCSG). De manera similar se nota que están presentes los cruces D1SCSG y D3SCSG en un 40%, lo cual pone de manifiesto que al menos el 60% los estudiantes tienen dominio en la identificación de la simetría en términos de la conservación de la forma y tamaño en las figuras con orientación invertida (F1SCSG), asimismo efectúan y verifican la simetría central mediante su representación gráfica (F3SCSG).

De otro lado, se destaca que los cruces F1SCAA y F2SCAA están presenten en un 60% de los estudiantes. Esto quiere decir, que no solamente tienen fortalezas en la determinación analítica de la equidistancia que debe existir del centro simétrico a los vértices de la figura inicial y a los vértices correspondientes en la figura resultante, sino también en el cálculo de las coordenadas numéricas del centro de simetría mediante expresiones algebraicas. En cambio, el 55% de los estudiantes no determinan las coordenadas numéricas de la figura resultante haciendo uso de expresiones algebraicas (F3SCAA).

En cuarto lugar, con respecto al abordaje de la transformación de simetría axial se pudo inferir que en el 60% de los estudiantes surge el cruce D1SASG, en el 55% D2SASG y el 50%

D1SASG, lo cual pone de manifiesto dificultades en producir y validar gráficamente una simetría axial; reconociendo por un lado, que la figuras deben conservar la forma y su tamaño; y, por otro lado, que el eje de simetría debe ser perpendicular a los segmentos formados entre los vértices de la figura inicial con los vértices correspondiente en la figura resultante.

No obstante, los cruces D1SAAA y D2SAAA se presentan en el 50% de los estudiantes, mientras que en el 70% emerge D3SAAA, mostrando que solo el 30% de los estudiantes tienen fortalezas para determinar las coordenadas numéricas de la figura reflejado o inicial haciendo uso de expresiones algebraicas.

En quinto y último lugar, en lo referente al abordaje de la transformación de la homotecia se reconoce que dentro de los cruces presentados el D3HSG subyace en el 75% de los estudiantes, lo cual significa que solo el 25% tienen fortalezas para efectuar y validar gráficamente la homotecia de una figura o segmento (F3HSG), de modo que, estos estudiantes no solo reconocen la conservación de la forma con tamaño proporcional (F1HSG), sino también, determina a partir de la proporcionalidad las razón homotética y el centro de similaridad mediante la intersección de las proyecciones de las recta que pasan por los vértices de la figura inicial y su correspondiente en la resultante (F2HSG).

Sin embargo, se destaca que el 80% de los estudiantes no determina el coeficiente de similaridad usando expresiones algebraicas (D1HAA). De igual modo, se resalta que los cruces D2HAA y D3HAA están presentes en un 60% y 50% respectivamente. Lo anterior, permite deducir que con un índice inferior al 50% de los estudiantes tiene dominio en la determinar el centro de similaridad (F2HAA) y las coordenadas numéricas de la figura o segmento homotético haciendo uso de expresiones algebraicas (F3HAA).

De esta manera, se infiere que en el abordaje de la homotecia los estudiantes priorizan o tienen mayor dominio en el modo SG, en tanto que, desde el modo AA se aprecian mayores índices porcentuales en las dificultades e inferiores índices porcentuales en las fortalezas desde modo AA con respeto al modo SG.

4.4.6 Contraste entre los resultados de la prueba piloto y la secuencia de tareas

La puesta en acción tanto de la prueba piloto como de la secuencia de tareas no solo dejó entrever la forma en que los estudiantes abordan cada transformación geométrica, sino también las dificultades y fortalezas que suscitan en este proceso. Por ello, en lo que sigue se contrastan los resultados obtenidos en cada una de las implementaciones.

En lo que refiere al abordaje de la traslación, a continuación, se detalla en una tabla que resume los hallazgos encontrados contrastando los resultados de la prueba piloto y la secuencia de tarea.

Tabla 28. *Cruces presentados en el abordaje de la transformación de traslación*

Abordaje de la Traslación		Cruces entre las categorías de análisis											
		Dificultades en relación con los modo sintético-geométrico y analítico-aritmético						Fortalezas en relación con los modo sintético-geométrico y analítico-aritmético					
		D1T SG	D1T AA	D2T SG	D2T AA	D3T SG	D3T AA	F1TSG	F1T AA	F2TSG	F2T AA	F3TSG	F3T AA
Prueba piloto	%	61,1	65,5	79,1	65,5	70,3	61,3	36,8	9,1	6,3	9,1	7,7	11,1
Secuencia de tarea	%	38,9	34,5	20,9	34,5	29,7	38,7	63,2	90,9	93,7	90,9	92,3	88,9
Total, de cruces		21	29	24	29	27	31	19	11	16	11	13	9

Fuente. Elaboración propia.

De acuerdo con lo presentado en la tabla anterior, se puede apreciar que las dificultades en relación con los modos SG y AA presentes en la secuencia de tareas son inferiores en comparación con la prueba piloto, lo cual significa que las fortalezas presentadas por los estudiantes en el abordaje de la traslación desde la complementariedad de los enfoque sintético y analítico aumentó significativamente.

En este sentido, es importante destacar que, el 79.1% de los estudiantes reflejaron el cruce D2TSG en el desarrollo de la prueba piloto. De lo cual, se puede inferir que en comparación con la secuencia de tareas hubo una disminución del 58.2%. Del mismo modo, se reconoce el cruce F3TAA que se presentó en 7,7% de los estudiantes en la realización de la prueba piloto, aumentó significativamente en un 84,6%.

En lo que respecta al abordaje de la rotación, en la tabla que se presenta a continuación, resume los hallazgos encontrados a la luz de los elementos que surgieron en el desarrollo de la prueba piloto y la secuencia de tarea.

Tabla 29. *Cruces presentados en el abordaje de la transformación de rotación*

Abordaje de la Rotación		Cruces entre las categorías de análisis											
		Dificultades en relación con los modo sintético-geométrico y analítico-aritmético						Fortalezas en relación con los modo sintético-geométrico y analítico-aritmético					
		D1R SG	D1R AA	D2R SG	D2R AA	D3R SG	D3R AA	F1R SG	F1R AA	F2R SG	F2R AA	F3R SG	F3R AA
Prueba piloto	%	64,3	56,7	65,3	56,2	65,5	60,6	16,6	30	21,4	25	9,09	0
Secuencia de tarea	%	35,7	43,4	34,6	43,7	34,5	39,3	83,3	70	78,5	75	90,9	100
Total, de cruces		28	30	26	32	29	33	12	10	14	8	11	7

Fuente. Elaboración propia.

La tabla anterior, muestra que en el desarrollo de la prueba piloto aproximadamente el 64% de los estudiantes presentan el cruce D1RSG, el cual disminuyó notablemente al 35% en la secuencia de tareas. Asimismo, se infiere que F3RAA solo se presentó en la realización de la secuencia de tarea, dejando entrever a través de la prueba piloto que ningún estudiante describía y determinaba las coordenadas numéricas de la figura resultante.

Es así como se destaca que las dificultades que emergieron en la realización de la prueba piloto disminuyeron significativamente en comparación con la secuencia de tareas. De manera que, se presentó un aumento en relación con las fortalezas que permiten abordar desde la complementariedad de los modos AA y SG la rotación de una figura o segmento.

En cuanto al abordaje de la simetría central, a continuación, se detalla en una tabla que resume los hallazgos encontrados contrastando los resultados de la prueba piloto y la secuencia de tarea.

Tabla 30. *Cruces presentados en el abordaje de la transformación de simetría central*

Abordaje de la Simetría Central		Cruces entre las categorías de análisis											
		Dificultades en relación con los modo sintético-geométrico y analítico-aritmético						Fortalezas en relación con los modo sintético-geométrico y analítico-aritmético					
		D1SC SG	D1SC AA	D2V SG	D2SC AA	D3SC SG	D3SC AA	F1SC SG	F1SC AA	F2R SG	F2SC AA	F3SC SG	F3SC AA
Prueba piloto	%	69,2	71,4	53,1	71,4	68	64,5	14,3	0	37,5	0	20	0
Secuencia de tarea	%	30,8	28,6	46,9	28,6	32	35,5	85,7	100	62,5	100	80	100
Total, de cruces		26	28	32	28	25	31	14	12	8	12	15	9

Fuente. Elaboración propia.

En la tabla anterior, se puede notar que las dificultades en relación son los modos SG y AA presentes la prueba piloto son superiores en comparación con los que emergen en la secuencia de tarea, lo cual significa que las fortalezas o el dominio reflejadas en los estudiantes en el abordaje de la simetría central desde la complementariedad de los enfoque sintético y analítico aumentó notoriamente.

En tanto que, se destaca que el 68% de los estudiantes reflejaron el cruce D3SCSG en el desarrollo de la prueba piloto. De lo cual, se puede deducir que en comparación con la secuencia de tareas hubo una disminución del 36%. De modo similar, se reconoce los cruces F2SCAA, F2SCAA y F3SCAA únicamente se notaron en el desarrollo de la secuencia de tareas, en otras palabras, se decantaron fortalezas para determinar y describir mediante expresiones algebraicas el centro simétrico y los vértices de la figura o segmento resultante.

En lo que respecta al abordaje de la simetría axial, en la tabla siguiente se contrasta y describe una síntesis de los hallazgos encontrados tanto en prueba piloto como en la secuencia de tareas.

Tabla 31. *Cruces presentados en el abordaje de la transformación de simetría axial*

Abordaje de la Simetría Axial		Cruces entre las categorías de análisis											
		Dificultades en relación con los modo sintético-geométrico y analítico-aritmético						Fortalezas en relación con los modo sintético-geométrico y analítico-aritmético					
		D1S ASG	D1SA AA	D2S ASG	D2SA AA	D3S ASG	D3SA AA	F1S ASG	F1R AA	F2S ASG	F2SA AA	F3S ASG	F3SA AA
Prueba piloto	%	58,6	66,7	62,1	66,7	60,7	58,8	27,3	0	18,2	0	25	0
Secuencia de tarea	%	41,4	33,3	37,9	33,3	39,3	41,2	72,7	100	81,8	100	75	100
Total, de cruces		29	30	29	30	28	34	11	10	11	10	12	6

Fuente. Elaboración propia.

En la tabla anterior, se aprecia que las dificultades en relación son los modos SG y AA presentes en la secuencia de tarea son inferiores porcentualmente en comparación con la prueba piloto, lo cual muestra que las fortalezas o el dominio que muestran los estudiantes en el abordaje de la simetría axial desde la complementariedad de los enfoque sintético y analítico aumentó significativamente.

En este sentido, se evidencia que los índices porcentuales de los cruces D1SASG, D2SASG y D3SASG reflejados en la secuencia de tarea comparados con la prueba piloto son inferiores en un 17,2%, 24,8% y 21,4% respectivamente. En cambio, se resalta que en cotejo con realización de la prueba piloto los cruces F2SAAA, F2SAAA y F3SAAA solamente se presentaron en el desarrollo de la secuencia de tareas; decantados dominios procedimentales para determinar y describir mediante el uso de expresiones algebraicas, el eje simétrico y las coordenadas numéricas de la figura o segmento resultante.

En lo que respecta al abordaje de la homotecia, en la tabla siguiente se compara y detalla un resumen de los hallazgos encontrados tanto en prueba piloto como en la secuencia de tareas.

Tabla 32. *Cruces presentados en el abordaje de la transformación de homotecia*

Abordaje de la Homotecia		Cruces entre las categorías de análisis											
		Dificultades en relación con los modo sintético-geométrico y analítico-aritmético						Fortalezas en relación con los modo sintético-geométrico y analítico-aritmético					
		D1H SG	D1H AA	D2H SG	D2H AA	D3H SG	D3H AA	F1H SG	F1H AA	F2H SG	F2H AA	F3H SG	F3H AA
Prueba piloto	%	71,4	55,6	69	62,5	57,2	66,7	0	0	0	0	0	0
Secuencia de tarea	%	28,6	45,4	31	37,5	42,8	33,3	100	100	100	100	100	100
Total, de cruces		28	36	29	32	35	30	12	4	11	8	5	10

Fuente. Elaboración propia.

De acuerdo con lo presentado en la tabla anterior, se puede apreciar que las dificultades en relación son los modos SG y AA presentes en la secuencia de tareas son inferiores en comparación con la prueba piloto, lo cual significa que las fortalezas reflejadas en los estudiantes en el abordaje de la homotecia desde la complementariedad de los enfoque sintético y analítico aumentó significativamente.

En este sentido, es importante destacar que tan en la prueba piloto como en la secuencia de tarea se vislumbró los cruces DF1HSG, D2HSG, D3HSG, D1HAA, D2HAA, D3HAA. Sin embargo, estos se presentan con menor índice porcentual en la secuencia de tareas; es decir que las dificultades presentadas en el abordaje de la homotecia y la determinación de sus elementos disminuyeron considerablemente.

Por otra parte, se resalta que los cruces F1HSG, F2HSG, F3HSG, F1HAA, F2HAA, F3HAA solo se hacen notorios en la secuencia de tareas. Lo cual indica, que en la prueba piloto los estudiantes pusieron de manifiesto dificultades asociadas a la determinación del centro homotético, coeficiente de similaridad y la figura o segmento resultante desde el modo SG o AA.

CAPITULO V: SÍNTESIS DE RESULTADOS

En este capítulo, se precisan y detallan algunas ideas relacionadas con la forma en que los estudiantes abordan las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoque sintético y analítico, teniendo en cuenta los objetivos propuestos en relación con algunos elementos obtenidos a lo largo del desarrollo de la indagación. De igual forma, se pone de manifiesto un cúmulo de recomendaciones que se deben considerar en el abordaje del objeto matemático de estudio.

5.1 Conclusiones

El abordaje de las transformaciones geométricas, resulta ser una actividad matemática esencial para el desarrollo de la percepción espacial, el estudio de las formas, las propiedades y las relaciones de semejanza (y congruencia) en los procesos de tratamiento y discriminación de las figuras geométricas. Sin embargo, se precisó como acción necesaria caracterizar su abordaje desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico.

De este modo, la puesta en acción de una prueba piloto permitió categorizar desde los modos de pensamientos los saberes y dificultades que tienen los estudiantes (previo a tomar el curso de geometría) en relación con el abordaje de las transformaciones geométricas desde los enfoques sintético y analítico. Lo cual, resultó ser un insumo necesario para garantizar en el diseño de una secuencia de tareas, los aprendizajes básicos que los estudiantes deben tener antes de tomar el curso de geometría en su tercer semestre del programa académico.

En este sentido, al favorecer mediante el diseño y aplicación de una secuencia de tarea, la articulación entre los enfoques sintético y analítico para el abordaje de las transformaciones geométricas; se lograron mejoras en los aspectos donde los estudiantes presentaron dificultad cuando se realizó la aplicación de la prueba piloto. De esta manera, se destaca en el análisis a posteriori que los estudiantes dieron cuenta de los modos de pensar o abordar el objeto, por lo cual se reconoce que las tareas y preguntas propuestas fueron pertinentes y acordes a los planteamientos teóricos.

Es así como los modos de pensamiento no solamente permitieron que los estudiantes pudieran reconocer y describir cada transformación geométrica a través de una representación gráfica, sino que también, posibilitaron dar cuenta de estas transformaciones mediante el uso de expresiones algebraicas en la que se establecen relaciones operacionales y procedimentales bajo un sistema de coordenadas. Esto quiere decir, que el tránsito y complementariedad entre los modos de pensamiento proporcionaron a los estudiantes herramientas heurísticas para la interpretación de las tareas dependiendo de la construcción cognitiva presente en estas, considerando los enfoques sintético y analítico en que se proponga su abordaje.

Finalmente, se caracterizó y determinó a partir de las producciones escritas de los estudiantes la forma en que abordan las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico. De lo cual, se resalta, por un lado, que el abordaje de las transformaciones geométricas movilizó la comprensión de algunas propiedades de las figuras y conceptos con los que guarda estrecha relación, tales como: semejanza, proporcionalidad, función lineal, paralelismo, perpendicularidad, invarianza, colinealidad, ecuaciones, expresiones algebraicas, entre otros, que dan cuenta de la importancia de su abordaje en la formación de estudiantes para profesores de matemáticas.

Por otro lado, se destaca que la complementariedad entre estos enfoques involucró no solo diferentes objetos matemáticos que permanecen invariantes y están correlacionados en cada transformación, sino también la coordinación entre los registros de representaciones geométricos y algebraicos que permitieron a los estudiantes describir y profundizar el abordaje de las transformaciones geométricas.

En tanto que, esta indagación propició elementos conceptuales, procedimentales y metodológicos que sientan las bases sobre las cuales se edifica el abordaje de las transformaciones geométricas. De manera que, tanto los docentes que orientan el curso de geometría en el tercer semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle Sede Pacifico como las diferentes Instituciones Educativas del distrito de Buenaventura, deben considerar como punto de partida estos aspectos que aquí se describen en función de mitigar las dificultades y mejorar los aprendizajes y la comprensión del objeto matemático.

5.2 Recomendaciones

Al estar orientada la enseñanza de los diversos objetos geométricos desde el enfoque sintético o analítico, se sugiere que sean abordados desde la complementariedad de estos, dado que se propicia y profundiza el desarrollo de procesos cognitivos matemáticos necesarios para el reconocimiento no solo de las formas y relaciones de semejanza, sino también, de las propiedades geométricas, algebraicas y transformacionales.

De esto, es importante resaltar que, si bien la indagación en cuestión centró su atención en caracterizar la forma en que los estudiantes de segundo semestre de Licenciatura en Matemáticas abordan las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico, no atiende todo el espectro del objeto matemático que profundiza su compresión en otros sistemas axiomáticos y de representación, puesto que no se contempló en la indagación.

Por tal razón, considerando los resultados obtenidos, a partir de las producciones de los estudiantes en el desarrollo de la secuencia de tarea, es pertinente extender la mirada a futuras investigaciones en el campo de la Educación en Matemática, en las que se vincule el uso potencial de un software de geometría dinámica para el estudio tanto de las propiedades que permanecen invariantes en cada transformación geométrica como el tránsito de un enfoque o modo de pensamiento a otro.

Finamente, sería oportuno indagar sobre la forma en que se abordan las transformaciones geométricas en las diferentes Instituciones Educativas oficiales y privadas del distrito de Buenaventura y cómo se puede aproximar a los estudiantes al abordaje de este objeto matemático favoreciendo la complementariedad de los enfoque sintético y analítico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrate, R., Delgado, G., y Pochulu, D. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. Revista iberoamericana de Educación.

Acosta, M. (2004). La Teoría Antropológica de lo Didáctico y las Nuevas Tecnologías. Comunicación para el Primer Congreso Internacional de la TAD. Universidad de Jaén.

Alonso, J., Ocampo, M., y Urbano, C. (2019). Calidad de la educación media según el examen de estado Saber 11. Buenaventura 2019. Universidad ICESI.

Alsina, C., Pérez, R., y Ruiz, C. (1989). *Simetría Dinámica.* Madrid: Síntesis.

Álvarez, C. (2000). Descartes, Lector de Euclides. En C. Álvarez, & R. Martínez, (Coords.), Descartes y la Ciencia del Siglo XVII (pp. 15 – 68). México D.F., México: Siglo Veintiuno Editores.

Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: ¿What Makes It Special? Journal of Teacher Education, 59 (5); 389-407.

Barrantes, M., y Blanco, L. (2005). Análisis de las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 62*, 33-44.

Bernat, A. (2011). Las funciones de las calculadoras simbólicas en la articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica en secundaria en Un panorama de la TAD, Centre de Recerca Matemática, pp. 533 – 551.

Camargo, L. (2021). Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática: Recursos para la captura de información y el análisis. (p.60-65). editor, Universidad de Antioquia.

Castillo, H. (1993). *Lecciones de Geometría Euclidiana*. Bogotá: Publicación del Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística.

Conferencia episcopal de Colombia. (2002). Ley 115 de 1994. Ley general de la educación y desarrollos reglamentarios. Bogotá, DC.

Díaz, D., y Bazán, K. (2011). Enseñanza de las transformaciones isométricas en el primer nivel de educación media de adultos: resultados de una experiencia. *Horizontes Educacionales*, *16*(2), 17-29.

Escudero. (2002). La formación geométrica en la formación inicial de profesores de enseñanza primaria a través de entornos de aprendizaje. Grupo de Investigación en Educación Matemática de la Universidad de Sevilla (Plan Andaluz de Investigación; FQM-226).

Garzón, D. y Valoyes, L. (2005). *Notas de Clase de Geometría l*. Cali, Colombia: Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

Gascón, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico. El paso de estudiar matemática en secundaria a estudiar matemática en la universidad, SUMA, 26, 11-21.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? Revista SUMA 39, 13-25.

Gascón, J. (2003). Efectos del “autismo temático” sobre el estudio de la Geometría en Secundaria I: desaparición escolar de la razón de ser de la geometría. SUMA.

Godino, J., y Ruiz, F. (2002). Geometría y su didáctica para maestros. Granada: Universidad de Granada. España.

Gómez, M. (2012). Dificultades de aprendizaje de los contenidos curriculares (Vol. 246). Editorial UOC.

Gómez, Mora y Velasco (2018). Análisis de instrucción. Capítulo 5 (p.197-268)

González, Y. y Arias, I. (2017). Análisis didáctico del concepto de homotecia para su enseñanza y aprendizaje en octavo año de la Educación General Básica en Costa Rica (Doctoral dissertation, Tesis de pregrado). Universidad Nacional de Costa Rica, Heredia, Costa Rica.

Guerrero, B (2006). Geometría desarrollo Axiomático. Bogotá, Colombia.

Guisin, L. (2000). Transformaciones geométricas. *Revista de Educación Matemática*, *15*(3), 3-25.

Hilbert, D. (1996). Fundamentos de la geometría. España: CSIC.

Jahn, A. (1998). Des transformations desfigures aux transformations ponctuelles: étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre: relations entre aspects géomètriques et fonctionnels end classe de second (Doctoral dissertation, Grenoble 1).

Jaime, A y Guiterres, A. (1996). El grupo de las isometrías en el plano. Directores: Miguel de Guzmán y Luís Rico. Editorial Síntesis. Madrid.

Jaime, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, España.

Julio, L. (2014). Las transformaciones en el plano y la noción de semejanza (Tesis de posgrado). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Lemonidis, C. (1990). Conception, réalisation et résultats d'une expérience. denseignement de lhomothétie. Tesis Doctoral. Université Louis Pasteur, Strasbourg.

Lemonidis, C. (1991). Analyse et réalisation dune expérience d'enseignement de l'homothétie. Recherches en Didactique des Mathématiques, p. 295 – 324.

Lima, E. (2001). *Medida de la forma en geometría*. Traducción de Sergio Plaza. Serie la Enseñanza Matemática.

Llinares, S. (2007). Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornosde aprendizaje para relacionar la formac ión inicial y el desarrollo profesional. Conferencia invitada en la XIII Jornad as de Aprendizaje y Enseñanza de lasMatemáticas - JAEM. Granada, Julio.

Luna y Álvarez (s.f). Felix Klein y el estudio de la geometría, Memorias XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética.

Malana, N. y Laderosa, R. (2000). Acerca de las dificultades encontradas en alumnos de 12-13 años en el aprendizaje de la isometría plana. *Mathematics Education*, *12*(02), 63-80.

Margolinas, C. (2013). Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22. Oxford: ICMI.

MEN. (1998). Lineamientos curriculares de Matemáticas. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanías. Bogotá, Colombia.

Montes, A. Romero, Z. Gamboa, A. (2017). La formación docente en el marco de la política de calidad de la Educación Básica en Colombia. *Revista Espacios.*Vol. 38 (N° 20) Pág. 26. M

Montes, S. (2012). Una propuesta didáctica para la enseñanza de transformaciones geométricas en el plano con estudiantes de grado séptimo haciendo uso del entorno visual del juego pac-man (Tesis de posgrado). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Moriena, S. (2006). Reseña histórica y aplicaciones de las transformaciones geométricas del plano. Argentina: Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. Prov. de Santa Fe.

Ortiz, J. y Angulo, J. (2010). La homotecia, un tema casi olvidado en la enseñanza de la educación matemática en Buenaventura: una propuesta desde el punto de vista algebraico.

Parraguez, M., Teoría los Modos de Pensamiento, pp.1-80. Ediciones Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile (2012).

Ponte, J. (2001). O início da carreira profissional de professores de Matemática e Ciências. *Revista de Educação*, 31-46.

Programa académico de licenciatura en matemáticas Universidad del Valle sede pacífico registro SNIES 106860 (2019) (p.1-53)

Santos-Trigo, M, Espinosa-Pérez, H. y Reyes-Rodríguez, A. (2008). Connecting dynamic representations of simple mathematical objects with the construction and exploration of conic sections. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39:5, pp 657 – 669.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of student´s thinking in linear algebra in Dorier, J. L. (eds), the teaching of linear algebra in question (pp. 209-246). Kluwer academic publishers. Netherlands.

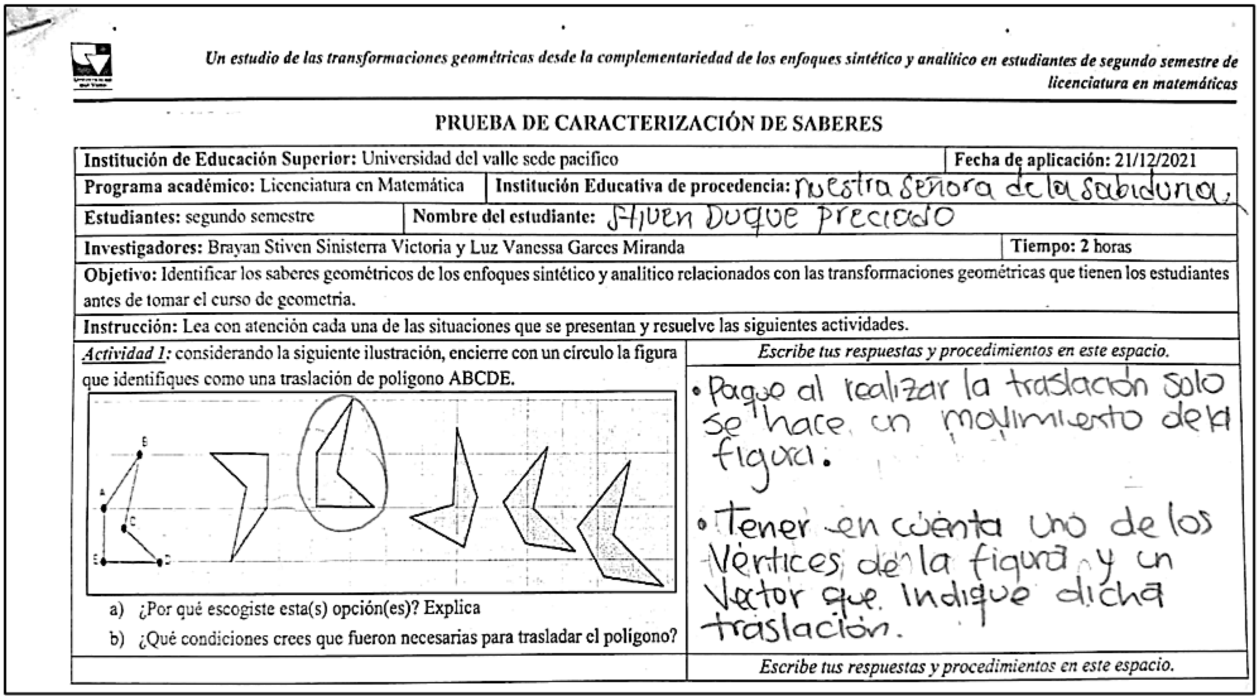
Thaqi, X. (2009). Aprender a enseñar transformaciones geométricas en primaria desde una perspectiva cultural. Tesis Doctoral. Universidad de Barcelona, Barcelona, España.

Velásquez, et al. (2007). La Geometría Analítica: ¿Cómo presentarla de manera interesante para los alumnos de la educación media superior? En C. Dolores Flores, G. Martínez; R. M. Farfán; C. Carrillo; I. López y C. Navarro (Eds.). Matemática educativa: algunos aspectos de la socio-epistemología y la visualización en el aula. Editorial Díaz de Santos. México.

ANEXOS

En este apartado, se presentan algunas producciones escritas de las estudiantes alusivas tanto a la prueba piloto como a la secuencia de tareas. De igual manera, se muestran algunas evidencias fotográficas de la implementación de estos diseños.

7.1 Producciones escritas de los estudiantes referente a la prueba piloto


Un estudio de las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico en estudiantes de segundo semestre de licenciatura en matemáticas

PRUEBA DE CARACTERIZACIÓN DE SABERES

Institución de Educación Superior: Universidad del valle sede pacifico	**Fecha de aplicación:** 21/12/2021
Programa académico: Licenciatura en Matemática	**Institución Educativa de procedencia:** nuestra señora de la sabiduria.
Estudiantes: segundo semestre	**Nombre del estudiante:** Stiven Duque Preciado
Investigadores: Brayan Stiven Sinisterra Victoria y Luz Vanessa Garces Miranda	**Tiempo:** 2 horas

Objetivo: Identificar los saberes geométricos de los enfoques sintético y analitico relacionados con las transformaciones geométricas que tienen los estudiantes antes de tomar el curso de geometria.

Instrucción: Lea con atención cada una de las situaciones que se presentan y resuelve las siguientes actividades.

Actividad 1: considerando la siguiente ilustración, encierre con un círculo la figura que identifiques como una traslación de poligono ABCDE.

a) ¿Por qué escogiste esta(s) opción(es)? Explica

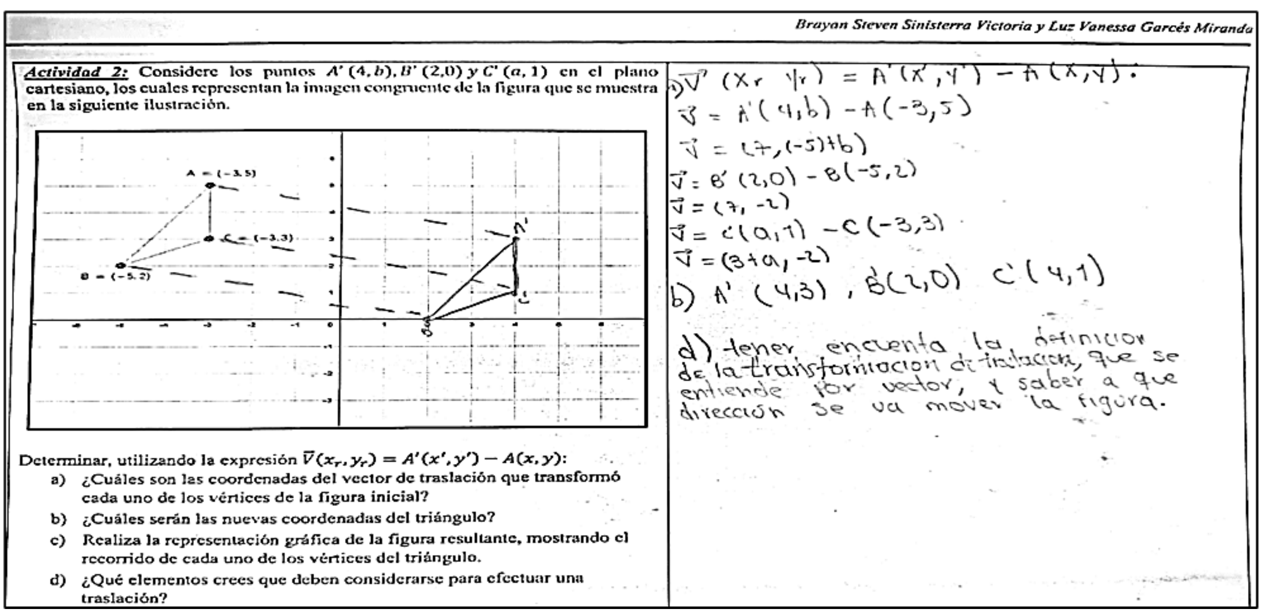
b) ¿Qué condiciones crees que fueron necesarias para trasladar el polígono?

Escribe tus respuestas y procedimientos en este espacio.

• Porque al realizar la traslación solo se hace un movimiento de la figura.

• Tener en cuenta uno de los vértices de la figura y un vector que indique dicha traslación.

Escribe tus respuestas y procedimientos en este espacio.


Brayan Steven Sinisterra Victoria y Luz Vanessa Garcês Miranda

Actividad 2: **Considere los puntos $A'(4,b), B'(2,0)$ y $C'(a,1)$ en el plano cartesiano, los cuales representan la imagen congruente de la figura que se muestra en la siguiente ilustración.**

Determinar, utilizando la expresión $\vec{V}(x_r, y_r) = A'(x', y') - A(x, y)$:

a) **¿Cuáles son las coordenadas del vector de traslación que transformó cada uno de los vértices de la figura inicial?**

b) **¿Cuáles serán las nuevas coordenadas del triángulo?**

c) **Realiza la representación gráfica de la figura resultante, mostrando el recorrido de cada uno de los vértices del triángulo.**

d) **¿Qué elementos crees que deben considerarse para efectuar una traslación?**

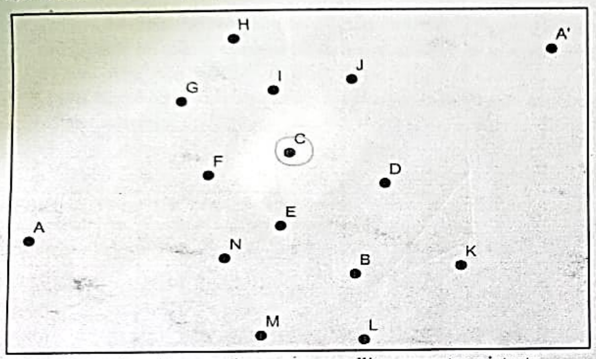
a) $\vec{V}(x_r\ y_r) = A'(x', y') - A(x, y)$.
$\vec{v} = A'(4,b) - A(-3,5)$
$\vec{v} = (7, (-5)+b)$
$\vec{v} = B'(2,0) - B(-5,2)$
$\vec{v} = (7, -2)$
$\vec{v} = C'(a,1) - C(-3,3)$
$\vec{v} = (3+a, -2)$

b) $A'(4,3)$, $B'(2,0)$ $C'(4,1)$

d) tener encuenta la definicion de la transformacion de traslacion, que se entiende por vector, y saber a que dirección se va mover la figura.

Un estudio de las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico en estudiantes de segundo semestre de licenciatura en matemáticas

Actividad 3: considerando que en la siguiente figura el punto A' es la imagen de A por medio una rotación, responda:



a) Observa detenidamente los puntos que allí se presentan e intenta determinar ¿Cuál de ellos puede ser el centro de rotación? ¿Por qué?
b) ¿Qué relación encuentras entre los puntos A', A y el centro que determinaste?
c) ¿Cuál es la amplitud del ángulo con el que se rotó el punto A con el centro de rotación encontrado en el primer inciso?
d) ¿Qué elementos se deben considerar en una rotación?

Escribe tus respuestas y procedimientos en este espacio.

a) el punto de rotación es el c porque se puede observar que si cualquiera que el punto se rota con un ángulo 180° y si vemos eso es lo mismo que tener una reflexion central
b) que son equedistante del centro.
c) la amplitud del angulo 180°
d) los elementos que son importantes en la rotación son: el centro de rotación, la relacion entre la imagen inicial y su imagen final, el angulo,

Actividad 4: dado el triángulo con coordenadas $E(1,2), F(3,2)$ y $G(5,4)$ rotarlo con un ángulo $\beta = 60°$, sabiendo que el centro de rotación esta en $H(1,2)$. Para ello, considere los siguientes pasos:

- Primero, se buscan los radios de cada vértice al centro, usando $r = \sqrt{(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2}$
- Segundo, se determinar los ángulos iniciales formado por el vértice, el centro y la horizontal mediante; $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y - y_r}{x - x_r}\right)$.
- Tercero, determina las componentes de cada vértice de la figura resultante sustituyendo los valores encontrados en las ecuaciones; $x' = r \cdot \cos(\theta + \beta) + x_r \wedge y' = r \cdot sen(\theta + \beta) + y_r$.
- Cuarto, representa geométricamente la transformación de rotación a partir de lo pasos anteriores.

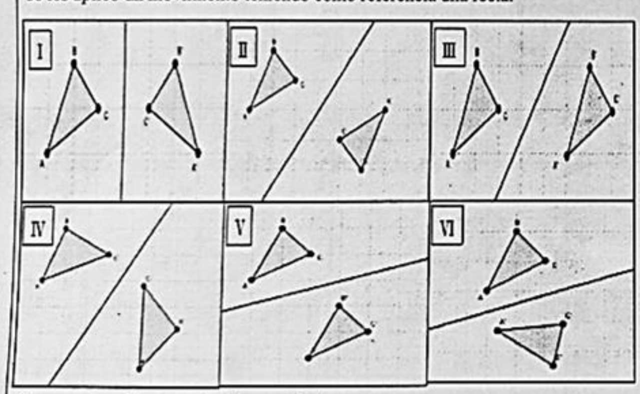
Escribe tus respuestas y procedimientos en este espacio

$\sqrt{(1-1)^2 + (2-2)^2} = 0$

$\sqrt{(3-1)^2 + (2-2)^2} = 2$

$\sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{20}$

Actividad 5: la siguiente ilustración muestra un conjunto de figuras, a las cuales se les aplicó un movimiento teniendo como referencia una recta.



Observa detenidamente las figuras e indica:

a) ¿Cuál o cuáles corresponden a una simetría axial respecto a la recta y cuáles no corresponden? Justifica en cada caso.

Escribe tus respuestas y procedimientos en este espacio

a) corresponden I, IV, VI y no correspondon II, III, V.
La simetrra axral en las que si correspondo permite ver el reflejo de la frgura inicral y deja ver la correspondencia punto a punto. (cambro posición)
En cambro, las que no correspondon son porque no dejan ver la correspondencia. o la frgura se queda en su mismo estado.

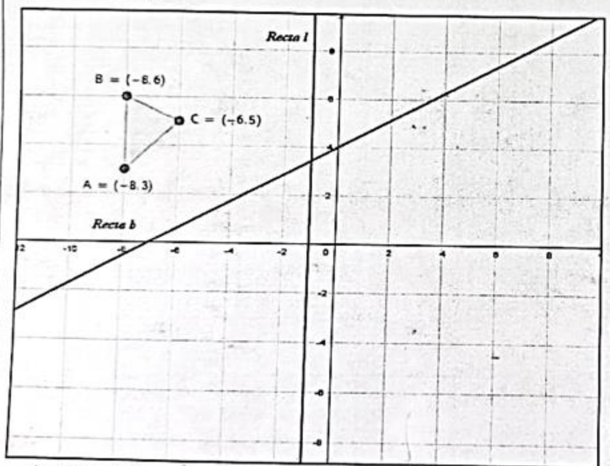
b) Si trazas un segmento para dar cuenta de una correspondencia punto a punto en una de las representaciones de la simetría axial y en una que consideres que no lo es, ¿dichos segmentos en cada caso son perpendicular a la recta? ¿los puntos medios de estos segmentos coinciden con la recta?

c) ¿Qué se debe considerar para reconocer que a una figura se le aplicó una simetría axial?

b) No serían perpendiculares a la recta y los puntos medios supongo que no coincidirían.

c) Que las representaciones de la simetría axial correspondan punto a punto con la figura inicial y que se vea el reflejo de la figura inicial en la representación.

Actividad 6: Considere los puntos, A (-4,5), B (-5, 2) y C (-3,3) de un triángulo en el plano cartesiano.



a) ¿Cómo hallamos la reflexión del ΔABC con respecto a la recta *l*?

b) ¿Cómo hallamos la reflexión de la figura obtenida ΔA'B'C' con respecto a la recta *b*?

c) Después del proceso anterior ¿Qué concluyes?

Escribe tus respuestas y procedimientos en este espacio

a). Teniendo en cuenta los vértices del triángulo propuesto en el plano y la recta misma.

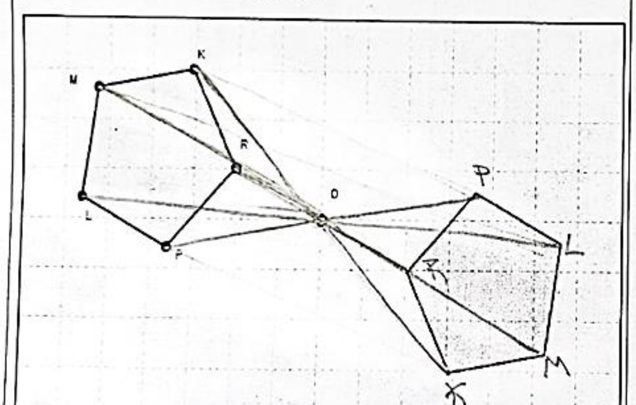
b). Teniendo en cuenta el resultado o los vértices del triángulo resultante del inicial.

c). Qué es necesario tener en cuenta los puntos de las figuras para utilizar la simetría axial.

d) Existe algún movimiento que permita que el ΔABC tome la posición del triángulo A"B"C". ¿Cuál?

e) ¿Cómo hallamos las ecuaciones de las rectas *l* y *b*, si se tiene en consideración cada triángulo con su simétrico o reflejado?

Actividad 7: considerando la siguiente figura, nombra los vértices en el polígono de la derecha de tal manera que el movimiento realizado al pentágono RPLMK sea una simetría central con centro en O.



a) Con la regla, traza las rectas que une a los vértices P, P'; R, R'; K, K'; L,L' ; M,M' . ¿Qué ocurre con estos segmentos?

b) Compara la longitud de los segmentos $\overline{RO}$ y $\overline{OR'}$; $\overline{PO}$ y $\overline{OP'}$ ¿Qué concluyes?

c) ¿Qué expresión o ecuación utilizarías para determinar las coordenadas del centro de simetría?

Escribe tus respuestas y procedimientos en este espacio.

a). Todos los segmentos pasan por el centro en O.

b). Que el centro en O viene siendo el punto medio

Un estudio de las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico en estudiantes de segundo semestre de licenciatura en matemáticas

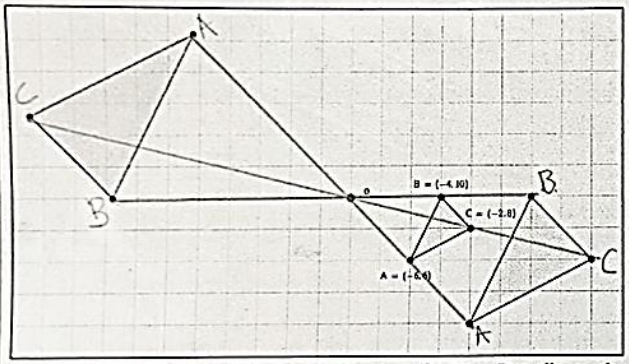
Actividad 8: Sean $M'(1,-1), N'(a,-3)$ y $O'(-6,b)$ los vértices del triángulo F'. determinar las coordenadas de los vértices de la figura inicial F y F', así como también, el centro simétrico, sabiendo que $M(-3,1)$ es un vértice del triángulo F y que F' es una simetría central de F. Realice la gráfica de la situación.

No se, no me lo enseñaron: Tal vez

$$\frac{M'+M}{2} = \frac{1-3}{2}, \frac{-1+1}{2}$$

$= (-1,0)$ - Punto medio

Actividad 9: Observa los tres triángulos que se aprecian en la siguiente ilustración:



a) Identifica las características en común que puedan tener. Para ello, puedes ayudarte con el compás, el transportador o la regla.

Escribe tus respuestas y procedimientos en este espacio.

los triangulos tienen la misma forma pero unos mas grande que otros.

los vertices de los triangulos se encuentran alineados con el centro y estan sobre la misma recta

b) ¿Consideras que los triángulos son semejantes? ¿Por qué? ¿Cuál sería la razón de semejanza?

c) Describe el movimiento que deben hacer los vértices del triángulo ΔBCD para llegar a las posiciones de cada uno de los otros triángulos

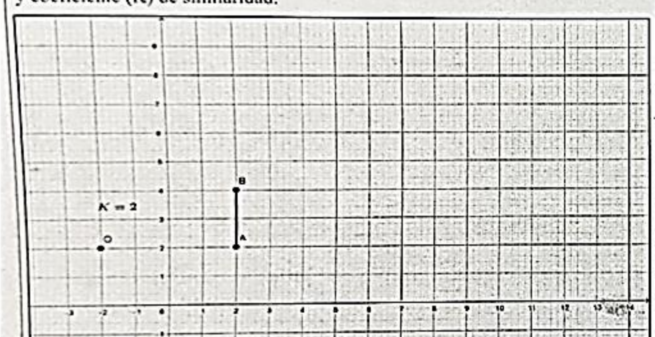
d) ¿Qué se debe tener en cuenta para efectuar una transformación de homotecia?

b). Porque los verticces se conectan con el punto

c) traslacion

d) . No me lo enseñaron

Actividad 10: En la siguiente ilustración se muestra el segmento $\overline{AB}$, centro (O) y coeficiente (K) de similaridad.



Utilizando las expresiones $x' = kx - kxr + xr$ y $y' = ky - kyr + yr$ Donde; x' y y' corresponden a las coordenadas del punto homotético, k es el coeficiente de similaridad, y, xr y yr son las coordenadas del centro de similaridad. Determine:

a) ¿Cuáles son las coordenadas del segmento homotético cuyos puntos son A' y B'?

b) Si solo se tiene el segmento y el centro de similaridad, explica ¿cómo encontrarías el coeficiente de similaridad?

c) Explica ¿cómo hallarías el centro de similaridad si solo consideras los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$?

Escribe tus respuestas y procedimientos en este espacio.

No Me lo enseñaron

7.2 Producciones escritas de los estudiantes referente a la secuencia de tareas

Un estudio de las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico en estudiantes de segundo semestre de licenciatura en matemáticas

SECUENCIA DE TAREAS

Generalidades

Institución de Educación Superior: Universidad del Valle Sede Pacífico	**Programa académico:** Licenciatura en Matemática	**Ubicación semestral:** segundo
Nombre del estudiante: Karol	**Fecha de ejecución:** 08/02/2022	**Temporalidad:** 2 horas

Tarea 1

Conceptualización

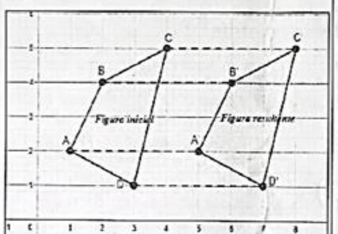
Abordaje sintético

La traslación es un desplazamiento en línea recta sin girar que se aplica a una figura, en la que los puntos de la figura se mueven la misma distancia y en la misma dirección.

Elementos que intervienen:

- Dirección: horizontal, vertical u oblicua
- Sentido: derecha, izquierda, arriba, abajo.
- Magnitud: número de unidades que se desea trasladar la figura.

Nótese que en la traslación del cuadrilátero $ABCD$ (como se muestra en la ilustración), la dirección es horizontal, el sentido es hacia la derecha y la magnitud es de 4 unidades.

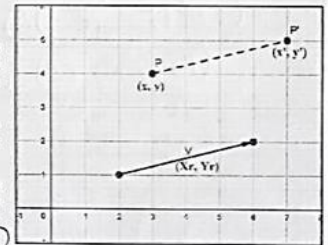


Abordaje analítico

Dado un vector $\vec{v}$, se llama traslación de vector $\vec{v}$, y se denota por $t_{\vec{v}}$, a la transformación geométrica que asocia a cada punto P del plano otro punto $p' = t_{\vec{v}}(p)$ de forma que se verifique $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$.

Elementos que intervienen:

- Figura inicial: se determina considerando el vector y la figura resultante, así: $P(x, y) = P'(x', y') - \vec{V}(x_r, y_r)$
- Vector: se determina considerando la figura inicial y la resultante, así: $\vec{V}(x_r, y_r) = P'(x', y') - P(x, y)$.
- Figura resultante: se determina considerando la figura inicial y el vector, así: $P'(x', y') = P(x, y) + \vec{V}(x_r, y_r)$



Formulación de la tarea: al trasladar ΔABC de vértices $A(-5,3), B(-2,6)$ y $C(-1,3)$ se obtuvo $\Delta A'B'C'$ de vértices $A'(1,3), B'(a,6)$ y $C'(5,b)$. De manera similar, se trasladó $\Delta A'B'C'$ y se obtuvo $\Delta A''B''C''$ de vértices $A''(1,c), B''(4,0)$ y $C''(d,-3)$. Determinar:

1. La dirección, la magnitud y el sentido de las traslaciones que se deben efectuar en el triángulo ABC para obtener el $\Delta A''B''C''$.
2. ¿Cuáles son las coordenadas numéricas del vector de traslación que transforma el triángulo ABC en $\Delta A''B''C''$?
3. ¿Cuáles son las coordenadas numéricas de las abscisas (a y d) y ordenadas (b y c) de los vértices B', C', A'' y C''?
4. Verifica gráficamente que se cumpla la transformación.

Escribe tus respuestas y procedimientos en este espacio.

1) la dirección es horizontal, su sentido es derecha y su magnitud de 6 unidades.

2) $\vec{V}(x_r, y_r) = P'(x', y') - P(x, y)$
$\vec{V}(x_r, y_r) = B''(4,0) - B(-2,6)$
$\vec{V} = (6,-6)$

3) $A''(1,-3)$; $C''(5,-3)$; $B'(4,6)$; $C'(5,3)$

Un estudio de las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico en estudiantes de segundo semestre de licenciatura en matemáticas

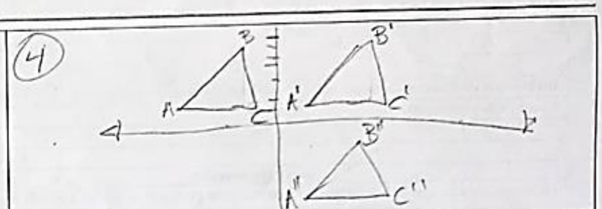
1) Primero, se traslado horizontalmente a la derecha en 6 unidades

Luego se trasladó verticalmente hacia abajo 6 unidades

2) $V(6,-6)$

3) $a=4, b=3, c=-3$ y $d=5$

4)



Tarea 2

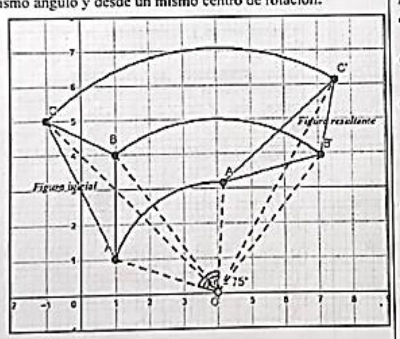
Conceptualización

Abordaje sintético

La rotación es una transformación realizada sobre una figura en la que cada punto de esta se desplaza circularmente con un mismo ángulo y desde un mismo centro de rotación:

- Centro de rotación: punto fijo del cual se realiza la rotación.
- Ángulo de giro: medida del ángulo que indica cuanto gira cada punto de la figura.
- Sentido de giro: orientación antihoraria (negativa) u horaria (positiva) del giro.

Obsérvese en la ilustración que cada vértice de la figura resultante ($\Delta A'B'C'$) se obtuvo al girar utilizando el transportador la figura inicial (ΔABC) alrededor de un ángulo de 75° alrededor del punto O, en sentido horario.

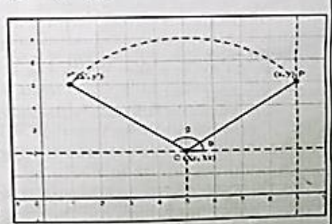


Abordaje analítico

Sea un punto $P(x, y)$ con respecto a un punto $O(x_r, y_r)$ y a un ángulo orientado $\measuredangle\beta$, tal que $\beta(P) = P'$ si y solo si la distancia del punto O al punto P es igual a la distancia de O al punto $P'(x', y')$ y el ángulo $\measuredangle POP' = \measuredangle\beta$.

Elementos que intervienen:

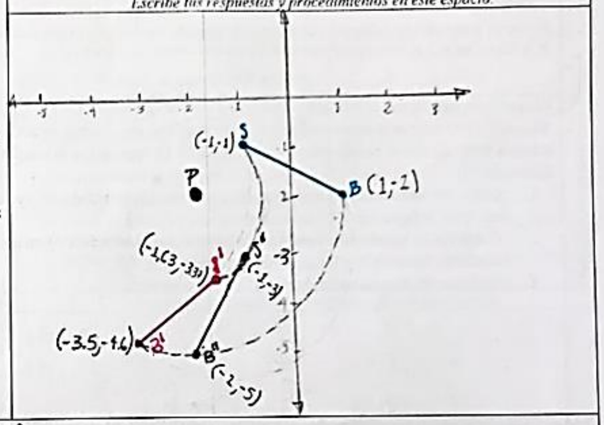
- Centro de rotación: es el punto por el cual se va a rotar la figura y se determina así: $O(x_r, y_r) = \{[x' - r \cdot \cos(\theta + \beta)], [y' - r \cdot sen(\theta + \beta)]\}$
- Radio: distancia que hay entre cada vértice de la figura inicial y el centro de rotación, el cual se calcula así: $\overline{OP} = \sqrt{(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2}$
- Ángulos iniciales: es el formado por la horizontal y la línea que une el centro y cada vértice de la figura inicial, el cual se calcula empleando: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y - y_r}{x - x_r}\right)$
- Ángulo de rotación: es la amplitud o medida angular a la que se desea rotar la figura inicial($\measuredangle\beta$).
- Figura resultante: se determina con el centro de rotación, ángulo de rotación, el ángulo inicial y los vértices de la figura a transformar. Esto es: $P'(x', y') = \{[r \cdot \cos(\theta + \beta) + x_r], [r \cdot sen(\theta + \beta) + y_r]\}$



Formulación de la tarea: dado el segmento $\overline{BS}$ cuyos extremos tienen por coordenadas $B(1,-2)$ y $S(-1,-1)$. Se efectúa una rotación de este, 120° alrededor del punto $P(-2,-2)$ en sentido horario, obteniendo $\overline{B'S'}$ el cual se rota 30° alrededor del mismo punto P en sentido antihorario, resultando $\overline{B''S''}$.

1. ¿Cuáles son las coordenadas numéricas de los extremos B'' y S'' del segmento $\overline{B''S''}$?
2. Determine ¿Cuál es el ángulo de giro que permite rotar el segmento $\overline{BS}$ hasta $\overline{B''S''}$?
3. Si el sentido de la rotación del segmento $\overline{B'S'}$ hubiese sido horario ¿Cuál sería el ángulo de giro que permitiría rotar el segmento $\overline{BS}$ hasta $\overline{B''S''}$?
4. Verifique a través de una representación gráfica las respuestas de los incisos anteriores.

Escribe tus respuestas y procedimientos en este espacio.



Tarea 3

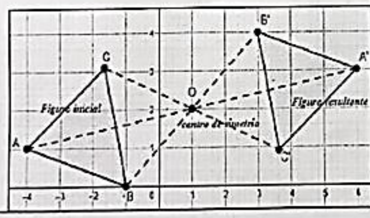
Conceptualización

Abordaje sintético

La simetría central es una transformación en el plano en la cual cada punto de la figura geométrica se relaciona con otro, de tal forma, que éstos equidisten de un punto llamado centro de simetría y estén a lados opuesto del mismo.

Elementos que intervienen:

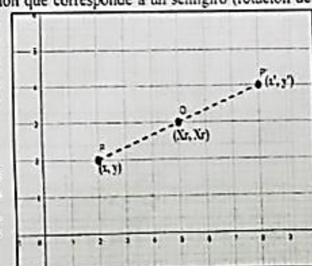
- Figura inicial: es la figura a la cual se le aplicará el movimiento.
- Centro de simetría: es el punto medio alrededor del cual se produce el movimiento.
- Figura resultante: la figura con orientación invertida obtenida después del movimiento.



Notese en la ilustracion, todos estos elementos; destacando que los trazos entre cada vertice de la figura incial y su correspondiente en la figura resultante coinciden en O.

Abordaje analítico

La simetría central es una transformación que corresponde a un semigiro (rotación de 180°), en la que dado un punto $O(x_r, y_r)$ en el plano y el segmento $\overline{PP'}$, se cumple $\overline{OP}=\overline{OP'}$. De modo que, los puntos $P(x,y)$ y $P'(x',y')$ se encuentran relacionados alrededor del punto medio O del cual equidistan.

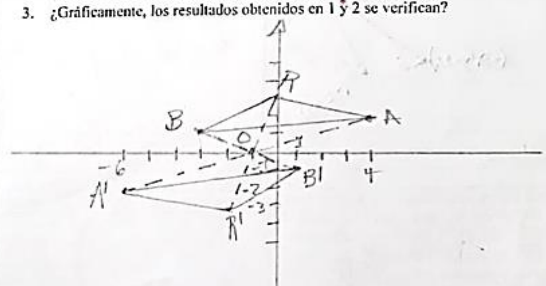


Elementos que intervienen:

- Figura inicial: se determina teniendo en cuenta el centro simétrico y la figura resultante, así: $P(x,y)=[(2x_r-x'),(2y_r-y')]$.
- Centro de simetría: es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ y se determina usando: $O(x_r,y_r)=\left[\left(\frac{x+x'}{2}\right),\left(\frac{y+y'}{2}\right)\right]$.
- Figura resultante: es la figura simetria de la inicial, la cual se halla empleando: $P'(x',y')=[(2x_r-x),(2y_r-y)]$.

Formulación de la tarea: se sabe que el triángulo $B'R'A'$ de vértices $B'(1,-1)$, $R'(a,-3)$ y $A'(-6,b)$ es la figura resultante después de aplicar una simetría central al triángulo BRA, del cual se conoce solo el vértice $B(-3,1)$. De acuerdo con lo anterior, determinar:

1. ¿Cuáles son las coordenadas numéricas del centro simétrico alrededor del cual se transformó la figura inicial?
2. ¿Cuáles son las coordenadas numéricas de los vértices faltantes de la figura inicial (abscisa a y ordenada b) y los de la figura resultante (R y A)?
3. ¿Gráficamente, los resultados obtenidos en 1 y 2 se verifican?



Escribe tus respuestas y procedimientos en este espacio.

$X=-3$ $X'=1$ $O=\left[\left(\frac{-3+1}{2}\right),\left(\frac{1+(-1)}{2}\right)\right]$
$Y=1$ $Y'=-1$
$O=(-1,0)$ coordinado del centro

$R=(2(-1)-(-2),(2(0)-(-3))$
$=(-2+2,+3)$ $R(0,3)$

A es (4,2), porque trace una linea qui paso por el centro y como deben tener la misma distancia lo medi con la regla y me dio ahi.

Tarea 4

Conceptualización

Abordaje sintético

La simetría axial es una transformación que se le aplica a una figura con respecto a una recta, de tal forma que cada punto de la figura inicial y su punto correspondiente en la imagen, están a distinto lado de la recta, pero a la misma distancia de esta.

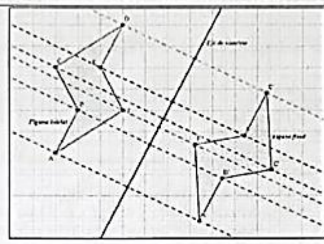
Elementos que intervienen:

Abordaje analítico

La simetría axial es una transformación isométrica mediante la cual un punto $P(a,b)$ se refleja en el plano con respecto a una recta l teniendo como resultante $P'(a',b')$, tal que, se verifica que si P pertenece al eje de simetría l se tiene que $(P)=P'$. De manera que, que $y=mx+c$ es la ecuación de la recta que refleja al punto P.

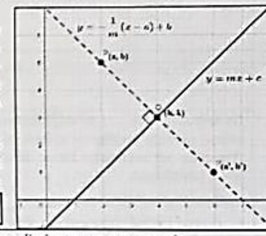
Un estudio de las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico en estudiantes de segundo semestre de licenciatura en matemáticas

- Figura inicial: figura a la cual se aplicará la transformación.
- Eje de simetría: es la línea recta por la cual se genera el reflejo de la figura inicial
- Figura simétrica: es la imagen reflejo de la figura inicial, en la que las líneas que unen cada vértice de la figura inicial y su correspondiente en la figura simétrica son perpendiculares al eje de simetría.



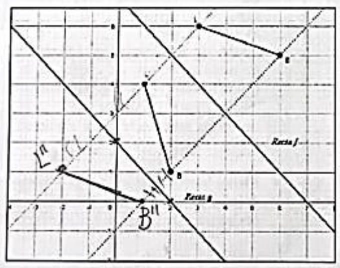
Elementos que interviene:

- Figura inicial: se determina considerando las coordenadas de la figura resultante y el eje simétrico.
- Eje de simetría: se calcula utilizando la ecuación $y = m(x - x_1) + y_1$, de modo que, se teniendo en cuenta un punto medio determinado por la recta que une un vértice de la figura inicial y su correspondiente en la figura resultante
- Figura resultante: es la figura simetría de la inicial y se determinan las coordenadas de sus vértices empleando: $P'(a', b') = \left[\left(\frac{a+2bm-2cm-am^2}{m^2+1}\right), \left(\frac{2am+bm^2+2c-b}{m^2+1}\right)\right]$



Formulación de la tarea: Sea el segmento $\overline{BL}$ con coordenadas $B(6,5)$ y $L(3,6)$ se aplicó una simetría al segmento $\overline{BL}$ con respecto a la recta f, obteniendo su resultante $\overline{B'L'}$ con coordenadas B' (2, 1) y L' (1,4) y luego al segmento $\overline{B'L'}$ se aplica la simetría por medio de la recta g obteniendo la resultante $\overline{B''L''}$. De acuerdo con lo anterior:

1. Encuentre la ecuación de la recta g con el que se determina la simetría del segmento $\overline{B''L''}$
2. Determina algebraicamente ¿cuáles son las coordenadas numéricas del segmento resultante $\overline{B''L''}$?
3. Existe otra transformación que permita que el segmento $\overline{BL}$ tome la posición del segmento $\overline{B''L''}$. Si lo hay, menciona cual es y describe gráficamente el movimiento.



Escribe tus respuestas y procedimientos en este espacio.

La recta g corta en (0,2) y (2,0)

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-2}{2-0} = \frac{-2}{2} = -1$

$y = -1(x-0)+2 \Rightarrow y = -1x+2$

Segun la grafica es L''(-2,1) y B''(1,0)

La figura BL se trasladada hasta B''L'' por lo que hay en la tarea primera.

Tarea 5

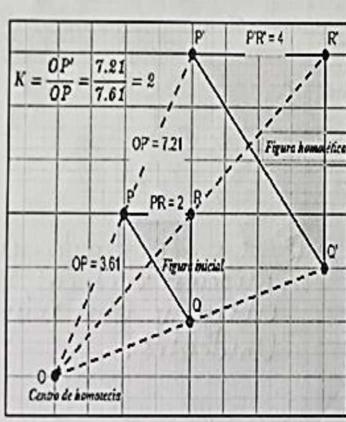
Conceptualización

Abordaje sintético

La homotecia es una transformación isomórfica que teniendo como base un punto fijo o centro permite ampliar o reducir el tamaño de una figura o segmento multiplicando las distancias por un mismo factor de conversión, manteniendo una proporción entre los lados correspondientes.

Elementos que intervienen:

- Figura inicial: figura dado a la cual se aplicará la transformación.
- Punto fijo: punto por el que se desprenden las proyecciones de las figuras, de manera que, cada vértice de una figura y su imagen se encuentran alineados a este.
- Factor de conversión: es la razón de homotecia por la cual se multiplican las distancias, permitiendo ampliar o reducir la figura. Esto es: $k = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}$
- Figura resultante: es la figura homotética ampliada o reducida mediante el factor de conversión, así: $\overline{OP'} = k \cdot \overline{OP}$.

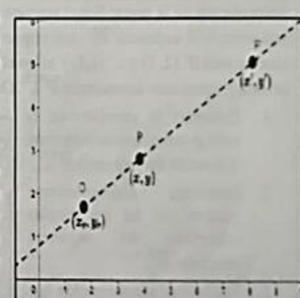


Abordaje sintético

La homotecia es una transformación mediante la cual a un punto cualquiera $P(x, y)$, le corresponde otro y sólo $P'(x', y')$ tal que la recta que une el punto P' con el punto P pasa obligatoriamente por el centro de homotecia $O(x_r, y_r)$. De modo que, $(P') = k(P)$ en la que k es un número fijo denotado como razón de homotecia.

Elementos que intervienen:

- Centro de homotecia: se calcula considerando un vértice de la figura inicial (P), su correspondiente en la figura resultante (P') y la razón (K), de la manera siguiente: $O(x_r, y_r) = \left[\left(\frac{x'-kx}{1-k}\right), \left(\frac{y'-Ky}{1-k}\right)\right]$
- Razón de homotecia: se determina teniendo en cuenta un vértice de la figura inicial (P), su correspondiente en la figura resultante (P') y el centro de homotecia de la siguiente manera: $k = \frac{x'-x_r}{x-x_r}$ o $k = \frac{y'-y_r}{y-y_r}$



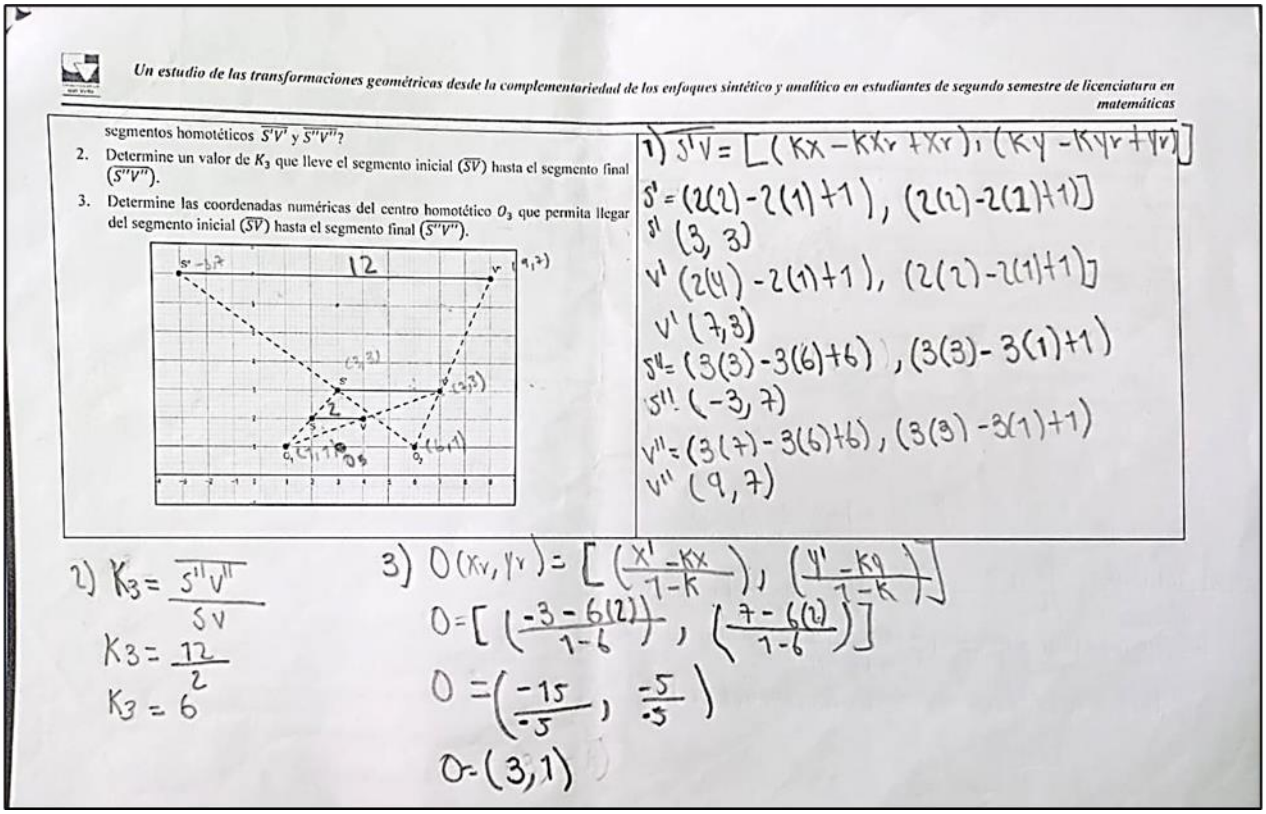
- Figura homotética: es la figura homóloga de la inicial, la cual se halla empleando; $P'(x', y') = [(kx - kx_r + x_r), (ky - ky_r + y_r)]$, de modo que, solo se considera los vértices de la figura inicial, el centro homotético y la razón de homotecia.

Formulación de la tarea: al segmento $\overline{SV}$ de extremos $S(2,2)$ y $V(4,2)$ se aplicó una homotecia con $K_1 = 2$ y centro $O_1(1,1)$ y a la figura resultante otra homotecia con $K_2 = 3$ y centro $O_2(6,1)$, tal y como se muestra ilustración:

Considerando lo anterior:

1. Verifique algebraicamente ¿cuáles son las coordenadas numéricas de los extremos

Escribe tus respuestas y procedimientos en este espacio.



Un estudio de las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico en estudiantes de segundo semestre de licenciatura en matemáticas

segmentos homotéticos $\overline{S'V'}$ y $\overline{S''V''}$?

2. Determine un valor de K_3 que lleve el segmento inicial $(\overline{SV})$ hasta el segmento final $(\overline{S''V''})$.
3. Determine las coordenadas numéricas del centro homotético O_3 que permita llegar del segmento inicial $(\overline{SV})$ hasta el segmento final $(\overline{S''V''})$.

1) $\overline{S'V'} = [(Kx - Kx_r + x_r), (Ky - Ky_r + y_r)]$

$S' = (2(2) - 2(1) + 1), (2(2) - 2(1) + 1)]$

$S'\ (3, 3)$

$V'\ (2(4) - 2(1) + 1), (2(2) - 2(1) + 1)]$

$V'\ (7, 3)$

$S'' = (3(3) - 3(6) + 6), (3(3) - 3(1) + 1)$

$S''\ (-3, 7)$

$V'' = (3(7) - 3(6) + 6), (3(3) - 3(1) + 1)$

$V''\ (9, 7)$

2) $K_3 = \dfrac{S''V''}{SV}$

$K_3 = \dfrac{12}{2}$

$K_3 = 6$

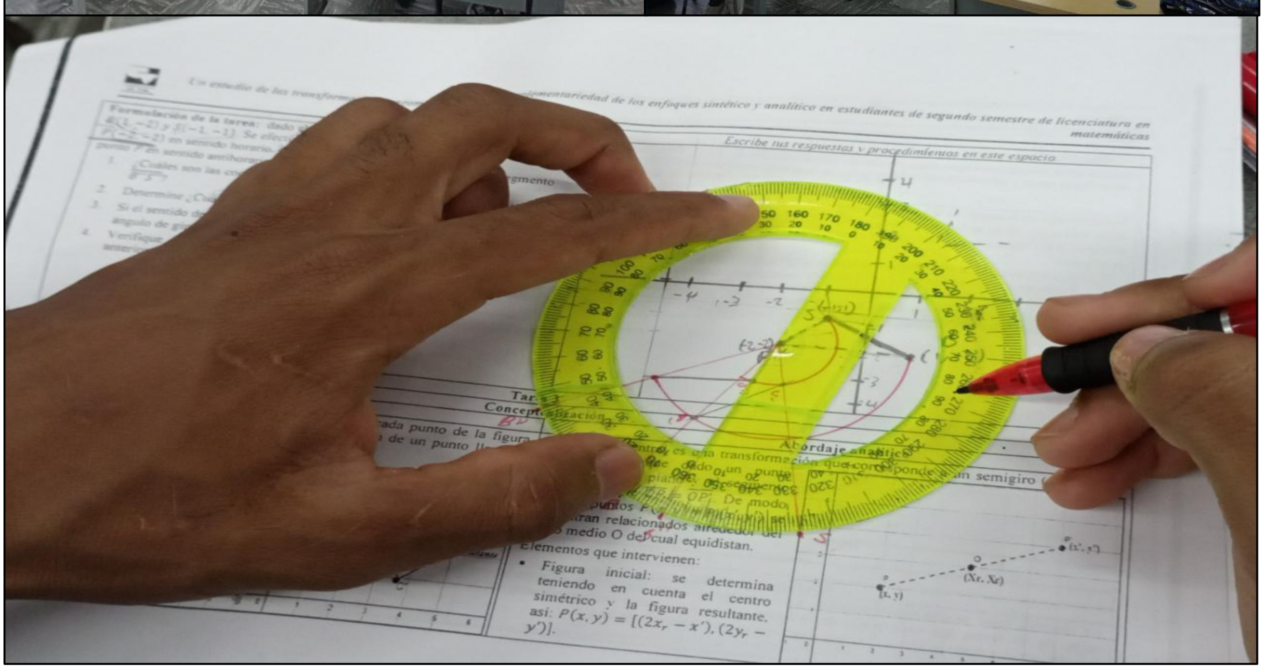
3) $O(x_r, y_r) = \left[\left(\dfrac{x' - Kx}{1-K}\right), \left(\dfrac{y' - Ky}{1-K}\right)\right]$

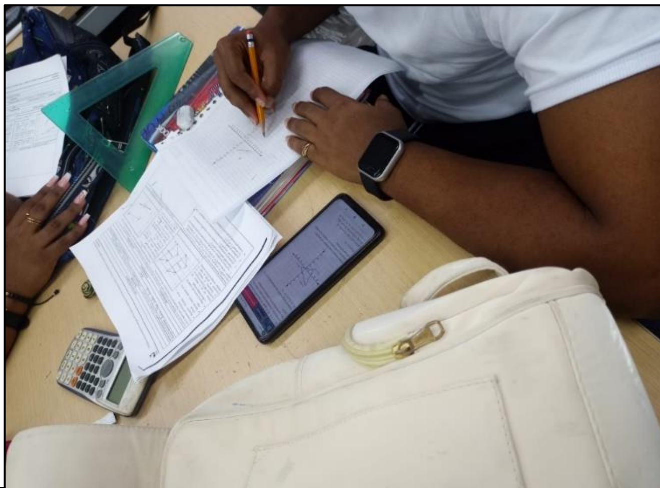
$O = \left[\left(\dfrac{-3 - 6(2)}{1-6}\right), \left(\dfrac{7 - 6(2)}{1-6}\right)\right]$

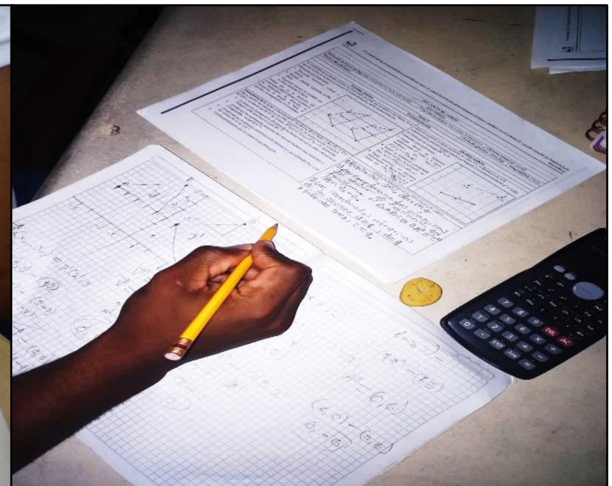
$O = \left(\dfrac{-15}{-5}, \dfrac{-5}{-5}\right)$

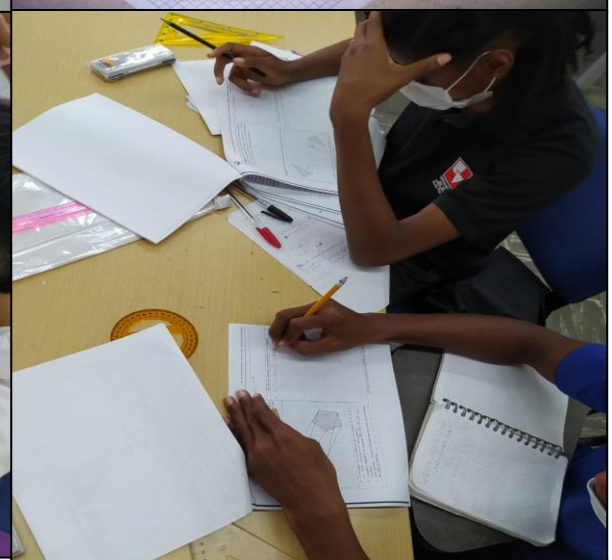
$O = (3, 1)$

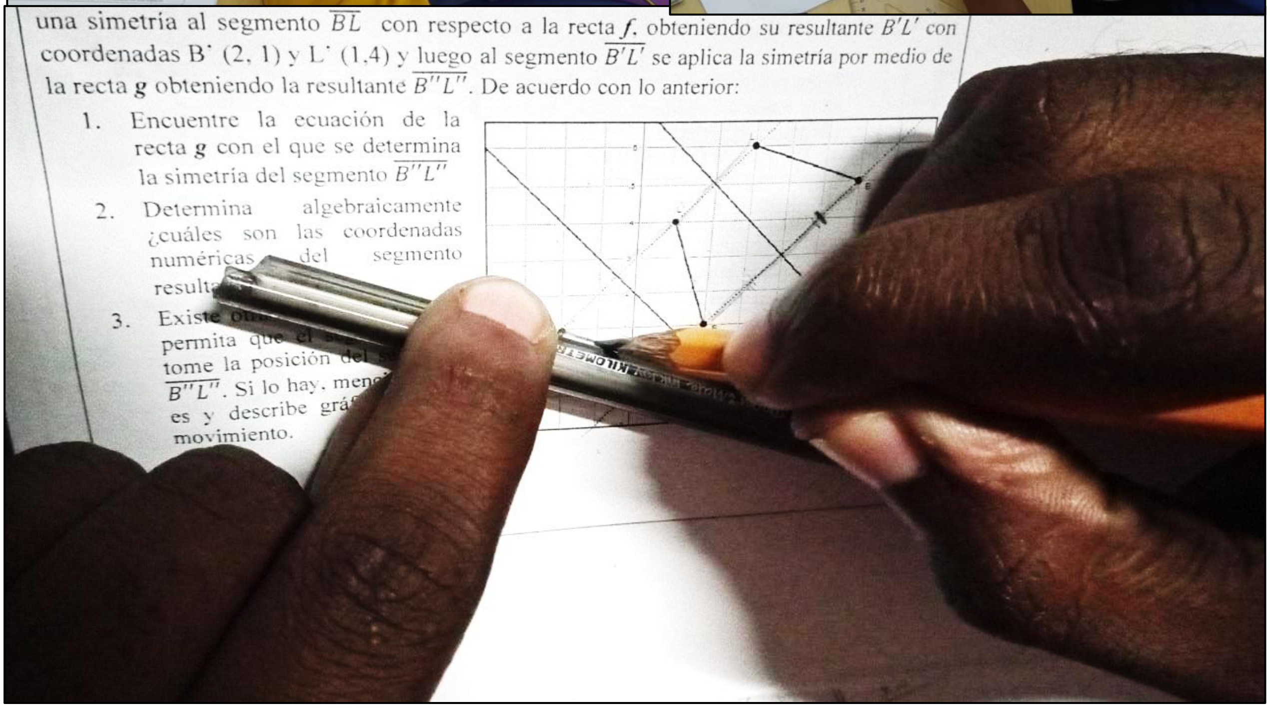
7.3 Evidencias fotográficas de las aplicaciones










una simetría al segmento $\overline{BL}$ con respecto a la recta f, obteniendo su resultante $B'L'$ con
coordenadas B' (2, 1) y L' (1,4) y luego al segmento $\overline{B'L'}$ se aplica la simetría por medio de
la recta g obteniendo la resultante $\overline{B''L''}$. De acuerdo con lo anterior:
1. Encuentre la ecuación de la recta g con el que se determina la simetría del segmento $\overline{B''L''}$
2. Determina algebraicamente ¿cuáles son las coordenadas numéricas del segmento
3. Existe
permita que el
tome la posición del
$\overline{B''L''}$. Si lo hay, men
es y describe grá
movimiento.