

UN ANÁLISIS A LIBROS DE TEXTOS DE MATEMÁTICAS DE BÁSICA PRIMARIA
EN EL ABORDAJE DE LAS TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS A PARTIR DEL
PROCESO DE VISUALIZACIÓN



ANA MARYEN MANYOMA TORRES – 1662380

CARMEN ELIZA RIASCOS MURILLO – 1662233

GISEL YURANNY CUERO BANGUERA – 166560

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICA

BUENAVENTURA

2021

UN ANÁLISIS A LIBROS E TEXTOS DE MATEMÁTICAS DE BÁSICA PRIMARIA EN
EL ABORDAJE DE LAS TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS A PARTIR DEL
PROCESO DE VISUALIZACIÓN

ANA MARYEN MANYOMA TORRES – 1662380

CARMEN ELIZA RIASCOS MURILLO – 1662233

GISEL YURANNY CUERO BANGUERA – 166560

Trabajo de Grado para optar el título de

LICENCIADO EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

ASESOR

PROFESOR: JHON JAÍR ANGULO VALENCIA

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA



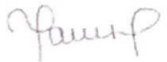
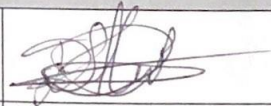
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICA

BUENAVENTURA

2021

Un Análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

	INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA Subdirección Académica		ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO								
	Programa Académico <u>Lic. En. Educ. Básica. Enf. Matemáticas</u>		Fecha								
Código del programa: <u>3469</u>		Resolución del programa: _____		<table border="1"> <tr> <th>Día</th> <th>Mes</th> <th>Año</th> </tr> <tr> <td>15</td> <td>6</td> <td>2021</td> </tr> </table>		Día	Mes	Año	15	6	2021
Día	Mes	Año									
15	6	2021									
Título del Trabajo o Proyecto de Grado											
Un análisis a libros de textos de básica primaria en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización											
Se trata de:											
Proyecto			Informe Final <input checked="" type="checkbox"/>								
Director											
Jhon Jair Angulo Valencia											
Nombre del Primer Evaluador											
Marisol Santacruz Rodriguez											
Nombre del Segundo Evaluador											
Daniel Stiven Gil Grueso											
Estudiantes											
Nombres y Apellidos		Código	Plan	E-mail	Teléfonos de contacto						
Gisel Yurany Cuero Banguera		1665060	3469	gisel.cuero@correounivalle.edu.co	3175457807						
Ana Maryen Manyoma Torres		1662380	3469	ana.manyoma@correounivalle.edu.co	3164884428						
Carmen Eliza Riascos Murillo		1662233	3469	riascos.carmen@correounivalle.edu.co	3185260813						
Evaluación											
Aprobado		Meritorio <input checked="" type="checkbox"/>		Laureado							
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto							
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:											
Director del Trabajo o Proyecto de Grado		Primer Evaluador		Segundo Evaluador							
En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____ dd _____ mm _____ aa											
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).											
Firmas											
											
Director del Trabajo o Proyecto de Grado		Primer Evaluador		Segundo Evaluador							

DEDICATORIA

A mi razón de ser, mi madre Claudia Manyoma por su apoyo incondicional, pues con su ejemplo y amor profundo me motivó a seguir cada día, a mi polo a tierra, mi padre Rubén Garzón por ser mi motivación y fortaleza para culminar este peldaño en mi vida, a mi abuelo, Adolfo Manyoma, por creer en mí en todo momento y a mis hermanos Diego Garzón e Isabella Garzón, por ser mi fuente de inspiración.

Ana Maryen Manyoma Torres

A los amores de mi vida, mis abuelos, Simón Murillo y Luz Marina Ahón, por inculcarme valores y ser mi apoyo incondicional, a mi hermana Cindy Riascos por ser mi motor en cada proyecto que emprendo y a mis sobrinos Heyner Riascos y Dayana Riascos por ser el pilar fundamental para culminar mis estudios.

Carmen Eliza Riascos Murillo

Al invaluable regalo que Dios me dio, mis padres, Emiro Cuero y Rosa Banguera por enseñarme con su ejemplo a trabajar con tenacidad, constancia y disciplina en todo aquello que me propongo, a mi abuela Fulvia Rodríguez porque ha sido mi modelo de amor y fuente de inspiración, a mis hermanos Ronny Cuero y Edwin Cuero porque son el combustible que me permite culminar todo proyecto que emprenda, a mi tía Anuncia Banguera por su apoyo incondicional y sabias palabras y sobre todo a mi primo Q.E.P. Brayan Pedroza porque su recuerdo me llenaba de motivación cada vez que mis fuerzas decaían.

Gisel Yuranny Cuero Banguera.

Un Análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, darle gracias a Dios todo poderoso por habernos concedido el don de la vida y darnos la sabiduría, entendimiento y paciencia necesaria durante todo el proceso de formación académica.

A nuestro asesor, el magister Jhon Jair Angulo Valencia por su dedicación, entrega y pasión por lo que hace, no solo en la elaboración de este trabajo de investigación sino durante toda la carrera universitaria, pues con su exigencia nos motivaba a dar lo mejor de nosotras, además, gracias a él pudimos conocer otros escenarios académicos, reconociendo que la investigación es fundamental en el que hacer del maestro.

De ante mano agradecer a nuestros familiares por creer en nuestras capacidades, apoyándonos incondicionalmente de principio a fin, pues reconocemos los sacrificios que hicieron para que pudiéramos formarnos como profesionales, pero sobre todo como personas integrales.

Finalmente, al equipo de trabajo, docentes y evaluadores extendemos los agradecimientos, pues cada uno desde su quehacer proporcionó saberes y experiencias valiosas en nuestra formación.

RESUMEN

La siguiente indagación se enmarcó en la caracterización de la forma como se presentan y articulan las tareas de los libros de textos Proyecto Sé y PREST de la básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas desde un enfoque semiótico cognitivo teniendo en cuenta el proceso de visualización. Para lo cual, se propuso una metodología basada en seis momentos a partir de una aproximación a la estrategia revisión documental de Camargo (en prensa). En las que se diseñó un instrumento de análisis que permitió caracterizar las tareas de los libros de textos de acuerdo con las categorías de análisis establecidas desde las teorías de Duval (1994,1995 y1999) y Del Grande (1990) en relación con la visualización en figuras geométricas.

De la revisión a los libros de textos se obtuvo como resultado que, desde la identificación de las unidades figúrales que determinan una configuración geométrica se alude al cambio de focalización bidimensional asociado a la yuxtaposición y superposición de figuras, además, mediante el reconocimiento de la percepción de las formas y las posiciones espaciales se propició la discriminación de los elementos que posibilitan modificaciones de posición en figuras geométricas, finalmente, mediante los enunciados que describen algunas tareas y el reconocimientos de trazos y figuras bidimensionales se identificó un acercamiento intuitivo a las transformaciones isométricas.

Palabras claves: libros de textos, visualización, habilidades visuales, aprehensiones, transformaciones isométricas

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	6
ÍNDICE DE TABLAS	III
ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	V
ÍNDICE DE DIAGRAMA.....	VI
INTRODUCCIÓN	7
CAPÍTULO I: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN	9
1.1 Descripción del problema	9
1.2 Objetivos.....	13
1.2.1 Objetivo general.....	13
1.2.2 Objetivos específicos	13
1.3 Justificación	14
1.4 Antecedentes	19
1.4.1 Investigaciones asociadas al pensamiento espacial en la enseñanza de la geometría	19
1.4.2 Investigaciones relacionadas con el análisis a libros de textos escolares en aspectos geométricos	21
CAPÍTULO II: MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL	25
2.1 Consideraciones acerca de libro de texto	25
2.2 Aspectos curriculares	28
2.2.1 Elementos relacionados con el sistema geométrico	28
2.2.2 Nociones relacionadas con el pensamiento espacial	30
2.2.3 Coherencia horizontal y vertical de algunos aprendizajes asociados con las transformaciones isométricas	31
2.3 Visualización en figuras geométricas: desde un enfoque semiótico cognitivo	33
2.3.1 Habilidades visuales.....	35
2.3.2 Aprehensiones	37
2.4 Aspectos disciplinares de las transformaciones isométricas	40
2.4.1 Transformaciones isométricas.....	40
2.4.2. Teoremas relacionados con las transformaciones isométricas:.....	48
2.4.3. Relaciones entre las transformaciones isométricas con las aprehsiones y habilidades visuales.....	49
CAPÍTULO III: METODOLOGÍA	54
3.1 Estructura a considerar para el análisis de libros de textos	55
3.1.1. Momento 1: criterios para la selección de los libros de textos a analizar.	56

3.1.2. Momento 2: identificación y selección de las variables en los libros de textos que se van a analizar.....	57
3.1.3. Momento 3: selección de las unidades de análisis.....	57
3.1.4. Momento 4: construcción de una herramienta que posibilite el análisis de los datos.....	58
3.1.5. Momento 5: clasificación de las unidades de análisis según las categorías de análisis.....	63
3.1.6. Momento 6: síntesis - integración final de los hallazgos.....	63
3.2 Fases de la investigación.....	64
CAPITULO IV: RESULTADOS Y ANÁLISIS	67
4.1 Aspectos generales de los libros de textos PREST y Proyecto Sé.....	67
4.1.1 Libro de texto PREST	67
4.1.2 Generalidades de las transformaciones isométricas por grados en el libro de texto PREST	70
4.1.3 Libro de texto Proyecto Sé.....	71
4.1.4 Generalidades de las transformaciones isométricas por grados en el libro de texto Proyecto Sé	73
4.2 Resultados y análisis a las tareas presentadas en los libros de textos PREST y Proyecto Sé	75
4.2.1 Cambio de focalización bidimensional asociado a la superposición y yuxtaposición de figuras geométrica (CFBSYFG):	75
4.2.2 Discriminación de los elementos que posibilitan modificaciones de posición en figuras geométricas (DEPMPFG):	89
4.2.3 Reconocimientos de trazos y figuras bidimensionales como mediadores para un acercamiento intuitivo a las transformaciones isométricas (RTFBMAITD):.....	109
CONCLUSIONES	119
RECOMENDACIONES.....	123
ANEXOS	125
REFERENCIAS.....	133

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Ejemplificaciones de las habilidades visuales	36
Tabla 2: Ejemplificaciones de las aprehensiones asociadas a la visualización	39
Tabla 3: Elementos de las transformaciones isométricas que pueden ser considerados desde las habilidades visuales.	51
Tabla 4: Aspectos generales de la estrategia revisión documental	55
Tabla 5: Correspondencia entre etiqueta, contenido y descripción de una tarea.	58
Tabla 6: Elementos que median en la visualización y transformaciones isométricas.	59
Tabla 7: Cruces entre los elementos que median en la visualización y las transformaciones isométricas	62
Tabla 8: cruces presentados en las tareas de los libros de textos PREST y Proyecto Sé.....	64
Tabla 9: datos de los libros de textos.	67
Tabla 10: Reconocimiento de modificaciones de posición: comparación entre la figura inicial y sus posibles imágenes.	76
Tabla 11: Descripciones de la forma como se presentan las transformaciones isométricas en la tabla 10.....	77
Tabla 12: Reconocimiento de reflexión axial y traslación: discriminación entre la orientación de la figura inicial y sus imágenes.	79
Tabla 13: Configuración geométrica por yuxtaposición: isometrías en mosaicos.	81
Tabla 14: Rotación a figuras superpuestas a partir de relaciones espaciales	83
Tabla 15: Configuraciones por yuxtaposición para la aplicación sucesivas de reflexiones axiales.	84
Tabla 16: Cruces presentados en las tareas de los libros de textos PREST y Proyecto Sé (CFBSYFG).	87
Tabla 17: Reconocimiento del contorno y posición de una figura al aplicarle una isometría.	90
Tabla 18: Descripciones de la forma como se presentan las transformaciones isométricas en la tabla 17.....	91
Tabla 19: Isometrías a partir del reconociendo de las características globales de la figura.	94
Tabla 20: Descripciones de la forma como se presentan las transformaciones isométricas en la tabla 19.....	94
Tabla 21: Reflexión axial mediante el reconocimiento de la posición de figuras respecto a un eje.	97
Tabla 22: Reconocimiento de relaciones espaciales en una configuración geométrica para la aplicación de isometrías.	98

<i>Tabla 23: Descripción y aplicación de isometrías a figuras geométricas.</i>	100
Tabla 24: Descripciones de la forma como se presentan las transformaciones isométricas en la tabla 23.....	101
Tabla 25: Comparación de la orientación del contorno de la figura inicial y su imagen para identificar el tipo de isometría que representan.	104
Tabla 26: Percepción de la forma y posición del contorno de la figura inicial para la aplicación sucesiva de dos reflexiones axiales.....	105
Tabla 27: Cruces presentados en las tareas de los libros de textos PREST y Proyecto Sé (DEPMPFG).	108
Tabla 28: Acercamiento intuitivo a la traslación a partir del rastreo de las direcciones de un camino.....	110
Tabla 29: Acercamiento intuitivo a la traslación a partir del rastreo del sentido de un camino.	112
Tabla 30: Descripciones de la forma como se presentan los desplazamientos en la tabla 29. ...	113
Tabla 31: Acercamiento intuitivo a la reflexión axial y rotación mediante el recorte de baldosas.	115
Tabla 32: cantidad de cruces presentados en las tareas de los libros de textos PREST y Proyecto Sé (RTFBMAITI).	117

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Aspectos que integran el sistema geométrico	29
Ilustración 2: Rotación de figuras bidimensionales.	44
Ilustración 3: Simetría central de figura bidimensional.	45
Ilustración 4: Simetría axial de figura bidimensional.	47
Ilustración 5: La composición de dos simetrías centrales con distinto centro es una traslación ..	49
Ilustración 6: Portadas de los libros de textos PREST	69
Ilustración 7: Tarea grado 1° PREST	70
Ilustración 8: Tarea grado 2° PREST	70
Ilustración 9: Tarea grado 3° PREST	71
Ilustración 10: Tarea grado 4° PREST	71
Ilustración 11: Portadas de los libros de textos Proyecto Sé	73
Ilustración 12: Tarea grado 1° Proyecto Sé.....	73
Ilustración 13: Tareas grado 3° Proyecto Sé	74
Ilustración 14: Tarea grado 4° Proyecto Sé.....	74
Ilustración 15: Tarea grado 5° Proyecto Sé.....	75

ÍNDICE DE DIAGRAMA

Diagrama 1: Coherencia horizontal y vertical de los EBC de los conjuntos de grados de 1° a 3° y de 4° a 5°	33
Diagrama 2: Explicación de las transformaciones isométricas.....	41
Diagrama 3: Plan de ejecución estrategia “revisión documental”.....	56
Diagrama 4: Aspectos que constituyen el análisis al contenido de los libros de textos PREST y Proyectos Sé.....	60

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

INTRODUCCIÓN

La siguiente propuesta de indagación pedagógica, requisito parcial para optar por el título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, describe de manera general la revisión a dos libros de textos, PREST y Proyecto Sé de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas desde un enfoque semiótico cognitivo, teniendo en cuenta el proceso de visualización, a partir de las teorías de Duval (1994, 1995 y 1999) y Del Grande (1990) en lo que respecta a la visualización en figuras geométricas, así como, el MEN (1998, 2006) en lo relacionado con el pensamiento espacial desde las transformaciones isométricas.

De acuerdo con lo anterior, la propuesta de indagación se organizó en cuatro capítulos los cuales se detallan a continuación:

En el capítulo uno se describe el problema, especificando algunas dificultades encontradas a partir de la revisión a investigaciones, las cuales están relacionadas con los libros de textos al abordar aspectos geométricos, las transformaciones isométricas y la visualización; de lo cual resultó la pregunta de indagación. Junto con lo anterior, se encuentran los objetivos propuestos, tanto general como específicos, mediante los cuales se especificó la intención, alcance y limitación de la indagación, así como, la justificación en la que se dejó ver la importancia y necesidad de llevar a cabo dicha investigación.

En el capítulo dos se presentan los aspectos asociados al marco de referencias conceptuales, en el que se expone la consideración del libro de texto y algunas de sus funciones desde las ideas de Ramírez (2002), Adler (2000), Mora (2016); así como, algunos aspectos curriculares soportados a partir del MEN (1998, 2006); del mismo modo, se detalla lo relacionado con la visualización mediante las aprehensiones propuestas por Duval (1994, 1994, 1999) y las habilidades visuales desde Del Grande (1990), finalmente, se

muestra la forma como se conciben los movimientos rígidos de traslación, rotación y simetrías a partir de lo propuesto por Jaime (1993) y Julio (2014).

En el capítulo tres se especifica la metodología, considerando como aspecto central la estrategia revisión documental propuesta por Camargo (en prensa). En la que, se describe a partir de seis momentos la forma como se llevó a cabo el proceso de análisis a los libros de textos escolares, detallando el diseño de las herramientas que posibilitaron el análisis de los datos. Además de, precisar las fases en las que se desarrolló la indagación.

En el capítulo cuatro se precisan los análisis y resultados que se obtuvieron de la indagación, teniendo como referentes los objetivos propuestos, el marco teórico y la metodología. De ello es importante mencionar que, desde la identificación de las unidades figúrales que determinan una configuración geométrica se alude al cambio de modificación posicional de una figura dada, además, a partir del reconocimiento de la percepción de relaciones espaciales y de posición se propicia la descripción e identificación del resultado de haber aplicado una transformación isométrica. Constituyéndose el enunciado y la representación visual en aspectos fundamentales para el desarrollo de las tareas.

Finalmente, se detallaron las conclusiones en las que se presentó las ideas desarrolladas en el trabajo en relación con los aspectos a considerar al revisar libros de textos escolares, así como a la forma de abordar tareas asociadas a las transformaciones isométricas. Lo anterior, a partir de los objetivos propuestos en la indagación. Del mismo modo, se describieron las recomendaciones, las cuales se dirigieron principalmente a los docentes, puesto que, en gran medida son ellos quienes eligen el libro de texto, el cual resulta ser uno de sus recursos principales para la planificación y orientación escolar.

CAPÍTULO I: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se expone el qué y porqué de la investigación, a partir de la descripción y formulación del problema, en el que se relacionan algunas dificultades alrededor de los libros de textos, la visualización y las transformaciones isométricas. Detallando el alcance desde el objetivo general y los específicos como aspectos esenciales que direccionaron el desarrollo de la misma. Además de, considerar mediante la justificación algunas razones que resaltaron la importancia y necesidad de abordar la indagación. Finalmente, se presentaron los antecedentes, los cuales permitieron reconocer algunas de las indagaciones que se han realizado alrededor del pensamiento espacial en básica primaria, así como al análisis a libros de textos escolares, siendo estas fundamentales para retomar algunas dificultades y elementos teóricos asociados a los objetos en cuestión.

1.1 Descripción del problema

La geometría propicia el desarrollo del pensamiento espacial, siendo las figuras, elementos indispensables que permiten la creación de representaciones mentales, con las cuales se puede modelar situaciones del contexto, mediante procesos de visualización para comprender los objetos desde diversas perspectivas. Para lo cual, se ha hecho uso de diversos recursos, siendo el libro de texto uno de ellos, pues no sólo propicia procesos de enseñanza sino también de aprendizaje. Reconociendo que, tradicionalmente han sido utilizados de manera constante por docentes y estudiantes en el aula de clase; convirtiéndose en algunas ocasiones en una guía curricular que indica qué y cómo enseñar, determinando así, las matemáticas que se mueven en el aula y con ello, las prácticas de los profesores.

En este sentido, de acuerdo con Marmolejo y vega (2005) y Marmolejo (2007) a partir de la visualización se puede discriminar las diferentes maneras de ver que propician las figuras geométricas accediendo a ellas como verdaderos soportes intuitivos para el desarrollo

de actividades, no obstante, algunos estudiantes presentan dificultades en el proceso de visualización, relacionadas con la descomposición de una figura en subfiguras previamente determinadas, así como, el reconocimiento del papel heurístico que juega la figura para la solución de problemas quedando relegada a tratamientos aritméticos. Además, las representaciones de objetos tridimensionales en el plano, no resultan nada fácil de captar (Peña, 2010). Lo anterior, muestra la necesidad de que los trazos de las figuras que integran los objetos permitan reconocer las características y propiedades que lo determinan.

Teniendo en cuenta lo anterior y considerando algunos objetos de conocimientos geométricos tales como (transformaciones isométricas, semejanza, área etc.) se encuentra que, de acuerdo con Barrantes y Zapata (2008) los libros de textos presentan dificultades al momento de ilustrar algunas figuras, dado que, se abordan las actividades a través de un único dibujo o un pequeño número de estos, generando que el estudiante se aleje de la definición del concepto, creando así, esquemas conceptuales estándares sobre ellas. En este sentido, el uso de figuras que ilustren los contenidos escritos, deben aproximar al estudiante hacia la comprensión de lo que se esté abordando. Sin embargo, en algunas ocasiones se presentan pocas representaciones de los conceptos y figuras geométricas, siendo en gran parte de los casos estereotipos con características de orientación estándar (Barrantes, Balletbo y López, 2014). Además, desde Barrantes y Zapata (2008) se encuentra que algunos los libros de texto:

- No tienen en consideración la simbología del lenguaje visual de forma que el profesor y el alumno interpretan cosas distintas sobre una figura.

Las figuras constituyen elementos fundamentales del lenguaje visual; la forma como se presentan permite la creación de ideas en el sujeto que la observa, es así como, las figuras posibilitan la elaboración de diferentes interpretaciones. A modo de ejemplo, un cuadrado con los trazos de sus diagonales, se podría interpretar como una pirámide cuadrada, por lo que la

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

simbología visual puede ocasionar que el docente o el estudiante se alejen o acerquen a lo que se pretende mostrar.

- La falta de dominio del sistema de representación en el que están construidas las figuras impide su reconocimiento.

Las representaciones en el espacio bidimensional o tridimensional sin la interiorización de las características que lo constituyen, dificultan la abstracción, construcción y manipulación de objetos o figuras.

- Presentar figuras conservando siempre la misma posición, crea esquemas mentales en los estudiantes.

Las presentaciones estandarizadas y constantes de las figuras, ocasionan en los estudiantes su elaboración o identificación de la misma forma en que comúnmente las observan, evidenciando la escasa comprensión de las propiedades que permiten reconocer una figura en diferentes posiciones y orientaciones.

Situándonos desde las transformaciones, se exponen algunas dificultades asociadas a la forma como estas se presentan en los libros de textos desde la investigación de Thaqi y Gimenez, (2016) de la cual se destaca que: “Las actividades planteadas para la educación primaria no dan la posibilidad a los estudiantes de comprender y construir un concepto claro de las transformaciones isométricas” (p.7). Lo anterior pone de manifiesto que, no es suficiente con que un objeto de conocimiento se aborde en un libro de texto, sino que la relevancia radica en la forma y la intención como este se presente, ya que, el libro de texto se considera un recurso que incide en la planeación de los docentes y en la comprensión de los estudiantes.

En este sentido, en la investigación de Jaime y Gutiérrez (1996) (como se citó en Julio, 2014) se encuentran algunas dificultades asociadas a la comprensión de las transformaciones

isométricas: con respecto a la traslación, no se reconoce la distancia entre el objeto y su imagen, del mismo modo, no se reconoce la dirección del movimiento (vertical, horizontal, inclinado), finalmente, se tiene dificultad para utilizar el lenguaje gráfico como medio para representar la transformación que se ha aplicado.

Del mismo modo, en la rotación, no se respeta el ángulo de la rotación, no se conservan las medidas de los segmentos que componen la figura inicial respecto a su imagen, no se respeta la equidistancia al centro entre la figura inicial y su imagen. Así mismo, en la reflexión axial, no se conserva la equidistancia al eje de cada punto y su imagen y no se reconoce la perpendicularidad del segmento que une un punto y su imagen con respecto del eje de simetría.

Habría que mencionar además que, el libro de texto se reconoce como un recurso material que presenta un contenido contemplando unos objetivos de enseñanza y de aprendizaje. Dado que, permite mediar en la planificación u orientación de algunos objetos de enseñanza. No obstante, de acuerdo con Adler (2000), los recursos pueden o no servir a los profesores en sus esfuerzos de resolver problemas en clase, es por esto que, la estructuración que posee un libro de texto debe permitir la evolución de conocimientos, el desarrollo de habilidades y la interacción con el objeto de conocimiento que potencie procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Con todo lo dicho hasta aquí, se encuentra que en algunos casos la forma como el libro de texto presenta los contenidos de tipo geométricos no corresponden a aspectos relacionados con el pensamiento espacial, lo cual, dificulta el desarrollo de procesos de visualización. Lo anterior porque, no se suele utilizar una representación adecuada de las figuras que permita la clarificación de los conceptos, además de, crear representaciones mentales en las que se manipulen, modifiquen, y se establezcan relaciones entre los elementos que la constituyen, de manera que, se puedan establecer diferentes heurísticas al abordar una situación determinada. Por ello, para efectos de esta propuesta, considerando que

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

el libro es un insumo de trabajo que los colegios utilizan para su quehacer pedagógico y didáctico, se indagará sobre:

¿De qué maneras se presentan y articulan las tareas propuestas en los libros de textos PREST y Proyecto Sé de básica primaria, de modo que se permitan caracterizar las transformaciones isométricas a partir de la actividad cognitiva de visualización?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Caracterizar la forma como se presentan y articulan las tareas de los libros de textos PREST y Proyecto Sé de la básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas desde de un enfoque semiótico cognitivo a partir del proceso de visualización.

1.2.2 Objetivos específicos

- Describir la forma como los libros de textos abordan tareas relacionadas con las transformaciones isométricas.
- Establecer categorías de análisis que permitan determinar criterios sobre las formas como se pueden acceder a las transformaciones isométricas desde la actividad cognitiva de visualización.
- Valorar a través de elementos teóricos la forma como los libros de textos presentan tareas relacionadas con las transformaciones isométricas, teniendo en cuenta la actividad cognitiva de visualización.
- Proponer algunas consideraciones documentadas alrededor de la práctica docente en relación con el análisis a tareas presentadas en libros de textos de básica primaria en el

abordaje de las transformaciones isométricas desde un enfoque semiótico cognitivo a partir del proceso de visualización.

1.3 Justificación

Pensar en geometría, permite evocar la necesidad que ha tenido el ser humano de reconocer los objetos que se perciben del mundo físico que lo rodea y de ubicarse en el espacio. Siendo las representaciones mentales elementos fundamentales para establecer y comprender relaciones entre objetos en el espacio, permitiendo modelar situaciones del entorno; en las que se puede manipular los objetos, cambiarlos de posición, orientación y tamaño; estableciendo relaciones de igualdad, semejanza o congruencia entre otros.

De manera que, el Ministerio de Educación Nacional en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, en adelante MEN (1998) expresa que, la geometría está pensada como un sistema, compuesto por objetos, relaciones y transformaciones, considerando en esa mediación, los elementos de que constan las operaciones con las que se combinan y las relaciones entre ellos. Además, que debe propender por la búsqueda del desarrollo del pensamiento espacial. Por lo que, se hace énfasis en la exploración del espacio, mediante representaciones de figuras tridimensionales y bidimensionales desde diversas perspectivas, en el reconocimiento de las propiedades que permanecen invariantes en las figuras bajo un movimiento en particular que se le ha aplicado, favoreciendo el desarrollo de capacidades visuales para identificar atributos o características de los objetos en diferentes presentaciones.

Por todo lo expuesto anteriormente, se considera que uno de los aspectos centrales en el desarrollo de esta propuesta de investigación es el pensamiento espacial específicamente las transformaciones isométricas; pues estimula el desarrollo de procesos cognitivos que

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

permiten la abstracción de fenómenos, situaciones o elementos que se perciben a partir de los sentidos, potenciando habilidades espaciales que propician la ubicación, interpretación y comprensión del espacio en el que se desenvuelve el individuo; lo cual exige poner en práctica algunas capacidades o destrezas para observar, representar, describir, relacionar y orientar en el espacio. Lo que implica una exploración activa del espacio tridimensional en la que, se establecen relaciones con las representaciones bidimensionales en diferentes perspectivas, desarrollando procesos de visualización, comunicación, razonamiento, resolución de problemas, entre otros. Considerando la visualización como elemento fundamental en el desarrollo de esta propuesta.

Ahora bien, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas en adelante MEN (2006) proponen que desde los primeros grados de escolaridad los estudiantes deben adquirir nociones sobre la ubicación en el espacio. Específicamente en básica primaria plantea para el conjunto de grados de 1° a 3° reconocer, aplicar, desarrollar y valorar nociones de sentido, dirección, magnitud, posición y movimientos en el espacio, en el arte, en diseños etc., para el conjunto de grados 4° y 5° establece identificar, representar, conjeturar, utilizar, justificar y verificar movimientos, localizaciones y relaciones en el plano o en el espacio.

De ahí, la importancia de que el estudiante comprenda y reconozca las propiedades y características que posee cada transformación isométrica, pues es lo que permite establecer conjeturas y verificar el movimiento en particular que se ha aplicado a una figura. Así mismo, se requiere el reconocimiento de lados y ángulos correspondientes para establecer la relación de semejanza y congruencia que existe entre figuras al ser el resultado de una transformación.

Por su parte, en la enseñanza de la geometría, el proceso de visualización es concebido como una actividad cognitiva que consiste en el reconocimiento o discriminación de todas las organizaciones posibles de una configuración geométrica, además de la

discriminación de las modificaciones de naturaleza configural y las extrapolaciones susceptibles que se puedan aplicar sobre la figura (Marmolejo y González, 2013). De modo que, a partir de una representación visual, es posible extraer la información contenida en las figuras, de tal forma que se puedan generar procesos de composición y descomposición, teniendo en cuenta las características y propiedades de la figura global, así como, de las figuras que la integran. Por ello es importante mencionar que, la visualización no solo permite la recreación de imágenes mentales sino también su manipulación y operaciones.

En relación con lo anterior se precisa que, la visualización permite ilustrar proposiciones, relaciones e ideas; además de, suscitar preguntas al desarrollar una actividad matemática; ayuda a discernir entre maneras de proceder; inspirar bosquejos globales de estrategias que van más allá de lo procedimental y armonizarlas con el razonamiento (Marmolejo y González, 2013). Es por esto que, es de suma importancia para el desarrollo del pensamiento espacial, pues se hacen necesarios estimular en el estudiante formas diferentes de guiar el desarrollo de una situación problema haciendo uso de representaciones visuales, posibilitando la comprensión de procesos mentales para establecer relaciones entre figuras, crear conjeturas, predecir resultados y verificarlos.

Lo dicho hasta aquí supone que, en el ámbito escolar específicamente en geometría es de suma importancia el desarrollo del pensamiento espacial a partir de las transformaciones isométricas teniendo en cuenta los procesos de visualización. Lo cual, se puede propiciar mediante el uso de diferentes recursos, siendo uno de ellos el libro de texto escolar; ya que son utilizados por los docentes para la planificación, preparación y desarrollo de la clase; y por los estudiantes para el proceso de aprendizaje, realización de ejercicios, tareas y afianzamiento de los contenidos (Cárcamo, 2012).

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

Por consiguiente, el libro de texto es considerado como un recurso material que funciona como una extensión del profesor de matemáticas en el proceso de enseñanza y de aprendizaje (Adler, 2000). Lo cual indica que, los libros de textos tienen gran importancia en la mediación que se realiza entre el estudiante, el docente y el saber, dado que, por un lado, describe el objeto de conocimiento que el docente desea orientar, muestra un conocimiento que una comunidad estipuló como necesario que la escuela debe abordar y a su vez, presenta un contenido cuya pertinencia está determinada por los objetivos de enseñanza que un docente contempló para que un estudiante pueda aprender.

Por lo anterior, se debe hacer una revisión a los libros de textos, ya que tanto estudiantes como profesores interactúan con ellos. Pues, se considera que analizar los libros de textos puede informar sobre su potencial para ayudar en la enseñanza y el aprendizaje, porque los profesores interactúan con los libros de textos de varias maneras (Fan, Trouche, Qi, Rezat y Visnovska, 2018). De forma que, se valore la pertinencia respecto a la forma como abordan las tareas. Pues, no es suficiente con que las transformaciones isométricas estén incluidas en los libros de textos, sino que, se debe tener en consideración la forma como se abordan las tareas y la finalidad con que estas se presentan.

De manera que, se pueda determinar si dicho recurso propicia el desarrollo de habilidades y destrezas en el pensamiento espacial a partir del proceso de visualización tomando como objeto de estudio las transformaciones isométricas. Permitiendo reflexionar sobre la manera como se deben direccionar los libros de textos. Es por esto que, fue relevante describir la forma como se estructuran los textos escolares, pues permitió evidenciar la pertinencia del abordaje del contenido en el aula de clases.

En síntesis, con todo lo dicho hasta aquí se resalta que:

- El pensamiento espacial propicia la interacción entre la cognición del sujeto y la influencia de los entornos en que se desenvuelve; favoreciendo la exploración, comprensión y operación de representaciones de objetos en el espacio, apoyándose en figuras, modelos, lenguaje, movimientos entre otros.
- Las transformaciones isométricas son elementos fundamentales para el estudio del movimiento, pues posibilitan la exploración del plano y del espacio permitiendo estudiar las propiedades y relaciones de las figuras geométricas al aplicarle un movimiento en particular, en las que se reconocen la invariancia de las características de las figuras independiente de la posición y orientación en la que se encuentren, con lo cual se canalizan concepto como congruencia, equidistancia, colinealidad, paralelismo, perpendicularidad, entre otros. Destacando además que, permiten el reconocimiento e identificación del sentido y la orientación de los segmentos y ángulos que constituyen una configuración geométrica, lo cual convierte las transformaciones isométricas en un elemento fundamental para la estructura de la geometría moderna.
- La visualización desde un enfoque semiótico cognitivo, permite explorar las configuraciones geométricas desde las propiedades matemáticas de los objetos representados, de modo que se permita la discriminación, la operación y la coordinación entre una representación visual y el discurso que la acompaña, lo cual posibilita la identificación de las reglas de organización de las unidades figuras que integran la configuración independiente de las modificaciones de posición y orientación que puedan sufrir a causa de la aplicación de un movimiento en particular en el plano o espacio.
- El libro de texto es un recurso utilizado para el trabajo académico dentro y fuera del aula, pues, influye sobre el qué y cómo enseñar, sin embargo, no asegura

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

que el contenido o la forma como este se presenta sea el adecuado para el desarrollo de procesos cognitivos. Es importante mencionar que, debido a la contingencia generada por la pandemia COVID – 19 el libro de texto tiende a ser un material educativo que media el proceso de aprendizaje desde casa, por lo que, fue indispensable un análisis de los mismos.

1.4 Antecedentes

En la revisión de diferentes bases de datos y repositorios digitales, se hallaron investigaciones respecto al análisis de textos escolares de matemáticas, a la visualización y a las transformaciones geométricas en básica primaria. Las cuales, se agruparon en dos conjuntos: las que responden al pensamiento espacial en la enseñanza de la geometría y las que se enfatizan en el análisis a libros de textos en aspecto geométricos. A continuación, se describen cada uno:

1.4.1 Investigaciones asociadas al pensamiento espacial en la enseñanza de la geometría

Se presenta la investigación realizada por Rueda, Ríos y Martínez (2009), la cual pretendió desarrollar estrategias de intervención pedagógica que contribuyan a la construcción de la noción de espacio en estudiantes del grado 5° de la Institución Educativa Alberto Lebrún Múnera sección Rogelio Arango. De la que se destacó su referente teórico, pues presenta algunos aspectos históricos – epistemológicos en la noción de construcción del espacio, de igual forma, presenta un análisis al sistema educativo en relación con la forma como se ha considerado el pensamiento espacial desde el currículo propuesto, desarrollado y alcanzado enfatizando el segundo al contenido de textos matemáticos específicamente en aspectos geométricos.

La metodología abordada se fundamentó en la ingeniería didáctica a partir del análisis a priori y a posteriori a la adaptación de algunas actividades propuestas en un libro de texto, de lo cual se concluyó que a la mayoría de los estudiantes se les dificultó ubicarse en el lugar del otro, debido que, casi siempre ubican a los demás desde su marco de referencia o lateralidad. Sin embargo, aunque algunos estudiantes sean capaces de ubicarse en el lugar del otro, no se asegura que puedan hacerlo acertadamente por medio de representaciones gráficas o figuras.

Del mismo modo, se tiene la investigación de Uribe, Cárdenas y Becerra (2014) asociada a las teselaciones como estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial en preescolar y básica primaria; la cual pretendió desarrollar habilidades espaciales tales como: coordinación visomotriz, coordinación figura-fondo, constancia perceptual, percepción de posición en el espacio, relaciones de percepción espacial, discriminación visual y memoria visual para la construcción de nociones y conceptos geométricos. Para esto se tuvo en consideración lo propuesto por Bonilla, Espinosa, Feria y Martínez (2007); Feria et al. (2006), entre otros.

La propuesta se materializa en el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de unidades didácticas que integraron elementos propios de la geometría, el pensamiento espacial y la expresión artística (línea, vértices, polígonos, rotación, traslación, reflexión etc.). De lo cual se obtuvo como resultado, un mejor desempeño de los estudiantes para solucionar problemas de localización, orientación y ubicación espacial, en la representación de las distintas posiciones, movimientos y desplazamientos propios y de los objetos con la construcción de referentes de ubicación, conocimiento de las figuras geométricas, sus propiedades y características.

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

1.4.2 Investigaciones relacionadas con el análisis a libros de textos escolares en aspectos geométricos

Se encuentra la investigación de Bohórquez, Cuervo y Urueta (2018), relacionada con el análisis del contenido propio de la geometría en una serie de tres textos escolares de matemáticas para el primer ciclo de la educación básica primaria. Es así como, su fundamento teórico se basó principalmente en la conceptualización que se tiene del libro de texto específicamente en Colombia. De ahí que, se constituye un marco referencial en tres aspectos relevantes: el referente legal, en el que, se da cuenta de los parámetros establecidos para la educación matemática a partir del MEN (1998, 2006); el referente matemático, expone algunas consideraciones históricas de la geometría y explicita los objetos propios de la misma, a través de autores como Castro (2001), Díaz, Godino y Ruíz (2004), entre otros; por último, el referente cognitivo, se relaciona con obstáculos, errores y dificultades asociadas a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, tomando en consideración a Barrantes (2008), Chamorro (2003), etc.

En la investigación anterior, se usó un enfoque de investigación cualitativo interpretativo, con un método de análisis de documentos. Para lo cual, se hicieron uso de seis fases que permitirían comprender cómo son desarrollados los contenidos propios de la geometría en los libros de textos.

Esta investigación, permitió reconocer la importancia de analizar libros de textos en relación con la forma como este presenta los contenidos geométricos. Además, mostró las dificultades que se han venido presentando referente a la utilización de representaciones inadecuadas de figuras en los libros de textos; lo cual, propicia que los estudiantes no comprendan e interioricen algunos conceptos geométricos. Así mismo, resaltó la poca relevancia que se le da a la geometría en los libros de textos, pues ha sido un campo poco

trabajado en el aula de clases, y en los casos de utilidad se aborda únicamente con el fin de resolver los ejercicios que se proponen para un objeto de conocimiento.

En este mismo orden de ideas, se encuentra la indagación de Bustamante y Giraldo (2015), la cual, tuvo como propósito principal analizar desde una perspectiva semiótica cognitiva los procesos de construcción, visualización y razonamiento en geometría en el texto escolar de matemáticas de grado cuarto Proyecto Sé. Para tal fin pretendió, definir cada una de las actividades cognitivas, luego proponer algunas variables de análisis, por último, identificar como se presentan los procesos cognitivos en el libro de texto en la enseñanza de la geometría.

En esta investigación se destacó la teoría semiótica cognitiva de Duval (1999, 2004) de la que se tomó en consideración lo relacionado con la actividad cognitiva de visualización.

Del mismo modo, se presentó la propuesta del MEN (1998, 2006) respecto a la enseñanza de la geometría, las actividades cognitivas y el libro de texto, además, resaltó algunas concepciones de este último a partir de las ideas de Godino y Batanero (2003).

Cabe destacar que, el análisis de la visualización en el libro de texto se fundamentó en categorías abordadas desde la teoría de Duval (1999, 2004). En el que, a partir de una rejilla con una sola entrada se hace énfasis en la aprehensión perceptiva, la aprehensión operatoria en cuanto a las modificaciones mereológicas, y la aprehensión discursiva respecto a las preguntas que orientan el desarrollo de una tarea, etc.

Ahora bien, la investigación de Thaqi y Giménez (2016) examinó el currículo de matemáticas en básica primaria de dos países, mediante la comparación a los planes de estudio según los libros de textos de acuerdo con las transformaciones geométricas. De manera que, el análisis se realizó en términos de dominios cognitivos, detallando similitudes y diferencias entre los libros de textos de matemáticas; de lo cual se encontró que, las

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

actividades que se plantean para la educación primaria no dan la posibilidad a los estudiantes de comprender y construir un concepto claro de las transformaciones isométricas, del mismo modo, la organización del contenido se presenta de forma desconectada al abordar las transformaciones geométricas.

Cabe resaltar que, para tal fin se fundamentaron en autores como Robitaille (1995), Johansson (2005) y Kunimune, et al. (2009) quienes señalan la influencia que tienen los libros de textos en relación con su contenido y enfoque en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, pues estos contribuyen a la comprensión del currículo; así mismo, NCTM (2000), Svoboda (2007) y Thaqi (2009) con las transformaciones geométricas, destacando la importancia que estas tienen en el currículo de geometría, sin embargo, señalan que poco se habla de la transformación como proceso de cambio, así como, de sus elementos culturales e históricos.

En suma, es relevante considerar desde Rueda, Ríos y Martínez (2009) la forma como se aborda el pensamiento espacial asociado al análisis de actividades a priori para la construcción de la noción de espacio en relación consigo mismo y con el objeto desde aspectos físicos y representaciones de figuras, reconociendo la posición de una figura o persona a partir de la relación de dirección horizontal (izquierda - derecha) o vertical (arriba - abajo), así como el cambio de orientación que puede sufrir una figura al aplicarle un giro sobre uno de sus vértices. Además, se resaltó el modo como se elaboraron los análisis a priori ya que se destacaron las potencialidades de las actividades y las fortalezas que pueden tener los estudiantes, así como, sus posibles dificultades. Así mismo, desde Uribe, Cárdenas y Becerra (2014) se consideraron las habilidades espaciales pues favoreció en la construcción y el desarrollo del pensamiento espacial, teniendo en cuenta que, algunas teselaciones se

construyeron a partir de las transformaciones isométricas, resaltando la dirección, la orientación, las formas y el tamaño de las figuras.

En este mismo sentido, en Bohórquez, Cuervo y Urueta (2018) se resaltó la forma como se deberían analizar los contenidos geométricos en libros de textos, visto desde las representaciones figurales y los conceptos puesto que, estos pueden facilitar o dificultar la comprensión de un objeto. A su vez, de Bustamante y Giraldo (2015) se destacó el considerar las aprehensiones propuestas por Duval (1999) para el análisis del proceso de visualización en un libro de texto en aspectos relacionados con la geometría. Finalmente, en Thaqi y Giménez (2016), se recalcó la forma como se realizó el análisis comparativo a los libros de textos en el abordaje de las transformaciones geométricas, pues dejó ver las similitudes y diferencias en relación con los tipos y conceptos de transformaciones que se trabajan y la forma como se estructuran.

CAPÍTULO II: MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

En este capítulo se detallaron los referentes conceptuales que dieron sentido al problema, propósito y metodología de la investigación. Estructurado a partir de cuatro apartados en los que se delimitan los elementos relevantes y fundamentales para el desarrollo de la misma. Considerando en el primero, algunos parámetros y criterios relacionados con el pensamiento espacial y sistemas geométricos a partir del MEN (1998, 2006). En el segundo, se presentaron ideas sobre la concepción y función del libro de texto como un recurso que media en los procesos de enseñanza y de aprendizaje dentro y fuera del aula desde Adler (2000) Ramírez (2002), Mora (2016) etc. En el tercero, se tuvo en cuenta a Duval (1994, 1995, 1999), Del Grande (1990), entre otros, en cuanto a la visualización asociadas a las figuras geométricas y en el cuarto, se planteó la forma como se conciben las transformaciones isométricas (traslación, reflexiones y rotación) apoyado en las ideas de Jaime (1993), Julio (2014) entre otros.

2.1 Consideraciones acerca de libro de texto

El texto escolar es un recurso material, impreso o digital que posee un gran valor en las prácticas educativas pues, de acuerdo con Adler (2000) un recurso es aquel material al que se puede recurrir para facilitar la creación de significado y el acceso a nuevos conocimientos. Lo cual indica que, los elementos contenidos en un libro de texto (explicaciones, ilustraciones, ejemplos, ejercicios, tareas, etc.) promueven un acercamiento al estudio de un área en particular, para nuestro caso las matemáticas, recurso el cual cobra sentido en la medida que potencie y medie en procesos de enseñanza y de aprendizaje.

De lo anterior se infiere que, al interactuar con recursos se genera la evolución de los conocimientos, es así como, los recursos con los que trabaja un profesor son vivos,

continuamente renovados (Trouche, 2018). Es por ello que, el libro de texto a pesar de ser un recurso material (inerte); la vida de este se instaura en la medida en que su contenido es aprovechado por profesores para la planificación y orientación de sus prácticas, así como para el afianzamiento de sus saberes, además de servir de mediador entre estudiante y saber de forma que propicie la adquisición de conocimientos y el desarrollo de habilidades y destrezas.

Se debe agregar que, un recurso es todo lo que sea susceptible de regenerar el trabajo de los docentes. Adler (2012) (como se citó en Trouche, 2018). De este modo, el libro de texto de manera intencional establece una metodología que estructura su contenido y tiende a influir en la forma de abordar un objeto de conocimiento; pues este, contiene una propuesta curricular en la que se indica qué y cómo enseñar, así mismo, qué y cómo evaluar, además de, en qué secuencia enseñarlo, lo cual puede contribuir a la práctica educativa del docente.

Es así como, Ramírez (2002) manifiesta que:

El texto escolar es un recurso didáctico, que puede ser de sustrato material o virtual, en el cual se materializa un discurso compuesto por palabras, palabras y símbolos o palabras, símbolos e ilustraciones, estructurado de manera secuencial y sistemática en atención a la maduración intelectual y emocional del lector, y creado con la intención expresa de ser utilizado como un recurso pedagógico en el proceso de enseñanza-aprendizaje del sistema escolar formal, con el fin de brindar información sobre algún área del conocimiento en atención a la oferta curricular establecida en los programas de estudio, elaborados por las autoridades educativas nacionales, quienes a su vez autorizan, supervisan y reglamentan sus contenidos, extensión y tratamiento (p.111).

En este mismo orden de ideas, los libros de textos escolares de matemáticas no son documentos exclusivamente formales, sino que son recursos materiales del profesor, con propósitos educativos, que se proponen transmitir unos determinados significados para la

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

correcta comprensión de los conceptos formales que presentan. Ante esto, Segovia y Rico, (2001) (como se citó en Maz, 2009) mencionan que, los contenidos no se presentan como un saber sabio, sino como un saber enseñado, propiciando la comprensión del objeto de conocimiento que se está presentando, al igual que, el desarrollo de procesos cognitivos.

Ahora bien, los libros de textos constituyen un papel fundamental en los procesos escolares dentro y fuera del aula de clases. Por lo cual Mora (2016) establece las siguientes funciones:

- *Estructurar, organizar y distribuir*: una serie de contenidos que han sido concebidos a partir de una intención curricular definida.

Permite reconocer que, los libros de textos responden a ¿qué enseñar?, es decir, a los objetos de conocimientos que se van a abordar y como estos se presentan y articulan para el desarrollo del pensamiento matemático en un determinado grado. Es así como, al implementar un libro de texto en el proceso educativo, se acepta la propuesta curricular que este trae consigo.

- *Representación*: de diversos contenidos textuales, gráficos, imágenes, figuras, percepciones del mundo, adelantos científicos y tecnológicos, etc.

Hace énfasis en las distintas formas de presentar un objeto de conocimiento, en el que las representaciones visuales se integran y articulan con enunciados para aproximar a su comprensión. Lo cual, plantea la necesidad de coordinación entre los componentes que se asocian para la presentación de un objeto de conocimiento en particular.

- *Control*: guía el desarrollo de los contenidos, la distribución de las actividades y las tareas propuestas que permitan la acción y reflexión del proceso pedagógico y didáctico.

Orienta la forma como se deben abordar las distintas situaciones, tareas, ejercicios, etc. Por lo que, propone un conjunto de procedimientos para la obtención de unos aprendizajes esperados.

Ahora bien, al ser los libros de textos un recurso utilizado por docentes y estudiantes, se hace necesario revisar la forma como estos estructuran su contenido. Es así como, al estudiar los libros de textos se realiza un análisis al contenido de un campo de conocimiento específico teniendo en cuenta sus diversas representaciones (Maz, 2009). Lo anterior indica que, todos los elementos que constituyen un libro de texto son tenidos en cuenta al momento de llevar a cabo un análisis, ya que brindan información que de acuerdo a la intención del investigador le proporciona insumos para valorar la pertinencia del mismo.

2.2 Aspectos curriculares

En este apartado se tienen en cuenta las consideraciones propuestas por el MEN (1998,2006) respecto al pensamiento espacial y sistema geométrico. En el que, se aborda la geometría como un sistema integrado por objetos, relaciones y transformaciones, además, se expresa la forma como se ha concebido el pensamiento espacial y como este ha ido evolucionando; finalmente, se sintetiza la coherencia vertical y horizontal de los aprendizajes de los conjuntos de grados de 1° a 3° y 4° a 5° referidos al pensamiento espacial y sistema geométrico.

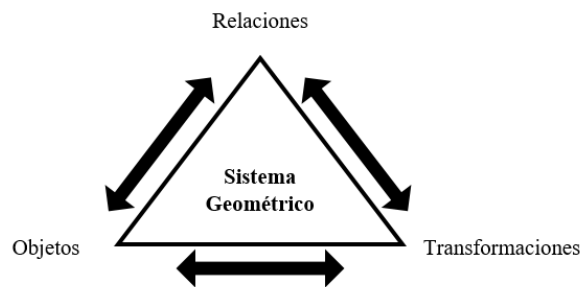
2.2.1 Elementos relacionados con el sistema geométrico

La geometría permite describir y comprender elementos del mundo físico mediante abstracciones mentales del entorno. La cual, es concebida como un sistema integrado por los elementos de que constan, las operaciones y transformaciones con las que se combinan, y las relaciones o nexos entre ellos (MEN, 2006). Es por esto que, en el sistema geométrico se

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

articulan representaciones simbólicas, movimientos en el plano y en el espacio y relaciones de igualdad, equivalencia, semejanza entre otros. Convirtiéndose en un campo privilegiado para el desarrollo del pensamiento espacial.

Ilustración 1: Aspectos que integran el sistema geométrico



Fuente: elaboración propia

Ahora bien, se hace preciso mencionar la forma como se está concibiendo cada una de los aspectos del sistema geométrico

- **Objetos geométricos:** figuras tridimensionales que están constituidas por un conjunto de unidades figúrales 0, 1, 2 dimensiones.
- **Transformaciones:** movimientos que se le pueden aplicar a una figura, cambiándola de posición; conservando, ampliando o reduciendo su tamaño.
- **Relaciones:** correspondencia entre elementos constitutivos de un mismo objeto o de dos o más objetos.

Es así como, mediante la geometría se intuye sobre las representaciones bidimensionales y tridimensionales generando la comprensión de las características y propiedades de los objetos, permitiendo establecer relaciones entre ellos mismos y con otros. Lo cual, se requiere para comprender los efectos de las distintas transformaciones en el plano y en el espacio.

2.2.2 Nociones relacionadas con el pensamiento espacial

Se reconoce que la geometría propende por el desarrollo del pensamiento espacial el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales (MEN 1998). En el que, la construcción del espacio está condicionada por la interacción entre la cognición del sujeto y la influencia de los entornos en que se desenvuelve; favoreciendo la exploración, comprensión y operación sobre este, apoyándose en figuras, modelos, lenguaje, movimientos entre otros.

Así pues, la apropiación del espacio físico y geométrico requiere del estudio de distintas relaciones espaciales de los cuerpos sólidos y huecos entre sí y con respecto al sujeto; en el que se destacan los procesos de localización en relación con sistemas de referencia, y del estudio de lo que cambia o se mantiene en las formas geométricas bajo distintas transformaciones (MEN 2006, p. 62).

Lo cual indica que, el pensamiento espacial permite la construcción y apropiación del espacio a partir de las representaciones físicas y geométricas que crea el sujeto mediante la abstracción de información al interactuar con objetos de su entorno. De tal forma que, pueda establecer relaciones de posiciones de los objetos con ellos mismos y con él. Es decir, se establece un vínculo entre la cognición del sujeto y el entorno físico. Por ende, es necesario propiciar el desarrollo del pensamiento espacial, puesto que, potencia las relaciones entre los objetos del entorno físico con los objetos geométricos.

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

Ahora bien, desde el MEN (2006) se reconoce la evolución del pensamiento espacial a partir de tres momentos, en el primero se relacionaron aquellas cualidades del mundo físico con las representaciones mentales que se tienen de los objetos, haciendo énfasis en la ubicación de los objetos, los movimientos y las relaciones que se pueden establecer entre ellos (cerca, lejos, grande, pequeño, igual etc.), además de, las relaciones entre el sujeto, el objeto y el espacio. Sin embargo, es importante mencionar que fue necesario complejizar los sistemas de representaciones espaciales lo cual requirió especificar las longitudes de algunas unidades figúrales de los objetos, la distancia que separa un objeto del otro o el espacio que estos ocupan. Por tal razón, se dio paso a un segundo momento centrado en la metrización del pensamiento espacial; en el que, las propiedades de los objetos se deben no sólo a sus relaciones con los demás, sino a sus medidas y a las relaciones entre ellas (MEN, 2006). Lo cual permitió hacer conexiones entre las nociones de perímetro, área, volumen, longitud de segmentos y ángulos, con semejanza o congruencia, y con los distintos movimientos de los objetos en el espacio.

Finalmente, se dio el tercer momento, caracterizado por el formalismo a través de teoremas de la geometría Euclidiana.

2.2.3 Coherencia horizontal y vertical de algunos aprendizajes asociados con las transformaciones isométricas

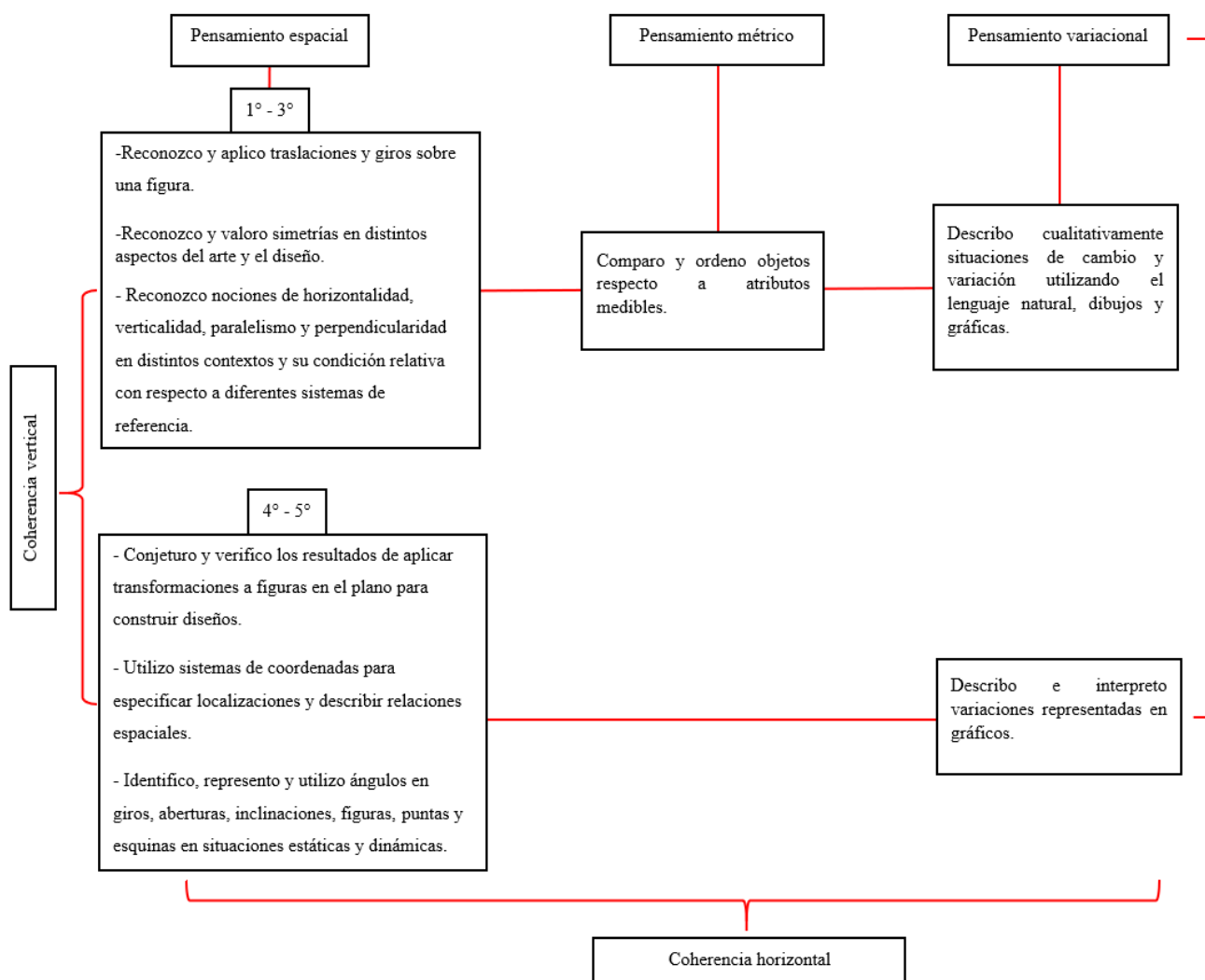
Los estándares básicos de competencias de ahora en adelante EBC, establecen algunos parámetros sobre los aprendizajes que todos los estudiantes deberían adquirir de acuerdo con el conjunto de grados en el cual se encuentran. Los cuales están estructurados en relación con los cinco pensamientos expuestos por el MEN (1998), con los que se pretenden desarrollar competencias en los estudiantes, la cual es entendida como el saber hacer en un contexto determinado, es decir, la aplicación de los saberes adquiridos en distintas situaciones de la vida cotidiana de las matemáticas y de otras ciencias, así mismo, la competencia pretende desarrollar

en los estudiantes habilidades, destrezas, conocimientos, actitudes y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras, lo cual genera un aprendizaje significativo en el estudiante.

Cabe resaltar que, los EBC se encuentran divididos por conjuntos de grados, de 1° a 3°; de 4° a 5°; de 6° a 7°; de 8° a 9° y de 10° a 11°. En relación con esto, se hace preciso mencionar que, en el desarrollo de un pensamiento se establecen niveles de complejidad articulado según los conjuntos de grados en el cual se aborde el aprendizaje de un objeto matemático (coherencia vertical). Para efectos de este trabajo, la complejidad en los aprendizajes se organizó en el pensamiento espacial de básica primaria (1° a 3° y 4° a 5°) en este mismo orden de ideas, se estableció una relación entre los distintos pensamientos de un conjunto de grados específico. De modo que, en el conjunto de grados de 4° a 5°, un aprendizaje del pensamiento espacial se pueda articular con un aprendizaje del pensamiento métrico, variacional, etc., (coherencia horizontal). A continuación, se muestra un diagrama que sintetiza la relación entre el nivel de complejidad y articulación de los EBC.

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

Diagrama 1: Coherencia horizontal y vertical de los EBC de los conjuntos de grados de 1° a 3° y de 4° a 5°



Fuente: elaboración propia

2.3 Visualización en figuras geométricas: desde un enfoque semiótico cognitivo

Si bien las figuras geométricas son un importante soporte intuitivo para el desarrollo de actividades geométricas, no es obvio ni espontáneo que en la resolución de un problema matemático los educadores y estudiantes hagan de ellas elementos claves para realizar exploraciones heurísticas (Marmolejo y Vega, 2012). Siendo la visualización un proceso que permite dar relevancia al papel que juegan las figuras geométricas en la resolución de problemas, es considerada como:

Una actividad cognitiva que permite el reconocimiento o discriminación de todas las organizaciones posibles de una configuración geométrica, además de aquellas que se imponen al primer golpe de vista o como la discriminación de las modificaciones de naturaleza configural, Además, de los cambios de focalización bidimensional y la manera como se interrelacionan o conectan en la figura en estudio durante el desarrollo de una tarea (Marmolejo y González, 2013).

Puesto que, la visualización permite dar miradas sinópticas, realizar verificaciones subjetivas o suscitar la exploración heurística de situaciones complejas; puede ser asumida como un legítimo elemento de prueba matemática o como una actividad cognitiva que permite extraer datos y relaciones matemáticas. (Marmolejo y González, 2013). Es decir, mediante la visualización se puede discriminar de los procesos para llegar a la solución de un problema que puede ser viable o factible, lo cual genera que, “de entrada, la figura ha de evitar la exploración de todos los caminos posibles captando la atención solo sobre aquellos susceptibles de conducir a la solución o sobre los que ya ha conducido a ella” (Duval, 1999, p. 153).

En este sentido, se reconoce que la visualización permite la comprensión y discriminación de los elementos que integran una configuración geométrica, de tal forma que, se puede extraer lo relevante en ellas en el abordaje de una tarea. Es así como, la visualización se basa sobre la producción de una representación semiótica (Duval, 1999). Es decir que, para el pensamiento espacial y sistema geométrico la visualización posibilita establecer relaciones entre los elementos que integran una figura (punto, segmento, ángulo etc.). Por ende, el proceso de aprendizaje debe atender tres problemas: la discriminación, el procesamiento y la coordinación con un discurso (Duval, 1999).

En este sentido, para el desarrollo del pensamiento espacial a través del proceso de visualización se deben considerar habilidades visuales, pues permiten el procesamiento y

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

organización de la información que se percibe en una en una representación figural, por lo que, es pertinente abordarlas a partir de lo propuesto por Del Grande (1990) dado que, posibilita la discriminación visual, constancia de percepción, coordinación ojo motor, percepción de la posición en el espacio, entre otros, lo cual se constituye en uno de los elementos fundamentales para el desarrollo de la visualización.

Sin embargo, estas habilidades por sí solas no determinan lo que se puede hacer con una figura geométrica, de ahí la importancia de articularlas con la aprehensiones propuestas por Duval (1994, 1995) ya que estas permiten identificar los elementos que constituyen una configuración geométrica (unidades figúrales, leyes de organización), así como, realizar modificaciones a figura a partir de diferentes operaciones en las que se reconocen los elementos que permanecen invariantes en ellas, además de, establecer coordinación entre representaciones visuales y los enunciados que la acompañan. Las habilidades y aprehensiones se detallan a continuación:

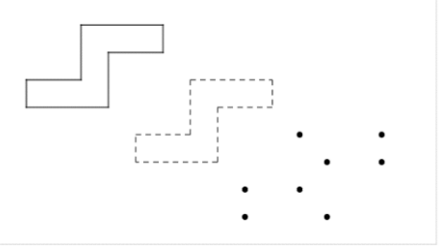
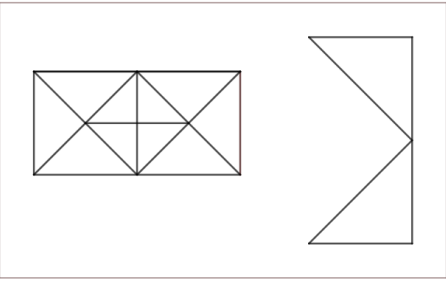
2.3.1 Habilidades visuales

Desde lo propuesto por Del Grande (1990) se reconocen siete habilidades visuales (coordinación ojo – motor, percepción figura fondo, constancia de percepción, percepción de la posición en el espacio, percepción de relaciones espaciales, discriminación visual y memoria visual). Sin embargo, para efectos de este trabajo sólo se abordaron seis, dejando de lado la memoria visual, puesto que, su análisis exige recordar objetos o imágenes que no están a la vista, de manera que, se puedan relacionar sus características con otros que estén perceptibles; para lo cual, se requiere observar la conducta de quien desarrolla las tareas en el libro de texto, así como, establecer actividades prácticas de mostrar objetos en una posición y orientación determinada, ocultarlo por unos minutos y exigir a quién observa recordar las características (posición y orientación), de aquello que percibió.

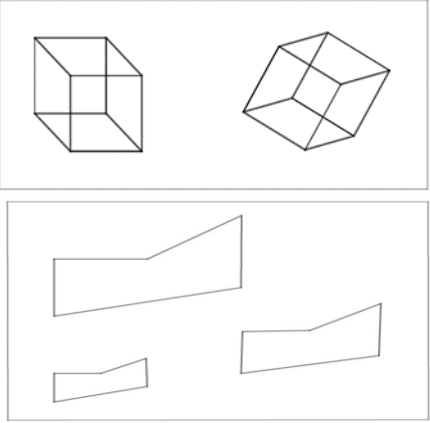
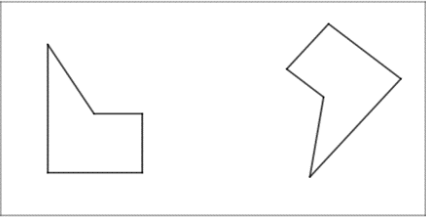
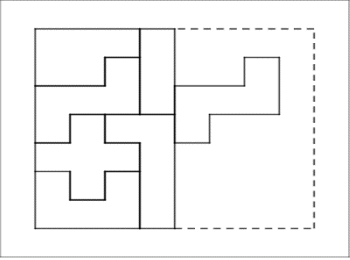
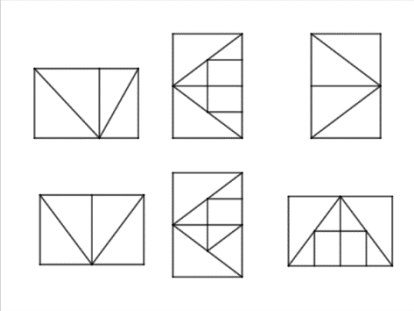
A continuación, se detallan cada una de las habilidades que se abordaron en la investigación:

- *Coordinación ojo-motor:* es la habilidad en la que se sigue con los ojos los movimientos del cuerpo o de un objeto de manera armoniosa y sincronizada.
- *Percepción figura-fondo:* acto visual en el que se identifica o distingue una figura discriminando los elementos externos que la integran.
- *Constancia de percepción:* reconocimiento de una figura en diferentes posiciones y tamaños.
- *Percepción de la posición en el espacio:* relaciona la posición de un objeto en el espacio tomando como referencia a uno mismo (sujeto que observa).
- *Percepción de relaciones espaciales:* la capacidad de percibir la posición de dos o más objetos en relación con uno mismo o entre ellos.
- *Discriminación visual:* es el reconocimiento de características y propiedades para establecer correspondencia entre dos o más objetos especificando sus similitudes y diferencias, independientemente de la posición en las que se presente.

Tabla 1: Ejemplificaciones de las habilidades visuales

Habilidad	Actividades	Ilustración
Coordinación ojo – motor	<ul style="list-style-type: none"> • Dibujar líneas rectas, curvas etc., siguiendo un patrón. • Rastrear el movimiento de una figura o completar regiones. • Unir puntos con segmentos en diferentes direcciones (horizontal, vertical u oblicua). 	
Percepción figura-fondo	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer e identificar en un conjunto de figuras superpuestas o yuxtapuestas una figura en particular. • Realizar trazos adicionales a una figura para que sea idéntica a otra figura dada. • Unir varias figuras para formar una sola figura; ensamblar las partes para formar un todo. 	

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

<p>Constancia de percepción</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer e identificar figuras que tienen igual forma y tamaño, así como, figuras que tienen igual forma, pero diferente tamaño. • Clasificar u organizar figuras teniendo en cuenta algunas características (tamaño, color, forma etc.). 	
<p>Percepción de la posición en el espacio</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocimiento de las transformaciones isométricas (rotación, traslación y simetrías) entre una figura y su imagen. • Reconocimiento de las características que permanecen invariantes en una figura bajo un movimiento que se le aplique. 	
<p>Percepción de relaciones espaciales</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Ubicar figuras a partir de la continuación de un patrón. • Organizar figuras a partir de la relación de posición entre ellas mismas. 	
<p>Discriminación visual</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar en un conjunto de objetos cuáles son iguales y cuáles son diferentes. • Ordenar y clasificar objetos que guarden similitud (forma y tamaño). 	

Fuente: elaboración propia

2.3.2 Aprehensiones

Es este mismo sentido, Duval (1994, 1995, 1999) presenta cuatro tipos de aprehensiones (perceptiva, operatoria, discursiva y secuencial) que se deberían tener en cuenta en el

aprendizaje de la geometría. Aunque, en este trabajo sólo se abordan las tres primeras, con las cuales se pueden tratar los tres problemas en el aprendizaje de la visualización que fueron expuestos anteriormente.

- *Aprehensión perceptiva*

Permite identificar representaciones de figuras en dos o tres dimensiones ya sea en el plano o espacio, en el que se reconoce de manera inmediata la forma, el tamaño, los elementos que la componen (unidades OD, 1D, 2D) etc. En este sentido, lo que muestra una figura está determinado por las leyes de organización de la misma, lo cual incide en que el reconocimiento de las unidades figurales o de otra característica relacionadas con la forma permanezcan estable, es decir, se conserven. Añadiendo a lo anterior que, se puede designar el reconocimiento de la forma (punto, segmento, cuadrilátero, triángulo, entre otros), del mismo modo, identificar las subfiguras que integran una configuración geométrica.

- *Aprehensión operatoria*

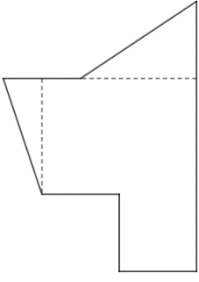
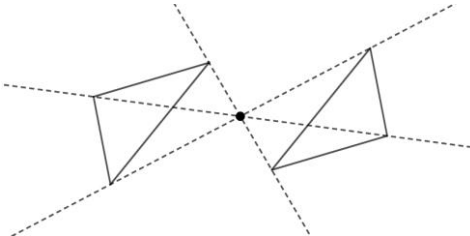
Permite la realización de modificación o transformación de una figura trazada en papel o en la mente, a partir de tres tipos de operaciones: mereológicas, ópticas y posicionales. La primera consiste en la división de una figura en subfiguras, que al recombinarlas producen una nueva figura en comparación con la figura inicial, por ende, se crea un vínculo entre la figura como un todo, y la figura como partes (subfiguras); la segunda, consiste en la ampliación, reducción o deformación de una figura, lo cual permite una modificación de su perímetro (contorno); la tercera consiste en los distintos movimientos que se le puede aplicar a una figura (rotación, traslación, simetrías, etc.,) en el plano o en el espacio. Por consiguiente, la modificación de una figura opera con las leyes y parámetros que determinan la organización de dicha figura.

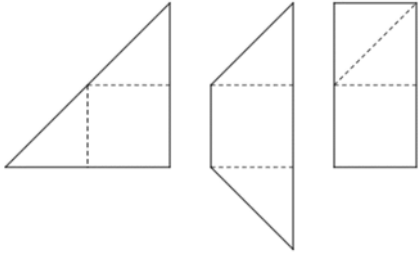
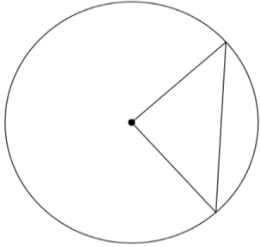
Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

- *Aprehensión discursiva*

Una figura se observa en relación con el enunciado de las propiedades, características, proposiciones, teoremas, etc., que la acompaña. Pues una figura por sí sola carece de significado, es decir sin una denominación tiende a ser una representación ambigua. En este sentido, lo que representa una figura está determinado por los enunciados. Por lo que, el reconocimiento de las propiedades de una figura se percibe a partir de las denominaciones que la acompañan. De tal forma que se establezca una coordinación entre la representación visual de la figura y los enunciados que determinan lo que representa, es decir, permiten designar o reconocer la función que cumple un trazo (línea paralela, perpendicular, bisectriz, mediatriz, entre otro) en la organización e interacción con una representación visual.

Tabla 2: Ejemplificaciones de las apreensiones asociadas a la visualización

Aprehensión	Descripción	Ilustración
Aprehensión perceptiva	Identificación de vértices, segmentos, formas triangulares, rectángulaes, etc.	
Aprehensión operatoria	Modificación de posición de una figura a partir de una reflexión central, en la que se establecen relaciones entre vértices y lados homólogos que permiten determinar las propiedades que permanecen invariantes entre ambas figuras.	

	<p>Delimitación de las figuras que integran un trapecio isósceles, las cuales al reorganizarlas formaron un triángulo rectángulo y un rectángulo.</p>	
<p>Apreensión discursiva</p>	<p>Coordinación entre el enunciado y su representación visual, lo que permite identificar un triángulo isósceles a partir de la comprensión del radio de una circunferencia.</p>	<p>Dos de los lados del triángulo corresponden a radios de la circunferencia. Lo cual pone de manifiesto la clasificación de dicho triángulo según sus lados.</p> 

Fuente: elaboración propia

2.4 Aspectos disciplinares de las transformaciones isométricas

En este apartado se presentan las definiciones y propiedades de la traslación, rotación y reflexiones (axial y central) así como, algunos teoremas elementales de las isometrías.

Teniendo en cuenta las ideas expuestas en las investigaciones de Jaime (1993), Godino y Ruiz (2002), Morera (2013) y Julio (2014).

2.4.1 Transformaciones isométricas

Es un movimiento en el plano o en el espacio que permite cambiar la posición y en algunos casos (sentido o dirección) de una figura conservando su tamaño y forma. Dichas transformaciones se pueden generar a partir de una traslación, rotación o simetría (axial o central) (Godino y Ruiz, 2002). Es así como, en algunos objetos y situaciones del entorno se

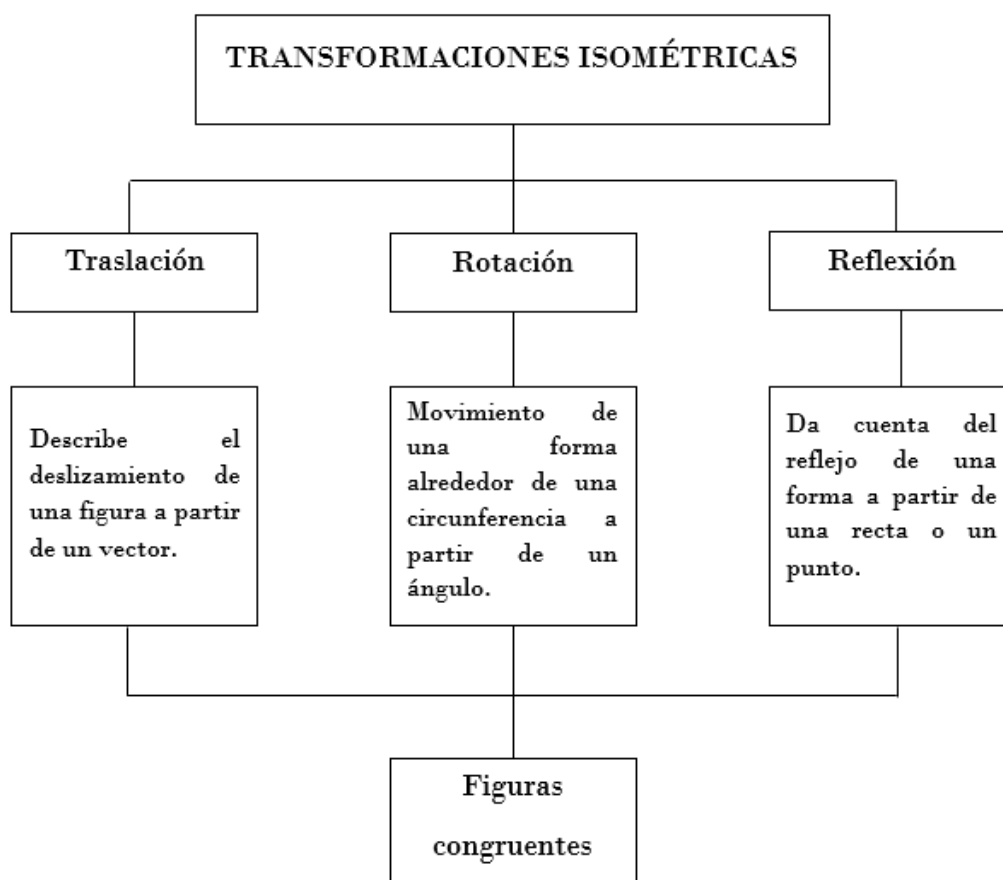
Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

puede evidenciar las representaciones de dichos movimientos, en los utensilios de cocina como las cucharas, olla; en las cerámicas, al desplazarse de un lugar a otro en línea recta, al girar en una curva, al mirarse al espejo, etc.

En este sentido, se tiene que la congruencia entre figuras puede ser el resultado de una de las siguientes transformaciones geométricas: rotación, traslación, simetrías (Julio, 2014). En el cual, mediante la correspondencia entre lados y vértices se puede determinar el vector director, el ángulo de rotación y el eje o el centro de simetría, para identificar la transformación que subyace.

A continuación, se muestra un diagrama el cual explica de forma breve las transformaciones isométricas, así como su relación con la congruencia entre figuras.

Diagrama 2: Explicación de las transformaciones isométricas



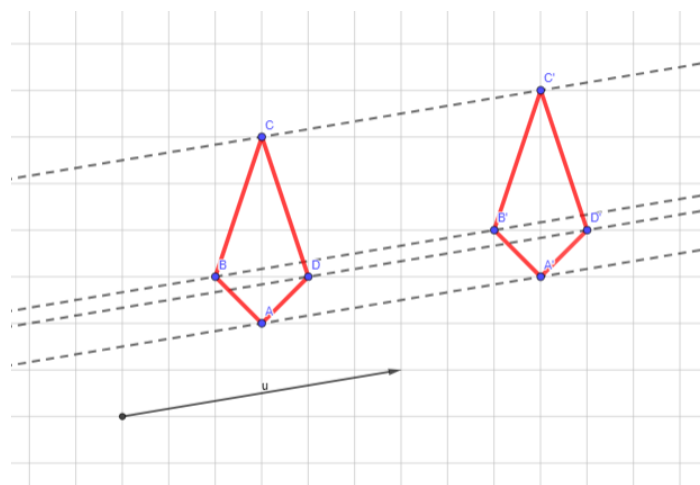
Adaptado de: Cuero y Manyoma (2019)

Por lo que se refiere al concepto de las transformaciones isométricas (traslación, rotación y simetrías), se abordan a partir de las ideas de Jaime (1993), Godino y Ruiz (2002) y Morera (2013), destacando algunas características y propiedades que las identifican:

2.4.1.1. Traslación

Deslizamiento en línea recta (vertical, horizontal o diagonal) de una figura geométrica determinado por un vector. Es así como, a partir de un vector \mathbf{u} se traslada un segmento AB en el plano, al cual se le asigna otro segmento A'B', de tal forma que, la distancia de cualquier punto del segmento inicial con su homólogo en el segmento final sea igual a la magnitud del vector: $(AA') = u$; por tal motivo se establece que, el segmento A'B' es la imagen del segmento AB determinada por el vector \mathbf{u} .

Ilustración 2: Traslación de figura bidimensional.



Fuente: Elaboración propia

En este sentido, se reconocen tres elementos esenciales para llevar a cabo el movimiento de traslación; los cuales se describen a continuación:

- *Dirección:* da cuenta de la trayectoria del movimiento de una figura, este puede ser horizontal, vertical u oblicua.

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

- *Magnitud del desplazamiento:* hace referencia a la cantidad de unidades de mediadas que fue desplazada una figura.
- *Sentido:* derecha, izquierda, arriba y abajo.

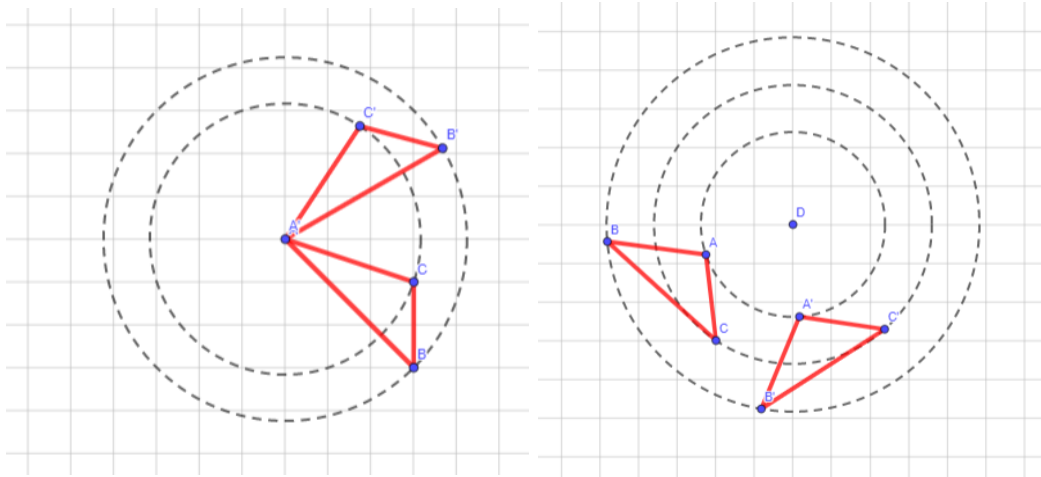
Ahora bien, se destacan algunas condiciones que se deben cumplir al aplicar el movimiento de traslación:

- La orientación del movimiento de las figuras debe ser igual a la orientación mostrada por el vector de acuerdo con la posición de su cabeza y cola.
- La figura final debe conservar el sentido de la figura inicial.
- La magnitud del vector debe ser igual a la distancia que haya entre cada vértice de la figura con su imagen.
- Las rectas que unen cada vértice de la figura inicial con la figura final deben formar un paralelogramo, pues dicho desplazamiento se da en forma paralela a la figura inicial.

2.4.1.2. Rotación

Describe el movimiento de una figura a partir del centro de una circunferencia según la amplitud del ángulo orientador. Es así como, en una rotación en el plano del segmento AB a partir de un centro O y un ángulo orientador α se le asigna otro segmento A'B' de modo que, el ángulo orientador queda formado por la intersección entre la recta que une cualquiera de los puntos del segmento inicial al centro de la circunferencia; con la recta que une su correspondiente en el segmento final al centro (AOA'). De igual forma, la distancia que haya entre uno de los puntos del segmento inicial al centro de rotación (distancia de A a O) será la misma que hay desde su homólogo en la figura final al centro de rotación (distancia A' a O).

Ilustración 2: Rotación de figuras bidimensionales.



Fuente: Elaboración propia

Por consiguiente, se reconocen tres elementos esenciales para llevar a cabo el movimiento de rotación; los cuales se describen a continuación:

- *Centro de rotación:* punto alrededor del cual se va a rotar (girar) un objeto.
- *Magnitud de rotación:* está determinada por un ángulo, entendida como la medida de amplitud en que se va a hacer rotar una figura. El cual se determina mediante la intercepción del segmento que une un punto de la figura inicial al centro de rotación, con el segmento que une la imagen del punto al centro de rotación.
- *El sentido del giro:* es la orientación en que se va a hacer la rotación. Esta puede ser en contra de las manecillas del reloj (positiva, antihorario), o a favor de las manecillas del reloj (negativo, horario).

Del mismo modo, se destacan algunas condiciones que se deben cumplir al aplicar el movimiento de rotación:

- La intercepción del segmento compuesto por el centro de rotación y un punto de la figura inicial con la del segmento compuesto por el centro de rotación con el punto homólogo en la figura final, determinan la magnitud del ángulo de rotación.

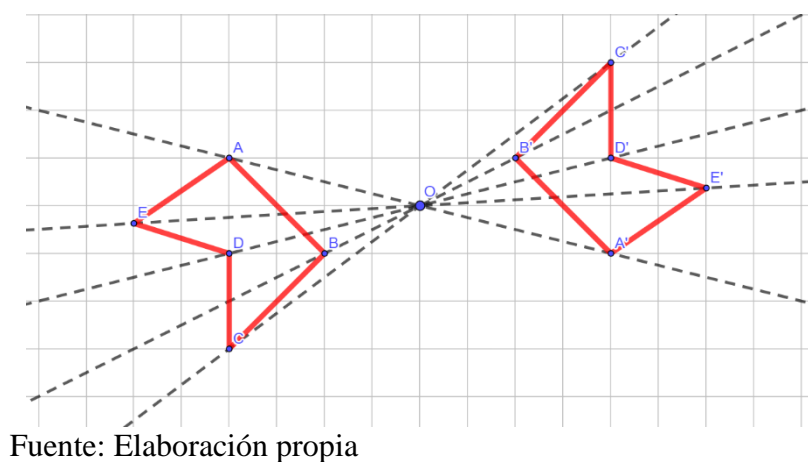
Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

- La distancia que hay entre el punto a rotar y el centro de rotación, es igual a la distancia que hay entre el punto rotado y el centro. Dicha distancia, constituye el radio de la circunferencia.
- La figura inicial respecto a la figura final conserva su forma y tamaño, pero no su sentido.

2.4.1.3. Simetrías

Son movimientos que dan cuenta del reflejo de una figura mediante un punto o un eje, estas se clasifican en central y axial. La primera está determinada por un centro de simetría. De tal forma que, a una simetría central de un segmento AB en el plano, con centro O , le signa otro segmento $A'B'$ de manera que el centro O haga parte de la recta que pasa por uno de los puntos del segmento inicial con su homólogo en el segmento final (recta que pasa por O , A y A') y la distancia que existe entre el centro O a uno de los puntos del segmento inicial (O a A) es la misma que existe entre el centro y el otro punto de la recta (O a A').

Ilustración 3: Simetría central de figura bidimensional.



Fuente: Elaboración propia

De ahí que, se reconocen tres elementos esenciales para llevar a cabo el movimiento de reflexión central; los cuales se describen a continuación:

- *Centro de simetría:* punto alrededor del cual se genera el movimiento.

- *Sentido del movimiento:* la orientación del movimiento se da a partir de un ángulo de 180° respecto al centro de rotación y a la figura inicial.
- *Sentido de la figura:* los vértices de la figura inicial después de aplicar un movimiento se invierten en la figura final.

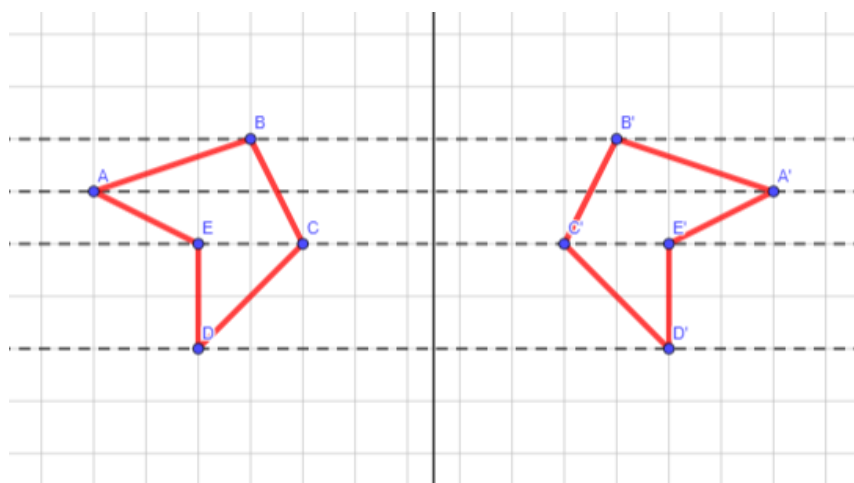
De manera similar, se destacan algunas condiciones que se deben cumplir al aplicar el movimiento de reflexión central:

- El punto inicial, su imagen y el centro de simetría pertenecen a la misma recta (son colineales).
- El punto inicial y su imagen están a igual distancia del centro de simetría (son equidistantes).
- La figura final respecto a la figura inicial cambia de sentido (queda invertida).
- Todas las líneas que conectan los vértices de la figura inicial con sus correspondiente en la figura final se intercepten en el punto llamado centro de simetría.

La segunda, describe el reflejo de una figura a partir de una recta llamada eje de simetría. Ahora bien, al tener un segmento AB y un eje de simetría t, se le asigna un segmento A'B' en el plano, de modo que, las rectas que unen cada punto del segmento inicial con su correspondiente en el segmento final, sean perpendiculares al eje t. además, la distancia que haya entre un punto inicial y el eje (punto A y la recta t) es la misma que hay entre el punto final y el eje (punto A' y la recta t).

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

Ilustración 4: Simetría axial de figura bidimensional.



Fuente: Elaboración propia

En efecto, se reconocen dos elementos esenciales para llevar a cabo el movimiento de reflexión axial; los cuales se describen a continuación:

- *Eje de simetría:* línea recta mediante el cual se genera el reflejo de una figura.
- *Sentido de la figura:* la figura reflejada conserva la misma distancia respecto al eje de simetría con la figura inicial, pero en sentido opuesto.

Así mismo, se destacan algunas condiciones que se deben cumplir al aplicar el movimiento de reflexión axial:

- El punto inicial y su imagen están a igual distancia del eje de simetría (son equidistantes).
- El segmento que une un punto con su imagen es perpendicular al eje de simetría.
- Al comparar dos a más líneas que vinculan los vértices de la figura inicial con sus correspondientes en la figura final, las líneas deben ser paralelas.

2.4.2. Teoremas relacionados con las transformaciones isométricas:

En lo que sigue, se detallan algunos teoremas básicos de traslación, rotación, reflexiones y las relaciones entre estas, visto desde las ideas de Jaime (1993) y Julio (2014).

- La composición de dos isometrías es una isometría.
- Toda isometría, o conserva la orientación de los ángulos o la invierte.
- Toda isometría que conserve la orientación de los ángulos o es una traslación o es un giro.
- Toda la isometría que invierta la orientación de los ángulos o es una simetría axial o es una simetría en deslizamiento.
- Un ángulo y su imagen son congruentes al aplicar una isometría.
- Una figura y su imagen son congruentes al aplicar una isometría.
- Toda isometría del plano se puede descomponer como producto de tres o menos simetrías axiales.
- La compuesta de dos traslaciones es una traslación.
- La composición de dos rotaciones con centro común es una rotación con el mismo centro y la medida de su ángulo será la suma de sus ángulos.
- La composición de dos simetrías centrales con distinto centro es una traslación.
- Si dos ejes de simetría axial son paralelos es equivalente a una traslación donde la recta de la traslación es perpendicular a los ejes de simetría y su medida es dos veces la distancia entre los ejes.

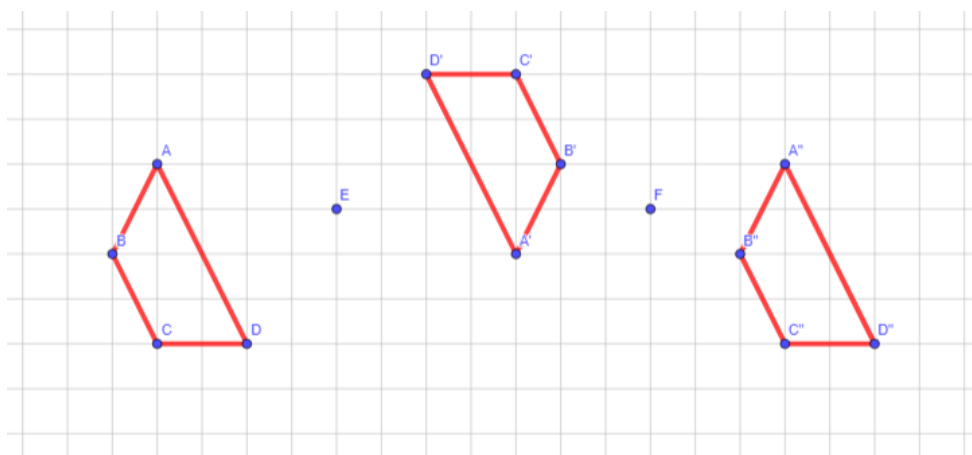
Lo anterior, permite el desarrollo de procesos mediante los cuales se conjeture los resultados de haber aplicado una isométrica a un par o conjunto de figuras. De modo que, se haga uso de las diversas definiciones (paralelismo, perpendicularidad, colinealidad,

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

equidistancia, congruencia, etc.) para verificar que tal conjetura tiene sentido, es válida y está representada en la tarea a la que se está refiriendo.

Es así como, se propicia establecer relaciones entre los tipos de isometrías, de modo que se comprenden las propiedades que permanecen invariantes en una figura (forma, tamaño, área, perímetro etc.) al aplicar un movimiento determinado, además de, las características y elementos propios de una simetría. A modo de ejemplo:

Ilustración 5: La composición de dos simetrías centrales con distinto centro es una traslación



Fuente: Elaboración propia

Ahora bien, se considera pertinente mostrar una de las formas como se pueden vincular las transformaciones isométricas con las propuestas de Duval (1994 y 1995) y Del Grande (1990). Para ello, se describen algunos elementos de las transformaciones isométricas que son tomados en cuenta mediante cada aprehensión:

2.4.3. Relaciones entre las transformaciones isométricas con las aprehensiones y habilidades visuales

Aprehensión perceptiva: se relaciona con la identificación del objeto al que se le desea aplicar una traslación, rotación o reflexión, incidiendo en el reconocimiento de sus unidades figurales (vértices, segmentos, ángulos, etc.), y en la dimensión en que se presenta;

debido que, al desplazar, girar o reflejar una figura, se debe aplicar dicho movimiento a todas las unidades figuras que la integran, lo cual posibilita establecer correspondencia entre la figura inicial y su imagen.

Aprehensión operatoria: se reconocen tres operaciones (mereológicas, ópticas y posicionales), de las cuales, se toma en consideración la posicional en las transformaciones isométricas, puesto que, permite a una figura realizar un movimiento en particular, de forma que, se pueda desplazar en forma horizontal, vertical u oblicua (traslación), reflejar tomando en consideración un eje o un punto (simetrías) y se pueda girar teniendo en cuenta un centro, sentido y amplitud de un ángulo (rotación). Sin dejar de lado aquellas características y propiedades que hacen corresponder una figura con su imagen.

Se hace preciso mencionar que, la operación mereológica no es tomada como referencia pues, esta busca modificar una figura dividiéndola en subfiguras para generar una figura diferente a la inicial, mientras que, a través de las transformaciones isométricas se pretende generar una imagen idéntica a la figura inicial. Del mismo modo, la operación óptica no es tomada en consideración puesto que, su función recae en el reconocimiento de la semejanza entre figuras a partir de la ampliación o reducción de la misma (homotecia), por el contrario, se tiene que los movimientos de traslación, rotación y reflexión dan como resultado figuras congruentes.

Aprehensión discursiva: permite coordinar el enunciado con su designación visual, de tal forma que al proponer una situación se puede determinar a qué tipo de transformación isométrica hace alusión. De igual forma, propicia el reconocimiento de la función que cumple el vector de dirección, el centro de rotación, el eje de reflexión, el centro de reflexión, etc., en un movimiento en particular que se le ha aplicado a una figura. Finalmente, da cuenta de los

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

conceptos, definiciones o procedimientos que se requieren o requirieron en el desarrollo de una actividad.

A continuación, se describen algunos de los elementos de las transformaciones isométricas que pueden ser considerados desde las habilidades visuales:

Tabla 3: Elementos de las transformaciones isométricas que pueden ser considerados desde las habilidades visuales.

		Transformaciones isométricas			
		Traslación	Rotación	Simetrías	
				Axial	Central
Habilidades visuales	Coordinación ojo – motor	Trayectoria del movimiento horizontal, vertical u oblicuo que realice una figura de acuerdo con una magnitud de desplazamiento dada.	Rastreo del giro que hace una figura de manera horaria o anti horario de acuerdo con la amplitud de un ángulo orientador.	Seguimiento al reflejo de una figura tomando como eje de referencia una línea recta.	Seguimiento al reflejo de una figura tomando como referencia el centro de una circunferencia que orienta el movimiento a partir de un ángulo llano.
	Percepción figura-fondo	Identificar entre un conjunto de transformaciones (teselados, frisos, etc.) cuales pares de figuras describen una traslación, rotación, reflexión central o axial. Para lo cual se requiere:			
	Distinguir entre varios vectores cual describe el desplazamiento de una figura inicial a una final.	Identificar el centro de rotación que permiten determinar la amplitud y sentido del giro entre una figura y su imagen.	Determinar entre varios ejes de simetría cual posibilita reflejar una figura inicial conociendo su imagen.	Reconocer las figuras que se encuentran volteadas 180° vertical, horizontal o diagonal en relación con una figura inicial, de tal forma que, permita determinar si existe un centro de	

					circunferencia que posibilite ir de una figura a la otra.
Constancia de percepción	Reconocimiento de las imágenes de una figura que ha sido desplazada varias veces.	Identificación de la conservación de una figura al aplicarle giros con diferentes amplitudes de ángulos y distintos centros de rotación.	Reconocimiento de las figuras imágenes de una figura inicial que se ha reflejado en repetidas ocasiones a partir de distintos ejes simétricos.		Distinción de las figuras resultantes de una figura inicial que se ha reflejado desde varios centros de circunferencia describiendo giros de 180°.
Percepción de la posición en el espacio	Describir la dirección del desplazamiento de una figura tomando como referencia la posición de quien lo observa.	Establecer el sentido del giro en relación con el sujeto observador.	Establecer o identificar el cambio de orientación de las figuras (inversión) respecto a un eje.		Establecer o identificar el cambio de orientación de la figura imagen (inversión, giro de 180°) respecto a un centro.
Percepción de relaciones espaciales	Identificar la magnitud, sentido y dirección al comparar una figura y su imagen.	Reconocer en una figura y su imagen la amplitud del ángulo, el centro de rotación y el sentido del giro.	Reconocer la línea recta que es perpendicular a los vértices correspondientes de la figura de partida con la figura de llegada.		Determinar en una figura y su imagen la colinealidad entre vértices homólogos y centro de la circunferencia.
Discriminación visual	Reconocimiento de la configuración de las unidades figurales, de lados y ángulos correspondientes de la figura inicial y su imagen independiente de:				
	La variación de la magnitud, sentido	La modificación en la amplitud del ángulo, el centro de	La inclinación del eje de simetría.		La magnitud del diámetro de la circunferencia.

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

		y dirección del desplazamiento.	rotación y el sentido del giro.		
--	--	---------------------------------	---------------------------------	--	--

Fuente: Elaboración propia

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA

La presente investigación centrada en el análisis de textos escolares, tuvo un enfoque cualitativo con alcance descriptivo. La cual, buscó caracterizar, describir y valorar las tareas que presentan el contenido del objeto abordado, en el que se detallan las características y cualidades relevantes del contenido de libros de textos en las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización, teniendo en cuenta las perspectivas teóricas. Ante esto, Páramo (2019) propone que, en un enfoque cualitativo lo que busca un investigador es comprender, describir, explicar y en el mejor de los casos predecir, algunos fenómenos individuales y sociales susceptibles de ser explicados mediante experimentos (la conducta de elección, el aprendizaje y muchos procesos cognoscitivos). De ahí que, se puede concebir como aquel conjunto de técnicas que posibilitan examinar un fenómeno educativo en el que mediante el alcance descriptivo se especifican como son y se manifiestan, es decir se detallan las características y propiedades importantes en el fenómeno a analizar (Fernández y Baptista, 2014).

Ahora bien, situando estos elementos desde el análisis de textos escolares se abordó mediante una aproximación a la estrategia investigativa revisión documental a partir de las ideas de Camargo (en prensa), pues, se realizó una indagación sistemática a los libros de textos PREST y Proyecto Sé. En los que se caracterizó la forma como se presentan las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización; desde la propuesta de Duval (1994, 1995), Del Grande (1990) y el MEN (1998, 2006).

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

De acuerdo con lo anterior, Camargo (en prensa) plantea que, la estrategia investigativa “revisión documental” consiste en la indagación sistemática de material escrito (impreso o en formato digital) en busca de describir e interpretar, a partir de ciertas consideraciones conceptuales específicas, el contenido y la voz de quienes lo elaboraron. De este proceso es importante reconocer que, ejercicios de revisión documental han sido realizados por quienes han hecho investigación sobre currículos y textos escolares. Lo cual, posibilita describir e interpretar fenómenos asociados a los procesos de enseñanza y de aprendizaje específicamente de las matemáticas. A continuación, se muestra una tabla en la que se presenta algunos aspectos de la estrategia revisión documental:

Tabla 4: Aspectos generales de la estrategia revisión documental

Fuente: Tomado de Camargo (en prensa)

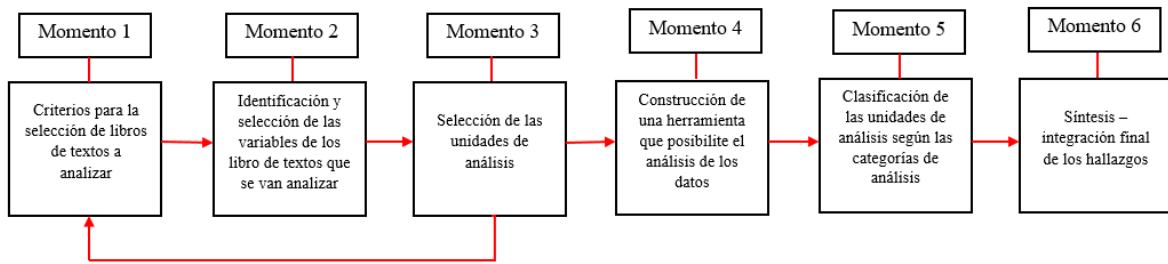
Tipo	Estrategia	Descripción	Participantes	Requisitos	Producto
Naturalista	Revisión documental	Indagación sistemática a material impreso en busca de describir e interpretar la voz de quienes lo elaboraron.	Equipo de investigación. Mariales impresos.	Se construyen criterios sobre cómo seleccionar el material y qué buscar en este.	Clasificaciones o tipificaciones de propuestas, conceptos, acercamientos.

3.1 Estructura a considerar para el análisis de libros de textos

Ahora bien, se establecen los momentos con los cuales se realizó el análisis a los libros de textos PREST y Proyecto Sé de matemáticas de básica primaria.

A continuación, se describe la forma en la que se desarrollaron cada uno de los momentos:

Diagrama 3: Plan de ejecución estrategia “revisión documental”.



Fuente: Una adecuación de Camargo (en prensa)

3.1.1. Momento 1: criterios para la selección de los libros de textos a analizar.

Es pertinente reconocer que, para la selección de los libros de textos a analizar se tuvo en cuenta los siguientes criterios:

- Libro de texto de matemáticas para básica primaria.
- Acogida por los docentes de básica primaria.
- Utilizado para favorecer el trabajo escolar desde casa debido al confinamiento generado por la pandemia COVID – 19.
- Articulado con la propuesta del MEN (1998, 2006).

Para lo cual, se hizo una revisión de las instituciones públicas del Distrito de Buenaventura, zona rural y urbana, a las cuales se les realizó una encuesta virtual que permitió obtener insumos para la elección de los libros de textos. Arrojando como resultado que, el 24,3% utilizan el libro de texto PREST, el 20,3% Proyecto Sé y el 34,7% manifiestan utilizar los libros del programa todos aprender PTA para matemáticas (ver anexo 1), aludiendo de manera implícita a cualquiera de los libros ya mencionados, pues, son algunos de los textos que trabaja el programa PTA; es así como, por las razones anteriores se escogieron los libros PREST y Proyecto Sé para realizar el análisis. Los cuales son acogidos por las instituciones para el trabajo de docentes y estudiantes durante el trabajo en casa.

Cabe mencionar que, los libros de textos PREST y Proyecto Sé son suministrados por el Ministerio de Educación Nacional a las instituciones del sector oficial, lo cual, implica que

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

han sido validados curricularmente. Propiciando que, estos libros de textos sean un recurso fundamental para los docentes en su quehacer pedagógico y para los estudiantes en su proceso de aprendizaje dentro y fuera del aula.

3.1.2. Momento 2: identificación y selección de las variables en los libros de textos que se van a analizar.

Implicó seleccionar la información que posteriormente se analizó, para esto, se efectuó la revisión y descripción de la estructura que poseen los libros de textos PREST y Proyecto Sé (situaciones, unidades) debido que, a partir de la coherencia horizontal propuesta por el MEN (2006), las transformaciones isométricas no sólo pueden ser abordadas desde las secciones o unidades dedicadas al pensamiento espacial, sino también, en las dedicadas al pensamiento métrico, entre otros. Con base en lo anterior, se tuvo en cuenta el siguiente criterio para la selección de información:

1. Que el contenido (enunciado y representación visual) implícita o explícitamente aborde las transformaciones isométricas (traslación, rotación, reflexión axial o central).

3.1.3. Momento 3: selección de las unidades de análisis.

Selección de aquellas tareas específicas sobre las cuales se realizó el análisis; segmentos del contenido que fueron caracterizados e individualizados. Es decir, de la información que poseen los libros de textos, cuáles fueron los datos que se analizaron. Lo cual, se organizó en una tabla que dio cuenta de la identificación y descripción del dato en los libros de textos.

Tabla 5: Correspondencia entre etiqueta, contenido y descripción de una tarea.

Etiqueta	
Contenido	
Descripción	

Fuente: Elaboración propia

Etiqueta: correspondió a la forma como fueron llamados cada uno de los datos que se analizaron, para ello, se especificó en primer lugar el nombre del libro de texto **Sé:** proyecto Sé o **Pr:** PREST. Luego se indicó el grado escolar para el que está dirigido el libro de texto **1:** primero; **2:** segundo; **3:** tercero; **4:** cuarto y **5:** quinto. Acto seguido, un guion al medio (-), posteriormente se indicó el ordinal de la tarea tal como lo presenta el libro de texto, en seguida se señaló que el dato hace referencia a una tarea denotándolo **TA**, finalmente, se especificó la página del libro de texto en la que se ubica el dato. Ej: (Sé4-1TA165, Pr5-4TA90).

Contenido: hace referencia al dato objeto de análisis.

Descripción: da cuenta de la forma como se presentó la transformación isométrica.

Teniendo en cuenta los tres momentos anteriores, se alcanzó el primer objetivo específico. Pues permitió reconocer la información presentada en los libros y la descripción de la forma cómo se están abordando.

3.1.4. Momento 4: construcción de una herramienta que posibilite el análisis de los datos.

En este momento, se dio paso a la construcción de una tabla con descriptores que permitió determinar bajo que parámetros se debían analizar los datos.

Para ello, se consideró como categorías de análisis los tipos de aprehensiones: perceptiva, operatoria y discursiva propuestos por Duval (1994,1995, 1999); reconociendo

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

que, desde la aprehensión operatoria solo se hizo énfasis en la operación de posición. De igual modo, se asumió las habilidades propuestas por Del Grande (1990): coordinación ojo – motor, percepción figura-fondo, constancia de percepción, percepción de la posición en el espacio, percepción de relaciones espaciales y discriminación visual.

A continuación, se presenta la herramienta de análisis:

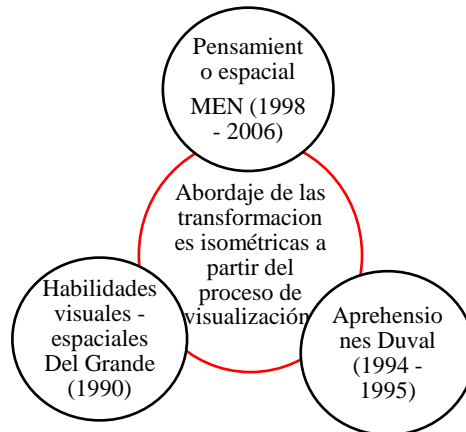
Tabla 6: Elementos que median en la visualización y transformaciones isométricas.

Categorías de análisis		Aprehensiones		
		Perceptiva	Operatoria	Discursiva
Habilidades visuales - espaciales	Coordinación ojo – motor			
	Percepción figura-fondo			
	Constancia de percepción			
	Percepción de la posición en el espacio			
	Percepción de relaciones espaciales			
	Discriminación visual			

Fuente: Elaboración propia.

Se debe agregar que, en este momento fue indispensable proponer una definición específica del cruce entre las categorías de análisis ya que permitió comprender la delimitación y alcance de la rejilla de análisis. Lo anterior se realizó teniendo en cuenta las transformaciones isométricas pues es el objeto de conocimiento sobre el cual recayó el análisis.

Diagrama 4: Aspectos que constituyen el análisis al contenido de los libros de textos PREST y Proyectos Sé.



Fuente: Elaboración propia.

Ahora bien, se detallaron cada uno de los cruces, reconociendo que, las dos primeras letras hacen referencia al nombre de las habilidades visuales (**CM**: coordinación ojo motor, **PF**: percepción figura fondo, **CP**: constancia de percepción, **PE**: percepción de la posición en el espacio, **PR**: percepción de relaciones espaciales, **DV**: discriminación visual, por su parte, la tercera y última letra indica el tipo de aprehensión (**P**: perceptiva, **O**: operatoria, **D**: discursiva).

3.1.4.1. Cruce de las habilidades visuales con la aprehensión perceptiva:

CMP: Permite identificar los trazos que componen una figura (líneas curvas, rectas) así como, la orientación en la que estos se encuentran.

PF: Facilita identificar en un conjunto de figuras, cual es la posible imagen de una figura inicial, reconociendo su forma y tamaño.

CPP: Ayuda a reconocer lados, ángulos y vértices homólogos en una figura y su imagen, de tal forma que, permita establecer correspondencia entre unidades figurales (congruencia entre figuras).

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

PEP: Posibilita identificar la posición de una o varias figuras tomando como referencia la posición del sujeto que observa.

PRP: Favorece reconocer la continuidad o el cambio de un movimiento a partir de la relación entre la figura inicial y las resultantes.

DVP: Permite distinguir similitudes o diferencias (forma, tamaño, dimensión, inversión, inclinación) al comparar una figura y su imagen.

3.1.4.2. Cruce de las habilidades visuales con la aprehensión Operatoria (operación de posición):

CMO: Posibilita rastrear el movimiento en particular que se le ha aplicado a una figura a partir de la unión de puntos y vértices correspondientes que permiten trazar líneas paralelas, perpendiculares y secantes.

PFO: Propicia realizar trazos adicionales a una figura para que sea idéntica a otra figura dada; de tal forma que, al compararlas se pueda determinar un movimiento en particular que permita ir de la figura inicial a la final y viceversa.

CPO: Facilita cambiar de posición y orientación una figura inicial conservando su forma y tamaño.

PEO: Permite mover una figura desde una posición inicial hacia una posición final guardando la misma orientación, tomando como referencia el sujeto que observa.

PRO: Posibilita aplicar un movimiento a una figura en repetidas ocasiones, o la combinación de diversos movimientos a una misma figura.

DVO: Ayuda a hacer coincidir una figura inicial con su imagen, de manera que, permita discriminar relación de congruencia entre ellas.

3.1.4.3. Cruce de las habilidades visuales con la aprehensión discursiva

CMD: Permite describir algunos trazos o condiciones que se requieren para el desarrollo o la verificación de un movimiento en particular.

PFD: Posibilita detallar las maneras de ver en las figuras de tal forma que, se pueda operar sobre ellas.

CPD: Permite indicar el reconocimiento de las propiedades que permanecen invariantes en una figura al aplicarle un movimiento en particular.

PED: Posibilita describir las orientaciones de la posición en la que debe ubicarse una figura y el punto de referencia para dicha ubicación.

PRD: Permite indicar la aplicación o identificación de varios movimientos a una figura.

DVD: Facilita describir la función de los elementos que caracterizan un movimiento en particular, de tal forma que, se puedan establecer similitudes y diferencias entre los movimientos.

Tabla 7: Cruces entre los elementos que median en la visualización y las transformaciones isométricas

Categorías de análisis		Aprehensiones		
		Perceptiva	Operatoria	Discursiva
Habilidades visuales	Coordinación ojo – motor	CMP	CMO	CMD
	Percepción figura-fondo	PFP	PFO	PFD
	Constancia de percepción	CPP	CPO	CPD
	Percepción de la posición en el espacio	PEP	PEO	PED
	Percepción de relaciones espaciales	PRP	PRO	PRD

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

	Discriminación visual	DVP	DVO	DVD
--	-----------------------	-----	-----	-----

Fuente: Elaboración propia

De lo anterior es importante mencionar que, con la ejecución de este momento se alcanzó el segundo objetivo específico.

3.1.5. Momento 5: clasificación de las unidades de análisis según las categorías de análisis.

Se identificó a qué tipo de aprehensión y/o habilidad favorece cada dato, si favoreció a varias aprehensiones o sólo una; lo mismo para las habilidades visuales. Luego, se ubicó cada dato en la herramienta de análisis dando cuenta del o los cruces a los que aludió a partir de la forma como se detalló el abordaje de las transformaciones isométricas desde las habilidades y aprehensiones en dicho dato y desde las definiciones expuestas en cada cruce en el momento anterior.

3.1.6. Momento 6: síntesis - integración final de los hallazgos.

Se tomó en consideración el desarrollo de los momentos anteriores, se dio paso al análisis y valoración de los libros de textos. Lo cual permitió establecer las fortalezas o dificultades de estos en relación con el abordaje de las transformaciones isométricas (traslación, rotación, reflexión axial o central) en el proceso de visualización.

De esto, se hace preciso mencionar que, al tener un carácter cualitativo la indagación, la forma como se presentaron los resultados, análisis e interpretación de los datos se realizó a partir de tablas en las que se detalló la identificación, contenido y descripción del mismo. Además, de la escritura en prosa de la forma como aluden a las habilidades y aprehensiones. Cabe resaltar que, para presentar los resultados en relación con los cruces, se hizo uso de una tabla en la que se mostró en porcentaje la tendencia que presentó el libro de texto en relación con cada cruce. Lo cual permitió establecer una comparación entre los libros de textos

detallando su interpretación a partir de elementos cualitativos asociados al proceso de visualización en las transformaciones isométricas.

Para guiar la lectura de la tabla 8, se debe aclarar que al revisar las tareas pueden hacer referencia a varios cruces, por lo que la cantidad con la que estos se detallaron está dada en porcentajes. De manera que, el total con el que se hallaron los porcentajes no alude a la cantidad de tareas analizadas, sino a las veces que se repite cada cruce en las tareas de cada libro de texto.

Por tal razón, para cada cruce se detalla la cantidad total entre los dos libros, precisando en porcentajes los hallazgos encontrados en los libros de PRETS y Proyecto Sé.

Tabla 8: Cruces presentados en las tareas de los libros de textos PRETS y Proyecto Sé.

		Cruces entre las categorías de análisis																
		Habilidades visuales - espaciales con la aprehensión perceptiva						Habilidades visuales - espaciales con la aprehensión Operatoria (operación de posición)						Habilidades visuales - espaciales con la aprehensión discursiva				
		CMP	PPF	CPP	PEP	PRP	DVP	CMO	PFO	CPO	PEO	PRO	DVO	CMD	PFD	CPD	PED	PRD
PRETS	%																	
Proyecto Sé	%																	
Total de cruces																		

Fuente: Elaboración propia

Finalmente, con el momento cinco y seis, se alcanzó el tercer y cuarto objetivo específico, de modo que, con el desarrollo de los seis momentos se dio cumplimiento al objetivo general y por ende se dio respuesta a la pregunta de indagación.

3.2 Fases de la investigación

El proceso investigativo de manera general se llevó a cabo mediante tres fases, las cuales se describen a continuación:

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

Fase 1: permitió responder a los cuestionamientos ¿qué? ¿por qué? ¿con qué? y ¿cómo?, de la propuesta de investigación. Para el ¿qué? y ¿por qué? se efectuó la búsqueda y revisión de trabajos de grados y artículos que brindaran insumos para la identificación de dificultades y necesidades presentes en el pensamiento espacial y sistema geométrico, la visualización y los libros de textos en matemáticas.

Ahora bien, el ¿con qué? se abordó mediante búsqueda y revisión de documentos en distintas bases de datos y diferentes idiomas (español, francés e inglés). Lo cual se organizó en cuatro aspectos generales: perspectiva curricular, dio cuenta de la profundización y articulación de los aprendizajes y competencias que deben adquirir y desarrollar los estudiantes de los conjuntos de grados 1° a 3° y 4° a 5° en el abordaje de las transformaciones isométricas, así como, en los procesos de visualización; algunos aspectos cognitivos relacionados con la visualización (aprehensiones y habilidades);



De igual forma, se detalló las consideraciones acerca del libro de texto como recurso y algunas funciones que este posee, las cuales fundamentan la necesidad de que se hagan investigaciones en el análisis de los mismos; la perspectiva disciplinar centrada en descripción de la forma como se conciben las transformaciones isométricas de traslación, rotación y reflexión axial y central y su relación con las habilidades y aprehensiones visuales. Por último, el ¿cómo?, el cual se abordó mediante la descripción de la forma como se va llevar a cabo la investigación, es decir mediante un enfoque cualitativo de alcance descriptivo y una aproximación a la estrategia investigativa de revisión documental.

Fase 2: dio cuenta de la selección de los libros de textos, la descripción del contenido de las tareas que se analizaron. Es así como, se dio paso a la elaboración de la rejilla de análisis a partir de elementos presentados en el marco teórico que permitieron integrar los tipos de aprehensiones propuestas por Duval (1994, 1995, 1999) y las habilidades de Del

Grande (1990). Teniendo en cuenta la forma como el MEN (1998, 2006) concibe el pensamiento espacial y sistema geométrico.

Fase 3: análisis de los libros de textos de matemáticas a partir de la rejilla y tomando en consideración las unidades de análisis seleccionados de los libros de textos, lo cual, sirvió como insumo para realizar su valoración, es decir, fijar la pertinencia del mismo en relación con la forma como se presentan sus elementos al abordar el pensamiento espacial y sistema geométrico en procesos de visualización. Finalmente, se dieron algunas conclusiones relacionadas con dicho análisis y se propusieron formas de guiar algunas tareas de los libros de textos, lo cual estuvo asociado a las recomendaciones.

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

Datos generales asociados a los libros de textos					
Título	Editorial	Año	Portada	Organización del contenido	Grado de escolaridad al que se dirige
PREST	Ministerio de Educación Nacional	2015		Secuencias didácticas	Básica primaria (1° - 5°)
Proyecto Sé		2012		Unidades	

CAPITULO IV: RESULTADOS Y ANÁLISIS

Este capítulo se detalló las descripciones de los libros de textos, además se presentó la forma como las tareas abordan las transformaciones isométricas y cómo estas aluden al proceso de visualización desde las habilidades y aprehensiones, para lo cual, se realizó un análisis general en el que se obvia el tipo de libro y se centra la atención únicamente en el contenido de estas. Acto seguido, se realizó una comparación en el que se detalló la intensidad y forma como desde cada libro se alude a los cruces propuestos en la rejilla de análisis, así como al vínculo con lo propuesto por el MEN (2006).

4.1 Aspectos generales de los libros de textos PREST y Proyecto Sé

A continuación, se presentan algunos datos claves de los dos libros de textos analizados:

Tabla 9: datos de los libros de textos.

Fuente: Elaboración propia

4.1.1 Libro de texto PREST

El libro de texto PREST, es un recurso suministrado por el Ministerio de Educación Nacional a las instituciones públicas colombianas para orientar algunos procesos de enseñanza

y de aprendizaje en matemáticas; este, se clasifica en guía de enseñanza y cuadernillo del estudiante.

Ahora bien, esta investigación centró su análisis en el cuadernillo del estudiante, el cual en su portada especifica el área a trabajar, las situaciones a las que se hacen alusión, pues el libro está organizado por medio de situaciones, el grado para el cual está dirigido, es decir, de 1° a 5° y el logo del Ministerio de Educación Nacional y de Todos a Aprender.

En su interior se encuentra una carátula igual a la portada principal del libro de texto, seguido de ello, se presentan los autores de la colección original del libro, reconociendo que, este es una traducción y adecuación para la educación colombiana, es por esto que, se nombran los encargados de la traducción y al equipo conformado por el Ministerio de Educación Nacional. Posteriormente, se encuentra la presentación, el preámbulo y la introducción del mismo, las cuales de manera general invitan al docente a explorar y trabajar este recurso con sus estudiantes a partir de situaciones de aprendizaje.

En este mismo orden de ideas, PREST muestra una propuesta pedagógica que da cuenta de la estructura de una secuencia didáctica que se presentan en las guías de aprendizaje, explicando de manera detallada cada una de sus etapas. Simultáneamente, expone la tabla de contenido la cual se organiza por medio del nombre de las situaciones, luego, se presentan las temáticas a trabajar. Acto seguido, se muestra la descripción de la situación problema y los objetivos de aprendizaje asociados al pensamiento, así como, una tabla que resume las actividades propuestas en cada situación. Es importante destacar que cada situación se desarrolla a partir de un conjunto de centros, con los cuales se hace un acercamiento a la adquisición del aprendizaje abordado.

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

De manera general, se van desarrollando las situaciones al interior del libro de texto, destacando que, el contenido matemático expuesto en este libro se presenta a través de cuentos animados, juegos, entre otros; siendo parte fundamental la resolución de problemas.

Por último, en la parte final de cada situación, se presenta una rejilla de evaluación que permite evidenciar a través de algunos criterios y comportamientos si el estudiante ha alcanzado o cumplido con los objetivos propuestos para cada situación de aprendizaje. Cabe mencionar que, al finalizar el libro se muestra la bibliografía y los agradecimientos.

Ilustración 6: Portadas de los libros de textos PREST.



4.1.2 Generalidades de las transformaciones isométricas por grados en el libro de texto PREST

Teniendo en cuenta todo lo antes mencionado y reconociendo el objeto de conocimiento de transformaciones isométricas, se reconoce que, en el grado 1° el libro de texto PREST, no presenta las transformaciones de manera explícita, sin embargo, hace un acercamiento al reconocimiento del sentido y la dirección de un desplazamiento.

Ilustración 7: Tarea grado 1° PREST

Centro 1 - Caminata con los Peludo - Ejercicios

A) Ejercicios contextualizados

1) Mini Tortilla no recoge su ropa en su casa muy a menudo. Sus botas, sus guantes, su bufanda y su abrigo están regados por todas partes. Patón está cansado de repetirle siempre que tiene que recoger y organizar su ropa. Hoy, ya se cansó, y escondió toda la ropa de Mini Tortilla. Como todo buen padre, dejó pistas para que su hijo pueda encontrarla.

Sigue las indicaciones de Patón para encontrar la ropa de Mini Tortilla. Recuerda siempre comenzar en la estrella.

a) Sigue las flechas de desplazamientos para encontrar la ropa de Mini Tortilla. Haz un punto rojo en el lugar donde Patón Peludo escondió las botas de Mini Tortilla.
★ ↑ ↑ ↑ ↑ ← ← ← → ↑ ↑ ↑ ← ←

b) Sigue las flechas de desplazamientos para encontrar los guantes de Mini Tortilla. Haz un punto amarillo en el lugar donde Patón Peludo escondió los guantes de Mini Tortilla.
★ ← ← ← ↑ ↑ ↓ ↓ ← ← ← →

c) Sigue las flechas de desplazamientos para encontrar la bufanda de Mini Tortilla. Haz un punto azul en el lugar donde Patón Peludo escondió la bufanda de Mini Tortilla.
★ ↑ ← ← ← ← ← ← ↑ ↑ → ↑ ↑

d) Esconde el abrigo de Mini Tortilla en una intersección en el mapa. Dibuja flechas para dejar las huellas de tus desplazamientos y pídele a un compañero o compañera que lo encuentre.
★ _____

Ilustración 8: Tarea grado 2° PREST

Centro 4 - La decoración - Situación de aplicación

Nombre: _____

El abuelito de mayor edad quiere instalar un piso nuevo en la sala de la casa para la gran fiesta de Blancanieves. El comenzó muy bien, pero luego perdió su plano y ya no sabe cómo poner las baldosas y poder seguir con los patrones.

Recorta pequeñas baldosas y coticalas de forma adecuada para cumplir con el patrón en todo el piso.

En el grado 2°, se hace un acercamiento a la

transformación de reflexión axial y rotación, pues se le pide al estudiante completar un patrón teniendo en cuenta el tamaño y forma de las figuras, las distancias que estas guardan y un eje que divide el fragmento figuras. Lo anterior, haciendo uso de material manipulativo.

Ahora bien, en el grado 3° se trabaja únicamente la transformación de simetría axial, es así como, se le pide al estudiante completar figuras a partir de una línea vertical que hace alusión al eje de simetría, así mismo, se le pide reconocer cuántas veces puede aplicarse dicho movimiento a una figura, ya que se le propone identificar tantos ejes de simetría pueden estar contenidos en una figura.

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

Ilustración 9: Tarea grado 3° PREST

Centro 3 - ¿Soy simétrico? - Ejercitación

A) Ejercicios contextualizados

- 1) Jazmín tenía el mapa de la biblioteca municipal. Lamentablemente, derramó agua sobre el mapa y se borró una de sus partes (figura 1). Su amiga Marcela le ayudó a completar el mapa (figura 2), teniendo en cuenta que la línea negra que aparece en la figura 1 era un eje de simetría. ¿Estás de acuerdo con la propuesta de Marcela?



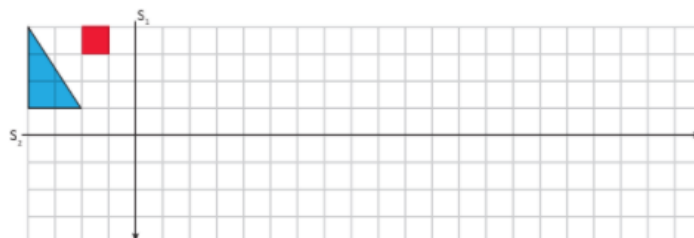
En el grado 4°, se invita al estudiante a reconocer únicamente la transformación de reflexión axial, pues a través de los ejes de simetría se crean figuras de igual forma y tamaño, además se propicia la aplicación simultánea de dicho movimiento a dos figuras.

Ilustración 10: Tarea grado 4° PREST

Centro 2 - ¡Qué lindos frisos! - Ejercitación

C) Ejercicios numéricos

- 6) A partir del siguiente motivo, efectúa primero la reflexión S_1 y luego la reflexión S_2 . Luego completa el friso.



En últimas, en el grado 5° no es posible evidenciar situaciones que hagan alusión o promuevan el acercamiento a las transformaciones isométricas.

4.1.3 Libro de texto Proyecto Sé

El libro de texto Proyecto Sé de matemáticas, es un recurso elaborado por el Ministerio de Educación Nacional para fortalecer algunos procesos llevados a cabo en el ámbito educativo. Su estructuración inicia por la portada de dicho libro, la cual contiene el título de este, así como, el grado al cual hace referencia (1°, 2°, 3°, 4° o 5°) y las editoriales a las cuales representa.

En este mismo orden de ideas, al describir la estructura interna que posee Proyecto Sé, se encuentra una carátula igual a la portada principal, en segunda instancia, se expresan los autores que elaboraron o aportaron a su construcción. Posteriormente, se expone la presentación del mismo, en la que se dan sugerencias y motivaciones sobre su uso. Así mismo, se muestra como está conformada cada unidad, es decir, está compuesta por una tapa de capítulo, en la que se muestra una panorámica del trabajo que se realizará, un contenido y desarrollo de competencias, en la cual se presenta el contenido que se va a abordar, así como, las actividades asociadas a este; resolución de problemas, se exponen situaciones relacionadas con los contenidos trabajados en la unidad; competencias de manejo de información, en la que se presentan lecturas que contienen información matemática; por último, ciencia, tecnología y sociedad, en esta se exhiben situaciones en las que se involucran el uso de herramientas tecnológicas.

En relación con los contenidos que se abordan en el libro de texto, estos se agrupan por medio de pensamientos matemáticos (numérico, espacial, aleatorio, métrico y variacional), es así como, cada pensamiento expone las temáticas que se van a abordar.

Ahora bien, de manera general es importante reconocer que, en el desarrollo de cada contenido se muestra su conceptualización, los ejemplos asociados a este, y las actividades que permiten aplicar lo aprendido. Es importante mencionar que, existe un fragmento llamado “comprende”, en el que, se expresan una ampliación del concepto de manera que, el estudiante pueda seguir desarrollando las situaciones.

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

Ilustración 11: Portadas de los libros de textos Proyecto Sé



4.1.4 Generalidades de las transformaciones isométricas por grados en el libro de texto Proyecto Sé

Situándose en el objeto de conocimiento de transformaciones isométricas, el cual está ubicado en el pensamiento espacial, se reconoce que, en el libro de texto Proyecto Sé en el grado 1º, presentan un acercamiento a la transformación de traslación, debido que, se pretende que un objeto se lleve hacia otro lugar a partir de realizar movimientos en forma vertical u horizontal.

Ilustración 12: Tarea grado 1º Proyecto Sé

Solución de problemas

4 Repasa y describe el camino que debe seguir el caracol para llegar a su casa, que es la de color amarillo.


El caracol debe caminar cuadros horizontales y verticales.

En el grado 2º no se reconoce un acercamiento de manera explícita ni implícita a las transformaciones isométricas.


En el grado 3° se presentan todas las transformaciones isométricas, de modo que, en la traslación se pretende que se le aplique dicho movimiento a una figura tomando en consideración una cantidad de unidades y una dirección (izquierda o derecha); en la reflexión se propone que se reconozca a partir de un conjunto de figuras, la imagen de una figura inicial a partir de un eje, por último, en la rotación incita a la identificación del cambio de posición de una figura a partir de un ángulo dado.

Ilustración 13: Tareas grado 3° Proyecto Sé

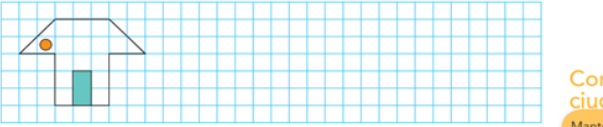
Razonamiento. Elige la figura que representa una reflexión.



Razonamiento. Observa la siguiente señal. Dibújala según el giro que se indica.



Ejercitación. Traslada la figura nueve unidades a la derecha hasta que completes la cenefa..




En el grado 4° se moviliza la transformación de rotación, pues, se pretende que se reconozca la orientación en la que queda una figura imagen a partir de ángulos dados. Cabe resaltar que, en este grado también se abordan las transformaciones de traslación y reflexión axial.

Ilustración 14: Tarea grado 4° Proyecto Sé

Relaciona la figura de la izquierda con la figura que se obtiene al realizar la rotación indicada.

- Rota 90° a la izquierda.
- Rota 180° a la derecha.
- Rota 180° a la izquierda.
- Rota 90° a la derecha.

Antes de realizar una rotación, debes identificar el sentido y la amplitud del giro.



Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

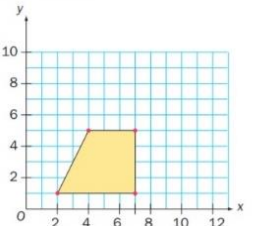
Finalmente, en el grado 5° se trabajan las transformaciones isométricas en conjunto, es decir, se moviliza el reconocimiento y la aplicación de cada movimiento en figuras haciendo uso del plano cartesiano.

Ilustración 15: Tarea grado 5° Proyecto Sé

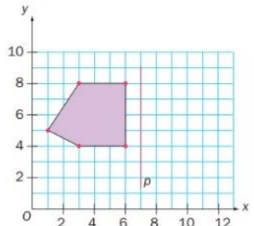
Desarrolla tus competencias Practica lo aprendido en www.redes-sm.net

2 Modelación. Realiza los movimientos indicados y escribe las coordenadas de los vértices de la figura obtenida.

a. Traslada la figura tres unidades hacia arriba.



b. Refleja la figura con respecto a la recta \bar{p} .



Al realizar traslaciones, rotaciones o reflexiones en el plano, los vértices de las figuras obtenidas tienen coordenadas diferentes a las iniciales.

4.2 Resultados y análisis a las tareas presentadas en los libros de textos PREST y Proyecto Sé

En este apartado, se detalló la forma como los libros de textos PREST y Proyecto Sé abordaron las transformaciones isométricas, las cuales se agruparon según sus características en: cambio de focalización bidimensional asociado a la yuxtaposición y superposición de figuras; discriminación de los elementos que posibilitan modificaciones de posición en figuras geométricas; y reconocimientos de trazos y figuras bidimensionales como mediadores para un acercamiento intuitivo a las transformaciones isométricas. Los cuales se presentan a continuación:

4.2.1 Cambio de focalización bidimensional asociado a la superposición y yuxtaposición de figuras geométrica (CFBSYFG):

Este apartado centró su atención en aquellas tareas que exigen considerar tanto el contorno global de la figura como las unidades figurales 2D que la constituyen. De manera

que, mediante la identificación de la figura inicial se reconozca su o sus posibles imágenes o se describa el resultado de haber aplicado el movimiento señalado en el enunciado de la tarea.

Tabla 10: Reconocimiento de modificaciones de posición: comparación entre la figura inicial y sus posibles imágenes.

Etiqueta	Contenido
Sé-3TA99	<p>Desarrolla tus competencias</p> <p>3 Razonamiento. Bordea la figura que corresponde a una reflexión de la muestra.</p> 
Sé-4TA117	<p>4 Comunicación. Describe la traslación realizada.</p> 
Sé-3TA101	<p>4 Comunicación. Colorea las imágenes que sean el resultado de rotar la figura.</p> 

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

Tabla 11: Descripciones de la forma como se presentan las transformaciones isométricas en la tabla 10.

		Descripción
Etiqueta	Sé3-2TA99	Se invita a identificar en un conjunto de figuras la imagen de una figura inicial, de modo que, al ser la figura inicial una figura simétrica respecto a un eje vertical, lo que permite reconocer su figura imagen mediante una reflexión axial son las figuras recubiertas que tiene a cada uno de sus extremos inferiores, las cuales al tener forma diferente permite que se pueda identificar la inversión de la figura imagen respecto a la inicial. Se hace preciso mencionar que, esta tarea hace alusión a la reflexión axial.
	Sé4-4TA117	Se hace referencia a identificar y describir la forma como ha sido llevada a cabo una traslación; de manera que, se compara alrededor de una cuadrícula, la posición de dos figuras que han sido el resultado de una traslación. De ahí que, al relacionar los vértices homólogos de las figuras se demarca una línea recta inclinada, posibilitando identificar que, para ir de la una a la otra se deben realizar desplazamientos horizontales y verticales; además de, reconocer la magnitud (unidades de cuadros) y dirección del desplazamiento.
	Sé3-4TA101	Se pretende que al comparar dos figuras se logre reconocer el cambio de orientación y/o sentido que puede tener una figura al ser rotada. De manera que, la forma como se disponen las subfiguras que conforman la figura inicial permita que al compararla con las posibles figuras imágenes se determine si hay un cambio de orientación y/o sentido, es decir, identificar de manera intuitiva una rotación sin reconocer el centro o amplitud del ángulo de rotación.

En las presentes tareas se aluden a los movimientos de reflexión, traslación y rotación, en las que se observó la percepción figura fondo pues, las figuras poseen subfiguras. De modo que, en Sé3-2TA99 la figura inicial contiene figuras con forma triangular y circular delimitada por un color diferente cada una y en el caso de Sé4-4TA117 la figura inicial en forma de avión se constituye a partir de la yuxtaposición de triángulos y cuadriláteros. Cabe resaltar que, para el caso de Sé3-4TA101 no fue posible establecer la percepción figura fondo pues en esta configuración geométrica no se evidencia esta habilidad.

En este mismo orden de ideas, se observó la constancia de percepción, pues en todas las tareas se presenta una figura repetida dos o más veces, conservando la forma de su contorno y el tamaño. Es así como, en Sé3-2TA99 se reconoce un octágono con forma de “T”, dentro del cual se detalla un círculo y un triángulo en cada uno de sus extremos; para el

caso de Sé4-4TA117 se identifican figuras (pentágono, triángulo y cuadrilátero) que al superponerse describen la forma de un avión, mientras que, en Sé3-4TA101 se identifica una figura cóncava formada por rectángulos, la cual sostiene en una de sus puntas un cuadrado y en la otra un círculo.

De igual forma, se alude a la percepción de la posición en el espacio ya que se debe relacionar la orientación e inversión de una figura inicial con su posible imagen, de modo que en Sé3-2TA99 se identifique una figura imagen reconociendo la inversión de esta respecto a la inicial, determinando así la posible orientación del eje; en la Sé4-4TA117 se demarca una traslación horizontal y vertical ya que al unir los vértices homólogos la línea recta queda inclinada, lo cual indica que, las figuras están distanciadas por una sucesión de traslaciones en distinta dirección, magnitud y sentido; y en Sé3-4TA101 se identifica el cambio o conservación de la orientación de las posibles figuras imágenes respecto a la inicial.

En relación con las aprehensiones, en todas las tareas se observó la perceptiva en la que se identifican polígonos, de manera que, en Sé4-4TA117 y Sé3-4TA101 se reconocen vértices, líneas curvas y rectas, pentágono, triángulo, cuadrilátero y círculo. Por su parte en Sé3-2TA99 se reconoce que la figura está compuesta por la yuxtaposición de dos rectángulos, uno en dirección vertical y otro horizontal que conforma la letra “T” identificando la subfiguras (triángulo y círculo) que están dentro de esta.


En lo que se refiere a la aprehensión operatoria, se propicia por el reconocimiento de las características que determinan un movimiento, de tal forma que, en Sé3-2TA99 se identifique la inversión de una figura, demarcando la ubicación del posible eje con el cual se reflejó la figura inicial, en Sé4-4TA117 se determina una sucesión de desplazamientos en forma vertical u horizontal que permitió trasladar una figura, y en Sé3-4TA101 se identifique de manera intuitiva el sentido del giro de la posible figura imagen de la figura inicial.

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

En relación con la aprehensión discursiva se observó que en cada una de las tareas se señala el tipo de movimiento al cual hace referencia la representación visual, de modo que, en Sé3-2TA99 y Sé4-4TA117 se indica que solo una figura imagen es el resultado de haberle aplicado a la figura inicial un movimiento de reflexión o traslación, mientras que, en Sé3-4TA101 se aluden a la identificación de varias imágenes para una figura al aplicarle una rotación.

En este mismo orden de ideas, se presenta una tarea en la que no sólo se debe tener en consideración la identificación de una figura imagen a partir de la inicial, teniendo en cuenta las unidades figúrales 2D que esta contiene, sino también que al compararlas se reconozca el tipo de movimiento que permita hacerlas coincidir. Como se muestra a continuación:

Tabla 12: Reconocimiento de reflexión axial y traslación: discriminación entre la orientación de la figura inicial y sus imágenes.

Etiqueta	Sé3-3TA99
Contenido	<p>Comunicación. ¿Qué movimiento se debe aplicar a la figura inicial para que coincida con cada dibujo de la derecha? Explica tu respuesta.</p>  <p style="text-align: center;">Figura inicial</p>
Descripción	<p>Se invita a comparar una figura etiquetada como figura inicial, con dos posibles imágenes. De forma que, se determine el movimiento que permita ir desde la inicial hasta la final haciendo que estas al superponerse coincidan. Es así como, al estar las figuras compuestas por sub-figuras para este caso cuadriláteros, permite que al compararse se relacione su forma y tamaño, además la posición como se organizan los cuadriláteros para conformar la figura posibilita reconocer la orientación en la que se presentan las figuras imágenes respecto a la inicial, facilitando con ello la identificación del movimiento. De acuerdo con lo anterior, se da cuenta de la traslación y la reflexión axial.</p>

En el desarrollo de la tarea se evidencia la habilidad de constancia de percepción, propiciando que se reconozca la forma y el tamaño de las figuras a partir de las subfiguras que la conforman, pues se requiere reconocer a partir de los cuadriláteros que conforman la

figura inicial, la congruencia con las dos figuras imágenes aislando la orientación en la que estas se presentan. A su vez, en la habilidad de percepción de la posición en el espacio se requiere reconocer el cambio de orientación que tiene una figura imagen con respecto a su inicial, teniendo en cuenta las subfiguras que la integran. Es por esto que, se debe identificar la inversión entre figuras que da cuenta de una reflexión respecto a un eje vertical; la conservación de la orientación entre la figura final respecto a la inicial que da cuenta de una traslación.

Por otro lado, en lo que se refiere a las aprehensiones, se favorece inicialmente la perceptiva en todas las tareas, de manera que, resulta la identificación de yuxtaposición entre figuras, además de, la identificación de unidades figurales 1D (segmentos) y 2D (figuras). De modo que, las figuras se componen por la yuxtaposición de cuadriláteros, los cuales, se orientan de forma vertical y horizontal.

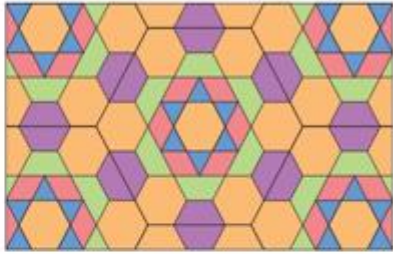
Se hace referencia a la aprehensión operatoria en la medida que, se debe reconocer el resultado de haber aplicado un movimiento en particular, para lo cual se requiere el uso de trazos adicionales externos a la figura. De modo que, la dirección de rectas que unan vértices homólogos permita identificar una traslación o una reflexión axial, las cuales se discriminan a partir de la conservación de la orientación o inversión de las figuras para detallar el movimiento en particular.

Finalmente, el enunciado de la tarea indica comparar figuras, de modo que, se pueda reconocer la imagen de una figura inicial. Es así como, se señala describir el movimiento en particular (reflexión o traslación) que permite coincidir la figura inicial con su imagen; de manera que, se exprese el modo como se reconoció cada transformación.

De igual forma, se presenta una tarea en la que, a partir del reconocimiento de una figura global se establezcan relación entre las subfiguras 2D que la determinan, reconociendo en ella el resultado de haber aplicado una transformación isométrica.

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

Tabla 13: Configuración geométrica por yuxtaposición: isometrías en mosaicos.

Etiqueta	Sé3-2TA119	
Contenido	<p>Soluciona otros problema</p> <p>2 Observa el mosaico.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Nombra las figuras con las que fue elaborado. • Describe los movimientos que se le aplicaron a los cuadriláteros. • Dibuja dos ejes de simetría. 	
Descripción	<p>A través de mosaicos diseñados a partir de la yuxtaposición de figuras con diferentes formas y tamaños se invita a la comparación entre ellas, de forma que se pueda reconocer el tipo o tipos de movimientos que representan. Facilitando lo anterior a partir del sombreado de las figuras con colores diferentes y la demarcación de su contorno con líneas negras, con lo cual se puede reconocer la variedad de figuras y las relaciones entre ellas, así como, la identificación de ejes de simetría.</p>	

En la tarea se alude a la percepción figura-fondo para distinguir la variedad de figuras que al yuxtaponerse conforman el diseño: triángulos, cuadriláteros y hexágonos; identificando en algunos casos la formación de hexágonos mediante la unión de las bases mayores de dos cuadriláteros para este caso trapecios. De manera que, al centrar la atención en las figuras de color azul se observan triángulos que comparten uno de sus vértices detallando así la inversión de figuras; así mismo, al unir seis de las bases de ellos, delimitan el contorno de un hexágono, indicando que, todos sus lados son iguales.

Del mismo modo, da cuenta de la constancia de percepción ya que se deben reconocer triángulos, cuadriláteros y hexágonos en diferentes posiciones, orientaciones y con diferente demarcación de su superficie. Reconociendo a través de la discriminación visual que las figuras antes mencionadas se diferencian según su forma y tamaño, aunque centrándose en cada caso, se identifica que poseen distintos colores y orientaciones, pero conservan igual forma y tamaño. Además, mediante la percepción de relaciones espaciales se reconoce la posición y ubicación de los polígonos o figuras en relación con la organización de estas mismas. Determinando así, de qué forma queda una figura a partir de la posición de otras.


Ahora bien, desde las aprehensiones se señala la perceptiva, pues se deben identificar unidades figurales de 0D, 1D y 2D refiriéndose a ellos a partir de la cantidad y organización de sus trazos como: triángulos, cuadriláteros y hexágonos; de manera similar se identifican figuras integradas por subfiguras con igual dimensión. Para que, mediante la operatoria se pueda identificar el resultado de haber aplicado traslaciones o reflexiones axiales que permitan ir desde un trapecio a otro, o desde un romboide hacia otro de ellos. Logrando identificar el eje de reflexión, el sentido y dirección de traslación. Finalmente, posibilita trazar ejes de simetrías verticales y horizontales que delimiten la construcción global del diseño mediante reflexión axial.

Finalmente, se refiere a la discursiva mediante el enunciado que orienta el desarrollo de la actividad, el cual indica que se identifiquen figuras geométricas a partir de un conjunto de figuras. De modo que, al compararlas a través de su forma, tamaño y posición se pueda determinar la aplicación de un movimiento en particular (reflexión, traslación o giro). Así mismo, se invita a la identificación de figuras simétricas señalando los ejes que posibilitan.

Hay que mencionar además que, algunas tareas aluden a reconocer un patrón a partir del contorno de la figura y de las subfiguras que la integran, sirviendo como referente para darle continuidad mediante la aplicación de una transformación isométrica indicada en el enunciado de la tarea.

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

Tabla 14: Rotación a figuras superpuestas a partir de relaciones espaciales

Etiqueta	Sé4-4TA119
Contenido	<p>4 Gira 90° cada figura para completar las series.</p> 
Descripción	<p>Se hace referencia a reconocer la orientación en la que queda una figura al girarla respecto a uno de sus vértices, la cual al ser una figura simétrica la demarcación de subfiguras contenida en esta facilita identificar el sentido del giro y a partir de la relación entre las figuras se establece una correspondencia con la amplitud del ángulo, de forma que, se establece un patrón que permite completar la serie.</p>


La tarea anterior, se relaciona con la habilidad de percepción figura – fondo, pues los cuadriláteros poseen en su interior una o varias subfiguras que facilitan la identificación del cambio de orientación al aplicarle un giro. Es así como, uno de ellos contiene un triángulo con el cual comparte uno de sus lados, mientras que, el otro contiene un círculo, un triángulo y un cuadrado. De manera que, al aplicarle varias veces el mismo giro a una figura se aluda a la constancia de percepción reconociendo que, aunque las figuras cambien de orientación su forma y tamaño se conservan.

En este mismo orden de ideas, se refiere a la percepción de relaciones espaciales, pues se describe una serie a partir de la sucesión de rotaciones con una misma amplitud de ángulo en el que el sentido se determina de acuerdo con la orientación que muestren las figuras. De modo que, se identifica la orientación en la que se debe ubicar una figura teniendo en cuenta las subfiguras que la integran y tomando como referencia la posición y el sentido de las figuras que la anteceden. De tal forma que, mediante la discriminación visual se identifica que los cuadriláteros en su forma son diferentes, pues de manera intuitiva se reconoce un rombo y un cuadrado.

Ahora bien, en relación con la aprehensión perceptiva se observan triángulos, cuadriláteros y círculos, en las cuales se determinan unidades figurales 0D como los vértices, 1D como los segmentos y 2D como los polígonos. De la misma manera, la aprehensión operatoria posibilita que se reconozca una sucesión de giros a figuras, de tal forma que, al tener la magnitud del ángulo, se determine el sentido que permite ubicar la figura imagen reconociendo que, en algunos casos la figura imagen pasa a ser figura inicial para completar la serie. A su vez, la discursiva indica una aplicación de giros a una misma figura conservando la magnitud del ángulo, para completar la serie.

Del mismo modo, se precisa que algunas tareas proponen la reiteración de un mismo movimiento a una figura inicial considerando su contorno global, así como, las subfiguras yuxtapuestas que la integran; lo anterior se muestra a continuación.

Tabla 15: Configuraciones por yuxtaposición para la aplicación sucesivas de reflexiones axiales.

Etiqueta	Pr4-5TA88
Contenido	<p>5) Completa los frisos con la ayuda del eje de reflexión.</p> 
Descripción	<p>Se hace alusión al reconocimiento del eje de reflexión como aquella línea vertical que se encuentra punteada ubicada a una cantidad de celdas específicas respecto a la cuadrícula en la que se llevará a cabo el desarrollo de cada friso, lo cual sirve como referencia para reflejar las figuras respecto a la cantidad de celdas que las separa del eje. Lo anterior permite que se evidencie el movimiento de reflexión axial de manera que se inviertan las figuras respecto al eje para completar el friso. Cabe resaltar que, al estar conformada la figura inicial por subfiguras indica que a cada una de estas se le aplicará una reflexión respecto al mismo eje, teniendo en cuenta la distancia que la separa de este.</p>

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

La tarea indica la aplicación de reflexiones axiales a figuras geométricas de diferentes formas y tamaños, lo cual alude a la discriminación visual. Además, al estar la figura global integrada por la superposición de figuras invita al reconocimiento de la percepción figura fondo, de manera que al aplicar el movimiento se pueda centrar su atención en cada una de estas.

Es así como, para trazar las imágenes de la figura dada tantas veces sea necesario para cubrir un fondo cuadrículado se debe hacer uso de la coordinación ojo – motor pues permite realizar los trazos de las figuras, así como, rastrear la secuencia de inversiones de una figura imagen respecto a una inicial, a partir de la posición de ejes verticales.

Ahora bien, mediante la constancia de percepción se reconocen cuadriláteros y triángulos los cuales a partir de sucesiones de reflexiones en dirección vertical van a quedar en diferentes orientaciones conservando la configuración y magnitud de sus lados, logrando identificar la congruencia entre figuras.

Habría que señalar también que, se alude a la percepción de la posición en el espacio pues se necesita determinar la posición de las figuras imágenes de acuerdo con la dirección del eje de simetría. Reconociendo la ubicación de la figura imagen a partir de las distancias que separan los vértices de la figura inicial del eje de simetría, de manera que, al comparar los vértices homólogos respecto al eje estos sean equidistantes. A su vez, con la percepción de relaciones espaciales se reconoce la posición y orientación de los triángulos y cuadriláteros obtenidos a partir de la sucesión de las reflexiones axiales en relación con ellos mismos. De tal forma que, al cumplir una figura con dos designaciones (figura inicial o imagen) según el eje con el cual se realice la reflexión, hace que su posición y sentido (inversión) se determinen a partir de la figura inicial que la hace tomar el carácter de imagen; o de la figura imagen que la hace tomar el carácter de inicial.

Por lo que se refiere a las aprehensiones, se tiene en consideración la perceptiva en la identificación de figuras y subfiguras en forma de triángulos y cuadriláteros, teniendo en cuenta los trazos de su contorno y el color que demarca su superficie, así como, líneas que hacen alusión a los ejes de reflexión. De igual forma, se considera la operación de posición en la que se apliquen reflexiones a las figuras y subfiguras, considerando la forma vertical como se encuentran ubicados los ejes de reflexión se puedan determinar las distancias en relación con las celdas de la cuadrícula que separan a una figura del eje, lo cual permite orientar la posición de la figura imagen. Finalmente, los enunciados que direccionan la tarea señalan que mediante la aplicación de la transformación isométrica de reflexión axial se debe completar el friso, además de, indicar la secuencia de los movimientos y respecto a qué eje se deben efectuar.

Ahora bien, de manera general se observó en las tareas presentadas en este apartado, que la gran mayoría de las figuras delimitan la superficie de las subfiguras que la integran utilizando variedad de colores; es decir, dada una figura global se describen sobre ella subfiguras en 2D, las cuales se diferencian a partir de un color determinado. Además, resaltan el contorno con un color diferente al de la superficie, lo cual facilita el reconocimiento de la forma que poseen las subfiguras de manera que se puedan establecer relaciones entre ellas.

A su vez, las tareas propician que se establezcan comparación entre figuras de manera que se pueda identificar la posible imagen de una figura inicial. Sin embargo, no señalan de manera explícita la utilización de trazos adicionales externos como medio para identificar algunas características de un movimiento en particular, encontrando que, tan solo una tarea alude explícitamente a la realización de trazos internos a la figura global para determinar los ejes en una reflexión. Además, solo dos tareas invitan a la descripción de un movimiento aplicado a una figura, favoreciendo la exteriorización verbal de sus características.

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

Es importante demarcar que, solo dos de las tareas indican el reconocimiento de dos o más movimientos para el desarrollo de las mismas, las otras indican mediante su enunciado el reconocimiento o aplicación de solo un tipo de transformación isométrica, lo cual dificulta que se pueda establecer relaciones entre las transformaciones en una misma tarea.

Finalmente, en algunos casos se hace uso de cuadrícula para la aplicación o reconocimiento de una transformación, lo cual permite apreciar la magnitud de los segmentos que delimitan la forma de la figura global, así como, la de sus subfiguras, dando la posibilidad de reconocer congruencia entre lados homólogos. Del mismo modo, facilita la realización de los trazos de la figura imagen a partir del rastreo de la configuración de la inicial.

Así mismo, en otros casos se encuentra que las figuras se presentan sobre un fondo blanco o sobre unos recuadros, privilegiando el reconocimiento de la forma, pero obstaculizando la precisión en la realización de los trazos de las figuras y subfiguras de acuerdo al movimiento que se debe aplicar.

Con todo lo dicho hasta aquí, a continuación, se detalla una tabla que resumen los hallazgos encontrados en este apartado en relación con los cruces entre las habilidades y aprehensiones a las que aluden las tareas de los libros de textos escolares.

Tabla 16: Cruces presentados en las tareas de los libros de textos PREST y Proyecto Sé (CFBSYFG).

		Cruces entre las categorías de análisis																	
		Habilidades visuales - espaciales con la aprehensión perceptiva						Habilidades visuales - espaciales con la aprehensión Operatoria (operación de posición)						Habilidades visuales - espaciales con la aprehensión discursiva					
		CMP	PFP	CPP	PEP	PRP	DVP	CMO	PFO	CPO	PEO	PRO	DVO	CMD	PFD	CPD	PED	PRD	DVD
PREST	%	33.33	10	8.33	33.33	0	16.66	33.33	20	25	11.11	33.33	25	0	0	0	16.66	33.33	0
Proyecto Sé	%	66.66	90	91.66	66.66	100	83.33	66.66	80	75	88.88	66.66	75	0	100	100	83.33	66.66	0
Total de cruces		3	10	12	3	2	6	3	5	4	9	3	4	0	2	5	6	3	0

Como lo muestra la tabla anterior se evidenció que, tanto las tareas de los libros de textos PREST y Proyecto Sé aluden a los cruces CMP, PFP, CPP, PEP, DVP, CMO, PFO, CPO, PEO, PRO, DVO, PED PRD. Sin embargo, estos son más contemplados en Proyecto Sé.

Ahora bien, en cuanto a los cruces, PRP, PFD, CPD solo se promueven en las tareas de Proyecto Sé. Lo cual indica que, en PREST no se tiene en cuenta tareas que aludan a reconocer la continuidad o el cambio de un movimiento a partir de la relación entre las figuras, teniendo en cuenta que estas poseen un contorno y unas subfiguras 2D que las constituyen. De manera similar, no presenta tareas en las que los enunciados propicien detallar las maneras de ver en las figuras, de tal forma que, se pueda operar sobre ellas o reconocer las propiedades que permanecen invariantes al aplicarles un movimiento en particular.

Es importante señalar que, los cruces DVD y CMD no se evidenciaron en ningunas de las tareas analizadas relacionadas con la superposición y yuxtaposición de figuras en los libros de textos PREST y Proyecto Sé. Lo cual permitió inferir que, los enunciados que median las tareas no invitan a realizar trazos adicionales en las figuras, así como, a describir los elementos que caracterizan un movimiento en particular.

Cabe señalar que, en Proyecto Sé las tareas que dan cuenta de los cruces se refieren a transformaciones de traslación, rotación y reflexión axial, mientras que en PREST únicamente se aborda mediante la reflexión axial, con lo cual se infiere que, no se le da relevancia a la rotación y traslación como operaciones de posición que mediante en el desarrollo del pensamiento espacial. Es necesario añadir que, la reflexión central no es considerada en ninguno de los libros de textos.

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

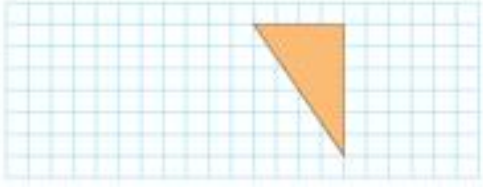
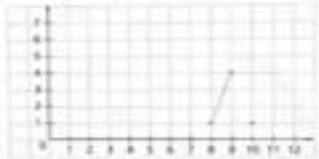

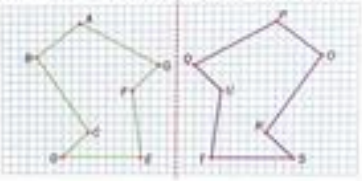
Con respecto al vínculo que se puede establecer entre lo propuesto por el MEN (2006) y las tareas presentadas en los libros de textos se reconoce que, en Proyecto Sé aluden al reconocimiento y aplicación de traslaciones y giros, así como, a reconocer y valorar simetrías, lo anterior visto desde el conjunto de grados de 1° a 3°. Mientras que, en PREST para este mismo conjunto de grados no se hace evidente.

Hay que mencionar además que, para el conjunto de grados de 4° a 5° únicamente en Proyecto Sé se proponen tareas que den cuenta de conjeturar y verificar los resultados de haber aplicado una transformación isométrica a figuras además de identificar, representar y utilizar ángulos en giros. Por su parte, en las tareas de PREST no se cumple literalmente con un estándar de este conjunto de grados debido que las tareas promueven únicamente la aplicación de simetrías axial a configuraciones geométricas dejando de lado la comparación entre figuras para reconocer el tipo de transformación que permite ir desde la figura inicial a su imagen, además no presenta tareas en las que se aluda a la rotación de figuras. Lo anterior deja ver que, si bien, no se abordan los estándares del conjunto de grados de 4° a 5°, si da cuenta de reconocer y valorar simetrías lo cual se detalla en el MEN (2006) para el conjunto de grados de 1° a 3°.

4.2.2 Discriminación de los elementos que posibilitan modificaciones de posición en figuras geométricas (DEPMPFG):

En esta sección se detallaron las tareas que posibilitan la aplicación de movimientos o el reconocimiento del mismo a partir de algunos elementos que los caracterizan (vector, ángulo de rotación, eje de simetría, entre otros), así como, las características del contorno de las figuras, que permitan identificar alguna manera de proceder para el desarrollo de las tareas propuestas:

Tabla 17: Reconocimiento del contorno y posición de una figura al aplicarle una isometría.

Etiqueta	Contenido
Sé3-1TA96	<p>Traslada el triángulo ocho unidades a la izquierda.</p> <p>Cuenta, desde cada uno de los vértices del triángulo, el número de unidades que se debe trasladar.</p> 
Sé4-1TA116	<p>Representa en el plano cartesiano la figura que resulta al unir los puntos (8, 1) y (9, 4) y (10, 1).</p> <p>Una vez tengas representada la figura, realiza primero el desplazamiento horizontal y luego el vertical, hacia por arriba.</p>  <p>Traslada la figura obtenida seis unidades a la izquierda y dos hacia arriba. Escribe las coordenadas de los nuevos vértices.</p> <p>(...), (...), (...)</p>
Sé3-1TA98	<p>Completa la reflexión de la siguiente figura.</p> <p>Cuenta muy bien el número de unidades o cuadritos con respecto al eje de reflexión o simetría.</p> 
Sé4-1TA120	<p>Observa la figura y escribe V si es verdadero o F si es falso.</p> <p>Cuenta los cuadritos de la cuadrícula para saber la distancia de cada punto al eje de simetría.</p>  <ul style="list-style-type: none"> • Los puntos A y P son simétricos. <input type="radio"/> • Los puntos B y U son simétricos. <input type="radio"/> • \overline{BC} y \overline{QR} son segmentos simétricos. <input type="radio"/> • Los puntos C y R están a igual distancia del eje. <input type="radio"/> • El segmento \overline{ET} es perpendicular al eje de simetría. <input type="radio"/>

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

Tabla 18: Descripciones de la forma como se presentan las transformaciones isométricas en la tabla 17.

		Descripción
Etiqueta	Sé3-1TA96	Se invita a aplicar una traslación a un triángulo en sentido horizontal, específicamente hacia el lado izquierdo, por lo que, sobre una cuadrícula sitúan la figura con superficie de tal forma que, al ubicar la figura imagen teniendo en cuenta la indicación señalada por el recuadro amarillo, se puedan comparar los vértices homólogos de las figuras y corroborar que las distancias que los separan sean iguales, además que, coincidan con la cantidad de unidades que se pide sea trasladada la figura.
	Sé4-1TA116	Se invita a la aplicación del movimiento de traslación, teniendo en cuenta el sentido y dirección del desplazamiento. Por ende, se presenta el primer cuadrante del plano cartesiano sobre una cuadrícula, en la que, su escala permite identificar que cada cuadro corresponde a una unidad, con lo cual, al realizar desplazamientos horizontales y verticales se permita señalar la ubicación (coordenadas) específica de un objeto. De tal forma que, al reconocer la figura obtenida uniendo los puntos, esta se desplace en línea recta, horizontal y luego vertical, apoyándose en la cuadrícula para recorrer una cantidad específica de unidades, de manera que, al llegar a su posición final se pueda relacionar la dirección y magnitud del movimiento en relación con las coordenadas de cada uno de los vértices que conforman la figura. Se hace preciso mencionar que, el enunciado del recuadro amarillo permite identificar la secuencia de los movimientos.
	Sé3-1TA98	Se indica aplicar el movimiento de reflexión a una figura inicial a partir de un eje, en el que, la posición de este indica la orientación en la que debe quedar invertida la figura imagen, es así como, el fondo cuadrículado sobre el cual se invita a realizar el movimiento permite determinar la distancia en cuadros que separa a cada figura del eje.
	Sé4-1TA120	Se invita a la comparación entre dos figuras de manera que se puedan reconocer algunos elementos que caracterizan una reflexión axial. Es así como, la cuadrícula sobre la cual se describe una figura y su imagen, permite que al trazar un segmento que una un vértice con su homólogo se pueda reconocer la perpendicularidad entre rectas ya que estas quedan orientadas de manera horizontal sobre las líneas de la cuadrícula y el eje de simetría se encuentra de manera vertical sobre la misma. De igual forma, los cuadros permiten determinar la cantidad de unidades que separa un vértice del eje, de tal forma que, al compararlo con su homólogo se pueda determinar si las distancias son iguales. Cabe resaltar que, la demarcación de los vértices ayuda a referenciar puntos y segmentos de la figura permitiendo establecer relaciones entre ellos y con sus homólogos.

En las anteriores tareas relacionadas con la traslación y reflexión se encuentran que, se abordan mediante el desarrollo de la coordinación ojo – motor, pues, aluden a rastrear un movimiento o unir puntos. Es así como, en Sé3-1TA96 y Sé3-1TA98 se requiere rastrear el trayecto que debe seguir la figura de acuerdo con la magnitud y el sentido del desplazamiento

o de la inversión y en Sé4-1TA116 y Sé4-1TA120 se precisa rastrear el contorno de una figura a través de la unión de puntos con segmentos, de manera que, se pueda identificar la forma geométrica de la misma (triángulo) o trazar líneas perpendiculares al eje de reflexión que unan los vértices homólogos de la figura inicial con su imagen, verificando con ello, si estos equidistan del eje. Hay que considerar también que, en Sé3-1TA96, Sé3-1TA98 y Sé4-1TA116 se deben realizar los trazos de la figura imagen tomando como referencia la figura inicial.

De manera similar ocurre con la percepción de la posición en el espacio, pues, la ubicación de cada uno de los vértices de las figuras en la cuadrícula o en el plano actúan como referencia para realizar la traslación hacia la izquierda y hacia arriba o la reflexión con eje vertical hacia la derecha de la figura. De modo que, en Sé3-1TA96, Sé3-1TA98, y Sé4-1TA120 los vértices homólogos de la figura inicial y su imagen queden sobre líneas rectas horizontales, mientras que, en Sé4-1TA116 los vértices homólogos quedan distanciados en dirección horizontal y vertical, lo cual indica que la figura se movió dos veces.

En cuanto a las aprehensiones, en todas las tareas se alude a la perceptiva ya que se requiere de la identificación de unidades 0D, 1D y 2D que permiten identificar vértices y segmentos homólogos, rectas que aluden a los ejes de reflexión, así como, reconocer la configuración de las imágenes de modo que en Sé3-1TA96 y Sé4-1TA116 se identifica un triángulo, en Sé4-1TA120 un heptágono irregular y en Sé3-1TA98 un decágono irregular.

En lo que respecta a la operación de posición, se alude a la aplicación en Sé3-1TA96 y Sé4-1TA116 de traslación a partir del sentido y magnitud del desplazamiento detallando el cambio de coordenadas, en Sé3-1TA98 a la reflexión axial respecto a un eje vertical, mientras que, en Sé4-1TA120 se deben realizar trazos externos a la figura que permitan reconocer

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

algunas de las características que guardan la figura inicial y su imagen al ser el resultado de haber aplicado una reflexión axial.

Ahora bien, en cuanto a los enunciados que acompañan las tareas, en la mayoría de los casos se señala el tipo de movimientos que se le debe aplicar a la figura para cambiarla de posición acompañado de un recuadro amarillo en el que indican algunas pautas que se debe considerar aludiendo a conceptos como distancia y equidistancias. En este sentido, en el caso de Sé3-1TA96 y Sé4-1TA116 detallan la magnitud y sentido de la traslación especificando para el último el orden en que se debe hacer el movimiento, mientras que, en Sé4-1TA120 no lo hacen, pero las preguntas que se deben responder a partir de la representación visual, posibilitan reconocer algunas características de la reflexión axial entre ellas la simetría de vértices y segmentos, la equidistancia y perpendicularidad de vértices homólogos al eje.

Por todo lo anterior, las celdas de la cuadrícula permiten seguir el movimiento de cada vértice de la figura desde su posición inicial hasta la final delimitando la magnitud de los segmentos y de las unidades que separan a la figura inicial de su imagen.

En este mismo orden ideas, se presentan a continuación las tareas en las que se les debe aplicar un movimiento a dos figuras de manera que, se discriminen las condiciones que permiten realizar el cambio de posición para cada caso.

Tabla 19: Isometrías a partir del reconociendo de las características globales de la figura.


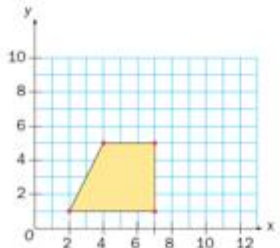
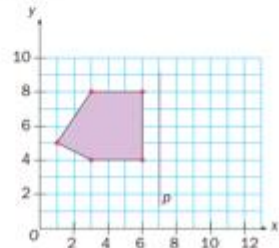
Etiqueta	Contenido
Sé3-2TA101	<p>Ejercitación. Rota cada polígono alrededor del punto indicado.</p> 
Sé5-2TA95	<p>Modelación. Realiza los movimientos indicados y escribe las coordenadas de los vértices de la figura obtenida.</p> <p>a. Traslada la figura tres unidades hacia arriba.</p>  <p>b. Refleja la figura con respecto a la recta β.</p>  <div style="background-color: yellow; border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin-left: auto;"> <p>Al realizar traslaciones, rotaciones o reflexiones en el plano, los vértices de las figuras obtenidas tienen coordenadas diferentes a las iniciales.</p> </div>

Tabla 20: Descripciones de la forma como se presentan las transformaciones isométricas en la tabla 19.

		Descripción
Etiqueta	Sé3-2TA101	<p>Para la aplicación de la rotación a una figura inicial se señalan tres elementos: centro, amplitud del ángulo y orientación del movimiento. Es por esto que, se presentan dos figuras en una cuadrícula, en las que, al coincidir el centro de rotación con uno de los vértices de la figura, la posición de los segmentos de la figura que forman el centro de rotación en relación con la cuadrícula, permite rastrear la amplitud del ángulo y ubicar la figura imagen.</p>
	Sé5-2TA95	<p>Se invita a aplicar un movimiento a una figura, teniendo en cuenta la ubicación de esta respecto al primer cuadrante de un plano cartesiano demarcado en una cuadrícula, la cual permite reconocer que, a pesar de estar delimitada la escala de los ejes x e y en magnitudes de dos unidades, cada cuadro representa una unidad. De manera que, facilita identificar las coordenadas de los vértices que conforman la figura. Lo anterior permite que, al realizar una traslación en línea recta vertical o una reflexión respecto a un eje vertical, se pueda hacer uso de los cuadros para referenciar la magnitud del movimiento o las distancias que separan a una figura del eje, y al compararlas con las coordenadas de la figura imagen den cuenta del mismo movimiento, reconociendo la indicación señalada por el recuadro de color amarillo.</p>

En las tareas se debe rastrear el movimiento, además de, trazar la figura final teniendo en cuenta la orientación en la que deben quedar los segmentos y subfiguras, para lo cual se

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

requiere de la coordinación ojo motor. Es así como, para el caso de Sé3-2TA101 se alude a seguir el giro a partir del sentido y amplitud del ángulo en relación con el centro de rotación, para Sé5-2TA95 se indica seguir la traslación de acuerdo con la magnitud y sentido del desplazamiento o la reflexión de axial en relación con un eje vertical.

Al señalar en las tareas el sentido que debe tener cada movimiento de las figuras dadas, se alude a la percepción de la posición en el espacio, de modo que, se reconoce en Sé3-2TA101 que una de las figuras cambiara su orientación en sentido antihorario, mientras que, la otra la realiza en sentido horario, de ahí que, al estar sobre una misma cuadrícula ubicadas en extremos diferentes, las figuras imágenes quedan adyacentes. Además, en Sé5-2TA95 al no compartir el mismo plano, la figura imagen de la traslación queda superpuesta a la figura inicial y en la reflexión el eje vertical distanciado de la figura inicial permite que la inversión de la figura imagen respecto a la inicial se alinean de manera horizontal.

En lo que respecta a la forma de las figuras iniciales, todas poseen contornos diferentes de manera que, se hace uso de la discriminación visual puesto que, en ambas tareas se ilustran dos figuras a las cuales se les debe aplicar un movimiento. Es así como, en Sé3-2TA101 se identifica un cuadrilátero y un hexágono irregular mientras que en Sé5-2TA95 se detalla un cuadrilátero y un pentágono, de ahí que al trazar la figura imagen para cada caso, éstas sean congruentes con su figura inicial.

Ahora bien, desde las aprehensiones se alude a la perceptiva ya que se debe identificar que las figuras a rotar están compuestas por subfiguras para este caso cuadrados, pues, a pesar de su contorno poseer forma rectangular y hexagonal para cada caso, estos se subdividen en cuadrados que abarcan cuatro cuadros del fondo cuadrículado sobre el cual se describe la figura. De igual forma, mediante la organización de los trazos del contorno de la

figura a trasladar o reflejar se identifica un trapecio recto y un pentágono irregular.

Facilitando lo anterior diferenciar cada una de las configuraciones geométricas.

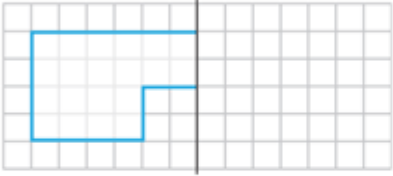
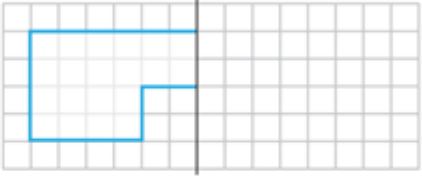
En lo que concierne a la operación de posición, en todas las tareas se debe aplicar un movimiento, siendo para SÉ3-2TA101 rotación teniendo en cuenta al sentido del giro, amplitud del ángulo y centro de rotación; para SÉ5-2TA95 traslación detallando el sentido y magnitud del desplazamiento, así como, reflexión axial con eje vertical, los cuales se corroboran a partir del cambio de coordenadas en el plano cartesiano, de manera que, al seguir el movimiento este coincida con las coordenadas de la figura imagen respecto de la inicial, identificando la magnitud del recorrido, así como, la equidistancia de los vértices homólogos al eje.

Finalmente, el enunciado orientador de la tarea indica el movimiento a aplicar detallando la amplitud del ángulo, el sentido del giro, el centro de rotación; el sentido y la magnitud del desplazamiento y la recta sobre la cual se refleja la figura. Con lo que se identifican algunos elementos propios de cada transformación.

De manera similar a lo anterior, se propicia de forma implícita en la siguiente tarea aplicar un movimiento a la figura inicial, de modo que se identifique si esta es simétrica respecto a un eje interno en ella.

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

Tabla 21: Reflexión axial mediante el reconocimiento de la posición de figuras respecto a un eje.

Etiqueta	Pr3-1TA84
Contenido	<p>Jazmín tenía el mapa de la biblioteca municipal. Lamentablemente, derramó agua sobre el mapa y se borró una de sus partes (figura 1). Su amiga Marcela le ayudó a completar el mapa (figura 2), teniendo en cuenta que la línea negra que aparece en la figura 1 era un eje de simetría. ¿Estás de acuerdo con la propuesta de Marcela?</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>Figura 1</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>Figura 2</p>  </div> </div>
Descripción	<p>Se invita a completar una figura la cual está sobre una cuadrícula que determina su posición y ubicación respecto a una línea recta llamada eje de simetría, de tal forma que, la figura resultante sea simétrica respecto al eje señalado. Lo cual indica que, al comparar una figura que ha sido resultado de una simetría en relación con un eje, la figura imagen debe quedar en diferente posición e invertida en relación con la figura inicial.</p>

La tarea se enfatiza en la comparación de dos figuras para determinar si son el resultado de haber aplicado una reflexión axial, para lo cual, se alude a la constancia de percepción reconociendo en ambas figuras un hexágono irregular, en el que su tamaño está determinado a partir de las unidades de cuadros de la cuadrícula que denota la longitud de cada uno de sus lados. Es así como, al tener una figura inicial y una posible imagen, se pueda establecer correspondencia entre lados homólogos. Identificando la misma figura (forma y tamaño) en igual o diferente sentido respecto al eje de reflexión. Además, se relaciona con la percepción de la posición en el espacio al identificar si la figura final corresponde a ser la imagen de la figura inicial bajo una reflexión axial. Para lo cual, se debe reconocer si la figura imagen quedó invertida respecto a la figura inicial, en el que la posición de las figuras se determinan a partir de la dirección (vertical) del eje de reflexión.


Por lo que se refiere a las aprehensiones, en la perceptiva se pretende el reconocimiento de una configuración geométrica, para este caso un hexágono irregular (2D), en el que se identifican unidades figurales con dimensiones 0D (vértices) y 1D (segmentos y

líneas rectas). Ahora bien, en cuanto a la operatoria, inicialmente se verifica si la figura dos es imagen de la figura uno respecto al eje en dirección vertical, para lo cual, se debe aplicar una reflexión axial reconociendo la equidistancia y perpendicularidad de los vértices homólogos de las figuras respecto al eje, de manera que, al cambiar de posición la figura uno se verifique si su imagen corresponde con la posición de la figura dos.

Por último, en la discursiva se señala la figura dos como posible imagen de la figura uno, de manera que, al comparar las figuras se pueda determinar a partir de las características propias de la reflexión axial si la figura dos corresponde a ser imagen de la figura uno.

De igual modo, en la siguiente tarea se invita a la aplicación de una sucesión de movimientos a una misma configuración geométrica de manera que se conserve la dirección al rellenar un espacio delimitado.

Tabla 22: Reconocimiento de relaciones espaciales en una configuración geométrica para la aplicación de isometrías.

Etiqueta	Pr4-1TA89
Contenido	<p>Al bucear, Raúl observó los restos de un naufragio que tuvo lugar hace 100 años aproximadamente. Raúl quedó asombrado al descubrir todas las riquezas que aún albergaba este barco. Un friso en particular llamó su atención. Esta es una foto del friso. Complétalo.</p> 
Descripción	<p>Se propone completar un friso, el cual está contenido sobre una cuadrícula que permite determinar la posición y sentido de las formas que lo integran respecto a la ubicación y magnitud de los trazos descritos en las celdas; de ahí que, se propicia repetir tantas veces sea necesario algún tipo de transformación que permita continuar el patrón sin alterar la forma ni el tamaño. Pues, la manera como se detallan los trazos del friso en la cuadrícula permite reconocer una reflexión axial entre las formas que lo determinan. Es así como, se podría completar a través de traslaciones, reflexiones o la combinación de ambas.</p>

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

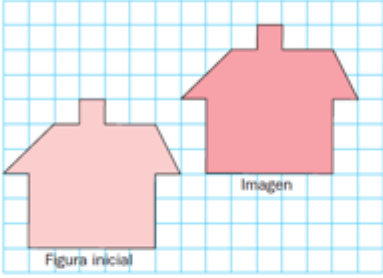
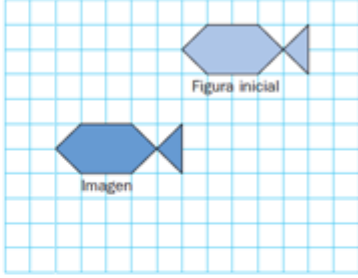
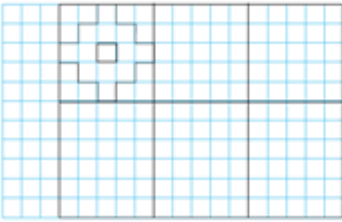
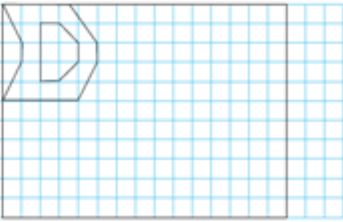
La tarea se relaciona con la habilidad de coordinación ojo motor pues, se reconoce a partir del rastreo la orientación de los segmentos y puntos que conforman el diseño del friso, lo cual posibilita darles continuidad a los trazos. De modo que, al reconocer la ubicación de los puntos aislándolos de los segmentos y viceversa se alude a la percepción de figura fondo identificando la configuración del diseño de manera global, pero también la identificación y ubicación de cada uno de los elementos que lo integran.

Ahora bien, a partir de la orientación de los trazos se alude a la percepción de la posición en el espacio identificando que el diseño inicial es el resultado de haber aplicado una reflexión axial con un eje horizontal. De manera que, al completar el friso (diseño final) se pueda ubicar una línea recta horizontal que permita coincidir lo que está por arriba de ella con lo que se encuentra por debajo. Señalando además que, mediante la percepción de relaciones espaciales se reconoce la orientación (horizontal, vertical, arriba, bajo, izquierda o derecha) de los segmentos y los puntos en relación con ellos mismos y con el sujeto que observa, de modo que, al completar el friso se pueda hacer correspondencia entre los que tienen la misma orientación y sentido para corroborar la secuencia del patrón.

Centrándose ahora en la aprehensión perceptiva, se reconocen los elementos que conforman el diseño del friso, de modo que, este cuenta con unidades figurales 0D como los puntos y 1D como los segmentos que lo demarcan. Del mismo modo, para completar el friso se requiere la aplicación de movimientos referenciando con ello la operación de posición mediante reflexión axial y traslación, de manera que, al establecer ejes de forma horizontal o vertical permitan invertir la figura inicial teniendo en cuenta la posición de cada uno de los trazos que la conforman, así como, determinar la cantidad de celdas que se debe trasladar la figura inicial de manera que se yuxtaponga con su imagen. Por último, el enunciado indica que el friso se puede completar mediante una sucesión de movimientos de manera que se rellene el fondo cuadrículado sobre el cual se detalla el diseño de este.

De la misma manera, se presentan las siguientes tareas, las cuales se relacionan con el reconocimiento y la descripción de haberle aplicado un mismo tipo de movimiento a dos pares de figuras diferentes, además de, la aplicación de uno o varios tipos de movimientos en distintas direcciones que permitan rellenar un espacio demarcado para cada figura.

Tabla 23: Descripción y aplicación de isometrías a figuras geométricas.

Etiqueta	Contenido
Sé3-4TA97	<p>Comunicación. Identifica y escribe las traslaciones aplicadas a cada figura.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  </div> <div style="text-align: center;">  </div> </div> <ul style="list-style-type: none"> • La casa se trasladó unidades a la derecha y unidades hacia • El pez se trasladó unidades a y unidades hacia <p style="text-align: right; margin-right: 100px;">1 2 3 4 5 6 7 8</p>
Sé5-3TA97	<p>Modelación. Termina de elaborar los mosaicos. Recubre, en cada caso, la superficie dada con la plantilla propuesta.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  </div> <div style="text-align: center;">  </div> </div>

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

Tabla 24: Descripciones de la forma como se presentan las transformaciones isométricas en la tabla 23

		Descripción
Etiqueta	Sé3-4TA97	Propicia la comparación entre pares de figuras, una de ellas etiquetada como figura inicial y la otra como imagen, con lo cual, se acerca a una de las formas como se designan las figuras que han sido el resultado de una transformación. Es así como, al presentar el par de figuras sobre una cuadrícula permite que se utilicen las celdas para señalar la cantidad de unidades en las que se trasladó la figura inicial, y la etiqueta de las imágenes permite relacionar la posición que estas ocupan dentro de la cuadrícula, de tal forma que, se puede señalar la orientación del movimiento. Lo anterior porque, la tarea invita a completar un enunciado en el que se intenta describir el movimiento de las figuras.
	Sé5-3TA97	Se invita a reconocer la posición y orientación de los trazos que hay sobre una plantilla cuadrículada, de tal forma que, se pueda elegir los tipos de movimientos que permiten completar el mosaico. Para ello, las líneas que se encuentran ubicadas de forma horizontal y vertical sirven como eje de reflexión de manera que, se pueda recubrir a través de la inversión de figuras. Del mismo modo, las cuadrículas permiten delimitar el espacio que ocupa una figura, en el que, la elección del movimiento se efectúe en función de la cuadrícula para recubrir una superficie.

Las tareas aluden a los movimientos de traslación y reflexión axial, de manera que, mediante la coordinación ojo – motor se recorra el trayecto o el reflejo de una figura de manera que, se pueda superponer o trazar su imagen. Es por esto que, en Sé3-4TA97 se necesita rastrear la magnitud de cada desplazamiento en línea recta horizontal (izquierda - derecha) y vertical (arriba - abajo) y en Sé5-3TA97 se debe cambiar de posición la figura inicial realizando los trazos de su imagen siguiendo la magnitud y dirección (horizontal, vertical e inclinado) de cada segmento que compone la figura inicial.

De modo similar ocurre con la habilidad constancia de percepción, pues, se identifica la conservación de la magnitud y orientación de los trazos del contorno que demarcan las figuras, teniendo en cuenta las celdas de las cuadrículas. De ahí que, en Sé3-4TA97 al hacer correspondencia entre los segmentos de la figura inicial con la figura imagen, se reconozca que estas son idénticas, mientras que en Sé5-3TA97 al completar el mosaico las figuras imágenes quedan invertidas según la dirección del eje o en igual orientación al desplazarse en

distintas direcciones y sentidos; observando que su tamaño y forma serán iguales para cada caso.

Es importante señalar que, al contener la tarea dos figuras a las que se les aplicó o se les va a aplicar un movimiento, se alude a la discriminación visual para distinguir la configuración geométrica en cada caso, lo cual permite que, se distingan la una de la otra. Es así como, en Sé3-4TA97 se diferencia cual representa una casa y cual un pescado, de manera que, se reconozca la forma de cada una y la igualdad entre figura inicial con su imagen; ya en Sé5-3TA97 se observa que las figuras que se muestran en cada mosaico son distintas, pues, la demarcación del contorno de estas posibilita que se identifique que su forma y tamaño no son iguales.

Ahora bien, con la habilidad percepción de la posición en el espacio, se relaciona la dirección (vertical u horizontal) y el sentido (derecha, izquierda o arriba, abajo) del movimiento en ambas tareas, para lo cual, en Sé3-4TA97 se requiere comparar dos figuras iniciales con sus imágenes, reconociendo la aplicación de dos traslaciones consecutivas, pero en diferentes direcciones, las cuales, posibilitan ir de la una hacia la otra, además, permite observar la magnitud que separa un objeto del otro. En cuanto a Sé5-3TA97, al aplicar una traslación se determina que, la figura imagen conserva igual orientación y al ser una reflexión las figuras quedan invertidas teniendo en cuenta la ubicación de los ejes de simetría.

Con respecto a las aprehensiones, se hace alusión a la perceptiva, pues mediante la orientación y organización de los trazos se relacionan las formas de las figuras que representan un pescado y una casa, así como, configuraciones geométricas en mosaicos. Además, en Sé5-3TA97 se detallan líneas rectas que hacen alusión a los ejes de simetría.


En referencia a la operatoria, se señala el reconocimiento y la aplicación de movimientos relacionados con la traslación y la reflexión axial. De manera que, en Sé3-

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

4TA97 se identifique la magnitud, sentido y dirección del desplazamiento que se describe al comparar la figura inicial con su imagen. Por su parte, en Sé5-3TA97 a partir de la aplicación de reflexiones y traslaciones sucesivas se completen los mosaicos; de tal forma que, las líneas horizontales y verticales que dividen la plantilla del mosaico se puedan determinar como los ejes de reflexión. Del mismo modo, a través de las cuadrículas se delimiten el sentido y la magnitud del desplazamiento.

Finalmente, en los enunciados que presentan las tareas, se señala reconocer o aplicar uno o varios movimientos a una misma figura. Es por esto que, en Sé3-4TA97 se determina que las figuras son el resultado de una traslación, de manera que se puedan describir la magnitud y sentido del desplazamiento, mientras que, en Sé5-3TA97 se indica que cada recuadro hace alusión a un mosaico, el cual debe ser completado a partir de la figura que en este se plasma, dando libertad a la elección de movimientos que permiten recubrir la mayor parte del recuadro que delimita la magnitud del mosaico. De manera semejante, se invita al reconocimiento y descripción del tipo de transformación isométrica que representan cada par de figuras.

Tabla 25: Comparación de la orientación del contorno de la figura inicial y su imagen para identificar el tipo de isometría que representan.

Etiqueta	Sé5-3TA95
Contenido	<p>3 Comunicación. Describe el movimiento aplicado a cada figura.</p> <p>Descripción:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Pentágono: _____ • Rectángulo: _____ • Letra F: _____ 
Descripción	<p>Se propicia reconocer y describir aquellos elementos que permiten caracterizar un movimiento en particular. Para esto, se presentan pares de figuras en las que, se puede identificar la figura de contorno punteado como imagen de la figura recubierta de color. De modo que, para el par de pentágonos se describe un segmento horizontal y de acuerdo con la orientación de las figuras, se reconoce que hace alusión a una traslación; para el caso del rectángulo al mostrar que ambas figuras comparten un vértice y demarcar con una flecha curva el sentido del giro, da cuenta de una rotación, por su parte, para las letras "f" al quedar invertidas respecto a una línea recta vertical, se puede señalar dicha recta como eje de reflexión.</p>

La tarea se relaciona con los movimientos de rotación, traslación y reflexión, es por esto que, se alude a la habilidad de percepción de la posición en el espacio pues, se reconoce la inversión de una figura con forma de “F” a partir de un eje vertical respecto a la figura inicial, del mismo modo se observa el cambio de orientación de un rectángulo al ser rotado tomando como centro un vértice que comparten las figuras (inicial e imagen), por último en los pentágonos se evidencia un desplazamiento en dirección horizontal conservando la orientación de la figura inicial respecto a su imagen. Con respecto a la discriminación visual se reconoce la forma de cada una de las figuras con su designación (pentágono, rectángulo y letra F) identificando que poseen formas diferentes entre ellas, pero guardan congruencia con su imagen.

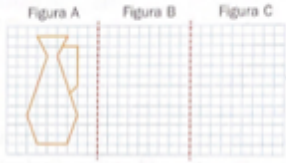
Considerando ahora las aprehensiones, desde la perceptiva se identifica pentágonos, un rectángulos y letras F, además de líneas rectas externas a las figuras. En cuanto a la operatoria se alude a la realización de trazos externos desde la figura inicial hacia sus homólogos en la figura imagen, de manera que, se reconozca para los pentágonos la misma

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

orientación de sus figuras y un desplazamiento en línea recta horizontal con lo cual se describe una traslación, en los rectángulos al trazar semicircunferencias desde los vértices homólogos se describa una rotación, y al comparar las letras “F” respecto a la recta vertical que las separa se identifique una reflexión axial. Es así como, mediante la discursiva se indica comunicar el tipo de transformación que representan los pares de figuras de manera que, se reconozcan elementos como: el sentido y la dirección para llevar a cabo una traslación, el centro y el sentido del giro en una rotación y la línea recta vertical que hace alusión a un eje en la reflexión axial.

En relación con lo anterior, se señala en la siguiente tarea la aplicación sucesiva de un mismo tipo de movimiento a una figura, en el que se establezca comparación entre la figura inicial y las resultantes.

Tabla 26: Percepción de la forma y posición del contorno de la figura inicial para la aplicación sucesiva de dos reflexiones axiales.

Etiqueta	Sé4-4TA121
Contenido	<p>4 Observa la figura.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Dibuja la imagen reflejada de la figura A. • Dibuja la imagen reflejada de la figura B. • ¿Son simétricas las figuras A y C? • ¿Cómo puedes obtener la figura C a partir de la figura A? 
Descripción	<p>Se pretende aplicar de manera sucesiva dos veces una reflexión axial, lo cual indica que, en uno de los casos la figura imagen pasará a ser figura inicial. De manera que, la cuadrícula en la que se demarca una figura y dos ejes de simetría permiten delimitar el espacio sobre el cual se va a llevar a cabo el movimiento, posibilitando señalar las distancias en unidades de cuadros que separan los trazos de la figura respecto al eje, así como, la inversión de estas. Es preciso mencionar que, al obtener las dos reflexiones, se puede reconocer que existe un movimiento distinto a la reflexión, que permite llevar la figura inicial a la última figura reflejada, para este caso la traslación</p>

Al estar centrada la tarea en la aplicación de un movimiento, se hace uso de la coordinación ojo – motor para rastrear el cambio de posición y el contorno de la figura al aplicar cada una de las reflexiones axiales, de modo que, se puedan realizar los trazos de las

figuras imágenes con diferentes orientaciones (invertidas). Al señalar también, la aplicación de dos reflexiones a la misma figura con ejes diferentes se alude a la constancia de percepción, en la que se relaciona la configuración de los segmentos de la figura dada con la forma de un jarrón, de modo que al reflejarse dos veces su forma y tamaño no varíen.

Hay que mencionar además que, se referencia la percepción de relaciones espaciales para reconocer la orientación de los trazos que conforman la figura dada, de modo que, en la primera reflexión la figura imagen quede invertida en dirección vertical respecto al eje. Sin embargo, al efectuarle a la figura resultante una reflexión de manera sucesiva con un eje vertical, esta adopta la designación de figura inicial; de tal forma que, la nueva figura imagen queda con la misma orientación de la primera figura inicial. Lo cual indica que, a partir de una traslación en dirección horizontal hacia la derecha se puede hacer coincidir la figura dada con la segunda figura imagen.

Por lo que se refiere a las aprehensiones, desde la perceptiva se identifica la forma que presenta la figura (jarrón), en la que los trazos de su contorno se orientan en dirección vertical, horizontal e inclinada. De manera que, mediante la operación de posición se apliquen reflexiones axiales a una misma figura, redefiniendo la figura imagen obtenida en la primera reflexión como figura inicial al aplicar la segunda reflexión respecto a un eje ubicado en posición diferente a la inicial, pero con igual dirección vertical, determinando la equidistancia a partir de la magnitud de unidades de cuadros de la cuadrícula que separan los vértices homólogos de las figuras respecto al eje de simetría.

Finalmente, los enunciados que guían la tarea indican que la figura cambia de posición a partir de la aplicación de reflexiones axiales de manera sucesiva a la misma figura, posibilitando que se comparen las orientaciones de estas respecto a los ejes; de modo que, se identifiquen algunas características de otros movimientos que permiten hacer

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

correspondencia entre la orientación de la figura dada con la última figura imagen obtenida de la sucesión de reflexiones.

Con todo lo dicho hasta aquí, se precisa que en este apartado se privilegia el reconocimiento de la forma de las figuras, visto en algunos casos desde la delimitación de su contorno y superficie, y en otros únicamente de su contorno. De modo que, al presentarse las figuras en su gran mayoría sobre un fondo cuadrículado, las que delimitan solo su contorno facilitan la aplicación del movimiento, pues no solo se tendría en cuenta la forma, sino también la magnitud de los segmentos; de manera que, pueda establecer las distancias que separan sus lados opuestos. Con respecto a las que demarcan su superficie, podrían dificultar establecer la perpendicularidad y distancia al eje, al trazar líneas que unan vértices y lados homólogos, debido que, la delimitación de la superficie no permite observar de forma inmediata la demarcación de la cuadrícula en la parte interna de la figura. Es así como, la cuadrícula favorece realizar los trazos de la figura imagen estableciendo relaciones de forma y tamaño con la figura inicial.

En este mismo orden de ideas, se observó que solo una tarea de manera explícita invita a establecer relación entre los tipos de transformaciones isométricas reconociendo que, la traslación puede ser el resultado de haber aplicado una composición de reflexiones axiales con eje de reflexión paralelos. Es así como, en las demás tareas de manera explícita en el enunciado que las orienta se indica la aplicación de un tipo en particular de movimiento. Lo cual señala que, las transformaciones en su gran mayoría se presentan de manera aislada. Cabe resaltar que, en algunos casos las tareas referidas al movimiento de traslación propenden por reconocer que la relación de posición entre dos figuras que no estén alineadas se describe mediante dos desplazamientos sucesivos en diferentes direcciones.

Tabla 27: Cruces presentados en las tareas de los libros de textos PREST y Proyecto Sé (DEPMFPG).

		Cruces entre las categorías de análisis																	
		Cruce de las habilidades visuales - espaciales con la aprehensión perceptiva						Cruce de las habilidades visuales - espaciales con la aprehensión Operatoria (operación de posición)						Cruce de las habilidades visuales - espaciales con la aprehensión discursiva					
		CMP	PPF	CPP	PEP	PRP	DVP	CMO	PFO	CPO	PEO	PRO	DVO	CMD	PFD	CPD	PED	PRD	DVD
PREST	%	18.76	100	28.57	17.64	0	28.57	17.64	100	33.33	13.33	28.57	50	25	0	0	7.14	20	25
Proyecto Sé	%	81.25	0	71.42	82.35	100	71.42	82.35	0	66.66	86.66	71.42	50	75	0	100	92.85	80	75
Total de cruces		16	1	7	17	3	7	17	1	6	15	7	2	8	0	1	14	5	4

De acuerdo con lo presentado en la tabla anterior, se evidenció que tanto las tareas de los libros de textos PREST y Proyecto Sé aluden con el mismo porcentaje a los cruces DVO, Mientras que los cruces CMP, CPP, PEP, DVP, CMO, CPO, PEO, PRO, CMD, PED, PRE y DVD son más contemplados en Proyecto Sé.

Del mismo modo, se reconoce que, solo los cruce PFP y PFO se presenta en las tareas de PREST, lo cual indica que, en Proyecto sé no hay tareas que presente configuraciones geométricas elaboradas a partir de puntos y líneas poligonales abiertas de tal forma que se pueda discriminar las unidades 0D Y 1D al aplicarles un movimiento.

En cuanto a los cruces CPD y PRP solo se promovieron en Proyecto sé, lo cual permite inferir que, en PREST no se propicia la descripción de algunas características que permanecen invariantes en una figura al llevar a cabo un movimiento en particular. De manera similar, no presenta conjuntos de figuras con igual forma y tamaño en las que se identifiquen patrones que den cuenta de una sucesión de movimientos.

Ahora bien, en la revisión de los libros de textos se observó que el cruce PFD no se evidenció en las tareas propuestas. Lo cual indica que, los enunciados y las representaciones gráficas que acompañan las tareas no invitan a hacer trazos adicionales a la figura imagen

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

para que sea idéntica a la figura inicial, o centrar la atención en la figura inicial de manera que, la figura imagen encaje perfectamente en una posición establecida por la tarea.

Cabe señalar que, en este apartado ocurre lo mismo que en el anterior, en cuanto al tipo de transformación con el que se aluden los cruces desde cada libro, la única diferencia es que desde PREST se considera también la traslación de manera implícita.

Lo mismo sucede en relación con el MEN (2006) y las tareas abordadas en los libros de textos; pues desde el conjunto de grados de 1° a 3° se añade para Proyecto sé el reconocimiento de nociones de verticalidad y horizontalidad en distintos contextos, mientras que, para PREST se tiene en cuenta el reconocimiento y valoración de simetrías.


De manera similar ocurre para el conjunto de grados de 4° a 5° en Proyecto sé, reconociendo además que, se utilizan sistemas de coordenadas para especificar localizaciones. Sin embargo, en PREST únicamente se hace alusión a conjeturar y verificar los resultados de aplicar transformaciones a figuras; se debe agregar que, se alude también a la aplicación de traslaciones, que, aunque no es señalado para este conjunto de grados, es resaltado por el MEN (2006) en el conjunto de grados de 1° a 3°.

4.2.3 Reconocimientos de trazos y figuras bidimensionales como mediadores para un acercamiento intuitivo a las transformaciones isométricas (RTFBMAITI):

En este apartado se presentan las tareas que de manera implícita aluden a algún tipo de transformación isométrica, en el que se identifican mediante la consigna y representación visual algunos elementos característicos de traslaciones, reflexiones o rotaciones.

Es así como, se detallaron tareas en las que se aluden a la traslación mediante el reconocimiento y descripción de la dirección en línea recta de un desplazamiento. Como se observa a continuación.

Tabla 28: Acercamiento intuitivo a la traslación a partir del rastreo de las direcciones de un camino.

Etiqueta	Sé1-4TA105
Contenido	 <p>Solución de problemas</p> <p>Repasa y describe el camino que debe seguir el caracol para llegar a su casa, que es la de color amarillo.</p> <p>El caracol debe caminar ___ cuadros horizontales y ___ verticales.</p>
Descripción	<p>Se pretende señalar y describir la trayectoria de un objeto, para esto se hace uso de una cuadrícula que posibilita identificar la ubicación de objetos, así como, la distancia a recorrer de forma horizontal y vertical, de manera que, el objeto a partir de dos desplazamientos en línea recta con diferentes direcciones pueda llegar hasta un punto final. Lo anterior, permite evidenciar un acercamiento de manera intuitiva a la traslación.</p>

En la tarea se reconoce el acercamiento a la transformación de traslación, de manera que, se deja ver la habilidad de coordinación ojo – motor, la cual, se requiere para rastrear el trayecto que debe seguir un objeto, de manera que, al trasladarse dos veces de forma secuencial con una dirección y magnitud diferente para cada caso pueda llegar a su destino final, de manera similar ocurre con la percepción de la posición en el espacio, pues se señala la existencia de varios caminos para trasladar el objeto desde el punto inicial hasta el punto final, de tal forma que, al relacionar la posición inicial del objeto con el lugar a donde debe trasladarse se describe una línea inclinada la cual indica que se debe efectuar como mínimo dos movimientos sucesivos en diferentes direcciones (horizontal y vertical).

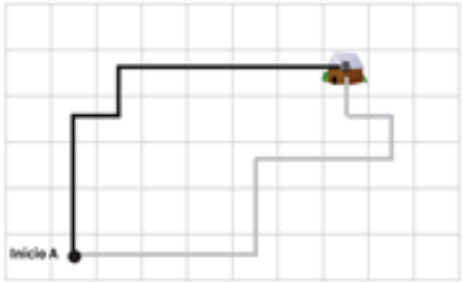

Ahora bien, en relación con las aprensiones, se hace alusión a la perceptiva, de modo que, se reconocen formas geométricas 2D compuestas por líneas curvas, además de, algunas cualidades que estas poseen, en este caso su color, el cual es elemento fundamental para identificar el punto de llegada del objeto a trasladar. Por último, la discursiva pues posibilita

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

expresar la forma como se efectuó el desplazamiento teniendo en cuenta su magnitud y sentido, de manera que, al hacer corresponder la descripción del desplazamiento con la demarcación de la trayectoria en la representación visual den cuenta del mismo movimiento.

Ahora, se destacan algunas tareas que además de aludir a la traslación mediante la identificación de la dirección en línea recta, lo hacen también a partir del reconocimiento del sentido del movimiento, utilizando para algunos casos coordenadas espaciales.

Tabla 29: Acercamiento intuitivo a la traslación a partir del rastreo del sentido de un camino.

Etiqueta	Contenido
Pr1-1TA86	<p>Para ir del punto de inicio A a la casa B, puede haber varios caminos posibles. Acá se muestran dos caminos posibles (Ruta 1 y Ruta 2)</p>  <p>Describe cada trayecto con ayuda de flechas.</p> <p>Los estudiantes deben poder describir su recorrido utilizando el siguiente vocabulario: a la derecha, a la izquierda, arriba, abajo.</p> <p>Ruta 1 <input type="text"/></p> <p>Ruta 2 <input type="text"/></p>
Pr2-1TA81	<p>La escuela está en la casilla (H, 5).</p> <p>Para ir de la escuela a la casa debe desplazarse una casilla hacia la izquierda, luego 4 casillas hacia abajo, y finalmente, 5 casillas hacia la izquierda. Dibuja la casa en la casilla correspondiente.</p> <p>La iglesia está ubicada en la casilla (C, 7). Dibuja la iglesia en la casilla correspondiente.</p> <p>Describe un trayecto de la escuela hasta la iglesia:</p> <p>_____</p> <p>_____</p> 

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

Tabla 30: Descripciones de la forma como se presentan los desplazamientos en la tabla 29.

		Descripción
Etiqueta	Pr1-1TA86	Se invita a realizar un desplazamiento siguiendo una trayectoria previamente demarcada para ir desde un punto inicial a uno final. En el que, al describir el desplazamiento a partir de flechas, lo que se indica es el sentido de cada tramo en la trayectoria. Para lo cual, se utiliza como eje de referencia una cuadrícula que contribuye a señalar un tipo de movimiento, así como a identificar localizaciones de objetos. Todo lo anterior muestra que, el cambio de posición siguiendo líneas horizontales y verticales para este caso permite aproximar de manera intuitiva al movimiento de traslación.
	Pr2-1TA81	Se demarca la ubicación específica de un objeto a partir de una cuadrícula en la que se detallan coordenadas ordenadas por columnas (señaladas por las letras de la A hasta la J) y filas (demarcadas por los números del 1 hasta el 7), de tal forma que, al describir la secuencia de los desplazamientos a partir de cantidades específicas de casillas recorridas de manera vertical u horizontal, se pueda verificar este mediante la posición final en la que quede ubicado el objeto. Lo cual indica que, un desplazamiento se corrobora a partir de la comparación entre la posición inicial y final de un objeto teniendo en cuenta la descripción del recorrido realizado. Lo anterior propende por alcanzar nociones relacionadas con la traslación.

Las tareas anteriores, se relacionan de manera implícita con el movimiento de traslación, pues a partir del rastreo que se realiza para delimitar o recorrer una trayectoria permite que se aluda a la habilidad de coordinación ojo - motor de modo que, en Pr1-1TA86 se hace corresponder cada fracción del camino demarcado por las casillas de la cuadrícula, con una flecha que indica su dirección en el recorrido, mientras que en Pr2-1TA81 se demarca el trayecto teniendo en cuenta que al moverse se determina un sentido y una cantidad de unidades específicas. Es así como, en ambas se debe ir desde un lugar a otro.

En concordancia con lo anterior y en aras de reconocer la orientación en la que se ubican los trazos que permiten identificar el recorrido de un desplazamiento, se alude a la percepción de la posición en el espacio, ya que en las tareas se indica el sentido del desplazamiento (derecha, izquierda, arriba u debajo), de modo que, en Pr1-1TA86 se tiene en cuenta la dirección de los segmentos que describen el recorrido, así como, su representación

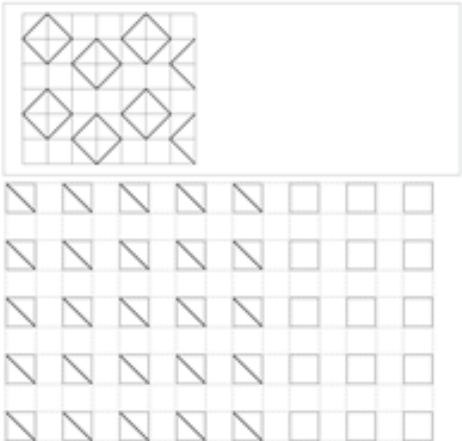
mediante flechas. Y en Pr2-1TA81 la ubicación de un objeto o la descripción de un desplazamiento según la posición en relación con el plano y el sujeto que observa.

En el mismo orden de ideas, se identifican unidades figurales de tal forma que en Pr1-1TA86 se reconoce puntos (con los cuales se demarcan la salida y llegada del desplazamiento) y segmentos (con los cuales se representa una trayectoria), además, en Pr2-1TA81 se identifica un plano cartesiano con escala vertical numérica y horizontal alfabética. A su vez, el enunciado que presentan en cada una de las tareas posibilita la identificación de la aprehensión discursiva, pues en Pr1-1TA86 se determina el propósito de cada uno de los trazos y objetos que conforman la representación visual, indicando un desplazamiento con el cual se alude implícitamente al movimiento de traslación, permitiendo con ello, referirse a la orientación de un desplazamiento mediante su designación verbal (a la derecha, a la izquierda, etc.) de tal forma que, se asocie la representación visual de un objeto con aserciones (afirmación). Mientras que, en Pr2-1TA81 se señala el orden en el que se deben considerar las coordenadas, lo cual posibilita que, se pueda verificar la ubicación de un objeto en el plano, de igual forma propicia corroborar un desplazamiento a partir de su descripción en prosa. De manera que, corresponda con una trayectoria que permite ir desde un punto de partida a un punto de llegada.

Se considera ahora la rotación y reflexión en figuras geométricas, mediante la utilización de material manipulativo con el cual se invita a girar y completar figuras. Tal como se muestra en seguida.

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

Tabla 31: Acercamiento intuitivo a la reflexión axial y rotación mediante el recorte de baldosas.

Etiqueta	Pr2-1TA85
Contenido	<p data-bbox="485 423 1190 483">El enanito de mayor edad quiere instalar un piso nuevo en la sala de la casa para la gran fiesta de Blancanieves. Él comenzó muy bien, pero luego perdió su plano y ya no sabe cómo poner las baldosas y poder seguir con los patrones.</p> <p data-bbox="485 495 1126 515">Recorta pequeñas baldosas y colócalas de forma adecuada para cumplir con el patrón en todo el piso.</p> 
Descripción	<p data-bbox="485 983 1259 1317">Se propone completar un patrón a partir de la adecuación de recortes de cuadros, de manera que se invita a manipularlos mediante giros para ubicarlos en relación con la posición de otro u otros. Al estar el patrón descrito sobre una plantilla con cuadrículas permite establecer relación entre las figuras que lo integran teniendo en cuenta las distancias señaladas a partir de celdas. La anterior tarea permite que, a partir de la adecuación de los cuadros se acerque al giro y con él a la aproximación de la rotación de figuras sobre uno de sus vértices, además, al iniciar a completar el patrón desde una línea recta vertical que muestra las mitades de dos figuras, se aproxima intuitivamente a la identificación de figuras simétricas y con ello a la reflexión axial.</p>

La tarea hace referencia al reconocimiento de la percepción figura-fondo, pues se debe reconocer los trazos que determinan el patrón, de modo que, al ignorar la cuadrícula se centre la atención en los cuadriláteros identificando la forma en la que estos están ubicados (sobre uno de sus vértices), pero, al considerarla se identifiquen configuraciones de triángulos en las que la unión de sus diagonales forman los cuadriláteros.

Ahora bien, para completar el patrón se alude a la percepción de relaciones espaciales relacionando la posición de los cuadriláteros con ellos mismos, tomando como referencia la ubicación de cada uno de sus lados en las celdas de la cuadrícula. Lo cual permite que al comparar las posiciones de las figuras se pueda identificar y seguir el patrón.

En lo que se refiere a las aprehensiones, se aborda la perceptiva en el reconocimiento de las unidades figúrales 0D (vértices de las figuras) 1D (segmentos que integran las figuras) y 2D (triángulos y cuadriláteros). Identificando que, los triángulos son subfiguras de los cuadriláteros y a su vez los cuadriláteros están compuestos por las diagonales de las celdas de la cuadrícula, lo cual genera que se detallen la subfiguras.

Ahora bien, desde la operatoria se deben aplicar giros necesarios a las figuras para hacerlas encajar correctamente en un espacio, tomando como referente la posición de otras figuras. Cabe anotar que, los enunciados que acompañan la tarea indican la manipulación de material que representan figuras geométricas con las cuales se debe completar el patrón. De ahí que, al especificar moverlas indica que se coloquen de forma adecuada en un espacio determinado para completar el patrón.

Con todo lo presentado en este apartado se precisa lo siguiente, las tareas que se aproximan implícitamente a la traslación lo realizan mediante la identificación de la dirección, el sentido o ambas. Haciendo uso en algunos casos de figuras geométricas 1D (líneas rectas) o 0D (puntos) para seguir o describir un movimiento.

Por el contrario, no se considera el uso de figuras geométricas bidimensionales como el elemento a desplazar, siempre lo hacen tomando como referencia algún objeto del medio circundante (ser humano, caracol, etc.) lo cual, hace que también se enfatice en la traslación pues el objeto al desplazarse no cambia ni su forma ni su tamaño. Sin embargo, se aísla del reconocimiento de las propiedades que permanecen invariantes en una figura al aplicar una traslación, del mismo modo, no propicia establecer relaciones entre ellas impidiendo acercarse a la comprensión de las características del movimiento mediante comparación de figura inicial e imagen. Es decir, no promueven el reconocimiento de las posibles formas de operar con una figura mediante el cambio de posición.

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

Ahora bien, caso contrario ocurre cuando se alude a la rotación y reflexión pues se presenta mediante la utilización de figuras geométricas 1D (segmentos) y 2D (polígonos) posibilitando mediante el reconocimiento de un patrón figuras con igual forma y tamaño en diferentes posiciones. Aunque al hacer uso de material manipulativo para seguir el patrón (recortes de figuras) podría dificultar la comprensión de las características de la reflexión en cuanto a la identificación del eje de simetría y colocación precisa de las unidades figurales que propician observar el reflejo de la figura inicial. No obstante, se debe aclarar que se alude a la reflexión a partir de figuras simétricas.

Se hace preciso señalar que, en todas las tareas se hace uso de cuadrículas como elementos claves para la ubicación de trazos o descripción de los mismos.

Tabla 32: cantidad de cruces presentados en las tareas de los libros de textos PREST y Proyecto Sé (RTFBMAITI).

		Categorías de análisis																	
		Cruce de las habilidades visuales - espaciales con la comprensión perceptiva						Cruce de las habilidades visuales - espaciales con la comprensión Operatoria (operación de posición)						Cruce de las habilidades visuales - espaciales con la comprensión discursiva					
		CMP	PFP	CPP	PEP	PRP	DVP	CMO	PFO	CPO	PEO	PRO	DVO	CMD	PFD	CPD	PED	PRD	DVD
PREST	%	80	100	0	75	100	100	0	100	0	0	100	100	75	0	0	75	100	0
Proyecto Sé	%	20	0	0	25	0	0	0	0	0	0	0	0	25	0	0	25	0	0
Total cruces		5	1	0	4	2	1	0	1	0	0	2	1	4	0	0	4	2	0

Teniendo en cuenta lo presentado en la tabla anterior, se reconoce que los cruces CMP, PEP, CMD y PED se ven reflejados en los libros de textos, considerando que en Proyecto Sé aparecen con porcentajes inferiores a PREST.

Es importante mencionar que, solo en PREST se presentan los cruces PFP, PRP, DVP, PFO, PRO, DVO y PRD. De lo cual se infiere que, en las tareas de Proyecto Sé, no se propone identificar el conjunto de figuras que describen una configuración geométrica, del

mismo modo, no se propicia establecer relaciones entre los diferentes cambios de orientaciones (dirección y sentido) en una sucesión de movimientos a personas u objetos.

Así mismo, no se invita a realizar varios tipos de trazos de tal forma que, al rastrearlos se pueda ir desde una posición inicial a la final y viceversa. Además de, aplicar o identificar uno o varios tipos de movimientos a una figura en repetidas ocasiones.

En este mismo orden de ideas, se evidenció que los cruces CPP, CMO, CPO, PEO, PFD, CPD y DVD no se presentan en las tareas de los libros de textos, lo cual pone de manifiesto la necesidad de abordar las transformaciones mediante el uso de figuras geométricas ya que propician identificar la conservación de la forma y el tamaño, de modo que, al operar con ellas mediante el cambio de posición se reconozcan algunas de sus características invariantes.

Se hace importante señalar que, en este apartado desde PREST se promueven los cruces desde el acercamiento a la traslación, rotación y reflexión, en cambio en Proyecto Sé sólo se alude a la traslación.

Por otro lado, desde los libros se relaciona de manera explícita con lo propuesto por el MEN (2006) en cuanto al reconocimiento de nociones de horizontalidad y verticalidad en distintos contextos, ya que las tareas aluden a la descripción, rastreo o aplicación de un desplazamiento a partir del reconocimiento de la dirección (horizontal o vertical) o el sentido (izquierda, derecha, arriba, abajo) del mismo. Sin embargo, de forma implícita en PREST se invita reconocer simetrías en situaciones de diseño y a aplicar giros sobre una figura a partir de material manipulativo. Todo lo anterior visto desde el conjunto de grados de 1° a 3°.

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

CONCLUSIONES

En este capítulo se precisan algunas ideas relacionadas con la forma de abordar las transformaciones isométricas en libros de textos de básica primaria, a partir de procesos de visualización. Lo anterior, se detalla teniendo en cuenta los objetivos propuestos en relación con algunos elementos obtenidos a lo largo del desarrollo de la indagación.

La descripción de las formas como los libros de textos abordan situaciones relacionadas con las transformaciones isométricas, resulta ser una actividad matemática fundamental en el proceso de tratamiento y discriminación de las figuras geométricas. Pues, se precisa como acción necesaria caracterizar tareas en las que se identifiquen y detallen algunos elementos y propiedades de las transformaciones isométricas, que permitan visualizar la correspondencia de vértices homólogos y predecir formación de líneas paralelas, secantes o perpendiculares aludiendo al tipo de movimiento que se ha aplicado. De igual forma, se hace necesario, propiciar acciones que apunten al reconocimiento de configuraciones geométricas que posibiliten distinguir la figura resultante a partir de una dada.

Cabe anotar que, es indispensable proponer situaciones en las que se haga uso de más de un tipo de movimiento; ya que esto promueve que se puedan establecer tanto relación entre figuras como entre movimientos. De modo que, se puedan validar teoremas como por ejemplo la aplicación de dos simetrías respecto a ejes paralelos da como resultado una traslación al comparar la figura inicial con su última imagen, de manera que, se presenten las transformaciones cada una por separado, pero también se privilegie la articulación entre ellas.

Ahora bien, al considerar la revisión de los libros de textos, se hace importante establecer categorías de análisis que permitan determinar algunos criterios sobre la forma como se puede acceder al desarrollo de las transformaciones isométricas desde el proceso de

visualización. Para esto, es indispensable reconocer tres de los cuatro tipos de aprehensiones propuestas por Duval (1994, 1995, 1999), perceptiva, operatoria y discursiva. Pues favorecen potenciar el papel heurístico que juegan las figuras en el desarrollo de una situación determinada. Promoviendo la identificación de las unidades figúrales que determinan la organización de una figura, de modo que, al operar sobre estas mediante un cambio de posición al trasladarlas, rotarlas o reflejarlas, se corroboren algunas propiedades que permanecen invariantes en una figura al aplicar una isometría. Constituyéndose los enunciados que acompañan las tareas en un aspecto relevante para el desarrollo de la misma ya que puede favorecer u obstaculizar la descripción de teoremas, propiedades etc., en la medida que se establezca relación con aquello que se representa.

Del mismo modo, desde Del Grande (1990) se consideran las habilidades visuales para el desarrollo del proceso de visualización, pues se potencian procesos cognitivos que aluden al rastreo, identificación y discriminación de figuras en diferentes formas y posiciones, posibilitando el procesamiento y la organización de la información que se percibe en una representación figural.

Lo anterior, permite el diseño de un instrumento de análisis con el cual se identifiquen las formas como desde un libro de texto se puede acceder a las transformaciones isométricas desde el proceso de visualización. De lo cual se resalta el cambio de focalización asociado a figuras superpuestas y yuxtapuestas, así mismo, a la discriminación de los elementos que permiten modificaciones de posición en figuras y al reconocimiento de trazos y figuras bidimensionales como mediadores para un acercamiento intuitivo a las transformaciones isométricas.

En este sentido, al propender por la revisión de libros de textos escolares, se considera necesario valorarlos a partir de fundamentos teóricos que priorizan el potencial de este

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

recurso en cuanto al contenido que presenta. Puesto que, se genera una ganancia en materia pedagógica dado que median en el proceso de enseñanza y de aprendizaje dentro y fuera del aula. De modo que, al considerar el contenido del recurso, en este caso las transformaciones isométricas, se reconoce como elemento fundamental darle prioridad al modo como se presentan las figuras ya sea en el plano o en el espacio, el uso de elementos externos (demarcación de rectas paralelas, perpendiculares, cuadrículas, etc.) como medio para la verificación o aplicación de un movimiento, la pertinencia de los enunciados en la búsqueda por el reconocimiento de propiedades, la discriminación de las diferentes formas de ver en una figura, el reconocimiento de las relaciones de posiciones entre figuras, entre otros aspectos propios del proceso de visualización que se deben considerar al abordar el pensamiento espacial.

Es importante aclarar que, aunque los libros de textos presenten unidades o sesiones dedicadas al pensamiento espacial en las que se detallan algunas o todas las transformaciones isométricas (traslación, rotación, reflexiones) no implica que los elementos que integran las tareas (enunciados, representación visual) propicien el reconocimiento de las propiedades de cada transformación así como, la comprensión de relación de congruencias entre figuras como elemento característico de las isometrías. De forma que, al comparar figuras se discrimine en aquellas que sean congruentes un tipo de isometrías que permita ir desde la figura inicial a su imagen y viceversa.

Con todo lo dicho hasta aquí, al revisar libros de textos de matemáticas de básica primaria en el abordaje del pensamiento espacial específicamente en las transformaciones isométricas, se hace necesario caracterizar la forma como estos presentan y articulan los enunciados y representaciones visuales, ya que son elementos fundamentales para propiciar procesos de visualización que permitan comprender el papel heurístico que juegan las figuras en el desarrollo de una tarea lo cual permite potenciar dicho pensamiento.

Cabe resaltar qué la revisión de textos escolares es un buen campo para la investigación dado que, permite retroalimentar la práctica de los docentes en formación y en ejercicio. Lo anterior porque, se reflexiona sobre el potencial que poseen estos recursos, pues son utilizados como mediadores en el proceso de enseñanza y de aprendizaje, por lo que es necesario hacer una revisión a su estructura para identificar si presenta una temática o aprendizaje en particular, para luego centrar la mirada en la forma como se están abordado; de esta forma resulta valioso desde la geometría poner en correspondencia la representación visual del objeto representado, con el enunciado que lo acompaña, reconociendo la intención, alcance y limitación del contenido.

Finalmente, lo antes mencionado permite no solo caracterizar el potencial y las limitaciones de las tareas, sino también, de todo lo que propone el libro de texto (ejemplos, explicaciones, etc.) de modo que, se revise la finalidad de cada uno de los aspectos que integran el contenido analizado (enunciados, trazos, figuras, gráficos, esquemas, etc.), posibilitando canalizar por medio de otros recursos aquello que no logran abarcar los libros de textos. Dado que, la revisión sirve como mecanismo para reconocer las diferentes formas como se podría abordar un objeto, pero también, posibilita identificar que algunas tareas pueden ser direccionadas desde otro foco, de manera que, añadiendo, quitando o re-estructurando el enunciado o la figura, se pueda aproximar a la intención que posea el docente.

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

RECOMENDACIONES

Al ser el libro de texto un recurso valioso para la planificación de las actividades pedagógicas en el aula, se sugiere la revisión minuciosa de éste antes de ser seleccionado por los docentes para el trabajo con estudiantes, de manera que, no baste con hacerle una revisión a la tabla de contenido para identificar su estructura y los objetos de conocimiento que este aborda, sino también, extender la mirada a los detalles de cómo se están desarrollando cada actividad.

De esto es importante mencionar que, si bien la indagación en cuestión centra su atención en el análisis al contenido de las tareas de libros de textos en básica primaria, propiciando la reflexión frente a la forma como se presentan las tareas para el abordaje de las transformaciones isométricas medidas por el proceso de visualización, no cubre toda la planeación curricular del docente ni atiende de manera inmediata las dificultades que puedan presentar los estudiantes, puesto que no se contempló en la indagación. Por lo cual, se recomienda hacer uso de otros tipos de actividades ya sean mediadas por material manipulativo, software académico, etc., que propicien establecer relaciones entre figuras y entre los tipos de isometrías, de manera que, se aproxime a la comprensión de las propiedades y teoremas de estas.

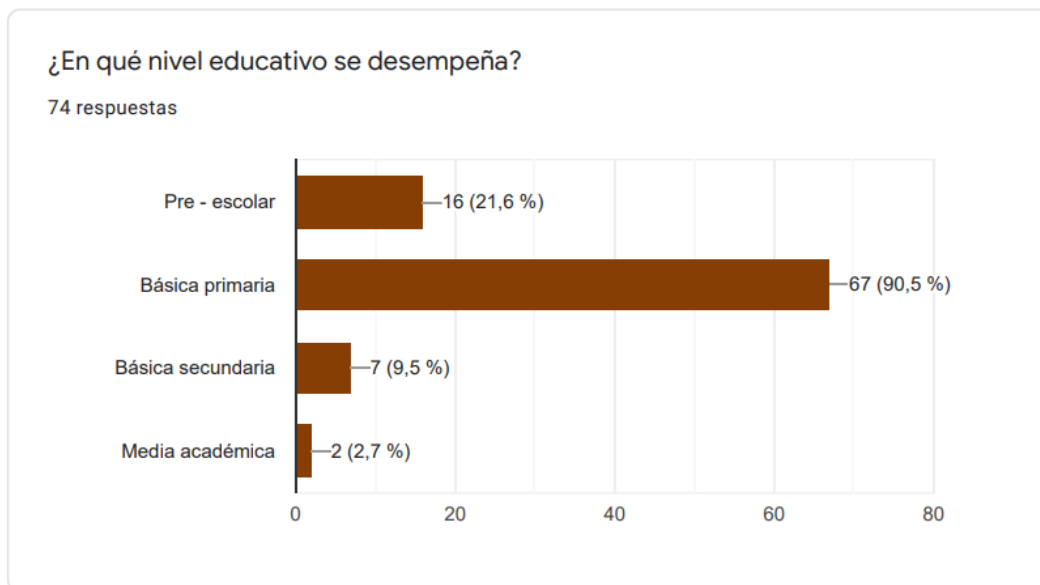
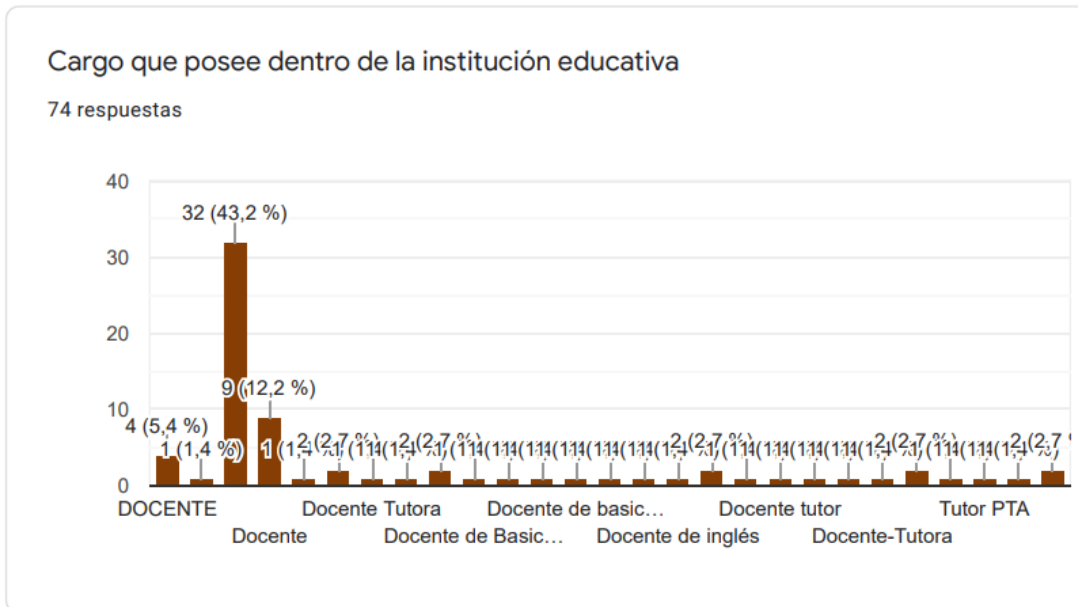
Por tal razón, es pertinente extender la mirada hacia futuras investigaciones, en las que se vincule el potencial del contenido de los libros de textos con la forma como los docentes los usan en el aula de clase para la orientación con los estudiantes. De manera que, se pueda comparar el currículo que estos proponen con lo que logran desarrollar los estudiantes al hacer uso de estos.

Del mismo modo, sería oportuno indagar sobre la forma como se presentan los contenidos en los libros de textos utilizados por los establecimientos oficiales y privados del

distrito de Buenaventura, y cómo los directivos y docentes consideran que estos han favorecido el desempeño de los estudiantes en las pruebas de estado. De manera que, se pueda valorar la pertinencia de los libros de textos en relación con su potencial para mejorar los desempeños de los estudiantes de acuerdo con los parámetros establecidos por el ICFES.

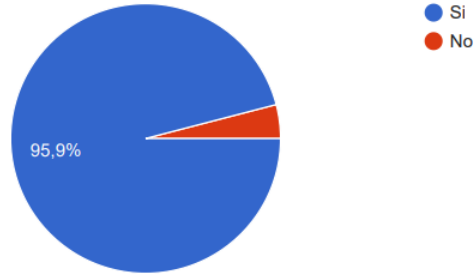
ANEXOS

1. Resultados de la encuesta para la selección de los libros de textos.



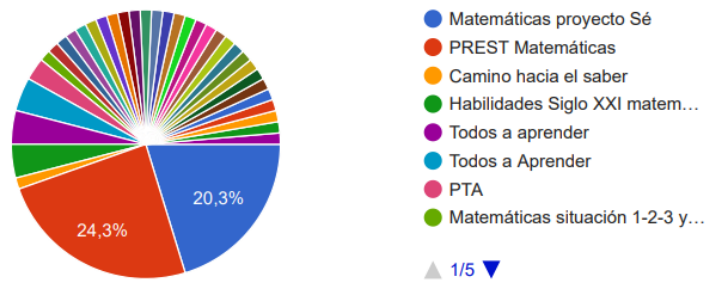
¿La institución Educativa que representa está utilizando libro de texto de matemáticas?

74 respuestas



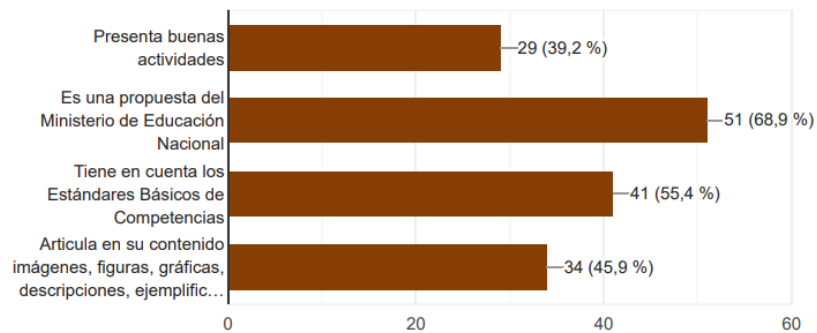
¿Qué libro de texto de matemáticas en básica primaria es el más utilizado actualmente en la institución?

74 respuestas



¿Qué razones justifican la elección del libro de texto?

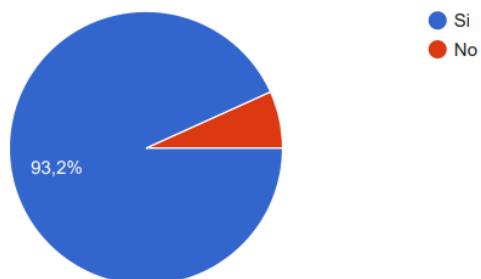
74 respuestas



Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

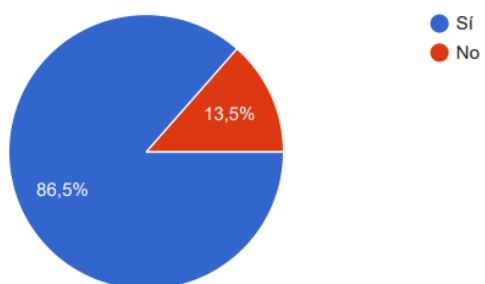
¿El libro de texto está siendo utilizado por los docentes para el trabajo escolar desde casa durante el año lectivo 2020?

74 respuestas



¿El libro de texto está siendo utilizado por los estudiantes para el trabajo escolar desde casa durante el año lectivo 2020?

74 respuestas



2. Rejilla de análisis

2.1. Cambio de focalización bidimensional asociado a la superposición y yuxtaposición de figuras geométricas

Categorías de análisis		Aprehensiones		
		Perceptiva	Operatoria	Discursiva
Habilidades visuales - espaciales	Coordinación ojo – motor	Pr4-5TA88 Sé4-2TA117 Sé3-3TA97	Pr4-5TA88 Sé4-2TA117 Sé3-3TA97	
	Percepción figura-fondo	Sé3-2TA99 Sé3-4TA99 Sé3-3TA99 Sé3-2TA119 Sé4-4TA123 Pr4-5TA88 Sé4-4TA117 Sé4-4TA119 Sé3-3TA97 Sé4-3TA121	Sé3-2TA99 Sé3-4TA99 Sé4-4TA119 Pr4-5TA88 Sé3-3TA97	Sé3-2TA119 Sé4-4TA123
	Constancia de percepción	Sé3-2TA99 Sé3-4TA99 Sé3-4TA101 Sé3-2TA119 Pr4-5TA88 Sé3-3TA99 Sé4-2TA117 Sé4-3TA121 Sé4-4TA123	Pr4-5TA88 Sé4-2TA117 Sé4-4TA119 Sé3-3TA97	Sé3-2TA99 Sé3-4TA99 Sé3-4TA101 Sé3-3TA99 Sé4-3TA121

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

		Sé4-4TA117 Sé4-4TA119 Sé3-3TA97		
	Percepción de la posición en el espacio	Pr4-5TA88 Sé4-3TA121 Sé4-4TA117	Sé3-2TA99 Sé3-4TA99 Sé3-4TA101 Pr4-5TA88 Sé3-3TA99 Sé4-2TA117 Sé4-3TA121 Sé4-4TA117 Sé3-3TA97	Sé3-3TA99 Sé4-2TA117 Pr4-5TA88 Sé4-3TA121 Sé4-4TA117 Sé3-3TA97
	Percepción de relaciones espaciales	Sé4-4TA119 Sé3-3TA97	Pr4-5TA88 Sé4-4TA119 Sé3-3TA97	Pr4-5TA88 Sé3-2TA119 Sé4-4TA119
	Discriminación visual	Sé3-2TA119 Sé4-4TA123 Pr4-5TA88 Sé4-4TA119 Sé4-2TA117 Sé4-3TA121	Pr4-5TA88 Sé3-2TA119 Sé4-4TA123 Sé4-2TA117	

2.2. Discriminación de los elementos que posibilitan modificaciones de posición en figuras geométricas.

Categorías de análisis		Aprehensiones		
		Perceptiva	Operatoria	Discursiva
Habilidades visuales - espaciales	Coordinación ojo – motor	Sé3-1TA96	Sé3-1TA96	
		Sé3-2TA96	Sé3-2TA96	
		Sé3-3TA101	Sé3-3TA101	
		Sé3-1TA98	Sé3-1TA98	
		Sé4-1TA116	Sé4-1TA116	
		Sé4-1TA120	Sé4-1TA120	Sé4-1TA116
		Sé3-2TA101	Sé3-2TA101	Sé4-1TA120
		Sé5-2TA95	Sé5-2TA95	Pr4-1TA89
		Pr4-6TA88	Pr4-6TA88	Sé3-4TA97
		Pr4-1TA89	Pr4-1TA89	Sé5-3TA97
		Pr3-4TA85	Pr3-4TA85	Sé4-4TA121
		Sé5-3TA97	Sé3-4TA97	Sé4-1TA118
		Sé4-4TA121	Sé5-3TA97	Pr3-4TA85
		Sé4-2TA121	Sé4-4TA121	
		Sé4-5TA121	Sé4-2TA121	
Sé4-3TA117	Sé4-5TA121			
	Sé4-3TA117			
	Percepción figura-fondo	Pr4-1TA89	Pr4-1TA89	
	Constancia de percepción	Sé3-3TA101	Sé3-3TA101	
		Pr4-6TA88	Pr4-6TA88	
		Pr3-1TA84	Pr3-1TA84	
		Sé3-4TA97	Sé5-3TA97	Sé3-4TA97
		Sé5-3TA97	Sé4-4TA121	
		Sé4-4TA121	Sé4-1TA118	
		Sé4-1TA118	Sé4-5TA121	
		Sé4-5TA121		

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

	Percepción de la posición en el espacio	Sé3-1TA96 Sé3-2TA96 Sé3-3TA101 Sé3-1TA98 Sé4-1TA116 Sé4-1TA120 Sé3-2TA101 Sé5-2TA95 Pr4-6TA88 Pr3-1TA84 Pr4-1TA89 Sé3-4TA97 Sé5-3TA97 Sé5-3TA95 Sé4-2TA121 Sé4-1TA118 Sé4-3TA117	Sé3-1TA96 Sé3-2TA96 Sé3-3TA101 Sé3-1TA98 Sé4-1TA116 Sé4-1TA120 Sé3-2TA101 Sé5-2TA95 Pr3-1TA84 Pr4-1TA89 Sé5-3TA97 Sé5-3TA95 Sé4-2TA121 Sé4-1TA118 Sé4-3TA117	Sé3-1TA96 Sé3-2TA96 Sé3-3TA101 Sé3-1TA98 Sé4-1TA116 Sé4-1TA120 Sé4-1TA120 Sé3-2TA101 Sé5-2TA95 Pr3-1TA84 Pr3-1TA84 Sé3-4TA97 Sé5-3TA95 Sé4-2TA121 Sé4-1TA118 Sé4-3TA117
	Percepción de relaciones espaciales	Sé4-4TA121 Sé4-2TA121 Sé4-5TA121	Sé3-2TA96 Sé3-3TA101 Pr4-6TA88 Pr4-1TA89 Sé4-4TA121 Sé4-2TA121 Sé4-5TA121	Sé3-2TA96 Pr4-6TA88 Sé3-3TA101 Sé4-4TA121 Sé4-5TA121
	Discriminación visual	Sé3-2TA101 Sé5-2TA95 Sé3-4TA97 Pr4-6TA88 Pr3-4TA85 Sé5-3TA97 Sé5-3TA95 Sé4-2TA121 Sé4-3TA117	Sé3-4TA97 Pr4-6TA88	Sé3-4TA97 Sé5-3TA97 Sé5-3TA95 Pr4-6TA88

2.3. Reconocimiento de trazos y figuras bidimensionales como mediadores para un acercamiento intuitivo a las transformaciones

Categorías de análisis		Aprehensiones		
		Perceptiva	Operatoria	Discursiva
Habilidades visuales - espaciales	Coordinación ojo – motor	Sé1-4TA105 Pr1-1TA86 Pr1-1TA90 Pr2-1TA81 Pr1- 1TA87	Pr1- 1TA87	Sé1-4TA105 Pr1-1TA86 Pr1-1TA90 Pr2-1TA81
	Percepción figura-fondo	Pr2-1TA85	Pr2-1TA85	
	Constancia de percepción			
	Percepción de la posición en el espacio	Sé1-4TA105 Pr1-1TA86 Pr1-1TA90 Pr2-1TA81		Sé1-4TA105 Pr1-1TA86 Pr1-1TA90 Pr2-1TA81
	Percepción de relaciones espaciales	Pr2-1TA85 Pr1- 1TA87	Pr2-1TA85 Pr1- 1TA87	Pr2-1TA85 Pr1- 1TA87
	Discriminación visual	Pr1- 1TA87	Pr1- 1TA87	

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

REFERENCIAS

- Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, (3), 205-224. Recuperado de <https://link.springer.com/content/pdf/10.1023/A:1009903206236.pdf>
- Barrantes, M., Balletbo, I., y López, M. (2014). La componente visual de la geometría en los libros de textos de secundaria. *Revista Premisa*, 16 (62), 25 - 35. Recuperado de <https://n9.cl/c8fi1>
- Barrantes, M., y Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto*, 27(1), 55-71. Perú. Recuperado de <https://n9.cl/mep29>
- Bohórquez, M., Cuervo, S., y Urueta, L. (2018). *La geometría en el primer ciclo de la educación básica primaria: análisis de contenido de una serie de textos escolares de matemáticas* (Tesis de pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C, Colombia. Recuperado de <https://n9.cl/6j80s>
- Bustamante, C., y Giraldo, W. (2015) *Los procesos de construcción, visualización y razonamiento en el desarrollo del pensamiento geométrico: análisis de un texto escolar* (Tesis de pregrado). Universidad del Valle sede pacifico, Santiago de Cali, Colombia. Recuperado de <https://n9.cl/zby9b>
- Camargo, L. (En prensa). Estrategias cualitativas de investigación en Educación. Recursos para la captura de información y el análisis. No publicado.
- Cárcamo, D. (2012). *Uso de los libros de texto de matemáticas en el proceso de enseñanza: Un análisis de caso comparado* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Tegucigalpa, México. Recuperado de <https://n9.cl/mxop>

- Cuero, G. y Manyoma, A. (2019). Transformaciones geométricas a partir de la semejanza y la congruencia. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 149-157). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado de <https://n9.cl/qziwvk> el 07 - 01 - 2020
- Del Grande, J. (1990). Spatial Sense. *National Council of Teachers of Mathematics*, 37(6), 14-20. Recuperado de <https://n9.cl/og7y>
- Duval, R. (1994). Les differents fonctionnements d`une figure. *REPERES. IREM*, 17, 121 – 138. Recuperado de <https://n9.cl/ail47>
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: kinds of representation and specific processings. *Universidad Louis Pasteur, I.R.E.M. de Strasbourg, Francia*
- Duval, R. (1999). Representation, visión and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *Psychology of Mathematic Education*, 2 – 26. Recuperado de <https://n9.cl/qw30m>
- Fan, L., Trouche, L., Qi, C., Rezat, S., y Visnovska, J. (2018). Research on Mathematics Textbooks and Teachers' Resources Advances and Issues. *Springer*. Recuperado de <https://n9.cl/78k9o>
- Fernández, C., y Baptista, P. (2014). Origen de un proyecto de investigación cuantitativa, cualitativa o mixta: la idea. En A. Obregón (Ed.), *Metodología de la investigación* (pp. 1 – 589). México: McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES. Recuperado de <https://n9.cl/65f>
- Godino, J. y Ruiz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestro*. Universidad de granada. Granada, España. Recuperado de: https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf.

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2013/hdl_10803_116213/lmu1de1.pdf

Jaime, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento (Tesis doctoral). Universitat de València, España. Recuperado de <https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Jai93.pdf>

Julio, L. (2014). Las transformaciones en el plano y la noción de semejanza. (Tesis de posgrado). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C., Colombia. Recuperado de <https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/74974/1186931.2014.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Marmolejo, A. y Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación matemática*, 24 (3), 1 – 26 Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/13251/1/Marmolejo2012La.pdf>

Marmolejo, G. (2007). *Algunos Tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras. Procesos de visualización y factores de visibilidad*. (Tesis de magíster) no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Marmolejo, G., y González, M. (2013). Función de la visualización en la construcción del área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis y su aplicación a un libro de texto. *Revista Integración*, (31), 87–106. Recuperado de <https://n9.cl/q9wo>

Marmolejo, G., y Vega, M. (2005). Geometría desde una perspectiva semiótica: visualización, figuras y áreas. *Memorias XV Encuentro de Geometría y III encuentro de Aritmética*. 661-693. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado de <https://n9.cl/348um>

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. *Investigación en Educación Matemática*, 13, 5-20. Recuperado de <https://n9.cl/rxz6h>

- MEN (1998). Lineamientos Curriculares Matemáticas. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de <https://n9.cl/mlgt6>
- MEN (2006) Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de <https://n9.cl/cey3>
- Mora, D. (2016). Concepción y características de los libros de texto y otros materiales para el aprendizaje y la enseñanza. *Scielo*, 5 (1), 1 – 25. Recuperado de <https://n9.cl/cbrz>
- Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de la tecnología*. (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona. Bellaterra, España. Recuperado de:
- Páramo, P. (2019). Investigación cualitativa vs cuantitativa. *Educación y cultura*, 132, 8 – 15. Recuperado de <https://n9.cl/lyoyc>
- Peña, A. (2010). *Enseñanza de la geometría con tic en educación secundaria obligatoria (Tesis de doctorado)*. Universidad nacional de educación a distancia, Madrid, España. Recuperado de <https://n9.cl/y8tq4>
- Ramírez, T. (2002). El Texto escolar como objeto de reflexión e investigación. *Docencia Universitaria*, 3 (1), 101 – 124. Recuperado de <https://n9.cl/05gz>
- Rueda, L., Ríos, C., y Martínez, D. (2009). *Aportes a la construcción de la noción de espacio de los estudiantes del grado 5° de la Institución Educativa Alberto Lebrún Múnera* (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia. Recuperado de <https://n9.cl/wla0m>
- Thaqi, X., y Gimenez, J. (2016). Geometrical Transformations in the Mathematics Textbooks in Kosovo and Catalonia. *Universal Journal of Educational Research* 4(9): 1944-1949. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/306436794_Geometrical_Transformations_In_The_Mathematics_Textbooks_In_Kosovo_and_Catalonia

Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria, en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización

Trouche, L. (2018). Comprender el trabajo de los docentes a través de su interacción con los recursos de su enseñanza - una historia de trayectorias. *Educación Matemáticas*, 30(3), 1-32 recuperado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v30n3/1665-5826-ed-30-03-9.pdf>

Uribe, S., Cárdenas, O., y Becerra, J. (2014). Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. *Educación Matemática*, 24(2), 135 – 160 recuperado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v26n2/v26n2a5.pdf>