EL LABORATORIO DE MATEMÁTICA COMO UNA ESTRATEGIA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS ESTRUCTURAS MULTIPLICATIVAS DE TIPO ISOMORFISMO DE MEDIDAS, EN GRADO 5°, A PARTIR DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Leidy Julieth Mosquera Canga

Niurkis Daniela Paredes Hurtado

Universidad Del Valle

Instituto De Educación Y Pedagogía

Área De Educación Matemática

Buenaventura

2021

EL LABORATORIO DE MATEMÁTICA: UNA ESTRATEGIA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS ESTRUCTURAS MULTIPLICATIVAS DE TIPO ISOMORFISMO DE MEDIDAS, EN GRADO 5°, A PARTIR DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Leidy Julieth Mosquera Canga

1452553

Niurkis Daniela Paredes Hurtado

1452610

Trabajo de Grado Presentado para Optar al Título de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

DIRECTOR:

M.g. Daniel Stiven Gil

Universidad Del Valle

Instituto De Educación Y Pedagogía

Área De Educación Matemática

Buenaventura

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Programa Académico Lic. En. Educ. Básica. Énf. Matemáticas

Fecha

Día	Mes	Año
17	8	2021

Código del programa: 3469 Resolución del programa: ________

Titulo del Trabajo o Proyecto de Grado

El Laboratorio de Matematias como una estrategia para el aprendizaje de las estructuras multiplicativas de tipo Isoforfismo de medidas, en el grado 5°.a partir de la resolucion de problemas

Se trata de:

Proyecto Informe Final X

Director

Daniel Stiven Gil Grueso

Nombre del Primer Evaluador

Jennifer Salgado

Nombre del Segundo Evaluador

Jhon Jair Angulo Valencia

Estudiantes

Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Télefonos de contacto
Leydi Julieth Mosquera Canga	1452553	3469	leidyjucanga@gmail.com	3173812970
Niurkis Daniela Paredes Hurtado	1452610	3469	niurkis.paredes@correounivalle.edu.co	3206467029
		3469		

Evaluación

Aprobado X Meritorio Laureado

Aprobado con recomendaciones No Aprobado Incompleto

En el caso de ser ***Aprobado con recomendaciones*** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de ________ (máximo un mes)* ***ante:***

Director del Trabajo o Proyecto de Grado Primer Evaluador Segundo Evaluador

En el caso de que el Informe Final se considere ***Incompleto*** *(diligenciar la página siguiente),se da un plazo máximo de ________ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el:* dd mm aa

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la ***razón del desacuerdo*** *y las* ***alternativas*** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firmas

Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Jhon Jair Angulo V. Segundo Evaluador

DEDICATORIA

Leidy Julieth Mosquera Canga

Para mi hijo Leymar Jael Mosquera Canga y

mi abuela María Aida Hurtado Granja

Niurkis Daniela Paredes Hurtado

Lucero Steicy Guzman Paredes

Rosa Helena Hurtado Mosquera

Jairo Paredes

AGRADECIMIENTO

Leidy Julieth Mosquera Canga

Agradezco primeramente a Dios, por protegerme, darme la fortaleza y la sabiduría, en el transcurso de mi carrera, a mis padres Osmar Mosquera Hurtado y Celia Astrid Canga Mina por incentivarme a seguir adelante y apoyarme incondicionalmente en todo momento, a mi abuela Rosalía Mina Caicedo por apoyarme y aconsejarme, a mi hijo y hermana por ser quienes me motivan a crecer y a superarme, a mi director Daniel Estiven Gil, por su compromiso y dedicación para construir esta meta, a mis profesores por contribuir en mi proceso de formación con su entrega y compromiso, a mis compañeros por todas las vivencias y alegrías, y a mis familiares y amigos, que desierta manera me ayudaron a construir este sueño.

De igual manera, agradezco de manera especial, a mi abuela María Aida Hurtado Granja, que en paz descanse, partió de este mundo, pero antes de irse me enseñó a luchar por mis sueños, me motivo y me apoyo para ser una mejor persona cada día.

Niurkis Daniela Paredes Hurtado

Primeramente, darle gracias a Dios, por permitirme llegar a este logro después de algunas adversidades, tropiezos, dichas, alegrías, tristezas y nuevos comienzos.

A mi hija Lucero Steicy Guzman paredes, por sé el motor y la inspiración para impulsarme a salir cada día adelante.

A mis padres y demás familiares que de una u otra forma contribuyeron para cumplir este objetivo. En especial a mi madre Rosa Elena hurtado Mosquera, a mi padre Jairo Paredes y a mi hermana Jurani Susana Moreno Hurtado, por su apoyo incondicional.

A todos los profesores que contribuyeron en mi proceso de formación, a mis compañeros con quienes compartir muchos momentos especiales. A nuestro tutor y evaluadores por la orientación para llevar a cabo este proyecto.

Finalmente a mi compañera Leidy Julieth Mosquera Canga por su ayuda incondicional para sacar a flote este el nuevo logro.

A todos muchas gracias

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas
Área de Servicios al Público
Servicios Especiales

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL DE ACUERDO A LA POLITICA DE PROPIEDAD INTELECTUAL DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE

LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo [X] No autorizo [ ]

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo [X] No autorizo [ ]

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: El Laboratorio de matemáticas como una estrategia para el aprendizaje de las estructuras multiplicativas de tipo isomorfismo de medidas en el grado 5to a partir de la resolución de problemas.

Autores:

Nombre: Leidy Juliet Mosquera Canga — Firma: Leidy Mosquera — C.C. 1111811786

Nombre: Niurkis Daniela Paredes H. — Firma: Niurkis Paredes — C.C. 1111755552

Fecha: 21/sep/2021

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

(Si desea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdfcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)

F-01-04-05
V-02-2012

Elaborado por Grupo de Trabajo Sistema Documental
División de Bibliotecas

RESUMEN

El presente trabajo de indagación de orden cualitativo abordo algunas de las características que se presentan en los procesos de solución de los estudiantes utilizando el laboratorio de matemática, como una estrategia de aprendizaje. Para ello, se tomó como referente a Tobón (2018) el cual, propone ambientes de aula que contribuyen y fortalecen procesos de formación, así, el objetivo principal de esta indagación, fue caracterizar los procesos de resolución de problemas del tipo isomorfismo de medidas que se presentan en los estudiantes cuando hacen uso de fichas del laboratorio de matemáticas. Llevándose a cabo en la Institución Educativa República de Venezuela suscrita en el sector público del municipio de Buenaventura, con los estudiantes de grado quinto (5°). Lo que implico, que los estudiantes tuvieran una relación directa, entre los materiales manipulativos, el contexto y el saber, de manera que el profesor fue un mediador y el estudiante se convirtió en el centro del proceso de formación.

En el desarrollo de la indagación, se utilizó una metodología cualitativa basada en la adaptación de la ID y la IBD, realizándose varias sesiones en las que se implementaron fichas con juegos aritméticos en los cuales, los estudiantes de manera individual debían leer las instrucciones y resolver unas situaciones, para luego dar paso a la aplicación de los juegos por equipos. Las fichas se diseñaron con el fin de identificar las características que se presentan en los procesos de resolución de problemas de los estudiantes, cuando se abordan contextos y metodologías de clases, diferentes a las tradicionales y analizar por medio de teorías, como la de Vergnaud (1991,2004), dichos procesos. Encontrando así, que en los problemas de tipo multiplicativo se les facilita hacer uso del algoritmo de la multiplicación y de la adición iterada, presentan dificultades para encontrar el valor unitario y recurren a variadas estrategias, para hallar la solución.

Palabras claves: Laboratorio de matemáticas, resolución de problemas, isomorfismo de medidas, estructuras multiplicativas.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIÓN

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de indagación se inscribe en la Línea de formación de Didáctica de las Matemáticas del Programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle, en este se implementaron fichas con juegos aritméticos con la intención de abordar las estructuras multiplicativas del tipo isomorfismo de medidas, a través de la resolución de problemas, bajo la estrategia del Laboratorio de Matemática, usando materiales de forma distinta a las clases tradicionales.

En el mismo orden de ideas, es importante destacar, las siguientes investigaciones de: Vergnaud (1990-2004), Castro (2001), Ríos (2010), Cerritos (2012); las cuales mencionan que, en la enseñanza de la multiplicación, lo que comúnmente se observa es que este concepto, se reduce únicamente a la operación, la mecanización de las tablas de multiplicar y la aplicación de variados ejercicios, dejando de lado las situaciones problemas, que cotidianamente viven los estudiantes.

Así, con la intención de que la multiplicación se pueda ver desde otra postura, en esta indagación se muestra la multiplicación como una relación cuaternaria desde la teoría de Vergnaud (2004). Por ende, se trabajó con una metodología cualitativa, a través de una propuesta pedagógica, en la cual, el escenario que se plantea es el Laboratorio de Matemática, en este, se da otro rumbo a los procesos educativos además se da la posibilidad que los estudiantes sean protagonistas de su proceso de aprendizaje este enfoque permite que los participantes aborden desde situaciones problemas y se deje de lado la mecanización que tradicionalmente se llevan a cabo dentro de la mayoría de las instituciones del mismo modo, se pretendió brindar a los estudiantes de la Institución Educativa República de Venezuela, del grado quinto, en cada sección, ambientes de aula lúdicos, dinámicos y participativos.

Cabe señalar, que la estructura del laboratorio de matemáticas permite a los estudiantes experimentar con las matemáticas por medio de las fichas, buscando que sean partícipes de la construcción de su aprendizaje descubriendo sentido y atractivo a lo que realizan. Por lo tanto, el desarrollo de este trabajo se llevó a cabo en cinco capítulos distribuidos de la siguiente forma, en el primero se dan a conocer todos los elementos previos al trabajo de indagación entre los que se incluyen: el planteamiento del problema, en el cual, se formula la pregunta que orienta esta indagación. El marco contextual: aquí se expone el lugar y los participantes. Los objetivos: lo que se quería realizar y la justificación en la cual se manifiesta la relevancia del trabajo.

En el segundo capítulo se presentan los antecedentes y el marco conceptual que exterioriza elementos desde diferentes perspectivas, enfocadas en las estructuras multiplicativas, a partir de la resolución de problemas temática principal de este trabajo. El tercer apartado se expone la metodología y las fases en que se desarrolló esta indagación para la puesta en acto de las fichas, sus participantes, el material que se utilizó para la creación de los juegos y el desarrollo de las fichas y la rejilla de análisis en las que se presentan las estrategias, fortalezas y dificultades identificadas en los estudiantes, esta fue el instrumento utilizado para el análisis de las fichas.

En el cuarto capítulo se dan a conocer los análisis de las dos fichas de juego, finalmente, en el capítulo cinco se plasman las conclusiones y las recomendaciones a las que se llegó después de la implementación, en relación a la documentación y proceso de diseño, la selección de datos para el análisis y la caracterización del Laboratorio de Matemática como estrategia de aprendizaje.

CAPÍTULO I.

I. ASPECTOS GENERALES DE LA INDAGACION

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las matemáticas están inmersas en los seres humanos desde hace mucho tiempo, estas han evolucionado conforme pasa el tiempo y siguen en constante cambio, implícita o explícitamente las matemáticas hacen parte del diario vivir y son de gran utilidad para desenvolverse en el mundo, no solo en el ámbito educativo; en el cual se desarrollan pensamientos matemáticos, sino también en el ámbito personal; en el que, el individuo aprende a tomar decisiones, adquiere una postura crítica y reflexiva, descubre capacidades, entre otras características. Al igual que, desde lo social contribuye en las relaciones interpersonales y en el laboral potencializa el desarrollo de habilidades, para volverse una persona competente.

En el mismo orden de ideas, dentro del ámbito educativo constantemente se presentan cambios y dificultades, que se convierten en objetos de investigación, que se enfocan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo: la calidad de la enseñanza, la apatía que presentan los estudiantes, el mejoramiento de los niveles de enseñanza, el fortalecimiento de las competencias, los aprendizajes significativos, la implementación de estrategias didácticas, entre otros enfoques, los cuales surgen con el objetivo de fortalecer los procesos de enseñanza desde las diferentes áreas del conocimiento, como, por ejemplo, las matemáticas compuestas por: la geometría, la estadística, y demás, asignaturas que a la vez están inmersas en los procesos mencionados.

Con la intención de mejorar los procesos de enseñanza, múltiples investigaciones y artículos como las de: Guzmán (1985), Gonzales, Molina & Sánchez (2014), Aristizabal, Colorado y Gutiérrez (2015), se identificó que la mayoría de los estudiantes presentan apatía entorno a las matemáticas, por ende, se afecta el desarrollo de las clases y el rendimiento de los participantes, dado que, suelen ver las matemáticas como rutinarias y aburridas. Por esta razón, investigadores buscan nuevas estrategias para cambiar esta concepción, de igual manera, a medida que pasa el tiempo se presentan diferentes necesidades y obstáculos en los procesos de formación; lo que conlleva a darle mayor sentido y atractivo, implementando nuevas metodologías y modelos de enseñanza, que apuestan por el mejoramiento de estos procesos.

Teniendo en cuenta lo anterior se destaca que se han realizado diferentes investigaciones como las de: Groos (1902), Chateau (1958), Piaget (1966), Guzmán (1989), Cruz (2013), Fernández, Molino, oliveras (2015), Tobón (2018), con el propósito de lograr una mirada diferente a la educación, a su vez, cambiar las perspectivas que se vienen presentando entorno a la enseñanza de las matemáticas, la cual, es considerada estática y rutinaria, así, conseguir mejores resultados en los procesos de enseñanza y aprendizaje que integran la educación matemática.

En este mismo sentido, en el Laboratorio de Educación Matemática, fundación Multitaller de la Universidad del valle, se plantea que:

> El énfasis de Educación Matemática propuesto en el Laboratorio de Matemáticas se encuentra en el aprendizaje activo, donde los participantes al utilizar el material con una metodología de trabajo en particular se convierten en los protagonistas del proceso; ellos tienen la oportunidad de realizar en el marco de un ambiente lúdico y de creatividad, actividades matemáticas en donde sus sentidos e intuiciones juegan un papel fundamental. (Arce y Pabón 2011, p.17).

Con base en el párrafo anterior se entiende que, desde el laboratorio se le puede dar una mirada diferente a los procesos de enseñanza, los cuales, gran parte han tendido a centrarse en la participación principal del profesor, quien presenta e institucionaliza el saber en el aula de clase, dejando de lado la creatividad, el dinamismo y las destrezas que cada uno de los estudiantes puede llegar a desarrollar. Es importante mencionar que una actividad que contribuye con las habilidades anteriormente mencionadas es la resolución de problemas, debido a que esta, les permite tener a los estudiantes la autonomía necesaria para que puedan movilizar sus saberes.

Simultáneamente, se toma como sustento los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998), en el cual, se expresa que la resolución y el planteamiento de problemas son un proceso general, el cual "debe convertirse en el principal eje organizador, del currículo de matemáticas", dado que este fomenta la movilización de los saberes de los estudiantes, enfocándose en un contexto que dota de sentido los procesos que realizan debido a que, los alumnos al desarrollar un problema que esta contextualizado identifican las ventajas que brindan las matemáticas para desenvolverse en la vida cotidiana.

De igual manera, el MEN (2006), considera que la resolución de problemas es un proceso general de la actividad matemática, en los que se desarrollan competencias, entendiéndose esta: "como conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores" (p. 49). Por lo tanto, la resolución de problemas abordándose como competencia se convierte en una importante herramienta para el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje, debido a la integración de habilidades que pueden desarrollar los estudiantes. En esta indagación se presenta la resolución de problemas como competencia.

En relación con lo antes mencionado, la resolución de problemas ha sido investigada por diversos autores, entre los que se destacan: Polya (1969), Santos (1992), Schoenfeld (1992), Carrillo (1995), Santos (2007), Castro (2008), Puig (2008), Pino (2013), Gómez y Guerrero (2013), Blanco, Cárdenas y Caballero (2015) entre otros. Algunos de ellos como Márquez & callejo (2010), Fernández & Llinares (2012), Cerritos (2012), Ivars & Fernández. C (2016), se han centrado en las dificultades y estrategias que se presentan en torno a ella. Carrillo (1995), Castro (2008), Puig (2008), Santos (2007), de Castro, Molina, Gutiérrez y Martínez (2012), se interesaron en la resolución de problemas como contenido en el currículo. También, Se encuentran Pino (2013) y Blanco (2015), preguntándose ¿Qué se entiende por problema en matemáticas?, entre otras perspectivas, que en común consideran que la resolución de problemas debe ser el eje principal de las matemáticas escolares.

Dentro de las investigaciones que se han realizado entorno a la resolución de problemas, se han evidenciado algunas estrategias y dificultades que presentan los estudiantes, cuando intentan resolver determinados problemas, del mismo modo, se menciona que las dificultades son más notorias cuando los problemas involucran multiplicaciones y divisiones. Simultáneamente, Ivars y Fernández (2016), mencionan que los estudiantes en los primeros años de escolaridad, al resolver problemas hacen uso excesivo de la estrategia de modelización y conteo, por otro lado, a medida que transcurren los años los estudiantes comienzan a utilizar el algoritmo, sin embargo la problemática que se presenta en repetidas ocasiones, es que escogen la operación contraria.

De modo que, los autores mencionados en el párrafo anterior realizaron una investigación centrada en los problemas de estructuras multiplicativas, en ella se menciona que los estudiantes utilizan un conjunto de estrategias cuando se enfrentan a este tipo de problemas, sin embargo, presentan dificultades para identificar las operaciones y los procedimientos que los conducen a la solución.

Ahora bien, el Icfes, define la resolución de problemas como una competencia y si esta es una competencia matemática que deben desarrollar los estudiantes, es preocupante ver los resultados de matemáticas en las pruebas saber en la competencia de resolución de problemas, realizadas en Colombia en los años 2016, 2017 y 2018, para el grado 5°. En las cuales, a nivel nacional los desempeños de la mayoría de los estudiantes se encuentran entre aceptable e insuficiente.

Por lo anterior, investigaciones como las de Gonzales, Molina y Sánchez (2014), Aristizabal, Colorado y Gutiérrez (2016), se han centrado en el juego, lo que les permite sugerir que, al transformar los procesos educativos tradicionales, se contribuye a mitigar los resultados desfavorables en las pruebas y del mismo modo se genera mayor motivación e interés en los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Dado que, la mayoría de los estudiantes tienden a tener desinterés por las matemáticas, ven a estas, como; abstractas, estáticas, sin sentido y no las relacionan con su cotidianidad, motivos que en ocasiones genera desidia por aprender.

Por dichos motivos, se busca enfocar esta indagación en el laboratorio de matemáticas, debido a que, se ve este como una estrategia pedagógica que utiliza materiales variados, para el proceso de enseñanza, con el fin de obtener por parte de los estudiantes unos aprendizajes significativos, del mismo modo, les sirva de apoyo para las temáticas abordadas en clases. Ahora bien, es importante exhibir la definición del laboratorio de matemáticas, el cual es considerado como:

> Una estrategia pedagógica de utilización del material, en la que se encuentra un conjunto de actividades matemáticas para ser desarrolladas autónomamente por los participantes a través del uso de variados materiales, proceso que proporciona un ambiente de aprendizaje en el que se genera la relación entre actividad matemática y material manipulativo, relación que contribuye a la construcción y fundamentación de pensamiento matemático. (Arce, 2004, p.2)

En otras palabras, se pretende que al utilizar materiales manipulativos como las fichas con juegos, los participantes establezcan relaciones entre ellos, hecho que ayuda a construir aprendizajes colectivos, a tener fundamentos claros basados en lo aprendido, por medio de una experiencia propia, proceso que probablemente les genere a los estudiantes aprendizajes dotados de sentido, debido a que, ellos son constructores de sus propios procesos y factiblemente al trabajar de una manera distinta se puedan contextualizar situaciones, que lleguen a ser significativas.

Por lo expuesto anteriormente en este planteamiento nace la pregunta:

¿Qué características se presentan en los procesos de resolución de problemas del tipo isomorfismo de medidas en los estudiantes de grado 5° de la I. E República de Venezuela, cuando hacen uso de fichas del laboratorio de matemáticas?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo General

Caracterizar los procesos de resolución de problemas del tipo isomorfismo de medidas que se presentan en los estudiantes de grado 5° de la I. E República de Venezuela, cuando hacen uso de fichas del laboratorio de matemáticas.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Diseñar fichas de laboratorio que movilicen en los estudiantes los procesos de resolución de problemas de las estructuras multiplicativas de tipo isomorfismo de medidas, a partir de juegos aritméticos.
- Identificar las estrategias, fortalezas y dificultades que presentan los estudiantes en los procesos de resolución de las estructuras multiplicativas, al hacer uso de fichas de laboratorio.
- Analizar mediante la teoría de Vergnaud (2004), los resultados de las fichas consignados por los estudiantes y las reacciones entorno a los juegos aritméticos, para generar conclusiones.

1.3 MARCO CONTEXTUAL

Este trabajo se realizó en la Institución Educativa República de Venezuela, ubicada en el municipio de Buenaventura, la cual, está suscrita en el sector oficial, la sede principal está ubicada en la subida del barrio Viento Libre, Cra 11 Cll 2 No 104. Cuenta con tres sedes localizadas de la siguiente manera: Policarpa Salavarrieta, Cra.14 No. 1-07, y San Bartolomé De Las Casas, Cra12 No 1s-36, ambas barrio lleras. Nelson Mandela, barrió el Firme. La modalidad de educación es técnica académica, ofrece los servicios de preescolar, básica primaria, básica secundaria y media. En las jornadas; mañana, tarde, nocturna, y sabatino. El modelo educativo tiene algunas particularidades y se conforma en programas para jóvenes en extra edad y adultos, a saber, educación tradicional y aceleración del aprendizaje.

La presente indagación se llevó a cabo con los estudiantes de grado quinto (5°) jornada diurna, en la sede San Bartolomé de las Casas, situada en el barrio lleras, el nivel socioeconómico de la mayoría de los estudiantes se encuentra entre los extractos uno y dos. Las edades de los estudiantes a los cuales se les proporcionaron las fichas, oscilan entre 9 y 13 años, el salón está conformado por un total de 26 niños de los cuales, 15 son niñas y 11 son niños. Las familias de la gran mayoría de estos niños, se conforman con madres cabeza de hogar, tíos, hermanos mayores y abuelos, es decir, que una gran cantidad de estudiantes viven con familias disfuncionales.

Aunque, las condiciones que los rodean no son las más óptimas, se ansía, que se armonicen este ambiente y por medio de la interacción con las fichas, movilicen sus saberes, generen aprendizajes colaborativos y significativos.

Ilustración 1. Institución Educativa República de Venezuela.
Fuente:
https://www.facebook.com/photo.php?fbid=1151030338316677&set=a.431343206952064.1073741825.100002291655070&type=3&theater

NOTA:
Dado que la sede de la institución donde se realizó la indagación es transitoria, es decir que no se encuentra permanente en un establecimiento, no se cuenta con una fotografía de la sede Bartolomé de las casas como tal.

1.4 JUSTIFICACIÓN

Tomando como referencia los Estándares Básicos de Competencia del Ministerio de Educación Nacional MEN (2006), en el cual, se plantea que un estudiante es matemáticamente competente cuando, “comprende qué se hace y por qué se hace y de las disposiciones y actitudes necesarias para querer hacerlo, sentirse bien haciéndolo y percibir las ocasiones de hacerlo” (p. 50). Los estudiantes en el área de matemática, deben saber lo que hacen y como lo hacen, lo cual, se consigue, a través de la reflexión y comprensión, de la actividad matemática que estén desarrollando.

En otras palabras, los estudiantes al experimentar con actividades matemáticas adquieren habilidades y destrezas que les permiten desenvolverse en cualquier ámbito, de manera significativa, es decir, que encuentra la utilidad y comprenden las situaciones que se les presentan. Del mismo modo, potencializan particularidades como; identificar como llegar a la solución de una situación, las estrategias para resolver un problema, proponer, interpretar situaciones y realizar operaciones.

De manera semejante, el MEN (2006), expresa que los estudiantes en el transcurso de los años de escolaridad pueden desarrollar procesos tales como: "formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, formular y comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos". (p.51). De acuerdo a lo anterior, dicho en otras palabras, los estudiantes al desarrollar estos procesos, logran entender situaciones problemas, hacen razonamientos lógicos y buscan los caminos, estrategias y métodos, para lograr darle posibles soluciones a los ejercicios y situaciones que se les presentan.

Por lo anterior expuesto, es conveniente revisar los resultados en términos de competencia en matemáticas, obtenidos por los estudiantes en las pruebas, a nivel internacional, nacional, departamental y en la localidad de procedencia de la indagación, la cual, es Buenaventura. En los resultados obtenidos en las pruebas del Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos (PISA), en el año 2018, Colombia obtuvo una puntuación de trescientos noventa y un, puntos (391) en matemáticas, vale la pena subrayar que a partir del año 2012, la tendencia de rendimiento en puntos en esta área aumento como se muestra en *la ilustración 2* ; pero, a pesar de ello no es un aumento significativo dado que los estudiantes no alcanza la puntuación media que según la

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), es de cuatrocientos ochenta y nueve puntos (489).

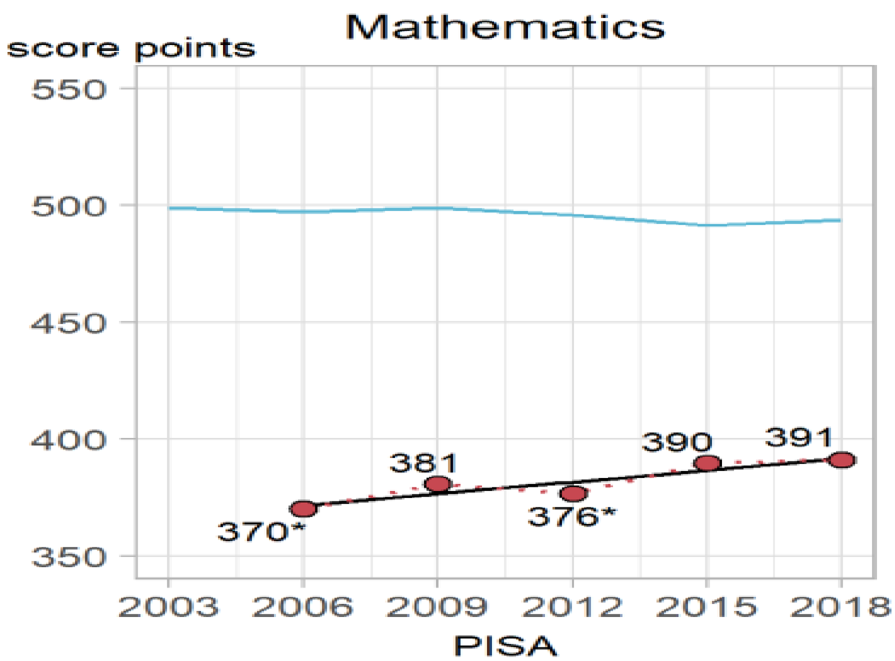


Ilustración 2. Resultados rendimiento en puntajes pruebas PISA en matemáticas (2018).

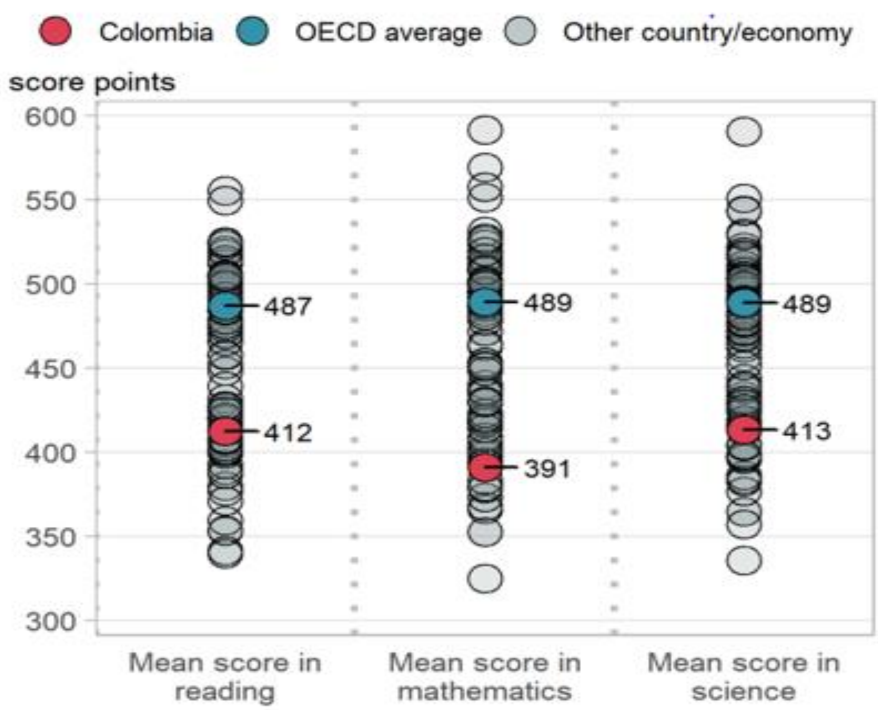


Ilustración 3. Puntaje obtenido en matemáticas de Colombia vs OECD y Other country, PISA (2018).

En la *ilustración 3*, se exponen los puntos obtenidos por los estudiantes en las pruebas, en comparación con otros países Colombia obtuvo la puntuación más baja, al igual, que entorno a las competencias de lectura, matemática y ciencia, en matemáticas se obtuvieron menor cantidad de puntos.

Ahora bien, a nivel nacional y departamental tomando como soporte, los resultados de las pruebas SABER de quinto 5° en el área de matemáticas, realizadas en el año 2016, actualizadas el 25 de agosto del año 2018, se manifestó que la mayoría de los estudiantes en el departamento se encuentran en niveles de desempeño insuficiente y aceptable. A nivel local en la I. E. República de Venezuela se encontró que, al realizar la prueba, esta presentada por seis (6) estudiantes; cuatro (4) de estos, los cuales, corresponden, al sesenta y siete por ciento (67%) su desempeño fue insuficiente; los otros dos (2) estudiantes que corresponde al treinta y siete por ciento (33%) se encontraron en mínimo y ningún estudiante se encontró en nivel satisfactorio o avanzado como muestra la siguiente ilustración.

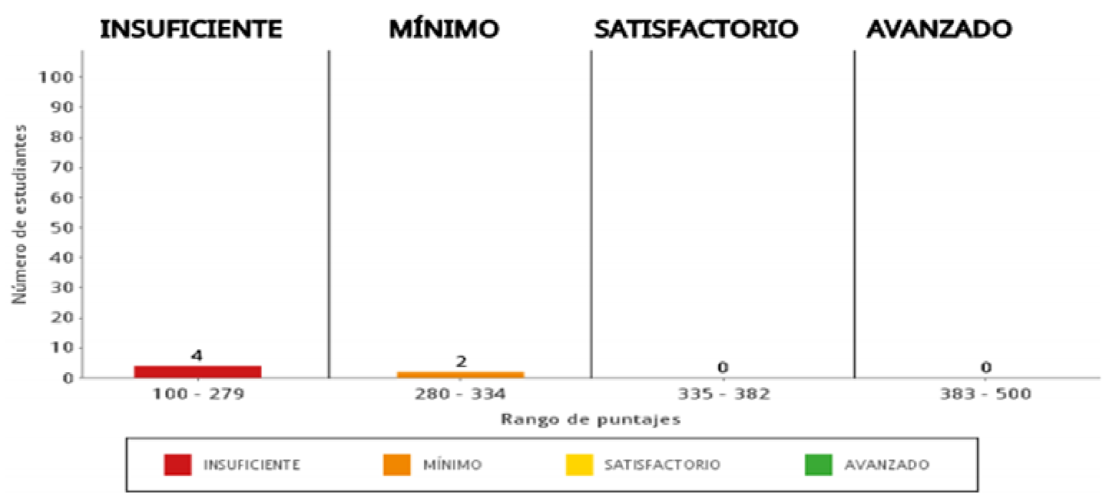


Ilustración 4. Resultados prueba saber 5to (2016).

Cabe aclarar, que solamente presentaron la prueba seis estudiantes de la institución debido a limitaciones económicas para transportarse, otros no asistieron por la situación de violencia que se vive en el barrio, por ende, los padres optaron por no enviar a sus hijos a la institución. Esta información fue suministrada por la docente del curso.

Hecha esta aclaración, se revisaron los resultados del informe por colegios SIEMPRE Día E, de la institución mencionada en los años 2016 y 2017, en los cuales se observaron los resultados obtenidos en las siguientes competencias matemáticas: Comunicación, Representación y Modelación; Razonamiento y Modelación; y Planteamiento y resolución de problema. Cabe señalar que esta indagación se centra en la competencia de planteamiento y Resolución de Problemas. Pero, cuando se hace uso de esta, no se puede dejar de lado las competencias Comunicación y Razonamiento, pese a que, cuando se intenta resolver un problema es necesario primeramente entenderlo, para lograr un razonamiento lógico y darle una posible solución. Ahora bien, de manera general se identifica que el porcentaje de respuestas negativas en los años 2016 y 2017, en cada una de las competencias es alarmante, como muestra la siguiente ilustración.

Competencia	Porcentaje de respuestas incorrectas			
	2014	2015	2016	2017
Comunicación	55.3	62.5	54.5	72.0
Resolución	54.9	76.5	50.3	68.9
Razonamiento	49.7	71.5	59.0	71.1

Ilustración 5. Informe por colegio. Siempre día E. (2018)

De forma particular en la institución, se evidencio que en la competencia Comunicación, Representación y modelación, del año dos mil dieciséis (2016), el setenta y seis por ciento (76%), de los estudiantes, no identifican unidades tanto estandarizadas como no convencionales apropiadas para diferentes mediciones ni establece relación entre ellas; en comparación con el año siguiente esta cifra bajo cuatro punto, siete por ciento (4.7%), es decir, en el año dos mil diecisiete (2017), se obtuvo un porcentaje de setenta y uno punto tres, porciento (71.3%). Pero, a pesar de que disminuyo el porcentaje de respuestas incorrectas sigue siendo preocupante los resultados dado que, supera la mitad de los estudiantes.

En la competencia Razonamiento y modelación, se evidencio que en el año dos mil dieciséis (2016), hubo un cincuenta y tres puntos, nueve por ciento (53.9%), de respuestas incorrectas frente a justificar propiedades y relaciones numéricas usando ejemplos y contraejemplos, porcentaje que aumento en el año dos mil diecisiete (2017), en un doce punto, ocho por ciento (12.8%) es decir, se obtuvo sesenta y seis punto siete, por ciento (66.7%) de respuestas fallidas.

En la competencia de planteamiento y Resolución de Problemas, se identificó que en el aprendizaje resolver y formular problemas multiplicativos de adicción repetida, factor multiplicante, razón y producto cartesiano; se obtuvo un cuarenta y cuatro punto, nueve por ciento (44.9%) de respuestas incorrectas, en el año dos mil dieciséis (2016), en el mismo aprendizaje en el año dos mil diecisiete (2017) se obtuvo un sesenta y cuatro por ciento (64%), de respuestas incorrectas, lo cual, es un aumento que preocupa. En la misma competencia, en el aprendizaje resolver y formular problemas sencillos de proporcionalidad directa e inversa, se encontró con que en el año dos mil dieciséis (2016) se obtuvo un cincuenta y uno punto, tres por ciento (51.3%), de respuestas incorrectas, cantidad que aumento en el siguiente año; en el cual se obtuvo, un setenta y cuatro punto, seis por ciento (74.6%), de respuestas incorrectas.

Por lo anterior expuesto, estas deficiencias que se reflejan en los resultados en las pruebas mencionadas, invitan a detenerse, a pensar y reflexionar sobre los procesos educativos, que se vienen llevando a cabo. Además, con base en estos resultados se debe buscar o implementar una estrategia que mitigue estas deficiencias. Una posible solución es abordar los temas con mayores dificultades desde el laboratorio de matemáticas. hay investigadores como: Cerritos (2012), que consideran que, para lograr el aprendizaje es indispensable que los alumnos se interesen y encuentren significado y funcionalidad en el conocimiento matemático, que lo valoren y hagan de él un instrumento que les ayude a reconocer, plantar y resolver problemas, presentados en diversos contextos de su interés. (p.4).

Dicho en otras palabras, al trabajar desde el laboratorio se le brinda la oportunidad al estudiante de ser partícipe de lo que aprende y le permitirá encontrar el significado de lo que hace, además podrá manipular y tener una interacción con el objeto matemático, en un contexto diferente al tradicional, en el cual, el docente es quien posee y suministra la información.

Por consiguiente, en esta indagación se pretende implementar una propuesta innovadora que permita obtener mejores resultados en lo concerniente a los procesos de resolución de problemas de las estructuras multiplicativas del tipo isomorfismo de medidas y a la vez, generar el interés de los estudiantes por aprender matemáticas.

1.5 ANTECEDENTES

En este capítulo se presentan un conjunto de investigaciones y teorías, las cuales se enfocaron bien sea en los campos conceptuales, las estructuras multiplicativas, la resolución de problemas multiplicativos, el laboratorio de matemáticas y el juego. Estas fueron insumos relevantes para el desarrollo de esta indagación, dado que los enfoques mencionados son campos bastante amplios en la educación matemática, debido a las diferentes perspectivas que surgen entorno a ellos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, de esta manera se concibe una noción de cómo se han ido abordando los enfoques y permite a este trabajo extraer los aspectos más relevantes.

1.5.1 Referentes Internacionales

A nivel internacional, específicamente en México, se realizó una investigación, en la Universidad Nacional Pedagógica, por Rios (2013), en la cual, tienen como objetivo; identificar las dificultades que presentaban los niños en el aprendizaje de los problemas de estructura multiplicativa, específicamente en relación a los diferentes modelos matemáticos. Para ello, se diseñó un programa de intervención psicopedagógico que contempló tanto aspectos matemáticos como cognitivos con el objetivo de verificar la evolución de las ideas matemáticas.

Los resultados de esta investigación, mostraron que los alumnos presentaban mayores dificultades en los problemas de multiplicación y división asociados al modelo matemático cardinal en la idea de combinatoria, pues requerían que los alumnos comprendieran los problemas de tipo multiplicativo o por lo menos su pensamiento estuviera en transición de lo aditivo a lo multiplicativo. Al igual, se evidenció que después de la aplicación del programa de intervención, los alumnos mostraron avances significativos respecto a las ideas abordadas.

En el mismo país se realizó otra investigación, por parte de Cerritos (2012) en la cual, El interés era identificar las dificultades de los estudiantes del segundo ciclo de primaria (8-9 años) al resolver problemas multiplicativos según la estructura propuesta por Vergnaud (1995) en el "Isomorfismo de Medidas".

Como resultados preliminares, Cerritos (2012), descubrió que los niños mostraron modos de resolución de problemas deficientes, debido a que en la propuesta oficial no se tratan problemas relacionados con el "Isomorfismo de medidas", dado que, el docente tiene escaso conocimiento sobre el concepto mencionado, y por consiguiente no lo aplica ni lo relaciona con el aprendizaje de sus alumnos. De igual forma, los niños presentaron dificultades al resolver problemas de la vida cotidiana planteados en el aula. Dado que, durante el desarrollo de la clase con el profesor titular la mayoría siempre preguntaba si el problema, es de suma, resta, multiplicación o división.

Por otro lado, en la Universidad de Almería, en España, se publicó un artículo educativo, elaborado por Bosch (2012), del cual se analizó, en primer lugar, los conceptos de pensamiento matemático y multiplicativo, junto a otras nociones como la de pensamiento relacional o sentido numérico. En segundo lugar, se realizó un breve repaso acerca de lo que se conoce, desde la investigación, sobre el desarrollo del pensamiento matemático y multiplicativo, haciendo especial hincapié en lo referente a las primeras edades.

En dicho artículo se retoma la teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, también toman como referente a Ruesga (2002) quien, concibe la Matemática como la Ciencia de las relaciones. Según esta autora, los métodos de resolución de problemas proponen estrategias cuyo fundamento está basado en el establecimiento y descubrimiento de relaciones. Y, en ocasiones, es posible resolver situaciones problemáticas sin utilizar una representación formal, pero esto nunca es posible sin la determinación fidedigna de las relaciones que expresan las condiciones y los datos.

Uno de las ideas con la cual se cierra el artículo, es que, el interés por el desarrollo del pensamiento multiplicativo en los primeros niveles se debe a que éste resulta crucial para el aprendizaje aritmético posterior, principalmente porque está implícito en el valor posicional de nuestro sistema decimal y porque es una base de otros conocimientos matemáticos importantes, tales como las proporciones o las funciones lineales Nunes (2008) citado por Bosch (2012). Estas investigaciones sirvieron para conocer cuáles eran las dificultades más notorias, presentadas en los estudiantes al trabajar con problemas de tipo multiplicativo y la importancia que tienen estos problemas al ser abordados en edades tempranas.

1.5.2 Referentes Nacionales

A nivel nacional, es decir, en Colombia, también se encuentran investigaciones enfocadas en el estudio de las estructuras multiplicativas, una de estas se realizó, en la universidad del valle, en Cali, por Ospina y Salgado (2016). Nombrada como “La enseñanza de la multiplicación como isomorfismo de medida: aproximación discursiva, en esta investigación se expone; la enseñanza de la multiplicación a estudiantes del grado sexto de una institución educativa rural, en la cual, se propuso el diseño de una trayectoria de aprendizaje que ayude a la comprensión de la multiplicación, como isomorfismo de medida, con base en cuatro capítulos: el primero presenta una contextualización del pensamiento multiplicativo como campo de estudio, el segundo describe los elementos metodológicos, de investigación y caracteriza aspectos fundamentales de los experimentos de enseñanza, el tercero muestra los análisis locales y el cuarto es el análisis final de la investigación.

En dicha investigación se llegó a la conclusión de que algunos estudiantes por medio de sus intercambios discursivos y registros de representación se apropiaron de elementos y características de la multiplicación como isomorfismo de medida, también se concluyó que algunos estudiantes comunicaban de mejor manera sus ideas y pensamientos en lo que decían(acto de habla) que sus registros escritos de las tareas propuestas y viceversa; por ello se destaca que las macro-estructuras son esenciales en cualquier contexto que relacione las cognición del sujeto. Esta investigación sirvió de apoyo para tomar algunos conceptos de la temática, al igual que, se constataron las conclusiones con la indagación en curso.

Debido a la gran importancia que ha venido cobrando el laboratorio de matemática en el transcurso de los años, en el proceso de enseñanza y aprendizaje, un conjunto de investigadores ha implementado esta modalidad es sus trabajos de investigación, entre los cuales se destacan:

El laboratorio de matemáticas y la Metodología Estudio de Clase (MEC). Esta propuesta educativa se basó en el fortalecimiento de competencias matemáticas en estudiantes de educación básica y media, por medio de la formación docente, mediante el diseño e implementación de proyectos pedagógicos que primaran el uso de materiales didácticos y software educativo a través de la metodología Estudio de clase, bajo un curso B-Learning. Ramírez 2013, (citado en Tobón 2018).

Laboratorios matemáticos para la enseñanza desarrolladora del componente numérico variacional en los estudiantes del grado quinto. Con este trabajo de grado se realizó un estudio teórico tendencial sobre el proceso enseñanza aprendizaje de las matemáticas en primaria. Todo esto llevó a plantear una propuesta para la enseñanza de las matemáticas como los laboratorios matemáticos. También se lograron los siguientes resultados: cada vez es más evidente el uso de estrategias innovadoras que atraigan al estudiante, lo motiven y lo hagan protagonista de su aprendizaje, es esencial dar un giro a la educación y los materiales didácticos son un medio para lograr este giro. Mosquera y Padilla 2016. (citado en Tobón, 2018)

Diseño de un laboratorio de matemáticas para el fortalecimiento del proceso enseñanza y aprendizaje: esta investigación se centró en el mejoramiento del rendimiento académico de los estudiantes de grado quinto de la básica primaria de la Institución educativa Escuela Normal Superior Santa Teresita y el C.E.R la Cruz, a partir del aprendizaje significativo de las matemáticas y se fundamentó en la implementación y utilización de materiales concretos, juegos, herramientas tecnológicas y demás actividades, respondiendo así a objetivos concretos. Lezcano y Velásquez 2017, (citado en Tobón, 2018).

Diseño de un laboratorio de matemáticas para el fortalecimiento de la enseñanza y el aprendizaje en el grado quinto: pensamiento numérico y variacional. Es una propuesta que tiene como objetivo generar condiciones favorables que propicien en los educandos el agrado por esta área. La construcción del laboratorio se ha pensado como una propuesta divertida, en la que el juego, la narración de cuentos con sentido matemático, el intercambio de saberes, la manipulación de material concreto y el uso de las nuevas tecnologías se convierten en una herramienta para la construcción del conocimiento y la base para mejorar los niveles de calidad de la educación de los estudiantes. Tobón (2018).

1.5.3 Referente Local

Como referente local, en Buenaventura se toma el trabajo de maestría, de Palacios (2019) el cual, se titula como: el laboratorio de matemáticas como estrategia pedagógica en la formación geométrica de docentes de educación básica primaria: el caso de la institución educativa república de Venezuela. Este trabajo tiene como temática los cuadriláteros, en el escenario del laboratorio de matemáticas, con una metodología cualitativa, tomando como objeto de estudio los docentes, y es de gran aporte para esta indagación dado que, se realizó en la misma institución y se utiliza la misma estrategia pedagógica, lo cual, sirvió de insumo para constatar las conclusiones y ahondar en el laboratorio de educación matemática como estrategia pedagógica.

Simultáneamente, en Buenaventura se realizó una investigación por parte de Gil y Valencia (2019), llamada un acercamiento al desarrollo del pensamiento variacional desde la perspectiva del isomorfismo de medida: una experiencia en el laboratorio de matemáticas, este trabajo se llevó acabo en la I. E. República de Venezuela con los estudiantes de grado sexto, utilizando una metodología mixta en la cual se tomaron aspectos de la metodología de experimentos de enseñanza y la de ingeniería didáctica, teniendo como objetivo desarrollar una propuesta metodológica, vinculada al Laboratorio de Matemáticas, en la que se planteen situaciones problemas relacionadas con las estructuras multiplicativas en el caso de Isomorfismo de medida, que permita un acercamiento al desarrollo del pensamiento Variacional en los estudiantes.

Cabe resalar que esta investigación es un referente central para la indagación en curso, por lo que, se desarrolló en la misma institución, con la misma estrategia pedagógica, se abordó la misma temática y fue de gran ayuda para la escritura de la metodología.

CAPÍTULO II.

II. MARCO CONCEPTUAL

En este apartado se exponen, los argumentos teóricos, en los cuales se fundamenta este trabajo de indagación, en primera instancia se muestra la teoría de los campos conceptuales: el caso de las estructuras multiplicativa de Vergnaud (1990), la importancia de la resolución de problemas, el isomorfismo de medidas, el laboratorio de matemáticas y el juego.

2.1 TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES: ESTRUCTURAS MULTIPLICATIVAS

En primera instancia, Vergnaud (1990) define su teoría como cognitivista, es decir que se centra en los conocimientos, aprendizajes y la conciencia de los individuos; lo cual implica, un estudio a partir de unos elementos de base propios, enfocada en el desarrollo de las competencias de los estudiantes. Al igual que, es de gran interés para la didáctica dado que se centra en el aprendizaje. Su principal finalidad es la de proporcionar un marco que permita comprender las relaciones y las desavenencias entre los conocimientos (saber hacer y saber expresar) en los niños y adolescentes.

Esta teoría no es propia de las matemáticas, sin embargo, ha sido elaborada para dar cuenta de procesos de "conceptualización progresiva de las estructuras aditivas, multiplicativas, relaciones número-espacio, y del álgebra" (Vergnaud, 1990). En ella se exponen definiciones tales como: conceptos y esquemas en los cuales se menciona que para el aprendizaje y la enseñanza no es óptimo reducirse en las definiciones de los conceptos, dado que, por medio de la interacción con el medio y las circunstancias con las cuales se enfrenta el sujeto, es en este contexto en el cual un "concepto adquiere sentido para el niño".

Simultáneamente, Vergnaud (1990), define a un campo conceptual como un "conjunto de situaciones", cuyo dominio requiere, a su vez, el dominio de varios conceptos de naturaleza distinta, entendiéndose a una situación como una tarea, es decir que en el caso del campo conceptual de las estructuras multiplicativas el conjunto de tareas, cuya solución es una multiplicación, división o se dan los casos en que se requiere una combinación entre ambas operaciones. El tratamiento de un conjunto de tareas puede resultar complejo, sin embargo, es importante centrarse en la esencia y los componentes individuales de cada una de las tareas, para poder lograr el éxito conjunto de estas. Por tal razón:

> El campo conceptual de las estructuras multiplicativas es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones: proporción simple y proporción múltiple, función lineal y n-lineal, razón escalar directa e inversa, cociente y producto de dimensiones, combinación lineal y aplicación lineal, fracción, razón, número racional, múltiplo y divisor, etc. (Vergnaud, 1990, p. 8-9).

Esta teoría es de gran relevancia para este trabajo dado que, define y desarrolla el concepto de campos conceptuales el cual contiene las estructuras multiplicativas, concepto que es uno de los focos principales de esta indagación, del mismo modo, contribuye en la clasificación y selección, de las respuestas en las situaciones, que se le presentan a los estudiantes cuando se les expone un conocimiento, al igual que, permite analizar las dificultades que se exteriorizan a la hora de resolver problemas que varían en sus soluciones, entre otras características de interés.

2.2 LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO UN PROCESO CENTRAL EN EL TRATAMIENTO DE LAS ESTRUCTURAS MULTIPLICATIVAS.

Al hablar de resolución de problemas no se puede dejar de lado al matemático George Polya, el cual es considerado como uno de los más importantes referentes y pioneros en describir el tema. Centrándose principalmente en la importancia que tiene la resolución de problemas para adquirir conocimientos. Por tal razón, es el autor del libro: cómo *plantear y resolver problemas* (1945), en el cual plantea el método de los cuatro pasos, los cuales se definen como las estrategias generales que utiliza un estudiante, para resolver un determinado problema, estos son: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución. Estos, se convierten en estrategias de gran ayuda para los estudiantes, dado que, se podría decir que son las pautas necesarias para abordar cualquier tipo de problemas.

Sin embargo, han transcurrido varias décadas desde este gran aporte y las necesidades, situaciones y las formas de abordar problemas por parte de los estudiantes han cambiado, por tal razón, esta indagación no se enfoca solamente en los métodos mencionados, por el contrario, se da una mirada a lo diversos aportes y contribuciones de tan importante proceso, en los cuales se encuentra el autor: Santos (2008), el cual considera que la resolución de problemas debe ser el eje central en la organización de los currículos, del mismo modo, otros autores se interesan por definir la resolución de problemas, entre ellos se encuentran: Schoenfeld, Lesh y Zawojewski ,(citado en Santos, 2008)

Hasta este momento, se ha expuesto la resolución de problemas de forma general a partir de ahora, se mencionará a la resolución de problemas aritméticos verbales en la cual, Se encuentran autores como: Greer (1992), Maza Gómez (1991), Nesher (1992), Peled y Nesher, (1988), Schwartz (1988), y Vergnaud (1988). Los cuales consideran que la utilización de algoritmos como la multiplicación y la división son generalmente sencillos, sin embargo, desde el punto de vista cognitivos estos tratamientos necesariamente no son tan sencillos, debido a los tratamientos y a las concepciones que los estudiantes adquieren al pasar de un ciclo escolar a otro. De igual manera, con base en Bosch (2012) e Ivars y Fernández (2016), en la resolución de problemas multiplicativos los estudiantes presentan más dificultades para resolver aquellos que involucran divisiones que los que involucran solo multiplicaciones, a su vez resulta más sencillo para ellos hacer divisiones partitivas que de medidas, dado que, dichos problemas se enseñan en varios conjuntos numéricos, lo que implica que se presenten mayores dificultades, según sea el conjunto numérico abordado.

Con base en lo anterior, las estructuras multiplicativas son consideradas como un campo conceptual complejo, para los procesos de enseñanza y aprendizaje, debido a la diversidad de nociones, métodos algoritmos, conceptualizaciones, características, procedimientos y demás terminologías que la componen, por ende, se han realizado múltiples investigaciones centradas en la resolución de problemas de estructuras multiplicativas, de la cual se desprenden sub-teorías tales como: las creencias que adquieren los estudiantes entorno a las operaciones numéricas, de Fischbein y Nesher 1988, (citado en Echeverry, 2013).

En esta investigación, se menciona que los estudiantes en el trascurso de los años de escolaridad adquieren concepciones tales como: cuando se multiplican dos cantidades el resultado, es mayor que las dos cantidades iniciales. Al dividir, el cociente es menor que el dividendo. Solo se puede dividir, si el dividendo es mayor que el divisor. “Estas creencias permiten a los estudiantes identificar el tipo de estrategia más acertada al momento de enfrentar situaciones problemas, convirtiéndose en modelos intuitivos que le permiten relacionar una operación con la situación que se le presenta” (Echeverry, 2013, p. 28-29).

Sin embargo, estas creencias se pueden convertir en obstáculos al ser abordadas en conjuntos numéricos diferentes a los naturales, por ejemplo, los racionales en los cuales, no siempre se cumplen los modelos intuitivos mencionados, por ello, es importante indagar que procesos de resolución, realizan los estudiantes cuando se les presenta el conocimiento de una forma distinta a la tradicional.

Dentro de la misma investigación se considera que uno de los modelos intuitivos que utilizan los estudiantes para realizar una multiplicación, es la adicción repetida, en otras palabras, suman el mismo número tantas veces sea indicado por el otro, por tal razón, se evidencia la concepción de que cuando se multiplican dos cantidades el resultado, es mayor que las dos cantidades iniciales. Exceptuando casos como en el uno (1) y el cero (0). Simultáneamente, Bosch (2012) e Ivars y Fernández (2016), resaltan en sus investigaciones que la estrategia que más utilizan los estudiantes para resolver problemas de tipo multiplicativo es la adicción iterada convirtiéndose esta en una base para pasar del pensamiento adictivo al multiplicativo.

En el mismo orden de ideas, Ivars y Fernández (2016), mencionan otras estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver problemas de tipo multiplicativo entre ellas se encuentran: el uso de Hecho Numérico (HN) el cual consiste en utilizar las tablas de multiplicar para justificar los valores requeridos en las situaciones problemas, la Utilización de Algoritmos (UA) aquí los estudiantes identifican la operación (multiplicación o división) que les permite llegar a la solución, conteo por ensayo y error (CEEr) esta consiste en contar un determinado número hasta obtener el dato solicitado en la situación. También, exponen en su investigación que en ocasiones para resolver un problema los estudiantes hacen uso del algoritmo inverso (AI) al que tenían que utilizar en la situación, esto lo definen como una estrategia errónea, para fines de esta indagación se va a tomar como una dificultad.

Hay que mencionar, además, que Fischbein, (citado en Nesher, 1988), en sus investigaciones describen que los problemas verbales multiplicativos se clasifican en: situaciones simétricas y situaciones asimétricas. En estas, los factores de las situaciones simétricas se relacionan de forma conmutativa, es decir, que se mantiene la igualdad entre los factores sin importar el orden en que se operen. En las situaciones asimétricas como en la división, la operatividad entre los factores necesariamente se debe hacer con un orden determinado, debido a esto, se derivan dos tipos de divisiones, con sus respectivos modelos intuitivos.

Estas son la división como partición, y la división por agrupamiento, en la primera como su nombre lo indica se reparte una cantidad, en partes iguales y el resultado es el tamaño, de cada parte. En la segunda, se conoce la cantidad total que se debe agrupar y el tamaño de la cantidad, lo que se debe conseguir son los grupos en los que se divide el total.

Por medio del modelo intuitivo de Fischbein y otros, (citado en Nesher, 1988), se exponen algunos resultados obtenidos al indagar sobre las reacciones, que se presentaban en los estudiantes cuando se variaban las representaciones numéricas, en las situaciones problemas de división y multiplicación. Dentro de dichos resultados se encontró que:

- En los problemas que se resuelven por medio de una multiplicación, cuando en los factores el multiplicador es un numero decimal, resulta más compleja la solución, que cuando el numero decimal es el multiplicando. es decir, que se convierte en un modelo intuitivo, viendo la multiplicación como una adición repetida, dado que, "es difícil que el alumno visualice el repetir el multiplicando tantas veces como lo indica el multiplicador si éste es un número decimal" (Echeverry, 2013, p.30).

- En los problemas que se resuelven por medio de una división, resulta más compleja la solución cuando el divisor es un número decimal, que cuando, el decimal es el dividendo, tomando como enfoque el modelo intuitivo de partición, se considera que, "es más difícil repartir una cantidad en un número decimal de partes" Corte, Verschaffel y Van Coillie, 1988; Luke, 1988, (citado en Echeverry, 2013, p.30)."

Ahora bien, la investigación de Fischbein (1988) aporta nociones significativas para este trabajo, dado que, se centra en la resolución de problemas que involucran multiplicación y división, sin embargo, no define específicamente lo que son las estructuras multiplicativas, por ello, se debe referenciar a Vergnaud (1988), el cual; expone en su teoría una categorización de los problemas verbales multiplicativos, al igual que desarrolla todos los componentes que hacen parte, de los campos conceptuales multiplicativos, como las estructuras multiplicativas las cuales, "consisten en un conjunto de problemas que involucran operaciones aritméticas y nociones de tipo multiplicativo, como multiplicación, división, fracción, razón, entre otras" Vergnaud (1988), (citado en Echeverry, 2013, p.30).

Cabe resaltar, que en la teoría antes mencionada se exponen tres tipos de problemas de estructuras multiplicativas, estos son: proporción múltiple, isomorfismo de medidas y producto de medidas, estas son definidas por (Echeverry, 2013, p.31) a continuación:

❖ "La estructura de proporción múltiple, es un espacio de medida que es proporcional a los otros dos espacios los cuales son diferentes e independientes entre sí"

- El Isomorfismo de medidas o función lineal es una estructura que consiste en una proporción simple y directa entre dos espacios de medidas. Concepción en la cual se profundizará más adelante.
- Vergnaud (1981, 1983) define el producto de medidas como la composición cartesiana de dos espacios de medida diferentes generando un tercero.

Los tres tipos de problemas de estructura multiplicativas ya mencionados son muy importantes entre sí, sin embargo, este trabajo se centra en las estructuras multiplicativas del tipo isomorfismo de medidas, en la cual, se establece una relación cuaternaria entre sus cantidades en estas, las cantidades pertenecen a dos espacios de medidas diferentes, por ejemplo, cantidad de objetos y el valor, los kilómetros recorridos y la gasolina utilizada, los lugares y las personas que asisten.

En el mismo orden de ideas, Cerritos (2012), en una de sus investigaciones expone que el isomorfismo de medidas no se está enseñando en las escuelas, por lo tanto, los estudiantes presentan dificultades para resolver problemas de este tipo, dado que, no identifican la relación cuaternaria entre las magnitudes. Simultáneamente, son importantes estas clases de problemas, ya que, si se les permite explorar a los estudiantes desde primaria con este tipo de conceptos, cuando lleguen al bachillerato y deban resolver problemas que involucren función lineal, regla de tres, proporción, variación, y demás enfoques, estos ya van estar familiarizados con los conceptos y posiblemente se les facilite los tratamientos de los nuevos enfoques, estas afirmaciones se sustentan en investigaciones como las de Bosch (2012) e Ivars y Fernández (2016), autores destacados en los antecedentes.

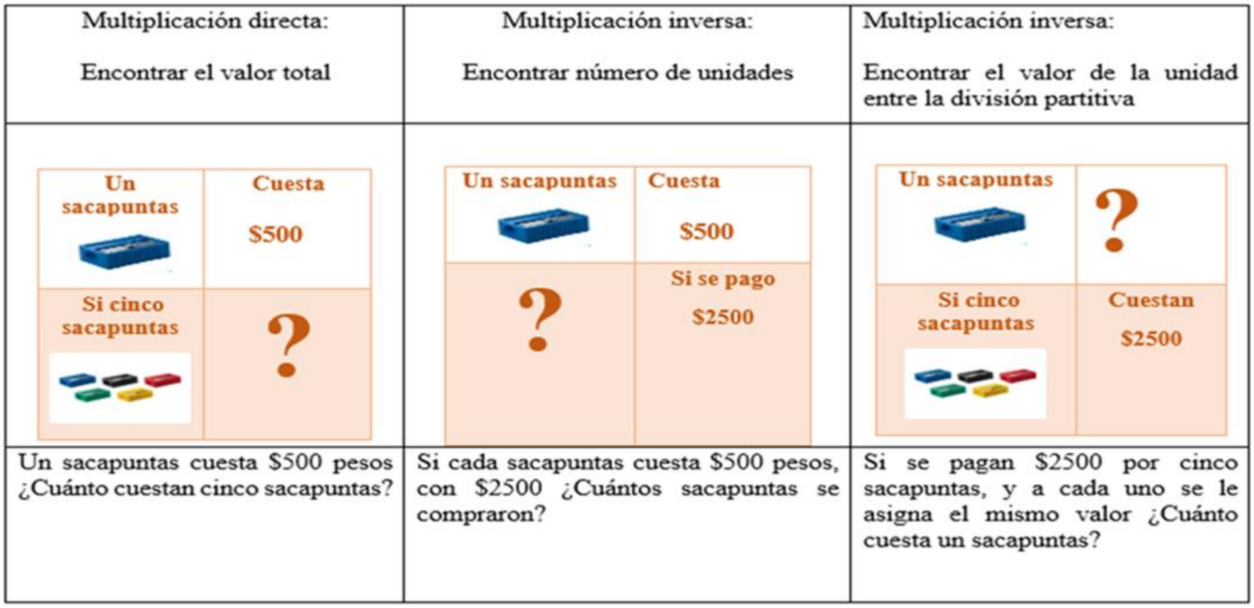
Ahora se expondrán varias concepciones sobre el isomorfismo de medidas:

> El isomorfismo de medidas es una estructura que establece relaciones de covariación entre cuatro cantidades (relación cuaternaria), donde es necesario revisar cómo varía una cantidad con respecto a la otra, ya sea al interior de un mismo espacio de medida o entre los mismos espacios. En palabras de Castro y Castro (1995), engloba todos los problemas asociados a la proporcionalidad simple directa entre las magnitudes implicadas. Asumir la multiplicación de esta forma requiere reconocer un proceso de covariación entre las parejas correspondientes en cada uno de los espacios de medida. (Citado en Ospina y Salgado, 2016, p.48).

> El isomorfismo de medidas es una estructura que engloba aquellos problemas de proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes M1 y M2 y pone en juego cuatro cantidades, tres de ellas son los datos del problema y la cuarta es la incógnita. Vergnaud 1997, (Citado en Callejo y Márquez, 2010, p. 111)

> Es una estructura que engloba a los problemas en los que subyace una proporcionalidad simple directa entre las dos magnitudes implicadas. Los tipos de problemas que se estudian en esta categoría son: problemas referidos a repartos iguales (personas y objetos), precios constantes (bienes y costos), movimiento uniforme (espacio y velocidad), densidades constantes a lo de una línea (árboles y distancias), en una superficie o en un volumen. (Aguirre 2011,p.28).

Dicho en otras palabras, estas tres definiciones expresan en común que el isomorfismo de medidas es una estructura, que contiene problemas de proporcionalidad simple directa, en los cuales, se establece una relación cuaternaria, es decir que existe una correspondencia inmediata entre cuatro cantidades, variándose estas entre sí. Ahora bien, con base en Vergnaud (2004), se presentan problemas multiplicativos de tipo isomorfismo de medida, distinguiendo tres clases:



Multiplicación directa: Encontrar el valor total	Multiplicación inversa: Encontrar número de unidades	Multiplicación inversa: Encontrar el valor de la unidad entre la división partitiva
Un sacapuntas / Cuesta $500 / Si cinco sacapuntas / ?	Un sacapuntas / Cuesta $500 / ? / Si se pago $2500	Un sacapuntas / ? / Si cinco sacapuntas / Cuestan $2500
Un sacapuntas cuesta $500 pesos ¿Cuánto cuestan cinco sacapuntas?	Si cada sacapuntas cuesta $500 pesos, con $2500 ¿Cuántos sacapuntas se compraron?	Si se pagan $2500 por cinco sacapuntas, y a cada uno se le asigna el mismo valor ¿Cuánto cuesta un sacapuntas?

Ilustración 6. Tipos de problemas multiplicativos.

Es así que, en *la ilustración 6,* se exponen tres tipos de problemas multiplicativos, los cuales, en la primera clase, se debe realizar una multiplicación para encontrar el valor total de unidades, teniendo como base el valor de la unidad y la cantidad total de unidades. En la segunda clase, se debe realizar una división para encontrar la cantidad de unidades, teniendo como base el valor de la unidad y el valor total de las unidades. Y en la tercera clase se debe realizar una división para encontrar el valor unitario, teniendo, la cantidad de unidades y el valor total de las unidades. Por lo cual, en este tipo de problemas se establece una relación cuaternaria y a partir de conocer tres de sus cantidades se debe encontrar la cuarta cantidad.

De manera análoga, las tres clases de problemas ya mencionados se subdividen a su vez en otros; cuando se trabajan con números enteros de menor o mayor cantidad, números decimales y el valor de la unidad o la cantidad total de unidades inferior a uno. Sin embargo, las fichas diseñadas en esta indagación se centraron en exponer las tres clases de problemas multiplicativos trabajando con números enteros, con cantidades pequeñas y grandes, dejando de lado los decimales para evitar encontrar las dificultades que se presentan al trabajar con este tipo de números, dificultades mencionadas en páginas anteriores.

Ahora bien, en el isomorfismo de medidas se presentan relaciones lineales caracterizadas por las propiedades de la linealidad en las cuales en dos espacios de medida intervienen cuatro cantidades, con unidades de medida diferentes y proporcionales entre sí. Dicho en otras palabras, “sean *E1* y *E2* espacios de medida, una transformación lineal en estos espacios es una función lineal que asigna a cada cantidad *x* que € *E1* una imagen única *f(x)* € *E2* para cada *exy* € *E1* y cada escalar µ que pertenece a R, se cumple que:

i. ***f (x + y) = f(x) + f(y)*** homogeneidad con respecto a la suma.

ii. ***µf(x) = f(µx)*** producto por escalar. “(Ospina y salgado,2016, p.46)

Es importante destacar con base en Vergnaud (2004), que en los problemas de tipo multiplicativo expuestos en la *ilustración 6*, se dan dos tipos de relaciones la vertical y la horizontal. En la relación vertical: de abajo hacia arriba conocida como multiplicación inversa, se dividen los $2500 entre 5 para encontrar el valor unitario de un sacapuntas, el operador /5 es un operador sin dimensión, es decir un escalar el cual permite que se relacione la cantidad de sacapuntas con sus respectivos precios, del mismo modo, permite pasar de 5 sacapuntas a 1 sacapuntas. Así, el operador de división /5 es el operador inverso de la multiplicación, con el cual, se puede pasar de 1 sacapuntas a 5 sacapuntas.

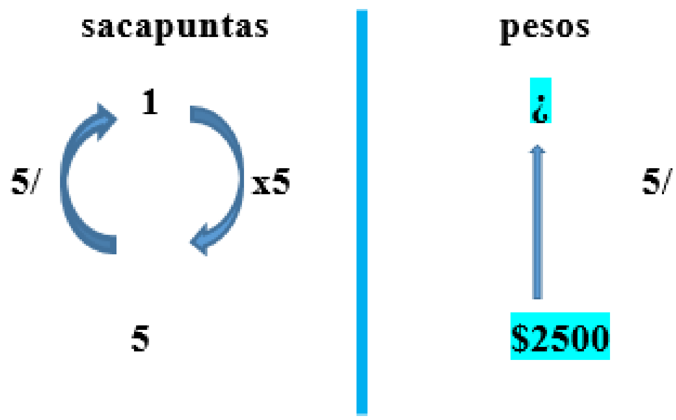


Ilustración 7. relación vertical.

Cantidad de sacapuntas	precio
5	$2500
1	$500

5 sacapuntas X $\frac{1}{5}$ veces = 1 sacapuntas   2500 pesos X $\frac{1}{5}$ veces = 500 pesos

Ilustración 8. análisis vertical (escalar)

En la relación horizontal, de derecha a izquierda, multiplicación inversa: en la cual se busca número de unidades, se dividen $2500 pesos entre $500 pesos, para encontrar la cantidad total de sacapuntas. De esta manera, al operar con los $500 pesos se está haciendo una relación inversa a la relación directa de x500pesos/sacapuntas, en otras palabras, de la relación de la unidad del sacapuntas con su valor unitario.

Ilustración 9. Relación horizontal.

Cantidad de sacapuntas	precio
(a) 5 →	$2500
(b) 1 →	$500

(a) $5\ \cancel{\text{sacapuntas}} \times \frac{500 pesos}{1 \cancel{sacapuntas}} = 2500$ pesos (b) $1\ \cancel{\text{sacapuntas}} \times \frac{500 pesos}{1 \cancel{sacapuntas}} = 500$ pesos

Ilustración 10. Análisis horizontal (funcional).

2.3 EL LABORATORIO DE MATEMÁTICA.

Con base en las investigaciones centradas en el laboratorio de matemáticas, expuestas en los antecedentes y tomando como referentes a Arce (2004) y Moreno y Zúñiga (2011), en esta indagación se considera que el laboratorio de matemática es una estrategia pedagógica, al igual, que es un escenario en el cual los participantes tienen la libertad y la autonomía, para ser constructores directos del conocimiento. De igual manera, a través de las actividades que involucran materiales manipulativos, los estudiantes pueden movilizar saberes de manera dinámica, lúdica y experimental, institucionalizando el conocimiento, dejando de lado la mecánica de las clases tradicionales.

Cabe resaltar, que en el planteamiento del problema de este trabajo se expuso, una definición del laboratorio de matemática. Sin embargo, se debe reiterar dicha definición dado que, el concepto ya expuesto es eje central para esta indagación. En palabras de Arce (2004) se considera que:

> El Laboratorio de Matemáticas es una estrategia pedagógica de utilización del material, en la que se encuentra un conjunto de actividades matemáticas para ser desarrolladas autónomamente por los participantes a través del uso de variados materiales, proceso que proporciona un ambiente de aprendizaje en el que se genera la relación entre actividad matemática y material manipulativo, relación que contribuye a la construcción y fundamentación de pensamiento matemático (p.2).

En consecuencia, el laboratorio de matemática otorga sentido a los procesos de enseñanza y aprendizaje, facilita, estimula y fundamenta el pensamiento matemático, al igual que, moviliza las habilidades de los participantes, dándose una relación entre las actividades matemáticas, el pensamiento matemático y los materiales. Los cuales, son los tres elementos fundamentales, en el desarrollo del laboratorio.

2.3.1 Estructura básica del laboratorio de matemática, Univalle sede Meléndez.

Arce (2004) describe la estructura básica del laboratorio de la siguiente manera:

La estructura del laboratorio de matemáticas se encuentra compuesta por Mesas de Trabajo y, las relaciones entre dos o más mesas de trabajo, constituyen una **Sección**. Las mesas M1 a M8 y a su vez están relacionadas de la siguiente manera: M1, M2, M7; M5 y M6; M3 y M4, relaciones que dan como resultado las secciones S1, S2 y S3 respectivamente. Todo ello se puede representar así:

M1 + M2 + M7 = S1

M5 + M6 = S2M3 + M4 = S3

(+ Simboliza la relación entre las mesas)

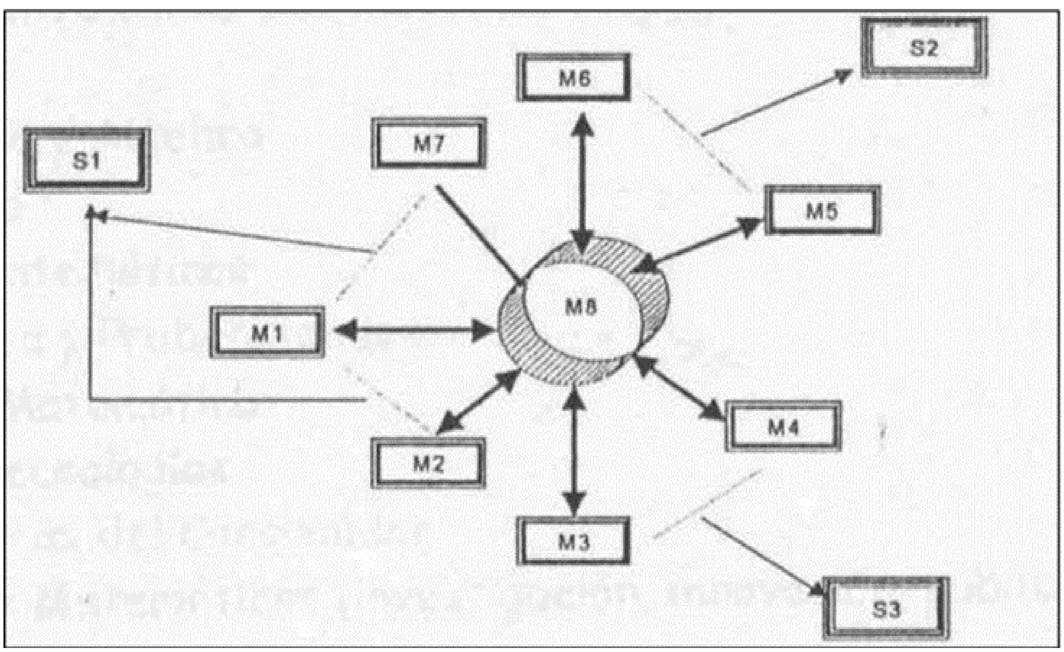


Ilustración 11. Estructura mesas del laboratorio de matemática. Arce (2011)

> De igual manera, Arce (2004) expone Las Mesas de Trabajo las cuales son consideradas como un espacio fijo o móvil, donde se proponen y desarrollan las actividades matemáticas del Laboratorio. Comprenden un conjunto de materiales, como elementos concretos, juegos, acertijos y montajes, que generan desde lo concreto un desarrollo gradual de la construcción de conceptos y habilidades para el planteamiento y resolución de problemas, desarrollo de intuiciones matemáticas y exploración de concepciones creativas frente a problemas. Estas actividades y materiales constituyen aspectos importantes en la formación de pensamiento matemático (p.4).

Arce (2004) menciona que las mesas de trabajo en referencia son:

A. Juegos matemáticos

B. Aritmética y álgebra

C. Geometría

D. Estadística y probabilidades

E. Prensa y matemáticas F. Matemáticas y Nuevas tecnologías

G. Matemáticas del consumidor

H. Furgón de matemáticas (investigación, innovación, publicaciones, etcétera.)

En el desarrollo de esta indagación se pretende trabajar desde la mesa de los juegos matemáticos, teniendo en cuenta que cuando se trabaja desde el laboratorio de matemáticas, no se pueden perder de vista los objetivos, del mismo modo, por medio de este se abre paso a la creatividad, se le permite al estudiante, buscar distintas formas para encontrar la solución, invita a pensar y a preguntarse si tiene sentido lo que se está desarrollando, posibilita la experimentación con materiales variados, concede sentido y funcionalidad a lo que se hace, dado que, las situaciones están permeadas es su contexto.

2.3.2 Descripción de una ficha de trabajo.

Cada mesa se desarrolla a través del agrupamiento sistemático de lo que se denomina fichas de trabajo, las fichas que ingresan a cualquiera de las mesas del laboratorio de matemáticas tienen un diseño sencillo y práctico que permite su organización y manipulación tanto física como digital. Arce y Pabón 2011, (Citado en Moreno y Zúñiga, 2014). Esta descripción se detalla a cabalidad en la metodología.

2.4 ALGUNAS CONCEPCIONES SOBRE EL JUEGO

Con el objetivo de movilizar conocimientos y fomentar en los estudiantes interés por aprender, múltiples investigadores han centrado sus miradas en el juego siendo este un concepto bastante amplio. Entre dichas investigaciones se distinguen las siguientes:

El juego y la matemática. Juegos de matemáticas para el alumnado del primer ciclo de e. primaria. Tuvo como finalidad desarrollar una metodología que ayudara a mejorar la adquisición de los conceptos que se estudian en el primer ciclo de Educación Primaria en el área de matemáticas, añadiendo una motivación al alumnado para que cuando se tenga que enfrentar a esta materia tenga una actitud positiva. Para conseguir esto se seleccionó una serie de juegos matemáticos enfocados a aprender de una manera diferente los contenidos que se tiene que trabajar en el primer ciclo. (Sánchez 2012-2013).

El juego como una estrategia didáctica para desarrollar el pensamiento numérico en las cuatro operaciones básicas. Este artículo es el resultado de una investigación realizada por docentes pertenecientes al Grupo de Investigación en Educación Matemática de la Universidad del Quindío (GEMAUQ), en la cual se buscó desarrollar distintas habilidades y relaciones para familiarizarse y reforzar las operaciones básicas (adición, sustracción, producto y cociente) en estudiantes de grado quinto, asumiendo que el juego ocupa un lugar primordial entre las múltiples actividades del niño. La estrategia didáctica consistió en trabajar una serie de actividades y/o juegos en cada una de las operaciones matemáticas y la combinación de estas, al igual que en la resolución de problemas, cuya implementación permitió generar mayor motivación e interés en los estudiantes en el tema propuesto. (Aristizábal, Colorado Y Gutiérrez, 2016).

La matemática nunca deja de ser un juego: investigaciones sobre los efectos del uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas. En este manuscrito se reportan los resultados de una revisión de literatura relativa al uso de juegos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La revisión se basa en las investigaciones de matemática educativa que han dirigido su atención al juego como un recurso didáctico. Para el desarrollo de la revisión de literatura se utilizan tres ejes conductores: 1) definiciones y clasificaciones de juego usadas en la literatura, 2) tipo de investigaciones que se han realizado sobre juegos, tipo de juegos estudiados y características de las muestras consideradas y 3) efectos sobre el uso de juegos que se reportan en los estudios considerados. Finalmente se discute acerca de los resultados, se señalan limitaciones del método y futuras líneas de investigación relativas a la inclusión de juegos en la educación matemática. (Gonzales, Molina, Sánchez, 2014).

Simultáneamente, tomando como referente a Brousseau (1997), el cual, manifiesta que el juego adquiere significados diferentes y estos dependen de las intenciones e interés con los cuales sea presentado en el aula. Así mismo, en las últimas décadas en el desarrollo de las clases de matemáticas algunos docentes han utilizado el juego como una estrategia didáctica para abordar determinados temas. Dentro de los diferentes significados que adquiere el luego se encuentra el juego instruccional y el juego matemático:

> Bright, Harvey y Wheeler (1985) puntualizan que un juego instruccional es aquel para el cual un conjunto de objetivos educativos, cognitivos o afectivos han sido determinados por quien planea la actividad. Por su parte Oldfield (1991a) proporciona una definición de juego matemático que contempla juegos individuales:
>
> 1. La actividad involucra:
>
> a) un desafío contra una tarea o uno o más oponentes.
>
> b) O una tarea común que debe abordarse ya sea solo o, más comúnmente, en conjunción con otros.
>
> 2. La actividad se rige por un conjunto de reglas y tiene una estructura clara subyacente a las mismas.
>
> 3. La actividad normalmente tiene un final distinto.
>
> 4. La actividad tiene objetivos matemáticos y cognitivos específicos. (González, Molina y Sánchez, 2014, p 114).

De esta manera, las dos definiciones anteriores de juego: instruccional y matemático, concuerdan con los intereses de esta indagación, dado que, las fichas que se diseñaron con propósitos cognitivos para la aplicación de este trabajo, contienen dos juegos, el Domi-Frut y el Tri-Color, en los cuales, se especifican las instrucciones que deben seguir los estudiantes, para llevar a cabo el desarrollo de los juegos y en estos los estudiantes pondrán a prueba sus conocimientos entorno a situaciones problemas que involucran actividades, alimentos y objetos de su cotidianidad.

CAPÍTULO III.

III. ASPECTOS METODOLÓGICOS

En el desarrollo de este capítulo se pone en manifestó la metodología cualitativa que se escogió para esta indagación, la cual, permitió poner en marcha las fichas de juego, mostrando así las partes en que se dividió el espacio de trabajo y los participantes, la elaboración de los jugos, el formato y estructura de las fichas, el análisis antecesor de estas, la descripción de los tipos de problemas multiplicativos que se abordaron y los instrumentos de análisis.

Para llevar a cabo esta indagación, la metodología escogida, permite describir las características que se exteriorizan en los estudiantes en sus procesos de resolución, al igual que, favorece y puntualiza las reacciones tales como, sus estrategias, fortalezas, dificultades, inquietudes y demás actitudes, relacionadas con el desarrollo de las fichas. Cabe resaltar, que en este trabajo se utilizó una metodología que articula algunas características de la Investigación Basada en el Diseño (IBD) y la ingeniería didáctica (ID). La modalidad de la metodología, se adoptó del trabajo de maestría de Gil y Valencia (2019).

Es importante mencionar, que la Investigación Basada en el Diseño (IBD): se centra en analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación. Molina 2011, (citado en Gil y Valencia 2019. p. 53).

De acuerdo, con lo descrito en el párrafo anterior se puede afirmar que los elementos en que se centra esta metodología se ajustan a los propósitos y objetivos de esta indagación, dado que, se establecen formas particulares de abordar el conocimiento con distintas estrategias y herramientas de enseñanza que en el caso particular de este trabajo son las fichas de laboratorio, que contienen juegos basados en las estructuras multiplicativas de tipo isomorfismo de medidas como elemento central, con las cuales se busca aproximar a los estudiantes a la resolución de problemas compuestos por situaciones cotidianas, haciendo uso de material manipulativo.

De igual forma, Benito y Salinas (2016), mencionan que la IBD no tiene una estructuración fija, sin embargo, para llevar a cabo una investigación de este tipo se pueden tener en cuenta las siguientes etapas: definición del problema, diseño, desarrollo, implementación, rediseño, nueva implementación y evaluación. Por lo tanto, en este trabajo se adaptaron dichas etapas para estructurar la metodología, a través de tres etapas puntuales; la primera consiste en la planeación y diseño de las Fichas, la segunda en la implementación y experimentación en el Laboratorio de matemáticas con rediseño de las fichas y una nueva implementación, y la tercera etapa consiste en el análisis y producción de la documentación.

Simultáneamente, se tomaron características de la Ingeniería Didáctica (ID), desde la perspectiva de Artigue (1995), expuesta por Gil y Valencia (2019): quienes mencionan que esta metodología es experimental, es decir, “una de sus características principales radica en la puesta en escena de tareas (situaciones problemas) que favorezcan la actividad matemática, y entre otras cosas, centra su atención en el desarrollo de conocimientos” (p.54-55). Dichas características se desarrollan en este trabajo de indagación dado que, los estudiantes por medio de las fichas experimentan con materiales manipulativos cotidianos como: el juego de Domi-Frut y el Tri-Color, estos fomentan el desarrollo de habilidades y estrategias, tales como la identificación de las operaciones que deben realizar, el trabajo en equipo, la resolución de problemas, entre otras.

Así, la ID con base en Artigue (1995), está compuesta por cuatro fases que son: fase 1 de análisis preliminar, fase 2 de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, fase 3 de experimentación y finalmente la fase 4 de análisis a posteriori y evaluación. (p.38). En este trabajo se tomó para la construcción de la metodología el análisis a priori, la experimentación y el análisis a posteriori. De modo que, la metodología de esta indagación se estructuro tomando características de la (IBD) y la (ID), por lo tanto:

En la primera etapa, planeación y diseño de las fichas, está dividida en dos partes, primeramente se hizo el proceso de recopilación de documentos, como los resultados de las pruebas de estado realizadas en la institución educativa República de Venezuela en los años 2016 y 2017, estas fueron las Pruebas Saber 5°, los aprendizajes por mejorar del día E, los resultados de las pruebas PISA, los referentes de calidad propuestos por el MEN (Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencia), al igual que, para la estructura y contenido temático de las fichas se tuvieron en cuenta referentes como Vergnaud (2004) y Arce(2004).

En la segunda parte, concerniente al diseño de las fichas del laboratorio que contienen los juegos aritméticos, para la realización de los juegos se hizo uso de materiales como; cartulina de colores, cartón paja, imágenes impresas de frutos tradicionales de pacifico, marcadores de colores, reglas, papel contad, entre otros materiales.

En la segunda etapa. Experimentación en el Laboratorio de Matemáticas y rediseño de las fichas (tomando elementos de la IBD y de la ID). corresponde al trabajo de campo, en la cual se llevó a cabo el proceso de aplicación y desarrollo de las fichas por parte de los estudiantes, bajo la estrategia de Laboratorio de Matemática, conforme a lo propuesto en este trabajo y se recopilaron las evidencias que permitieran dar pasó a la fase siguiente.

En la tercera etapa. Análisis y la producción de la documentación (tomado, IBD e ID). Se basó en la revisión, verificación y análisis a priori y posteriori de los aspectos que se pudieron identificar durante la aplicación de las fichas, por ejemplo, las producciones de los estudiantes, determinadas como evidencias, en las cuales, se destacaron los elementos considerados notables en relación al aprendizaje de las estructuras multiplicativas de tipo isomorfismo de medida; apostándole a la puesta en práctica de los tipos de problemas multiplicativos propuestos por Vergnaud (2004). Lo anterior, en relación con el marco conceptual y lo diseñado para el trabajo de campo, permitió dar respuestas a los interrogantes y objetivos que se plantearon, finalmente se exponen las conclusiones y las consideraciones finales a las que se llegó en este trabajo.

3.1 EL ESPACIO DE TRABAJO Y LOS PARTICIPANTES

La aplicación de las fichas (ficha Domi-Frut) y (ficha Tri-Color) se llevó a cabo en el laboratorio de matemáticas, este se adaptó fuera del salón de clases en un espacio libre, con dos mesas industriales grandes y sillas rimaxs. Para la ficha Domi-Frut se organizaron los estudiantes en dos grupos, y cada grupo se instaló en una mesa. Para la ficha Tri-Color se organizaron dos grupos y se despejo el espacio de las mesas, para colocar el tablero del juego en el piso y de esta manera poder llevar a cabo el desarrollo del juego.

Los participantes fueron los estudiantes del grado quinto (5°) de la (IERV). La temática abordada en los juegos aritméticos, es la resolución de problemas del tipo isomorfismo de medidas, con la característica de que estos están mediados, con objetos, frutas, y situaciones cotidianas, de la región pacífica. Las edades de los participantes oscilaron entre los 9 y 13 años, compuesto por un grupo de 26 niños.

3.2 ELABORACIÓN DE LOS JUEGOS

Los juegos aritméticos que se aplicaron son diseños propios de la indagación, el Domi-Frut se basó en el tradicional juego llamado domino, en esta versión se colocaron imágenes de frutos propios de la región pacifico, como: la pomarrosa, el chontaduro, la pipa, la caña y el borojo, y sus respectivos precios de venta, los cuales, se indagaron en la galería bellavista, del distrito. El juego Tri-Color se planteó con la idea de representar la bandera de Colombia. Las reglas de los juegos están especificadas en las fichas de laboratorio que se les proporciono a los estudiantes, estas se ilustran en la página 56 y 59.

Los materiales que se utilizaron para la creación de los juegos fueron: cartón paja, cartulinas de colores, papel de impresión, tijeras, pegante, reglas, colores y marcadores. Los instrumentos de recolección de datos fueron: las fichas del laboratorio, videos y anotaciones de lo observado. De igual manera, se grabó cada una de las secciones del laboratorio, lo cual, facilito la interpretación de las respuestas consignadas por los estudiantes en las fichas. Con la intención de que los estudiantes sean autóctonos en la construcción de sus conocimientos, el rol del docente en este caso, es ser observador y manejar el grupo.

3.3 FORMATO DE LAS FICHAS DE LABORATORIO

El siguiente formato de ficha de laboratorio, fue diseñado con base en los modelos propuesto por Arce (2004), y adaptado por Palacios (2019), de los cuales, en esta indagación se tomó partes del encabezado como el nombre de la ficha y la distribución de los espacios. De esta manera, se hizo una adaptación del formato, en este las fichas constan de dos caras, la primera cara: consta de un encabezado el cual, se compone con el nombre de la mesa, el nombre del juego y una imagen alusiva al juego, en la parte de abajo al lado izquierdo, se consignan las reglas del juego y al lado derecho, un recuadro con situaciones problemas del tipo isomorfismo de medidas. En la segunda cara; se encuentra la descripción del juego y los propósitos con los cuales se diseñó. A los estudiantes solo se les facilito la primera cara, puesto que esta es la que permite identificar y analizar sus respuestas y procedimientos. A continuación, se ilustran los formatos de las fichas.

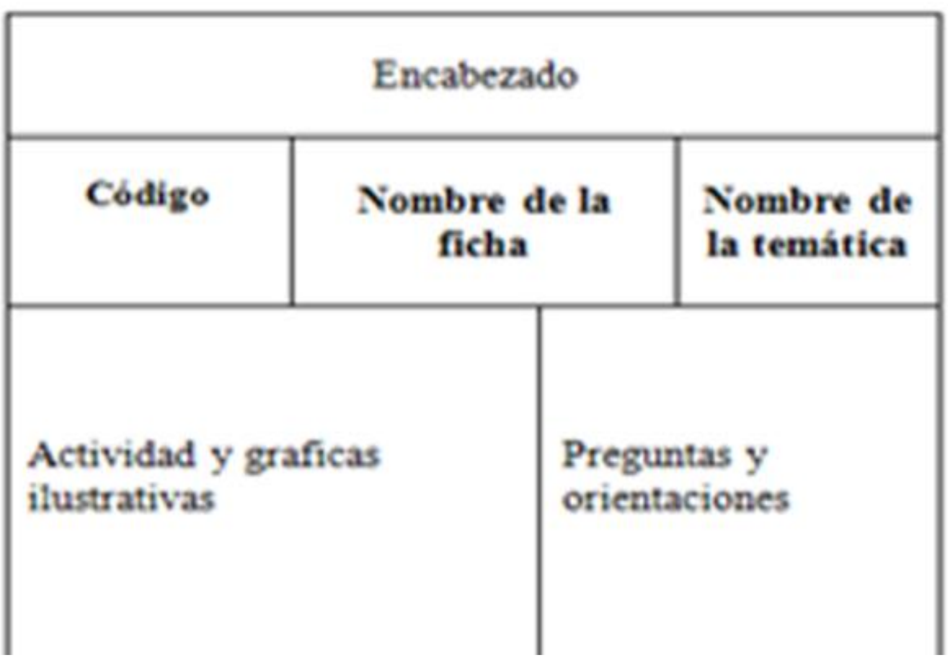
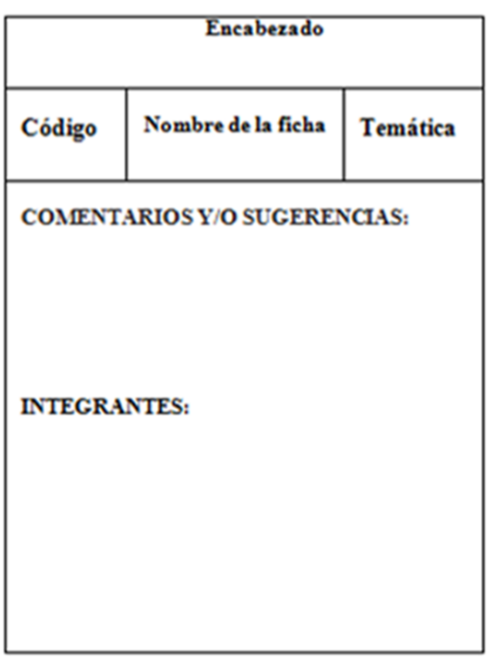


Ilustración 12. Cara de la ficha. Palacios (2019)


Encabezado
Código | Nombre de la ficha | Temática
COMENTARIOS Y/O SUGERENCIAS:
INTEGRANTES:

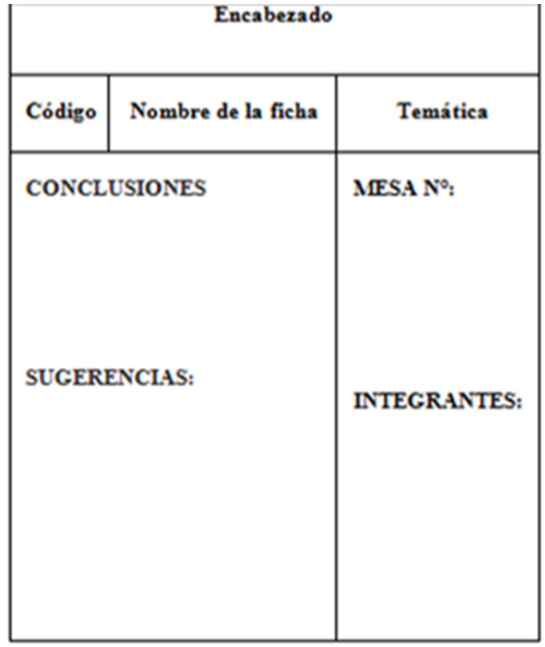

Encabezado
Código | Nombre de la ficha | Temática
CONCLUSIONES
MESA Nº:
SUGERENCIAS:
INTEGRANTES:

Ilustración 13. Reverso de la ficha. Palacios (2019)


NOMBRE DE LA MESA | NOMBRE DEL JUEGO | IMAGEN DEL JUEGO
REGLAS DEL JUEGO
RECUADRO PARA EL REGISTRO DE OPERACIONES
SITUACIONES PROBLEMAS

Ilustración 14. Cara de la ficha de esta indagación.

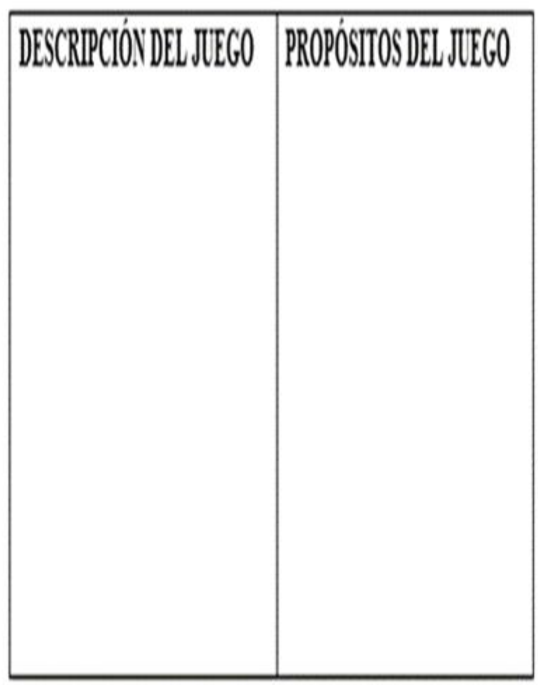
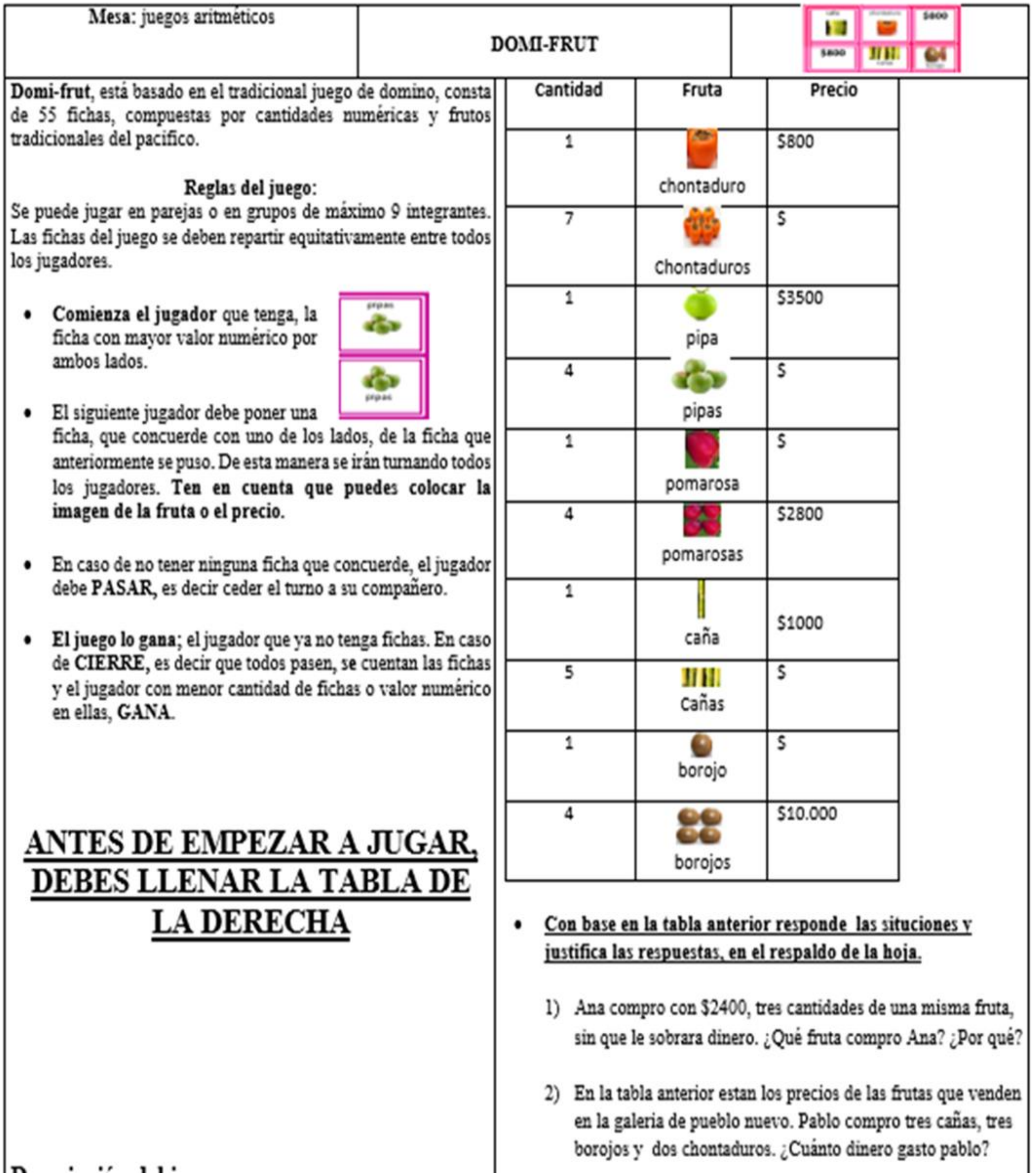

DESCRIPCIÓN DEL JUEGO | PROPÓSITOS DEL JUEGO

Ilustración 15. Reverso de la ficha de esta indagación.

3.3.1 Estructura ficha #1: juego Domi-Frut



Mesa: juegos aritméticos	DOMI-FRUT	

Domi-frut, está basado en el tradicional juego de domino, consta de 55 fichas, compuestas por cantidades numéricas y frutos tradicionales del pacifico.

Reglas del juego:
Se puede jugar en parejas o en grupos de máximo 9 integrantes. Las fichas del juego se deben repartir equitativamente entre todos los jugadores.

- **Comienza el jugador** que tenga, la ficha con mayor valor numérico por ambos lados.
- El siguiente jugador debe poner una ficha, que concuerde con uno de los lados, de la ficha que anteriormente se puso. De esta manera se irán turnando todos los jugadores. **Ten en cuenta que puedes colocar la imagen de la fruta o el precio.**
- En caso de no tener ninguna ficha que concuerde, el jugador debe **PASAR**, es decir ceder el turno a su compañero.
- **El juego lo gana**; el jugador que ya no tenga fichas. En caso de **CIERRE**, es decir que todos pasen, se cuentan las fichas y el jugador con menor cantidad de fichas o valor numérico en ellas, **GANA**.

ANTES DE EMPEZAR A JUGAR, DEBES LLENAR LA TABLA DE LA DERECHA

Cantidad	Fruta	Precio
1	chontaduro	$800
7	Chontaduros	$
1	pipa	$3500
4	pipas	$
1	pomarosa	$
4	pomarosas	$2800
1	caña	$1000
5	Cañas	$
1	borojo	$
4	borojos	$10.000

- **Con base en la tabla anterior responde las situciones y justifica las respuestas, en el respaldo de la hoja.**

1) Ana compro con $2400, tres cantidades de una misma fruta, sin que le sobrara dinero. ¿Qué fruta compro Ana? ¿Por qué?
2) En la tabla anterior estan los precios de las frutas que venden en la galeria de pueblo nuevo. Pablo compro tres cañas, tres borojos y dos chontaduros. ¿Cuánto dinero gasto pablo?

Ilustración 16. Estructura ficha #1. Domi-Frut

En la primera cara, en el lado izquierdo de la ficha están consignadas paso a paso las reglas del juego Domi-Frut. Como se muestra en la *ilustración 16*. En el lado derecho parte superior: se localiza un recuadro, en el cual se exponen el valor unitario de algunas frutas o el valor grupal, dejando espacios para que los estudiantes encuentren el valor faltante haciendo uso de las operaciones multiplicación y división, recuadro que al completar era necesario para el desarrollo del juego.

Cantidad	Fruta	Precio
1	chontaduro	$800
7	Chontaduros	$
1	pipa	$3500
4	pipas	$
1	pomarosa	$
4	pomarosas	$2800
1	caña	$1000
5	Cañas	$
1	borojo	$
4	borojos	$10.000

Ilustración 17. Lado derecho de la ficha, parte superior, recuadro de operaciones.

En la *ilustración 17,* se presentan dos tipos de problemas multiplicativos, división: búsqueda del valor unitario, en el caso de la pomarrosa y el borojo. Y multiplicación: búsqueda del valor total, en el caso del chontaduro, la pipa y la caña.

En la parte inferior: *ilustración 16,* se consignaron dos situaciones de problemas multiplicativos, relacionados con el recuadro anterior. En la primera situación se debe realizar una división para hallar el valor unitario. En la segunda situación se deben hacer tres multiplicaciones para encontrar valor total de unidades y una suma, es decir, que en esta situación se deben realizar dos operaciones, para hallar la respuesta, una de las características de las estructuras multiplicativas.

1) Ana compro con $2400, tres cantidades de una misma fruta, sin que le sobrara dinero. ¿Qué fruta compro Ana? ¿Por qué?

2) En la tabla anterior estan los precios de las frutas que venden en la galeria de pueblo nuevo. Pablo compro tres cañas, tres borojos y dos chontaduros. ¿Cuánto dinero gasto pablo?

Ilustración 18. Parte inferior lado derecho.

3.3.2 Estructura ficha #2: juego Tricolor

Resolución de problemas multiplicativos	**EL TRI-COLOR**	
Mesa: Juegos Aritméticos		

El Tri-Color: es un tablero de juego compuesto por dos columnas, la primera tiene los colores: amarillo, azul y rojo. La segunda columna tiene dos signos operativos, de suma (+) y multiplicación (x). La parte superior del tablero esta numerada del 1 al 7.

Reglas del juego:
Se puede jugar en parejas y en grupos de máximo 10 integrantes.

Para empezar el juego se elige al azar, que grupo lanza primero, siguiéndole el otro grupo.

- Los integrantes de cada grupo tendrán **la oportunidad de lanzar, en cada ronda una ficha,** a la primera columna del tablero, en caso de fallar el lanzamiento, cada jugador tiene dos oportunidades más, de lo contrario pierde el turno.
- Dependiendo del color (amarillo, azul y rojo) donde caiga la ficha, **deberán sacar una tarjeta del mismo color** la cual, les proporcionara una información.
- Esta tarjeta se leerá con todos los integrantes del grupo y **responderán, lo que les indique entre todos**. Tienen 2 minutos para responder. Luego de tener la respuesta, **volverán a lanzar la ficha** a la parte superior, del tablero.
- Si la respuesta no es correcta o no responden a tiempo **el grupo perderá 3 puntos**, y no podrá hacer el segundo lanzamiento.
- Según el número que **obtengan al lanzar parte superior, realizaran una suma o una multiplicación, con el resultado de la tarjeta**, esto depende del color donde haya caído la ficha en el primer tiro.
- Al realizar esa operación obtendrán **un número, ese será los puntos que acumularan, por cada ronda.**
- **<u>EL JUEGO LO GANA EL PRIMER GRUPO QUE OBTENGA 70 PUNTOS.</u>**

<u>NOTA: LLENA LA SIGUIENTE TABLA.</u>
<u>Donde dice tarjeta</u>: registra el número y el color de la tarjeta.
<u>Donde dice procedimiento:</u> coloca todo lo que realizaste para encontrar el resultado.
<u>Donde dice resultado:</u> escribe la solución de la situación.

REGISTRO DEL JUEGO

Tarjeta	Procedimiento	Resultado

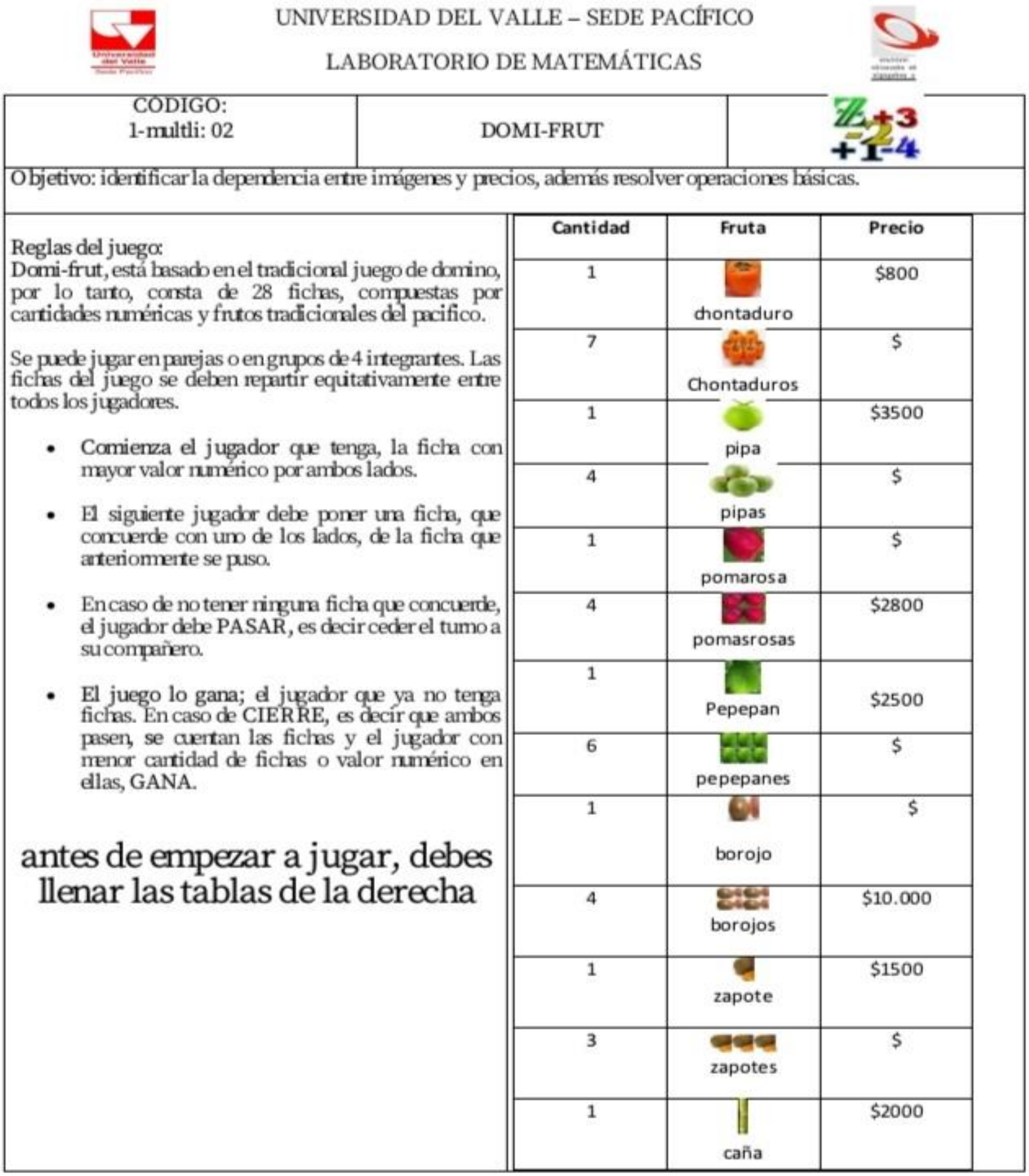
Ilustración 19. Ficha #2 juego Tricolor

En la primera cara: en el lado izquierdo de la ficha están consignadas paso a paso las reglas del juego Tricolor. En lado derecho de la ficha #2: se encuentra consignado un recuadro, en el cual, los estudiantes debían registrar el número y el color de las tarjetas obtenidas en cada ronda, el procedimiento utilizado para llegar al resultado y el resultado de la situación problema presentado en la tarjeta.

3.4 ANÁLISIS PREVIO DE LA FICHA #1: JUEGO DOMI-FRU

En este apartado, se exponen los objetivos y procedimientos que se esperaba por parte de los estudiantes de grado 5°, a la hora de resolver cada ficha diseñada en este trabajo, la cual, articula elementos y procedimientos en relación al aprendizaje de las estructuras multiplicativas de tipo isomorfismos de medida, en relación a dos de sus tres clases de problemas: Multiplicación de números enteros con cantidades pequeñas; *ilustración 16*, chontaduro, pipa y caña, y División: búsqueda del valor unitario; *ilustración 16*, pomarrosa y borojo.

Para el desarrollo de este juego se contempló hacer la aplicación en dos partes, en la primera se haría la entrega de la ficha, la cual, se esperaba que los estudiantes leyeran y comprendieran las instrucciones allí consignadas, en la segunda parte se llevaría a cabo el desarrollo del juego. En la primera aplicación del juego se presentaron dificultades, porque, el juego se volvía muy extenso para terminarse por la cantidad de fichas de domino y los estudiantes manifestaban que según como estaba representada la fruta zapote, esta no estaba entera, del mismo modo, se confundían en si el valor de la fruta pepepán era por cada pepita o la fruta completa. Al observar estas confusiones se optó por rediseñar la ficha y eliminar las frutas que ocasionaban las inquietudes.



UNIVERSIDAD DEL VALLE – SEDE PACÍFICO

LABORATORIO DE MATEMÁTICAS

CÓDIGO: 1-multli: 02	DOMI-FRUT	

Objetivo: identificar la dependencia entre imágenes y precios, además resolver operaciones básicas.

Reglas del juego:
Domi-frut, está basado en el tradicional juego de domino, por lo tanto, consta de 28 fichas, compuestas por cantidades numéricas y frutos tradicionales del pacifico.

Se puede jugar en parejas o en grupos de 4 integrantes. Las fichas del juego se deben repartir equitativamente entre todos los jugadores.

- Comienza el jugador que tenga, la ficha con mayor valor numérico por ambos lados.
- El siguiente jugador debe poner una ficha, que concuerde con uno de los lados, de la ficha que anteriormente se puso.
- En caso de no tener ninguna ficha que concuerde, el jugador debe PASAR, es decir ceder el turno a su compañero.
- El juego lo gana; el jugador que ya no tenga fichas. En caso de CIERRE, es decír que ambos pasen, se cuentan las fichas y el jugador con menor cantidad de fichas o valor numérico en ellas, GANA.

antes de empezar a jugar, debes llenar las tablas de la derecha

Cantidad	Fruta	Precio
1	chontaduro	$800
7	Chontaduros	$
1	pipa	$3500
4	pipas	$
1	pomarosa	$
4	pomasrosas	$2800
1	Pepepan	$2500
6	pepepanes	$
1	borojo	$
4	borojos	$10.000
1	zapote	$1500
3	zapotes	$
1	caña	$2000

Ilustración 20: primer diseño, ficha juego Domi-Frut.

El objetivo del domino de frutas, es fomentar el razonamiento y la identificación, de la proporción simple directa, que se da entre el valor de la fruta y la imagen de esta. Se pretendía que el estudiante solucionara problemas de proporción simple directa, presentados en la ficha: en la cual se les brinda el valor de la unidad de la fruta, o se les da el valor grupal y se le pide el valor unitario, de esta. De igual manera, pudieran identificar la correspondencia dada entre las frutas y el precio.

Se pretendía que los estudiantes Justificaran el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa; es por ello, que se presentó dentro de la ficha, el recuadro con el objetivo de tener un registro de los procedimientos que efectuarían los estudiantes, de esta manera permitiría analizar si efectivamente se resolvió de forma correcta la correspondencia de los precios.

La aplicación del juego se subdividió en dos partes:

1. La primera parte consistió en la aplicación y distribución de la ficha, compuesta por un recuadro distribuido en siete partes en las cuales: cinco de las partes, los estudiantes debían buscar el valor de la unidad, utilizando el algoritmo de la división, el valor de varias cantidades utilizando el algoritmo de la multiplicación, o cualquier tipo de relación que identificaran entre las cuatro cantidades, En las dos partes restantes se les presentaron dos situaciones problemas relacionadas con las cinco primeras partes que ya habían resuelto.
2. La segunda parte aplicación y ejecución del juego, consistía en que los estudiantes identificaran, que, aunque el juego del Domi-Frut, se asemeja al tradicional juego del domino, la esencia del Domi-Frut es el isomorfismo de medidas que se conserva

a lo largo de todo el juego, en este los estudiantes deberían tener presente lo que resolvieron en el recuadro, de la ficha en la primera parte de la aplicación.

En el desarrollo del juego, por ejemplo, se pretendía que los estudiantes, colocaran las fichas del domino de frutas y el estudiante que seguía, debía consultar en el recuadro, cuánto cuesta la fruta o qué valor le corresponde a la imagen de la fruta, y así sucesivamente ir respondiendo, conservando la correspondencia entre las imágenes y el valor de estas.

Ilustración 21. Ejemplificación desarrollo del juego, Domi-Frut

Ahora bien, las dos situaciones que se plantearon en la parte inferior del recuadro, tenían como objetivo que los estudiantes identificaran la relación del valor grupal de las frutas y el valor unitario de la mismas, haciendo uso de las relaciones que se presentan entre las cantidades y las frutas, o en su efecto llegaran a las respuestas por ensayo y error dado que, ya conocían los precios de las frutas, al resolver el recuadro.

3.5 ANÁLISIS PREVIO DE LA FICHA #2: JUEGO TRI-COLOR

Con este juego se pretendía que los estudiantes identificaran la relación cuaternaria, es decir la correspondencia inmediata que se da entre cuatro cantidades, variando estas entre sí. De la misma manera, a través de la información brindada, se esperaba que los estudiantes encontraran el valor unitario, el valor total o la cantidad de los objetos, frutas, alimentos… entre otros, según fuera el caso. También, se pretendía que los estudiantes adquirieran conocimientos significativos y colaborativos, dado que, en el juego anterior habían obtenido nociones familiarizadas con las nuevas situaciones expuestas en las tarjetas.

Así mismo, los estudiantes debían justificar el uso de representaciones y procedimientos de las situaciones planteadas en las tarjetas; es por ello, que en la ficha del juego se incluyó el recuadro con el objetivo de obtener un registro de los procedimientos que efectuarían los participantes, de esta manera, analizar si efectivamente resolvían de forma correcta la correspondencia de las diferentes situaciones.

3.5.1 Estructura del tablero de juego y contenido de las tarjetas.

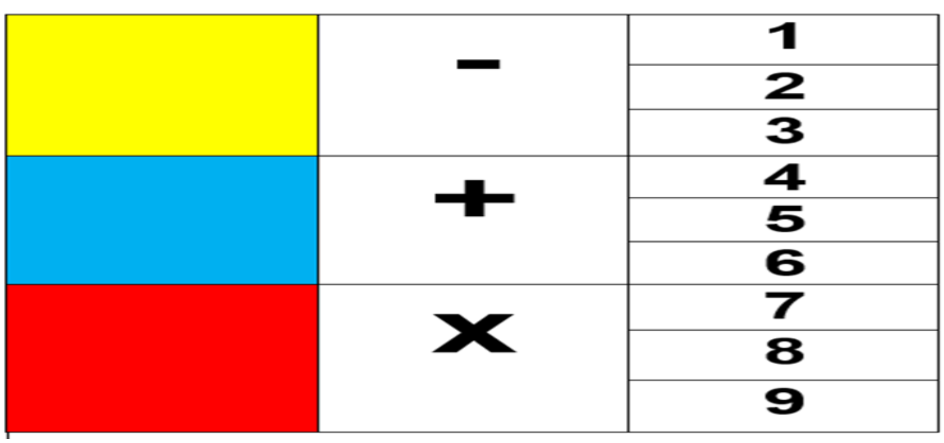


Ilustración 22. primer diseño del tablero del juego Tri-Color

En la ilustración 22, se muestra el primer diseño del tablero del jugo Tri-Color, en la aplicación de este se observó que, al corresponderle el signo negativo al color amarillo, los estudiantes ignoraban dicho color y trataban de solo obtener tarjetas azules y rojas, de igual modo, según la organización de los números en la tercera columna del tablero, los participantes adoptaban la estrategia de tirar la ficha a los números de mayor cantidad, dado que, tenían más posibilidades de obtenerlos, en consecuencia de estas observaciones se hizo un rediseño del tablero. con la intención de que no se siguieran presentándose estas dificultades.

Es importante mencionar, que el Tri-Color: es un tablero de juego compuesto por dos columnas, la primera tiene los colores: amarillo, azul y rojo. La segunda columna tiene dos signos operativos, de suma (+) y multiplicación (x). La parte superior del tablero esta numerada del 1 al 7. Los integrantes de cada grupo tendrían la oportunidad de lanzar, en cada ronda una ficha, a la primera columna del tablero. Dependiendo del color (amarillo, azul y rojo) donde caiga la ficha, deberán sacar una tarjeta del mismo color, la cual, les proporcionaría una situación problema.

En estas tarjetas se encuentran problemas cotidianos, relacionados con el contexto del estudiante, enunciados de forma gráfica y escrita, la intencionalidad de las tarjetas era conducir a los estudiantes a la resolución de problemas del tipo de isomorfismo de medidas. De una forma experimental.

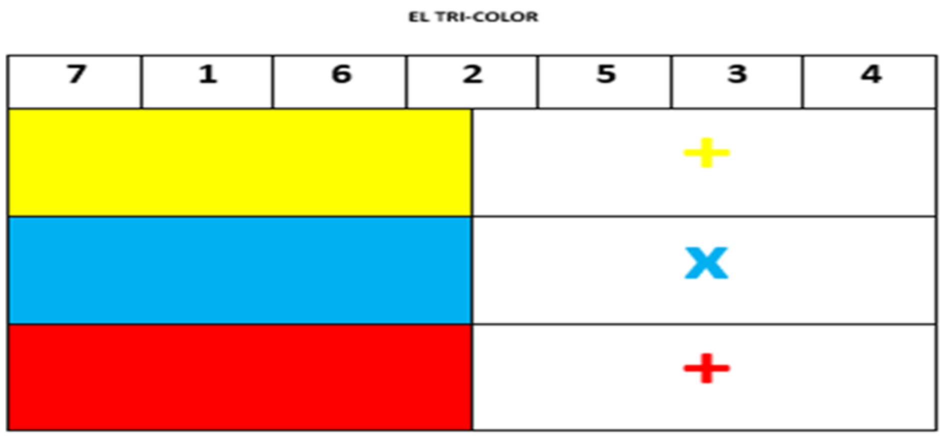


Ilustración 23. Rediseño de la estructura del tablero de juego.

Para el desarrollo de este juego se diseñaron dieciocho tarjetas por cada uno de los tres colores plasmados en la primera columna del tablero, con las cuales al resolverlas de forma correcta los estudiantes obtendrían puntos que sumarian o multiplicarían, dependiendo el color de las tarjetas, con los números de la parte superior del tablero de juego, para las situaciones propuestas en las tarjetas se tomó como referencia, las clases de problemas multiplicativos del tipo de isomorfismo de medidas que plantea Vergnaud (2004). Las tarjetas presentan los siguientes esquemas:

Multiplicación: en este tipo de situación, a los estudiantes se les proporciona el valor unitario del objeto o alimento, y ellos deben encontrar el valor grupal de las cantidades. En el esquema siguiente del lado derecho, (1) representa un objeto, (d) representa el valor unitario, (e) representa varios objetos y (x) representa el valor faltante, es decir el valor grupal de los objetos.

Ilustración 24. Multiplicación: búsqueda del valor total

Cantidad de sillas	precio
1	$8000
6	$48000

1 silla X 6 veces = 6 sillas 8000 pesos X 6 veces = 48000 pesos

Cantidad de sillas	precio
(a) 1	$8000
(b) 6	$48000

(a) $1\ \cancel{\text{silla}}\ \text{X}\ \frac{8000 pesos}{1 \cancel{silla}} = 8000$ pesos (b) $6\ \cancel{\text{sillas}}\ \text{X}\ \frac{8000 pesos}{1 \cancel{silla}} = 48000$ pesos

Ilustración 25. análisis vertical y horizontal de la ilustración #24.

División, búsqueda del valor unitario: en este tipo de situación, a los estudiantes se les proporciona el valor grupal de los objetos o alimentos, y ellos deben encontrar el valor unitario. En el esquema siguiente del lado derecho, (1) representa un objeto, (x) representa el valor faltante que en este caso es el unitario, (e) representa varios objetos y (f) representa el valor grupal de los objetos.

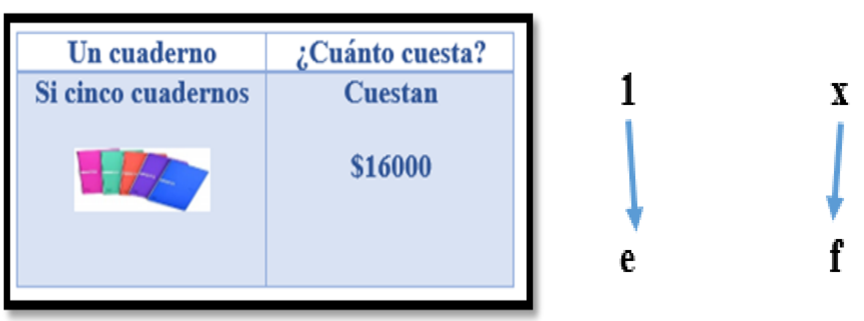


Ilustración 26. División: búsqueda del valor unitario.

Cantidad de cuadernos	precio
1	$3200
5	$16000

1 cuaderno X 5 veces = 5 cuadernos

3200 pesos X 5 veces = 16000 pesos

Cantidad de cuadernos	precio
(a) 1	$3200
(b) 5	$16000

(a) 1 ~~cuaderno~~ X $\frac{3200 pesos}{1 \cancel{cuaderno}}$ = 3200 pesos

(b) 5 ~~cuadernos~~ X $\frac{3200 pesos}{1 \cancel{cuaderno}}$ =16000 pesos

Ilustración 27. análisis vertical y horizontal de la ilustración #26.

División, búsqueda de la cantidad de unidades: en este tipo de situación, a los estudiantes se les proporciona la cantidad unitaria de los objetos o alimentos, y ellos deben encontrar la cantidad de objetos. En el esquema siguiente del lado derecho, (1) representa un objeto, (d) representa la cantidad de unidades que caben en un objeto, (x) representa la cantidad de unidades faltantes y (f) representa la cantidad grupal de unidades.

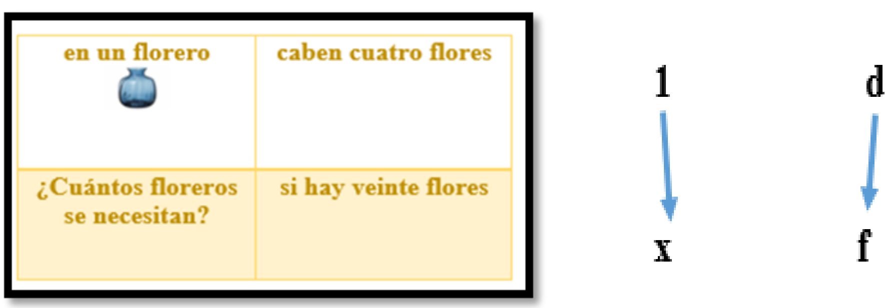


Ilustración 28. División: búsqueda de la cantidad de unidades.

numero de floreros	Cantidad de flores
1	4
5	20

1 florero X 5 veces = 5 floreros   4 flores X 5 veces = 20 flores

numero de floreros	Cantidad de flores
(a) 1 →	$4
(b) 5 →	$20

(a) 1 ~~florero~~ X $\frac{4 flores}{1 \cancel{florero}}$ = 4 flores   (b) 5 ~~floreros~~ X $\frac{4 flores}{1 \cancel{florero}}$ = flores

Ilustración 29. análisis vertical y horizontal de la ilustración #28.

Tarjetas Amarillas: Se diseñaron dieciocho tarjetas, en las cuales el tipo de problema multiplicativo por desarrollar es la división, búsqueda de la cantidad de unidades.

Tarjetas Azules: Se diseñaron dieciocho tarjetas, de las cuales, en seis de ellas se debe dividir para buscar la cantidad de unidades, en ocho deben Multiplicar, para hallar el valor grupal de los objetos o alimentos, y en los cuatro restantes deben dividir, para encontrar el valor unitario.

Tarjetas Rojas: Se diseñaron dieciocho tarjetas, en ellas, seis de tipo Multiplicativo para hallar el valor grupal de las unidades, y doce en las cuales, deben dividir para hallar valor unitario. Las 54 tarjetas están consignadas en los anexos.

3.6 INSTRUMENTOS PARA EL ANÁLISIS

Para realizar el análisis de las fichas de los juegos (Domi-frut) y (Tri-color) se tuvieron en cuenta el segundo y el tercer objetivo de esta indagación, los cuales son: identificar las estrategias, fortalezas y dificultades que presentan los estudiantes en los procesos de resolución de las estructuras multiplicativas, al hacer uso de fichas de laboratorio y analizar mediante la teoría de Vergnaud (2004), los resultados de las fichas consignados por los estudiantes y las reacciones entorno a los juegos aritméticos, para generar conclusiones.

Simultáneamente, se destacan tres ejes fundamentales para el desarrollo del análisis, estos son: el laboratorio de matemáticas dentro del cual se abordaron fichas con juegos aritméticos, la resolución de problemas tomada como competencia y el isomorfismo de medidas, esté, temática conceptual de las fichas, estos ejes se organizan en la siguiente ilustración:

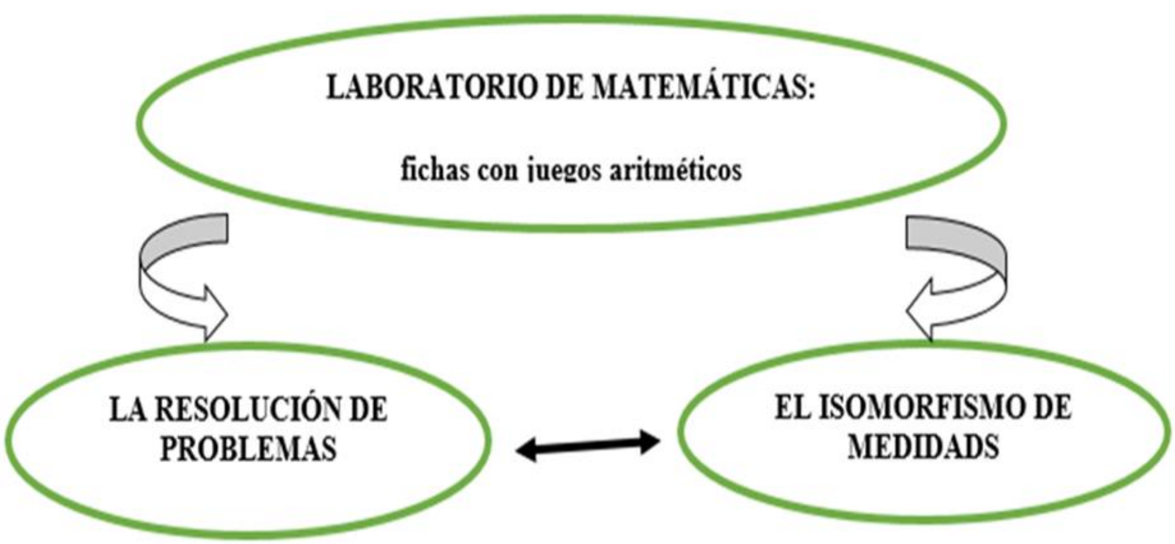


Ilustración 30. Ejes fundamentales para el análisis.

Así, la *ilustración 30*, se toma como eje central el laboratorio de matemática, dado que este a lo largo de la indagación, es el medio por el cual se expone la temática abordada y es la estrategia dinamizadora que permitió movilizar los conocimientos de los estudiantes, de una forma diferente a la tradicional. En el mismo orden de ideas, dentro de las fichas se abordó la temática del isomorfismo de medidas a través de la resolución de problemas, poniendo en manifiesto los diferentes tipos de problemas que este comprende.

Por lo tanto, uno de los propósitos en el análisis de las fichas es identificar como abordan los estudiantes las tres clases de problemas de isomorfismo de medidas, expuestos en la *ilustración 6*, de igual manera, se pretende plasmar las dificultades, estrategias y fortalezas que se evidenciaron en los estudiantes, entorno a las fichas y en el desarrollo de los juegos.

Con base en teoría de los campos conceptuales y las estructuras multiplicativos de Vergnaud (1990-2004) y las investigaciones de cerritos (2012), Bosch (2012) e Ivars y Fernández (2016) se caracterizan lo siguiente, codificadas entre paréntesis:

<u>Dificultades</u>: se entiende como dificultad todo lo que le impide al estudiante desarrollar sus competencias y adquirir o afianzar aprendizajes, entre estas se destacan No Distinguir las Relaciones que se presentan en el Isomorfismo de Medidas (NRIM), hacer uso del Algoritmo Inverso (AI) y de Modelos Intuitivos (MI).

<u>Estrategias:</u> se conoce como estrategia las pautas, procedimientos y acciones que ejecutan los estudiantes para llevar a cabo las situaciones propuestas, entre ellas se encuentran hacer Uso de Algoritmos (UA), Conteo por Ensayo Y Error (CEEr), Adición Iterada (AIt), uso del Valor Unitario (VU), Búsqueda del Valor Grupal (BVG), uso de Hecho Numérico (HN).

fortalezas: son fortalezas el logro de aprendizajes y el desarrollo de competencias tales como la Identificación de los Espacios de Medidas (IEM), uso de la Relación Cuaternaria (RC), uso de la Constante (C) y el Escalar (E), utilización de Tablas o Listas de Correspondencia (TC o LC), Trabajo Colaborativo (TCo).

Todo esto se consigna en el siguiente recuadro el cual es instrumento de análisis.

Características / **Tipos de problemas**	**FORTALEZAS**	**ESTRATEGIAS**	**DIFICULTADES**
División: búsqueda de la unidad.			
División: búsqueda de la cantidad de unidades.			
Multiplicación.			
Desarrollo del juego.			

Tabla 1. Tabla de observación

En esta tabla se hace un cruce entre los tres tipos de problemas multiplicativos que presenta el isomorfismo de medidas, el desarrollo del juego y las características que se pudieran presentar en los procesos de resolución de los estudiantes, al abordar las dos fichas de laboratorio.

CAPÍTULO IV.

IV. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

En este capítulo se presentan los análisis obtenidos al poner en marcha las fichas de los juegos (Domi-frut) y (Tri-color), se resaltan las fortalezas, estrategias y dificultades, que se identificaron en los procedimientos de los estudiantes plasmados en las fichas, también se muestran algunas expresiones dichas por los estudiantes considerados relevantes, en el desarrollo del juego, al igual que, se expresan las conclusiones y resultados que surgieron de los análisis y algunas consideraciones finales.

4.1 ANÁLISIS DEL RECUADRO Y SITUACIONES PROPUESTAS EN LA FICHA DEL DOMI-FRUT

A continuación, se exponen los procedimientos que efectuaron los estudiantes en el desarrollo de la ficha (Domi-frut).

1	pomarosa	$
4	pomarosas	$2800

Ilustración 31. Búsqueda del valor unitario (pomarrosas).

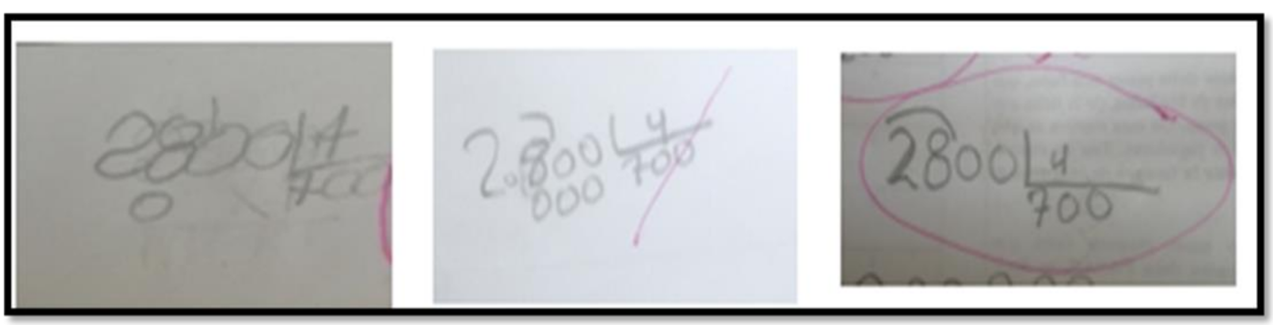


Ilustración 32. Procedimiento, búsqueda del valor unitario.

Es importante destacar, que en la *ilustración 32,* los estudiantes identificaron que para hallar el valor de la unidad tenían que realizar una división partitiva en la cual de acuerdo con Nesher (1988), se hace una división de la cantidad total en partes iguales para conocer el tamaño de las partes, en este caso en particular los estudiantes dividen el precio total de las pomarrosas y la cantidad total que se había comprado de estas, así al hacer Uso del Algoritmo (UA) de acuerdo con Ivars y Fernández (2016), esto se caracteriza como una estrategia dado que, diferencian los dos espacios de medida es decir relacionan la cantidad de frutas con el precio, notando que las 4 pomarrosas cuestan 2800 y dividen el precio de las pomarrosas entre su cantidad, para conocer el precio de la constante de proporcionalidad o valor unitario por lo tanto implícitamente ellos hacen uso de una relación funcional como se muestra a continuación:

Cantidad de pomarrosas	**precio**
(a) 1 →	**$700**
(b) 4 →	**$2800**

(a) 1 $\cancel{\text{pomarrosa}}$ X $\frac{700pesos}{1\cancel{pomarrosa}}$ = 700pesos **(b)** 4 $\cancel{\text{pomarrosas}}$ X $\frac{700pesos}{1\cancel{pomarrosa}}$ = 2800pesos

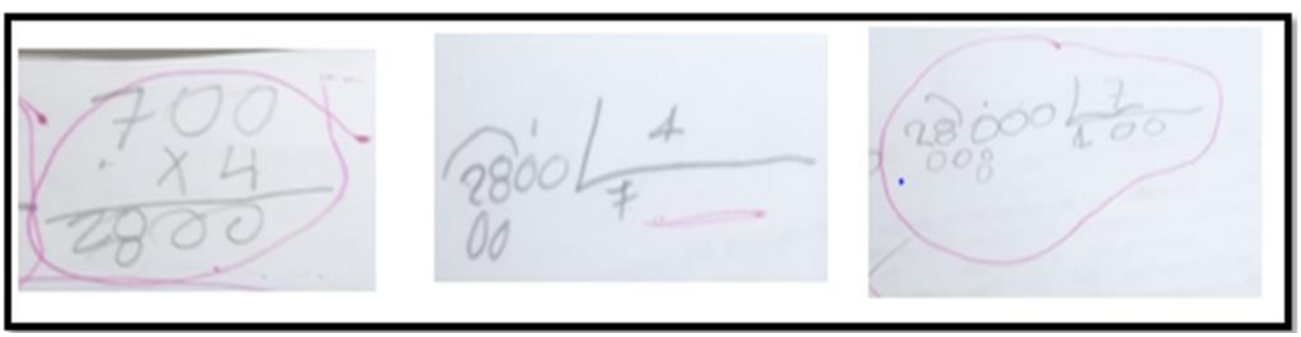


Ilustración 33. Procedimiento, búsqueda del valor unitario.

Por otro lado, en la i*lustración 33*, los estudiantes identificaron que tenían que hacer uso de una división o una multiplicación, en el caso de la división presentaron dificultades para desarrollar correctamente el procedimiento, sin embargo, se les reconoce la intención de encontrar el Valor Unitario (VU), esto se caracteriza como una fortaleza dado que están diferenciando las relaciones que se presentan entre las cuatro cantidades, con base en Vergnaud (2004) en el isomorfismo se presentan dos relaciones la horizontal y la vertical, en este caso en particular los estudiantes relacionaron los valores de manera vertical es decir de abajo hacia arriba diferenciando el valor grupal de las pomarrosas y la cantidad total que se compraron de estas para así encontrar el valor unitario.

En el caso de encontrar el valor unitario de los borojos, el 33% de los estudiantes utilizaron el algoritmo de la división y el 67% restante no registraron procedimientos, sin embargo, rellenaron el recuadro con el valor solicitado.

1	borojo	$
4	borojos	$10.000

Ilustración 34. Búsqueda del valor unitario (borojo).

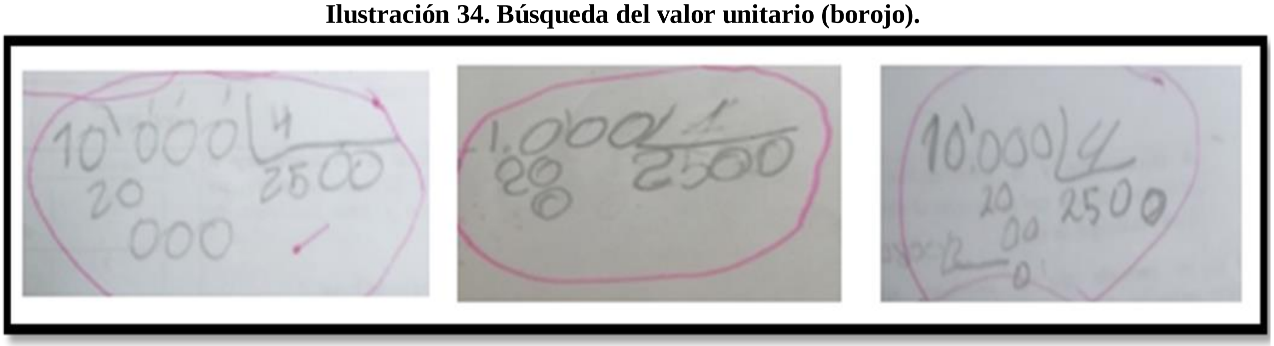


Ilustración 35. Procedimiento, búsqueda del valor unitario.

En la *ilustración 35,* los estudiantes hacen un reparto del precio total de los borojos y la cantidad que se compró de estos, para hallar el valor unitario, utilizando el algoritmo de la división, al hacer uso de esta estrategia se puede afirmar que se está logrando un paso del pensamiento aditivo al multiplicativo, de acuerdo Bosch (2012), lograr este paso en un proceso que se va adquiriendo año tras año según sean los modelos intuitivos que tengan los estudiantes.

En el mismo orden de ideas, se observó en las respuestas de las fichas que los estudiantes al resolver en el recuadro *ilustración 16,* operaciones que involucraban multiplicaciones de números enteros con cantidades pequeñas, presentaban menores dificultades que en la primera parte en la cual tenían que hacer una división partitiva para encontrar el valor unitario de las frutas. También se encontró que gran parte de los estudiantes resolvían las situaciones haciendo uso de la Adicción Iterada (AIt) esta operación con base en Bosch (2012), es base del algoritmo de la multiplicación dado que a medida que pasa el tiempo los estudiantes desarrollan capacidades para identificar que se puede pasar de los esquemas aditivos al multiplicativo, lo cual se caracteriza como una estrategia a continuación se expondrá lo que sucedió en cada uno de los casos:

En el primer caso, <u>multiplicación: números enteros cantidades pequeñas</u>, se trataba de encontrar el valor grupal de siete chontaduros, teniendo el valor unitario, el 50% de los estudiantes lo resolvió utilizando el algoritmo de la multiplicación; el 25% lo resolvió utilizando la adicción iterada, los restantes no registro procedimientos.

Cantidad	Fruta	Precio
1	 chontaduro	$800
7	 Chontaduros	$

Ilustración 36. Búsqueda del valor total (chontaduro)

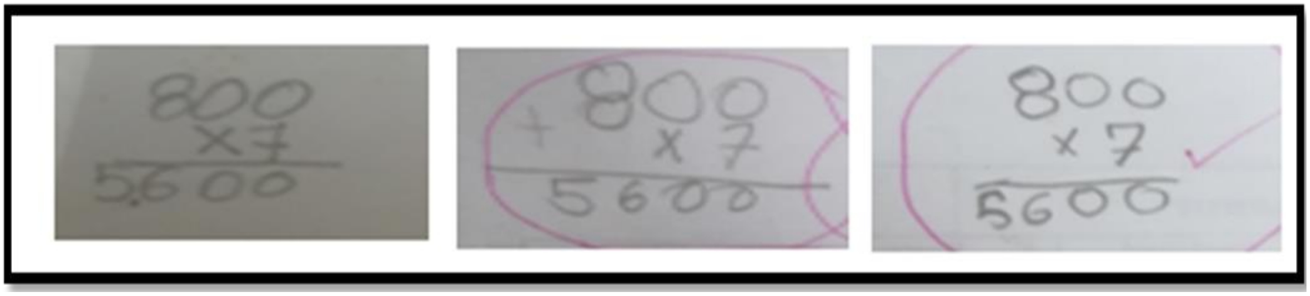


Ilustración 37. Procedimiento, búsqueda del valor total (chontaduro)

En la *ilustración 37*, se identifica que los estudiantes notaron el valor unitario del chontaduro y que, para encontrar el valor grupal de estos, debían hacer uso de una multiplicación viéndose esto como una estrategia, con base en Ivars y Fernández (2016), en los problemas de isomorfismo de medidas, resulta más fácil para los estudiantes cuando deben hacer una multiplicación en vez de una división. Implícitamente reconocen el valor unitario como una constante de proporcionalidad debido a que, sin expresarlo ellos relacionan que se puede saber el precio total para cualquier cantidad de chontaduros si multiplican por el valor unitario ($800), implícitamente hacen uso de la multiplicación como función. Análisis funcional que se ilustra de la siguiente manera:

Cantidad de chontaduros	precio
(a) **1** →	**$800**
(b) **7** →	**$5600**

(a) $1\ \cancel{\text{chontaduro}} \text{ X } \frac{800pesos}{1\cancel{chontaduro}} = 800\text{pesos}$ **(b)** $7\ \cancel{\text{chontaduro}} \text{ X } \frac{800pesos}{1\cancel{chontaduro}} = 5600\text{pesos}$

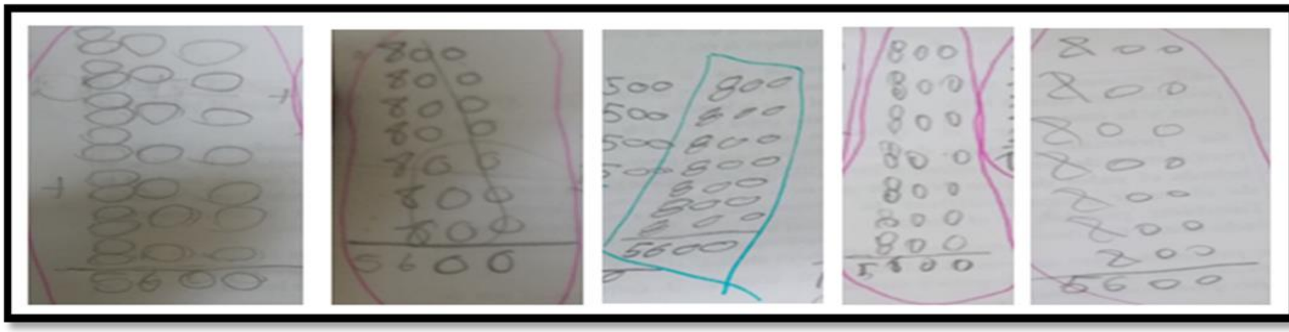
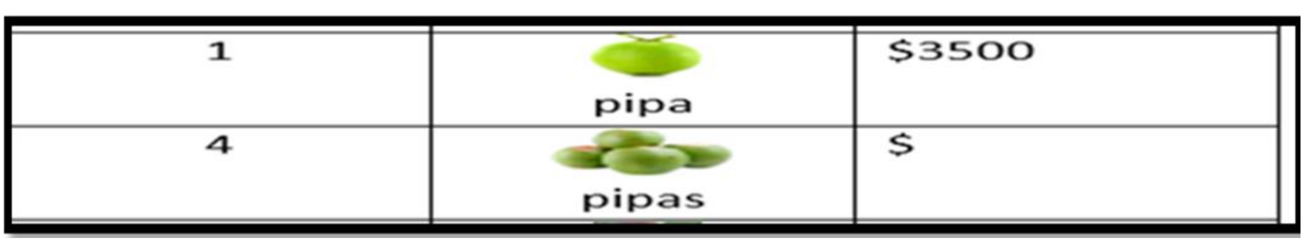


Ilustración 38. Respuestas por adición iterada (chontaduro)

Como se muestra en *la ilustración 38*, la adición iterada es la estrategia más usada por los estudiantes dado que, al pasar de un ciclo escolar a otro estos van adquiriendo concepciones y modelos intuitivos, que en ocasiones se convierten en obstáculos para adquirir nuevos conocimientos, sin embargo, los estudiantes poco a poco logran pasar del pensamiento adictivo al multiplicativo, en relación con esto, autores como Cerritos (2012), Bosch (2012) e Ivars y Fernández (2016), manifiestan que a los estudiantes se les debe hacer un acercamiento al pensamiento multiplicativo, desde los primeros años de escolaridad, para que de esta manera ellos vayan adquiriendo nociones de dicho pensamiento.

En el segundo caso, los estudiantes tenían que encontrar el valor grupal de cuatro pipas, teniendo el valor unitario de estas, se identificó que algunos estudiantes recurrieron a la estrategia de hacer Uso del Algoritmo (UA) de la multiplicación, la gran mayoría lo resolvió utilizando la adicción iterada y los demás estudiantes no registraron procedimientos.



1	pipa	$3500
4	pipas	$

Ilustración 39. Búsqueda del valor grupal (pipas)

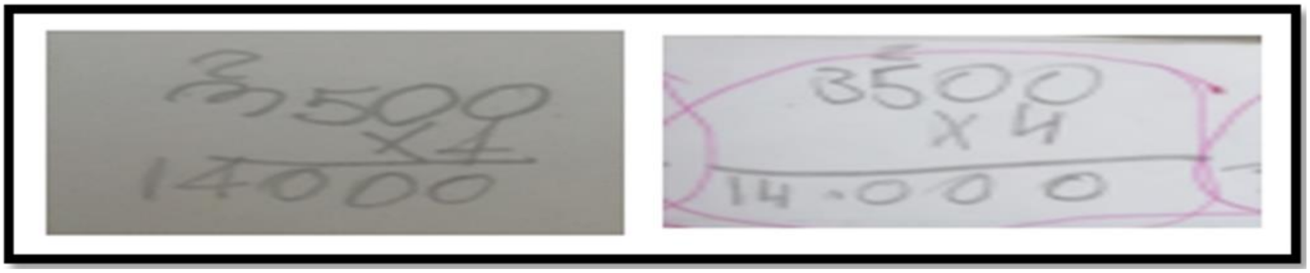


Ilustración 40. Respuesta búsqueda del valor grupal (pipas)

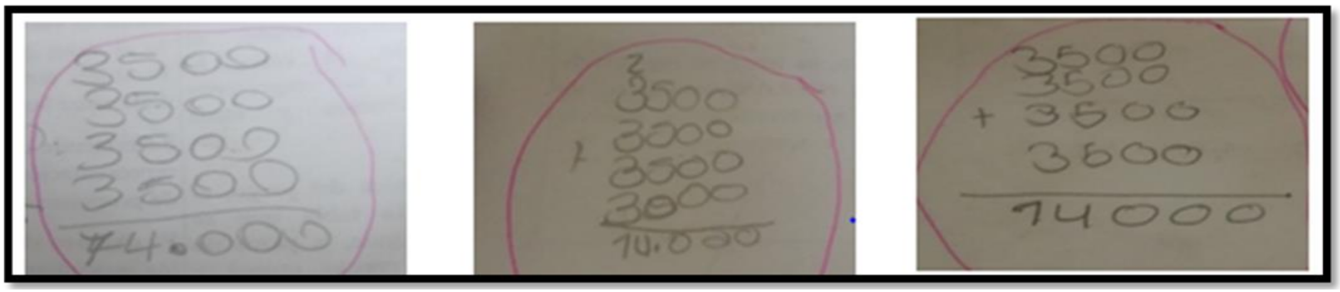
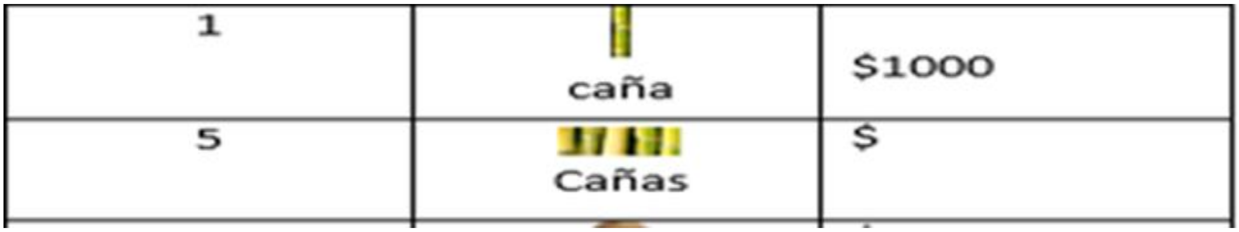


Ilustración 41. Respuesta, búsqueda del valor grupal, por suma iterada (pipas)

Es así, como en las *ilustraciones 40* y *41*, los estudiantes utilizaron dos estrategias diferentes, en las cuales se les reconoce la diferenciación implícita que hacen entre la cantidad de las pipas y su precio, aunque la mayoría de los estudiantes optaron por hacer adiciones se destaca que esta estrategia de acuerdo con Bosch (2012), es una base fundamental para realizar algoritmos y de allí pasar hacer relaciones tanto verticales y horizontales, dado que, ya han identificado los espacios de medidas en este caso particular cantidad de pipas y precio.

En el tercer caso, los estudiantes tenían que encontrar el valor grupal de cinco cañas teniendo el precio unitario de estas, la mayoría de los estudiantes no registraron procedimientos, sin embargo, rellenaron con el valor correcto el recuadro, de lo cual se puede afirmar que hay tratamientos que resultan sencillos para los estudiantes y ellos consideran que no es necesario realizar procedimientos. Simultáneamente, en las *ilustraciones 43* y *44* se identifican dos estrategias en los procesos de solución de los estudiantes el uso del algoritmo y la adición iterada.



1	caña	$1000
5	Cañas	$

Ilustración 42. Búsqueda del valor grupal (cañas).

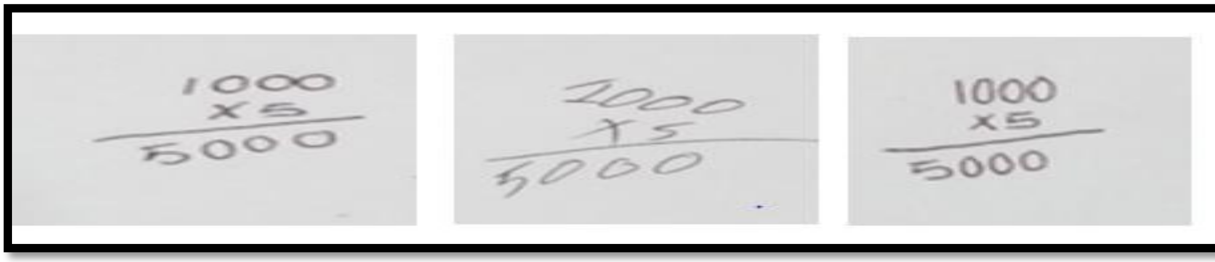


Ilustración 43. procedimiento, búsqueda del valor grupal (cañas).

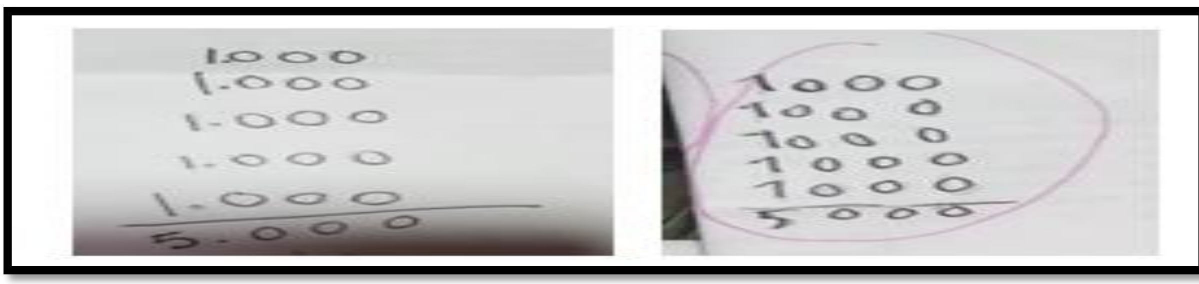


Ilustración 44. Respuesta, por adición iterada (cañas).

En el mismo orden de ideas, en las dos situaciones que singuen a continuación se tenía como objetivo que los estudiantes identificaran la relación del valor grupal de las frutas y el valor unitario de la mismas, haciendo uso de los algoritmos de la multiplicación y división o en su efecto llegaran a identificar las relaciones que se presentan entorno a las cuatro cantidades, dado que, ya conocían los precios de las frutas al haber encontrado el valor de cada una de ellas. Aquí se exponen las situaciones y los resultados de la aplicación de la misma:

Situación uno:

Ana compro con $2400, tres cantidades de una misma fruta, sin que le sobrara dinero. ¿Qué fruta compro Ana? ¿Por qué?

En esta situación se identificó que la mayoría de los estudiantes optaron por tomar como constante el precio unitario del chontaduro y multiplicarlo por (3), con la intención de que concordara con los ($2400) pesos información que brindaba el problema, esta afirmación se hace con base en lo que consignaron los estudiantes en la ficha *ilustraciones 45, 46* y *47*. Es importante destacar, que según Ivars y Fernández (2016), lo que ellos hicieron se conoce como la estrategia de Hecho Numérico (HN), el cual, consiste en hacer uso de las tablas de multiplicar.

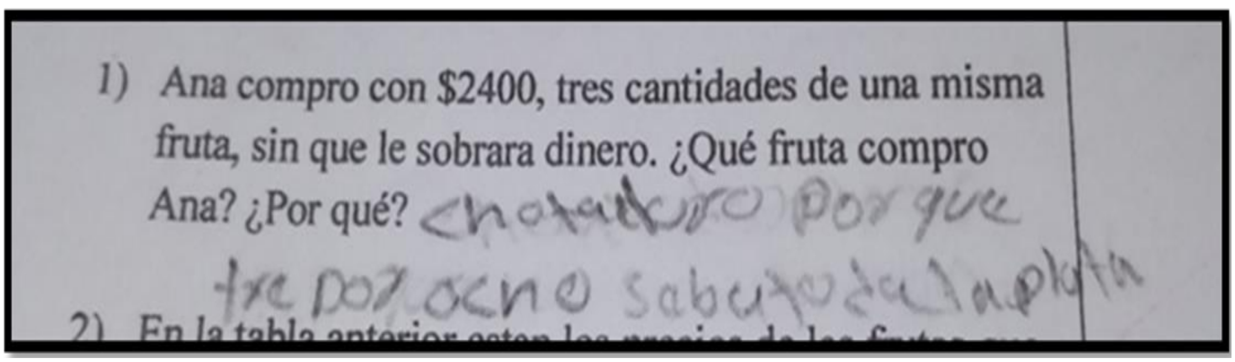

1) Ana compro con $2400, tres cantidades de una misma fruta, sin que le sobrara dinero. ¿Qué fruta compro Ana? ¿Por qué?

Ilustración 45. A: respuesta situación 1 (ficha Domi-Frut)

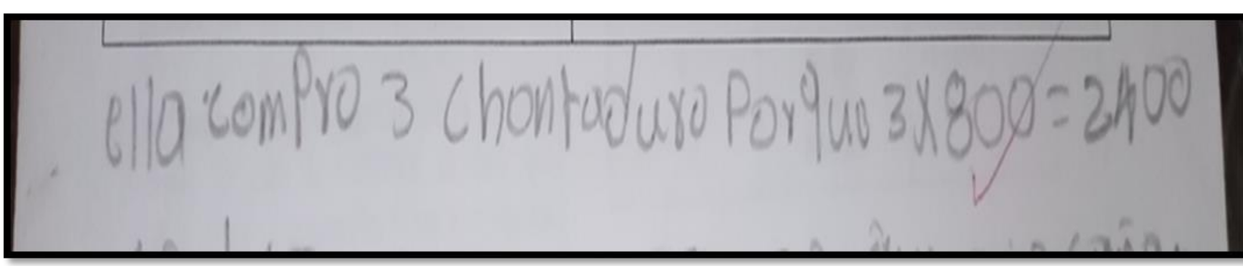

ella compro 3 chontaduro porque 3X800=2400

Ilustración 46. B: respuesta situación 1 (ficha Domi-Frut)

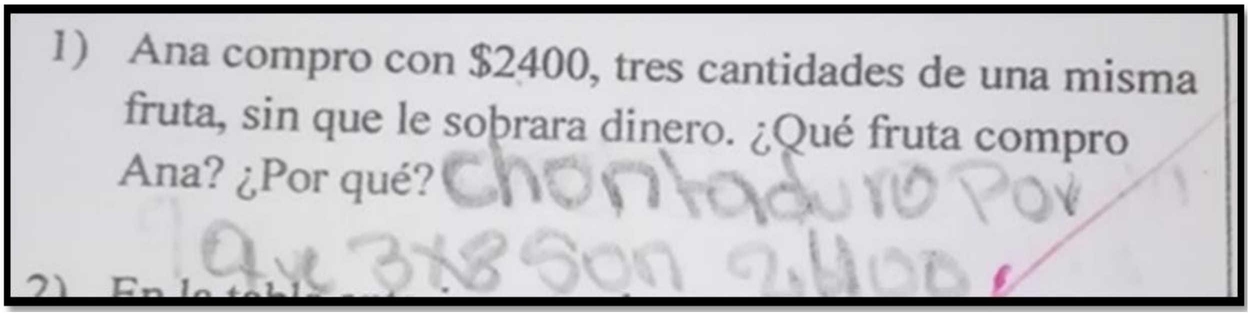

1) Ana compro con $2400, tres cantidades de una misma fruta, sin que le sobrara dinero. ¿Qué fruta compro Ana? ¿Por qué? Chontaduro Por 9ue 3x8 Son 2.400

Ilustración 47. C: respuesta situación 1 (ficha Domi-Frut)

Situación dos:

En la tabla anterior están los precios de las frutas que venden en la galería de pueblo nuevo. Pablo compro tres cañas, tres borojos y dos chontaduros. ¿Cuánto dinero gasto pablo?

En esta se identificó en los procesos de resolución de los estudiantes, *ilustraciones 48, 49* y *50*, que primeramente concibieron encontrar los valores grupales de las cañas, los borojos y los chontaduros, algunos utilizaron como estrategia el uso del algoritmo de la multiplicación y otros la adición iterada, después de encontrar los valores sumaron dichas cantidades para responder la pregunta de la situación, de lo anterior de acuerdo con Polya (1945) y Vergnaud (1990) los estudiantes comprendieron la situación, identificaron que operaciones les permitiría encontrar la solución, realizaron las operaciones y justificaron sus respuestas, viéndose estos procesos como fortalezas.

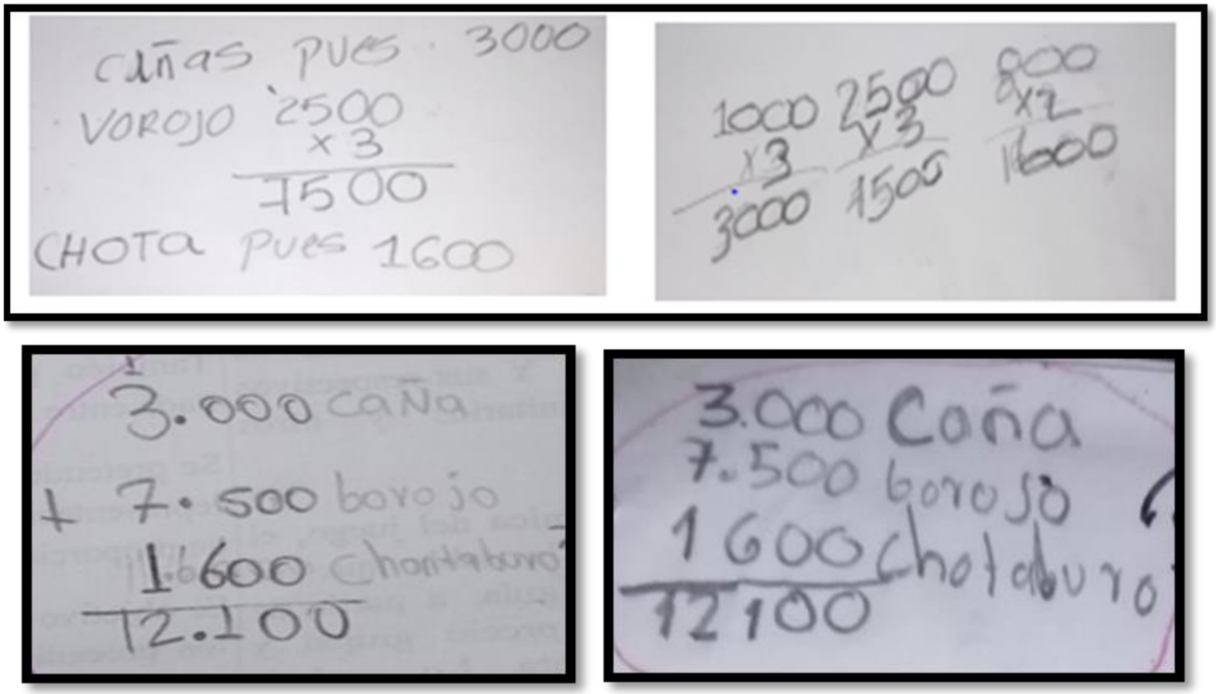


Ilustración 48. Procedimiento, Situación 2.

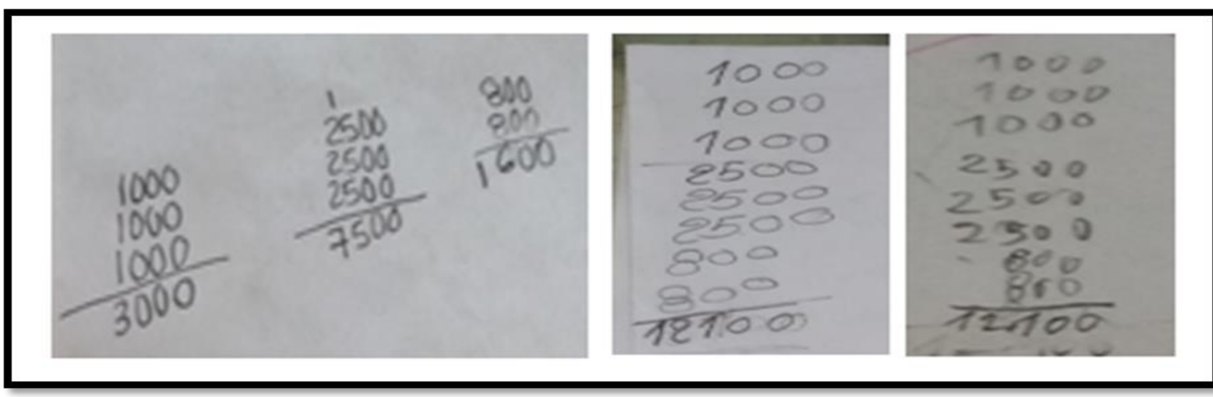


Ilustración 49. procedimiento, por adición iterada situación 2.

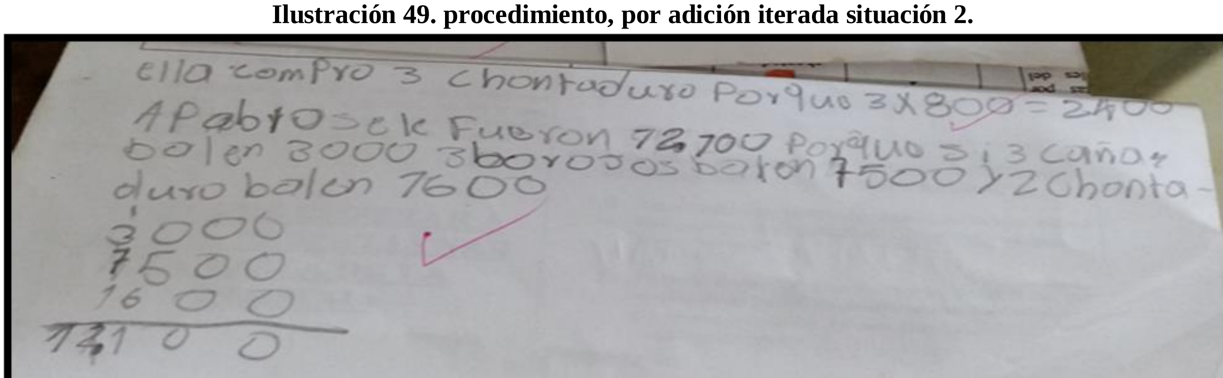


Ilustración 50. Justificación, situación 2 (A)

Cabe señalar, que al terminar de rellenar el recuadro de la ficha y de resolver las situaciones propuestas los estudiantes entre todos socializaron los resultados que habían consignado y entre ellos se corrigieron las diferencias que algunos tenían en los precios de la fruta. Después se organizaron en grupos de 8 jugadores, se les entrego el juego Domi-Frut y se dispusieron a jugar. Al observar el desarrollo del juego se prestó especial atención en que se conservara la correspondencia correcta entra la imagen de las frutas y sus precios, a continuación, se exhibirán algunos de los comentarios que realizaron los estudiantes en el desarrollo del juego:

Estudiante (1): "profe si en esa ficha esta la pomarrosa, me toca a mi y yo tengo aqui $700 pesos, le puedo dar cierto? "

Estudiante (2): "yo tengo una ficha con $800 pesos y otra con la imagen de un chontaduro, le puedo dar con cualquiera de las dos"

Estudiante (3): "ehhhh usted tiene la foto de una pipa y allí en la ficha hay $3500 pesos eso cuesta una pipa, por qué vas a pasa?"

Estudiante (4): "no me meta esa ficha que allí no va, porque allí hay cuatro pipas y usted me está colocando una sola pipa"

Ilustración 51. Comentarios grupos de estudiantes.

Estudiante (5): "una sola caña vale $1000 pesos, no puede meter 5 cañas, porque valen $5000 pesos no es lo mismo"

Estudiante (6): "movete ve alli hay 7 chontaduros y vos tenes una ficha con $5600 pesos, eso es lo que valen los 7"

Estudiante (7): "a vos que te pasa? como vas a poner la ficha de la pomarrosa si alli hay un chontaduro, el chontaduro vale $800 pesos y la poma vale $700 no valen igual"

Ilustración 52. Comentarios grupo de estudiantes. Parte 2.

Ahora bien, de la *(ilustración 51)* se pudo identificar que los *estudiantes 1* y 2, reconocieron la correspondencia entre la imagen de las frutas (pomarrosa y chontaduro) y el precio unitario de estas ($700 y $800) pesos, al expresar que al tener la imagen de estas podían proceder a colocar las fichas dado que estaban en juego los valores unitarios de cada una, viéndose esto con base en Vergnaud (2004) como una fortaleza puesto que están diferenciando el espacio de medidas de la cantidad de frutas y el espacio de medida del precio de las frutas. Simultáneamente el *estudiante 3,* también identifica dicha correspondencia y hace ver a su compañero que no lo ha notado. *El estudiante 4*, reconoce que no es igual tener la imagen de la unidad de una fruta, que tener la imagen de varias unidades de la misma fruta, y se lo hace ver a su compañero.

En el mismo orden de ideas, en la (*ilustración 52)* el *estudiante 5*, reconoce que la caña tiene un precio unitario ($1000) pesos y este es diferente que el precio grupal de las 5 cañas ($5000) por lo tanto, le hace notar a su compañero que no debe colocar aquella ficha, esto se ve como una fortaleza porque el estudiante al diferenciar el valor unitario del valor grupal implícitamente esta relacionando las cuatro cantidades de forma horizontal es decir de izquierda a derecha, con base en Vergnaud (2004) estas relaciones se presentan en el isomorfismo de medidas. El *estudiante 6*, identifica el precio grupal de los chontaduros y la concordancia entre la imagen de estos y su valor, hace notar a su compañero que puede jugar con esa ficha, viéndose esto como una fortaleza dado que de manera implícita el estudiante reconoce el escalar que en este caso en particular es (7veces), y lo relaciona multiplicándolo por el valor unitario, asociándolo con el valor grupal asi:

800 pesos X 7 veces = 5600 pesos

El *estudiante 7*, nota el valor unitario de la pomarrosa y el valor unitario del chontaduro y le explica a su compañero que los precios son diferentes y no hay correspondencia entre la imagen de un chontaduro, con la imagen de una pomarrosa, esto se describe como una fortaleza porque está diferenciando la constante proporcional de la pomarrosa de la del chontaduro y a su vez identifica que estas no se relacionan.

Así, los comentarios de las *ilustraciones 51 y 52*, se obtuvieron de las observaciones y de las grabaciones de la aplicación, el desarrollo del juego se llevó a cabo según lo esperado, la mayoría de los estudiantes entendieron la dinámica, identificaban la relación de los precios unitarios y grupales, con la imagen de las frutas, se corregían entre ellos mismos e hicieron uso del recuadro que habían resulto, para corroborar que las fichas que se ponían en juego correspondieran la una con la otra, visto esto como una fortaleza, los estudiantes se mostraron interesados y entusiastas en el transcurso del juego.

4.2 ANÁLISIS DE LA APLICACIÓN Y DESARROLLO DEL JUEGO TRI-COLOR.

Para el desarrollo del juego se contó con la participación de 14 estudiantes, debido a que el barrio lleras se encontraba en una situación de inseguridad y por precaución los padres no enviaban los niños al colegio. Los 14 estudiantes se repartieron en dos grupos de 7, se le proporciono a cada grupo la ficha del juego Tri-Color y se les pidió que leyeran detenidamente las instrucciones para luego proceder a jugar, cada grupo hizo un total de 7 lanzamientos, estos se describirán a continuación:

Las tarjetas que se obtuvieron en los lanzamientos tienen el esquema de problemas multiplicativos del tipo isomorfismo de medidas basado en Vergnaud (2004), tomando tres clases: división búsqueda del valor total, división búsqueda de la cantidad de unidades y Multiplicación números enteros con cantidades pequeñas. Diferenciándose de la ficha de laboratorio Domi-fru en la cual solo se abordaron dos clases de problemas entorno a las frutas más típicas del pacifico. Los problemas de las tarjetas tienen situaciones cotidianas variadas, el análisis de los procedimientos efectuados por los estudiantes se hizo agrupando las tarjetas según las clases de problemas ya mencionados.

<u>División: búsqueda del valor total</u>

- En el primer lanzamiento, el grupo #1 obtuvo la tarjeta azul #4.

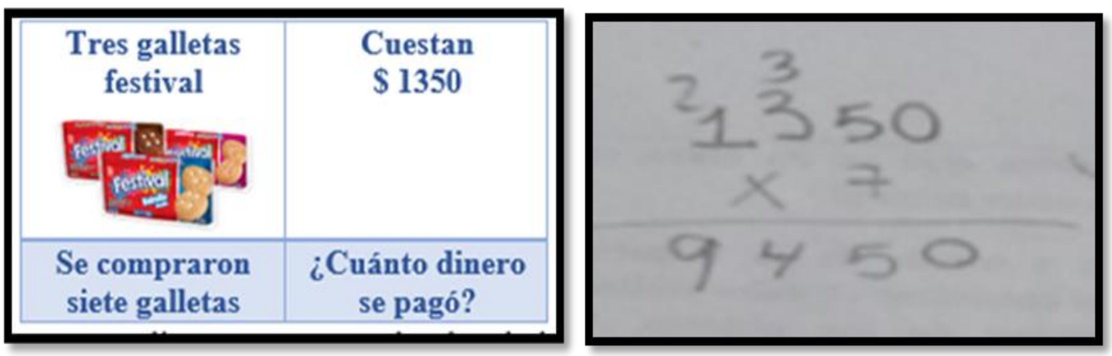


Ilustración 53. Respuesta tarjeta azul #4

- El grupo número 2, en el tercer lanzamiento obtuvieron la tarjeta azul # 15.

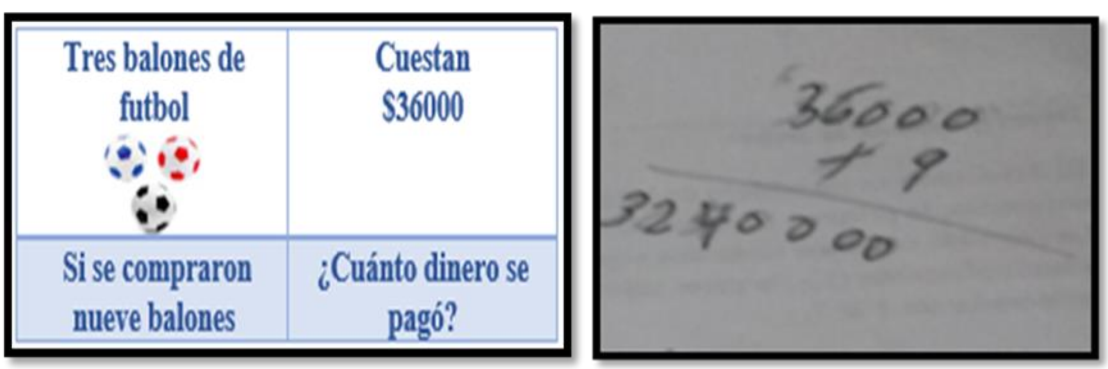


Ilustración 54. Respuesta tarjeta azul #15

Los estudiantes pretendieron darle solución a la situación *ilustración 53,* multiplicando los $1350 por 7, tomando como valor unitario los $1350 pesos, del mismo modo en la *ilustración 54*, toman como valor unitario los $36000 pesos y lo multiplican por 9. En ambos casos se identifica que los estudiantes presentan dificultades para encontrar el valor unitario esto se debe a una mala interpretación de las situaciones y a que están concibiendo la multiplicación como una relación terciaria. De igual manera, de acuerdo con Vergnaud (1990), para los estudiantes el tratamiento de un conjunto de tareas suele resultar complejo.

División: búsqueda de la cantidad de unidades

- El grupo #2 en el primer lanzamiento, obtuvo la tarjeta amarilla #7

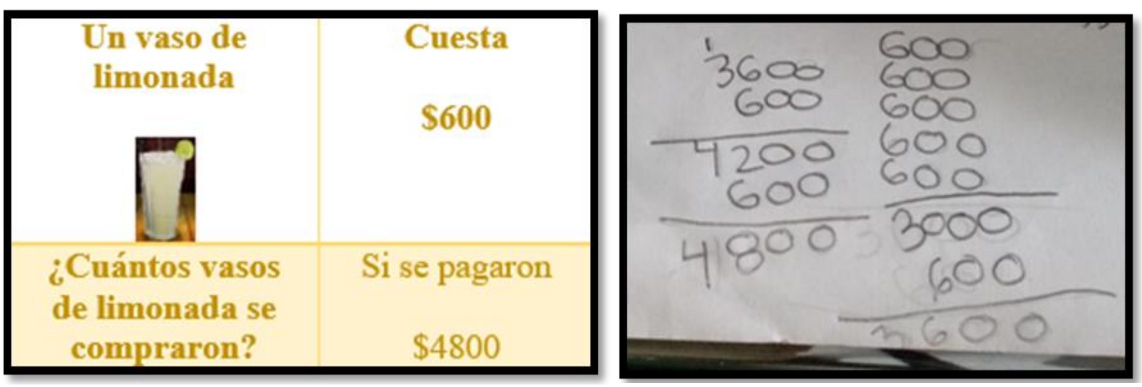


Ilustración 55. Respuesta tarjeta amarilla #7

Se distingue en esta tarjeta en el proceso de solución de los estudiantes que, aunque no lo describen de manera explícita hacen un razonamiento de como varia una cantidad con respeto a otra en el mismo espacio de medida, es decir, al sumar el precio unitario del vaso de limonada hasta llegar al valor total que se pagó, con base en Vergnaud (2004) identifican que la Constante (C) se suma 8 veces y esto hace que se amplíe desde $600 a $4800 pesos *(ilustración 55*), utilizando la estrategia de adición iterada.

- En el segundo lanzamiento, el grupo #1 obtuvo la tarjeta amarilla #4

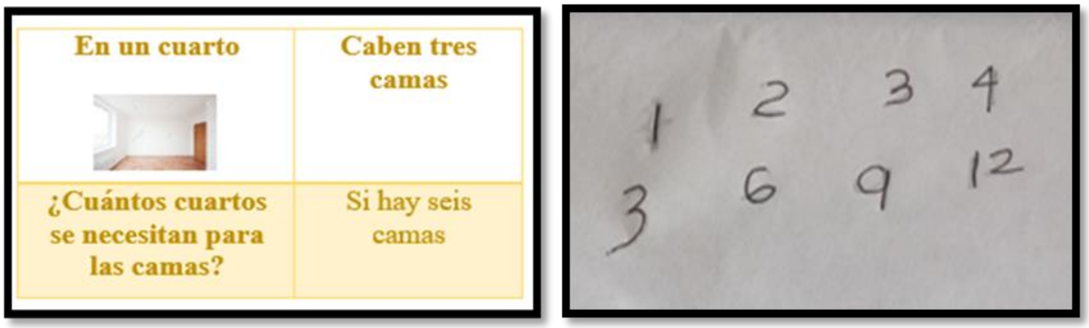


Ilustración 56. Respuesta tarjeta amarilla #4.

Los estudiantes utilizaron la proporción de manera implícita, haciendo uso de una Lista de Correspondencia (LC) *ilustración 56*, viéndose esto como una fortaleza, la cual les permitió hacer relaciones de como varían las cantidades del espacio de medida cantidad de camas con respecto al espacio de medidas cantidad de cuartos (si en uno aumenta en el otro también y viceversa) del mismo modo, identificaron la constante que en este caso no se exterioriza, pero si se utiliza.

Por lo anterior, tomando como referente a Vergnaud (2004) se infiere que en dicha lista de correspondencia implícitamente hacen uso de la multiplicación como función determinada por la expresión <u>F(x)=3X</u>, donde (3 camas) que es la constante de proporcionalidad representa la cantidad de camas que caben en un cuarto y (X) representa la cantidad de cuartos. Para lograr determinar la lista de correspondencia se deduce que los estudiantes ejecutaron las operaciones que se muestran a continuación:

F(x) = 3X F (1) = 3(1) F(1) = 3	F(x) = 3X F (3) = 3(3) F(3) = 9
F(x) = 3X F (2) = 3(3) F(2) = 6	F(x) = 3X F (4) = 3(4) F(4) = 12

- El grupo número dos, en el segundo lanzamiento obtuvieron la tarjeta amarilla # 3.

Un perro caliente	Cuesta $ 6000
¿Cuántos perros se compraron?	Si se pagaron $36000

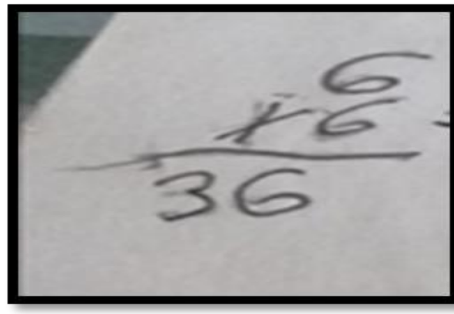


Ilustración 57. Respuesta tarjeta amarilla #3

- En el tercer lanzamiento, el grupo número uno, obtuvo la tarjeta amarilla # 18.

Una jarra de jugo	Cuesta $ 5000
¿Cuántas jarras se compraron?	Si se pagaron $ 25000

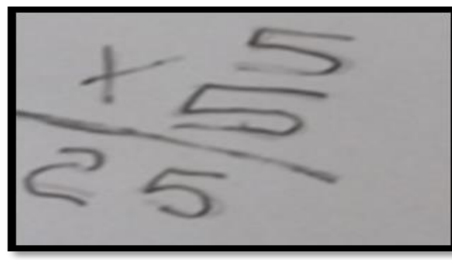


Ilustración 58. Respuesta tarjeta amarilla #18

- En el séptimo lanzamiento los integrantes del grupo número uno, obtuvieron la tarjeta azul # 12.

una paleta	Cuesta $ 500
¿Cuantas paletas se compraron?	Si se paga $ 3500

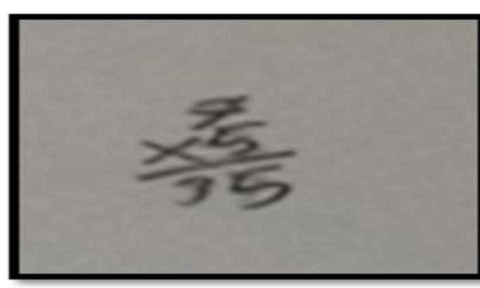


Ilustración 59. Respuesta tarjeta azul #12

En las *ilustraciones 57, 58 y 59* para encontrar la cantidad total de unidades los estudiantes optaron por hacer uso de la estrategia de Hecho Numérico (HN) la cual consistió en utilizar las tablas de multiplicar para justificar la cantidad requerida en las tarjetas, también de manera implícita los estudiantes identificaron los escalares y que con estos al multiplicar (x) cantidad hallaban el precio total requerido, haciendo inconscientemente uso de las relaciones verticales que se presentan entre el precio de los perros calientes, las jarras de jugo y las paletas con sus respectivas cantidades, desde la teoría de Vergnaud (2004) lo anterior se identifica como una fortaleza dado que están diferenciando y Relacionando los Espacios de Medida (REM).

- En el cuarto lanzamiento, el grupo número uno obtuvo la tarjeta amarilla #6.

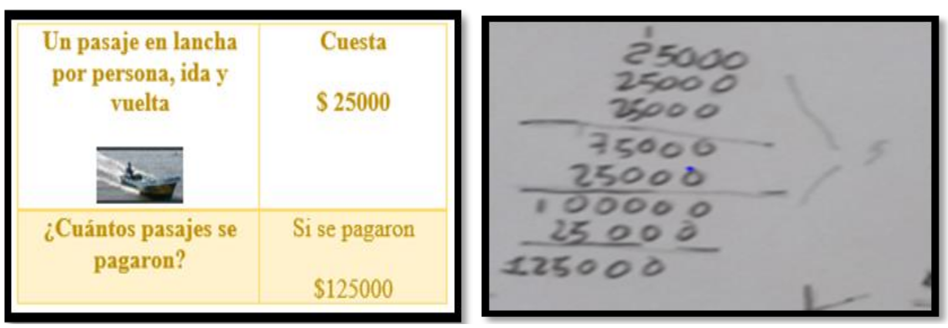


Ilustración 60. Respuesta tarjeta amarilla #6

- El grupo número dos, en el cuarto lanzamiento obtuvieron la tarjeta azul # 15.

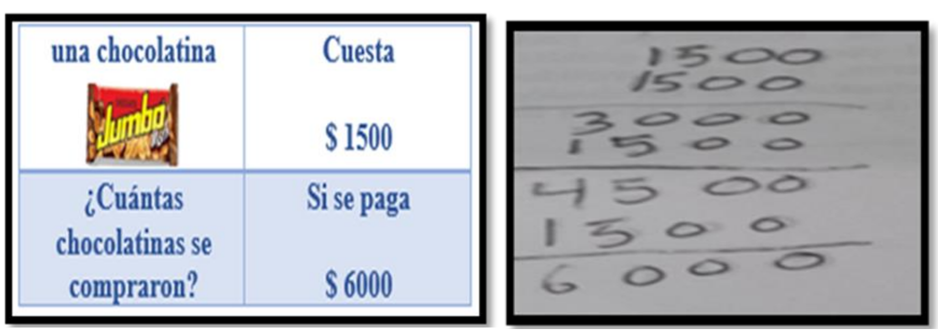


Ilustración 61. Respuesta tarjeta azul #15

Para darle solución a las tarjetas los estudiantes utilizaron como estrategia la adicción iterada, identificando de manera implícita la relación que se presenta en los dos espacios de medidas así en la *ilustración 60,* toman como constante los $25000 pesos que es el valor unitario del pasaje en lancha por persona y los suman reiteradamente hasta obtener el valor solicitado en la tarjeta, señalando que fueron 5 los pasajes que se compraron, de esta manera se infiere que están haciendo una diferencia entre los espacios de medida precio del pasaje y cantidad de pasajes. Repitiendo la misma estrategia en la *ilustración 61.*

A la vez, de acuerdo con Vergnaud (1983) la adición iterada es una forma o base de la multiplicación y los estudiantes deben lograr pasar del pensamiento aditivo al multiplicativo y esto lo logran precisamente cuando se les presentan situaciones problemas que los conduzcan a realizar tratamientos de tipo multiplicativo.

- En el quinto lanzamiento, el grupo número uno obtuvo la tarjeta amarilla # 1.

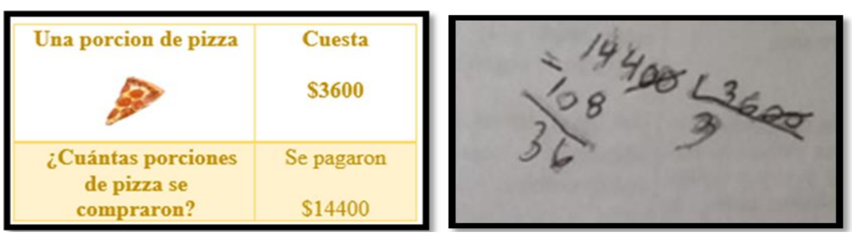


Ilustración 62. Respuesta tarjeta amarilla #1

En el desarrollo de esta tarjeta, se les reconoce a los estudiantes la intención de hacer una división para hallar la cantidad total de porciones de pizza de lo cual se puede decir con base en Vergnaud (2004), que se está logrando un acercamiento a la identificación de las relaciones que se presentan en el isomorfismo, en este caso una relación horizontal en la que se evidencia que reconocieron el valor unitario de las porciones de pizza y que para encontrar la cantidad total de porciones solicitadas debían relacionar el precio unitario con el precio total de estas, pasando del espacio de medidas valor de las porciones de pizza al espacio cantidad de porciones.

- El grupo numero dos obtuvo en el quinto lanzamiento, la tarjeta roja #6

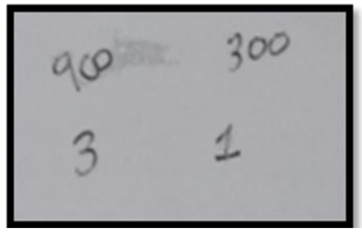


Ilustración 63. Respuesta tarjeta roja #6

<u>División búsqueda del valor unitario</u>, los estudiantes de manera implícita están identificando la relación que se da entre las cuatro cantidades lo cual les permitió hallar el valor unitario utilizan do uso de una lista de correspondencia, con base en esto se puede afirmar que se está haciendo un acercamiento al pensamiento multiplicativo dado que están relacionando de forma vertical las cantidades, de acuerdo con Vergnaud (2004) esto les permitió pasar de los 3 bombones que cuestan $900 pesos al precio de un bombón que cuesta $300 pesos *ilustración 63*, viéndose esto como una fortaleza.

En el sexto lanzamiento, el grupo número uno no obtuvo ninguna tarjeta dado que, al utilizar los lanzamientos estipulados, la ficha de tiro no cayó en ningún color del tablero.

- El grupo número dos, en el sexto lanzamiento obtuvo la tarjeta azul #14.

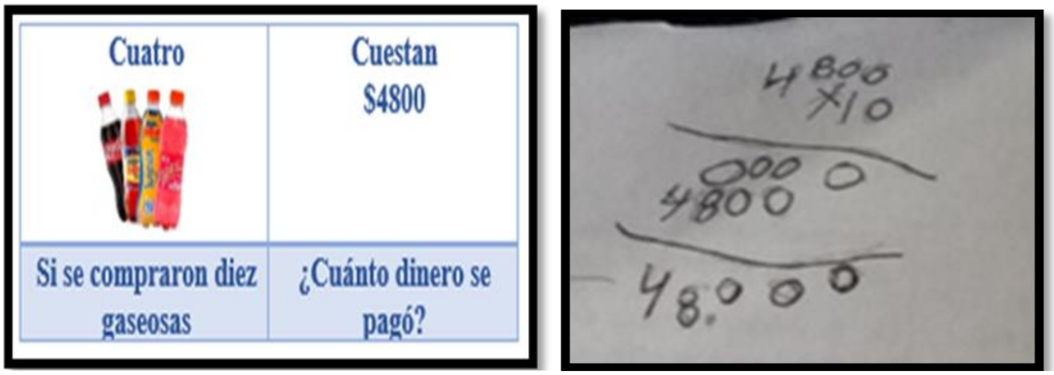


Ilustración 64. Respuesta tarjeta azul #14

Multiplicación: números enteros con cantidades pequeñas, se encontró que los estudiantes multiplicaron las diez gaseosas por los $4800 pesos *ilustración 64,* sin antes hallar el valor unitario, lo que los condujo a una respuesta errónea, visto esto como una dificultad. De acuerdo con Bosch (2012), estas dificultades se presentan porque para los estudiantes resulta más fácil hacer multiplicaciones que divisiones y esto se da por los modelos intuitivos que en el trascurso de los años de escolaridad van adquiriendo. De igual manera, en las situaciones que habían realizado previamente en la mayoría estaba dado el valor unitario y esta concepción no les permitió identificar que tenían que hallarlo primero, incurriendo en la dificultad de tomar el valor grupal de las gaseosas como unitario.

- El grupo número dos, obtuvo en el séptimo lanzamiento la tarjeta azul # 1.

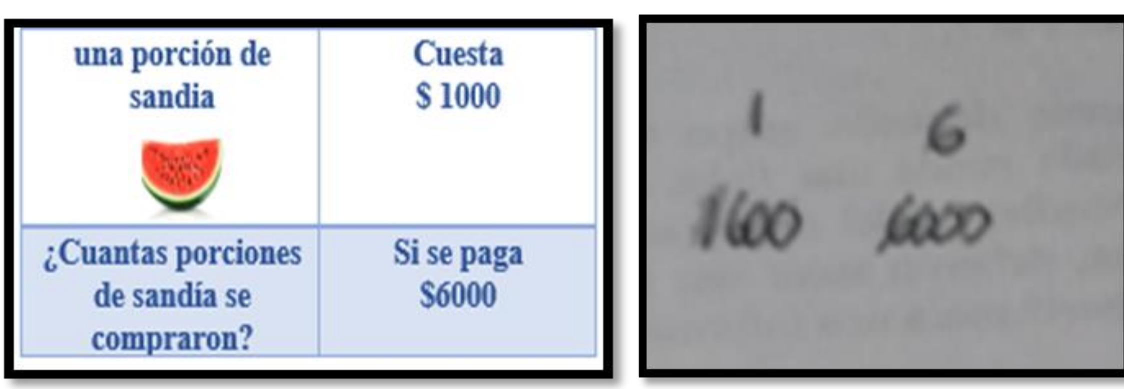


Ilustración 65. Respuesta tarjeta azul #1

División búsqueda de la cantidad de unidades, los participantes del grupo manifestaron que si una porción cuesta $1000, pesos es obvio que seis porciones cuestan $6000 pesos, haciendo uso de una lista de correspondencia, *ilustración 65*. De acuerdo con Vergnaud (2004), esto se ve como un cálculo relacional y en este caso en particular una relación horizontal, que involucra cuatro cantidades, tomando como constante los $1000 pesos para hacer una correspondencia con cualquier cantidad. Identificando para esta indagación la realización de la lista de correspondencia como una fortaleza.

De manera general se encontró que:

CARACTERÍSTICAS / **TIPOS DE PROBLEMAS**	**FORTALEZAS**	**ESTRATEGIAS**	**DIFICULTADES**
División: Búsqueda De La Unidad	No se evidenciaron	(UA) (HN)	búsqueda del (VU)
División: Búsqueda De La Cantidad De Unidades	(TC) uso de la (C) y (E) (RC)	(EEr) (UA) (BVG)	hallar (VU) (NRIM) Realizar Varias Operaciones
Multiplicación	Uso de la (C) (IEM)	(AIt) (UA) (VU)	(MI)
Desarrollo Del Juego	(TCo) Interés y Atención.	Explicarse entre ellos. Verificar las respuestas con sus compañeros.	Controlar la Euforia.

Simultáneamente, en el desarrollo del juego, los estudiantes se mostraron entusiastas e interesados, tomando con seriedad cada una de las instrucciones que se les brindo, manifestando que así deberían ser todas las clases, dado que, ellos sentían que aprendían y no se aburrían como en las clases que normalmente les daban sus profesores.

V. CONSIDERACIONES FINALES

En este último apartado, se dan a conocer los resultados obtenidos en los análisis, esto se hizo tomando en consideración los objetivos propuestos y la pregunta de indagación, al igual que, se exponen algunas recomendaciones que surgieron al culminar la indagación, en relación con la puesta en marcha de las dos fichas Domi-Frut y Tri-Color.

5.1 CONCLUSIONES

En este trabajo se reconoce la fortaleza del Laboratorio de educación Matemática como estrategia en procesos de formación, puesto que permitió el uso de distintos materiales para la construcción del saber, el trabajo en equipo, la promoción de la reflexión sobre el aprendizaje significativo por medio de la lúdica y la utilización de juegos de experimentación que favorecieron a la aprehensión y construcción de pensamiento matemático, entorno a las estructuras multiplicativas del tipo isomorfismo de medidas.

Tomando como referentes a Arce (2011) y Tobón (2018), se resalta al Laboratorio de educación Matemática como una estrategia pedagógica que fomenta el aprendizaje de los participantes, este permite el uso de distintos métodos y materiales para el diseño de situaciones también promueven la creatividad, el dinamismo y las destrezas que cada uno de los estudiantes puede llegar a desarrollar.

De esta manera, al hacer uso de las fichas de laboratorio los estudiantes fueron participes de la construcción de sus saberes, explicándose, apoyándose y guiándose entre ellos, por medio de los juegos identificaron las relaciones que se presentan en el isomorfismo de medidas, en el juego Domi-Frut particularmente los estudiantes se manifestaron entre si cuales eran las fichas con las que debían jugar, justificando cuando debían ponerla y cuando no, identificando los dos espacios de medida en este caso cantidad de frutas y sus precios, estas acciones permiten asegurar que por medio de la interacción con las fichas hubo un desarrollo de competencias.

A su vez, los estudiantes en el juego Tri-Color de formas distintas intentaron darles solución a las tarjetas experimentando con situaciones que cotidianamente viven, por lo tanto, con la libertad y la autonomía que brinda el laboratorio se lograron significativos acercamientos en la identificación de las cuatro cantidades que se presentan en el isomorfismo, así sin una clase estructurada ni con las pautas del profesor los estudiantes tienen la posibilidad de desarrollar pensamientos matemáticos propios.

En el desarrollo de las fichas propuestas se resaltó la importancia del valor unitario debido a que por lo general al explicar el algoritmo de la multiplicación, de acuerdo con Cerritos (2012), pareciese que fuera solamente una relación de tres y no de cuatro cantidades es por ello que es necesario fomentar la adquisición del dominio de las cuatro cantidades, al igual que la apropiación de estrategias que permitan identificar cuándo deben utilizar cada una de las relaciones que se dan entre los espacios de medida dependiendo el caso.

Simultáneamente, la indagación aquí expuesta sirvió de apoyo y acompañamiento para la formación de los estudiantes de grado 5° de la sede Bartolomé de la Institución Educativa República de Venezuela, con el propósito de hacer un acercamiento al aprendizaje de las estructuras multiplicativas del tipo isomorfismo de medidas y la aprehensión de las relaciones que se presentan entre las cuatro cantidades, en sus tres tipos de problemas expuestos por Vergnaud (2004) plasmados en la *ilustración 6*, mediante la implementación de los juegos.

Encontrando así, que las características que se presentan en los procesos de resolución de problemas del tipo isomorfismo de medida son que: la mayoría de los estudiantes presentan dificultades para encontrar el valor unitario, cuando se les expone el valor grupal de las cantidades y el total de cantidades, esto se evidencia en las ilustraciones (33,53,54). También, presentan grandes dificultades para hallar la cantidad total de unidades a partir del valor grupal, además para encontrar el total de unidades incurren en la estrategia de sumar iteradamente hasta encontrar el valor solicitado en la información, esto se muestra en las ilustraciones (38, 41, 44, 49, 55, 60, 61). Echeverry (2013), menciona que estas características son modelos intuitivos, que los estudiantes adquieren, en el transcurso de los años de escolaridad.

Del mismo modo, se identificó que los estudiantes se les facilitan hacer uso de la adición iterada, para encontrar el valor grupal a partir del valor unitario tomando este implícitamente como una constante de proporcionalidad, esto se evidencia en las ilustraciones (37, 55, 60, 61). También se notó, que para los estudiantes no es necesario justificar o registrar lo que ellos consideran como evidente, por ejemplo, el caso de las cañas en el juego de Domi-Frut, al ser el valor unitario de estas $1000 pesos los estudiantes consideraron que no era necesario plasmar las operaciones, dado que fácilmente podían deducir las respuestas.

Es importante destacar, que en la ficha del Tri-Color en las tarjetas ilustración (56) cuartos y camas, ilustración (63) bombones y en la ilustración (65) porciones de sandía, se evidencia el acercamiento al pensamiento multiplicativo del tipo isomorfismo de medida dado que están haciendo relaciones entre los espacios de medida, de esto Vergnaud (2004) señala que cuando el isomorfismo se representa en un esquema análogo, no se presentan dificultades para que los estudiantes identifiquen las cuatro cantidades puestas en relación.

En el mismo orden de ideas, se pudo analizar que las mayores dificultades se presentaron cuando debían hacer divisiones partitivas y de medida, al igual que, se evidenciaron considerables limitaciones para realizar varias operaciones en una misma situación, como en el caso de las ilustraciones (48, 53, 54, 62, 64). A lo cual, se le debe prestar gran atención puesto que, con base Vergnaud (1990) manejar las estructuras multiplicativas permite adquirir nociones significativas para el desarrollo de temáticas más avanzadas y al tener dificultades en temáticas más sencillas, los estudiantes pueden presentar grandes limitaciones en el futuro.

Por otro lado, los estudiantes en la mayoría de los casos reconocen las operaciones que deben efectuar en las situaciones presentadas, pero se les dificulta justificar las respuestas y con hacer las operaciones mentalmente o utilizar la estrategia de hechos numéricos y dar un resultado, consideran que no es necesario realizar ningún tipo de operación. Visto esto en las ilustraciones (45,46,47,57,58,59).

Así, es importante resaltar que a los estudiantes se les facilita trabajar con valores numéricos con cantidades pequeñas dado que, hacen uso excesivo de la estrategia adicción iterada para el desarrollo de las situaciones propuestas y por el contrario cuando se les presentan números grandes manifiestan dificultades y optan por no realizar las operaciones, por ejemplo, el caso de encontrar el valor unitario del borojo ilustración (34).

Simultáneamente, los estudiantes para justificar algunas soluciones recurrían en hacer multiplicaciones cuando debían hacer divisiones, es decir, se les facilitaba justificar utilizando la estrategia de la operación contraria, evidenciado esto en las ilustraciones (48, 53, 54, 64) esta estrategia es mencionada por los autores Ivars y Fernández (2016).

Con base en Vergnaud (2004), los estudiantes en los primeros años de escolaridad no tienen la noción de proporción de manera explícita, sin embargo, de manera implícita ellos pueden desarrollar estas nociones cuando se les presentan los problemas de tipo multiplicativo con esquemas que permitan que ellos identifiquen las relaciones que se dan entre los dos espacios de medida. Los estudiantes lograron identificar estas relaciones haciendo listas de correspondencia, evidenciado en las ilustraciones (56, 63, 65).

Es así, que se puede afirmar que con esta indagación se lograron avances significativos por parte de los estudiantes entorno a la identificación de las cuatro cantidades y a las relaciones que se presentan en los espacios de medidas, así por medio de las situaciones presentadas en las fichas de juegos permitió que poco a poco los estudiantes se fueran familiarizando con el modelo de ver las cuatro cantidades y de esta manera en situaciones que no estaban explicitas, tuvieran en cuenta ese modelo para poder identificar las cantidades. También, se hizo un acercamiento a la noción de proporción y se pusieron en marcha conocimientos de una manera diferente a la tradicional, permitiéndole a los estudiantes experimentar y ser participe en la adquisición de saberes.

Simultáneamente, en cuanto al desarrollo de los juegos, hubo gran aceptación por parte de los estudiantes, estos les permitieron poner en práctica sus saberes a través de la experimentación, los estudiantes se corrigieron y se explicaron entre ellos mismos, lo que favorece a la construcción de conocimientos, dado, que la mejor forma de aprender es enseñando.

5.2 RECOMENDACIONES

Considerando los resultados obtenidos en este trabajo, a partir de las producciones de los estudiantes en el desarrollo, aplicación y ejecución de los juegos, se generan algunas recomendaciones que pueden ser objeto de estudio para futuros trabajos de indagación en el campo de la Educación en Matemática. Este trabajo de indagación abre las puestas para futuros trabajos, en los cuales tengan como objetivo, abordar las clases tradicionales de manera diferente, permitiendo que el eje principal del aprendizaje sean los estudiantes, con escenarios lúdicos y contextualizados.

Al enseñar las estructuras multiplicativas, se debe idear la manera para que los estudiantes reconozcan los dos espacios de medidas y la relación cuaternaria que la compone, en este trabajo se logró un acercamiento al pensamiento multiplicativo, sin embargo, algunos estudiantes resuelven problemas de tipo multiplicativo, haciendo uso de la adición reiterada, por lo cual, es pertinente que futuros trabajos sigan poniendo en marcha situaciones que fomenten la aprehensión de dichas estructuras.

De igual modo, todavía hay gran cantidad de estudiantes que tienen dificultades para hallar el valor unitario, porque no identifican la operación que les permite encontrar este, también presentan dificultades para realizar divisiones lo que deja puerta abierta para indagar y buscar la manera de mitigar las dificultades mencionadas. Se invita a seguir trabajando desde el laboratorio de matemática puesto que permite poner en marcha cualquier tipo de temática de manera experimental y lúdica lo cual favorece la adquisición de conocimientos dado que el estudiante está siendo participe de lo que aprende, colabora en la construcción de conocimientos y esto le permite llegar a tener aprendizajes significativos.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

Aguirre, D. (2011). Aplicación de las Estructuras Multiplicativas en la Resolución de Problemas Aritméticos Dirigido a Tercer Grado de Educación Básica. Trabajo de grado. Universidad el Valle. Cali

Arce, J. (2004). Instituto De Educación Y Pedagogía Laboratorio De Matemáticas, 1–14.

Aristizábal, J.H.; Colorado, H. y Gutiérrez, H. (2016). El juego como estrategia didáctica para desarrollar el pensamiento numérico. Itinerario Educativo, 67, 123-137.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En: Artigue, m.; Douady, R.; Moreno, L.; Gómez, P. (Ed.) Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Alfaro, C. (2006). Las Ideas De Polya En La Resolución De Problemas. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, número 1.

Benito, B. y Salinas, J.M. (2016). La investigación basada en diseño en Tecnología Educativa. RIITE. Revista Interuniversitaria de Investigación en Tecnología Educativa, 0, 44-59. Doi: http://dx.doi.org/10.6018/riite/2016/260631

Blanco, L. Cárdenas, J. Caballero, A. (2015). La resolución de problemas en la formación inicial de profesores de Primaria Colección. Investigación en Educación Matemática XIX. Retrieved from http://ddd.uab.cat/record/23388

Blanco, LJ; Cárdenas, JA. La Resolución de Problemas como contenido en el Currículo de Matemáticas de Primaria y Secundaria. En revista Campo Abierto, 2013, Vol. 32, n. 1, pp. 137-156. Recuperado de: http://mascvuex.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/ article/view/1393

Blanco, L.; Caballero, A.; (2015) Modelo Integrado de Resolución de Problemas de Matemáticas: MIRPM. Capítulo 7.

Bosch Saldaña, M. A. (2012). Apuntes teóricos sobre el pensamiento matemático y multiplicativo en los primeros niveles. Educación Matemática En La Infancia, 1, 15–37.

Castro, E. (2001) Resolución de Problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En CAMACHO, M; BLANCO, LJ (Eds.): Investigación en Educación Matemática XII. España: lugar; SEIEM, pp. 113-140.

Callejo, M.; Márquez, M.; (2010). Estudiantes para Maestro de Primaria como Resolutores y evaluadores de Problemas de Estructura Multiplicativa. Revista Paradigma, Vol. XXXI, Nº 2; Diciembre. PP. 109 – 122.

Cerritos, H. (2012). El isomorfismo de medidas como estrategia para la resolución de problemas multiplicativos en el tercer grado de la escuela primaria. En Flores, Rebeca (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 727-735). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Conexión Colombia (s.f) Recuperado de: https://www.conexioncolombia.com/escuelas/21136/republica-de-venezuela/

Datos Colombia (s.f) Recuperado de: https://datoscolombia.com/escuelas-colegios/sedes/176109000818

Echeverry Materon, H. A. (2013). Estrategias didácticas que promueven el aprendizaje de la estructura multiplicativa a partir de la resolución de problemas (Tesis de maestría). 130. Retrieved from http://www.bdigital.unal.edu.co/47595/1/94044021_Hugo.pdf

Gil, D.; Valencia, J. (2019). Un acercamiento al desarrollo del pensamiento variacional desde la perspectiva del isomorfismo de medida: una experiencia en el laboratorio de matemáticas. (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali.

González, A.; Molina, J.; Sánchez, M. (2014). La matemática nunca deja de ser un juego: investigaciones sobre los efectos del uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas. Revista Educación Matemática, vol. 26, núm. 3, diciembre. PP. 109-133.

Ivars, P., & Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. Educación Matemática, 28(1), 9–38.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias. Primera edición, Mayo, 50.000 ejemplares. ISBN 958-691-290-6 Ed. Ministerio de educación Nacional

Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos Curriculares (Matemáticas). ISBN. 958-691-067-9. Ed. Magisterio. Santa fe de Bogotá D.C. Julio.

Moreno, Y. G. & Zúñiga. Patiño. R. (2014). Planteamiento y resolución de problemas de áreas en el laboratorio de educación matemática. Trabajo de grado. Universidad el Valle. Cali.

Ospina, M., & Salgado, J. (2016). La enseñanza de la multiplicación como isomorfismo de medida: aproximación discursiva (Tesis de maestría).

Pabón, O & Arce, J. (2011). Laboratorio de Matemáticas Fundación Multitaller.

Palacios, H. (2019) el laboratorio de matemáticas como estrategia pedagógica en la formación geométrica de docentes de educación básica primaria: el caso de la institución educativa república de Venezuela. (Tesis de maestría). Universidad el Valle. Cali.

PINO, JA. Concepciones y prácticas de los estudiantes de Pedagogía Media en Matemáticas con respecto a la Resolución de Problemas y, diseño e implementación de un curso para aprender a enseñar a resolver problemas. Tesis doctoral Inédita - Universidad de Extrema- dura, Badajoz, España: 2013. Recuperado de: http://dehesa.unex.es:8080/xmlui/bitstream/handle/10662/568/TDUEX_2013_Pino_Ceballos.pdf?sequence=1

Poveda, M. (2002). El desarrollo del pensamiento paleontológico. Rem: Revista Escola de Minas, 55(1), 73–75. https://doi.org/10.1590/S0370-44672002000100014

Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA). (2018) Colombia - Country Note © OECD Volumes I-III.

Resultados pruebas SABER. 5° (2017). Institución Educativa República de Venezuela.

Resultados siempre Día E. (2018). Informe por colegio, Institución Educativa República de Venezuela.

RIOS, K. (2013). Problemas de Estructura Multiplicativa: Una Propuesta Psicopedagógica con Estudiantes de 5o Grado de Primaria de una Escuela Pública del Distrito Federal, 1–73.

—SANTOS, LM (2007). La Resolución de Problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos. México: Trillas.

Tobón, R. D. J. (2018). Diseño de un laboratorio de matemáticas para el fortalecimiento de la Enseñanza y el Aprendizaje en el Grado Quinto: Pensamiento Numércio y Variacional, 1–168.

Vergnaud, G. (2000). El niño, las matemáticas y la realidad. México: Editorial Trilla

Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Récherches en Didactique des Mathématiques, 10 (23): 1-21

ANEXOS

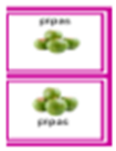
ANEXO 1. FICHA DE JUEGO, DOMI-FRUT

Mesa: juegos aritméticos	**DOMI-FRUT**	

Domi-frut, está basado en el tradicional juego de domino, consta de 55 fichas, compuestas por cantidades numéricas y frutos tradicionales del pacifico.

Reglas del juego:

Se puede jugar en parejas o en grupos de máximo 9 integrantes. Las fichas del juego se deben repartir equitativamente entre todos los jugadores.



- **Comienza el jugador** que tenga, la ficha con mayor valor numérico por ambos lados.
- El siguiente jugador debe poner una ficha, que concuerde con uno de los lados, de la ficha que anteriormente se puso. De esta manera se irán turnando todos los jugadores. **Ten en cuenta que puedes colocar la imagen de la fruta o el precio.**
- En caso de no tener ninguna ficha que concuerde, el jugador debe **PASAR**, es decir ceder el turno a su compañero.
- **El juego lo gana**; el jugador que ya no tenga fichas. En caso de **CIERRE**, es decir que todos pasen, se cuentan las fichas y el jugador con menor cantidad de fichas o valor numérico en ellas, **GANA**.

<u>ANTES DE EMPEZAR A JUGAR, DEBES LLENAR LA TABLA DE LA DERECHA</u>

Cantidad	Fruta	Precio
1	chontaduro	$800
7	Chontaduros	$
1	pipa	$3500
4	pipas	$
1	pomarosa	$
4	pomarosas	$2800
1	caña	$1000
5	Cañas	$
1	borojo	$
4	borojos	$10.000

- **<u>Con base en la tabla anterior responde las situciones y justifica las respuestas, en el respaldo de la hoja.</u>**

1) Ana compro con $2400, tres cantidades de una misma fruta, sin que le sobrara dinero. ¿Qué fruta compro Ana? ¿Por qué?

2) En la tabla anterior estan los precios de las frutas que venden en la galeria de pueblo nuevo. Pablo compro tres cañas, tres borojos y dos chontaduros. ¿Cuánto dinero gasto pablo?

ANEXO 2. FICHAS PARA EL JUEGO DOMI-FRUT

pomarosas	pomarosas	pomarosas	$2800	$2800
pomarosas	caña	Cañas	Borojo	borojos
caña	caña	$1000	$1000	Cañas
caña	Cañas	Borojo	Borojos	Cañas
Cañas	$5000	$2500	$2500	$10.000
Borojo	borojos	$2500	$10.000	$10.000

Chontaduros	Chontaduros	Chontaduros
Cañas	borojo	Borojos
pipa	pipa	pipa
pipa	pipas	pomarosa

pipas	pipas	caña	Cañas
pomarosa	pomarosas	$14.000	$14.000
borojo	borojos	pomarosa	pomarosa
$14.000	$14.000	pomarosa	pomarosas
pomarosa	Cañas	Borojo	Borojos
caña	$700	$700	$700

ANEXO 3. FICHA DE JUEGO TRI-COLOR

Resolución de problemas multiplicativos	**EL TRI-COLOR**	
Mesa: Juegos Aritméticos	**Grado:** 4-5	**Colegio:** San Bartolomé

El Tri-Color: es un tablero de juego compuesto por dos columnas, la primera tiene los colores: amarillo, azul y rojo. La segunda columna tiene dos signos operativos, de suma (+) y multiplicación (x). La parte superior del tablero esta numerada del 1 al 7.

Reglas del juego:
Se puede jugar en parejas y en grupos de máximo 10 integrantes.

Para empezar el juego se elige al azar, que grupo lanza primero, siguiéndole el otro grupo.

- Los integrantes de cada grupo tendrán **la oportunidad de lanzar, en cada ronda una ficha,** a la primera columna del tablero, en caso de fallar el lanzamiento, cada jugador tiene dos oportunidades más, de lo contrario pierde el turno.
- Dependiendo del color (amarillo, azul y rojo) donde caiga la ficha, **deberán sacar una tarjeta del mismo color** la cual, les proporcionara una información.
- Esta tarjeta se leerá con todos los integrantes del grupo y **responderán, lo que les indique entre todos**. Tienen 2 minutos para responder. Luego de tener la respuesta, **volverán a lanzar la ficha** a la parte superior, del tablero.
- Si la respuesta no es correcta o no responden a tiempo **el grupo perderá 3 puntos**, y no podrá hacer el segundo lanzamiento.
- Según el número que **obtengan al lanzar parte superior, realizaran una suma o una multiplicación, con el resultado de la tarjeta**, esto depende del color donde haya caído la ficha en el primer tiro.
- Al realizar esa operación obtendrán **un número, ese será los puntos que acumularan, por cada ronda.**
- **<u>EL JUEGO LO GANA EL PRIMER GRUPO QUE</u> OBTENGA 70 PUNTOS.**

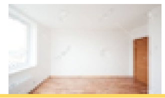
<u>NOTA: LLENA LA SIGUIENTE TABLA.</u>
<u>Donde dice tarjeta</u>: registra el número y el color de la tarjeta.
<u>Donde dice procedimiento:</u> coloca todo lo que realizaste para encontrar el resultado.
<u>Donde dice resultado:</u> escribe la solución de la situación.

REGISTRO DEL JUEGO

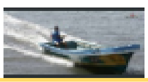
Tarjeta	Procedimiento	Resultado

ANEXO 4. TARJETAS PARA EL JUEGO TRI-COLOR

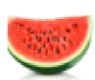
Tarjetas amarillas

en un florero 	**caben cuatro flores**	**En un cuarto** 	**Caben tres camas**
¿ cuántos floreros se necesitan?	**si hay veinte flores**	**¿Cuántos cuartos se necesitan para las camas?**	**Si hay seis camas**
En una caja vacía 	**Se guardan cuatro pelotas de futbol**	**Un vaso de limonada** 	**Cuesta $600**
¿ cuántas cajas se necesitan para guardar las pelotas?	**Si hay dieciséis pelotas de futbol**	**¿Cuántos vasos de limonada se compraron?**	**Si se pagaron $4800**
En una mesa 	**Se colocan cuatro silla**	**Una porcion de pizza** 	**Cuesta $3600**
¿Cuántas mesas se necesitan?	**Si hay veinte sillas**	**¿Cuántas porciones de pizza se compraron?**	**Se pagaron $13000**
Una falda 	**Cuesta $22000**	**En un salon de clases** 	**Caben treinta pupitres**
¿Cuántas faldas se compraron?	**Si se pagaron $66000**	**¿En cuántos salones caben los pupitres?**	**Si hay ciento veinte pupitres**

Una jarra de jugo 	**Cuesta $ 5000**	**Una salchiqueso** 	**Cuesta $ 5500**
¿Cuántas jarras se compraron?	**Si se pagaron $ 25000**	**¿Cuántas salchiqueso se compraron?**	**Si se pagaron $ 22000**
Una hamburguesa 	**Cuesta \$7500**	**Un perro caliente** 	**Cuesta $ 6000**
¿Cuántas hamburguesas se compraron?	**Si se pagaron $ 22500**	**¿Cuántos perros se compraron?**	**Si se pagaron $36000**

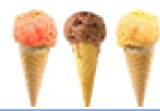
Un pasaje en lancha por persona, ida y vuelta 	**Cuesta $ 25000**	**La entrada a cine** 	**Cuesta $ 8500**
¿Cuántos pasajes se pagaron?	**Si se pagaron $125000**	**¿Cuántas entradas se compraron?**	**Si se pagaron $34000**
Una pijama 	**Cuesta \$12000**	**Un pasaje en carpati por persona** 	**Cuesta $ 1700**
¿Cuántas pijamas se compraron?	**Si se pagaron $ 36000**	**¿Cuántos pasajes se pagaron?**	**Si se pagaron $10200**

Tarjetas azules

una paleta 	**Cuesta $ 500**	**un coco** 	**Cuesta $ 2500**
¿Cuantas paletas se compraron?	**Si se paga $ 3500**	**¿Cuantos cocos se compraron?**	**Si se paga $ 7500**
una porción de sandia 	**Cuesta $ 1000**	**una chocolatina** 	**Cuesta $ 1500**
¿Cuantas porciones de sandía se compraron?	**Si se paga $6000**	**¿Cuántas chocolatinas se compraron?**	**Si se paga $ 6000**

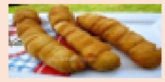
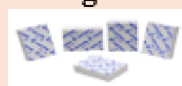
un reloj 	**Cuesta $5000**	**un pescado** 	**Cuesta $8000**
¿Cuantos relojes se compraron?	**Si se paga 20.000**	**¿Cuantos pescados se compraron?**	**Si se paga $ 24.000**

Cuatro 	**Cuestan $4800**	**Dos vasos de salchipapa** 	**Cuestan $5000**
Si se compraron diez gaseosas	**¿Cuánto dinero se pagó?**	**Si se compraron seis vasos de salchipapa**	**¿Cuánto dinero se pagó?**
Tres balones de futbol 	**Cuestan $36000**	**Tres camisetas** 	**Cuestan $24000**
Si se compraron nueve balones	**¿Cuánto dinero se pagó?**	**Si se compraron cinco camisetas**	**¿Cuánto dinero se pagó?**

Siete buñuelos 	**cuestan $3500**	**Tres conos de helado** 	**Cuestan $6600**
Se compraron diez buñuelos	**¿Cuánto dinero se pagó?**	**Se compraron ocho conos**	**¿Cuánto dinero se pagó?**
Tres galletas festival 	**Cuestan $ 1350**	**Cuatro flores** 	**Cuestan $ 6000**
Se compraron siete galletas	**¿Cuánto dinero se pagó?**	**Se compraron nueve flores**	**¿Cuánto dinero se pagó?**

Un cuaderno	**¿Cuánto cuesta?**	**Una chancla**	**¿Cuánto cuesta?**
Si cinco cuadernos 	**Cuestan $16000**	**Si cuatro chanclas** 	**Cuestan $24000**
Una silla	**¿Cuánto cuesta?**	**Una pantaloneta**	**¿Cuánto cuesta?**
Si cuatro sillas 	**Cuestan $22000**	**Si cinco pantalonetas** 	**Cuestan $ 35000**

Tarjetas Rojas

Un pan	**¿Cuánto cuesta?**	**Un churro**	**¿Cuánto cuesta?**
Si cinco panes 	**Cuestan $5000**	**Si tres churros** 	**Cuestan $ 1800**
Una empanada	**¿Cuánto cuesta?**	**Un borrador**	**¿Cuánto cuesta?**
Si diez empanadas 	**Cuestan $8500**	**Si cinco borradores de goma** 	**Cuestan 2250**
Un sacapunta	**¿Cuánto cuesta?**	**Un bolígrafo**	**¿Cuánto cuesta?**
Si cinco sacapuntas 	**Cuestan $2500**	**Si ocho boligrafos** 	**Cuestan $12000**

Un vestido elegante	**¿Cuánto cuesta?**	**Una cerveza**	**¿Cuánto cuesta?**
Si tres vestidos elegantes 	**Cuestan $150000**	**Si cinco cervezas coronas** 	**Cuestan $19000**
Una bolsa de agua	**¿Cuánto cuesta?**	**Un mango**	**¿Cuánto cuesta?**
Si tres bolsas de agua 	**Cuestan $2700**	**Si dos mangos** 	**Cuestan $2400**
Un boli	**¿Cuánto cuesta?**	**Un bombón**	**¿Cuánto cuesta?**
Si cuatro bolis 	**Cuestan $2800**	**Si tres bombones** 	**Cuestan $900**

Si una silla 	**Cuesta $8000**	**Si una mesa** 	**Cuesta $ 12500**
Seis sillas	**¿Cuánto cuestan?**	**Tres mesas**	**¿Cuánto cuestan?**
Si una pelota 	**Cuesta $5500**	**Si un pastel** 	**Cuesta $37000**
Cuatro pelotas	**¿Cuánto cuestan?**	**cuatro pasteles**	**¿Cuánto cuestan?**
Si el pasaje en taxi por persona 	**Cuesta $2000**	**Si un reloj de pare** 	**Cuesta $15000**
Si se paga el pasaje de tres personas	**¿cuánto se debe pagar?**	**Siete relojes**	**¿Cuánto cuestan?**

ANEXO 5. FOTOS DEL DESARROLLO DEL JUEGO DOMI-FRUT


$700
$700
$5600

ANEXO 7. FOTOS DEL DESARROLLO DEL JUEGO TRI-COLOR


162534