

**CARACTERIZACIÓN DE UN DISEÑO DE TAREAS PARA LA ENSEÑANZA DEL  
CONCEPTO DE CONGRUENCIA TRIANGULAR CON LA MEDIACIÓN  
INSTRUMENTAL DE GEOGEBRA**

**MARÍA CAMILA CORTÉS GARCÍA**

**EDWIN FABIAN VELASQUEZ VIVAS**

**Trabajo de grado para optar por el título de Lic. en Ed. Básica con Énfasis en  
Matemáticas**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE**

**FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA**

**ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

**LICENCIATURA EN EDUCACION BASICA CON ENFASIS EN**

**MATEMÁTICAS**

**ZARZAL – VALLE**

**2022**

**CARACTERIZACIÓN DE UN DISEÑO DE TAREAS PARA LA ENSEÑANZA  
DEL CONCEPTO DE CONGRUENCIA TRIANGULAR CON LA MEDIACIÓN  
INSTRUMENTAL DE GEOGEBRA**

**MARÍA CAMILA CORTÉS GARCÍA**

**EDWIN FABIAN VELASQUEZ VIVAS**

**Trabajo de grado para optar por el título de Lic. en Ed. Básica con Énfasis en  
Matemáticas**

**Director: YONATHAN BONELO AYALA**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE**

**FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA**

**ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

**LICENCIATURA EN EDUCACION BASICA CON ENFASIS EN  
MATEMÁTICAS**

**ZARZAL – VALLE**

**2022**

## **AGRADECIMIENTOS**

Al terminar el estudio del pregrado, sentimos la necesidad de agradecer a todas aquellas personas que fueron conocedores y apoyo para el cumplimiento de este sueño.

En primer lugar, agradecemos a Dios por permitirnos vivir y disfrutar de esta experiencia tan satisfactoria.

A nuestros padres, familiares, amigos y todos aquellos que estuvieron presentes brindando motivación constante para no desfallecer en el camino.

A nuestro director Yonathan Bonelo Ayala, por siempre estar presente, compartir su conocimiento, sabiduría, paciencia y guiarnos para alcanzar la meta.

## RESUMEN

El presente trabajo, tiene como finalidad presentar la caracterización un diseño de tarea para la enseñanza del concepto de congruencia triangular con la mediación instrumental de Geogebra para estudiantes de grado 7° llevada a cabo al interior de una institución oficial de Roldanillo- Valle; en la que se diseñó y se propusieron 3 tareas con la mediación instrumental de Geogebra, bajo la metodología de experimentos de enseñanza; en estas actividades se analizaron aciertos, errores y dificultades durante la implementación, las cuales permitieran arrojar reflexiones a tener en cuenta para la realización de próximos diseños tareas.

**Palabras clave:** Experimento de enseñanza, Geogebra, Diseño de tareas, Mediación instrumental, Arrastre.



## ABSTRACT

The purpose of this paper is to present a characterization of a task design for teaching the concept of triangular congruence with the instrumental mediation of Geogebra for 7th grade students carried out within an official institution in Roldanillo-Valle; in which 3 tasks were designed and proposed with the instrumental mediation of Geogebra, under the methodology of teaching experiments; In these activities, successes, errors and difficulties encountered during implementation were analyzed, which would allow reflections to be taken into account for carrying out future task designs.

**Keywords:** Teaching experiment, Geogebra, Task design, Instrumental mediation, Drag.

## CONTENIDO

Introducción	9
CAPÍTULO I: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	11
1.1. Planteamiento del problema y contextualización	11
1.2. Objetivos	19
1.2.1. Objetivo general	19
1.2.2. Objetivos específicos	19
1.3. Justificación y Antecedentes	20
CAPÍTULO II: FUNDAMENTOS TEÓRICOS	30
2.1. La geometría dinámica.	31
2.2. Diseño de tareas de educación matemática con tecnología digital.	33
2.2.1. Tarea en geometría	36
2.2.2. Papel de los DGE en el diseño de tareas	38
2.3. La mediación instrumental	40
2.4. La congruencia	43
2.4.1. La congruencia triangular	44
CAPÍTULO III: DISEÑO METODOLÓGICO	46
3.1. Naturaleza de la metodología	46
3.1.1. Población	48

	7
3.1.2. <i>Unidad de análisis</i>	48
3.1.3. <i>Fases de estudio</i>	49
3.1.4. <i>Actividades</i>	51
CAPÍTULO IV ANÁLISIS Y RESULTADOS	64
4.1¿Que se analizó?	64
4.2Análisis Local	67
4.2.1. conclusiones locales	80
4.3. Análisis Retrospectivo	81
4.3. La influencia del arrastre en el diseño de tareas	103
4.3.1. Conclusiones	104
CONCLUSIONES	106
Referencias bibliográficas	111
ANEXOS	116

**LISTA DE FIGURAS**

<b>Figure 1</b> Estructura de marco teórico	30
<b>Figure 2</b> Diseño de tareas	34
<b>Figure 3</b> Experimento de enseñanza - fases	49
<b>Figure 4</b> Actividad 2	58
<b>Figure 5</b> Actividad 3	60
<b>Figure 6</b> Implementación del diseño	82
<b>Figure 7</b> Respuestas 1-1	84
<b>Figure 8</b> Respuestas 1-2	86
<b>Figure 9</b> Respuestas 1-3	87
<b>Figure 10</b> Respuestas 1-4	89
<b>Figure 11</b> Implementación del diseño actividad 2	90
<b>Figure 12</b> Respuestas 2-1	93
<b>Figure 13</b> Respuestas 2-2	94
<b>Figure 14</b> Respuestas 2-3	97
<b>Figure 15</b> Respuestas 3-1	100
<b>Figure 16</b> Respuestas 3-2	101
<b>Figure 17</b> Respuestas 3-3	103

**LISTA DE TABLAS****Table 1** Rejilla de análisis

65

## **Introducción**

El presente trabajo propone un diseño de tareas para la enseñanza del concepto geométrico de congruencia triangular, vinculando ambientes de geometría dinámica y la mediación instrumental con el propósito de identificar condiciones que requiere un diseño de tareas sobre el concepto de congruencia triangular mediado con el software Geogebra en estudiantes de grado 7°.

Las tareas se desarrollaron en un ambiente de geometría dinámica (DGE), por tanto, la mediación instrumental tuvo un papel importante para la ejecución de estas. El presente trabajo se realizó con la intención de aportar a la enseñanza y brindar un apoyo al docente, como una alternativa viable para proponer un ambiente de clase práctico y dinámico.

Este trabajo investigativo fue apoyado en los experimentos de enseñanza los cuales dan un enfoque metodológico que permite analizar los diferentes roles tanto del profesor como del software en la enseñanza del concepto de congruencia triangular.

El presente consta de 4 capítulos en los que se detallan los elementos teóricos utilizados y el proceso de realización del trabajo investigativo.

En el primer capítulo se describe el problema de investigación. En este se especifica el problema a resolver, se puntualiza en ¿qué pasaría si este problema no se resuelve?, se contextualiza y justifica el problema en uso de diferentes líneas de antecedentes y se nombran los objetivos que guiaron la investigación.

En el segundo capítulo, se describen las nociones teóricas utilizadas para la realización de este trabajo, como lo son la mediación instrumental, el diseño de tareas, la geometría digital y el objeto matemático a tratar, en este caso, congruencia triangular.

En el tercer capítulo, se describe la fundamentación metodológica, presentando la metodología cualitativa propuesta por Cobb (2017), los experimentos de enseñanza, destacando su aporte en la investigación como metodología para la enseñanza de las matemáticas, en este caso, de la geometría.

En el cuarto capítulo, se presentan los análisis locales, en base a los datos registrados por las experiencias de los estudiantes, que hace parte de la metodología empleada. En este, los datos recogidos en el experimento, tanto filmicos como textuales, permitieron realizar deducciones sobre el experimento de enseñanza y sus conjeturas.

También, se presenta el análisis retrospectivo, que hace parte de la metodología de experimentos de enseñanza y se complementa de los análisis locales. Este análisis busca observar en ámbito general y particular el logro o no de las metas y objetivos de la investigación, identificando errores, dificultades y aciertos obtenidos en el experimento de enseñanza, dando cuenta de elementos teóricos y metodológicos, para tener herramientas de sustento para arrojar conclusiones y reflexiones después de realizado tal análisis.

## **CAPÍTULO I: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**

En este capítulo se plantean el problema de investigación, los objetivos que guían a la realización de un diseño de tareas mediadas con tecnología digital en los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Belisario Peña Piñeiro para la enseñanza de la congruencia triangular. También, se presenta la justificación y algunos antecedentes distribuidos en las siguientes temáticas: situaciones didácticas con tecnología y geometría, resolución de problemas mediados con tecnología digital y el diseño de tareas con tecnología.

A continuación, se presentan las componentes de este capítulo.

### **1.1. Planteamiento del problema y contextualización**

Tras el acercamiento a GeoGebra en el curso de TICs I , en el que se reflexiona en el gran aporte que puede brindar la geometría dinámica que se modela en el software de geometría a la enseñanza de las matemáticas, en particular de la geometría, se genera un interés por el estudio del empleo de esta herramienta digital, por ende, en este trabajo generar el estudio del uso de la tecnología para la enseñanza de la geometría.

En clases de TICs II y TICs III “se reconoció que el uso de herramientas tecnológicas en el aula de clase posibilita ejecutar estrategias para construir el conocimiento teniendo en cuenta que el software permite estudiar las propiedades constitutivas de las figuras geométricas en los estudiantes, ya que fortalece la comprensión de los conceptos a través de la exploración de propiedades y su manipulación”.



Dado lo anterior, se consideró que el uso de medios tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas permite que el estudiante pueda desarrollar conocimiento. Se afirma que las tecnologías computacionales permiten mejorar el bajo rendimiento de los estudiantes, el desempeño en diferentes pruebas externas y el interés hacia las matemáticas, por lo que se considera, que la utilización de estas permite un mejor acercamiento al objeto matemático (Pabón, 2014).

Por tal razón, es indispensable para el desarrollo de esta investigación contar con la sistematización de experiencias y diseños que promuevan el desarrollo de pensamiento espacial en particular en ambientes de geometría dinámica.

En términos generales, esta propuesta atiende a una problemática que puede verse desde dos temáticas:

- La enseñanza de la geometría escolar
- El diseño de tareas mediadas con tecnología digital

### ***La enseñanza de la geometría escolar***

Ya es bien conocido que la enseñanza de la geometría escolar atiende a diferentes dificultades, primeramente, es necesario destacar la importancia de esta para el desarrollo de habilidades en el estudiante y desenvolvimiento en otras áreas de estudio, pues según Villella (2001):

Enseñar geometría en la escuela supone ofrecer a los alumnos la posibilidad de: describir, entender e interpretar el mundo real y sus fenómenos; resolver una amplia variedad de problemas que implican usos de estimación, aproximación y medición; acceder paulatinamente, mediante el uso de técnicas

y de las explicaciones que sobre ellas se pueden dar, a un modo de teoría axiomática; formular conjeturas y preguntas; proponer pruebas, estrategias; elaborar refutaciones, ejemplos y contraejemplos de los fenómenos que se describen y modelizan primero, para aplicar las conclusiones a otros fenómenos; recuperar la capacidad de asombro y de análisis de lo visual, de la imagen; construir esquemas básicos de respuestas a situaciones cotidianas provenientes tanto del medio social como de las otras áreas de estudio, así como de la propia matemática, que involucren la conceptualización de lo espacial.(pp. 80)

Se puede deducir que la enseñanza de la geometría permite que el estudiante pueda tener un criterio y generar conjeturas e inferencias sobre una situación estudiada y hasta la posibilidad de resolver un problema. Además, también se sugiere que:

El docente que enseña geometría debe tener presente que el fin de su enseñanza es desarrollar en los estudiantes ciertas habilidades que les permitan: analizar características y propiedad de las figuras geométricas en tres, dos y una dimensión, y desarrollar argumentos para relacionarlas; usar sistemas de representación para lograr la localización espacial; aplicar transformaciones para analizar situaciones matemáticas; usar la visualización y el razonamiento espacial para la construcción de modelos geométricos con los cuales explicar fenómenos reales y situaciones matemáticas particulares. (Villella, 2001, pp80)

Es decir, que para el desarrollo de las habilidades y del pensamiento geométrico-espacial del estudiante, se deben tener en cuenta situaciones que permitan caracterizar los objetos geométricos en uso de la visualización y el razonamiento matemático del estudiante.

No obstante, el desarrollo de habilidades y del pensamiento geométrico- espacial de los estudiantes se ha visto afectado, como lo indica Aray, C.A., Párraga, O., y Chun, R. (2019) al afirmar que existe una falta en la enseñanza de la geometría que repercute en diferentes consecuencias:

La falta de enseñanza de la geometría en la educación secundaria ha provocado un vacío en el conocimiento holístico de la matemática, lo cual dificulta la enseñanza de materias como análisis matemático, álgebra lineal, geometría descriptiva, física, estática y topografía. La destreza para la resolución de problemas geométricos desarrolla un coherente razonamiento deductivo y al existir esta carencia en el nivel medio este tipo de habilidades y destrezas no se potencian en el ámbito educativo superior. (pp. 20)

Dado lo anterior, para aportar a la creación de situaciones de enseñanza de geometría, se pueden utilizar otros instrumentos que pueden resultar productivos para el desarrollo del pensamiento matemático, en especial el geométrico- espacial, tal como afirma Araya (2007):

Las tendencias actuales en la enseñanza de la matemática han destacado la importancia del uso de la tecnología como un medio que permite al estudiante obtener conclusiones y realizar observaciones que, en otros ambientes, por ejemplo “lápiz y papel”, serían difíciles de obtener. (pp, 8)

Sustentando que una de las dificultades de la enseñanza de la geometría es que esta se enseña en su mayoría de manera rutinaria a lápiz y papel lo que ocasiona en algunas veces los estudiantes no se puedan desenvolver de una manera práctica en la construcción de los conceptos geométricos, y por eso la propuesta atiende a la enseñanza de la geometría, en un ambiente de

geometría dinámica donde se espera que con la fenomenología del software se le pueda dar una dinámica distinta a esta. Ya que según Araya (2007):

La introducción de la tecnología en el salón de clases ha cambiado la forma en que se lleva a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A diferencia del enfoque algorítmico que se le ha dado a la enseñanza de esta disciplina, ésta se puede desarrollar ahora en un ambiente de descubrimiento y reflexión.

Tradicionalmente, en la enseñanza de las matemáticas se ha puesto mucho énfasis en el trabajo con ejercicios rutinarios a los cuales los estudiantes dan solución mecánica, debido al énfasis que los profesores han dado a los procedimientos, sin dar oportunidad para que el alumno reflexione sobre estos procesos (pp. 10).

Este tipo de enseñanza nombrado, lo que realiza es llevar al estudiante a una mecanización, sin tener en cuenta una comprensión cabal de las ideas, propiedades o conceptos estudiados.

Otra dificultad es que la enseñanza de la geometría es una de las partes de las matemáticas que genera una particular preocupación en los educadores matemáticos, dado su abandono como objeto de estudio en los currículos escolares desde la segunda mitad del siglo XX (Acosta & Fiallo, 2017). Además, se ha dicho que:

Durante varios años, la enseñanza de la geometría ha sido olvidada en los procesos de aprendizaje de la matemática y en ciertas ocasiones es como si ambas fueran disjuntas; es por esto que Miguel de Guzmán no se equivoca

cuando dice que: “Es evidente que desde hace unos veinte años el pensamiento geométrico viene pasando por una profunda depresión en nuestra enseñanza matemática inicial, primaria y secundaria” (p.1).

Y es que parece que la geometría no hiciera parte de la matemática y por esto, cada vez es más y más abandonada, pero qué sería de la matemática sin los fundamentos geométricos, y sin las bases para el desarrollo del pensamiento, no solo geométrico sino también espacial (Cardona, 2012, pp 1210)

Esta situación se ve reflejada en las encuestas nacionales e internacionales que evalúan los conocimientos matemáticos de los estudiantes. “Más aún, la enseñanza de la geometría debería ser revitalizada en sus variados aspectos en todos los niveles escolares” (Villani, 1998, pp 337-346).

Quizás el repreguntarnos “¿cómo hacer que la geometría ocupe un lugar importante en la enseñanza de las matemáticas? investigaciones realizadas por Duval (1998, 1999), Padilla (1992), Lemonídis (1991) y Marmolejo (2005, 2007, 2014) aportan elementos importantes para acercar respuestas tentativas a tal cuestionamiento” (Marmolejo et al, 2012, pp 7-32).

Sin embargo, nuestro trabajo plantea ampliar las posibilidades que ofrecen las propuestas de enseñanza que se apoyan en la geometría y más específicamente en programas de geometría dinámica (ej.: Geogebra vista gráfica 2D y 3D); con el diseño de tareas orientadas a ser resueltas con la mediación de ambientes dinámicos.

### ***Diseño de tareas mediadas con tecnología digital***

El diseño de tareas es una línea fuerte de investigación donde hace ver la necesidad de que desde las escuelas se planifique y se estructure un diseño.

Para muchos docentes el diseño presenta dificultades como las citadas a continuación:

- a) los contenidos de educación media no son vistos como generadores de situaciones o fenómenos sino como modelos establecidos,
- b) los profesores en formación tienden a repetir el modelo de enseñanza bajo el cual se formaron, y,
- c) los futuros profesores necesitan más formación y experiencia en el diseño de tareas. (Zuluaga, 2014, pp.225)

Dado lo anterior, a muchos docentes se les dificulta el diseño de tareas, por lo que en muchos casos los profesores prefieren hacer las tareas que están en los libros y algunas de estas adaptarlas a sus necesidades, lo cual indica una deficiencia en la creación de diseños propios, contextualizados y estructurados. Dando como resultado que las tareas que se han diseñado en geometría carezcan de innovaciones que ofrecen la tecnología como:

Uso de un DGE para la exploración de problemas abiertos y, más en general, en el aprendizaje exploratorio (p. Ej., Yerushalmy et al. 1993; Di Sessa y col.1995). En particular, la investigación ha demostrado que un DGE afecta el enfoque de los estudiantes para investigar problemas abiertos en geometría euclidiana, contribuyendo particularmente al razonamiento de los estudiantes durante la fase de conjeturas de las actividades de problemas abiertos (p. Ej., Leher y Chazan1998; Mariotti2000; Arzarello y col.2002; Leung2008; Leung y col.2013). (Leung, A., & Baccaglini-Frank, A., 2016, pp 99-120)

Lo anterior indica la necesidad de enseñar la geometría en uso de la tecnología digital, mostrando un camino de nuevas posibilidades para el desarrollo de pensamiento geométrico espacial en los estudiantes. Para que esto ocurra, se puede brindar un apoyo en el conocimiento docente sobre el diseño de las tareas, en particular los tipos de tareas que apoyen a la construcción del conocimiento en el estudiante.

Encontramos que los dos tipos de tareas tienen diferentes grados de apertura.

El primer tipo de tarea pregunta por la posibilidad de construir un tipo de figura bien definida. El segundo tipo le pide al solucionador que haga conjeturas sobre posibles tipos de figuras que podrían obtenerse dada una cierta construcción (explícita). (Leung, A., & Baccaglini-Frank, A., 2016, pp 99-120)

En el caso puntual de esta propuesta, se atiende como un problema la falta de diseño de tareas en el contexto de las tecnologías digitales y es un limitante al momento en que un profesor requiere de un material que cambie las condiciones de la clase, en el que se considere de manera detallada y situada elementos teóricos y prácticos para la caracterización de la enseñanza, particularmente en el concepto de congruencia triangular en ambientes de geometría dinámica.

En efecto, la pregunta que orientó nuestros diseños, rediseños, aplicaciones y conclusiones finales fueron: *¿Qué condiciones requiere un diseño de tareas para la enseñanza sobre el concepto de congruencia triangular dado un ambiente de geometría dinámica en estudiantes de grado 7° de la Institución Educativa Belisario Peña Piñeiro de Roldanillo- Valle?*

## **1.2.Objetivos**

### **1.2.1. Objetivo general**

Caracterizar un diseño de tarea para la enseñanza del concepto de congruencia triangular con la mediación instrumental de Geogebra para estudiantes de grado 7° en una institución oficial de Roldanillo- Valle.

### **1.2.2. Objetivos específicos**

- Identificar elementos teóricos requeridos para la creación de una caracterización de un diseño de tareas de congruencia triangular que integre la mediación instrumental de Geogebra.
- Desarrollar habilidades en el uso de las herramientas tecnológicas tipo vista gráfica 2D y 3D para la resolución de problemas de congruencia triangular.
- Identificar dificultades, errores y aciertos obtenidos en la experimentación del diseño de tareas en un ambiente de geometría dinámica.





### 1.3. Justificación y Antecedentes

Este trabajo de investigación se desarrolla bajo el marco del pregrado de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle Sede Zarzal, se ubica bajo la línea de formación en tecnología de la información y la comunicación en Educación Matemática, con un enfoque acentuado en la resolución de problemas, la mediación instrumental y en la existencia de elementos que permitan caracterizar el diseño de tareas en particular la congruencia triangular.

Se propuso entonces dar a este proyecto un enfoque en el diseño de tareas matemáticas haciendo uso de nuevas tecnologías, en particular ambientes de geometría dinámica (Geogebra) en la apropiación del tema de estudio; congruencia triangular. A través del uso de esta herramienta digital en la enseñanza - aprendizaje de la geometría escolar, se pretendió evidenciar y analizar las implicaciones y/o condiciones que subyacen en el diseño de tareas caso congruencia triangular.

Teniendo en cuenta las dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje de la geometría y específicamente en problemas de congruencia triangular y en la apropiación de adecuadas herramientas para la resolución de problemas, se intentó mostrar cómo el uso de DGE<sup>1</sup> puede resultar complementario a las propuestas que fomentan el uso de programas tipo Geometría Dinámica.

---

<sup>1</sup> DGE: Ambiente de geometría dinámica

Se pretendió brindar un aporte didáctico al docente y ofrecer una experiencia didáctica al cómo enseñar el concepto de congruencia de triángulos con la mediación instrumental de Geogebra, con actividades que le permitan al estudiante desarrollar pensamiento matemático (geométrico-espacial).

Dado lo anterior, este trabajo determina un diseño que posibilita al docente un instrumento teórico-práctico que caracteriza desde los elementos matemáticos del objeto, así como de los elementos instrumentales del medio.

Además, la realización de tal diseño brinda un aporte a la enseñanza con tecnologías digitales, una vez más mostrando los sin fines de posibilidades que se pueden lograr al trabajar con ellas, aun considerando que el trabajo a lápiz y papel de forma estática también es útil y reconocido para la educación, no obstante, Geogebra permite arrastrar, deslizar, agrandar, disminuir en tamaño y realizar muchas más acciones de forma rápida y clara que no se darían con la técnica anterior.

Cabe resaltar, que el no abordar en la investigación aspectos en relación de un análisis del rol del profesor y del software en la enseñanza del concepto de congruencia triangular con el uso de la mediación instrumental limitará en gran manera una caracterización amplia y detallada de los elementos teóricos y prácticos que un profesor puede considerar al momento de utilizar este material para su clase. Igualmente, no se estaría promoviendo el desarrollo de habilidades en el uso de herramientas tecnológicas, lo que es necesario si se tiene en cuenta el presente en que se vive donde los estudiantes interactúan constantemente con tecnología digital.

En consecuencia, se pretendió caracterizar un diseño de tareas sobre el concepto de congruencia triangular, en el que se observó la manera de ¿cómo los estudiantes abordan las

actividades del diseño planteado con la mediación del software? y la realización de un análisis continuo y retrospectivo, dados gracias a la recopilación de datos obtenidos en el proceso de implementación, según la metodología de experimento de enseñanza.

De manera puntual y atendiendo el enfoque que pretende esta propuesta, la cual se interesa por detallar la mediación instrumental de los DGE en particular *Geogebra*, toma en relación diferentes trabajos entre los que destacamos los expuestos por: Acosta & Fiallo (2017) Enseñando geometría con tecnología digital: una propuesta desde la teoría de las situaciones didácticas, Santos Trigo (2019) Resolución de problemas mediados con tecnología y Allen Leung (2017) Diseño de tareas con tecnología digital. A continuación, se detalla un poco de ello:

- **Situaciones didácticas con tecnología y geometría**

El trabajo de Acosta & Fiallo (2017), “enseñando geometría con tecnología digital, una propuesta desde la teoría de las situaciones didácticas”, muestra los dos polos que contiene la geometría: la percepción y el polo de la deducción teórica, permitiendo observar la importancia de trabajar en ambos polos. En la historia de la geometría se intentó independizar cada polo en la actividad geométrica, pero en su intento se vio reflejado que es necesaria la dependencia de una de la otra, pues ambas se complementan.

En este trabajo, se propone mantener un equilibrio al momento de trabajar de manera perceptiva con las figuras geométricas, guiando y controlando este proceso con la teoría. Del mismo modo cuando se esté trabajando en un proceso de razonamiento teórico, que el estudiante se apoye en la parte perceptiva para comprender la teoría.

Este equilibrio entre la parte perceptiva y teórica deductiva puede ser mediada por el software dinámico debido a que las figuras geométricas pueden ser manipuladas por medio de una pantalla del computador, los cuales se pueden observar y resultan siendo objetos perceptivos, con la certeza de que se están movilizandobajo unas reglas teóricas, los cuales se convierten en objetos teóricos.

Además, existe un interés particular en este trabajo, porque propone considerar unas etapas de la geometría la cual enfatiza en fortalecer la imagen prototípica que el estudiante tiene hacia cierta figura geométrica, pues esto se puede iniciar clasificando e identificando elementos o formas geométricas, utilizando como recurso didáctico la función arrastre del software dinámico. Como segunda etapa muestra la parte de construcción de una figura, permitiendo analizar y construir, con el fin de identificar propiedades pasando a la tercera etapa, la cual permite justificar la parte procedimental de la construcción, adentrándose al razonamiento, y por último a la demostración, que es la parte donde se puede validar, explicar en un proceso deductivo que afirma todos los procesos realizados anteriormente.

Los marcos teóricos de didáctica permiten caracterizar situaciones reales de clase en secundaria y primaria que se dieron a través de un diseño de actividades y unos objetivos de enseñanza y aprendizaje donde se precisa el rol de la tecnología.

Además, hace énfasis en la preparación del docente, la necesidad de diseñar materiales propios, de considerar nuevas estrategias de enseñanza y relaciones en el quehacer del profesor y su propia práctica docente.

- **Resolución de problemas mediados con tecnología**

Es un campo de investigación donde se analiza qué papel y que aportes están ofreciendo las actividades en el marco de la resolución de problemas, en cuanto a la comprensión y el uso del conocimiento matemático de los estudiantes, según Santos-Trigo M. (2019):

En un enfoque de resolución de problemas, lo que importa son los objetivos de los alumnos y las formas de interactuar con las tareas. Es decir, incluso las tareas rutinarias pueden ser un punto de partida para que los alumnos amplíen las condiciones iniciales y las transformen en algunas actividades desafiantes. (pág. 20)

Las investigaciones llevadas a cabo dan a conocer que la resolución de problemas ha permitido analizar y caracterizar las formas en que se formulan problemas y sus procesos de solución que son llevados a cabo por parte de los estudiantes. Dentro de los investigadores se destacan autores como Polya (1945):

Quien ha caracterizado la resolución de problemas en cuatro fases principales: comprender el problema, el diseño de un plan, el proceso de llevar a cabo el plan, el análisis retrospectivo del proceso empleado para resolver el problema y la plausibilidad de la solución o soluciones” (Trigo, 2019, p.2),

En el anterior apartado citado, cada fase cuenta con un método heurístico.

Posteriormente Schoenfeld (1985), en su programa de investigación detalla hasta qué punto la heurística de la resolución de problemas aporta a los estudiantes basado en las ideas de Polya con el fin de caracterizar la práctica matemática, y a su vez, establece cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolver problemas de:

Dominio del conocimiento (definiciones, hechos, procedimientos, usados en el dominio matemáticos), estrategias cognoscitivas (incluye métodos heurísticos como descomponer un problema), estrategias meta cognoscitivas (monitoreo empleado al resolver un problema) y sistemas de creencias (las ideas que los estudiantes tienen acerca de las matemáticas y cómo resolver problemas). (Trigo, 2019, p.5)

Los anteriores aportes que han permitido que profesionales o profesores tengan un punto de partida y que compartan sus experiencias en la caracterización de las prácticas matemáticas.

En este proceso el campo de la resolución de problemas ha contribuido en la transformación de las aulas de clase incorporando el uso de las tecnologías con el fin de ampliar las posibilidades de aprendizaje, como sugieren Santos-Benítez, (2003) en seguir aportando a la caracterización del pensamiento matemático y en la construcción de un conocimiento sólido distante de los escenarios tradicionales de aprendizaje “cuando una persona o grupo está resolviendo un problema, las formas de pensar se expresan usando un medio externo que les ayuda a clarificar, modificar, refinar o revisar cada forma individual de pensamiento.” (pág. 25).

En este contexto, se trabaja la resolución de problemas mediados por uno o varios recursos tecnológicos. El uso de la tecnología introdujo nuevos escenarios de aprendizaje, formas de representar el objeto matemático y exploraciones de situaciones problema de matemáticas, dentro de este contexto Santos-Moreno (2016) afirman:

Una tecnología digital como GeoGebra puede mejorar y eventualmente transformar las habilidades cognitivas que ya poseemos y ayudarnos a desarrollar otras nuevas. Las personas suelen desarrollar estas habilidades

cognitivas cuando representan y exploran tareas a través de estas tecnologías.

Una tecnología cognitiva deja huella en nuestra mente a través del trabajo constante y al cabo de un tiempo pasa a formar parte de nuestros recursos cognitivos. (pág. 189)

De lo anterior, se puede deducir que a medida que el estudiante tiene una interacción constante con un sistema dinámico como Geogebra, a través de su práctica y dominio, el recurso digital se interioriza en la estructura cognitiva del estudiante, Por esta razón, se promueve el desarrollo de tareas matemáticas mediadas por un software dinámico en particular Geogebra.

Las tareas son el vehículo para presentar y discutir los marcos teóricos para apoyar el uso de la tecnología digital, analizar la importancia del uso de las tecnologías digitales para extender las discusiones matemáticas de los estudiantes más allá de los entornos formales, y diseñar formas de fomentar y evaluar el uso de tecnologías en los entornos de resolución de problemas.

(Santos-Trigo M, 2019, pág. 23).

Desde esta perspectiva con el uso de la tecnología, existen constructos teóricos que ayudan a caracterizar el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes, las estrategias cognitivas, los procesos de solución apoyados con un software dinámico, ya que el recurso digital promueve un entorno interactivo con el que se busca crear tareas de aprendizaje que alejan al estudiante de la memorización y la parte procedimental, y se adopte un quehacer matemático de plantear problemas, buscar diversas soluciones, realizar conjeturas, establecer relaciones, argumentar, investigar, etc.

- **Diseño de tareas con tecnología**



El diseño de tareas es una actividad pedagógica muy importante tanto para el docente (el diseñador) como para los estudiantes, quienes actúan en el que hacer matemático a través de las tareas, como lo propone Leung (2017) “el diseño de tareas matemáticas se puede considerar como el diseño de actividades situadas en entornos pedagógicos que proporcionan límites dentro de los cuales los estudiantes se involucran en hacer matemáticas, lo que lleva a la construcción del conocimiento matemático.” (pág. 4).

El diseño crea límites sobre los cuales crecen los significados y el conocimiento, la tecnología digital es un medio que proporciona límites y como lo afirma Leung (2017):

Una herramienta digital puede considerarse como un objeto límite que traduce la experiencia y la expresión entre diferentes tipos de mundos matemáticos. Un mundo matemático, por ejemplo, puede ser 1. una comunidad social donde los participantes se involucran en actividades matemáticas (por ejemplo, una clase de estudiantes, un grupo de profesores), o 2. un cuerpo de conocimiento matemático establecido o institucionalizado convencionalmente (por ejemplo, geometría euclidiana axiomática formal, un plan de estudios de matemáticas), o 3. un cuerpo de conocimiento matemático experimental (por ejemplo, conocimiento matemático basado en el uso de manipuladores físicos concretos como un ábaco, uso / aplicación matemática en diferentes contextos, matemática prácticas en el lugar de trabajo), etc.(pág.8)

Los recursos tecnológicos tienen el potencial de representar el objeto matemático “virtualmente real”, de movilizar, de explorar sus propiedades y definiciones, y de actuar como un puente entre los diversos mundos matemáticos como lo menciona Leung (2017):

El diseño de tareas utilizando una herramienta digital para enseñar y aprender matemáticas puede considerarse como el diseño de caminos pedagógicos (trayectorias) para crear discursos situados basados en MDBO<sup>2</sup>, que pueden reconciliar significados y mantener la coherencia entre los mundos matemáticos. (pág.8)

Entre los tipos de objetos límite digital matemático (MDBO), se enfatiza en el entorno de geometría dinámico (DGE), el cual puede crear un equilibrio con su potencial manteniendo la comunicación entre los diversos mundos matemáticos

Por otro lado, para crear un entorno rico en tecnología es necesario que los profesores aprendan a enseñar con las TIC, y para ello se propuso la idea de constructo pedagógico donde los profesores desarrollaron su propia experiencia con el uso de las TIC en el aula de clase, y se tuvieron presente algunos aspectos en la enseñanza:

Tapan (2003) afirmó que, para preparar a los profesores de matemáticas para un aula rica en tecnología, se deben tener en cuenta todos los aspectos de la enseñanza, específicamente, los cuatro tipos de conocimiento: conocimiento matemático, conocimiento sobre el artefacto, conocimiento didáctico de las matemáticas y Conocimientos didácticos sobre el artefacto. (Leung, 2017, pp. 6).

El profesor debe hacer el papel de aprendiz para explorar el potencial del artefacto y los errores que se pueden producir, pensar en cómo los estudiantes pueden aprender el concepto matemático y dominar dicha actividad propuesta en el entorno tecnológico.

---

<sup>2</sup> MDBO: Objeto límite digital matemático

Este grupo de antecedentes nos aporta en mostrar la teoría del diseño de tareas y su importancia, como se utiliza en educación matemática y el trabajo asincrónico que se puede realizar con la tecnología digital cuando esta es parte del entorno de enseñanza - aprendizaje, tal como sucede en el presente trabajo.

Además, señala la importancia del uso de esta teoría en el diseño de tareas con fines pedagógicos, ya que promueve la construcción de conceptos, estrategias e ideas matemáticas como sucede en la presente investigación, el concepto de congruencia triangular al tener en cuenta la experimentación.

## CAPÍTULO II: FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Este capítulo describe las nociones teóricas de nuestro estudio, presentaremos principalmente a la geometría dinámica, la noción de diseño de tareas de Allen Leung (2016), así como las implicaciones que se tienen al trabajar con la mediación instrumental en un entorno influenciado por las TICS en particular al concepto de congruencia triangular. Hemos basado nuestro estudio en estos referentes teóricos acuñados a nuestra necesidad y contexto más que en un marco teórico ya presupuestado. Tal como lo indica la siguiente ilustración 1, en la que cada teoría aporta información suficiente y necesaria para la realización de este trabajo:

**Figure 1** Estructura de marco teórico



Fuente: propia

Los cuatro pilares presentados, guían a esta investigación y a su vez hacen referencia a la fundamentación teórica que permitió el desarrollo de este trabajo al resaltar:

- La geometría digital y el sin fin de posibilidades que ofrece el trabajar con esta para el desarrollo del pensamiento geométrico.
- El diseño de tareas con sistema de geometría dinámica, la cual nos da la información necesaria para el diseño y la creación de experiencias matemáticas.
- La mediación instrumental y
- La congruencia triangular que es el objeto matemático puesto en juego para la realización del presente trabajo.

A continuación, se presentan los pilares nombrados anteriormente.

### **2.1. La geometría dinámica.**

El uso de la tecnología en la enseñanza en particular de la geometría es un fenómeno moderno que busca motivar al estudiante, teniendo en cuenta que hay una atracción hacia las máquinas digitales.

Aprovechando tal interacción constante que hay entre los estudiantes y las máquinas digitales, se han creado sistemas de geometría digitales, que se denota con las siglas SGD<sup>3</sup>, como Cabri geometry, Geogebra, etc. Que actualmente son promovidos para ser incorporados en las prácticas de aula, como herramientas innovadoras y mediadoras que se caracterizan por presentar una pantalla con una serie de macro herramientas que permiten al estudiante explorar sobre las construcciones que se realizan y que están representando el objeto geométrico.

---

<sup>3</sup> Sistemas de geometría digitales

Según Gonzales et al. (2001) “Los DGE se caracterizan por poseer una pantalla gráfica sobre la que el usuario puede dibujar objetos geométricos primitivos (puntos, rectas, segmentos, etc.) y registrar relaciones geométricas entre ellos (perpendicularidad, paralelismo, etc.) a partir de un repertorio prefijado.” (pág. 278).

De lo anterior se puede deducir que estas acciones producen construcciones geométricas las cuales pueden ser manipuladas por el estudiante y constatar si realmente se están conservando las propiedades geométricas de la construcción.

Son diversas las posibilidades de enseñanza que brinda un DGE, pero depende del docente si emplea las condiciones necesarias para enmarcar un proceso de enseñanza-aprendizaje potenciado por un DGE, ahora bien, se debe tener en cuenta el cambio de contexto, se pasa de plantear tareas a lápiz y papel, a un aprendizaje por ordenador, donde se habla de un modelo constructivista, y las actividades deben estar condicionadas a las formas de comunicación que un DGE ofrece, también es importante que la DEG esté basada en la resolución de problemas, debido a que brinda la posibilidad de explorar, conjeturar, verificar, refutar, sistematizar, etc., y en caracterizar los modos de proceder en la resolución de tareas.

Por último, se considera que según Vacca et al. (2015):

Los procesos de aprendizaje son más eficientes cuando integramos herramientas informáticas que faciliten a través de procesos visuales el análisis matemático garantizando la vinculación del aprendizaje adquirido con el aporte de las soluciones matemáticas a problemas de la sociedad.

Este aspecto hace la diferencia entre la forma tradicional de enseñar matemáticas, que se basa en la resolución de un número determinado de

ejercicios, que se rigen a procesos matemáticos repetitivos ya definidos que se encuentran descontextualizados de los reales problemas de la sociedad. (p. 02)

Según lo anterior, se puede decir, que, para el trabajo con actividades de construcción y visualización, el recurso empleado es idóneo, pues actúa como factor motivador para los estudiantes realizar actividades, ya que no es usual el uso de medios tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas, siendo esta una práctica de poco uso y novedosa.

## **2.2. Diseño de tareas de educación matemática con tecnología digital.**

El diseño de tareas con tecnología, es una de las principales teorías tomadas en cuenta para la realización de esta propuesta metodológica, entendiéndose el diseño de tareas como una actividad pedagógica realizada por el docente quien propone diferentes tareas en las que se les pide a los estudiantes hacer algo matemático en el aula a través de la experimentación. Tal como dice Leung et al. (2015):

Un diseño de profesor / investigador que apunta a ser algo que hacer o sobre lo que actuar para que los estudiantes activen un entorno interactivo basado en herramientas donde el profesor, los estudiantes y los recursos se enriquecen mutuamente en la producción de experiencias matemáticas. (pág. 192)

Entonces, las experiencias matemáticas son desarrolladas gracias a las interacciones presentadas por el profesor, los recursos utilizados y los estudiantes. Tal como lo indica la ilustración 2. En donde cada flecha representa el aporte realizado por cada uno de los anteriormente nombrados.

**Figure SEQ Figure \\* ARABIC 2 Diseño de tareas**



Fuente: propia

Es así, como en los diseños, se espera que la retroalimentación de las experiencias matemáticas sea mutua entre los estudiantes y el docente o investigador, también, se realiza el diseño esperando un objetivo de este en entornos pedagógicos donde el estudiante construya su conocimiento matemático al comprometerse a hacer matemáticas a través de la exploración en uso de la tecnología, en este caso, mediante el software de geometría dinámica Geogebra, como afirma Leung (2011) “un diseño de tareas que se centra en los procesos pedagógicos en los que los alumnos están empoderados con habilidades ampliadas para explorar, reconstruir (o reinventar) y explicar conceptos matemáticos utilizando herramientas integradas en un entorno rico en tecnología” (p. 327).

Las tareas, son realizadas por los docentes o investigadores y estas pueden ser adaptadas por otros docentes, según Christiansen y Walther (1986); Joubert (2007); Monaghan y Trouche (2016) “la palabra “tareas” se toma para decir lo que los profesores piden a los estudiantes que hagan” (pág. 192), es decir que los estudiantes deben manipular el entorno pedagógico con el que estén trabajando y realizar las actividades para cumplir con su



finalidad provocándose un aprendizaje matemático. Apoyando el estudio realizado por Watson et al. (2015) sobre el diseño de tareas en educación matemática, en el que dice que:

El diseño y uso de tareas con fines pedagógicos es el núcleo de la Educación Matemática (Artigue y Perrin-Glorian 1991). Las tareas generan actividad que brinda la oportunidad de encontrar conceptos, ideas y estrategias matemáticas, y también para usar y desarrollar el pensamiento matemático y los modos de investigación. La docencia incluye la selección, modificación, diseño, secuenciación, instalación, observación y evaluación de tareas. Este trabajo a menudo se realiza mediante el uso de un libro de texto y / u otros recursos diseñados por personas externas. (Margolinas 2013, p. 12) (pág. 03).

Pero, últimamente, se ha tenido relación constante del diseño de tareas vinculadas con un entorno de tecnología digital pues, se reconoce las múltiples posibilidades que este ofrece y el vínculo con una mayor comprensión del estudiantado de los objetos matemáticos estudiados si se les da una adecuada manipulación, ya que cuando se realizan las tareas en un contexto de las TIC, estas llevan a la abstracción permitiendo conocer los conceptos matemáticos al explorar mediante un ambiente pedagógico aspectos críticos que caracterizan tal objeto, tal como lo sugiere Watson et al. (2015) al describir las herramientas matemáticas utilizadas en la ejecución de tareas como:

Artefactos físicos o virtuales que tienen potencial para mejorar la comprensión matemática. Una tarea basada en herramientas se ve como un diseño de profesor / investigador que apunta a ser algo para hacer o actuar para que los estudiantes activen un entorno interactivo basado en herramientas donde el profesor, los estudiantes y los recursos se enriquecen mutuamente en la producción matemática y de experiencias. En este sentido, este tipo de diseño de tareas se basa

en gran medida en una relación compleja entre la mediación de herramientas, la enseñanza y el aprendizaje y el conocimiento matemático. (Leung y Bolite-Frant 2015, p. 192).

### **2.2.1. Tarea en geometría**

Venturini, M. y Sinclair, N. (2017) En su investigación, menciona cuatro categorías diferentes de tareas utilizadas por Laborde para impulsar las tareas de los profesores.

- Tareas en las que la DGE facilita los aspectos materiales de la tarea

En la primera categoría se hace énfasis en los aspectos materiales de la tarea, pues el software dinámico no haría parte de la solución de la tarea, por ejemplo, los estudiantes podrían utilizar el arrastre para movilizar los aspectos materiales al realizar el dibujo, lo cual conduce a que se establezcan conjeturas observando diferentes posiciones de la figura geométrica, pero esta acción no causaría una afectación a la parte conceptual de la tarea.

- Tareas en la que la DGE facilita la tarea matemática

En la segunda categoría el software dinámico actúa como un amplificador visual, por ejemplo, se realiza una tarea que al momento de utilizar el arrastre se puedan evidenciar pistas de una manera visual (que sea difícil de obtener a lápiz y papel), la cual ayude a la solución de la tarea, esta sería la manera de ayudar a los estudiantes a que puedan establecer sus conjeturas, de lo anterior se podría inferir que en esta segunda categoría se considera inalterada la tarea y se facilita su solución, utilizando el estímulo visual a través del software.

- Tareas modificadas cuando se dan en una DGE

En la tercera categoría el software dinámico modifica las estrategias de la resolución de la tarea, por ejemplo, el modo arrastre es una herramienta que el estudiante podría utilizar como

modo de búsqueda, pero para poder que se identifica esas invariancias, se requiere un dominio del conocimiento matemático, para poder identificar la propiedad o el concepto a través del arrastre y la observación.

- Tareas que solo existen en un DGE

En la cuarta categoría se excluye por completo un contexto a lápiz y papel, y se requiere de conocimiento y razonamiento, en esta situación los estudiantes exploran a través de las herramientas, por ejemplo, los modos de arrastre, para identificar propiedades, elementos o relaciones para encontrar las construcciones ocultas, lo cual conlleva que haya un enfrentamiento entre lo que se observa y lo que se predice (el comportamiento que se espera de cierto movimiento o cierta relación entre figuras geométricas), esta categoría apoya a la experimentación debido a que se promueve la utilización de diversas herramientas y probar acciones con las mismas.

Teniendo en cuenta estas categorizaciones se podría estudiar el papel que los profesores pueden darle tanto a las competencias matemáticas como las competencias tecnológicas, que se requieren para responder la tarea, si un docente quiere realizar tareas de la primera categoría, se tendrá en cuenta que en este contexto el uso del software no se considera fundamental debido a que los estudiantes también podrían resolver la tarea a lápiz y papel, entonces, se pretende que los estudiantes reflexionen a través del uso del software, pero este no hace parte de la evaluación de la tarea.

Si un docente quiere realizar tareas de la segunda categoría, se podría invitar al estudiante a la exploración a través de una representación dinámica, lo que facilita la solución de la tarea, en lo que se considera que en un contexto de a lápiz y papel se tendría más dificultad al enfrentar,

entonces se puede inferir que las tareas de la segunda categoría se deberían aplicar a problemas complejos, que se consideren difíciles de resolver.

De las dos categorías anteriores se puede concluir que ambas no evalúan el uso del recurso digital y que además su uso es opcional, y qué hay manera de utilizar también el contexto a lápiz y papel si así se prefiere, por último, lo que se busca es una ayuda para resolver la tarea sin alterar la parte conceptual de la misma.

En la tercera categoría si un docente quiere utilizarla, se tendría en cuenta el uso del software como una competencia a evaluar, donde el docente espera que los estudiantes busquen diversas estrategias para resolver problemas utilizando las herramientas.

En la cuarta categoría es para aquellos docentes que esperan que sus estudiantes investiguen la situación, se evalúa tanto la competencia matemática como la tecnológica, la exploración con las herramientas del software, y la capacidad de resolver problemas y conjeturar en base lo explorado.

De las dos categorías anteriores se evidencia cómo la tecnología digital es necesaria para resolver tareas dentro de estas categorías, se toma en consideración el uso de estrategias y la resolución de problemas y por último no se tiene en consideración el contexto de lápiz y papel.

### ***2.2.2. Papel de los DGE en el diseño de tareas***

En una DGE, procesos como adivinar, buscar patrones, hacer conexiones, predecir, hipotetizar y probar, son apoyados por las herramientas y las posibilidades del software (visualización, arrastre, cálculo, etc.) (Mariotti 2006)

De lo anterior se puede reconocer el conjunto de acciones cognitivas que proporcionan al docente un conjunto de posibilidades que promueven un cambio de técnica diferente al uso de lápiz y papel.

Una DGE es un entorno ideal para resolver problemas abiertos, Baccaglini-Frank, A. y Mariotti, MA (2010) “La terminología &quot;problema abierto&quot; (Arsac 1999; Silver 1995) se refiere a un problema o pregunta formulada en una forma que no revela su solución o respuesta”(Pág. 227), y más precisamente en geometría, los problemas abiertos se han caracterizado por no sugerir un método en su solución, la forma de la pregunta se da en expresiones abiertas y se fomenta un sentido claro al momento de presentar la solución. la enseñanza de las matemáticas involucra herramientas, y como lo menciona

Leung, A. y Bolite-Frant, J. (2015), “Las herramientas se interpretan en términos generales como artefactos físicos o virtuales que tienen potencial para mejorar la comprensión matemática” (Pág. 192). Esto se realiza con el fin de crear un entorno interactivo, donde se evidencia una relación entre el profesor, el estudiante y la mediación de la herramienta. Así como los procesos en una DGE son apoyados por las herramientas y las posibilidades del software, el diseño de tareas incluye también herramientas, figuras, colores, movimiento, etc, que en relación constituyen tareas digitales donde los estudiantes exploran, descubren, observan invariantes, prueban propiedades, etc, el diseño de tareas permite guiar estas acciones, por lo que claramente se puede observar una conexión entre el diseño de los materiales y el proceso de exploración.

Por otro lado, en el intento de caracterizar aquellas tareas en una DGE, se hace énfasis, en aspectos particulares de la tarea, por un lado, en la manera en cómo se pregunta y por otro el boceto construido.

Una pregunta abierta, invita a la exploración debido a que los estudiantes tienen la posibilidad de buscar un camino de solución, pero estos caminos se descubren a medida que se interactúa con la tarea a través del software de geometría dinámica, siempre y cuando esta misma, brinde los medios necesarios para razonar a través de las herramientas y del estímulo visual, por esta razón es importante llamar la atención de los estudiantes, fortaleciendo los bocetos a través del color, la movilidad de las figuras geométricas y las pistas que aporten la pregunta y el boceto en conjunto.

Además, Es importante que la tarea contenga la información necesaria para verificar las conjeturas realizadas, sea de manera correcta o incorrecta, con el fin de generar un entorno atractivo para el estudiante, evitando en gran medida la frustración y la confusión, por lo tanto, la tarea debe incluir la información necesaria para explicar aquello que se descubre, también cabe mencionar la relevancia de la toma de decisiones por parte del profesor para la realización del diseño de tareas, se pretende apoyar las estrategias de exploración y desarrollo de habilidades en el contexto de geometría dinámica, es fundamental la intervención del profesor frente a dudas o preguntas.

En conclusión, al utilizar la tecnología digital en el diseño de tareas, permite un cambio de técnica (una manera de resolver una tarea diferente al lápiz y papel) al momento de resolver problemas, y a través de las observaciones gracias al estímulo visual de la tarea, se desarrollan conjeturas que además se pueden verificar con ayuda de las herramientas.

### 2.3. La mediación instrumental

Es un enfoque sociocultural, donde se estudia la relación entre la triada, de estudiantes, artefacto y concepto matemático donde el artefacto es considerado un medio para el aprendizaje, con el cual se accede al pensamiento matemático como lo menciona Moreno (2001):

En la actualidad, las teorías de la cognición de mayor impacto en los contextos educativos, han reconocido la pertinencia del principio de mediación instrumental que podemos expresar de la siguiente manera: Todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico.  
(pág. 3)

La actividad cognitiva requiere de la actividad representacional, y para ello se consideran los artefactos digitales, pues la presencia de un medio digital propone nuevas posibilidades de aprendizaje:

Hoy en día, la tecnología contemporánea ha permitido la simulación del movimiento sobre las pantallas digitales y con ello la educación adquiere un instrumento de mediación que puede detonar una nueva convergencia entre el pensamiento corporizado y el pensamiento simbólico, pero ahora en el escenario de la cultura humana. (Moreno, 2016, pág.24)

Las herramientas computacionales han sido incluidas en el campo de la educación, entendidas en este enfoque como herramientas de mediación que generan actividades cognitivas orientadas a generar nuevas oportunidades en el aprendizaje en las matemáticas, para ello se da

el uso de un software dinámico que brinde posibilidades integradoras como lo menciona Moreno (2017):

Si las imágenes que se producen sobre la pantalla son estáticas no se habrá ganado mucho al pasar del papel a la pantalla, excepto posiblemente precisión, pero si las imágenes son dinámicas, si hay movimiento y simultáneamente preservación de las cualidades estructurales de las figuras, entonces estaremos ante un medio que abre posibilidades integradoras que estaban ausentes.  
(pág.25)

Ahora bien, desde este enfoque se pretende crear condiciones para una mejor comprensión conceptual en este caso del pensamiento geométrico, con el fin de alejar aquella enseñanza tradicional y memorística muy reconocida y cuestionada, y prepararnos para una geometría dinámica que se acondicione a lo que pide nuestro presente, es decir, innovación con tecnología, que sería otro estilo de enseñanza, y el que el docente tiene la posibilidad de crear actividades innovadoras para que los estudiantes puedan manipular y explorar los objetos matemáticos en particular geométricos.

Como camino de exploración se destaca el uso de la geometría dinámica, el cual permite que aquellas representaciones analíticas, tradicionales y estáticas, pasen a ser representaciones ejecutables que facilitan la comprensión de construcciones y propiedades, su verificación y creación de nuevas estrategias de práctica en las aulas de clase, por ejemplo: cuando el estudiante moviliza un objeto geométrico y observa cómo se siguen conservando sus propiedades entonces el estudiante puede considerar una imagen dinámica más no estática. Allí es donde se evidencia el aporte o el acercamiento que brinda la herramienta hacia una definición formal, estas



situaciones son las que abren posibilidades integradoras que a lápiz y papel no existían, por esta razón las imágenes que se producen sobre la pantalla deben ser dinámicas de lo contrario no se habrá ganado mucho.

En el momento de la internalización donde la herramienta empieza a ser parte del estudiante para la exploración, como un ente organizador de conceptos, se da el paso de herramienta a instrumento, es allí donde se debe proponer una familiarización entre el estudiante y el instrumento, que Según Moreno (2016), tiene dos momentos centrales:

- “Cuando la persona explora con el instrumento.

-Cuando la persona explora a través del instrumento”. (pág. 26)

El primer momento, se puede concebir como un primer nivel y se podría decir que el recurso tecnológico es muy visible, que hay una gran dependencia entre el recurso tecnológico y la actividad matemática por lo que se podría concluir que no hay una buena familiarización.

El segundo momento, es el de gran importancia porque en últimas lo que se pretende es que el instrumento esté vinculado a las acciones cognitivas del estudiante de tal manera que haya una afectación más grande en el aprendizaje que el de un primer momento, en este alto nivel se considera el recurso tecnológico invisible, pues el instrumento se instala en el sistema cognitivo como si fuese una destreza o una parte sustancial.

## **2.4. La congruencia**

La Geometría es una ciencia muy antigua producto de las necesidades de la sociedad, en la geometría se realiza un estudio de propiedades y medidas de las figuras, que se encuentran

desarrolladas por una serie de reglas teóricas y prácticas. Dichas reglas fueron desarrolladas de manera inductiva.

Guiados por el libro de Euclides, los “Elementos” el cual es el tratado más amplio de geometría que además se encarga de organizar y estructurar aquellos aportes y descubrimientos de grandes autores, este libro representa el principio de la geometría, ha sido un modelo para posteriores investigaciones y traducciones de libros de geometría.

La geometría, además de ser una rama de las matemáticas encargada de estudiar las formas y las relaciones entre puntos, líneas, figuras, etc., y aportar al desarrollo del razonamiento del estudiante, a que este pueda ser crítico. Según Hemmerling (1981):

Definición: dos figuras son congruentes cuando tienen la misma forma y el mismo tamaño.

La palabra congruente se deriva de las palabras latinas con que significa “con” y gruenta, que significa “concordar o coincidir”. Las figuras congruentes pueden coincidir parte por parte. Las partes coincidentes se llaman partes correspondientes... (pág. 111)

Es decir, que no importa la posición ni la dirección del objeto, pues lo importante es el cumplimiento de las dos condiciones dadas en la definición.

### ***2.4.1. La congruencia triangular***

Dentro de los diversos conceptos de la geometría, se presenta un interés por la congruencia de triángulos de la que existen tres criterios de congruencia o correspondencia de triángulos nombrados ALA, LLL y LAL que consisten según Hoyos (2014) en:

-Correspondencia ALA: cuando dos ángulos y el lado comprendido de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo.

- Correspondencia LAL: cuando dos lados y el ángulo comprendido del primer triángulo son congruentes a las partes correspondientes del segundo triángulo.

- Correspondencia LLL: cuando los tres lados del primer triángulo son congruentes a los tres lados correspondientes del segundo triángulo. (p. 28)

Hay un interés por trabajar las figuras que contienen la misma forma y tamaño, este concepto geométrico se puede ajustar en muchos contextos reales y a su vez estudiar propiedades geométricas, un ejemplo simple para comprender un poco la congruencia sería que se quisiera reemplazar una pieza original con una pieza que se ajuste exactamente como la original.

La congruencia se puede dar entre figuras poligonales, y en este trabajo, se pretende trabajar en la congruencia de triángulos.

### CAPÍTULO III: DISEÑO METODOLÓGICO

En el siguiente capítulo, se explicita la metodología de experimentos de enseñanza que es la utilizada para la realización del presente trabajo. Esta metodología, se muestra a grandes rasgos, con las fases de diseño, implementación y análisis retrospectivo.

#### **3.1. Naturaleza de la metodología**

En este capítulo se presenta una investigación de tipo cualitativo basado en el trabajo de Cobb (2017), donde se observan los elementos que conforman los experimentos de enseñanza, esta metodología permite interpretar fenómenos y situaciones según los elementos estudiados, 

---

permitiendo crear explicaciones sobre estos.

Con base en el trabajo de Cobb (2017), se presentan las características prototípicas de la metodología de investigación del diseño, lo que implica la realización de un estudio de diseño, que permita explorar las posibilidades de investigar el aprendizaje de los estudiantes, con base a un concepto matemático en particular, orientados con los estudios de diseño queremos apoyar el aprendizaje, incluyendo un medio tecnológico que brinde la posibilidad de manipular las representaciones en este caso geométricas de manera directa, dando un sentido de realidad material por parte de las representaciones digitales, lo cual abre caminos de análisis y de producción conceptual por parte de los estudiantes.

En este sentido, este proyecto se inscribe en el estudio de diseños para poner en acción el desarrollo de un marco teórico abordado desde la geometría dinámica, para la enseñanza de la geometría.

Dentro de los alcances del estudio de diseño, nos referimos al diseño de estudios aplicados en las aulas, los cuales cuentan con la asistencia de un docente, en este caso sería el mismo investigador con el objetivo de crear las condiciones necesarias para abordar un diseño de tareas e investigar el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Por otro lado, se pueden evidenciar las características de los estudios de diseño, como estos abordan las problemáticas que son producto de ese apoyo constante en el aprendizaje de los estudiantes y de los profesores. Por esta razón, se deduce que estos estudios intentan aportar significativamente a mejorar la calidad de la instrucción matemática en los estudiantes, en vista de brindar un pequeño aporte significativo a la educación nos apoyamos en esta metodología como una forma crear un diseño orientado tanto teórico como pragmático, que sustente aquellas conjeturas que se espera que los estudiantes desarrollen a través de una práctica de aula innovadora controlada por el docente.

Además, esta metodología brinda la posibilidad de probar y revisar las conjeturas a nivel individual, colectivo, al igual que el uso recurso digital, lo cual conlleva a tener la oportunidad realizar reajustes, modificaciones en base a esas conjeturas que son producto de las actividades realizadas, ahora bien, los estudios de diseño a pesar de aplicarse en pequeños grupos como una forma particular, deben apuntar a la generalización, pues no solo es pensar que aporta y apoya al aprendizaje del estudiante, al desarrollo profesional del profesor y al mejoramiento tal vez de toda una institución, sino que se debe considerar como aquella caracterización de ese concepto matemático en particular vinculado a un recurso digital que brinda la posibilidad de respaldar una clase más amplia de fenómenos previstos, que son susceptibles a un análisis teórico.

Esta investigación, es de carácter cualitativo, con el uso de los experimentos de enseñanza como metodología de análisis de datos de la cual se hablará a continuación.

### ***3.1.1. Población***

La investigación se llevó a cabo con un grupo de 15 estudiantes de grado 7° de la Institución Educativa Belisario Peña Piñeiro del municipio de Roldanillo – Valle del Cauca, entre las edades de 11 – 13 años. Pertenecientes a los estratos 2 y 3 de la localidad.

Se ha escogido este grupo, porque en esta institución se reconoce una gran aceptación para la realización de trabajos y experimentos de provecho para los estudiantes.

### ***3.1.2. Unidad de análisis***

Por medio de los experimentos de enseñanza se busca obtener una caracterización de un diseño de tareas para la enseñanza de la congruencia triangular con la mediación instrumental de Geogebra. Es decir, con este experimento se pretende validar un diseño de tareas con todos sus elementos integrados para un contexto aplicado. Para lo anterior, se implementó un diseño conformado por tareas mediadas por Geogebra enmarcadas en el diseño de tareas con la congruencia triangular como objeto matemático.

La presente metodología ayuda a abordar diferentes cuestiones como la actividad del profesor y su interacción con los estudiantes, la participación de los estudiantes en la ejecución de las tareas propuestas, el papel de la geometría dinámica y la mediación instrumental con Geogebra y a su vez medir el impacto en el desarrollo del pensamiento espacial de los estudiantes, lo que permite determinar ajustes que se le deben ir haciendo al diseño.

En esta metodología, el investigador es observador o partícipe de las sesiones de clase. El diseño realizado puede tener cambios o modificaciones según se vea necesario en el análisis “continuo” que ocurre en el momento de implementación del diseño entre las sesiones de forma

permanente. Este análisis, es realizado con el fin de generar ajustes que permitan mejorar el diseño según las necesidades del aula.

Por último, se realiza un análisis llamado “retrospectivo” en el que se tienen en cuenta todos los datos agrupados de todas las sesiones implementadas, con el que se puede revisar, comparar, reflexionar e interpretar lo ocurrido según el contexto estudiado, con el fin de medir los alcances del diseño.

### 3.1.3. Fases de estudio

La propuesta se realizó en 3 fases teniendo en cuenta los experimentos de enseñanza que se presentarán de la siguiente manera:

**Figure 3** Experimento de enseñanza - fases



Fuente: propia

***Diseño***

Para la realización del diseño, se tiene en cuenta el objeto matemático a trabajar en este caso, la congruencia triangular. También el contexto a estudiar, en el que se tiene en cuenta los estudiantes de 7° de la Institución Educativa, su entorno y los elementos necesarios para llevar a cabo la investigación como es el tecnológico y el DGE Geogebra. Además de lo anterior se debe tener en cuenta el número de sesiones y tareas, el enlace entre tareas, la duración de las sesiones, incluso el intervalo de duración de las posibles intervenciones de los estudiantes.

Los elementos teóricos que orientan este diseño, son los propuestos por Allen Leung (2016) en el diseño de tareas en articulación de la mediación instrumental del software Geogebra.

### ***Implementación***

Se pretenden tomar los datos de la implementación de las sesiones por medio de grabaciones de video, fotografías y producciones textuales de los estudiantes para tomar como soporte y evaluar el desarrollo del pensamiento espacial y las competencias matemáticas de los estudiantes en clases de geometría sobre el concepto de congruencia triangular en la Institución Educativa Belisario Peña Piñeiro de Roldanillo para grado séptimo.

Por otro lado, se debe considerar que durante el proceso de implementación se realiza el análisis continuo con el que se le aplican modificaciones o cambios al diseño con el fin de realizar mejoras que posibiliten que los estudiantes desarrollen competencias matemáticas.

### ***Análisis retrospectivo***

Este análisis, es realizado con la compilación de todos los datos recogidos de las sesiones implementadas, en el que se exploran asuntos cualitativos y cuantitativos. El primero, para denotar las estrategias y métodos utilizados por los estudiantes para resolver los diferentes



problemas presentados y el segundo en la revisión del desempeño general de la clase en la realización de las tareas, para en conjunto arrojar reflexiones significativas para la investigación.

#### **3.1.4. Aspectos curriculares de las sesiones**

La realización de las actividades estuvo guiada bajo los siguientes elementos curriculares:

##### **ESTÁNDARES**

- Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.
- Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.

##### **DBA**

Observa objetos tridimensionales desde diferentes puntos de vista, los representa según su ubicación y los reconoce cuando se transforman mediante rotaciones, traslaciones y reflexiones.

Identifica relaciones de congruencia y semejanza entre las formas geométricas que configuran el diseño de un objeto. Evidencias de aprendizaje:

- Utiliza criterios para argumentar la congruencia de dos triángulos.
- Compara figuras y argumenta la posibilidad de ser congruentes o semejantes entre sí.

Estos elementos constituyeron los insumos curriculares para formular esta propuesta al grado séptimo de la Institución Educativa Belisario Peña Piñeiro, al mismo tiempo que lo hizo la rigurosa planificación de la inducción y demás contenidos dados por el profesor en pro del desarrollo del pensamiento geométrico – espacial de los estudiantes.

### **Características de las situaciones.**

Cada una de las dos situaciones de enseñanza, posee características diferentes; la primera situación, está compuesta por la inducción de Geogebra, conceptos de transformaciones isométricas y congruencia. Además de la primera actividad compuesta por 4 preguntas que posibilitan la identificación del concepto matemático de congruencia triangular mediante el uso de un deslizador que permite observar una reflexión en vista gráfica 2D y 3D.

Cada actividad estaba mediada por el instrumento, en este caso, software Geogebra con la que el estudiante pudiera modelar el objeto matemático, transformarlo y observar propiedades de este que no se podrían detallar tan fácilmente en uso de lápiz y papel.

En cada actividad se utilizó la comparación, el arrastre y las transformaciones isométricas, para identificar relaciones de congruencia, limitándose así del uso de la medición de ángulos y longitudes.

En la segunda sesión se proponen 2 actividades que a diferencia de la situación 1, contiene un trabajo con el arrastre y se trabajan otras transformaciones no vistas en la actividad 1.

La actividad 2, consta de dos preguntas y una socialización con el fin de que el estudiante pueda identificar las correspondencias de la congruencia triangular al arrastrar elementos que permiten realizar comparaciones y a su vez conjeturas.

La actividad 3, tiene 4 preguntas, la cuarta en socialización, con el fin de que el estudiante comparta sus ideas y conjeturas construidas.

En esta última actividad, se pretende que el estudiante pueda utilizar el concepto de congruencia triangular y sus correspondencias en un ambiente de resolución de problemas mediado por tecnología digital.

En estas actividades buscan en los 15 estudiantes desarrollar un pensamiento geométrico espacial en uso de transformaciones isométricas, yendo más allá del uso de las medidas y del lápiz y papel.

### ***3.1.5. Actividades***

En esta parte de la preparación del experimento, se proponen tareas repartidas en dos situaciones para que los estudiantes trabajen en el aula de clases con la mediación del software de geometría dinámica Geogebra, con el fin de obtener la información necesaria para el posterior análisis de estos datos. Según lo dicho en este capítulo, se establecen las bases de fundamentación para abordar el concepto de congruencia triangular, y promover el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes en este séptimo grado, mediante una metodología que permite realizar reflexiones del diseño para uso docente y así contribuir al mejoramiento del desempeño de los estudiantes.

En la situación 1, se encuentra una inducción de Geogebra, de las transformaciones isométricas y del concepto de congruencia, todo lo anterior presentado en uso del software, para que los estudiantes estén familiarizados con las tareas a realizar. Además, se presenta la tarea 1 que propone un reconocimiento del concepto de congruencia triangular.

En la situación 2, se encuentran las tareas 2 y 3, en las que se espera que el estudiante pueda identificar las correspondencias de congruencia triangular y enfrentarse a la resolución de problemas utilizando los conceptos estudiados.

### **SITUACIÓN 1**

En la primera situación propuesta para el grupo objeto de investigación, está una inducción del software Geogebra, de las transformaciones isométricas y del concepto de congruencia en general. Para llevar a cabo la inducción nombrada, se tuvo en cuenta la siguiente planeación en la que se mostraba cada concepto trabajado en uso del software de geometría dinámica Geogebra, de la siguiente manera:

## INDUCCIÓN

### **Objetivo:**

Reconocer el software de geometría dinámica Geogebra y sus diferentes herramientas en el trabajo de la geometría.

### **Estrategia metodológica:**

Primeramente, se va a mostrar el software y sus usos, enfatizando en la influencia que tiene este al trabajar en geometría.

También, se va a dar un recorrido general de las herramientas del software mediante la identificación de las diferentes clases de triángulos y sus propiedades.

Por último, se mostrarán los conceptos de las transformaciones isométricas trabajadas con el software.

Lo anterior de la siguiente manera:

¿Qué es Geogebra? ¿para qué sirve?

Geogebra es un software de matemáticas para todo nivel educativo. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo. Geogebra, con su libre agilidad de uso, congrega a una comunidad vital y en crecimiento. Dinamiza el estudio. Armonizando lo experimental y lo conceptual para experimentar una organización didáctica y disciplinar que cruza matemática, ciencias, ingeniería y tecnología (STEM: Science Technology Engineering & Mathematics). La comunidad que congrega lo extiende como recurso mundial, potente e innovador para la cuestión clave y clásica de la enseñanza y el aprendizaje!

Herramientas

Transformaciones isométricas

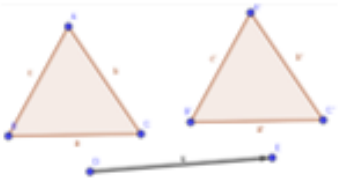
Para que los estudiantes tuvieran una mejor aceptación de estos conceptos, se compartieron unas guías en las que se encuentran sintetizados los conceptos anteriormente nombrados con imágenes que permitieran visualizar a que se refería cada uno de ellos:

**Transformaciones isométricas**

Las transformaciones isométricas son cambios de posición (orientación) de una figura determinada que NO alteran la forma ni el tamaño de ésta.

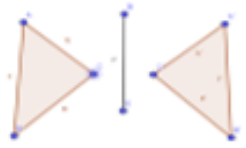
**Traslación**

La traslación de una figura plana es una transformación isométrica que mueve todos los puntos de la figura en una misma dirección, sentido y longitud. Para representar gráficamente el movimiento realizado en una traslación, se puede utilizar una flecha (como se muestra en el ejemplo siguiente), a esta flecha, se le conoce como vector de traslación.




**Reflexión**

Una reflexión o simetría es una transformación isométrica en la que a cada punto de la figura original se le asocia otro punto (llamado imagen), de modo que el punto y su imagen están a igual distancia de una recta llamada eje de simetría.



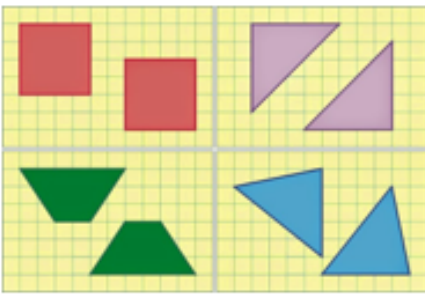
**Rotación**

toda rotación va a estar definida por su centro de rotación y ángulo de giro. Cuando una figura se transforma por rotación, mantiene la medida de sus ángulos y lados.



**Congruencia**

En matemáticas, dos figuras geométricas son congruentes si tienen las mismas dimensiones y la misma forma sin importar su posición u orientación, es decir, si existe una isometría que las relaciona: una transformación que puede ser de traslación, rotación o reflexión. Las partes relacionadas entre las figuras congruentes se llaman homólogas o correspondientes.



Además, se planeó para esta situación, la implementación de la tarea 1, que pretende que el estudiante pueda identificar el concepto de congruencia triangular en uso de la vista gráfica 3D del software, por lo cual, en todo momento se debe tener en cuenta la mediación instrumental del

software con ayuda de la guía por medio del discurso de los investigadores y apoyo de los enunciados de las tareas.

La conjetura trabajada en la primera tarea es que, “el uso de la vista 3D del software de geometría dinámica de Geogebra posibilitará que el estudiante conciba el concepto de congruencia triangular.”

Los enunciados y preguntas de la tarea 1, se subieron a un aplett de Geogebra.org para ser consignadas allí las respuestas de los estudiantes. A continuación, se muestra en escrito, cuáles fueron las preguntas utilizadas para su desarrollo:

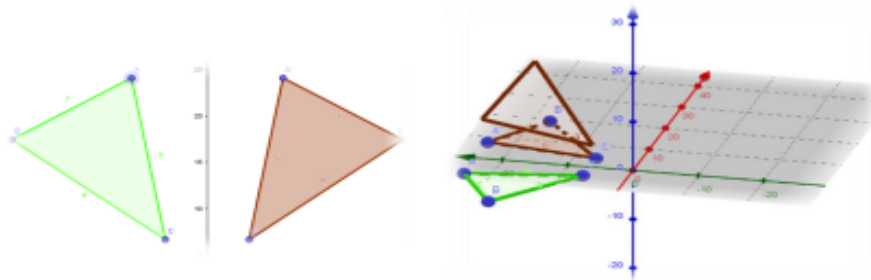


### ACTIVIDAD 1.

**CONJETURA:** El uso de la vista 3D del software de geometría dinámica de Geogebra posibilitará que el estudiante conciba el concepto de congruencia triangular.

Sean los triángulos ABC y A'B'C' en vista 2D y 3D y un deslizador  $\alpha$ .

1. Mueve el deslizador  $\alpha$  y describe qué observas con los triángulos en las vistas 2D y 3D.



2. Al mover el deslizador  $\alpha$  que observas en cuanto al tamaño de los triángulos cuando se mueve en distintas direcciones.

3. Al comparar los triángulos ABC y A'B'C' que puedes inferir en relación a sus lados y ángulos correspondientes.

4. Si conocemos la CONGRUENCIA como la igualdad en tamaño y forma, ¿podríamos decir que los triángulos ABC y A'B'C' son congruentes? Explica tu respuesta.

### SITUACIÓN 2

En la segunda sesión de enseñanza propuesta para el grupo objeto de investigación, se planeó llevar a cabo la tarea 2 y 3 subidas al aplett de Geogebra.org, estas tienen por objetivo el reconocimiento de las correspondencias de congruencia de triángulos y que el estudiante pueda desenvolverse en un ambiente de resolución de problemas al tener una construcción del concepto de congruencia triangular respectivamente.

La tarea planteada en la actividad 2 fue la siguiente:

**ACTIVIDAD 2**

**CONJETURA:** El desglose de los elementos constitutivos de un triángulo permite que el estudiante identifique los criterios de congruencia triangular LLL, ALA y LAL.

Sean los triángulos ABC, HIM, TUV, A'B'C', H'I'M', T'U'V' y algunos segmentos y ángulos de diferentes longitudes y amplitudes.

Mueve los segmentos y ángulos encajándolos en los triángulos en el lugar correspondiente según su longitud y amplitud.

**RESPONDE:**

1. Compara los triángulos encontrados teniendo en cuenta los elementos (ángulos y segmentos) en cada caso:

**CASO 1:**  $\triangle ABC$  con  $\triangle A'B'C'$

**CASO 2:**  $\triangle HIM$  con  $\triangle H'I'M'$

**CASO 3:**  $\triangle TUV$  con  $\triangle H'I'M'$

¿Qué elementos comparten entre ellos?

2. ¿Cómo observas que son estos triángulos entre sí para cada caso, teniendo en cuenta lo visto en la actividad anterior?

**SOCIALIZACIÓN:**

Si tenemos que existen los siguientes criterios de congruencia:

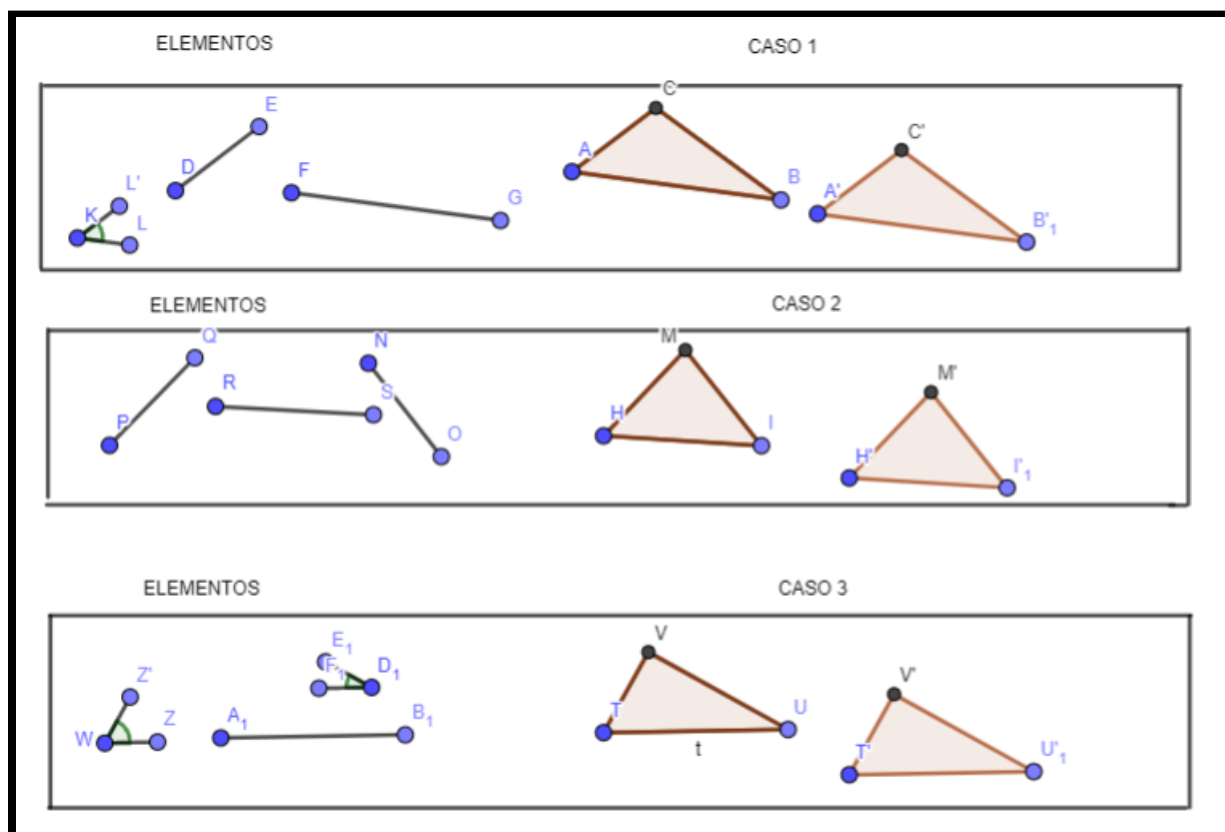
**LLL:** los tres lados correspondientes de los triángulos son de igual longitud

**ALA:** dos ángulos y el lado entre ellos correspondientes de los triángulos son de igual amplitud y longitud respectivamente.

**LAL:** dos lados y el ángulo entre ellos correspondientes de los triángulos son de igual longitud y amplitud respectivamente.

¿En qué caso se cumple cada criterio?

Figure 4 Actividad 2



En la actividad 2, se esperaba que el estudiante en uso del arrastre y al mismo tiempo de una traslación intrínseca, pudiera reconocer las diferentes correspondencias de la congruencia triangular y lograr así la conjetura de “el desglose de los elementos constitutivos de un triángulo permite que el estudiante identifique los criterios de congruencia triangular LLL, ALA y LAL.”

La tarea planteada en la actividad 3 fue la siguiente:

**ACTIVIDAD 3.**

**CONJETURA:** El uso del arrastre intencionado posibilitará que el estudiante en un contexto de resolución de problemas pueda establecer correspondencias entre las figuras y de esa manera construya el concepto de congruencia triangular.

Sean los triángulos ABC y DEF donde H es un punto medio

Observa el triángulo ABC y responde cada pregunta.

1. ¿Que detallas en relación a la configuración inicial?
2. ¿Qué sucede al mover los deslizadores? Tenga en cuenta los siguientes grados:

- Alfa:  $0^\circ$

- Beta:  $0^\circ$ ,  $360^\circ$

- Alfa en  $60^\circ$  y beta en  $300^\circ$  al mismo tiempo

¿Cómo son los triángulos que se sobreponen?

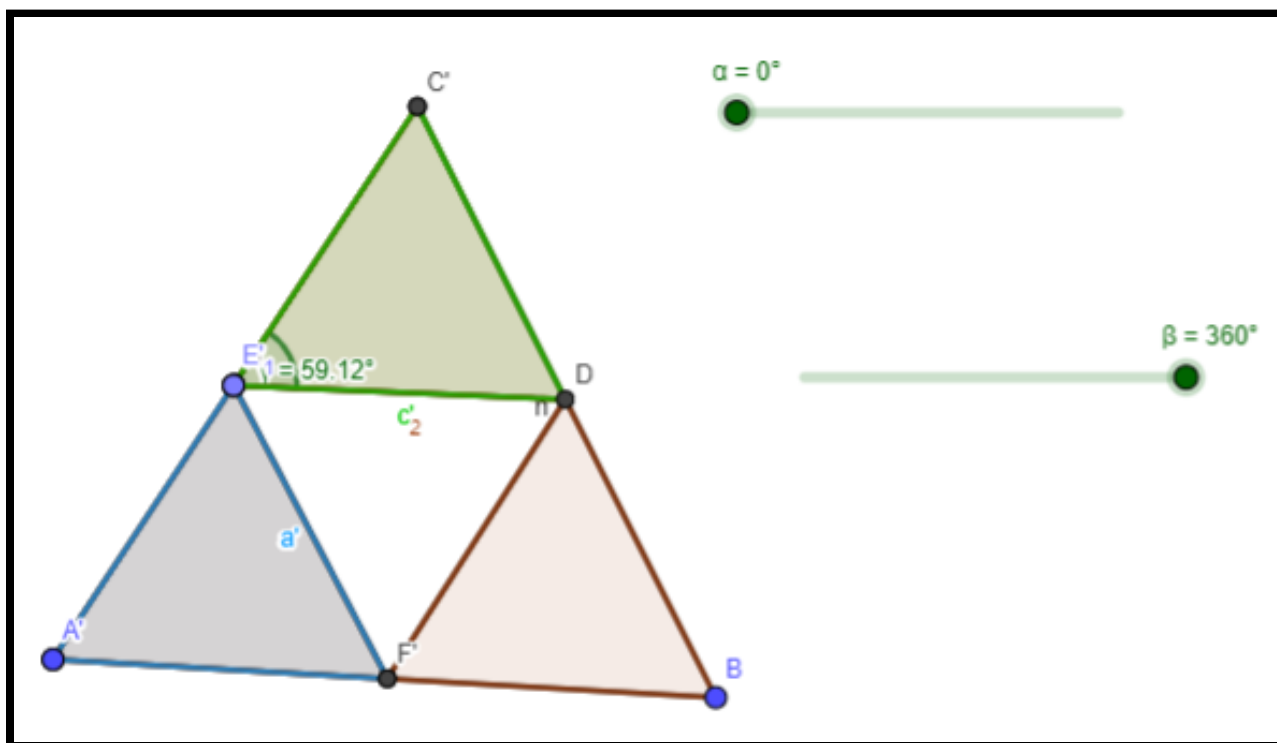
**3.** Si ponemos el punto E en la misma ubicación del punto H y movemos los deslizadores ¿cómo observas que son los triángulos verde y azul respecto a los demás?

**SOCIALIZACIÓN**

Dada la actividad, podemos afirmar que existe congruencia triangular. Si es así, identifica qué criterio se usó.

**4.** Si ubicamos en el triángulo DEC un ángulo de  $90^\circ$  usando la medición de ángulos y consideramos que la suma de los ángulos internos de un triángulo son  $180^\circ$  y que el triángulo ABC es equilátero, ¿cómo serán los ángulos de los triángulos ECD, EFA y DBF?

Figure 5 Actividad 3



En la actividad 3, se esperaba que el estudiante pudiera llegar a conjeturas que permitan evidenciar el aprendizaje y la aprehensión conceptual<sup>4</sup> de la congruencia triangular y sus correspondencias, logrando así la conjetura de “el uso de arrastre intencionado posibilitará que el estudiante en un contexto de resolución de problemas pueda establecer correspondencias entre las figuras y de esa manera construya el concepto de congruencia triangular”.

<sup>4</sup> Aprehensión conceptual: Captación y aceptación subjetiva de un concepto.

## CAPÍTULO IV ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este capítulo, se da una visión general de las actividades implementadas y del análisis realizado en uso de elementos del marco teórico propuesto.

### 4.1 ¿Que se analizó?

Las situaciones analizadas se llevaron a cabo en el aula de sistemas como clases de matemáticas con un grupo de 15 estudiantes del grado 7° de la Institución Educativa Belisario Peña Piñeiro de Roldanillo. Para este trabajo de grado y en función del Experimento de Enseñanza llevado a cabo, se diseñaron e implementaron dos situaciones compuestas por una inducción y tareas que permiten potenciar la enseñanza del concepto de congruencia triangular en los estudiantes a su vez desarrollando un pensamiento matemático en los estudiantes implicados.

Mientras que la situación 1; cuenta con la inducción y tarea 1, la situación 2, cuenta con las tareas 2 y 3.

Cada situación se llevó a cabo en dos horas de clase, se tomó en cuenta como evidencia la producción textual de cada estudiante y filmaciones en las que se observan conjeturas, comentarios y algunas dificultades expresadas por los estudiantes.

En total, se grabaron 13 videos, los videos 1,2 y 3 son de la inducción, los videos 4, 5, 6 Y 7 son de la tarea 1, los videos 8, 9 y 10 son de la tarea 2 y los videos 11, 12 y 13 son de la tarea 3. Con la información registrada, se construyó una rejilla de análisis en la que se tienen en cuenta los aciertos, dificultades, errores tenidos en el experimento de enseñanza en relación con el diseño de tareas, manejo del software y mediación instrumental.

A la rejilla de análisis se le vincularon 7 de los 13 videos, los cuales fueron seleccionados porque mostraron elementos para realizar un análisis, considerando el marco teórico propuesto.

Se tuvo en cuenta el arrastre utilizado por los estudiantes en el manejo del software para lograr la realización de las tareas.

En el análisis local, se analizó el logro de las metas (locales) en cada tarea propuesta en el aula de clase. Con estas metas, se pretende recoger un producto de lo propuesto previamente, a lo que se le pueden realizar algunas modificaciones, según la metodología empleada.

La metodología cualitativa, a la que pertenecen los experimentos de enseñanza, tiene el proceso de transformar la información en datos relevantes para la investigación. A partir de una selección de filtros y categorías de análisis.

Las categorías de análisis pretenden una clasificación e identificación de diferentes variables determinados por el marco teórico que sustenta la investigación. Además, permite contrastar lo experimentado con lo propuesto durante y después de la aplicación de cada situación.

Cuando se obtiene una información garantizada a partir de los registros realizados, se puede concluir, conjeturar y responder a los objetivos y a la propuesta en sí.

Partiendo del marco teórico referenciado en el presente trabajo, se tomó una rejilla de análisis con las siguientes variables:

**Table 1** Rejilla de análisis

	Dificultades	Errores	Aciertos
Diseño de Tareas			
Manejo del software			

Mediación instrumental			
---------------------------	--	--	--

Cada una de estas variables, analizadas en los datos de grabaciones de video y producciones textuales de los estudiantes.

También se tomó en cuenta lo siguiente para realizar el análisis:

- El uso del software en relación con la herramienta “arrastre” realizado por los estudiantes para responder las preguntas dadas.
- Si la mediación instrumental de los investigadores da cuenta de que el estudiante responde la pregunta evidenciando una construcción de conocimientos.
- Si la mediación instrumental permitió que los estudiantes pudieran llegar a conjeturas acertadas en cada actividad.
- Dificultades, errores y aciertos obtenidos según el diseño de las actividades, manejo del software y la mediación instrumental.

Para la realización de este trabajo en uso de los experimentos de enseñanza, se consideran: las metas de aprendizaje, la conjetura que guía el proceso de investigación, y las actividades de clase.

### **Conjeturas de las tareas implementadas**

- El uso de la vista 3D del software de geometría dinámica de Geogebra posibilitará que el estudiante conciba el concepto de congruencia triangular. (TAREA 1)



- El desglose de los elementos constitutivos de un triángulo permite que el estudiante identifique los criterios de congruencia triangular LLL, ALA y LAL. (TAREA 2)
- El uso de arrastre intencionado posibilitará que el estudiante en un contexto de resolución de problemas pueda establecer correspondencias entre las figuras y de esa manera construya el concepto de congruencia triangular”. (TAREA 3)

### **Metas de aprendizaje para los estudiantes para las diferentes actividades.**

Como metas tenemos las siguientes:

- Reconocer el concepto de congruencia triangular. (TAREA 1)
- Reconocer los criterios de congruencia triangular. (TAREA 2)
- Caracterizar los criterios de congruencia triangular. (TAREA 3)

### **4.2 Análisis Local**

Se llevó a cabo el registro de los datos de las tareas propuestas sobre la congruencia triangular, con el fin de identificar el rol cumplido por cada uno de los actores (estudiantes, docente y software) en el experimento de enseñanza se realizó por medio de grabaciones de video de las clases implementadas y de la producción textual del estudiante.

La implementación, se presenta como un ejercicio realizado en clases de geometría para grado séptimo en la Institución Educativa Belisario Peña Piñeiro de Roldanillo Valle, mediante la metodología de experimento de enseñanza.

En este trabajo de grado son analizadas tres actividades ejecutables mediante el software de geometría dinámica Geogebra, en uso de la vista 2D y 3D, con la finalidad de dar

cumplimiento al tercer objetivo “Desarrollar habilidades en el uso de las herramientas tecnológicas tipo vista gráfica 2D y 3D para la resolución de problemas de congruencia triangular.” Y en busca de que los estudiantes puedan obtener un acercamiento al concepto de congruencia triangular al modelar las figuras usando las transformaciones isométricas.

Se encuentra asociada para cada actividad una conjetura y meta de aprendizaje que permitió guiar el diseño.

Es importante el trabajo de diseños que ofrezcan experiencias matemáticas sobre la enseñanza de diferentes conceptos matemáticos, para ir reforzando los conocimientos y dar a conocer otros. Con el fin de promover el desarrollo del pensamiento geométrico espacial y contribuir al mejoramiento de la comprensión de estos conceptos se hace necesario emplear una metodología que facilite el estudio de distintas variables a considerar en la enseñanza de diferentes objetos matemáticos, en este caso particular, la congruencia triangular.

Reconocer el concepto congruencia es de gran importancia para los estudiantes en sus diferentes niveles educativos; pues, al tener un acercamiento a este objeto matemático, los estudiantes comprenderán la relación existente en la igualdad de las figuras, particularmente en triángulos.

### **Tarea 1**

La tarea 1, fue entendida por los estudiantes de manera satisfactoria, fue la que presentó menor inquietud, posiblemente por ser una actividad inicial. Con las respuestas dadas por los estudiantes en esta pregunta de forma asertiva, al decir que “los triángulos tienen la misma forma

y tamaño” se muestra una posible aprehensión del concepto de congruencia triangular por los estudiantes.

Esta tarea, es concebida según Venturini, M. y Sinclair, N. (2017) en la categoría de “*tareas que solo existen en un DGE*” considerando que esta al estar en una vista 3D, no se podría realizar la misma visualización que se le da a lápiz y papel que en uso del software, por lo que se puede decir que excluye por completo un contexto a lápiz y papel. En esta tarea los estudiantes deben explorar en uso de las herramientas del software y el arrastre para identificar elementos y relaciones de la congruencia triangular y reconocer el concepto estudiado por medio de la experimentación.

Con esta tarea, se espera que los estudiantes investiguen la situación y no solo desarrollen pensamiento matemático, sino que se cree y evalúe su competencia tecnológica, la capacidad de resolver problemas y brindar conjeturas relacionadas a la tarea, como pasa en el video 7, desde el primer segundo:

*Docente:* suba, mueva el deslizador, mire por ejemplo lo que pasa en 2D ¿Qué puede usted inferir de ahí?

*Estudiante:* (mueve el deslizador) en el 2D no cambian de tamaño, quedan iguales. En el 3D, cuando caen en uno se hace la sombra

*Docente:* ¿Que deduce usted de esa sombra?, ¿será que esos triángulos encajan o no encajan?

*Estudiante:* (piensa) mmm

*Docente:* Mire la 3D, ¿qué está pasando?

*Estudiante:* Se trasladan

*Docente:* ¿Y que sucede allí? ¿Y qué sucede allí? ¿Cuándo llega exactamente al otro triángulo que pasa

*Estudiante:* Se unen

*Docente:* ¿Cómo serían esos triángulos?

*Estudiante:* iguales

En este apartado, se observa que el estudiante en la situación conjeturó que los triángulos implicados son iguales, lo que le permitió llegar a un acierto, pues comprendió que, al usar el deslizador, los triángulos encajan perfectamente el uno con el otro, por lo que se puede pensar que comparten los mismos elementos constitutivos del triángulo, lo que los hace ser iguales.

Otro caso similar se da en el minuto 2, donde unas estudiantes que trabajaron en pareja manifestaron tener problemas con la actividad:

*Docente:* Mueva el deslizador de extremo a extremo

*Estudiante:* (lo mueve)

*Docente:* Mira la vista 3D, ¿Qué sucede con ese movimiento?

*Estudiante:* Se mueve este triángulo a este (señalando el triángulo ABC y luego el triángulo A'B'C')

*Docente:* Y cuando llega ahí ¿qué pasa?

*Estudiante:* Se queda a la mitad

*Docente:* ¿Está llegando a la mitad? Muévelo de extremo a extremo ¿A dónde está llegando

*Estudiante:* Al triangulo A ¿este es triangulo a? (señalando el triángulo ABC)

*Docente:* Es triangulo ABC y el otro es A'B'C'. ¿A dónde ESTA LLEGANDO?

*Estudiante:* Al triangulo A'B'C'

*Docente:* Entonces que se puede decir de sus lados y sus ángulos de esos triángulos.

*Estudiante:* Que son iguales

En este apartado, se observa que las estudiantes estaban teniendo un error en el manejo del software, por lo que la orientación del docente fue necesaria para que pudiera realizar de forma eficiente la tarea, arrojando conjeturas que le permitieran reconocer el concepto de congruencia triangular. En este momento, las estudiantes llegaron a conjeturar que los triángulos ABC y A'B'C' tienen los lados y ángulos iguales, lo que es un acierto, porque al darle un manejo correcto al software, pudieron identificar una característica de los triángulos congruentes.

Según, los datos de esta actividad, se pueden tener dificultades que con orientación se pueden sobrepasar y adquirir respuestas que inciten al logro de una aprehensión conceptual.

A continuación, se observan algunas respuestas textuales de los estudiantes, cada estudiante está representado E1, E2, E3, ...: seleccionados al azar.

*Sean los triángulos ABC y A'B'C' en vista 2D y 3D y un deslizador  $\alpha$*

*1. Mueve el deslizador alfa y describe qué observas con los triángulos en las vistas 2D y 3D.*

E1: mantiene su figura

E2: Al momento de usar el deslizador se puede observar en la gráfica 3D un triángulo que se mueve y tiene la misma forma y medida que los dos triángulos, pero en la gráfica 2D no se puede observar el triángulo que aparece

*2. Al mover el deslizador alfa qué observas en cuanto al tamaño de los triángulos cuando se mueve en distintas direcciones.*

E1: R/: Mantiene su figura y mueve todos los puntos en una misma dirección

E2: Se mantiene el tamaño incluso si se mueve el triángulo con el deslizador.

E5: Son del mismo tamaño

E14 y E15: No cambian si lo mueves de lado a lado su tamaño y su forma quedan iguales

*3. Al comparar los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  qué puedes inferir en relación con sus lados y ángulos correspondientes.*

E1: R/: Mantiene la medida de sus ángulos y de sus lados

E2: Son iguales

E3: Todos son iguales porque todos miden igual

E8: Son iguales sus formas, tamaños y ángulos.

E9: Que los lados y ángulos siguen iguales y se mantiene su tamaño y su forma intacta

*4. Si conocemos la CONGRUENCIA como la igualdad en tamaño y forma, ¿podríamos decir que los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son congruentes? Explica tu respuesta.*

E1: R/: Si son congruentes porque tienen la misma dimensión y la misma forma sin importar su posición

E2: Si, porque tienen la misma dimensión y a simple vista se puede observar que tienen la misma medida.

E3: Si porque miden los mismo, pero tienen diferente posición

E5: Si, son congruentes porque tienen la misma dimensión y la misma forma sin importar su posición u orientación.

Se observa que los estudiantes reconocieron que cuando se habla de congruencia, este concepto está estrechamente relacionado con la igualdad en el tamaño y la forma. Algunos también relacionaron la dimensión en la que se encuentran los triángulos comparados.

## **Actividad 2**

La actividad 2, presenta dificultad de tecnicismo para los estudiantes, pues estudiantes no reconocían que era lo que se preguntaba, por tal motivo se apoyó en orientación y guía de los investigadores, lo que permitió que pudieran sobrepasar la dificultad de forma satisfactoria, reconociendo las correspondencias de congruencia triangular tratadas.

Según Venturini, M. y Sinclair, N. (2017) esta tarea hace parte del grupo de *tareas en la que la DGE facilita la tarea matemática* reconocida por que el software dinámico actúa como un amplificador visual, en el que el arrastre de los elementos relacionados en la actividad posibilita que el estudiante comprenda el concepto de congruencia triangular y a lo que se refiere, al conocer a fondo cuales son los casos o correspondencias que se pueden dar.

Esta tarea puede llevarse a cabo a lápiz y papel, sin embargo, el software ofrece un estímulo visual que permite explorar y representar de forma dinámica lo que le facilita encontrar

la solución de la tarea, brindar inferencias y conjeturar sobre ella, lo cual podría tener un poco de dificultad si se realiza a lápiz y papel.

En el video 8, primer segundo se observa que el docente explica cómo se realiza la actividad y el arrastre que se pide, pues el estudiante manifiesta no comprender la actividad

*Estudiante:* No entiendo bien lo que hay que hacer

No entiendes bien, listo. Miremos el caso 1, mueve el segmento FG lo encajas en el triángulo,

*Estudiante:* (el estudiante encaja el segmento en el primer triángulo que encuentra)

*Docente:* Listo ahora con ese mismo segmento miremos en A'B'

*Estudiante:* (el estudiante encaja el segmento en el otro triángulo que encuentra en el caso 1)

*Docente:* Entonces ¿qué se puede deducir entre los dos triángulos? ¿Hay una correspondencia entre quién?

*Estudiante:* Entre ab A'B'

*Docente:* Entonces ¿tendríamos que?

*Estudiante:* Un lado

Luego de realizar el mismo procedimiento con los otros elementos (ángulo y lado):

*Docente:* Entonces aquí (señalando la pantalla del computador) ¿que tenemos?

*Estudiante:* Tenemos lado ángulo y lado



*Docente:* Bueno, entonces por esa correspondencia que sucede entre los dos triángulos

*Estudiante:* Tienen la misma medida por correspondencia lado ángulo lado

De esta misma forma, se puede llegar a identificar las demás correspondencias, por lo que se puede decir que se cumple con la meta de aprendizaje propuesta, pues por medio del manejo del software, la mediación instrumental de Geogebra y el diseño de tareas, el estudiante puede tener un acierto en la tarea, lo que le permite generar conjeturas. Tal como se muestran en respuestas textuales:

*Sean los triángulos  $ABC$ ,  $HIM$ ,  $TUV$ ,  $A'B'C'$ ,  $H'I'M'$ ,  $T'U'V'$  y algunos segmentos y ángulos de diferentes longitudes y amplitudes. Mueve los segmentos y ángulos encajándolos en los triángulos en el lugar correspondiente según su longitud y amplitud.*

*Compara los triángulos encontrados teniendo en cuenta los elementos (ángulos y segmentos) en cada caso:*

*CASO 1:  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$*

*CASO 2:  $\triangle HIM$  con  $\triangle H'I'M'$*

*CASO 3:  $\triangle TUV$  con  $\triangle H'I'M'$*

*¿Qué elementos comparten entre ellos?*

E1: ángulos y lados

E2: los ángulos y los lados, se mantiene la correspondencia entre lado ángulo lado

E7: caso 1: son iguales.

caso 2: son iguales.

caso 3: son congruentes.

E8: comparten que sus lados y ángulos se mantiene en la misma forma

E9: en los 3 casos son congruentes

E10: los casos son de congruencia de triángulos

*2. ¿Cómo observas que son estos triángulos entre sí para cada caso, teniendo en cuenta lo visto en la actividad anterior?*

E2: son congruentes en cada caso, ya que las dos figuras en cada caso tienen las mismas dimensiones y la misma forma

E7: que son del mismo tamaño

E12 y E13: tienen la misma forma

*3. Si tenemos que existen los siguientes criterios de congruencia:*

*LLL: los tres lados correspondientes de los triángulos son de igual longitud*

*ALA: dos ángulos y el lado entre ellos correspondientes de los triángulos son de igual amplitud y longitud respectivamente.*

*LAL: Los dos lados y el ángulo entre ellos correspondientes de los triángulos son de igual longitud y amplitud respectivamente.*

*¿En qué caso se cumple cada criterio?*

E1: R/: En el caso 1 lado ángulo lado

E2: LLL caso 2, LAL caso 1, ALA caso 3

E3: LLL: caso 2 porque hay 3 segmentos y los triángulos son iguales en todos los lados

ALA: caso 3 porque hay dos ángulos y un segmento

LAL: caso 1 porque hay un ángulo y dos segmentos y los segmentos solo caben en un lado

E6: caso 1: ALA: dos ángulos y el lado entre ellos correspondientes de los triángulos son de igual amplitud y longitud respectivamente. caso 2: LLL: los tres lados correspondientes de los triángulos son de igual longitud caso 3: LAL: dos lados y el ángulo entre ellos correspondientes de los triángulos son de igual longitud y amplitud respectivamente.

Se observa una descripción de las correspondencias de congruencia triangular para cada caso, en donde se hizo uso del software para llegar a esas conclusiones.

### **Actividad 3**

Según Venturini, M. y Sinclair, N. (2017) esta tarea, pertenece al grupo de *tareas modificadas cuando se dan en una DGE* porque gracias al software dinámico, se modifica las estrategias de la resolución de la tarea, con el uso del deslizador, el arrastre y la observación para identificar propiedades de la congruencia triangular.

Para esta tarea, se tiene en cuenta el uso del software para alcanzar la meta de caracterizar las correspondencias de congruencia triangular, pues con esta actividad y la anterior, se espera que el estudiante pueda establecer relaciones de congruencia triangular.

La actividad 3, presentó un error del estudiante al no realizar un debido manejo del software, pues se observó que estudiantes no usaban de forma completa el deslizador implicado, lo que imposibilitaba la correcta y completa visualización de lo sucedido en la tarea.

Grabación 15, 2.22- 3.56

*Estudiante:* profe descubrí magia, estaba comparando estos dos triángulos y son iguales

*Docentes:* ¿cómo los comparaste?

*Estudiante:* busqué la forma de colocar este ahí, y como vi que el otro también puede llegar ahí. Lo coloque en el mismo lugar

*Docentes:* bien, y si movemos el punto E sobre el punto H que sucede.

*Estudiante:* oh no miden lo mismo, o no, si miden lo mismo

*Docente:* ¿Si mueves el otro deslizador, que puedes observar?

*Estudiante:* este también mide lo mismo

*Docente:* ahora mire el otro

*Estudiante:* este mide lo mismo y este también

*Docente:* y tú me habías dicho que los que estabas moviendo al comienzo miden lo mismo

*Estudiante:* entonces todos miden lo mismo

El estudiante descubre la igualdad de los dos triángulos transformados, al superponer uno sobre el otro a través de la rotación, entonces se le pide que mueva el punto E, sobre el punto H (punto medio del segmento AC), para que continúe estableciendo igualdades, en un principio al no ubicar bien el triángulo rotado sobre otro, argumenta que no son iguales, pero al usar el arrastre de una manera más pausada logra observar que si hay una igualdad, concluye que todos los triángulos son iguales.

Algunas respuestas textuales de esta actividad fueron:

*Sean los triángulos ABC y DEF donde H es un punto medio Observa el triángulo ABC y responde cada pregunta.*

1. *¿Qué detallas en relación a la configuración inicial?*

E1: Que son de la misma medida

E2: que los triángulos son congruentes, ya que al moverlos de su configuración inicial se sigue manteniendo la figura

E7: todos son iguales

2. *¿Qué sucede al mover los deslizadores? Tenga en cuenta los siguientes grados:*

-  $\alpha$ :  $0^\circ$  -  $\beta$ :  $0^\circ$ ,  $360^\circ$  -  $\alpha$ :  $60^\circ$  y  $\beta$ :  $300^\circ$  al mismo tiempo *¿Cómo son los triángulos que se sobreponen?*

E2: al poner  $\alpha$ : 0 grados y  $\beta$ : 0 o 360 grados vuelven a su forma original, y al poner  $\alpha$ : en 60 grados y  $\beta$ : en 300 grados se juntan los dos triángulos para formar un solo triángulo

E5: al poner la figura todos los triángulos encajan

E6: al poner estas configuraciones todos los triángulos se unen y queda uno solo

3. *Si ponemos el punto E en la misma ubicación del punto H y movemos los deslizadores*

*¿cómo observas que son los triángulos verde y azul respecto a los demás?*

E1: R/: son iguales

E2: los triángulos se juntan entre si formando una sola figura al mover los deslizadores cualesquiera de todos los triángulos que hay

E3: el verde gira hacia la izquierda y queda abajo y el azul gira hacia la derecha y queda encima del triángulo blanco

Según lo anterior, se observa que se alcanza la meta de aprendizaje de caracterizar las correspondencias de congruencia triangular, puesto que los estudiantes por medio del arrastre ejecutado con el movimiento del deslizador en los diferentes grados dados por el diseño y un correcto manejo del software permitieron arrojar conjeturas y conclusiones sobre la tarea enfrentada.

Cabe aclarar que, para llegar a este punto de logro de metas, se apoyó en el encadenamiento de tareas, pues cada una tenía relación con la anterior y la siguiente, mostrando en cada una un nivel más alto de conocimiento necesario.

#### **4.2.1. conclusiones locales**

Para una correcta realización de las tareas propuestas, es importante contar con una buena orientación, para llegar a aciertos, subsanar las dificultades y evitar errores. Esto permite que los estudiantes comprendan las consignas de las tareas y evitar dificultades con el tecnicismo.

Además, brindar guía y apoyo para evitar dificultades con el manejo del software, ya que, si este no se tenía, lo más probable era que no se cumpliera la meta de aprendizaje.

Por otro lado, se destaca el manejo del software como una variable importante para la obtención de aciertos, pues posibilita que los estudiantes visualicen las propiedades de los objetos estudiados.

### 4.3. Análisis Retrospectivo

En este apartado, se presenta el análisis de los datos de los registros que se obtuvieron de las situaciones realizadas en el aula de clase, teniendo en cuenta las categorías de la rejilla de análisis (ANEXO 1).

#### ACTIVIDAD 1

##### Grabaciones de video

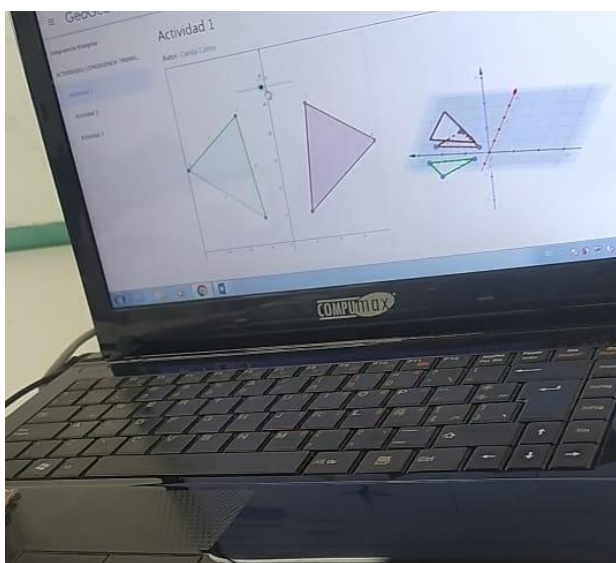
En la Grabación 6 el estudiante 1 no comprende la pregunta 3 de la actividad 1 “*Al comparar los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  ¿qué puedes inferir en relación a sus lados y ángulos correspondientes?*”, se orienta a que el estudiante observe el movimiento de una manera detallada tanto en 2D como en 3D, se cuestiona acerca del encaje que se evidencia entre el reflejo del triángulo  $ABC$  y  $A'B'C'$ , el estudiante al volver a leer la pregunta, se le pregunta que si observa un encaje ¿qué puede suceder con sus lados y ángulos? Posteriormente el estudiante se dispone a responder.

En la pregunta nombrada, se considera que, al hablar de inferir, comparar y relacionar en la misma pregunta, se evidencia un alto tecnicismo que dificulta un desarrollo claro de la misma, necesitando de la orientación del investigador, además que aparte del estudiante 1, hubo una gran cantidad que argumentaron no entenderla. Tal como se observa en la grabación 9.

En la grabación 6, se evidencia que el estudiante 2 no hace un uso debido del deslizador, al no moverse de extremo a extremo, no reconoce la sombra que se da al llegar el triángulo transformado al triángulo  $A'B'C'$ , entonces se orienta al estudiante a que movilice el deslizador de extremo a extremo y que deduzca a partir de la sombra que ya se está observando.

En la grabación 7, al realizar la actividad 1 específicamente en la pregunta 3, se le sugiere al estudiante que mueva el deslizador para poder observar lo que ocurre, al tener un silencio por parte del estudiante se pide que centre la atención en la vista 3D y cuente qué es lo que sucede, el estudiante dice que se traslada un triángulo al otro, al investigador realizar sucesivas preguntas que orientan al estudiante, este dice que los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son iguales, que al usar el deslizador los triángulos se unen teniendo así medidas de ángulos y segmentos correspondientes iguales. Evidenciando un acierto en el manejo del software. Tal como se muestra en la figura 6.

**Figure 6** Implementación del diseño



En la grabación 7, con minuto 05:00, una estudiante tenía un leve error con el manejo del software, pues no utilizaba el deslizar en su totalidad, por lo cual no realizaba conjeturas sustanciosas, hasta que con guía del investigador pudo resolverlo e inferir en lo que sucedía en la actividad, diciendo que los triángulos tienen la misma figura y que la medida de los lados y los ángulos de los triángulos correspondientes son iguales.



## Respuestas textuales

*Sean los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  en vista 2D y 3D y un deslizador alfa*

*1. Mueve el deslizador alfa y describe qué observas con los triángulos en las vistas 2D y 3D.*

E1: mantiene su figura

E2: Al momento de usar el deslizador se puede observar en la gráfica 3D un triángulo que se mueve y tiene la misma forma y medida que los dos triángulos, pero en la gráfica 2D no se puede observar el triángulo que aparece

E3: en la vista 2D se observa que se oscurece la parte verde y en la vista 3D se mueve al lado

E4: en el mapa 2D no se notan cambios al mover el deslizador sin embargo en el mapa 3D se notan cambios al mover el deslizador

E5: que la figura pasa de un lado al otro

E6: Se mueve de un lado para otro.

E7: al mover el deslizador me di cuenta que en la vista 3D se encuentra un triángulo nada diferente a los otros triángulos que se mueve dependiendo del ángulo en el que esté. Y estos se sombrean.

E8: se observa que al utilizar el deslizador la forma del triángulo del 3d se une con el triángulo ABC prima

E12 y E13: que una figura se mueve de un lado a otro.

E14 y E15: que el 3D se desplazan de lado a lado mientras el 2D se queda quieto y se le coloca una sombra cuando el 3D se le colocan encima al 2D

En esta pregunta, el estudiante debía utilizar el deslizador para poder describir lo que sucedía, esta pregunta era de experimentación, inicial, para dar los primeros pasos hacia el concepto estudiado de congruencia triangular. Se esperaba que los estudiantes detallaran y contaran lo que sucedía cuando el deslizador llegaba de un lado a otro.

Al ser un ejercicio de describir lo que se observa y de experimentación inicial, el 100% de las respuestas son válidas, puesto que todas hablan de lo que vieron en el ejercicio.

En este ejercicio, es importante el arrastre que se le brinde con el deslizador, pues al no usarse de forma completa, puede llevar a errores.

**Figure 7** Respuestas 1-1



*2. Al mover el deslizador alfa que observas en cuanto al tamaño de los triángulos cuando se mueve en distintas direcciones.*

E1: R/: Mantiene su figura y mueve todos los puntos en una misma dirección

E2: se mantiene el tamaño incluso si se mueve el triángulo con el deslizador.

E3: el tamaño es el mismo

E4: se quedan igual de tamaño

E5: son del mismo tamaño

E6: que se vuelve más grande pero cuando llega a los triángulos se vuelve del mismo tamaño

E7: La figura se mueve en todas las direcciones embargo el tamaño sigue siendo el mismo

E8: cambia el tamaño

E9: Que se ven pequeños, pero en realidad son grandes.

E10: siguen iguales.

E11: se observa que el tamaño sigue intacto, aunque lo movamos con el deslizador

E12 y E13: cambia de tamaño

E14 y E15: no cambian si lo mueves de lado a lado su tamaño y su forma quedan iguales

En esta pregunta, se observó un acierto del 66.66%, pues algunos estudiantes conjeturaron que el tamaño cambiaba al mover el deslizador, esto pudo ocurrir, porque al ser visto los triángulos en una pantalla (2D), no se concibe en su totalidad la vista 3D, lo que significa una dificultad para los estudiantes.

**Figure 8** Respuestas 1-2

3. *Al comparar los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  qué puedes inferir en relación a sus lados y ángulos correspondientes.*

E1: R/: Mantiene la medida de sus ángulos y de sus lados

E2: son iguales

E3: todos son iguales porque todos miden igual

E4: que son iguales

E5: son iguales

E6: los lados y ángulos no cambian

E7: que tienen la misma forma y tamaño

E8: son iguales sus formas, tamaños y ángulos.

E9: que los lados y ángulos siguen iguales y se mantiene su tamaño y su forma intacta

E10: son iguales

E11: si sus lados y ángulos son iguales entonces no cambian

E12 y E13: los lados y ángulos no cambian

E14 y E15: si sus ángulos y sus lados son iguales no hay diferencia

En esta pregunta, se debía utilizar un mantenimiento del arrastre<sup>5</sup>, para observar que ocurría con las propiedades de los ángulos y lados correspondientes de los triángulos implicados.

Esta pregunta tuvo un 100% de asertividad, además, se evidencia en ella una utilización de dos palabras claves en el concepto de congruencia triangular; el tamaño y la forma.

**Figure 9** Respuestas 1-3



4. Si conocemos la CONGRUENCIA como la igualdad en tamaño y forma, ¿podríamos decir que los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son congruentes? Explica tu respuesta.

E1: R/: Si son congruentes porque tienen la misma dimensión y la misma forma sin importar su posición

---

<sup>5</sup> El mantenimiento de arrastre, es utilizado para observar si se cumple una propiedad cuando se arrastre el objeto a un punto.

E2: si, porque tienen la misma dimensión y a simple vista se puede observar que tienen la misma medida.

E3: si porque miden los mismo, pero tienen diferente posición

E4: si son congruencia porque tiene las mismas formas y dimensiones

E5: si, son congruentes porque tienen la misma dimensión y la misma forma sin importar su posición u orientación

E6: tienen las mismas dimensiones y la misma forma sin importar su posición u orientación

E7: si porque son iguales

E8: Si, porque son iguales y tienen la misma forma.

E9: sí, porque sus formas, tamaños y ángulos son iguales.

E10: si porque se mantiene su misma forma y su misma dimensión, aunque lo muevan con el deslizador

E11: Si

E12 y E13: tienen las mismas dimensiones y la misma forma sin importar su posición orientación

E14 y E15: sí porque sus lados y sus ángulos son iguales por eso son congruencia

En esta respuesta, el estudiante debía reflexionar sobre toda la actividad realizada y el concepto de congruencia triangular que se le daba para llegar a la respuesta.

En esta pregunta, el 100% de los estudiantes llegó a la respuesta correcta, y en varias de estas se evidenciaron conjeturas en las que se afirmaba que la forma, el tamaño y las dimensiones de estos triángulos eran iguales sin importar la posición de estos.

**Figure 10** Respuestas 1-4



## ACTIVIDAD 2

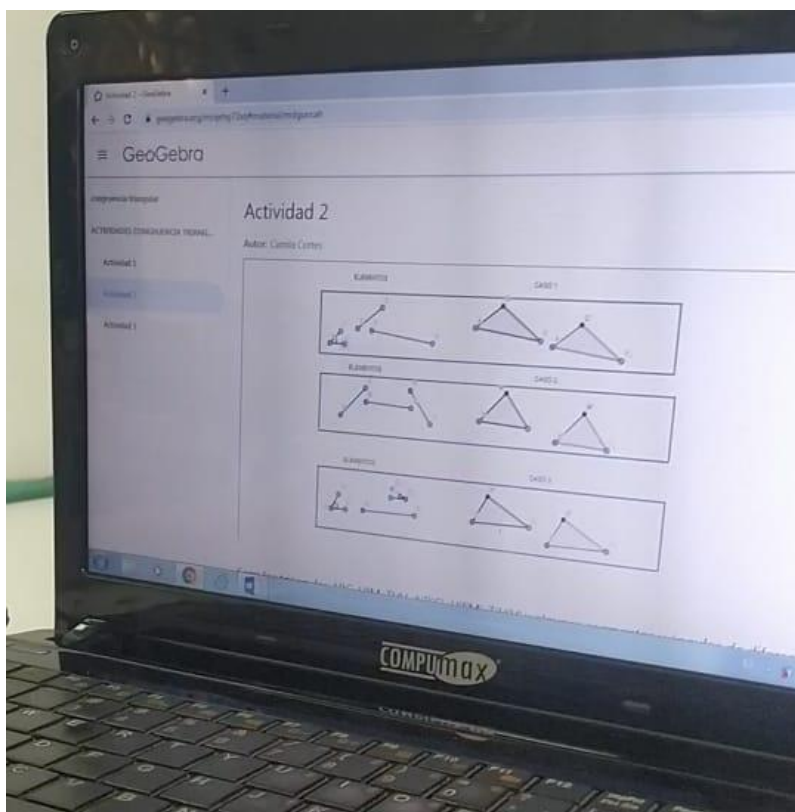
Esta actividad fue la de mayor índice de dificultad y comprensión, pues como se observa en las grabaciones filmicas y respuestas, los estudiantes tuvieron dificultades para su realización, las cuales se pudieron solucionar. Como se observa a continuación:

### Grabaciones de video

En la grabación 8, un estudiante muestra tener dificultades con la actividad 2, pues no entendía el enunciado de la pregunta, a lo cual se le sugirió realizar arrastre de los elementos implicados en la actividad, evidenciando correspondencias de estos en los triángulos del caso, observando elementos compartidos de los triángulos y la deducción en la correspondencia que se muestra. Igualmente, otro estudiante al tener problemas con esta actividad llega a conjeturar que

los lados y ángulos de los triángulos comparados con ayuda de los elementos implicados son iguales. Tal como se muestra en la figura 11.

**Figure 11** Implementación del diseño actividad 2



En la grabación 8, en los minutos 08:00 – 08:36 un estudiante muestra tener un buen manejo del software, ninguna dificultad ni error con el diseño y estar ya finalizando las actividades propuestas de forma satisfactoria. Luego de este estudiante, los investigadores dan rondas y se evidencia que los estudiantes ya conocen la dinámica de la realización de las actividades, lo cual promueve que necesitan menos ayuda de los investigadores, llegando a conjeturas argumentadas, en las que utilizan diferentes elementos observados para inferir en la congruencia de los triángulos relacionados en distintas correspondencias.



En la grabación 9, (14) minutos del 00:00 - 03:30, un estudiante detalla su método de solución en uso del software para determinar las correspondencias obtenidas y decir que los triángulos son congruentes. Este estudiante realiza una discriminación de las correspondencias de congruencia triangular en la actividad 2.

En la grabación 10, del minuto 00:00 – 00:30 una estudiante conjetura que cuando se tiene una correspondencia de lado – ángulo – lado, los triángulos son congruentes al realizar comparaciones con los elementos dados y los triángulos implicados en cada caso de la actividad 2, lo que evidencia una comprensión de las propiedades de la congruencia en triángulos.

### **Respuestas textuales**

*Sean los triángulos  $ABC$ ,  $HIM$ ,  $TUV$ ,  $A'B'C'$ ,  $H'I'M'$ ,  $T'U'V'$  y algunos segmentos y ángulos de diferentes longitudes y amplitudes. Mueve los segmentos y ángulos encajándolos en los triángulos en el lugar correspondiente según su longitud y amplitud.*

*Compara los triángulos encontrados teniendo en cuenta los elementos (ángulos y segmentos) en cada caso:*

**CASO 1:**  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$

**CASO 2:**  $\triangle HIM$  con  $\triangle H'I'M'$

**CASO 3:**  $\triangle TUV$  con  $\triangle H'I'M'$

*¿Qué elementos comparten entre ellos?*

E1: ángulos y lados

E2: los ángulos y los lados, se mantiene la correspondencia entre lado ángulo lado

E3: caso 1: el ángulo solo queda con el punto A y A', los segmentos quedan en ambos

caso 2: todos los segmentos quedan en ambos triángulos

caso 3: el ángulo W solo queda en el punto T, el ángulo D1 solo queda en el punto U y el segmento va del punto T al punto U en ambos

E4: que los triángulos del caso 1 son iguales

E5: CASO 1:  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  – tienen la misma forma y ángulos

CASO 2:  $\triangle HIM$  con  $\triangle H'I'M'$  – tienen la misma forma y ángulos

CASO 3:  $\triangle TUV$  con  $\triangle H'I'M'$  – tienen la misma forma y ángulos

E6: los lados y ángulos

E7: caso 1: son iguales.

caso 2: son iguales.

caso 3: son congruentes.

E8: comparten que sus lados y ángulos se mantiene en la misma forma

E9: en los 3 casos son congruentes

E10: los casos son de congruencia de triángulos

E12 y E13: CASO 1:  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  – tienen la misma forma y ángulos

CASO 2:  $\triangle HIM$  con  $\triangle H'I'M'$  – tienen la misma forma y ángulos

CASO 3:  $\triangle TUV$  con  $\triangle H'I'M'$  – tienen la misma forma y ángulos

E14 y E15: que todos los elementos encajan en los triángulos.

En esta pregunta, se observa que el 60% de las respuestas fueron de aciertos e incluso se respondió teniendo en cuenta lo visto en el punto anterior, mientras que el 40% presentó respuestas inconsistentes y poco relacionadas a lo preguntado.

**Figure 12** Respuestas 2-1



2. *¿Cómo observas que son estos triángulos entre sí para cada caso, teniendo en cuenta lo visto en la actividad anterior?*

E1: R/: Son congruentes si tienen la misma dimensión

E2: son congruentes en cada caso, ya que las dos figuras en cada caso tienen las mismas dimensiones y la misma forma

E3: iguales porque si muevo el primero se mueven los dos

E4: las figuras son congruentes

E5: los triángulos del caso 1 son totalmente diferentes a los triángulos del caso 2 o caso 3

E6: tienen el mismo tamaño

E7: que son del mismo tamaño

E8: todos son congruentes

E9: son congruentes, en cada caso las dos figuras tienen la misma forma y medida

E10: tienen el mismo tamaño

E11: se cumplen los casos

E12 y E13: tienen la misma forma

E14 y E15: porque sus lados y sus ángulos son iguales

En esta pregunta, era necesario que el estudiante ejecutara un mantenimiento del arrastre con los elementos implicados en cada caso para observar el cumplimiento de las propiedades e igualdades.

En esta pregunta, los estudiantes tuvieron un índice de acierto del 73%, tal como se observa en la gráfica presentada. Como se muestra en la figura 13.

**Figure 13** Respuestas 2-2



3. Si tenemos que existen los siguientes criterios de congruencia:

*LLL: los tres lados correspondientes de los triángulos son de igual longitud*

*ALA: dos ángulos y el lado entre ellos correspondientes de los triángulos son de igual amplitud y longitud respectivamente.*

*LAL: Los dos lados y el ángulo entre ellos correspondientes de los triángulos son de igual longitud y amplitud respectivamente.*

*¿En qué caso se cumple cada criterio?*

E1: R/: En el caso 1 lado ángulo lado

E2: LLL caso 2, LAL caso 1, ALA caso 3

E3: LLL: caso 2 porque hay 3 segmentos y los triángulos son iguales en todos los lados

ALA: caso 3 porque hay dos ángulos y un segmento

LAL: caso 1 porque hay un ángulo y dos segmentos y los segmentos solo caben en un lado

E4: el caso uno es LAL el caso dos es LLL el caso tres es AAL

E5: el caso 1 es LAL, el caso 2 es LLL, los triángulos del caso 3 son ALA en cada caso congruentes

E6: caso 1: ALA: dos ángulos y el lado entre ellos correspondientes de los triángulos son de igual amplitud y longitud respectivamente. caso 2: LLL: los tres lados correspondientes de los triángulos son de igual longitud caso 3: LAL: dos lados y el ángulo entre ellos correspondientes de los triángulos son de igual longitud y amplitud respectivamente.

E7: En cada caso se cumple el criterio

E8: caso 1: LAL: dos lados y el ángulo entre ellos correspondientes de los triángulos son de igual longitud y amplitud respectivamente. por tanto, son iguales. caso 2: LLL: los tres lados correspondientes de los triángulos son de igual longitud caso 3: LAL: dos lados y el ángulo entre ellos correspondientes de los triángulos son de igual longitud y amplitud respectivamente.

E9: en la LLL es el segundo caso en la ALA es el tercer caso en la LAL es la del primer caso

E10: Se cumplen todos los criterios

E11: los criterios son de congruencia

E12 y E13:

CASO 1: ALA: dos ángulos y el lado entre ellos correspondientes de los triángulos son de igual amplitud y longitud respectivamente.

CASO 2: LLL: los tres lados correspondientes de los triángulos son de igual longitud

CASO 3: LAL: dos lados y el ángulo entre ellos correspondientes de los triángulos son de igual longitud y amplitud respectivamente.

E14 y E15: los que cumplen este criterio son caso 3 ALA y caso 1 LAL

En esta pregunta, todas las respuestas no se dieron de forma satisfactoria, pues la mayoría se respondieron de forma inconclusa.

En esta pregunta, se esperaba que los estudiantes reflexionaran sobre los criterios de congruencia triangular dados y el ejercicio experimentado.

En esta pregunta se evidencia un 47% de acierto en respuestas:

**Figure 14** Respuestas 2-3

### ACTIVIDAD 3

Esta actividad, se llevó a cabo de forma satisfactoria considerando que las dudas y dificultades que se tenían por parte de los estudiantes en un menor porcentaje que en la actividad 2.

#### Grabaciones de video

Grabación 11, el estudiante 10, no comprende la pregunta 1 de la actividad 3, se orienta a que haga un uso más pausado de los deslizadores con el objetivo de que observe la superposición de los triángulos, se le recuerda a el estudiante el concepto de rotación que hizo parte de la inducción, y se invita a cuestionarse ¿qué sucede con los triángulos? ¿Cómo son esos triángulos? ¿Por qué encajaran?, a partir de estas preguntas la estudiante dice que cree que tienen la misma medida y el mismo tamaño, en lo que se concluye en lo importante que es interrogar a través de las dudas.

Grabación 11, el estudiante 11, se encuentra comparando los triángulos rotados, y establece que esos dos triángulos son iguales, luego se invita a que mueva el vértice E del triángulo inscrito DEF, y se ubique en el punto H (punto medio del segmento AC), el estudiante

realiza esa acción y al mover el deslizador en un primer momento argumenta que no miden lo mismo, pero al momento de realizar un movimiento más detallado, deduce que si miden lo mismo, al final concluye que todos los triángulos miden lo mismo, lo cual se invita que responda las preguntas de la tercera actividad.

Grabación 12, El estudiante 12 explica cómo resuelve la actividad 3, designa los triángulos como configuraciones, argumenta que los triángulos tienen la misma forma y el mismo tamaño, y muestra como ejemplo la designación de los grados de la pregunta 2, al momento en que ubica el vértice E del triángulo inscrito DEF, en el punto H (punto medio del segmento AC), se le pregunta del número de congruencias y el estudiante responde que hay 4 congruencias y explica por qué son congruentes, realiza un uso debido de los deslizadores y establece las conjeturas esperadas lo que nos lleva a considerar que el diseño de la tercera actividad contiene las pautas necesarias para establecer la congruencia entre dos o más triángulos, además que se realiza un uso acertado al poder movilizar el triángulo inscrito DEF.

### **Respuestas textuales**

*Sean los triángulos ABC y DEF donde H es un punto medio Observa el triángulo ABC y responde cada pregunta.*

4. *¿Qué detallas en relación a la configuración inicial?*

E1: Que son de la misma medida

E2: que los triángulos son congruentes, ya que al moverlos de su configuración inicial se sigue manteniendo la figura

E3: un triángulo normal y 3 triángulos de diferente forma

E4: los triángulos encajan perfectamente



E5: ya con los triángulos así todos quedan perfectos

E6: todos son iguales

E7: todos son iguales

E8: son iguales

E9: que las figuras tienen distinta figura a la que ahora tienen la misma figura

E10: Todos son iguales

E11: todos son iguales

E12 y E13: que se forman 3 triángulos iguales en la configuración inicial

E14 Ye15: Que tienen muchos lados y ángulos

En esta pregunta, se observa un acierto del 66.66%, en la que la mayoría de los estudiantes daban respuestas afirmando que teniendo en cuenta la observación realizada los triángulos encajaban entre sí, que eran congruentes, que eran iguales, realizando conjeturas que de entrada podían mostrar la comprensión de los estudiantes hacia el concepto de congruencia triangular tenido en la aplicación de estas actividades.

**Figure 15** Respuestas 3-1

5. *¿Qué sucede al mover los deslizadores? Tenga en cuenta los siguientes grados:*

- Alfa:  $0^\circ$  - Beta:  $0^\circ$ ,  $360^\circ$  - Alfa en  $60^\circ$  y beta en  $300^\circ$  al mismo tiempo *¿Cómo son los triángulos que se superponen?*

E1: R/: Mantienen su figura

E2: al poner Alfa 0 grados y Beta en 0 o 360 grados vuelven a su forma original, y al poner Alfa en 60 grados y Beta en 300 grados se juntan los dos triángulos para formar un solo triángulo

E3: mantienen la figura

E4: el azul y el verde

E5: al poner la figura todos los triángulos encajan

E6: al poner estas configuraciones todos los triángulos se unen y queda uno solo

E7: todos coinciden

E8: todos coinciden.

E9: Grandes

E10: Todos coinciden

E11: se forma un solo triangulo cuando se unen el alfa en 60 grados y el beta a 300 grados al mismo tiempo

E12 y E13: todos coinciden

E14 y E15: son iguales y por eso se unen

Esta pregunta, tuvo pocos errores, la mayoría de los estudiantes contestaron asertivamente, pues ya se había trabajado un poco la superposición de triángulos congruentes en la actividad 1.

El índice de acierto fue del 87%, se observaron en esta actividad dificultades con el manejo del software, en la parte del deslizador, pues este se debía utilizar en toda su amplitud teniendo en cuenta los ángulos indicados para lograr la realización de forma satisfactoria. Este problema se observó en algunos estudiantes, pero se logró llevar de forma satisfactoria realizando el manejo de software pedido en el diseño.

**Figure 16** Respuestas 3-2



6. *Si ponemos el punto E en la misma ubicación del punto H y movemos los deslizadores ¿cómo observas que son los triángulos verde y azul respecto a los demás?*

E1: R/: son iguales

E2: los triángulos se juntan entre si formando una sola figura al mover los deslizadores cualesquiera de todos los triángulos que hay

E3: el verde gira hacia la izquierda y queda abajo y el azul gira hacia la derecha y queda encima del triángulo blanco

E4: pues se quedan con la misma medida

E5: se sobreponen unos de otros

E6: todos son iguales

E7: son iguales

E8: son el reflejo de los demás triángulos

E9: son iguales

E10: Todos son congruentes al ubicarlos unos sobre otros

E11: los triángulos tienen la misma medida poniendo el punto e en el punto h

E12 y E13: todos son iguales

E14 y E15: porque tienen los mismos ángulos y lados iguales

En esta pregunta, los estudiantes debían realizar un mantenimiento del arrastre para observar que propiedad se cumplía, gracias a un buen manejo del software, los estudiantes, llegaron en la

totalidad 100% a unas respuestas y conjeturas correctas, en las que se evidenciaba comprensión del concepto de congruencia triangular.

**Figure 17** Respuestas 3-3



#### 4.3. La influencia del arrastre en el diseño de tareas

Según Baccaglini-Frank, A. y Mariotti, MA (2010), el uso del modo de arrastre ha sido ampliamente tratado en la literatura anterior, tanto a través de la observación de los comportamientos espontáneos de los estudiantes (por ejemplo, Olivero 2002;.Arzarello et al 2002)y la enseñanza de experimentos dirigidos a la introducción de arrastre (Gousseau -Coutat 2006;Restrepo 2008;Baccaglini-Frank y otros,2009). (Pág. 223)

El modo de arrastre se convierte en una herramienta esencial en la solución de problemas abiertos, debido a que ofrece posibilidades de exploración entre el solucionador y el software dinámico, además, el arrastre resalta la importancia del movimiento, esta acción afecta la forma de observar la imagen en la pantalla, teniendo en cuenta lo anterior se concibe el “arrastre” como un factor determinante para establecer conjeturas.

Basándonos en la literatura se consideran cuatro modalidades de arrastre que pueden ser útiles para la realización de tareas en un software dinámico:

- Arrastre errante: dentro de esta modalidad, al arrastrar un punto base se podría observar aquellas regularidades de una manera aleatoria, simplemente utilizando el arrastre como medio para descubrir diversas figuras, elementos de las figura y alteraciones de las mismas.
- Mantener arrastrando: es un arrastre que se utiliza para observar aquella alteración o conservación de cierta propiedad, en este caso se considera un arrastre con una intención ya establecido, teniendo una propiedad particular intentar establecerla como invariante a través del arrastre sostenido.
- Arrastrar con trazo activado: en esta modalidad se cuenta con la unión de “arrastrar” y de “trazar”, esta combinación aporta una nueva estrategia en el proceso de generar conjeturas.
- Prueba de arrastre: al momento de construir una figura se puede someter a una “prueba de arrastre”, ya que se concibe como una herramienta que permite verificar si hubo una construcción correcta, si hay una conservación de ciertos elementos de la construcción y de las propiedades, se considera este proceso de validez como una forma de establecer conjeturas.

En su mayoría los estudiantes utilizaron un arrastre, que se puede vincular a la modalidad tipo 2, debido a que mueven un punto para buscar cierta regularidad, propiedad de la figura geométrica o sencillamente para intentar responder las preguntas de las actividades las cuales, el arrastre está sesgado a deslizadores con cantidades angulares de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  y de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ .

#### **4.3.1. Conclusiones locales**

El conseguir un buen manejo del software por parte de los estudiantes, posibilita que ellos puedan comprender el concepto estudiado y sus propiedades al enfrentarse a un diseño de tareas en un entorno de geometría dinámica.

El arrastre permite que los estudiantes puedan observar de forma detallada si las propiedades de los objetos se mantienen. El uso de este, permite la generación de conjeturas que evidencian el desarrollo del pensamiento matemático construido por el estudiante cuando este se enfrenta a un diseño intencionado.

El diseño de tareas es importante y necesario para la enseñanza de conceptos geométricos, para trabajar en el desarrollo del pensamiento espacial de los estudiantes, pues al realizarse un buen trabajo intencionado, se puede tener como respuesta una aprehensión de conceptos y logro de objetivos planteados.

## CONCLUSIONES

Partiendo del objetivo general de la investigación que busca caracterizar un diseño de tarea para la enseñanza del concepto de congruencia triangular con la mediación instrumental de Geogebra para estudiantes de grado 7° en una institución oficial de Roldanillo- Valle se hace una relación entre los propósitos y hallazgos que enmarcan el camino hacia este objetivo, obteniéndose lo siguiente:

OBJETIVO ESPECIFICO 1: Identificar elementos teóricos requeridos para la creación de una caracterización de un diseño de tareas de congruencia triangular que integre la mediación instrumental de Geogebra.

La identificación de elementos teóricos para realizar una caracterización de diseño de tareas sobre congruencia triangular, evidenció la importancia de tener un marco en el que se enlacen y complementen diferentes teorías que permitan obtener un buen diseño.

Esta propuesta de investigación apostó por la integración de la mediación instrumental de Geogebra, por lo que identificar un marco teórico acorde era necesario. Por lo que se optó por tener en cuenta además de la nombrada a la geometría dinámica, el diseño de tareas y el objeto matemático a tratar, congruencia triangular.

Se identificaron los elementos teóricos, reconociendo el aporte positivo a las nuevas metodologías de enseñanza de la geometría en uso de la tecnología digital, adaptándose y dando una mirada al mundo actual donde se interactúa constantemente con medios tecnológicos, convirtiéndose en una necesidad del momento.



El diseño de tareas permite considerar aspectos materiales como: saber preguntar, el tecnicismo en las preguntas, el boceto construido (figuras, colores y movimiento), son esenciales para la construcción de un diseño de tareas, por otro lado, una DGE es un entorno ideal que nos permite considerar las herramientas y posibilidades del software como la visualización activa y el arrastre.

Tanto el diseño de tareas como una DGE en conjunto permiten establecer una conexión entre los aspectos materiales de la tarea, la cual permite guiar las acciones de los estudiantes, y el proceso de exploración, donde el estudiante cuenta con nuevas estrategias de verificación, predicción y conjeturación.

Por lo tanto, el uso de la tecnología digital en el diseño de tareas posibilita un entorno interactivo que contó con el potencial y las herramientas necesarias para establecer concepciones acertadas acerca del concepto de congruencia triangular utilizando una técnica diferente a lápiz y papel.

**OBJETIVO ESPECIFICO 2:** Desarrollar habilidades en el uso de las herramientas tecnológicas tipo vista gráfica 2D y 3D para la resolución de problemas de congruencia triangular.

La realización de este diseño de tareas en relación de la tecnología digital, promueve que se desarrollen habilidades en geometría y tecnología, ya que se conocen y se promueve la realización de actividades en un entorno digital, siendo más acercado y familiarizado al ambiente en que se encuentran los estudiantes en la actualidad. Pues, la comunicación y diferentes procesos sociales y cotidianos se realizan por medio de la tecnología.

Además, cuando se utiliza la tecnología digital para la enseñanza de las matemáticas, se potencia a que el estudiante pueda conocer el objeto matemático a tratar desde otros ámbitos diferentes al lápiz y papel, pues su percepción será distinta al poder modelar los objetos matemáticos.

Cuando se trabaja en un ambiente de resolución de problemas, se sitúa al alumno para que este sea capaz de enfrentarse a un problema de forma autónoma, desarrollando actitudes, destrezas y habilidades, dotándose de significatividad para su vida diaria. Por lo cual, se puede decir que se prepara a los alumnos para el futuro al incitarlo a generar habilidades para identificar, analizar y resolver problemas en situaciones reales, potenciando el razonamiento, la creatividad, el pensamiento crítico y la lógica.

El arrastre intencionado es una acción que afecta la manera en como se observa la imagen en la pantalla, el arrastre además de brindar oportunidades de exploración, contribuyó positivamente guiando y apoyando la secuencia de problemas abiertos, además, el movimiento de las figuras a través de los deslizadores (sesgados con cantidades angulares), permitió que los estudiantes establecieran relaciones entre las partes de las figuras geométricas, lo cual fue un acercamiento contundente al concepto de congruencia, observando la conservación del tamaño y la forma.

**OBJETIVO ESPECIFICO 3:** Identificar dificultades, errores y aciertos obtenidos en la experimentación del diseño de tareas en un ambiente de geometría dinámica.

La identificación de dificultades, errores y aciertos en la implementación de un experimento de enseñanza, permite realizar mejoras, ajustes al diseño e identificar aspectos positivos que se deben de mantener o potenciar en una próxima implementación.

Además, es importante identificarlos en relación al ambiente de geometría dinámica, para encontrar cuales son los beneficios y desventajas que tiene al referenciar un trabajo con tecnología digital. Considerando que se diseñan actividades en las que el movimiento y el arrastre son parte integral para dar cuenta de un acierto y aprehensión conceptual.

Las intervenciones del docente permitieron reducir las dificultades presentadas por parte del estudiante en cuanto al manejo de los deslizadores e interpretación de las preguntas.

Entre los aciertos destacados encontramos:

- Las intervenciones del docente permitieron reducir las dificultades presentadas por parte del estudiante en cuanto al manejo de los deslizadores e interpretación de las preguntas.
- Por otro lado, contar con una inducción y una guía de apoyo permitió que los estudiantes tuvieran un acercamiento con el software geogebra con el concepto de congruencia en el transcurso de la implementación con el fin de reducir las dificultades.
- El uso de preguntas abiertas permitió que los estudiantes pudieran llegar a conjeturas que vinculan el tamaño y la forma, reconociendo el objeto matemático y las correspondencias enlazadas.
- También, se observó que, al movilizar las partes constitutivas de las figuras, los estudiantes pudieron reconocer las correspondencias de congruencia triangular.
- A medida que los estudiantes se familiarizaron con el software, se evidenciaron en los datos recogidos la disminución de errores en cuanto al tecnicismo de las preguntas.
- Se observó que, en la tercera parte, la mayoría de los estudiantes, pudieron reconocer las correspondencias en uso de la superposición de triángulos.

- Además, se destaca que brindar guía y apoyo para evitar dificultades con el manejo del software, ya que, si este no se tenía, lo más probable era que no se cumpliera la meta de aprendizaje.

Entre las dificultades destacados encontramos:

- El uso erróneo del deslizador, ocasiona que no se pueda observar un amplio movimiento de la figura, lo que impedía cumplir con las conjeturas propuestas.
- También, el mover el deslizador de una forma rápida, impedía que los estudiantes lograran evidenciar las propiedades del objeto matemático.

Entre los errores destacados encontramos:

- Un alto grado de tecnicismo para los estudiantes impide la correcta comprensión de los enunciados empleados en las actividades propuestas.

### Referencias bibliográficas

- Acosta, M., & Fiallo, J. (2017). Enseñando geometría con tecnología digital. Una propuesta desde la Teoría de las situaciones Didácticas. Énfasis. Bogotá DC.
- Aray, C.A., Párraga, O., y Chun, R. (2019). La falta de enseñanza de la geometría en el nivel medio y su repercusión en el nivel universitario: análisis del proceso de nivelación de la Universidad Técnica de Manabí. Rehuso, 4(2), 20 - 31. Recuperado de: <https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Rehuso/article/view/1622>
- Araya, R. G. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática.
- Avecilla, F. B., Cárdenas, O. B., Barahona, B. V., & Ponce, B. H. (2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. Revista Tecnológica-ESPOL, 28(5).
- Baccaglini-Frank, A. y Mariotti, MA (2010). Generación de conjeturas en geometría dinámica: el modelo de arrastre de mantenimiento. Revista Internacional de Computadoras para el Aprendizaje Matemático , 15 (3), 225-253.
- Cardona, S., Rave, J. C., & Muñoz, J. M. (2012). La geometría en el aula: una propuesta para la interpretación de conceptos e ideas matemáticas y físicas.
- Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2017). Conducting design studies to investigate and support mathematics students' and teachers' learning. Compendium for research in mathematics education, 208-233.

- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processing. En R. Sutherland y J. Mason (Eds), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142-157). Berlín: Springer.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales*. Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo, (1ª ed.). Cali. Colombia: Artes Gráficas Univalle.
- Leung, A., & Baccaglini-Frank, A. (Eds.). (2016). *Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks: Potential and Pitfalls* (Vol. 8). Springer.
- Duval, R. (1998a). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. (pp. 37-51). Dordrecht. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1998b). *Approche Cognitive des Problèmes de géométrie en termes de congruence*. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 57-74.
- González-López, M. J. (2001). La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de geometría dinámica. *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Universidad de Granada, 277-290.
- Hemmerling, E. M. (1981). *Geometría elemental*. Limusa.
- Hoyle, C., & Noss, R. (2009). The technological mediation of mathematics and its learning. *Human Development*, 52, 129–147.
- Hoyos, Diego Luis (2014). *Geometría Fundamental*. 28-33.

- Lemonidis, C. (1991). Analyses et réalisation d'une expérience d'enseignement de homothétie. En *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2-3), 295-324.
- Leung, A., & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: The role of tools. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education: The 22nd ICMI study*. New ICMI study series (pp. 191–225). New York: Springer
- Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 43, 325–336.
- Leung, A., & Baccaglini-Frank, A. (Eds.). (2016). *Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks: Potential and Pitfalls* (Vol. 8). Springer.
- Leung, A. y Bolite-Frant, J. (2015). Diseñar tareas matemáticas: el papel de las herramientas. En *Diseño de tareas en la educación matemática* (págs. 191-225). Springer, Cham.
- Marmolejo, G. (2005). Análisis del Tópico de Geometría y Medición. En *Pruebas Censales y Formación de Pensamiento Matemático en la escuela*. Universidad del Valle. Cali. Colombia, 27-44
- Marmolejo, G. (2007). Algunos Tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras. Procesos de visualización y factores de visibilidad. Tesis de magister no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Marmolejo Avenia, G. A., & Vega Restrepo, M. B. (2012). La visualización en las figuras geométricas: Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación matemática*, 24(3), 7-32.

- Marmolejo, G.A. y González, M.T. (2014). Control Visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. En prensa.
- Martínez Becerra, M. M. (2018). Desarrollo de razonamiento matemático, a través de un ambiente de aprendizaje mediado por TIC.
- MEN (2006). Estándares básicos de competencias matemáticas.
- Moreno, L. (2001). Cognición, mediación y tecnología. *Avances y Perspectivas*, 20, 65-68.
- Moreno, L. (2016). La vida simbólica y el aprendizaje.
- Norma APA. 7 edición.
- Pabón-Gómez, J. A. (2014). Las TICs y la lúdica como herramientas facilitadoras en el aprendizaje de la matemática. *ECOMATEMATICO*, 5(1), 37-48.
- Padilla, V (1992). L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des Mathematiques. Thèse U. L. P. Strasbourg, Francia.
- RICH, B., & ARIZA PRADA, V. I. C. T. O. R. TEORIA Y PROBLEMAS DE GEOMETRÍA PLANA CON GEOMETRÍA DE COORDENADAS/BERNETT RICH, VICTOR ARIZA PRADA, TR (No. 516.2207 R534T.).
- Santos Trigo, M., & Benítez Mojica, D. (2003). Herramientas tecnológicas en el desarrollo de sistemas de representación para la resolución de problemas. *Perfiles educativos*, 25(100), 23-41.
- Trigo, M. S. (2019, April). La Resolución de Problemas Matemáticos: Conectando el trabajo de Polya con el desarrollo del razonamiento digital. In XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática



- Venturini, M. y Sinclair, N. (2017). Diseño de tareas de evaluación en un entorno de geometría dinámica. En *Tecnologías digitales en el diseño de tareas de educación matemática* (págs. 77-98). Springer, Cham.
- Villani, V. (1998). Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century (Discussion Document for an ICMI Study). En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 337-346.
- Villella, J. (2008). Uno, dos, tres... geometría otra vez: de la intuición al conocimiento formal en la enseñanza primaria. Aique.
- Watson, A. & Ohtani, M. (Eds.) (2015). *Task design in mathematics education: The 22nd ICMI study* (New ICMI study series). New York: Springer.
- Zuluaga, A. M., & Buitrago, J. O. (2014). *Dificultades en el diseño de tareas con modelización*.

## ANEXOS

### ANEXO 1

	Dificultades	Errores	Aciertos
Diseño de Tareas	V8, 00:00 – 07:40	V6, 00:00 – 01:20	V12, 00:00 - 02:00 V8, 08:00 – 08:36
Manejo del software	V6, 01:40 – 02:50 V7, 03:00 – 05:00	V7. 05:00 – 06:00	V12, 00:00 – 02:00 V7, 00:00 – 03:00 V8, 00:00 – 05:00 V8, 08:00 – 08:36
Mediación instrumental			V6, 00:00 – 01:20 V11, 00:00 – 01:58 V11, 02:00 – 04:00 V7, 00:00 – 03:00 V7, 03:00 – 05:00