



**Una propuesta de aula desde el enfoque de la educación matemática realista
para el aprendizaje de algunos principios del Sistema de Numeración Decimal en
estudiantes de segundo grado de la educación básica**

Brenda Viviana Paladines Ordoñez

**Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas
Santiago de Cali, octubre 2018**



**Una propuesta de aula desde el enfoque de la educación matemática realista
para el aprendizaje de algunos principios del Sistema de Numeración Decimal en
estudiantes de segundo grado de la educación básica**

Brenda Viviana Paladines Ordoñez

Código: 1325378

Director de tesis:

Mg. Cristian Andrés Hurtado

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Santiago de Cali, octubre 2018

*Dedicada a Dios y a mis padres,
por su gran apoyo y amor que me brindan cada día.*

*Agradecimientos a mi tutor Cristian Hurtado,
por su gran paciencia y colaboración para que esto fuera posible.*

Tabla de contenido

Introducción.....	8
1. Delimitación del campo de estudio	10
1.1 Antecedentes.....	10
1.2 Planteamiento del problema	14
1.3 Objetivos.....	16
1.3.1 Objetivo general	16
1.3.2 Objetivos específicos	16
1.4 Justificación.....	16
2. Marco conceptual de referencia.....	21
2.1 Referente curricular.....	21
2.2 Referente didáctico	25
2.2.1 El sistema de numeración decimal o indoarábigo.....	26
2.2.2 El enfoque de la Educación Matemática Realista.....	29
2.2.3 Sobre el uso de los artefactos.....	32
3. Diseño metodológico y análisis de resultados	37
3.1 Enfoque y proceso de estudio	37
3.2 Población	39
3.3 Instrumento para la recolección de información	39
3.4 Descripción de propuesta de aula	40
3.5 Metodología de la implementación de la propuesta de aula.....	44
3.5 Análisis de los resultados.....	44
3.6.1 Análisis de situación 1.....	45
<i>Análisis de la tarea 1</i>	45
<i>Análisis de la tarea 2</i>	46
<i>Análisis de la tarea 3</i>	52
3.6.2 Análisis de la situación 2	58
<i>Análisis de la tarea 1</i>	58
<i>Análisis de la tarea 2</i>	63
4. Conclusiones	49
Recomendaciones y sugerencias	74

Referencias.....	75
Anexos	77
<i>Anexo 1</i>	77
<i>Anexo 2</i>	91

Índice de figuras

Figura 1. Bloques multibase 10	34
Figura 2. E7 sobreponiendo los cubos en una barra	45
Figura 3. E3 sobreponiendo las barras en una placa	45
Figura 4. Respuesta de P3 a la pregunta 2, T2, S1	47
Figura 5. Respuesta de P2, a la pregunta 2, T2, S1	47
Figura 6. Respuesta de P5, a la pregunta 3, T2, S1	48
Figura 7. Representación del número 25, realizada por P5	48
Figura 8. Representación del número 25, realizado por P1	48
Figura 9. Representación del número 25, realizado por P4	49
Figura 10. Representación del número 42, realizado por P1	49
Figura 11. Representación del número 42, realizado por P3	49
Figura 12. Representación del número 30 por P5	50
Figura 13. Representación del número 200, realizado por P3	50
Figura 14. Dos representaciones del número 572, realizado por P2	51
Figura 15. Respuesta de P4, a la pregunta 9 y 10, T2, S1	52
Figura 17. Respuesta de P3, a la pregunta 1, T3, S1	52
Figura 16. Respuesta de P5, a la pregunta 1, T3, S1	52
Figura 18. Respuesta de P4, a la pregunta 2, T3, S1	53
Figura 19. Respuesta de P3, a la pregunta 3, T3, S1	53

Índice de tablas

Tabla 1. Elementos principales que configuran la propuesta de aula	43
--	----

Resumen

La enseñanza y el aprendizaje del Sistema de Numeración Decimal tiene una gran relevancia en los primeros grados de escolaridad, debido a que buena parte de este conocimiento es central para el trabajo de las matemáticas no solamente para el desempeño de la escolaridad, sino, incluso en otras áreas y en la vida misma. Sin embargo, distintas investigaciones han reportado que a los estudiantes se les dificulta su aprendizaje. Estos asuntos motivaron a que en este trabajo de grado se propusiera caracterizar los procesos de matematización que logran un grupo de estudiantes de segundo grado en la comprensión de los principios base diez y posicional del sistema de numeración decimal, para ello se implementó una propuesta de aula con base a la documentación de política pública: Estándares Básicos en Competencias Matemáticas, Derechos Básicos de Aprendizaje y Lineamientos Curriculares. También, se consideró por un lado el enfoque de la Educación Matemática Realista que además contribuyó para los análisis de las producciones de los estudiantes, por otro lado, la perspectiva de Radford (2014) sobre los artefactos, dado que en esta propuesta de aula hubo presencia central de la manipulación de los bloques multibase para ayudar a la construcción de los dos principios ya señalados.

El análisis de las producciones de los estudiantes a partir de la propuesta implementada lo que dejó notar fue que el artefacto resultó sumamente importante para la efectividad de las producciones de los estudiantes, pues, cuando había ausencia de este, obtienen más dificultades o errores en sus resultados. Asimismo, se notó que, en los niveles de matematización de la Educación Matemática Realista, los estudiantes se movilizaron entre en nivel referencial y el nivel general lo cual ocurría por la presencia o no del artefacto.

Términos clave: Sistema de Numeración Decimal, Educación Matemática Realista, principio posicional, principio base 10, propuesta de aula.

Introducción

Para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los primeros años de escolaridad se trabajan temas fundamentales como el concepto de número, que luego se seguirá trabajando a lo largo del proceso escolar convirtiéndolo en uno de los pilares de las matemáticas. Sin embargo, muchas investigaciones (Lerner, Sadovsky & Wolman, 1994, p.96 – 97), (Kammi, 1992, p.38), (Godino, 2004, p.157-187) han reportado que el proceso de enseñanza en torno a este concepto no se realiza de manera adecuada porque el énfasis suele ponerse en lo simbólico, es decir, en su representación, olvidando que hay otros aspectos que atan y son necesarios también para la construcción del concepto de número, tales como sus distintos significados: cardinal, ordinal, código (Castro & Molina, 2011,54), así como el mismo sistema de representación que permite dar cuenta de comunicar y expresar estos números. Desde esta perspectiva, se hace necesario abordar, como lo han sostenido (Martí, 2003) y Porras & Vivas (2009), la comprensión del número, sus sistemas, sus esquemas o leyes que lo gobiernan, entre otros aspectos que rebasan lo exclusivamente simbólico.

De este modo el Sistema de Numeración Decimal (SND) se convierte en un asunto central en los primeros años de escolaridad y debido a las problemáticas presentadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En este trabajo se realiza una propuesta de aula que tiene como propósito movilizar el aprendizaje de dos de seis principios fundamentales que conforman el sistema (introduce y utiliza el cero, es aditivo, es multiplicativo, orden en la posición) y en los que se va a enfatizar son el posicional y base 10. Para su diseño se toma el enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR), el cual se basa en una serie de principios que promulgan la necesidad de matematizar las situaciones del mundo que rodea a los estudiantes a partir de distintos contextos. También se pretende hacer uso de un material manipulativo, como lo son los bloques base 10, entendidos estos como artefactos desde la perspectiva de Radford (2014), que median en la construcción de conocimiento de los principios del SND que se desean movilizar en la propuesta de aula. Adicionalmente, para el diseño de la propuesta se consideran también algunos aspectos de la organización curricular que se presenta en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998),

así como las orientaciones dadas en los Estándares Básicos en Competencias de Matemáticas (MEN, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2017).

En relación con el enfoque de la EMR, es importante resaltar que este no solamente brinda importantes elementos para el diseño de la propuesta, sino que también da elementos para la implementación y el análisis de las producciones de los estudiantes cuando enfrenten dicha propuesta, en tanto que este enfoque brinda ciertos principios los cuales son: de actividad, de realidad, de niveles, de reinención, de interacción, y de orientación. El principio de niveles permite analizar el proceso de matematización que van logrando los estudiantes para conceptualizar los aspectos que se desean promover con la propuesta, se puede distinguir dos procesos de ello la matematización horizontal y la matematización vertical.

Para llevar a cabo los propósitos arriba señalados, se usa en este trabajo una metodología guiada por el enfoque cualitativo de tipo descriptivo interpretativo (Rodríguez, Gil & García, 1996), para lo cual se estructura a través de cuatro fases a saber: Preparatoria, Trabajo de Campo, Analítica e Informativa. Este diseño metodológico se considera relevante y pertinente puesto que recolecta información respecto a la observación de comportamientos naturales, discursos y respuestas abiertas de los estudiantes para luego interpretar los significados y de este modo tratar de responder a la pregunta central planteada aquí.

Así pues, la propuesta se realiza con estudiantes de grado segundo de la Básica Primaria a partir de la implementación de un diseño que centra su atención en aspectos de dos principios básicos del SND y los datos recogidos (producciones escritas, producciones discursivas: grabaciones, filmaciones, etc), a partir de ahí se procesan dichos datos a la luz de los elementos conceptuales brindados por la EMR junto con la idea de artefactos que propone Radford con el fin de realizar un análisis para reconocer los niveles de matematización a la cual los estudiantes pueden llegar por medio de la propuesta.

1. Delimitación del campo de estudio

En este capítulo se ubican los aspectos centrales que permiten guiar el desarrollo de este estudio, en este orden de ideas se presentan algunos antecedentes en relación con el Sistema de Numeración Decimal, además de estos aspectos se presenta el planteamiento del problema y los objetivos que guían el desarrollo del trabajo. Finalmente, este capítulo se cierra con algunos elementos que justifican la importancia y pertinencia del mismo.

1.1 Antecedentes

A continuación, se presentan diversos trabajos que han sido seleccionados por su interés en la enseñanza y aprendizaje del sistema de numeración decimal en los primeros años de escolaridad. En este sentido, aportan a la construcción de este trabajo, tal como se verá al final de este apartado.

Salazar & Vivas (2013) en su trabajo realizan una investigación basada en reconocer los alcances, limitaciones y posibilidades que causa la incorporación de material manipulativo (Bloques de Dienes) para la enseñanza del valor posicional de cada una cifra de un número. Para ello se implementó una secuencia didáctica que utilizaron en el Colegio San Ambrosio de Milán de la ciudad de Cali. La implementación de la propuesta se hizo mediante un estudio de caso a 13 estudiantes del grado segundo de la Educación Básica Primaria.

Este estudio está relacionado con la enseñanza del valor posicional. A través del material manipulativo se tomaron en consideración las dimensiones didáctica, histórica, cognitiva, curricular y matemática, puesto que estas permitieron la elaboración del diseño de una secuencia de tareas. Como se mencionó anteriormente este trabajo tiene una metodología de estudios de casos que guía el trabajo experimental en el aula y el posterior análisis de su implementación.

Finalmente, se logró identificar que los estudiantes no comprenden el valor de posición de una cifra en un número. Del mismo modo, sucede con el lugar que ocupa el cero en un número, puesto que lo toman como algo que no tiene unidades ni valor. Así pues, los estudiantes se apropiaron del uso de material manipulativo siendo sujetos activos, creando motivación y logrando construir su propio conocimiento matemático. Por otro

lado, se reconoce la dificultad presentada para trabajar en grupo con este tipo de materiales dado que resultaban aspectos ajenos al desarrollo de las tareas como escasez del material ocasionando conflictos entre los estudiantes y a causa de ello trabajaban individualmente impidiendo una socialización efectiva a cerca de lo que encontraron en cada una de las actividades propuestas.

Del mismo modo, Porras & Vivas (2009) realizaron una secuencia de actividades centrada en la equivalencia entre las unidades del sistema de numeración decimal y el valor posicional de las cifras de un número. En este trabajo se propuso caracterizar las condiciones didácticas que se pueden integrar para dicha secuencia.

Las actividades, que fueron diseñadas retomando la propuesta de Orozco (2003), están dividas y contextualizadas en tres momentos diferentes, en primera instancia con compras y ventas, en segunda instancia, la aplicación de un software y por último componentes simbólicos de cambio; cada una tiene cohesión con los elementos que caracterizan al sistema de numeración decimal. Una vez realizado el diseño este se implementó a un grupo de veinte estudiantes de segundo grado de la Educación Básica Primaria en la Institución Educativa Escuela Normal Superior Farallones de Cali.

En su investigación las autoras reconocen que el docente asumió el papel de observador crítico del proceso de enseñanza y aprendizaje, además de guiar el proceso de intervención de aula, esto se considera relevante, pues contribuye a los futuros procesos de planificación y mejoramiento de la práctica docente. La secuencia de actividades fue productiva, dado que, cumplió con las expectativas de aprendizaje que se pretendían, puesto que, los estudiantes que fueron participes de la solución de la actividad avanzaron con el reconocimiento de la estructura y dinámica del SND.

Cardona (2015) elaboró un análisis de la implementación de una secuencia didáctica que fue diseñada con una tabla numérica con cifras del 0 al 100, pretendió, que por medio de un estudio de casos cinco estudiantes de primer grado de la Educación Básica Primaria de la Institución Educativa Fontidueño Arango Rojas ubicada en Antioquia, lograran apropiarse de las características, particularidades y relaciones numéricas que se presentan en el sistema de numeración decimal.

Para llevar a cabo la propuesta realizada por la autora, se tuvo en cuenta el enfoque de la teoría sociocultural que consiste en el aprendizaje como un proceso de modificación de conocimiento en la cual la sociedad y el medio influye en el estudiante.

Finalmente, ella logró observar el avance que obtuvieron estos estudiantes respecto al uso del sistema de numeración decimal. Además, se evidenció que el uso de los números y sus relaciones numéricas se pueden usar como recurso para la enseñanza del SND, pero el hecho de que los estudiantes reciten los números no implica que conozcan su escritura o cantidad que lo representa. También, reconoció que un factor relevante para la enseñanza y aprendizaje es la interacción social, pues permite que los niños obtengan habilidades de las que se apropien para después colocarlas en práctica.

Iquinás & Iquinás (2015) elaboraron un análisis del discurso de profesoras de matemáticas, con el propósito de interpretarlos al realizar una clase del valor posicional basándose en el libro de texto que cada una utiliza, en los grados primero, segundo y tercero de la Educación Básica Primaria en una institución educativa ubicada en la ciudad de Cali no especificada.

Como fundamentación teórica, las autoras se basan en las representaciones semióticas de Duval, la teoría de actos de habla por J. Searle y el análisis dialógico planteado por Bajtín. Como resultado del análisis realizado se infiere que los docentes deben diseñar sus argumentos, también, se debe elaborar un discurso de acuerdo con las necesidades de los estudiantes para que ellos construyan un aprendizaje significativo y evitando obstáculos.

Ahora bien, a partir de los trabajos aquí reportados se destacan los siguientes aportes que estos realizan para el desarrollo este estudio en los siguientes aspectos:

- Todas las investigaciones pese a las diversas perspectivas muestran que la enseñanza y aprendizaje del sistema de numeración decimal es un asunto delicado y complejo, al cual hay que dedicarle tiempo y esfuerzo para que su aprendizaje mejore y se logren superar las múltiples dificultades que en esos trabajos se indican.
- Contribuyen en este trabajo para fundamentar la problemática y delimitar bien los objetivos, dado que estas fuentes brindan recursos que sirven de apoyo para ampliar la

investigación interesada en la enseñanza aprendizaje del SND en los primeros años de escolaridad.

- Aporta al diseño de la propuesta que en este estudio se contempla, en tanto que la mayoría de estos trabajos hacen propuestas de intervención en el aula y estas pueden ser tomadas para hacer nuevas propuestas o rediseñarlas aportando nuevos elementos a las que ya se han consultado con el propósito de aportar al aprendizaje del sistema de numeración decimal.
- Estos trabajos dejan ver, por un lado, aspectos interesantes que implica la enseñanza del SND como conceptos (agrupación, decena, centena, etc.), procesos (composición y descomposición), entre otros. Por otro lado, una puesta de interés en el uso de material manipulativo para la enseñanza y aprendizaje del SND y que es de suma relevancia puesto que se hará uso de este tipo recursos.

1.2 Planteamiento del problema

Uno de los conceptos que es fundamental en las matemáticas es la construcción del concepto de número, de este modo en la escuela se empieza desde preescolar, pues es la base fundamental para muchos conocimientos de las matemáticas tal como, conteo, mediciones, estadística, geometría, entre otros. También, la construcción del concepto de número pasa por muchos elementos, por ejemplo, pasa por la necesidad de construir un sistema de numeración que permita comunicar y representar los números, además de permitir operar con ellos, hacer transformaciones, etc.

Actualmente su enseñanza-aprendizaje en la escuela es de suma relevancia debido a que de su aprendizaje se desglosan diversos procesos, conceptos, propiedades y operaciones matemáticas, tales como lo son las operaciones básicas con números naturales (suma, resta, multiplicación, división), propiedades de los números naturales como (clausurativa, conmutativa, distributiva, asociativa, inversa, elemento neutro), entre otros.

En este sentido, Martí (2003) afirma:

El sistema de numeración es el primer sistema matemático convencional con que se enfrentan los niños en la escuela, y constituye el instrumento de mediación de los otros aprendizajes matemáticos, << El aspecto de la notación matemática más fundamental (el álgebra, por ejemplo, es más compleja y presupone el conocimiento del sistema numérico)>>. (p.164)

Dado que el sistema de numeración es vital en la construcción de las matemáticas en general y en particular en la aritmética, su importancia no niega que su enseñanza y aprendizaje pasa por múltiples problemáticas. Una parte de estas reconoce que las matemáticas y en este caso el Sistema de Numeración Decimal se enseñan en ambientes propiamente matemáticos, pocas veces los profesores e incluso los libros de texto las presentan articuladas a situaciones reales, es decir, matemáticas contextualizadas que sean familiares para los estudiantes y permita que puedan imaginarlas, tal como lo reconocen Porras y Vivas (2009)

Debido a la relevancia que dicho sistema brinda para las dinámicas operativas dentro de la aritmética, la escuela dedica gran parte del tiempo, sobre todo en los primeros tres años de la educación básica, al proceso de escritura y reconocimiento de cantidades, a la comparación de cantidades, a la descomposición polinómica de una cantidad dada, al reconocimiento del valor posicional de una cifra, pero aun así los estudiantes no logran comprender los principios básicos que estructuran el sistema. (p.10)

En particular en los primeros grados de escolaridad, el estudio de la aritmética se centra en el aprendizaje de las operaciones básicas y pese al énfasis que se hace no es eficiente para que los estudiantes comprendan los fundamentos para operar cantidades con los usuales algoritmos, pues, debido a todas las problemáticas que implica el abordaje del sistema de numeración decimal y sus principios básicos, los estudiantes resuelven operaciones básicas entre los números naturales y en algunos casos reconocen las unidades, decenas, centenas... pero, terminan aprendiendo insuficientemente los principios y propiedades que rigen el uso de los algoritmos.

Otras investigaciones realizadas que han aportado a la enseñanza aprendizaje del sistema de numeración decimal explicitan otro tipo de problemáticas. Lerner, Sadovsky & Wolman, (Citados por Porras & Vivas, 2009).

- La fragmentación del número en casillas, que impide que el estudiante pueda reconocer el valor posicional de cada cifra que compone el número y que establezca equivalencias entre las diferentes unidades del sistema. Es decir, poder dimensionar 1 centena como 100 unidades y a la vez como 10 decenas.
- La no concordancia entre la numeración hablada y la escrita, y el inherente reconocimiento del proceso de reagrupación en los diferentes órdenes de magnitud, asociado al carácter multiplicativo del sistema. Esta situación se evidencia cuando por ejemplo el estudiante escribe dieciocho como 108 ó mil quinientos treinta y seis como 1000500306. (p.11)

En suma, este trabajo hace énfasis en algunos de los principios del sistema de numeración decimal. Así pues, se centra en el valor posicional que ocupa una cifra de un número y en la base diez debido a las dificultades que se encuentran en los estudiantes para comprender estas propiedades. Es por ello que se considera importante promover el aprendizaje de las matemáticas y a partir de ahí, el número y el SND a través de situaciones contextualizadas, de este modo se asume la EMR como un enfoque que reconoce la relevancia de los contextos, se aprende matemáticas no para aplicarlas a las situaciones, sino que a partir de situaciones matemáticas se construyen conocimientos. Así pues, se evidencia la matematización horizontal y la matematización vertical, una es el paso del mundo real al mundo de los símbolos y la otra contiene niveles de comprensión que van desde un nivel situacional, pasando por un nivel referencial y general hasta llegar al nivel donde se formaliza el conocimiento, respectivamente. Esto es explicado en detalle

más adelante. En definitiva, es por lo que este trabajo intenta responder a la siguiente pregunta:

¿Qué caracteriza los procesos de matematización que realizan un grupo de estudiantes de segundo grado en la comprensión los principios base diez y posicional del sistema de numeración decimal cuando desarrollan una propuesta de aula basada en el enfoque de la EMR?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Caracterizar los procesos de matematización que logran un grupo de estudiantes de segundo grado en la comprensión de los principios base diez y posicional del sistema de numeración decimal, a partir de la implementación de una propuesta de aula basada en el enfoque de la EMR y que involucra el uso de los bloques multibase 10

1.3.2 Objetivos específicos

- Documentar la problemática de la enseñanza y aprendizaje del sistema de numeración decimal desde las perspectivas curricular y didáctica, de tal modo que surjan elementos conceptuales para el diseño de una propuesta de aula para estudiantes de segundo grado de la educación básica primaria.
- Analizar el impacto que los bloques multibase 10 tienen en las producciones que realizan los estudiantes a partir de la implementación de la propuesta de aula.
- Proponer algunas sugerencias y reflexiones en torno a la enseñanza del sistema de numeración decimal en los primeros grados de escolaridad fruto de los análisis reportados.

1.4 Justificación

En este apartado se explicitan las razones por la cuales es importante el desarrollo de este trabajo, con lo cual se valida su pertinencia. Para mostrar esta importancia se toman cuatro ideas centrales; primero, desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) se muestra la importancia que tiene el SND en los primeros grados de

escolaridad y más aún unos principios que se asumen como garantes de esa enseñanza; en segundo lugar las problemáticas que las investigaciones reportan para su enseñanza, lo que implica el diseño de propuestas para hacerles frente; en tercer lugar reconocer la importancia del uso de material manipulativo para el abordaje del SND, y finalmente se indica porqué el enfoque de la Educación Matemática Realista es pertinente y adecuado para el desarrollo de este trabajo.

En primer lugar, tanto los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN,1998), como los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), documentos de política pública en Colombia, explicitan los diferentes tipos de pensamientos que se deben de desarrollar en los estudiantes a partir de la actividad matemática en el aula, entre estos se encuentra el numérico. Estos documentos en particular reconocen que para el desarrollo del pensamiento numérico uno de los aspectos centrales es la conceptualización sobre el sistema de numeración con el cual se pueden comunicar y representar los números, tal como se ve en la siguiente cita:

El desarrollo del pensamiento numérico exige dominar progresivamente un conjunto de procesos, conceptos, proposiciones, modelos y teorías en diversos contextos, los cuales permiten configurar las estructuras conceptuales de los diferentes sistemas numéricos necesarios para la Educación Básica y Media y su uso eficaz por medio de los distintos sistemas de numeración con los que se representan. (MEN, 2006, p.60).

En la cita anterior se explicita la importancia que tiene el abordaje del SND para el desarrollo del pensamiento numérico, fundamentalmente porque desde edades tempranas en los niños se debe construir la noción del número lo que hace necesario construir a la par un sistema para comunicarlos y representarlos. También, las investigaciones han reportado que algo central para trabajar en el SND son los principios (es de base diez, introduce y utiliza el cero, es aditivo, es multiplicativo, es posicional, orden en la posición) los cuales serán presentados en detalle en el siguiente apartado.

Debido al gran campo que abarca los principios del SND, en este trabajo se hará énfasis en dos principios fundamentales, el MEN (2006) dice: “Se consideran tres actividades o destrezas que al reflexionar sobre ellas y relacionarlas ayudan a los niños a comprender nuestro sistema de numeración, que son: contar, agrupar y el uso del valor posicional.” (p.29). En este caso, se hace énfasis en agrupaciones (base diez) y el uso de

valor posicional. Los documentos de política pública e incluso múltiples investigaciones muestran la relevancia de dichos principios. De este modo, la aplicación del diseño se desea realizar en segundo grado de la educación básica primaria, puesto que las orientaciones de política pública nacional así lo están marcando; en los primeros grados de escolaridad y particularmente en el grado segundo cobra mucha fuerza el SND, el conteo (en este caso, es visto como la correspondencia uno a uno que se asignada entre cada objeto del artefacto y un número cardinal), la composición (el paso de la representación de diez unidades a una decena, diez decenas a una centena) y descomposición de un número (pasar de representar una decena a diez unidades y una centena a diez decenas o cien unidades). Además, el proceso de lectura es más avanzado y favorece la comprensión de los enunciados que aparecen en el diseño.

Ahora bien, otra razón que resalta la importancia de este trabajo tiene coherencia con los planteamientos presentados en la problemática descrita en el apartado anterior, en este sentido, lo ahí presentado deja ver que una parte de la investigación en Didáctica de las Matemáticas no agota las problemáticas que se presentan en la comprensión del SND, a partir de ello, lo que sí evidencia las investigaciones es que hay que seguir trabajando en la búsqueda de nuevas alternativas que ayuden a mitigar el campo de problemáticas reportado. En este sentido este trabajo cobra vital importancia.

Las problemáticas presentadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje del SND, conllevan a reconocer que el uso de material didáctico es una alternativa que permite facilitar e innovar en estos procesos de las matemáticas. Investigaciones Bruner, J., Jolly, A. & Silva, K. (1976), MEN (1998) han mostrado que los estudiantes deben de aprender por medio de experiencias concretas, es decir el punto de partida de la enseñanza es la etapa exploratoria, la cual necesita la manipulación de material concreto, seguido de actividades que favorecen el desarrollo conceptual. Además, otras investigaciones Castro, E., & Molina, M. (2011), MEN (1998) centradas en el uso de material manipulativo para la enseñanza y aprendizaje del SND indican que existen diferentes materiales que facilitan su aprehensión, tales como, ábacos, regletas de cuisenaire, palillos, entre otros.

Autores como Castro, E., & Molina, M. (2011) aseguran que algunos de los materiales que se pueden utilizar para la enseñanza del SND son:

- Hacer agrupaciones con objetos (lápices, piedras, pepas, entre otros) contribuye a la comprensión de unidades (objetos sueltos), decenas (grupos de 10 objetos), etc.
- En la representación de unidades o decenas se pueden identificar por objetos de algún color en particular o la posición, de este modo, los estudiantes pueden reconocer el valor posicional de un número.
 - El ábaco vertical contribuye a la comprensión de los principios del SND.
 - Los bloques multibase 10 permiten trabajar el concepto de unidad, agrupamiento, los tipos y ordenes de unidades, valor posicional de las cifras y las operaciones aritméticas.
 - Regletas de Cuisenaire fortalecen la comprensión de componer y descomponer un número.

Atendiendo a todo lo mencionado, se considera importante y pertinente usar en este trabajo artefacto de tipo manipulativo, para ello se escogió los bloques multibase 10 puesto que entre las utilidades y ventajas que este brinda permite comprender de forma concreta los principios del sistema de numeración decimal. En este caso, se puede distinguir los dos principios que se quieren enseñar.

Finalmente, las razones por las cuales en este trabajo se considera necesario el enfoque a la Educación Matemática Realista para desarrollar este estudio se estructuran bajo dos aspectos centrales. La primera, brinda un gran soporte para el marco conceptual a este trabajo en tanto que los principios (principio de actividad, principio de realidad, principio de niveles, principio de reinención, principio de interacción, principio de orientación) que en él se asumen se tornan importantes, fundamentalmente porque son principios que en el campo de la educación matemática han estado ampliamente documentados para realizar propuestas de intervención con estudiantes en donde la realidad cercana al estudiante, el contexto, las situaciones problemáticas, entre otros, son aspectos centrales para realizar dichas propuestas, en este sentido este enfoque conceptual brinda una manera de pensar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en general, lo que aquí se asume para particularizar el caso del SND. La segunda, porque en este enfoque se caracteriza muy bien los niveles de comprensión que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas lo que se vuelve un insumo para poder analizar las producciones de los

estudiantes, a propósito de dar cuenta si comprenden a lo que se quiere llegar con respecto al SND.

2. Marco conceptual de referencia

En este apartado se presentan dos grandes referentes que soportan este trabajo, pues se exponen los elementos de orden curricular. Para ello se revisan los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), los Estándares Básicos en Competencias de Matemáticas (MEN, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2017) en lo que tiene que ver fundamentalmente con el pensamiento numérico y algunos aportes de estos documentos hacia el estudio del SND en los primeros grados de escolaridad. También se expone un referente didáctico que se divide en tres grandes apartados; el primero es relacionado con la enseñanza aprendizaje del SND, el segundo con la EMR que se usa aquí para el diseño de la propuesta de aula y para los posteriores análisis de los resultados fruto de su implementación. Por último, el uso de artefactos desde la mirada de Radford.

2.1 Referente curricular

A partir de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) se dice que la actividad matemática en el aula de clase tiene como fin el desarrollo del pensamiento matemático. Para ello, se hace una propuesta curricular que se fundamenta en tres grandes componentes: los procesos generales de aprendizaje, los conocimientos básicos y los contextos.

De este modo, y de acuerdo con los Lineamientos, se toma como punto de partida el estudio de situaciones problemas que pueden estar ubicadas en distintos contextos (el de las propias matemáticas, el de vida diaria y el de las otras ciencias) posibilitando con esto, por un lado, el desarrollo de procesos generales de aprendizaje, logrando así que los estudiantes puedan razonar, comunicar, resolver problemas, modelar, o elaborar, comparar y ejercitarse procedimientos; y por otro lado, los conocimientos básicos que propician el desarrollo de formas de pensamiento matemático tales como el numérico, espacial, métrico, variacional o estocástico, asociados con los sistemas que les son propios: sistemas numéricos, geométricos, métricos, algebraicos y analíticos, y de datos, respectivamente.

Desde esta perspectiva, para el diseño de propuestas de intervención en el aula es necesario delimitar cuáles de los anteriores aspectos son los que se considerarán según los propósitos de aprendizaje que se tengan con los estudiantes. En atención a esto, a

continuación, se precisan estos aspectos para el diseño de la propuesta de aula que en este trabajo se hace.

En relación con los procesos generales, en este trabajo se privilegian tres de ellos, no negando con esto la posibilidad de trabajar los otros:

- El razonamiento, es interpretado como la acción de organizar ideas en la mente para obtener conclusiones de tal forma que los estudiantes logren justificar estrategias, reconocer procesos, formular hipótesis, utilizar argumentos propios, etc, para crear deducciones.
- La comunicación, tiene un rol importante debido a que ayuda a los estudiantes para construir vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas, entre otros. También de favorecer la producción, comprensión, posición e interpretación de ideas.
- La modelación, su punto de partida es una situación problema real, “Treffers y Goffree (Citados por el MEN,1998) describen la modelación como una actividad estructurante y organizadora, mediante la cual el conocimiento y las habilidades adquiridas se utilizan para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas” (p.98). De ahí, la modelación es la interrelación que hay entre el mundo real y el de las matemáticas la cual permite identificar las matemáticas específicas en un contexto general.

En relación con los conocimientos generales y debido al contenido matemático que se movilizar en este trabajo se hará énfasis al pensamiento numérico, puesto que es el que está estrechamente relacionado con el Sistema de Numeración Decimal. El pensamiento numérico según McIntosh (citado por el MEN, 1998) refiere a:

La comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones. (p.26)

De este modo, el desarrollo del pensamiento numérico en los niños se realiza de forma gradual, dependiendo del uso, avances y dominio numérico que ellos posean. Además, se debe tener en cuenta aspectos relevantes, tales como, la comprensión de los números y sus diversas relaciones, el reconocimiento de las magnitudes relativas de los

números y el efecto de las operaciones entre ellas, por último, el desarrollo de puntos de referencia para cantidades y medidas.

Ahora bien, es necesario tener en cuenta aspectos básicos que benefician el desarrollo del pensamiento numérico y dirigir el trabajo en el aula. Dichos aspectos son: comprensión de los números y de la numeración, comprensión del concepto de las operaciones, cálculos con números y aplicaciones de números y operaciones. Para este trabajo se hará énfasis en el primer aspecto nombrado, pues este en particular es el que más relación tiene con el SND.

- Comprensión de los números y de la numeración:

En la comprensión de los números y de la numeración se considera que es el aspecto más importante para la actividad, ya que da cuenta de los significados de los números, además el poder identificarlos como secuencia verbal, la comprensión significativa del sistema de numeración (este aspecto es relevante para la óptima comprensión de conceptos numéricos, teniendo en cuenta la estructura, organización y regularidad del SND) y la destreza de contar.

Para lograr una mayor comprensión en el caso del SND, este documento indica que algunas de las destrezas que se debe de desarrollar en el estudiante son las de contar y agrupar.

También, los Estándares Básicos en Competencias de Matemáticas aportan al desarrollo del pensamiento numérico en la escuela haciendo énfasis en el SND:

El desarrollo del pensamiento numérico exige dominar progresivamente un conjunto de procesos, conceptos, proposiciones, modelos y teorías en diversos contextos, los cuales permiten configurar las estructuras conceptuales de los diferentes sistemas numéricos necesarios para la Educación Básica y Media y su uso eficaz por medio de los distintos sistemas de numeración con los que se representan. (MEN,2006, p.60)

Esto da a entender que debido a todo lo que se requiere para lo relacionado con el uso y manejo de los números va arraigado necesariamente a la utilización de sistemas numéricos, logrando optimizar el desarrollo del pensamiento numérico.

Ahora bien, con respecto a los Estándares Básicos de Competencias planteados por el MEN (2006) se tiene en cuenta el ciclo de primero a tercero, para el diseño de la propuesta de aula que en este trabajo se pretende consolidar para ser trabajada con los estudiantes:

- Uso representaciones –principalmente concretas y pictóricas- para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal. Este estándar muestra la importancia de utilizar material concreto a la hora de enseñar el SND y es por ello que el diseño de la propuesta de aula se adecua para el aprendizaje a través del uso de bloques multibase 10.
- Identifico regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (calculadoras, ábacos, bloques multibase, etc.). En este caso favorece el reconocimiento de las dos propiedades que se van a trabajar sobre el SND a través del uso de los bloques multibase. Por ejemplo, el artefacto obliga al estudiante a cada diez unidades representarlas con una decena y de este modo se identifica el principio base 10 del SND.

Además, la propuesta que se da en los estándares es que estos no sean trabajados aislados unos de otros, ni entre los distintos pensamientos, ni entre lo que se va presentando conforme a los estudiantes avanzan con los años de escolaridad, este documento indica que estos estándares guardan una coherencia horizontal y coherencia vertical, la primera, en este caso, no será referenciada debido a que su relación es llevada a cabo entre un estándar y los demás estándares de los otros pensamientos y como se mencionó anteriormente este trabajo se enfatiza en el pensamiento numérico. La segunda relaciona un estándar con los demás por conjuntos de grados, de este modo, el SND no solo se ve de primero a tercero, este conocimiento se sigue construyendo en los cursos superiores. A continuación, se presentan los estándares que están relacionados dentro del mismo pensamiento numérico para dar cuenta de la coherencia vertical.

De grado cuarto a quinto:

- Justifico el valor de posición en el sistema de numeración decimal en relación con el conteo recurrente de unidades.

De sexto a séptimo:

- Justifico la extensión de la representación polinomial decimal usual de los números naturales a la representación decimal usual de los números racionales, utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal.

Los Estándares Básicos en Competencias Matemáticas permiten evidenciar el largo proceso que se debe de llevar a cabo para construir la noción del SND.

Finalmente, por ser un documento de política pública y por ser utilizado en la actualidad por docentes, libros, entre otros. Es pertinente considerar los DBA (Derechos Básicos de aprendizaje) (MEN, 2017) del grado segundo:

El DBA “Sabe contar de 0 a 999” se considera pertinente puesto que este es un conocimiento previo que debe de tener el estudiante para desarrollar de manera adecuada el diseño de aula a demás las cifras que se van a trabajar oscilan entre esas cantidades.

A través de la propuesta de aula se espera favorecer el siguiente DBA:

- Tiene claro el concepto de unidad, decena y centena

Según los DBA en el grado segundo se puntuiza la enseñanza y aprendizaje del SND en la cual los estudiantes reconocen conceptos que los contempla tales como unidades, decenas, centenas y de este modo se caracterizan los principios del SND teniendo muy en cuenta que no todos se pueden considerar debido a los conocimientos previos que tiene el estudiante en dicho grado de escolaridad. Por ejemplo, el principio multiplicativo no aplica pues esa estructura no es enseñada en dicho grado.

2.2 Referente didáctico

El desarrollo de este referente se hace a partir de tres aspectos que aquí se consideran relevantes, los cuales son: lo que ha indicado la investigación respecto a la enseñanza y aprendizaje del SND, presentar el enfoque conceptual de la Educación Matemática Realista y finalmente la importancia que tiene el uso de recursos tanto para la enseñanza de las matemáticas en general como particularmente para el SND.

2.2.1 El sistema de numeración decimal o indoarábigo.

La necesidad de contar ha surgido desde nuestros antepasados, pero tal necesidad conlleva a un obstáculo en el hombre primitivo para poder llevar una secuencialidad y jerarquización al contabilizar ciertos objetos, o al llevar cuentas de sus bienes, lo cual era necesario para poder sostenerse en su vida cotidiana, pero ¿cuál era tal obstáculo?

Los hombres tuvieron la necesidad de contar para poder sobrevivir, pues requerían de saber la cantidad de animales que debían cazar o cuanta cosecha recolectar para la alimentación de sus familias, a partir de ahí, crearon estrategias que fueron evolucionando, pues contar con los dedos u objetos creó una limitación a la hora de representar cantidades muy grandes. De este modo, el hombre tuvo que crear una gran cantidad de símbolos para poder tener control en la utilidad que ellos le veían a los números, por tanto, inventó y aprendió a contar de acuerdo a sus necesidades, por lo que se crearon diversos sistemas de numeración hasta llegar a nuestro sistema decimal actual.

De tal modo, se puede ver el significado de sistema de numeración de esta manera: “Un sistema de numeración lo constituyen un conjunto finito de signos y reglas, que hacen posible expresar cualquier número que se desee mediante el uso de los signos, de que consta el sistema y siguiendo sus reglas” (Castro & Molina, 2011, p.58).

Además, en un sistema de numeración cumple un papel imprescindible la base, “la base de un sistema de numeración es el número de unidades que se han de agrupar dentro de un orden dado para formar una unidad del orden inmediatamente superior” (Castro & Molina, 2011, p.59).

Cabe resaltar que la construcción del SND no es aislada de la construcción del concepto de número, a su vez construir el concepto de número natural en los niños está amarrado necesariamente a actividades propias del conteo tales como contar hacia atrás, contar de uno en uno, contar de dos en dos hacia atrás entre otros, establecer cardinales, orden, la cual es un eje trasversal en la construcción del pensamiento numérico.

Sin embargo, todo esto hace parte de un conjunto de conocimientos que el estudiante tiene que ir poco a poco construyendo para desarrollar su pensamiento numérico particularmente en los primeros grados de escolaridad, pero todo lo que abarca es

demasiado desbordante para un trabajo de investigación, es por eso que es necesario hacer énfasis en un aspecto y de este modo es dirigido hacia el SND

Ahora bien, el sistema de numeración decimal o indoarábigo es un sistema universal utilizado en la actualidad en la mayoría de los países. Consta de diez elementos o símbolos simples, posee unos principios y reglas para la formación de símbolos compuestos.

Los símbolos base del sistema, son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y son llamados cifras. La tardía aparición del cero se explica por la complejidad de abstraer una idea de cantidad a partir de la nada, de la ausencia de objetos. La mayor parte de las referencias indican que el cero fue introducido en Europa por el matemático Leonardo de Pisa (Fibonacci) en el siglo XII. Su presencia en un número indica lugar de posición y ausencia de cantidad en el mismo, reemplaza la cantidad que falta y tiene a la vez sentido de número. Su principal fortaleza radica en proporcionar consistencia al sistema decimal de numeración.

El valor de cada cifra de un número depende del lugar que ocupe. El primer orden está a la derecha y corresponde a las unidades, le siguen a continuación a su izquierda, las decenas, etc.

Considerando los diferentes órdenes de las unidades y el orden de las cifras de un número, es posible obtener la expresión polinómica de un número; consiste en escribir el número como suma de las sucesivas potencias de 10 que lo constituyen, además, para la organización del sistema de numeración decimal es necesario tener presente los principios que lo gobiernan.

- Es de base diez: cada diez unidades de un orden constituyen una unidad de orden superior. La base coincide con el número de unidades simples.
- Introduce y utiliza el cero: el cero indica la ausencia de unidades en el lugar de orden donde se encuentre.
- Es aditivo: el valor que se representa en un número equivale a la suma de las cifras considerando su valor de posición. Esto hace que el número también se pueda escribir como la suma de sus unidades de diferente orden.
- Es multiplicativo: cada una de las cifras es un factor que multiplica una potencia de diez; su exponente se corresponde con 0 para las unidades, con 1 para las decenas, etc.

- Es posicional: el valor de las cifras en el número es relativo, depende de su lugar de posición en el mismo.
- Orden en la posición: las cifras en el número están colocadas por su orden de derecha a izquierda, de forma que la unidad tiene a su izquierda a la decena, la decena tiene a su izquierda a la centena, y así sucesivamente. (Castro & Molina, 2011, p.65).

En cuanto a la lectura, escritura y expresión verbal de los números se utilizan las palabras simples (números de una sola cifra) y compuestas (de dos cifras en adelante). La expresión verbal de los números pone de manifiesto el principio aditivo y el posicional del sistema de numeración decimal, ya que, salvo algunas excepciones se leen indicando separadamente cuantas unidades tiene por cada uno de los órdenes que lo forman y en el mismo orden en que aparecen en su expresión simbólica posicional.

Por todo lo anterior, se evidencia la importancia de reconocer y aprender la estructura del sistema de numeración decimal, es por ello que los profesores de matemáticas deben procurar enseñar de la forma más apropiada para que sus estudiantes logren adquirir conocimientos los cuales servirán en sus labores de la vida cotidiana. Por medio de la innovación, motivación y varios aspectos que contribuyen en la enseñanza de las matemáticas se pueden lograr los objetivos de aprendizaje planteados.

Así pues, se ha evidenciado diversos métodos para favorecer la comprensión del sistema de numeración decimal en los niños, además, se incluye el uso de material concreto y modelos, el estudio de varias bases, etc. Investigadores ingleses plantearon una secuencia de actividades con el fin de desarrollar las nociones de valor posicional (decenas, unidades) y a partir de ahí encaminar el conocimiento del estudiante en forma gradual.

1. Realizar agrupaciones en bolsas que contengan diez objetos y de ese modo hablar de decenas y de objetos sueltos para las unidades. También, ubicar los objetos sueltos a la derecha de los grupos de diez.
2. Unir los objetos, puede ser insertar pepitas en un hilo o usando bloques de construcción ensamblados en decenas.
3. Resolver actividades con materiales estructurados o prefabricados como bloques de Dienes, Bloques base 10, en los cuales los cubos de las decenas vienen pegados.

4. Pasar a decenas y unidades en las que las decenas no tengan señaladas ni se distingan las unidades individuales.
5. Representar decenas y unidades que se presenten con un color en particular o por la posición que tengan. (MEN, 1998)

2.2.2 El enfoque de la Educación Matemática Realista

En cuanto al enfoque de la Educación Matemática Realista, fue creada entre los años 60 y 70. Se reconoce como fundador el educador y matemático alemán Hans Freudenthal. El enfoque mecanicista de la enseñanza de la aritmética dio cabida al origen de la Educación Matemática Realista, su ideal principal es ver las matemáticas como una actividad humana en la cual su enseñanza debe de estar conectada con la realidad.

La EMR se rige de seis principios básicos que son tenidos en cuenta tanto para la enseñanza como el aprendizaje de las matemáticas:

- **Principio de actividad:** En este principio juega un rol muy importante la matematización (hacer matemáticas), Freudenthal (citado por Bressan & Gallego 2011) indica que “Matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos... incluida la matemática misma” (p.2). Es necesario aprender a reformar, dominar y entender la realidad concreta o parte de ella con la ayuda de la matemática.

También, en este principio se parte de la idea que la matemática debe de ser aprendida a partir de actividades cotidianas del individuo. Freudenthal (citado por Bressan, Saggese & Gallego 1993) expresa: “Las cosas están al revés si se parte de enseñar el resultado de una actividad más que de enseñar la actividad misma” (p.2). Esto conlleva a pensar que, a través de dichas actividades basadas en hacer matemáticas, los estudiantes construyen herramientas y discernimientos por sí mismos.

- **Principio de realidad:** Consiste en ver las matemáticas como una realidad, en este caso dicha realidad no es vista simplemente como algo cotidiano o tangible para los estudiantes, sino como algo que sea susceptible a la imaginación de ellos. En el enfoque tradicional a partir de conceptos se llega a contextos de conocimientos matemáticos, pero en el enfoque de la EMR se busca que a partir de contextos de la vida real de los estudiantes lleguen a formalizar contenidos matemáticos.

- **Principio de niveles:** Para reconocer la comprensión matemática del estudiante deben pasar por diferentes niveles. Su punto de partida es matematizar una actividad hasta llegar a analizarla. Los niveles están relacionados con la matematización horizontal y la matematización vertical.

- *Matematización horizontal:* Es trascender en la solución de las actividades problemas de la vida real al de las matemáticas. También es visto como el cambio del mundo real al mundo de los símbolos

- *Matematización vertical:* Se lleva a cabo dentro de las matemáticas mismas, es decir, la evolución que tenga el estudiante en cuanto a los conocimientos de contenidos matemáticos y para ello se dan cuatro niveles de comprensión, los cuales son: nivel situacional, nivel referencial, nivel general y nivel formal.

Nivel situacional: Por medio de la experiencia y conocimientos previos, el estudiante podrá interpretar y buscar estrategias de solución.

Nivel referencial: Relacionado con todo lo que esquematiza el problema, tales como modelos gráficos, materiales, descripciones, procedimientos, entre otros. En este nivel se tiene en cuenta la presencia de “modelos de” haciendo referencia a una situación particular.

Nivel general: Es la evolución del nivel anterior, puesto que su desarrollo se basa en la exploración, reflexión y generalización del contenido matemático. Se reconoce los “modelos para” situaciones equivalentes generalizadas.

Nivel formal: Se trabaja con toda la estructura numérica como tal, logrando evidenciar la comprensión de conceptos y procedimientos con notaciones propias de las matemáticas.

Es necesario tener en cuenta que para el paso de un nivel a otro es necesario hacer una reflexión colectiva y el análisis de los modelos utilizados por cada sujeto. También estos niveles permiten reconocer su proceso de aprendizaje.

- **Principio de reinención:** El nivel de comprensión por parte de los estudiantes depende de cómo lleva a cabo la clase el docente. En este principio entra en juego la “reinvención guiada”, Freudenthal (citado por Bressan & Gallego, 2011) define está expresión como: “un proceso en el que los alumnos reinventan ideas y herramientas matemáticas a partir de organizar o estructurar situaciones problemáticas, en interacción con sus pares y bajo la guía del docente” (p.6). Los estudiantes deben de tener la capacidad de construir modelos, operaciones, conceptos y estrategias logrando discernir, explicar, cuestionar, argumentar y reflexionar frente a su conocimiento matemático y el docente debe cumplir el papel de mediar a los estudiantes frente a la situación problema, a ellos mismos, a sus producciones formales e informales y la matemática como disciplina.

- **Principio de interacción:** En la EMR cada estudiante es un individuo que se encamina a conseguir su propio conocimiento, pero esto no implica que cada clase dirigida por el docente se realice de manera particular, pues, se considera que el aprendizaje de las matemáticas debe de ser visto como una actividad social. Es relevante propiciar interacción en el aula de clase, dando a conocer las interpretaciones de cada estudiante, logrando de este modo dirigirlos a niveles de comprensión más altos.

- **Principio de interconexión:** La EMR busca enseñar las matemáticas como algo unificado en el currículo logrando mayor coherencia.

Lo que realmente importa es saber cómo encaja el tema en todo el cuerpo de la enseñanza matemática, si se puede, o no, integrar con todo o si es tan estrafalario o aislado que, finalmente, no dejaría ninguna huella en la educación Freudenthal (citado por Bressan, Zolkower & Gallego, 2004, p.9). Es decir, no se hacen profundas distinciones entre los ejes curriculares, pues se considera que para solución de una situación problema no solo se va a requerir de lo algebraico, numérico o aleatorio.

Otros aspectos relevantes a tener en cuenta sobre la Educación Matemática Realista son:

- En la EMR se da la utilización de modelos, estos se establecen a partir de las representaciones de situaciones que emplean conceptos y relaciones matemáticas con el fin de brindar una solución a un problema de la realidad o una situación planteada. Los modelos

surgen a partir de contextos y situaciones planteadas, van evolucionando de tal forma que llegan a ser modelos generales y formales, logrando desligarse para usarse a otros contextos o situaciones.

- Los seis principios vistos favorecen este trabajo en diferentes aspectos, puesto que el principio de actividad, principio de realidad y principio de interconexión aportan a la elaboración de la propuesta. El principio de reinención y principio de interacción beneficia a la implementación de la propuesta, finalmente, el principio de niveles contribuye al análisis y conclusiones.

2.2.3 Sobre el uso de los artefactos

La idea de artefactos que en este trabajo se asume, se fundamenta en las propuestas de Radford (2014). Para este autor un artefacto es:

Una forma es entender el artefacto como algo que nos permite hacer algo. Es desde esta perspectiva que los artefactos se ven como una posible extensión del individuo. Los artefactos se consideran aquí como prótesis o amplificadores: son ayudas para realizar acciones. Nos ayudan sin cambiar nuestro panorama cognitivo. Lo que hacen es hacernos accesibles los reinos de la realidad que permanecen ocultos debido a nuestras limitaciones sensoriales humanas. El microscopio y el telescopio son buenos ejemplos (p.284). Se reconoce que estos brindan innovación en cuanto a oportunidades para pensar y aprender.

De acuerdo con el autor, el uso de los artefactos en el aula desarrolla un papel importante para la cognición de los estudiantes, pero esto se da dependiendo del uso que el docente le brinda, para ello deben tener total conocimiento sobre el que se desea utilizar con el fin de explotar al máximo sus utilidades y beneficios, conociendo también sus posibles limitaciones. Es importante aclarar aquí, aunque se puede crear la idea que Radford lo está pensando únicamente como una cuestión material, no es así, puesto que para él los artefactos que llama culturales pueden ser simbólicos, como el lenguaje, pues es creado por las personas para poderse comunicar.

Además, es de suma relevancia descubrir el punto de vista que tenga el docente sobre la cognición para lograr reconocer los potenciales que pueden llegar a aportar los artefactos en el aula. Sin embargo, este autor también reconoce que los artefactos tienen una mediación epistémica del surgimiento y conocimiento de los estudiantes, adicionalmente, una mediación ontológica en la que los estudiantes aprenden dependiendo de sus necesidades. De este modo es que Radford distingue tres roles que juegan en los artefactos: el cognitivo, epistemológico y ontológico.

Respecto al primero de estos roles, se permite enunciar que los artefactos son facilitadores de la adquisición de conocimiento, además se consideran dispositivos culturales puesto que cada artefacto es creado por el ser humano con una finalidad y un propósito.

En este sentido, en la práctica los docentes utilizan recursos como: libros de texto, CAS (Sistemas algebraicos computacionales), objetos materiales, artefactos simbólicos (lenguaje, gráficos, etc.), entre otros. Los alcances que brindan los artefactos y todas las utilidades que se pueden dar en el aula por su uso, favorece en gran medida a los estudiantes para su desarrollo y desempeño de aprendizajes y al docente para apoyar su enseñanza (Radford, 2014).

El segundo rol, permite reconocer que la cognición mediada por los artefactos cambia la percepción tradicional de lo que entendemos por saber y aprender. “Si consideramos los artefactos como algo más que ayudas, su estado epistémico cambia. Saber se convierte en saber con herramientas en lugar de saber a través de las herramientas” (Radford, 2014, p.285). Es evidente que a través del tiempo la forma de llegar a un conocimiento ha ido evolucionando, es ahí donde el artefacto es visto como un objeto mediador, pero no solo este influye en dicha evolución, también en el contexto de los modos históricos y culturales del pensamiento y comunicación de la interacción entre los individuos.

Por último, el rol ontológico establece que las matemáticas son formas culturales de interpretación, expresión y acción, también, son usadas dependiendo de las necesidades de una comunidad y a partir de eso son aprendidas y enseñadas. Para este caso, los artefactos son considerados parte de las matemáticas como práctica material. Dentro de este contexto,

la elaboración de las matemáticas consistiría en la comprensión de las diferencias y similitudes que se ponen de relieve por los entendimientos de los estudiantes, ya que se entrelazan con las voces del profesor y la inteligencia histórica depositada en los artefactos. (Radford, 2014, p.287)

Finalmente, para las actividades propuestas se hará uso de un artefacto, como se mencionó anteriormente los bloques base 10, esto como anteriormente ya se ha dicho permite que los estudiantes generen un tipo de conocimiento y acercamiento a ciertas características sobre las matemáticas, en este caso particular sobre el sistema de numeración base 10. Además, hay muchas investigaciones en la educación matemática que indica que este es un buen materia para trabajar algunas características de este sistema.

2.2.3.1 Los Bloques multibase 10 como artefacto

Este artefacto fue creado por William Hull, aunque Zoltan Dienes lo dio a conocer dándole uso en escuelas de Canadá y Australia, es por esto que también son reconocidos como bloques de Dienes. Físicamente está compuesto por una serie piezas normalmente en madera o plástico la cual representa las unidades (cubos de 1x1x1cm), decenas (tiras de 10 cubos), centenas (tabletas de 10 tiras de decenas), millares (cubo compuesto por 10 tabletas de centenas) tal como se muestra en la figura.



Figura 1. Bloques multibase 10
(<https://www.manipapel.es/BLOQUES-MULTIBASE-BASE-10-a1414.html>)

Este artefacto se caracteriza por tener muchas ventajas a la hora de ponerse en juego para el aprendizaje de algunos aspectos matemáticos, tales como:

• Permite la comprensión del sistema de numeración; pues se reconoce fácilmente cuanto es una unidad, decena, centena y unidades de mil. En especial, para realizar agrupaciones con las fichas con el fin de hacer composiciones o descomposiciones de números. Lo que se considera relevante para abordar los dos principios que se quieren trabajar aquí.

- Formar y representar números
- Facilita la comprensión de la suma y resta de números
- Se puede trabajar la multiplicación y de paso hallar áreas de figuras planas
- Realizar divisiones exactas
- Resolver algunas raíces cuadradas
- permiten comprender de forma visual qué estamos haciendo con las cantidades al resolver una operación

Este artefacto carece de desventajas como:

- Se limita a utilizar números hasta el 9999
- Solo se puede trabajar con una sola base

A continuación, se relaciona este artefacto con los roles indicados según el documento de Radford. El rol cognitivo que brinda los bloques multibase 10 está relacionado con todos los alcances que este artefacto puede brindar al utilizarse para la adquisición de conocimiento. Es decir, no es lo mismo conocer sobre el SND sin estos bloques que conocer con ellos, dado que cambia radicalmente la forma como el sujeto desarrolla procesos de pensamiento asociados al SND, porque como los bloques multibase 10 permiten de manera concreta ser manipulados facilita realizar composiciones y descomposiciones de números, realizar agrupamientos de cantidades, reconocer conceptos como el orden de las unidades, valor posicional de cifras, realizar operaciones básicas con números naturales, entre otros.

El rol epistémico está centrado en como el sujeto aprende, aquí se reconoce que el estudiante modifica la forma de acercarse al conocimiento, saber sobre el SND se complementa con la ayuda de los bloques multibase 10.

Por último, en el rol ontológico el autor indica que para la enseñanza de las matemáticas es necesario el uso de artefactos ya sea de tipo material o simbólico, a partir

de esta idea se piensa en un diseño en el cual se fundamenta con el uso de bloques multibase 10. Ontológicamente la enseñanza y aprendizaje del SND, se hace en este caso, basado en este artefacto tomándolo como algo principal para favorecer su aprendizaje, lo que se ve reflejado en el diseño.

Además, se debe entender que en la actividad matemática del SND se puede emplear este artefacto como aquel material que le permite a los estudiantes generar un tipo de conocimiento sobre este sistema, por lo tanto, la actividad que se le presente a los estudiantes debe considerar que es una construcción cultural y está atravesada por diferentes formas de acercarse a él. También, en esas formas de acercamiento se han ido construyendo muchos artefactos y entre ellos son los bloques multibase 10.

3. Diseño metodológico y análisis de resultados

Este capítulo está dividido en dos grandes secciones. En la primera sección, se presenta el diseño metodológico de este estudio: el enfoque y el proceso de estudio, la población objeto de investigación, los instrumentos que se utilizan para recolectar información, la descripción de la propuesta de aula y las unidades de análisis. En la segunda sección, se exhiben los análisis de los resultados obtenidos de la implementación de la propuesta de aula con los estudiantes.

3.1 Enfoque y proceso de estudio

Este trabajo se desarrolla con un enfoque cualitativo de tipo descriptivo interpretativo, porque de acuerdo con Rodríguez, Gil & García (1996) este tipo de enfoque se preocupa por hacer los estudios centrados en los sujetos, ya que se basa en recolectar la información respecto a la observación de comportamientos naturales, discursos y respuestas abiertas para luego interpretar los significados.

Desde esta perspectiva, como en este trabajo se interesa analizar a un grupo de estudiantes, para dar cuenta de los procesos de matematización que logran cuando se trabajan los principios base 10 y posicional, utilizando los bloques multibase 10 se relaciona y apoya el desarrollo del diseño de este trabajo. Para lograr esto se distinguen cuatro fases fundamentales en el proceso de investigación cualitativa: Preparatoria, Trabajo de Campo, Analítica, Informativa.

Fase Preparatoria: Esta fase se compone con dos etapas, una es reflexiva y la otra de diseño, que se verán reflejadas en un marco teórico conceptual y en la planeación de actividades que se llevarán a cabo después. Así pues, en la etapa reflexiva se desarrolla el campo de estudio, la problemática encontrada en cuanto a la enseñanza y aprendizaje del SND, la justificación de la relevancia de este trabajo, los objetivos propuestos y fundamentos conceptuales o marco teórico.

En la etapa de diseño, se ponen en juego las siguientes preguntas. Esta etapa se verá reflejada en la descripción de la población y en el apartado de los Instrumentos para la recolección de información.

- ¿Qué diseño será más adecuado a la formación, experiencia y opción ético-política del investigador?
 - ¿Qué o quién va a ser investigado?
 - ¿Qué método de indagación se va a utilizar?
 - ¿Qué técnicas de investigación se utilizarán para recoger y analizar los datos?
 - ¿Desde qué perspectiva, o marco conceptual, van a elaborarse las conclusiones de la investigación? (Rodríguez, Gil & García, 1996, p.67)

Fase Trabajo de Campo: Se da a partir de lo experimental en la puesta en acto de las actividades. Esta se divide en dos etapas la primera es el acceso al campo y la segunda la recogida productiva de datos.

En la etapa del acceso al campo, el observador entrará progresivamente, es necesario estar preparado, reconocer el entorno y el tipo de población en el que se realizará la puesta en acto, además para el proceso de observación se debe de apoyar con grabaciones con videos, notas y observaciones no estructuradas.

La etapa de recogida productiva de datos se debe de recoger suficiente cantidad necesaria de datos por parte de cada sujeto.

Fase Analítica: Es necesario desarrollar los siguientes ítems: reducción de datos, disposición y transformación de datos, por último, obtención de resultados y verificación de conclusiones.

Fase Informativa: El trabajo termina con la presentación de resultados obtenidos y con base a ello ofrecer un resumen de los principales descubrimientos obtenidos y de ese modo presentar los resultados que apoyan las conclusiones.

Se propone que una vez recogidos los datos en las fases anterior es analizar a partir del marco teórico presentado para comparar los datos obtenidos con los objetivos y finalmente se espera responder a la pregunta y dar algunas reflexiones para la enseñanza y aprendizaje del SND.

3.2 Población

La población con la cual se trabajó para la implementación de la propuesta de aula diseñada fueron 10 estudiantes de la Institución Educativa Técnica Industrial Pedro Antonio Molina (IETI PAM), sede Vencedores, del grado segundo de la Educación Básica Primaria, sus edades oscilan entre 6 y 8 años. Estos son seleccionados sin tener en cuenta algún tipo de desempeño sobresaliente, únicamente se pidió que tuvieran conocimientos básicos para contar y sumar aleatoriamente, así la profesora de matemáticas encargada de ellos los seleccionó.

En cuanto a la institución, fue fundada en el año 1978, está ubicada en la ciudad de Santiago de Cali, barrio San Luis II. La institución ofrece atención a: primera infancia, básica primaria y secundaria, formación Técnica Industrial y aceleración para el aprendizaje. El estudio se hace con esta institución porque hay vínculos que permiten acercarse a ella y favorecen para trabajar con dichos estudiantes.

3.3 Instrumento para la recolección de información

De acuerdo con Rodríguez, Gil & García (1996) en los enfoques cualitativos para tomar información hay ciertos instrumentos que se privilegian para recoger la información los cuales en este trabajo son tenidos en cuenta y a continuación se presentan y describen:

- Propuesta de aula diseñada, es decir, las hojas de trabajo donde los estudiantes van a escribir las respuestas dadas a cada una de las preguntas que se le hacen.
- Toma de apuntes de la investigadora que se generan durante la implementación de la propuesta de aula con los estudiantes.
- Registros de audio y video con los cuales se graban las implementaciones de la propuesta con los estudiantes, en particular, este instrumento se vuelve de suma importancia para capturar detalles de las participaciones de los estudiantes que luego se usarán como posibles evidencias en los análisis para dar respuesta a los propósitos trazados.

3.4 Descripción de propuesta de aula

El diseño de la propuesta de aula está conformado por dos situaciones a continuación se describe cada uno:

La primera situación es llamada “*¡Es hora de jugar con un rompecabezas!*” (Ver anexo 1). Esta centra su atención en el principio base 10 del SND. Se compone de tres tareas en la cual las dos primeras están ligadas al uso de los bloques multibase 10 y se contextualizan en un juego que lleva una profesora de matemáticas a una clase y a partir de ahí se crean varios ítems que los estudiantes deberán resolver. Por su parte la tercera y última tarea ya no depende del uso del artefacto, sino que se desprende de su uso y manipulación, también del contexto en el cual está situado.

Lo anterior se hizo considerando que en general las tareas se corresponden con los niveles de matematización. De este modo la primera tarea se ubica en el nivel situacional, pues, el estudiante tiene un primer contacto con la situación que se ha diseñado en la cual se presenta el uso del artefacto, conocer su uso, su empleo, entre otros elementos. La segunda tarea se corresponde con el nivel referencial, con ella se busca que los estudiantes representen un número con el artefacto a través de un contexto, además de tener un acercamiento al principio base 10 del SND. Finalmente, la tercera tarea se corresponde con el nivel general, por tanto y de acuerdo con los principios del EMR ya tiene que haber un desprendimiento de los modelos propios del uso del artefacto para que el estudiante avance a construir modelos generales que no estén pensados en el contexto de la situación sino valga la redundancia que sean generales.

Ahora bien, el propósito de la primera tarea es que los estudiantes logren ubicarse en el contexto de la situación en el cual el artefacto juega un papel primordial. Para eso se configuran 6 preguntas:

- De la pregunta 1 a la 3 es identificar cada una de las fichas que componen los bloques, para ello se pregunta la cantidad entregada.

- De la pregunta 4 a 6 es determinar cuántas fichas se requieren para formar otra ficha, por ejemplo, cuántos “cubos” son necesarios para formar una “barra”.

El propósito de la segunda tarea es que el estudiante realice composiciones y descomposiciones para representar números haciendo uso del artefacto, a partir de ahí surgen 10 preguntas:

- La pregunta 1 busca interpretar la relación que tienen los cubos mostrados con el número 12, de este modo pueden identificar las unidades sueltas que se pueden mostrar por medio de los bloques para representar un número.
- La 2 quiere involucrar la representación de una decena por medio de los bloques multibase de esta forma los estudiantes podrán apreciar dos formas de representación de un número por medio del artefacto.
- La 3 y 4 están relacionadas puesto que su intención es la descomposición de un número y de este modo representarse de formas diferentes.
- De la pregunta 5 a la 7 se pide representar diferentes números con la menor cantidad de fichas posibles con el fin de hacer composiciones.
- Con la pregunta 8 se busca que los estudiantes realicen composiciones y descomposiciones.
- La 9 y 10 se quiere que reconozcan un número a partir de la representación de los bloques.

Por último, el propósito de la tercera tarea es que el estudiante reconozca la idea de unidad, decena, centena y a partir de ahí, usarlas para la representación de distintos números, para ello se compone de 7 preguntas:

- De la pregunta 1 a la 7 es identificar la cantidad de unidades, decenas o centenas que tiene un número. Las preguntas de la 1 a la 5 se distinguen por representación de un número por medio de los bloques multibase, a diferencia con la 6 y 7 que se representa con números concretos.
- La pregunta 5 busca identificar otra representación teniendo en cuenta el principio base 10.

La segunda situación es llamada “*Valorando la posición de las cifras de un número*”. Sus dos tareas están relacionadas con el principio posicional del SND, la primera tarea sigue el mismo contexto de la primera situación, a diferencia de la segunda que no tiene un contexto específico. Como el nivel situacional se presenció en la primera situación, en este caso, se empieza con el nivel referencial, pues este nivel plantea un contexto en la cual hace énfasis al principio que se trabaja aquí. Luego, se pasa al nivel general es por eso que la segunda tarea no es contextualizada.

El propósito de la primera tarea es reconocer el valor de la posición de un dígito en un número con la ayuda de los bloques multibase. De tal forma que se realizan 5 preguntas:

- De la pregunta 1 y la 2 es reconocer la cantidad de unidades sueltas, decenas o centenas a través de una representación con los bloques, además, se quiere que los estudiantes comprendan que con determinadas fichas solo se puede representar un número.
- De la pregunta 3 y la 5 es comprender que la posición de las fichas de los bloques no influye con la posición de las cifras de un número.
- De la pregunta 4 es relacionar las fichas del artefacto con un número y de este modo reconocer el valor de posición que ocupa cada cifra de dicho número.

El propósito de la segunda tarea es reconocer el valor de la posición de un dígito en un número sin hacer uso del artefacto. Está compuesto de 5 preguntas:

- De la pregunta 1 es identificar un número dando su posición según sus unidades, decenas o centenas.
- La 2 y 3 es reconocer el valor de posición de las cifras de un número determinado con la diferencia que en el ítem 3 se dan tres cifras con el fin de que el estudiante acomode las cifras de diferentes formas y distingan que el valor de posición también varía.
- La pregunta 4 es analizar la conversación que tiene una docente con sus estudiantes en la que se pregunta sobre la posición de un número.
- La pregunta 5 es evaluar los aportes que las actividades les brindaron a los estudiantes.

A continuación, se presenta la información más importante que configura la propuesta de aula:

<i>Situación 1</i>	<i>Tarea</i>	<i>Propósito de tareas</i>	<i>Nivel de matematización</i>	<i>Procesos movilizados en cada tarea</i>	<i>Cantidad de preguntas</i>
<i>¡Es hora de jugar con un rompecabezas!</i>	<i>1. Identificando las fichas del rompecabezas</i>	Ubicarse en el contexto de la situación en el cual el artefacto (bloques multibase 10) juega un papel primordial	Nivel situacional	Conteo	6
	<i>2. Armando y desarmando las fichas del rompecabezas</i>	Realizar composiciones y descomposiciones para representar números haciendo uso del artefacto	Nivel referencial	Composición y descomposición	10
	<i>3. Cambio de nombres de las fichas del rompecabezas</i>	Reconocer la idea de unidad, decena, centena y a partir de ahí, usarlas para la representación de distintos números	Nivel general	Composición, descomposición y conteo	7
<i>Situación 2</i> <i>Valorando la posición de las cifras de un número</i>	<i>1. Valorando la posición de los dígitos en los números</i>	Reconocer el valor de posición de un dígito en un número con el uso del artefacto.	Nivel referencial	Conteo y composición	5
	<i>2. Clase final de la profesora</i>	Reconocer el valor de posición de un dígito en un número sin el artefacto.	Nivel general	Conteo, composición y descomposición	5

Tabla 1. Elementos principales que configuran la propuesta de aula

3.5 Metodología de la implementación de la propuesta de aula

La propuesta de aula se implementó en dos secciones distintas con los estudiantes. En la primera de ellas se trabajó la primera situación, se emplearon 4 horas de trabajo con los estudiantes. Los niños fueron ubicados en parejas, al iniciar está sesión la profesora que es la misma investigadora de este trabajo hizo lectura conjunta con los estudiantes de toda la situación, una vez leída la situación los estudiantes empezaron a resolver las preguntas planteadas y la profesora se encargó de pasar puesto por puesto resolviendo las dudas de ellos. Los estudiantes respondieron la pregunta 1 de la tarea 3 en forma de plenaria.

En la segunda sesión se desarrolló la segunda situación, con los mismos 10 estudiantes, la duración fue de 3 horas. Aquí los niños se hicieron nuevamente en parejas, en general fueron las mismas que trabajaron en la situación 1. Al inicio se emplearon los primeros 15 minutos para retomar aspectos relevantes de la primera situación como los nombres de cada ficha, la idea de unidad, decena, centena, entre otras. También, se dio una breve explicación sobre los dígitos de un número. Posteriormente, se lee la segunda situación, los estudiantes empiezan a desarrollar los puntos y la profesora empieza a pasar por los puestos estando pendiente de ellos haciendo consultas, resolviendo dudas y finalmente hubo una corta socialización en la que se habló de los aspectos aprendidos en las dos secciones.

3.5 Análisis de los resultados

Los análisis que aquí se presentan se hacen atendiendo a las respuestas ofrecidas por los estudiantes a los distintos ítems que configuran la propuesta de aula. En estos análisis se van a emplear algunas de las imágenes en donde se observe la producción escrita de los estudiantes tomadas durante el trabajo en el aula, también, hay momentos en los que se emplee diálogos transcritos obtenidos de las grabaciones de audio y video. Ambos elementos, tanto las imágenes como los diálogos, sirven como evidencia para darle fuerza a los análisis que se presentan.

Ahora bien, para facilitar la comprensión y brindar orden a los análisis, se hace uso de los siguientes nomencladores: para indicar las parejas de estudiantes conformadas en los análisis se va a usar a P1, P2, P3, P4 y P5. A los estudiantes se denota como E1, E2, E3,

E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10. La situación 1 y la situación 2 se representan como S1 y S2 respectivamente. Las tareas que son expresadas como tarea 1, tarea 2, etc., serán vistas como T1, T2, etc. En las transcripciones de los diálogos se usarán L1, L2, L3, L4... para indicar cada una de las líneas que lo componen, lo que facilita en el momento de hacer los análisis poderse dirigir a alguna ellas. Finalmente, para las intervenciones de la investigadora se utilizará la letra I.

3.6.1 Análisis de situación 1

A continuación, se presenta el análisis de las tres tareas de esta situación.

Análisis de la tarea 1

Con las preguntas 1, 2, y 3 se buscaba que los estudiantes identificaran cuantos cubos, barras y plaquetas componían los bloques. Ante esto, todos los estudiantes reconocieron que tenían 20 cubos, 10 barras y 2 plaquetas

Las preguntas 4, 5 y 6 buscaban que los estudiantes indicaran cuántos cubos configuran una barra o placa, o cuántas barras configuran una placa. De este modo, las cinco parejas respondieron que una barra contiene 10 cubos y una placa contiene 10 barras o 100 cubos. Sin embargo, estas preguntas fueron desarrolladas de dos formas diferentes. A continuación, se describe lo concerniente al método que empleó P1, P2 y P4

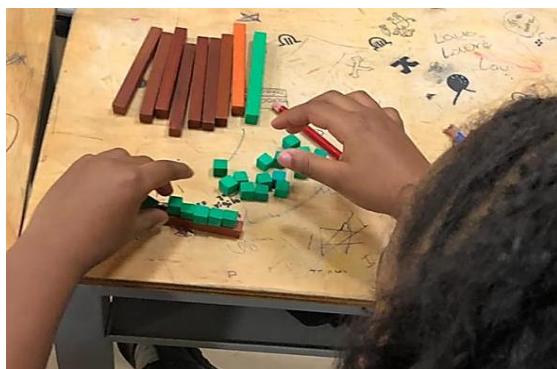


Figura 2. E7 sobreponiendo los cubos en una barra



Figura 3. E3 sobreponiendo las barras en una placa

Lo que se deja ver, a partir de las Figuras 2 y 3 es como los estudiantes emplean una estrategia particular para responder correctamente a estos ítems, a través de la superposición de las fichas, unas con respecto a las otras y posteriormente el conteo de

ellas. Obsérvese claramente como en la Figura 3, E3 posiciona las barras sobre de una de las plaquetas y está haciendo el conteo de ellas. Un caso similar muestra la Figura 2 cuando E7 ubica los cubos sobre una barra, y así conoce la cantidad necesaria de cubos que conforman una barra.

Estos elementos dejan ver el rol epistémico que juega el artefacto, en virtud del cual se despliega una serie de estrategias para responder, dado que es con el artefacto que los estudiantes llegan a soluciones y dar cuenta de la relación que hay entre la cantidad de cubos y barras, a su vez cantidad de cubos y barras con plaquetas. También se evidencia el rol cognitivo, en el momento que el estudiante toma conciencia, en este caso, cuando reconoce que una barra está conformada por diez cubos y así sucesivamente.

No obstante, por su parte P3 y P5 no emplean exactamente la misma estrategia descrita por las parejas anteriores. Estas dos parejas lo que hacen es tomar en consideración las hendiduras que contiene material y hacer un conteo sobre esas. Nuevamente, aun cuando no hay proceso de superposición entre fichas, se ve claramente el rol epistémico y cognitivo que le permite al estudiante con este material dar cuenta la cantidad de cubos necesarios para formar una barra, etc.

Finalmente, lo descrito anteriormente deja ver que los estudiantes pasan por un nivel situacional en términos de la EMR, dado que hacen uso de sus conocimientos previos, en este caso son fundamentalmente el conteo, el trabajo de comparación y en un caso el trabajo de superposición. Además, los estudiantes se acercan al contexto de la situación, tal contexto está diseñado en la manipulación de los bloques y ese acercamiento se hace a partir del reconocimiento de las fichas que lo componen y de las equivalencias que hay de unas fichas con respecto a otras, lo cual era el propósito fundamental de esta tarea por lo que se puede indicar que se logra a cabalidad tal propósito.

Análisis de la tarea 2

Con los primeros dos ítems de esta segunda tarea lo que se proponía a los estudiantes era comparar dos representaciones distintas para dos números, en el primer caso el número doce y en el segundo el número dieciocho. Al analizar las producciones de los estudiantes, se logra percibir que las cinco parejas se dieron cuenta que es Valentina quien ha hecho la representación correcta del número doce (ítem 1), dado que efectivamente tiene doce

cubos. Lo anterior se ilustra a modo de ejemplo con la producción de P3, expuesta en la Figura 4.

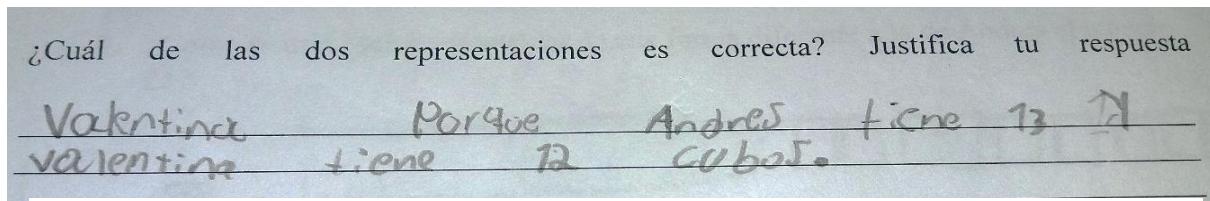


Figura 4. Respuesta de P3 a la pregunta 2, T2, S1

En el segundo ítem, a pesar de que las representaciones del número 18 son distintas, todos los estudiantes fueron conscientes de que ambas representan el mismo número.

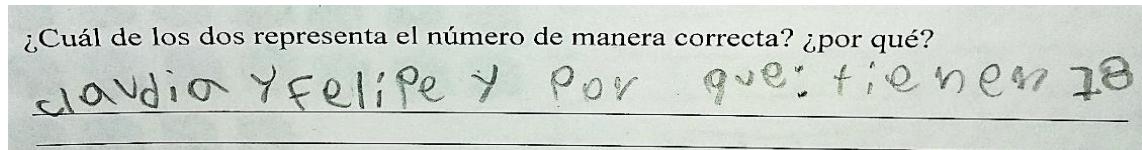


Figura 5. Respuesta de P2, a la pregunta 2, T2, S1

La Figura 5 es la producción de P2 y ejemplifica las respuestas de las parejas. Cabe aclarar que solo P4 dio por hecho que la barra equivale a diez unidades, mientras que las otras parejas contaron cada cubo dentro de la barra para poder sacar una conclusión acerca de la representación. Esto se evidencia en el siguiente dialogo obtenido de una conversación registrada con un estudiante de P4:

L1. I: ¿A qué número equivale la representación de Claudia?
 L2. E7: Dieciocho
 L3. I: ¿Por qué?
 L4. E7: Porque uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho. Y ocho más diez da dieciocho.

Nótese que en L4 se muestra claramente como E7 suma los ocho cubos y la barra que representa el diez, sin necesidad de contar cada cubo que se encuentra en ella.

Seguidamente, en el tercer y cuarto ítem se exhibe el número 25 con las fichas del rompecabezas. En el tercer ítem se da la representación del número con la menor cantidad de fichas posibles, los estudiantes deben de justificar si lo mostrado es correcto o no. Todos efectivamente, contestan que es cierto, como ejemplo se presenta la respuesta de P5 en la Figura 6.

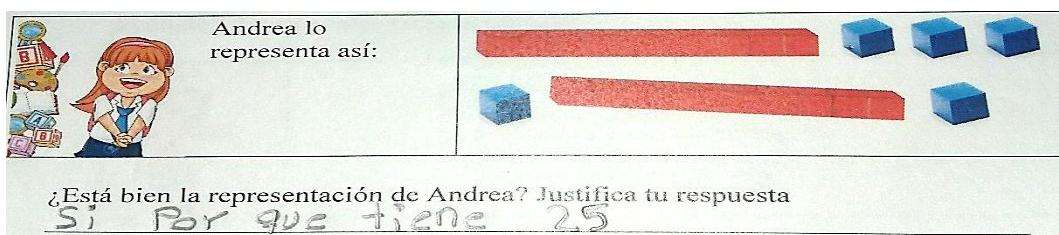


Figura 6. Respuesta de P5, a la pregunta 3, T2, S1

Del mismo modo, P4 y P5 no tuvieron necesidad de hacer el conteo de la cantidad de cubos en la barra, sino que automáticamente ellos dan por hecho de que cada una de estas representa diez (cubos). De manera distinta actuaron las otras parejas, P1, P2 y P3, dado que ellas sí tuvieron que recurrir nuevamente al conteo de cada uno de los cubos que configuran las barras.

En cuanto al cuarto ítem, se pide representar dicho número con la condición de que no sea la misma del ítem 3. Ante esto, se pudo encontrar dos tipos de respuesta: P1, P3 y P5 hicieron la descomposición de la representación del número 25 utilizando una barra y 15 cubos, tal y como se muestra en la Figura 7

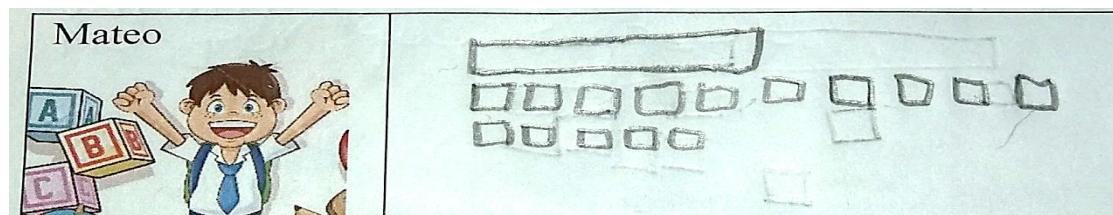


Figura 7. Representación del número 25, realizada por P5

Llama la atención que está pareja de estudiantes junto con P3 no realizan marcaciones en la barra, lo que sugiere la toma de conciencia que tienen de la representación de la barra: que representa diez cubos. Por su parte, P1 tienen la necesidad de recurrir a las marcaciones, tal como se muestra en la Figura 8.

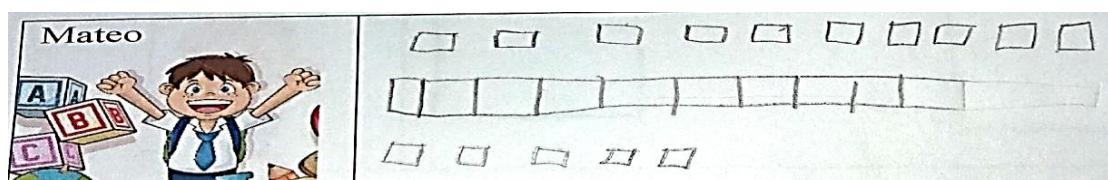


Figura 8. Representación del número 25, realizado por P1

El otro tipo de respuesta realizado por P2 y P4 consiste en la descomposición de todas las barras, representando el número con veinticinco cubos, tal y como se puede observar en Figura 9.

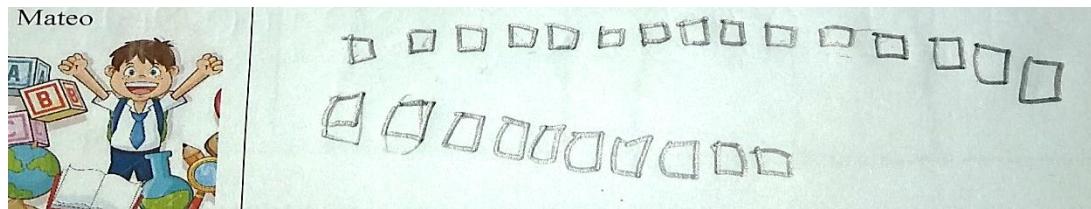


Figura 9. Representación del número 25, realizado por P4

Ahora bien, en las preguntas 5, 6 y 7 se solicitaba representar los números 42, 30 y 200 respectivamente, en los tres casos utilizando la menor cantidad de fichas posibles. De esto, se puede evidenciar que las cinco parejas de estudiantes, efectivamente, hacen las representaciones correctamente. En el primer caso, usando cuatro barras y dos cubos, en el segundo caso tres barras, en el tercer caso dos plaquetas. Sin embargo, llama la atención que, para dos de las parejas, P1 y P2, es muy importante las marcaciones de las barras, esto es, hacer notar que cada barra se compone por 10 cubos. A modo ejemplo se muestra la Figura 10. Mientras que para las otras tres parejas P3, P4 y P5, no son necesarias las marcaciones internas, tal como se presenta en la Figura 11.

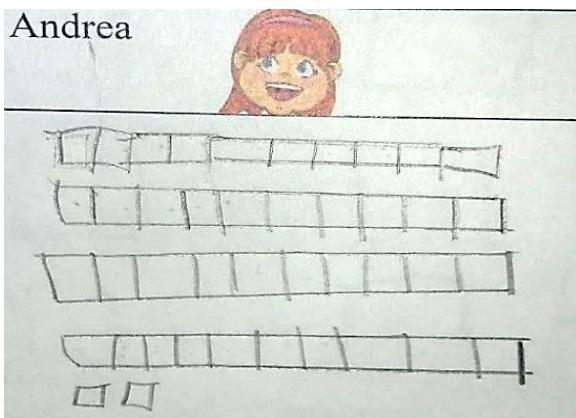


Figura 10. Representación del número 42, realizado por P1

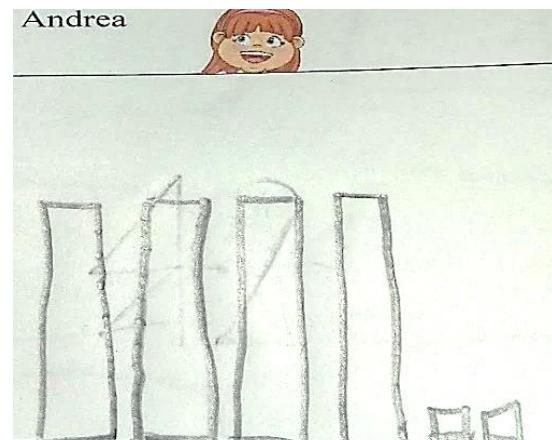


Figura 11. Representación del número 42, realizado por P3

En el ítem 6 todas las parejas realizan la representación del número 30, dando por hecho el valor de cada barra, en este caso ninguna pareja realiza marcaciones. Por ejemplo, la ilustración de P5 en la Figura 12, es evidencia de lo anterior.

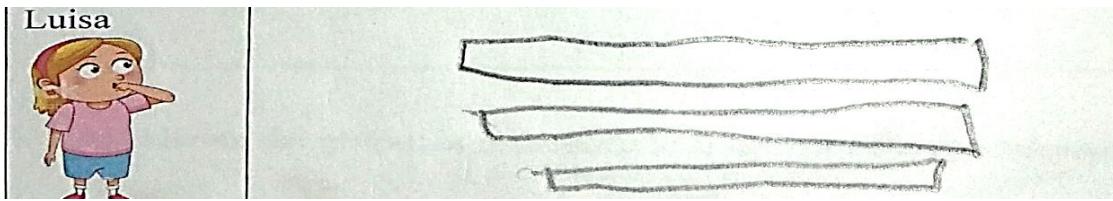


Figura 12. Representación del número 30 por P5

Sin embargo, en algo que coinciden las parejas es que en la última representación (la del número doscientos) ninguno intenta hacer las marcaciones y simplemente dibujan dos cuadrados que representan una plaqueta cada uno, lo cual se puede observar en la Figura 13.

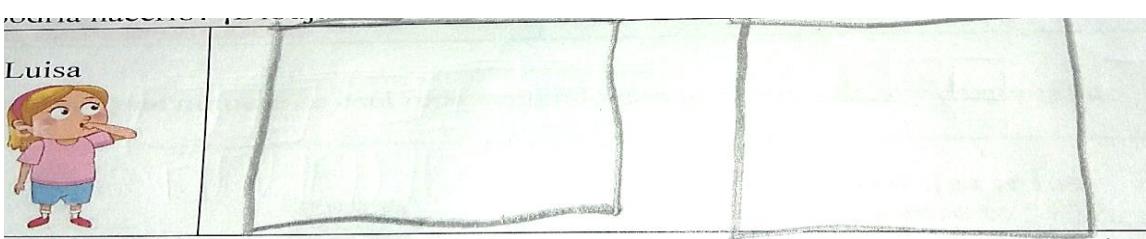


Figura 13. Representación del número 200, realizado por P3

Lo que pone de manifiesto los elementos anteriores es que los estudiantes empiezan a tomar conciencia, que cada plaqueta independientemente de su tamaño representa cien cubos y cada barra representa diez cubos, además, hay una conciencia de que las fichas deben de guardar más o menos cierta congruencia, porque, aunque no es muy preciso, en los dibujos de los estudiantes se nota un esfuerzo para que las representaciones mantengan la misma medida.

El ítem 8 básicamente tenía el mismo propósito de los ítems anteriores, pues se da un número, en este caso el 572, y se esperaba que las parejas de estudiantes lo representaran de dos formas diferentes. Lo que se nota de entrada es que para ellos esto los predispone, debido al trabajo que les costó y esto se evidenció porque en la implementación, ellos manifestaban que era un número demasiado grande. Sin embargo, lo que se deja ver es que todas las parejas al menos hicieron una representación correcta, utilizando la menor cantidad de fichas posibles, tal representación está compuesta por cinco cuadrados grandes (representando plaquetas), siete rectángulos (representando barras) y dos cuadrados pequeños (representando cubos).

De estas cinco parejas, P3 y P4 hicieron dos veces la misma representación, P5 solamente se quedó con una representación, la segunda representación de P1 está errada

dado que ilustra 6 plaquetas, y solamente P2 logra hacer una representación correcta del número 572 distinta a la inicialmente expuesta. Lo que hace esta última pareja es dibujar cinco cuadrados grandes y el 72 lo representa con 72 cuadrados pequeños.

Llama la atención, que P2, logra presentar diferentes composiciones para el mismo número, es decir, sus esquematizaciones van más allá del solo hecho de quedarse con una sola composición, en cambio, las otras cuatro parejas se quedan solamente con una forma, al menos correcta de composición. En el lado izquierdo de la Figura 14 se puede observar la representación del número 572, expuesta por P2 con la menor cantidad de fichas (como se mencionó anteriormente, la representación realizada por las cinco parejas) y en el lado derecho de la misma figura la otra forma que optó esta pareja por representar el mismo número.



Figura 14. Dos representaciones del número 572, realizado por P2

Para finalizar esta tarea, en los ítems 9 y 10 se les presentan una cantidad de barras, cubos y plaquetas y se les solicita los estudiantes indicar cual es el número que es representado con cierta cantidad de fichas.

De este modo, con las representaciones dadas, todas las parejas respondieron de manera adecuada, pues, para el ítem 9 expresaron que se representa el número 20 y para el ítem 10 el número 232. Esto se ilustra a modo de ejemplo en la Figura 15. Además, se puede deducir que estos elementos permiten evidenciar que es con el artefacto que los estudiantes logran reconocer las representaciones de los números tomando en

consideración que cada una de las fichas representan cierta cantidad de cubos, lo cual pone de manifiesto la base diez del SND que está trabajándose con estos bloques multibase.

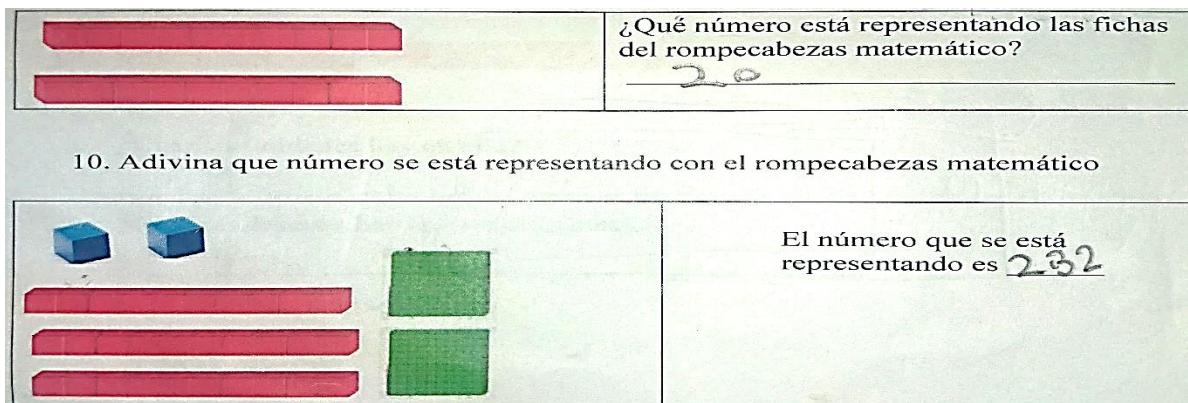


Figura 15. Respuesta de P4, a la pregunta 9 y 10, T2, S1

Análisis de la tarea 3

En esta tarea se cambia los nombres de las fichas. A los cubos se le llaman unidades, a las barras decenas y a las plaquetas centenas. En el primer ítem se quiere concientizar a los estudiantes de las equivalencias entre las fichas de los bloques multibase 10 utilizando el nuevo vocabulario, sin embargo, solo dos parejas, P1 y P5, respondieron correctamente, indicando que una decena se compone de diez unidades y una centena contiene diez decenas o cien unidades. Las otras tres parejas, P2, P3 y P4, tuvieron una confusión a la hora de describir cuantas decenas y unidades contiene una centena. Por ejemplo, la Figura 16 representa las respuestas correctas resueltas por P5 y la Figura 17 muestra el error por parte de P3.

- Cada diez unidades pueden ser remplazada por una decena.
- Cada diez decenas es remplazada por una centena.
- Una centena contiene 10 decenas o 100 unidades.
- Una decena contiene 10 unidades.

Figura 17. Respuesta de P5, a la pregunta 1, T3, S1

- Cada diez unidades pueden ser remplazada por una Decena.
- Cada diez decenas es remplazada por una Centena.
- Una centena contiene 100 decenas o 100 unidades.
- Una decena contiene 10 unidades.

Figura 16. Respuesta de P3, a la pregunta 1, T3, S1

Seguidamente, en los ítems dos, tres y cuatro se dan las representaciones de fichas del artefacto que corresponden a los números cuarenta (cuatro barras), doscientos (dos plaquetas) y ciento veintiuno (una plaqueta, dos barras, un cubo), respectivamente. Dicho

lo anterior, los estudiantes debían de expresar cuantas unidades, decenas y centenas se encuentran en cada una. Así pues, en el segundo ítem todas las parejas respondieron de manera adecuada, indicando que esa representación contiene cuarenta unidades y cuatro decenas. Esto indica que los estudiantes lograron reconocer la cantidad de unidades que contiene cada barra sin marcaciones como se muestra a modo ejemplo en la Figura 18 por P4.

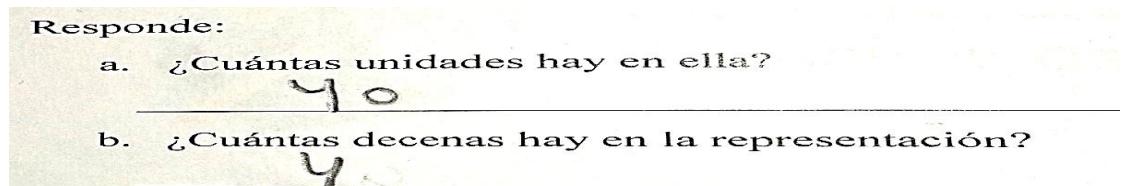


Figura 18. Respuesta de P4, a la pregunta 2, T3, SI

En el tercer ítem, las parejas, P2, P3 y P4, respondieron correctamente, manifestando que en la representación hay doscientas unidades, veinte decenas y dos centenas, se puede observar en la Figura 19.

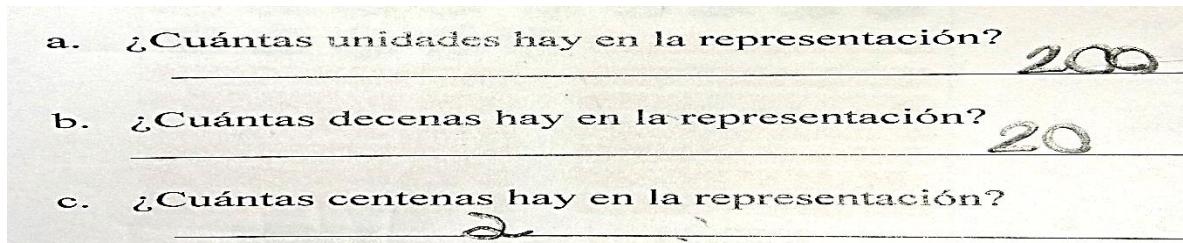


Figura 19. Respuesta de P3, a la pregunta 3, T3, SI

También, se obtiene del video un dialogo entre P2 y la investigadora:

L18. E4: Dos centenas tienen doscientas unidades
 L19. I: ¿Y cuántas decenas hay en dos centenas? (señalando la imagen del ítem 3)
 L20. E3: Cien...
 L22. E4: Doscientos... ¿trescientos?
 L23. I: En una sola centena, ¿cuántas decenas hay?
 L24. E3: Diez, profe
 L25. I: Y en las dos centenas, ¿cuántas decenas habría?
 L26. E3: Veinte, profe
 L27. E4: Y hay dos centenas

De lo anterior, en L20 y L22 se puede notar la confusión de la pareja para reconocer la cantidad de decenas y por medio de las preguntas en L23 y L25 por parte de I ellos llegan a la respuesta acertada como se ve en L26. Se logra identificar, que a estos estudiantes se les facilitó realizar descomposiciones con dos plaquetas.

Las otras dos parejas tuvieron errores, tales como, afirmar que hay veinte unidades, diez decenas y veinte centenas, en dos centenas, dicho por P1 o lo único erróneo por P5 que manifestó que la representación contiene doce decenas. Estas dos parejas y sobre todo P1 muestran dificultad para reconocer las equivalencias entre unidades, decenas y centenas en un número que es grande para ellos. Vea la Figura 20, por P1

a. ¿Cuántas unidades hay en la representación?
20

b. ¿Cuántas decenas hay en la representación?
10

c. ¿Cuántas centenas hay en la representación?
20

Figura 20. Respuesta de P1, a la pregunta 3, T3, SI

En el cuarto ítem, respondieron de manera adecuada las parejas, P2, P3, P5, pues manifestaron que la representación dada contiene ciento veintiuno unidades, doce decenas y una centena, claramente, estos estudiantes lograron reconocer la descomposición de cada ficha dada tanto en unidades como en decenas. Se muestra un ejemplo de la solución de P5, vea la Figura 21.

a. ¿Cuántas unidades hay en la representación?
121

b. ¿Cuántas decenas hay en la representación?
12

c. ¿Cuántas centenas hay en la representación?
1

Figura 21. Respuesta de P5, a la pregunta 4, T3, SI

Las otras dos parejas, P1 y P4, respondieron de manera incorrecta, dado que en el caso de P1 respondió que la representación contiene 23 unidades, para las decenas y centenas contestó de manera acertada. P4 respondió que la representación tiene una unidad, veinte decenas y cien centenas. Esto quiere decir que estas dos parejas en especial P4, tiene dificultades para descomponer las fichas de los bloques, sobre todo cuando estas se combinan entre ellas. Observe la Figura 22.

a. ¿Cuántas unidades hay en la representación?

1

b. ¿Cuántas decenas hay en la representación?

20

c. ¿Cuántas centenas hay en la representación?

100

Figura 22. Respuesta de P4, a la pregunta 4, T3, S1

Antes del ítem 5 se le aclara a los estudiantes que la mejor forma de representar un número es utilizando la menor cantidad de fichas posibles. De este modo, se les presentan catorce cubos, trece barras y dos plaquetas. A partir de ahí, se establecen cinco preguntas, la primera cuestiona si la representación dada es la indicada, considerando la aclaración antes expuesta, las otras hacen referencia al número que se está representando y la cantidad de unidades, decenas y centenas que hay en dicha representación. Sin embargo, para la primera pregunta, las parejas, P1, P2, P4 y P5, respondieron que la representación estaba correcta, esto quiere decir que a partir de las fichas dadas no logran hacer una composición para que la presentación quede con la menor cantidad de fichas posibles.

Ante la pregunta de qué número se está representando ninguna pareja respondió correctamente, P1 no respondió, P2, P3, P4 y P5 indicaron que se representan los números 244, 342, 470 y 130, respectivamente. Lo mismo sucedió con la pregunta de cuantas unidades tiene la representación, ninguno respondió correctamente, P1 no respondió P2, P3 y P4 respondieron 14, 342, 13 y 14 respectivamente.

En la pregunta de la cantidad de decenas todos respondieron incorrectamente, P1 no respondió, P3 y P5 expresaron que 130, P2 y P4 indicaron que tiene 33 y 13 decenas correspondientemente. En cuanto a las centenas totales, las respuestas fueron erradas. P1 no contestó, P2, P3 y P4 dijeron que contiene 2 centenas, P5 dijo que 200.

Por todo lo anterior, se deduce que los estudiantes tuvieron dificultad para reconocer las unidades, decenas y centenas cuando se da una generosa cantidad de fichas. Por ser un número muy grande, tensionó a los estudiantes afectando sus soluciones, en algunos casos ellos reconocen como unidades solo a los cubos, olvidando que, por ejemplo, las decenas y centenas están conformadas por unidades, incluso, cuando anteriormente se han trabajado casos similares, pero con las mismas o pocas fichas. Queda claro que aquí lo que tensiona

es el hecho de que aparecen unidades que deben de ser configuradas para obtener decenas, a su vez, decenas que pasan por un procedimiento similar para producir centenas. En esas equivalencias y en el manejo del principio base 10 los estudiantes tienen dificultades lo que se contrasta, por ejemplo, con los resultados que se obtienen cuando solamente se entregan unidades para que sean configuradas a decenas, así pues, parece ser que una hipótesis que queda es que se dificulta el trabajo con los estudiantes cuando manejan varias reconfiguraciones al mismo tiempo. Sirve de ejemplo la Figura 23 y Figura 24 en la que se muestra la producción escrita por dos parejas diferentes.

a. ¿Es adecuada la representación? ¿por qué?	<i>mala o algo</i>
b. ¿Qué número se está representando?	<i>342</i>
c. ¿Cuántas unidades hay en total?	<i>342</i>
d. ¿Cuántas decenas hay en total?	<i>93</i>
e. ¿Cuántas centenas hay en total?	<i>2</i>

Figura 23. Respuesta de P3, a la pregunta 5, T3, SI

a. ¿Es adecuada la representación? ¿por qué?	<i>Sí</i>
b. ¿Qué número se está representando?	<i>244</i>
c. ¿Cuántas unidades hay en total?	<i>14</i>
d. ¿Cuántas decenas hay en total?	<i>130</i>
e. ¿Cuántas centenas hay en total?	<i>2</i>

Figura 24. Respuesta de P2, a la pregunta 5, T3, SI

Para el ítem 6 y 7 se pasa del uso de representaciones con las fichas del artefacto a usar número naturales, de este modo, se pide que los estudiantes indiquen la cantidad de unidades, decenas y centenas de los números 59 y 602 correspondientes a cada ítem.

Para el ítem 6, en la casilla de las decenas, P1, P2, P3, P4 y P5 respondieron correctamente, afirmando que contiene cinco de estas. En la casilla de las unidades, P1 respondió correctamente, puesto que ellos escribieron el número cincuenta y nueve, lo que indica que P1 supo realizar la descomposición de este número en unidades acertadamente (se puede observar en la Figura 25). En cambio, P2, P3, P4 y P5 respondieron incorrectamente. P3, contestó en la casilla con el número seis. P2, P4 y P5, escribieron el número nueve, se puede inferir que ellos no realizaron una descomposición, pues solo tuvieron en cuenta el número que ocupaba la posición de las unidades en el número 59. En la casilla de las centenas todos los estudiantes colocaron el número cero, esto implica que son conscientes de la composición de este número, pues, hay ausencia de centenas.

Tiene:

a. 5 Decenas

b. 59 Unidades

c. 0 Centenas

Figura 25. Respuesta de P1, a la pregunta 6, T3, SI

En el ítem 7, respondió acertadamente, P1, P2 y P4, pues aseguraron que el número 602 contiene: sesenta decenas, seiscientos dos unidades y seis centenas. P5 contestó que dicho número tiene: cero decenas, dos unidades y seis centenas. Nuevamente, se ve que está pareja escribió cada número respondiendo a la posición de cada cifra del número 602. Por su parte, P3, manifestó que el número indicado contiene diez decenas, una unidad y diez centenas. En la Figura 26 se puede observar a modo ejemplo las respuestas adecuadas por P2 y en la Figura 27 las respuestas incorrectas de P3.

Tiene:

a. 60 Decenas

b. 2 Unidades

c. 6 Centenas

Figura 26. Respuesta de P2, a la pregunta 7, T3, SI

Tiene:

a. 10 Decenas

b. 1 Unidades

c. 10 Centenas

Figura 27. Respuesta de P3, a la pregunta 7, T3, SI

Hay aspectos importantes que dejan ver estos últimos dos ítems y es que separarse de lo concreto para trabajar únicamente con lo simbólico dificultó el trabajo a los estudiantes, además, parece ser que la mayoría de los estudiantes lo que hacen es separar los dígitos, como se hace desde la formación tradicional en la escuela.

El hecho de que los estudiantes en esta tarea no hayan manipulado el artefacto dejó ver de forma muy notoria las dificultades que ellos todavía tienen para hacer nuevas composiciones de unidades a decenas y de decenas a centenas, esto se dejó ver especialmente cuando de forma simultánea se hacía esta solicitud como por ejemplo, en el ítem 5, el hecho de no tener el artefacto siendo con el que surgía las composiciones y descomposiciones dificultó la solución de los ejercicios especialmente los que en simultaneo podrían ser varias composiciones y recomposiciones entre unidades, decenas y centenas.

Eso fue mucho más evidente cuando se solicitó en los números 59 y 602 decir la cantidad de decenas, unidades y centenas que tiene cada uno porque ya da a pensar sobre lo abstracto, es decir, no en una ciencia completa del artefacto sino a nivel más general, lo que no se logra. Se considera que, en ese nivel general, a pesar de haber unos primeros indicios de empezar a desprenderse del artefacto, pero no se logran los resultados esperados, entonces la comprensión sobre el principio base 10 del SND no se consolida. Por consiguiente, el propósito de esta tarea se logra de forma parcial, porque al principio los estudiantes si logran reconocer las equivalencias entre unidades, decenas y centenas, y la cantidad de ellas cuando la representación consta de un mismo tipo de fichas del artefacto, como se presenta en los ítems 2 y 3. Pero cuando se presentan los tres tipos de fichas diferentes a la vez se dificulta más reconocer dichas equivalencias.

3.6.2 Análisis de la situación 2

A continuación, se presenta el análisis de las dos tareas de esta situación.

Análisis de la tarea 1

Para los dos primeros ítems de esta tarea se le presenta a los estudiantes representaciones con las fichas del rompecabezas (sin marcaciones), en el primer caso sin hacer uso de centenas, en el segundo caso sí. De este modo, se pregunta a los estudiantes por la cantidad de unidades sueltas, cantidad de decenas, cantidad de centenas y que otros números se pueden formar con las fichas mostradas.

En el ítem 1, todos los estudiantes efectivamente, respondieron que la representación contiene cuatro unidades sueltas. Para las decenas la respuesta correcta por parte de, P1, P3, P4 y P5 fue que había 7 y la respuesta incorrecta fue por P2, pues dijeron que había 70. Esto deja ver que la mayoría de las parejas reconocen la cantidad de unidades y decenas que se muestran en la representación. A pesar de que P2 responde inadecuadamente, se rescata de su respuesta que al parecer esta pareja hizo la conversión de las 7 decenas a 70 unidades, sin embargo, ésta no era la respuesta que se esperaba.

Para la última pregunta, cuatro parejas, P1, P2, P3 y P5, coinciden en afirmar que el 74 es el número que se puede formar, de estas cuatro dos de ellas, P1 y P5 indican no solamente el 74 sino que se arriesgan a dar otros números, sin embargo, estos los dan sin considerar que en enunciado dice que es con todas las fichas, por ejemplo, en el caso de P5

escribe el 70 como un número aislado de las 4 unidades, y en el caso de P1 alude al 70, es decir, a la cantidad de decenas. Adicional a lo mencionado, P4 coloca una respuesta que no se entiende de donde se obtiene dado que ni siquiera da algún tipo de justificación al número 332.

Lo que se deja ver aquí, es que los estudiantes ponen el 74 y nunca les da por colocar el 47, eso implica, que estos estudiantes ya tienen un conocimiento sobre la escritura y la posicionalidad que juegan los dígitos en un número, de alguna forma esto deja ver que ellos tienen conciencia o comprenden que primero va la cantidad de decenas y luego la cantidad de unidades que no alcanzan a formar una decena.

Cabe aclarar que a pesar que ningún estudiante justificó la respuesta, P2 hizo un intento, aunque no es claro lo que trato de expresar, pues escribió “*No porque: No necesitaría*”. Ante esto y la afirmación del anterior párrafo puede tener mayor sentido a partir del siguiente dialogo de una grabación fílmica entre I y P2.

L28. I: ¿Ya respondieron la pregunta c?

L29. E4: Si, setenta y cuatro

L30. I: ¿Utilizando las mismas fichas se puede representar otro número?

L31. E3: Si... el ochenta.

L32. I: A ver ¡Muéstrame!

L33. E3: Mire aquí van treinta (señala las primeras tres barras), aquí cincuenta (señala las otras dos barras), aquí setenta (señala las últimas dos barras), setenta y uno, setenta y dos, setenta y tres, setenta y cuatro (señala cubo por cubo).

L34. I: ¿y se puede representar otro número aparte de setenta y cuatro con estas mismas fichas?

L35. E3: No

L36. I: ¿Por qué?

L37. E4: Es que no se...

De este dialogo se observa en L31 que al comienzo E3 creía que con esas fichas se podría representar otros números como el ochenta, luego en L32 y L34 la I intenta que ellos mismos reconozcan el error y a pesar de que son conscientes de que no se puede realizar otras representaciones numéricas como se muestra en L35, ellos no pueden explicar porque sucede eso como se ve en L37.

De esto se puede deducir dos cuestiones centrales, la primera es que está pareja organiza el número partiendo de las decenas y finalmente adiciona las unidades sueltas y no al contrario, es decir, no parte de las unidades y finaliza con la cantidad de decenas. La

segunda, es que él pareciera tener este principio como una cuestión asumida de tal forma que no encuentra otra forma de hacerlo.

Para el ítem 2, todas las parejas responden acertadamente indicando que la representación contiene 3 unidades sueltas, 3 decenas sueltas y 2 centenas, esto quiere decir que los estudiantes ya reconocen la placa como una centena, la barra como una decena y el cubo como una unidad suelta, también se considera pertinente identificar que a pesar de que las fichas que representan las decenas y centenas aparecen sin marcaciones, los estudiantes ya tienen automatizado el valor de cada una. Sirve de ejemplo las respuestas de P1 en la Figura 28.

a. ¿Cuántas unidades sueltas hay en la representación? 3

b. ¿Cuántas decenas hay en la representación? 3

c. ¿Cuántas centenas hay en la representación? 2

d. ¿Qué números puedes formar con todas las fichas? Justifica tu respuesta.
233

Figura 28. Respuesta de P1, a la pregunta 2, T1, S2

Además, correctamente, P1, P2 y P4, dicen que se forma el número 233, nuevamente es el único número que ellos proponen. Incorrectamente, P3 dice que 230 y P5 escribió el número 232, 2 y 3. A pesar de que estas dos parejas configuran números no tienen en cuenta que era con todas las fichas y utilizan una cantidad de ellas, pero parciales.

Cabe destacar que en estos dos primeros ítems a pesar de que se muestran a los estudiantes todas las fichas en desorden la mayoría responde satisfactoriamente, aunque, ellos aún no tengan conciencia del por qué no se pueden representar varios números con determinada cantidad de fichas.

El ítem 3 muestra dos representaciones, ambas contienen las mismas fichas: siete unidades, dos decenas. Pero las fichas están ubicadas de formas diferentes, primero las siete unidades y a su lado las dos decenas y viceversa. Para la primera forma se dice que se está representando el número 72 (afirmación de Mateo) y para el segundo el 27 (afirmación de Andrea), entonces, se pide identificar cual es la afirmación correcta.

La respuesta de todas las parejas fue acertada, pues afirmaron que el número adecuado para la representación mostrada es el 27, es decir, lo que declaró Andrea. En este

ítem se muestra que independientemente del orden de la representación con las fichas, los estudiantes no se confunden para escribir el número adecuado. Aunque aún los estudiantes no logran justificar correctamente porque sucede esto, una pareja tuvo la intención para argumentar la respuesta dada, cabe aclarar que por su nivel de escolaridad no escriben con total claridad, pero se nota que tienen una idea de que con las fichas dadas no se representa el número 72 sino el 27, se puede observar en la Figura 29.

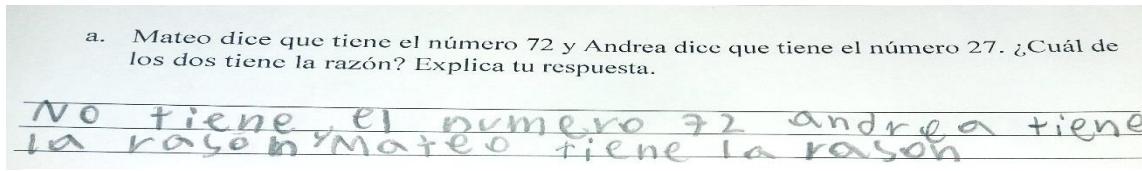


Figura 29. Respuesta de P2, a la pregunta 3, T1, S2

Esto lo que hace es ratificar que los estudiantes toman en consideración el principio de posicionalidad del SND que se viene evidenciando desde el primer ítem, también, se reconoce que hay en juego un principio aditivo pues, ellos para configurar los números suman las dos decenas con las siete unidades sueltas. Lo mismo sucede con las configuraciones de los números anteriores.

Ahora bien, como parte de este ítem se pide a los estudiantes que representen como sería correctamente el número 72, ante esto, todas las parejas efectivamente coinciden en ilustrar siete decenas y dos unidades. Lo que aquí llama la atención es que P2, P4 y P5 parecen organizar las fichas en términos de la posición que permiten configurar el número, es decir, primero inician con las fichas que representan las decenas y terminan con las fichas que representan las unidades sueltas, incluso dos de estas parejas ubicaron a la izquierda las decenas y a la derecha las unidades sueltas. Como se ve en la Figura 30.

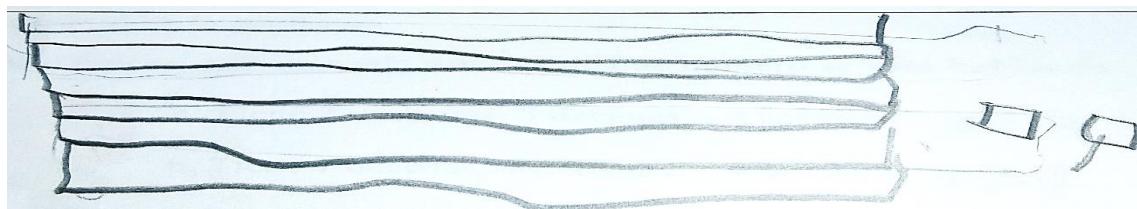


Figura 30. Respuesta de P5, a la pregunta 3, T1, S2

En cambio, P3 y P1, solo tuvieron en cuenta la cantidad y parece que para ellas la posición no es un asunto de interés, por ejemplo, en el caso de P3 comienzan ilustrando las unidades sueltas y luego las decenas, se puede observar en la Figura 31. Cabe resaltar que en el dibujo de P1 lo realizan haciendo marcaciones en las barras.

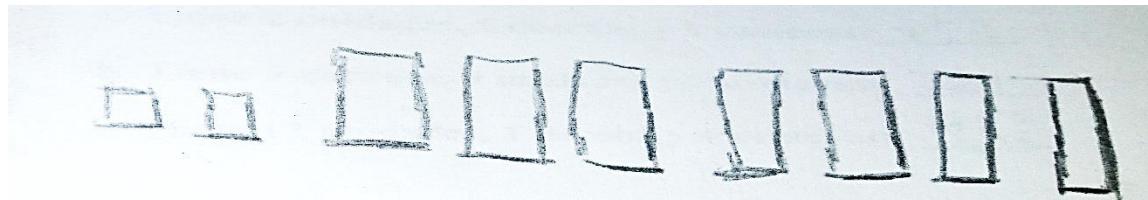


Figura 31. Respuesta de P3, a la pregunta 3, TI, S2

En el ítem 4 se da una representación con tres decenas y nueve unidades, por consiguiente, se pregunta por el número que se está representando y de dicho número reconocer la posición de cada dígito de él. Así pues, P1, P2, P3, P4 y P5 afirmaron apropiadamente que se representa el número 39 y de este el 9 está en la posición de las unidades sueltas, el 3 en el de las decenas y colocaron el 0 en la posición de centenas. Siendo un número pequeño, en el que se utilizan pocas fichas del artefacto a los estudiantes no se les dificultó responder a cada pregunta, solo una pareja estaba un poco desorientada por cuestión de comprensión en la lectura, se puede ver a continuación en el siguiente dialogo con E8:

L38. I: ¿Qué número se está representando con estas fichas? (señala imagen del ítem)

L39. E8: El treinta y nueve

L40. I: ¿Cuál es la posición de unidades?

L41. E8: Yo no sé

L42. I: De este número, el 39, ¿Cuál dígito está en posición de unidades?

L43. E8: El 9

L44. I: y ¿Cuál está en la posición de decenas?

L45. E8: El 3 y el 0 en las decenas

En un comienzo al parecer, E8 no comprendía cuando se hablaba de posición de unidades, pero en L42 se pudo notar como I minuciosamente preguntó de una manera más clara, llegando así a la respuesta esperada L43 y L45

Para el ítem 5 se muestra una representación en la cual primero están ubicadas tres centenas, luego cinco unidades y finalmente tres decenas. Se pregunta si es correcto afirmar que el número es el 353. Todas las parejas responden correctamente, ya que enuncian que la afirmación dada es falsa y el número que realmente se está representando

es el 335. Aquí los estudiantes no justifican su respuesta, pero de la grabación de audio se rescató un dialogo con un estudiante de P2

L46. I: ¿Qué número ves ahí? (señala la imagen del ítem 5)

L47. E3: Trescientos... trescientos uno, trescientos dos, trescientos tres, trescientos cuatro, trescientos cinco, ¿y treinta?... trescientos treinta y cinco

L48. I: Pero Mateo está diciendo que es el número 353, ¿es correcto y por qué?

L49. E3: No es correcto porque Mateo no está diciendo la verdad

Se puede observar en L47, como el estudiante cuenta en el mismo orden de acuerdo a la posición de las fichas que se muestran en la figura del ítem, a pesar de que se le dificulta un poco, al momento de configurar el número E3 ya no es coherente con esta forma, sino que es coherente con el principio posicional, de este modo llega a la respuesta. Finalmente, el estudiante está incluyendo el conocimiento que tiene sobre lo aditivo. En términos generales, los estudiantes si comprenden el principio posicional del SND y por tanto esto les ayuda a reconocer que no es cierto que el número representado es el 353

Esta tarea no obligaba a manipular las fichas del artefacto a los estudiantes, entonces, la gran mayoría se guiaba únicamente con las imágenes de la representación del artefacto mostradas en los ítems, en efecto, a través de estas imágenes ellos reconocen cada número que se pedía y de este logran reconocer el valor posicional de cada dígito en lo que se distingue el rol cognitivo, a su vez se puede afirmar que las parejas cumplen con el objetivo propuesto y superan el nivel referencial en la EMR.

Análisis de la tarea 2

El ítem 1 está compuesto de tres adivinanzas en la que las parejas deben de identificar el número con la descripción dada: la primera, habla de dos unidades, cinco decenas y tres centenas. La segunda, de siete decenas, nueve unidades y siete centenas. La tercera, doce unidades, una decena y cuatro centenas.

Para la primera respondió correctamente P2 y P3, identificando el número 352, es claro que estas parejas supieron ubicar el orden de las cifras del número teniendo en cuenta la cantidad de unidades, decenas y centenas. P1 y P5 erróneamente respondieron 325. P4 respondió 253. Estas parejas tuvieron dificultad para reconocer adecuadamente el orden de las cifras.

Para la segunda, P2, P3, P4 y P5 dijeron acertadamente que el número es 779 y P1 respondió 797 incorrectamente. En este caso, la mayoría de parejas pudieron identificar el número teniendo en cuenta la posición de las cifras de este número.

En la última adivinanza, la única pareja que respondió apropiadamente fue P1, pues, hizo la equivalencia de ver doce unidades como dos unidades y una decena, de este modo, llegó al resultado de tener el número 422. Por el contrario, a las otras parejas se les dificultó la solución al ver el número doce y respondieron así: P2 y P3 dijeron 412 se puede notar que esta pareja ubica el número 12 en la posición de unidades y no tiene en cuenta las decenas, P4 dijo 40 y P5 dijo 4112.

De la tercera adivinanza, causa gran interés dos respuestas de los estudiantes, la primera, como se mencionó anteriormente, es la equivalencia que hace P1, sin utilizar el artefacto, se ve como claramente tuvieron en cuenta los dos principios vistos y de este modo descubren el número 422, se puede observar en la Figura 32.

a. Tiene 2 unidades, 5 decenas y 3 centenas: 329
 b. Tiene 7 decenas, 9 unidades y 7 centenas: 797
 c. Tiene 12 unidades, 1 decena y 4 centenas: 422

Figura 32. Respuesta de P1, a la pregunta 1, T2, S2

Por el contrario, P5 a pesar de que organizan los números adecuadamente, no considera el principio base 10 y escribe el número 12 tal cual como aparece en el enunciado sin realizar su equivalencia obteniendo el número 4112, vea la Figura 33.

a. Tiene 2 unidades, 5 decenas y 3 centenas: 329
 b. Tiene 7 decenas, 9 unidades y 7 centenas: 797
 c. Tiene 12 unidades, 1 decena y 4 centenas: 4112

Figura 33. Respuesta de P5, a la pregunta 1, T2, S2

De una u otra forma todas las parejas tienen errores en una o dos adivinanzas, estos resultados contrastan con los resultados de los cinco ítems anteriores, la hipótesis que se sostiene aquí es que esto se da fundamentalmente porque en la tarea anterior los ítems se ven apoyados en la representación icónica de las fichas de los bloques mientras que aquí se da una representación numérica, parece ser que para los estudiantes es mucho más comprensible manejar el valor posicional cuando en apoyan en la representación icónica de

los bloques multibase y a partir de ahí hacen la lectura y posteriormente la composición del número, pero cuando solo se hace una representación numérica los estudiantes tienden a cometer algún error.

Así mismo, lo que parece mostrar en este punto es que, si bien los estudiantes tienen cierta comprensión sobre el principio posicional, este principio parece reposar de forma efectiva cuando se usa el material concreto o por lo menos una representación icónica de él, mientras que exclusivamente en el plano numérico se presentan errores, lo que puede indicar esto es que todavía hay que seguir trabajando ese principio posicional porque no está completamente consolidado.

En el ítem 2, se presentan tres números el 88, 671 y 111 con cada uno de ellos, los estudiantes deben de escribir el valor de cada cifra. Frente a esto, P1, P2, P3, P4 y P5, respondieron apropiadamente, dado que, para el número 88 expresaron que el primer dígito representa 8 decenas y el segundo 8 unidades, para el 671 dijeron que el último dígito hace referencia a 1 unidad, a su izquierda 7 decenas, seguidamente, 6 centenas. Finalmente, para el 111 respondieron que tiene el último uno representa 1 unidad, a su izquierda 1 decena y finalmente, 1 centena. Como ejemplo se muestra en la Figura 34 la producción de P2.

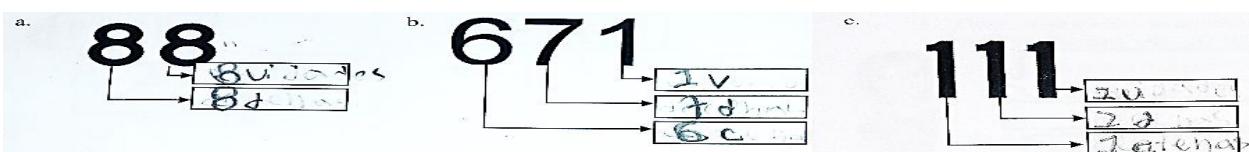


Figura 34. Respuesta de P2, a la pregunta 2, T2, S2

Como se pudo observar, aquí se presenta una composición numérica ya dada y en este caso los estudiantes no fallan, esto quiere decir que ellos presentan problemas cuando tienen que componer un número, siempre y cuando, por lo menos este apoyado en la representación icónica del artefacto.

En el ítem 3 se dio a los estudiantes tres cifras: 0, 1, 2 y a partir de ahí ellos debían formar todos los números posibles e indicar la posición de cada uno. P2 y P5 realizaron las seis combinaciones y en cada una de ellas señalaron correctamente la posición de cada dígito de los números, se muestra de ejemplo la solución de P5 en la Figura 35.

De manera similar respondió P4, aunque realizaron cinco combinaciones con su respectivo valor posicional de cada cifra acertadamente, la combinación incorrecta que

realizaron fue el número 100, sin embargo, a ese número indicaron que el 1 representa 1 centena, a su derecha 0 decenas y el otro dígito 0 unidades.

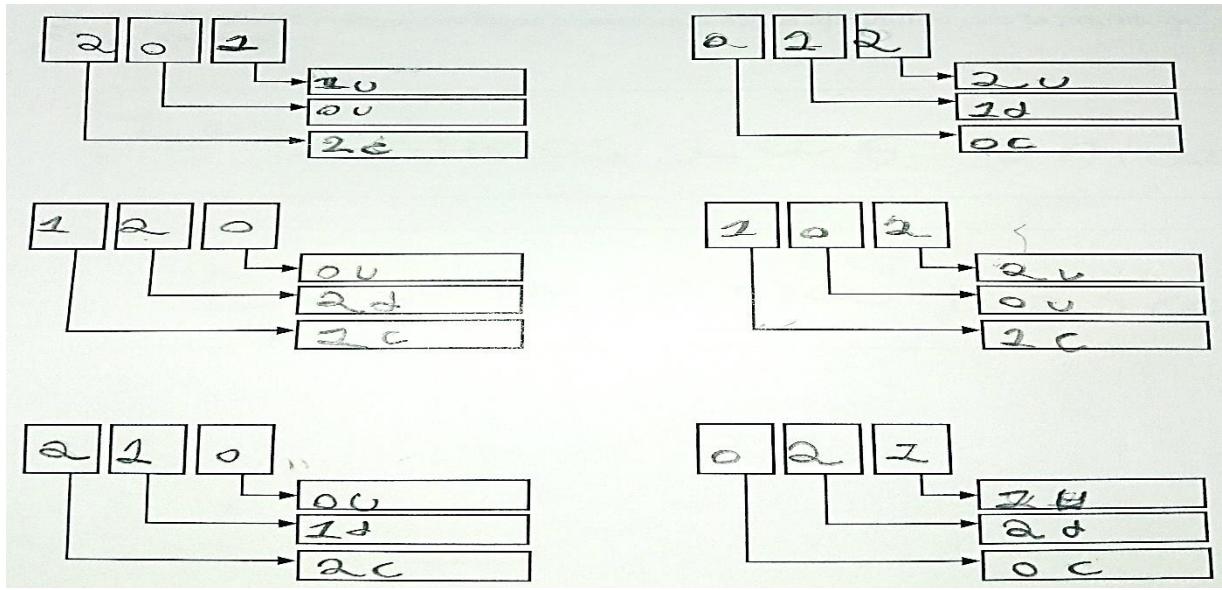


Figura 35. Respuesta de P5, a la pregunta 3, T2, S2

P3 realizó tres combinaciones, pero en cada una de ellas no indicó apropiadamente la posición de cada cifra, por ejemplo, con el número 012 dijeron que el 0 está en la posición de decenas, el 1 en la de decenas y el 2 en la de unidades. Con el número 201 escribieron que el 2 está en la posición de unidades, el cero en la de decenas y 1 en decenas nuevamente, se puede ver en la Figura 36. Por su parte, P1 realizó cinco combinaciones, pero tuvo una confusión entre las cifras de unidades y centenas, como es el caso del número 201, expresaron que el 1 está en la posición de centenas, el 0 en el de decenas y el 2 en el de unidades. Lo mismo sucede con los números 210, 021, 120 y 012.

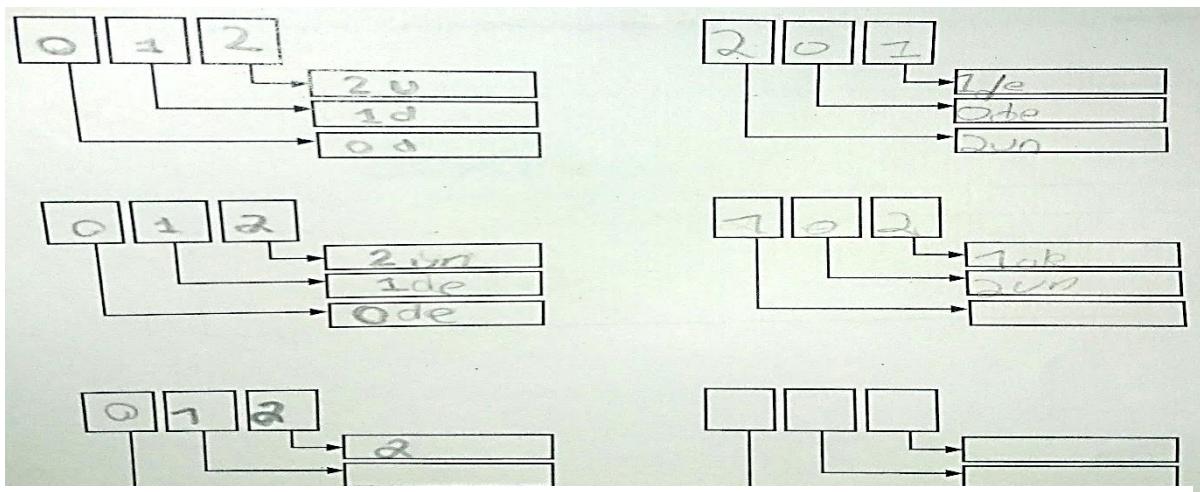


Figura 36. Respuesta de P3, a la pregunta 3, T2, S2

Se puede notar que estas dos parejas aún tiene dificultades para reconocer el valor posicional de las cifras de un número, pues se les dificulta reconocer cual es la posición de unidades, decenas o centenas. Las otras tres, parece ser que a los estudiantes al cambiar la posición de la cifra en el número automáticamente cambia la cantidad de unidades sueltas, decenas y centenas que hay en dicho número.

En el ítem 4 se da una situación de una conversación de una profesora con sus estudiantes y ella les dice que una pera al lado de otra son dos peras entonces les pregunta porque 11 significa once y no dos. Frente a esta pregunta P3 respondieron “*porque el primer número una decena*”, P4 dijeron “*1 decena*”, P5 afirmó “*porque tiene una decena*”. Estas tres parejas son conscientes que el número once se configura por una decena y no es visto como dos unidades. En contraste, P1 contestaron “*que hay dos porque suman*” y P2 expresaron “*que dos unos es igual a once*”. Evidentemente con las respuestas de estas dos parejas que no son claras, se puede notar que aún no son conscientes de que el primer uno está en la posición de las decenas y por ende el once se compone por una unidad y una decena.

Por último, en el ítem 5 se pide a los estudiantes que escriban dos ideas nuevas que hayan aprendido en las dos situaciones vistas y se emplearon dos recuadros para que los estudiantes escribieran sus ideas en cada uno. De este modo, P1 respondió “*los dididos las unidades*” y “*las decenas y unidades*”, a pesar de que no es tan claro lo que escribieron es evidente que en su lenguaje se apropiaron de las unidades y las decenas.

P2 respondió “*que dos peras son mayor que una pera*” y “*que los números sirven para contar*”. Los dos aspectos que esta pareja llama la atención son aspectos que no fueron centrales de objeto de conocimiento en la propuesta.

P3 respondió “*decena*” y “*unidades*”. A esta pareja, tal vez, se les facilitó el uso de unidades y decenas, pero no nombran las centenas.

P4 respondió “*se necesita los decena sumar*” y “*los cuadritu representan unidades*”. Se puede evidenciar que esta pareja hasta el final tiene en la mente el uso y manejo de los bloques para la representación de SND.

P5 respondió “*Los dijidos las unidades*” y “*Las decena las centenas*”. Esta pareja a diferencia de P1 y P3 tuvieron en cuenta las centenas como parte del SND.

En este punto lo que se pretendía era cerrar la propuesta para invitar a los estudiantes a develar cuestiones que les hayan llamado la atención de ella; la mayoría de ellos tienen la idea de decena y unidades, quizás porque fueron las que se trabajaron con mayor fuerza a lo largo de toda la propuesta y las centenas, por ejemplo, aparecían en algunos ítems esporádicamente.

Se evidenció que los estudiantes tuvieron menor cantidad de errores cuando las actividades se relacionan con el uso del artefacto, pero a pesar de esto más de la mitad de ellos en esta situación logran llegar al nivel general, dado que saliendo del contexto y utilizando representaciones con números naturales y no con los bloques, ellos lograron reconocer el valor posicional de las cifras de un número sin representaciones de las fichas de los bloques multibase, esto conlleva a garantizar, en otras palabras, que con los bloques hay mayor acierto en lo posicional pero cuando se pasa solamente al plano numérico de las cantidades de unidades, decenas y centenas, ahí los estudiantes no muestran tanta efectividad como cuando se usaba la representación icónica de los bloques, por lo que se sugiere que el evocar al artefacto, pensar en él es algo fundamental para garantizar el éxito del principio posicional y la composición de los números.

4. Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones derivadas de este trabajo realizado de manera general, así como de los análisis fruto de las producciones de los estudiantes. Estas conclusiones se organizan atendiendo a los objetivos propuestos en este estudio.

Con respecto al primer objetivo específico, “*Documentar la problemática de la enseñanza y aprendizaje del sistema de numeración decimal desde las perspectivas curricular y didáctica, de tal modo que surjan elementos conceptuales para el diseño de una propuesta de aula para estudiantes de segundo grado de la educación básica primaria*”, se concluye que:

- Las problemáticas que giran en torno a la enseñanza y aprendizaje del SND son un asunto de sumo cuidado, por todos los elementos que se deben de trabajar en el aula para su abordaje, tales como, sus principios, el orden, la escritura, entre otros. De este modo, se encuentran muchas dificultades, por ejemplo, cuando los estudiantes no tienen conciencia de la escritura de un número teniendo en cuenta el principio base 10, se pudo observar en la respuesta de P5 cuando se le da cuatro centenas, una decena, doce unidades y el escribe el número 4112, pues no tiene claro que doce unidades es equivalente a tener una decena y dos unidades. Así pues, es un arduo trabajo y por ser una de las bases fundamentales de las matemáticas es conveniente dedicar una buena cantidad de tiempo a todo el contenido que hace parte de ella.

- Los documentos de política pública, Estándares Básicos de Competencias, Lineamientos Curriculares y los Derechos Básicos de Aprendizaje, si en algo están de acuerdo es que la enseñanza del SND es tan amplia que se realiza de manera gradual, es por ello que, abarca toda la primaria incluso inicios de la secundaria, además, como parte de dicha enseñanza se dice que una manera adecuada es que los estudiantes con base en contextos puedan generalizar el aprendizaje en ellos.

- Evidentemente el uso del artefacto marcó los resultados de este trabajo. Se reconoce que el uso de este jugó un papel primordial para el aprendizaje en los estudiantes, cabe destacar que gracias a ello despertó gran interés en los estudiantes, además de facilitar su enseñanza. En efecto, se evidenció el rol epistémico de él, sobre todo en el nivel situacional, es decir en la tarea 1 de la situación 1, pues claramente se notó como los

estudiantes aprendían las equivalencias entre unidades, decenas y centenas por medio de la manipulación del artefacto. El rol cognitivo al ir enlazado con el epistémico, se reconoció en casi toda propuesta, en el momento que los estudiantes comprendían y hacían suyo el conocimiento con el artefacto, ya sea de forma manipulativa o con la representación icónica de él. De hecho, los análisis de las producciones de los estudiantes lo que muestran es que cuando el artefacto desaparecía, ellos tendían tener más dificultades hasta el punto de cometer errores.

Con respecto al segundo objetivo específico, “*Analizar el impacto que los bloques multibase 10 tienen en las producciones que realizan los estudiantes a partir de la implementación de la propuesta de aula*”, se concluye:

- El artefacto juega un rol fundamental, no solamente en los tratamientos que hacen los estudiantes sino también para garantizar su comprensión sobre el SND y por tanto la respuesta correcta de muchos de los ítems que se propuso, asimismo, es evidente que cuando los estudiantes se desprenden del artefacto para hacer algunas composiciones y descomposiciones empiezan a cometer más errores producto de las dificultades que tienen para reconocer, por ejemplo, la posición de algunas cifras de un número y sobre todo en el principio base 10 del SND y poder lograr hacer nuevas composiciones, formando nuevas decenas o centenas, esto quiere decir que el uso de los bloques multibase 10 se volvió central para realizar configuraciones con números.

- Los estudiantes si lograban hacer la composición o recomposición entre unidades y decenas, pero cuando en simultaneo les toca hacer la composición de unidades a decenas y a su vez de decenas a centenas, parecían tener mayores dificultades.

- Se nota como la esquematización progresiva que iban logrando los estudiantes con la manipulación del artefacto fue diferente, porque algunos casi desde el inicio de la propuesta ya tomaban conciencia que, por ejemplo, la barra representaba diez cubos sin tener que hacer conteos sobre ella mientras que otras parejas aun a la mitad de la propuesta seguían haciendo conteos. Lo que esto deja ver es que para unos estudiantes es más fácil comprender la barra como una nueva entidad, en tanto que representa una cantidad independiente de aquella que la componen, mientras que otros estudiantes recurrían a hacer el conteo de los cubos que configuran la barra para conceptualizarla como un diez.

Con respecto al tercer objetivo específico, “*Proponer algunas sugerencias y reflexiones en torno a la enseñanza del sistema de numeración decimal en los primeros grados de escolaridad fruto de los análisis reportados*”. Se concluye:

- Cuando se trabaja el SND, se puede hacer énfasis en uno o dos principios, pero esto no quiere decir que sea exclusivo solo a éste, sino que un profesor debería de tener en cuenta que esto se trabaja de tal forma que quiéralo o no hay principios que se arrastran de forma natural, como el principio de adición que se trabajó, por ejemplo, cuando se estaba haciendo composiciones y descomposiciones.
- La enseñanza del SND es un proceso relevante que requiere de un extenso y arduo trabajo a lo largo del desarrollo escolar para que los estudiantes puedan llevar a cabo un proceso eficaz de aprendizaje. Inclusive, en los estándares está claramente estipulado que los estudiantes tienen hasta sexto – séptimo grado para aprender aspectos del SND. Este trabajo, en efecto muestra que es un asunto complejo y progresivo.
- El principio base 10 hay que tomarlo con mucha delicadeza y cuidado, porque lo que este trabajo está mostrando es que este principio parece ser más complejo en su comprensión que incluso el principio posicional, pues no es inmediato que los estudiantes comprendan que cada diez unidades sueltas se forma una nueva composición de cantidades numéricas, las decenas y cada diez decenas se forma una nueva familia de números, las centenas.

Respecto al objetivo general, “*Caracterizar los procesos de matematización que logran un grupo de estudiantes de segundo grado en la comprensión de los principios base diez y posicional del sistema de numeración decimal, a partir de la implementación de una propuesta de aula basada en el enfoque EMR*”. Se concluye que:

- Las producciones de los estudiantes a partir de la implementación de la propuesta realizada dejaron ver que ellos efectivamente dan cuenta de la matematización horizontal, en el sentido que logran pasar del contexto real en el cual se trabajaba lo que aparecía como unas fichas en el trabajo con una profesora a un contexto propiamente matemático. En este sentido, los estudiantes lograron pasar de hablar de cubos, barras y plaquetas a unidades, decenas, centenas.

• Respecto a los niveles de matematización vertical, lo que muestran es que no es posible asegurar completamente que las producciones de los estudiantes se pueden ubicar en un nivel de comprensión en particular, pues sus producciones muestran evidencias que ellos van y vuelven, movilizándose de un nivel a otro, esto se produce debido a la presencia o no del artefacto o que se solicite algunas composiciones y descomposiciones de un número, por ejemplo, en la tarea 3 de la situación 1, P2, descompuso correctamente en unidades decenas y centenas el número 121 (ítem 4), pero para la composición del número 344 tuvo dificultades y no la pudo realizar adecuadamente (ítem 5). Estas cuestiones son coherentes con la misma propuesta de la EMR, los Estándares y propuestas didácticas que dicen que la construcción del SND es progresivo, paulatino y no se produce de manera lineal, el estudiante debe de ir despacio construyendo esos elementos para ir consolidando todos los principios que implica comprender el SND.

• Ahora bien, todas las parejas superan el nivel situacional pues por medio del artefacto en primer lugar, logran reconocer cada ficha dada, en segundo lugar, establecen las equivalencias que hay entre ellas y por medio de esto distinguir la cantidad de “cubos” necesarios para formar una “barra” o “plaqueta”, o cantidad de “barras” para formar una “plaqueta”.

En el nivel referencial, se evidenció que todos los estudiantes crearon un *modelo de* la situación particular dada tanto para el principio base 10 como para el posicional. Logrando con el primero de estos que los estudiantes relacionen un número con la cantidad de fichas, además de representar un número de diferentes formas realizando composiciones y descomposiciones. Con el segundo de estos, además de representar un número o identificarlo según las fichas dadas, ellos reconocen la posición de cada cifra de dicho número.

Por último, en el nivel general para ambas situaciones no todos los estudiantes lograron crear *modelos para*. Para el caso del principio base 10, ellos a pesar de que muestran empatía con los primeros ejercicios, finalmente tienen dificultades cuando se presentan números naturales o cuando se presenta una gran cantidad de fichas con las que tienen que hacer nuevas composiciones, claramente se notó la ausencia del artefacto. Para el caso del principio posicional, tres parejas, P2, P4, P5, mostraron tener un mayor acercamiento a este tipo de modelos, pues cuando resolvieron las actividades sin el uso del

artefacto no presentaron tantas dificultades en relación con reconocer el valor posicional de las cifras de los números dados.

Recomendaciones y sugerencias

A continuación, se presentan algunas recomendaciones y sugerencias que servirán de apoyo a docentes o aspectos para tener en cuenta en futuras investigaciones.

- Las instituciones deberían de realizar una buena planeación curricular que sea prolongada a través del tiempo, para que, por medio del trabajo de las matemáticas en diferentes grados de escolaridad en primaria, efectivamente puedan ir trabajando de forma articulada al SND, sus principios, su escritura, su comunicación oral, etc.
- Se hubiera podido hacer más fuerza en las tareas, para que ayudaran a los estudiantes de forma paulatina a comprender el principio base 10, pues lo que quedó claro con la implementación del diseño al analizar los resultados obtenidos, es que las tareas que se propusieron en la primera parte de la situación para trabajar este principio no fueron suficientes. Entonces, en futuros diseños hay que explotar más las actividades para que progresivamente se vayan construyendo los conocimientos adecuadamente.
- El diseño se hubiera podido potenciar más colocando actividades intermedias, que vayan gradualmente prestando más atención a lo aditivo y sirvan como puente para pasar luego hacia lo posicional, en términos de la escritura de los números, entre lo pictórico, manipulativo y simbólico.
- Cabe resaltar que es importante destinar y distribuir muy bien el tiempo, pues, para la efectividad de la enseñanza y aprendizaje del SND requiere algo mucho más prologando que lo aquí se utilizó.

Referencias

Bressan, A., & Gallego, M. (2011). La Educación Matemática Realista: Bases teóricas. III congreso nacional de matemática y problemáticas de la educación contemporánea. Santa María, Argentina.

Bressan, A., Saggesse, N., & Gallego, M. (2000). HANS FREUDENTHAL, un matemático en Didáctica y teoría curricular. *J.Currículo Studies*, 32(6), 777-796. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/241866337_HANS_FREUDENTHAL_un_matematico_en_Didactica_y_teoria_curricular

Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, M. (2004). La Educación Matemática Realista: Principios en que se sustenta. Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática.

Bruner, J., Jolly, A. & Silva, K. (Eds.) (1976), *Play: its role in development and evolution*. Hardmondsworth: Penguin

Castro, E., & Molina, M. (2011). Números naturales y sistemas de numeración. Universidad de Granada. Flores, P., & Rico, L. (Ed.), Matemáticas para maestros en Educación Primaria (pp. 47-74). Madrid: Ediciones Pirámide

Cardona, K. (2015). *Enseñanza – aprendizaje del sistema de numeración decimal, regularidades, características y relaciones numéricas a través de una secuencia didáctica* (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia, Medellín.

Godino, J.D (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Granada.

Iquinás, H., & Iquinás, N. (2015). *Ánalisis del significado en el discurso de los docentes respecto al manejo del valor posicional en los tres primeros años de escolaridad*. (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali.

Kamii, C. (1992). *Valor de Posición y Adición en Doble Columna*. Madrid, España.

Lerner, D., Sadovsky, P. y Wolman, S. (1994). *El sistema de numeración: un problema didáctico*. En C. Parra e I.Saiz (Comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 95-184). Buenos Aires: Paidós.

Martí, E. (2003): *Representar el mundo externamente*. La adquisición infantil de los sistemas externos de representación. Madrid: Machado Libros

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Editorial Magisterio. 1^a edición. Santa fe de Bogotá. P 18-36

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Revolución Educativa. Colombia Aprende. Primera edición. Imprenta nacional de Colombia. P 46-95

Ministerio de Educación Nacional. (2007). Derechos Básicos de Aprendizaje de lenguaje y matemáticas. Colombia Aprende. Segunda versión. Imprenta nacional de Colombia. P 50-96

Orozco, H. M. (2003). Formación de docentes de primaria en la comprensión del sistema de notación en base diez. *Revista Ema. N° 1*, Vol.8, P 3 -29.

Porras, J., & Vivas, L. (2009). Reflexiones didácticas en torno a las equivalencias y al valor de posición como elementos básicos para la conceptualización del Sistema de Numeración Decimal (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali.

Radford, L. (2014). Reaction to Part III On the Cognitive, Epistemic, and Ontological Roles of Artifacts. Research Gate, 283-288. Recuperado de
<https://www.researchgate.net/publication/265069453>

Rodríguez, G., Gil, J., & García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Granada (España): Ediciones Aljibe. Recuperado de
https://cesaraguilar.weebly.com/uploads/2/7/7/5/2775690/rodriguez_gil_01.pdf

Salazar, C., & Vivas, Y. (2013). Enseñanza del sistema de numeración decimal a través de la integración de material manipulativo (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali.

Anexos

En este apartado se presentan dos anexos, el primero de ellos presenta la propuesta de aula que se presentó a los estudiantes y el segundo de ellos una producción de uno de ellos como representación.

Anexo I

Situación 1: ¡Es hora de jugar con un rompecabezas!

Propósito: Reconocer el principio base 10 del Sistema de Numeración Decimal por medio de los bloques multibase 10.



La profesora Cristina llevó al grado segundo de un colegio de Cali, un rompecabezas matemático y les dijo a sus estudiantes: ¡vamos a divertirnos descubriendo las fichas de un rompecabezas matemático! Para resolver las siguientes tareas debes de utilizar siempre el rompecabezas que se te entregará. Por favor, cuidar cada ficha entregada.

Tarea 1: Identificando las fichas del rompecabezas

Para iniciar el juego debemos de reconocer las piezas del rompecabezas que nos están entregando. A partir de este responde las siguientes preguntas:

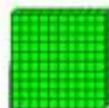
1. ¿Cuántos cubos tiene el rompecabezas?



2. ¿Cuántas barras tiene el rompecabezas?



3. ¿Cuántas plaquetas tiene el rompecabezas?



4. ¿Cuántos cubos se necesitan para formar una barra del rompecabezas?

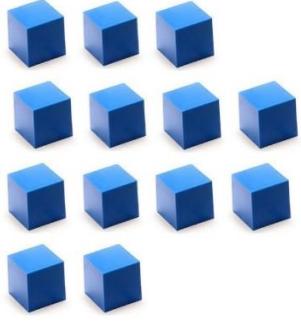
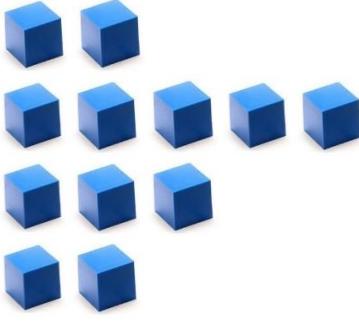
5. ¿Cuántas barras se necesita formar una placa del rompecabezas?

6. ¿Cuántos cubos se necesitan para formar una placa del rompecabezas?

Tarea 2: Armando y desarmando las fichas del rompecabezas

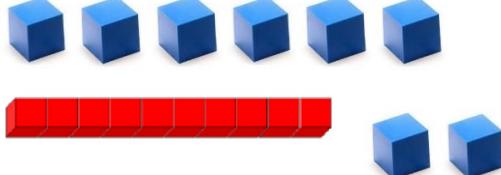
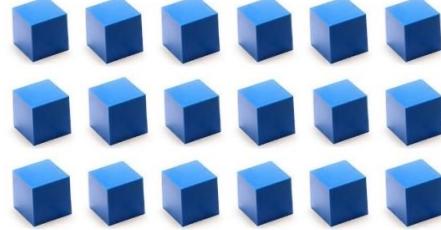
La profesora propone a sus estudiantes hacer representaciones de números con las fichas del rompecabezas.

1. Andrés y Valentina quieren representar el número 12, para ello han hecho lo siguiente:

Andrés	Valentina
 	 

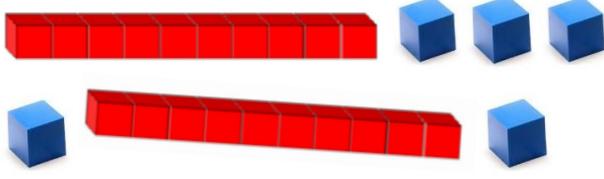
¿Cuál de las dos representaciones es correcta? Justifica tu respuesta

2. Claudia y Felipe representan el número 18 de forma diferente

 <p>Claudia</p>	 <p>Felipe</p>
	

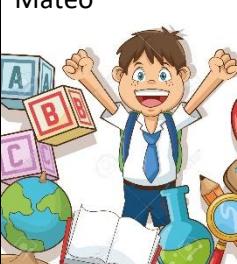
¿Cuál de los dos representa el número de manera correcta? ¿por qué?

3. Mateo y Andrea están jugando con el rompecabezas matemático. Ambos desean representar el número 25.

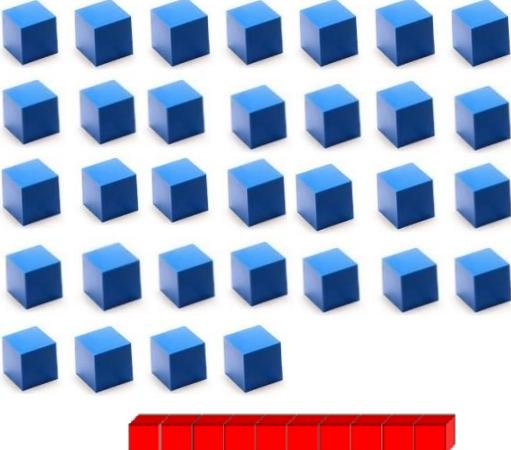
 <p>Andrea lo representa así:</p>	
--	--

¿Está bien la representación de Andrea? Justifica tu respuesta

4. ¿Cómo podría Mateo representar de una forma diferente a la de Andrea el número 25?

 <p>Mateo</p>	
--	--

5. La maestra le solicita a Mateo representar el 42 de una forma. ¿Cómo lo podría representar Andrea **utilizando la menor cantidad de fichas posibles**?

Mateo		Andrea	
	 		

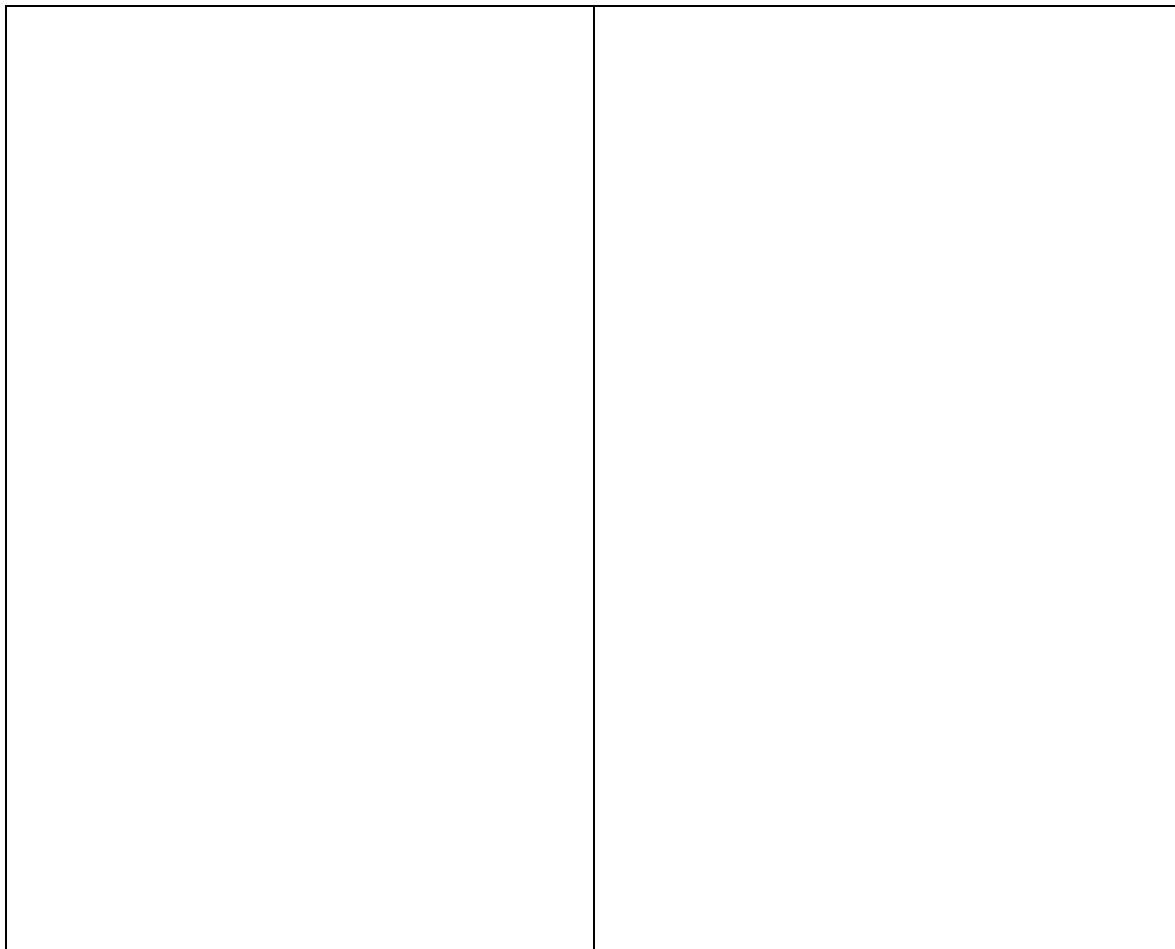
6. La maestra le pide a Luisa representar el número 30 pero **sin usar los cubos**. Ayúdale a Luisa con su tarea. ¡Dibújalo!

Luisa	
-------	---

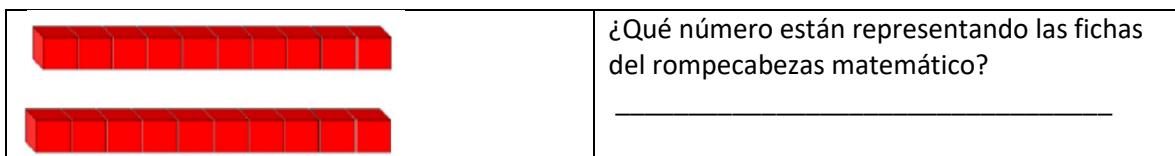
7. Si Luisa desea representar el número 200, **sin utilizar barras ni cubos**. ¿Cómo podría hacerlo? ¡Dibújalo!

Luisa	
-------	--

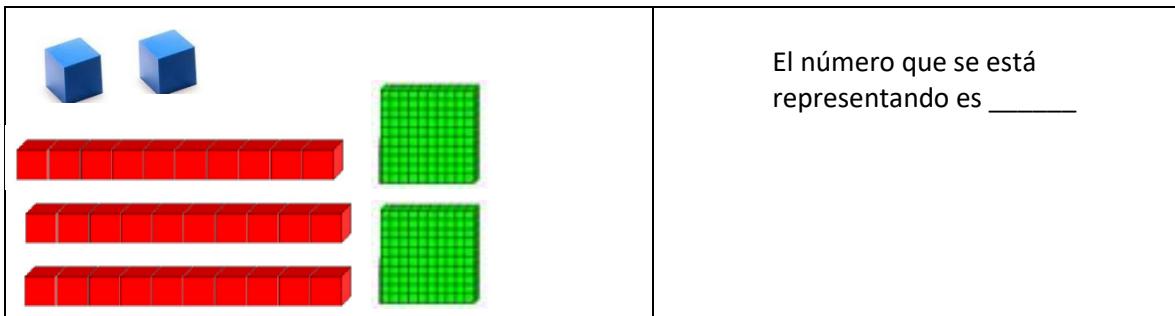
8. Haciendo uso del rompecabezas, representa por lo menos de dos maneras distintas el número 572



9. A un estudiante del grupo, la profesora le muestra esta representación:



10. Adivina que número se está representando con el rompecabezas matemático



Tarea 3: Cambio de nombres de las fichas del rompecabezas



Ahora bien, la profesora Cristina indica a sus estudiantes que se van a cambiar los nombres de las piezas del rompecabezas matemático.

1. A partir de la información de la profesora completa los siguientes enunciados:

- Cada diez unidades pueden ser remplazada por una _____.
- Cada diez decenas es remplazada por una _____.
- Una centena contiene ___ decenas o ___ unidades.
- Una decena contiene ___ unidades.

2. Si te dan esta representación:



Responde:

a. ¿Cuántas unidades hay en ella?

b. ¿Cuántas decenas hay en la representación?

3. Si te dan esta representación:



a. ¿Cuántas unidades hay en la representación?

b. ¿Cuántas decenas hay en la representación?

c. ¿Cuántas centenas hay en la representación?

4. Si te dan esta representación:



a. ¿Cuántas unidades hay en la representación?

b. ¿Cuántas decenas hay en la representación?

c. ¿Cuántas centenas hay en la representación?



La mejor forma de representar un número es siempre utilizar la menor cantidad de fichas posibles.

5. Teniendo en cuenta lo que dice la profesora responde:

	<p>a. ¿Es adecuada la representación? ¿por qué? _____ _____</p> <p>b. ¿Qué número se está representando? _____</p> <p>c. ¿Cuántas unidades hay en total? _____</p> <p>d. ¿Cuántas decenas hay en total? _____</p> <p>e. ¿Cuántas centenas hay en total? _____</p>
--	---

6.

<p>El número:</p>	<p>Tiene:</p> <p>a. _____ Decenas</p> <p>b. _____ Unidades</p> <p>c. _____ Centenas</p>
-------------------	---

7.

<p>El número:</p>	<p>Tiene:</p> <p>a. _____ Decenas</p> <p>b. _____ Unidades</p> <p>c. _____ Centenas</p>
-------------------	---

Situación 2: VALORANDO LA POSICIÓN DE LAS CIFRAS DE UN NÚMERO

Propósito: Reconocer el valor que tienen los dígitos de un número según su posición.



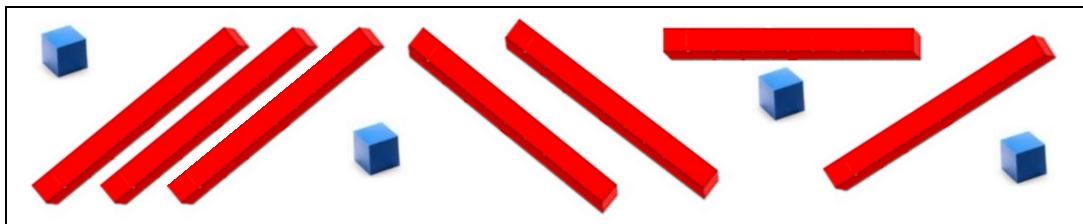
En una nueva clase, la profesora Cristina lleva a sus estudiantes de nuevo el rompecabezas matemático, y a partir de ahí les propone desarrollar las siguientes tareas:



Tarea 1: Valorando la posición de los dígitos en los números

Recuerda que: La idea es usar la menor cantidad de fichas posibles para representar un número con el

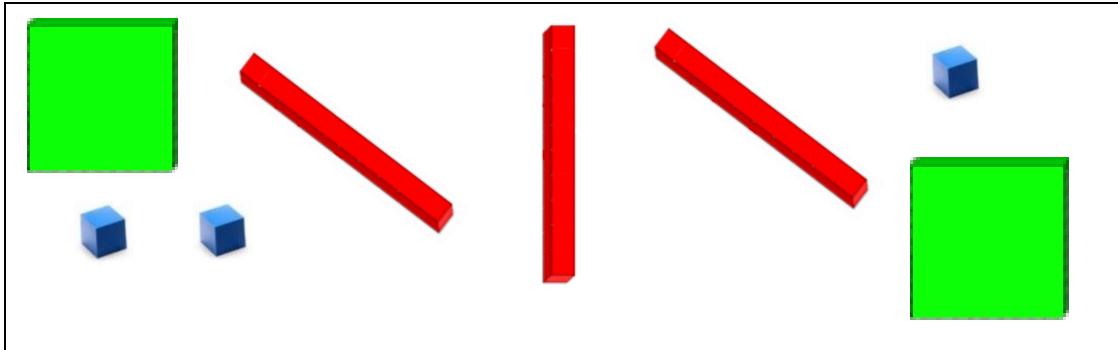
1. La profesora Cristina les dice a sus estudiantes que de acuerdo con la siguiente representación:



Responde los siguientes ítems.

- a. ¿Cuántas unidades sueltas (cubos) hay en la representación? _____
- b. ¿Cuántas decenas hay en la representación? _____
- c. ¿Qué números puedes formar con todas las fichas? Justifica tu respuesta.

2.



a. ¿Cuántas unidades sueltas hay en la representación? _____

b. ¿Cuántas decenas hay en la representación? _____

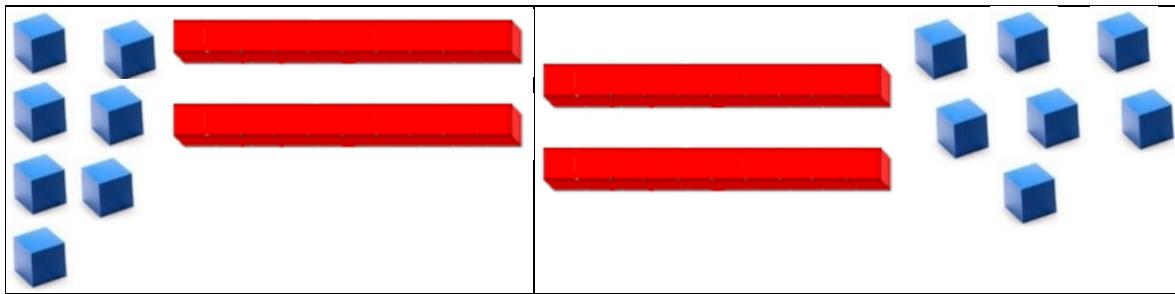
c. ¿Cuántas centenas hay en la representación? _____

d. ¿Qué números puedes formar con todas las fichas? Justifica tu respuesta.



3. Teniendo en cuenta el mensaje que la profesora Cristina acaba de dar, decide mostrar las siguientes representaciones a Mateo y Andrea.

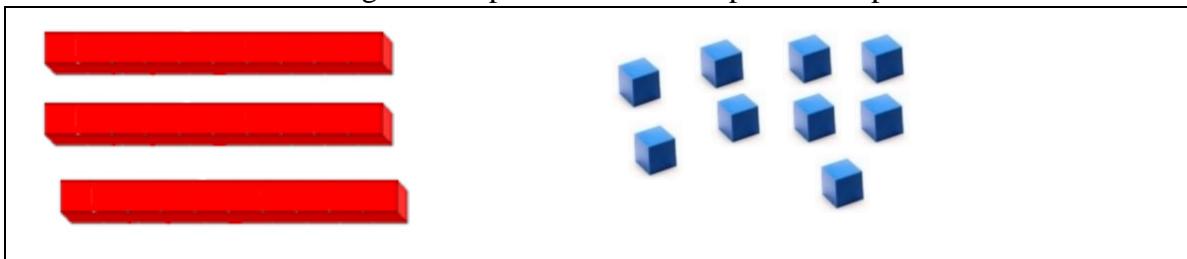
 Mateo	 Andrea
---	--



a. Mateo dice que tiene el número 72 y Andrea dice que tiene el número 27. ¿Cuál de los dos tiene la razón? Explica tu respuesta.

b. Si quisiéramos representar el número 72 cuantas y cuales fichas debería de tener Mateo. Dibújalas en el cuadro.

4. De acuerdo con la siguiente representación. Completa los espacios en blanco.



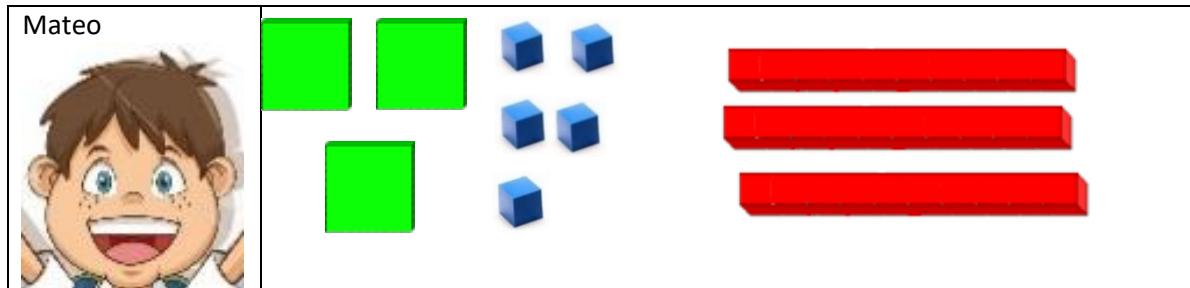
a. El número total representado es: ____

b. El número ____ está en la **posición** de unidades sueltas.

c. El número ____ está en la **posición** de decenas.

d. El número ____ está en la **posición** de centenas.

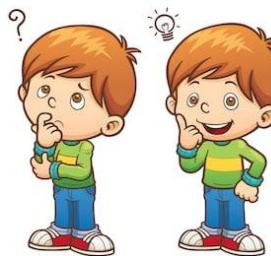
5. La profesora le da a Mateo la siguiente representación:



Mateo afirma que se está representando el número 353. ¿Es correcta la afirmación de Mateo? Justifica tu respuesta.

Tarea 2: Clase final de la profesora

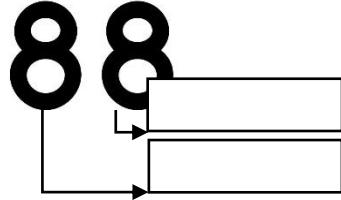
1. ¡Adivinanza, adivinanza!: Adivina de que número se está hablando:



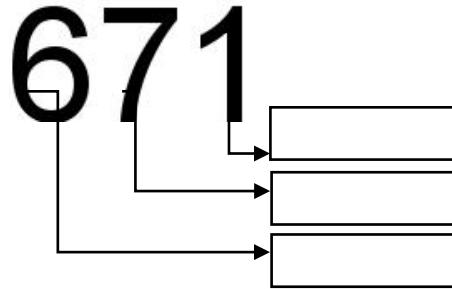
- Tiene 2 unidades, 5 decenas y 3 centenas: _____
- Tiene 7 decenas, 9 unidades y 7 centenas: _____
- Tiene 12 unidades, 1 decena y 4 centenas: _____

2. Escribe el valor de cada cifra

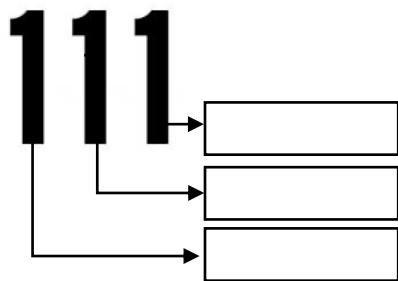
a.



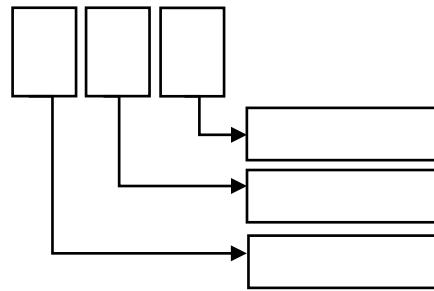
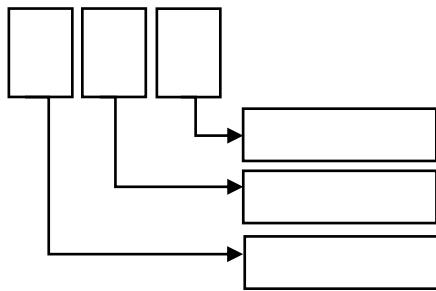
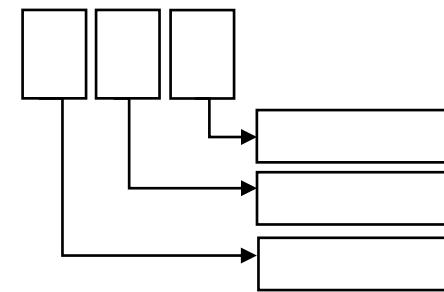
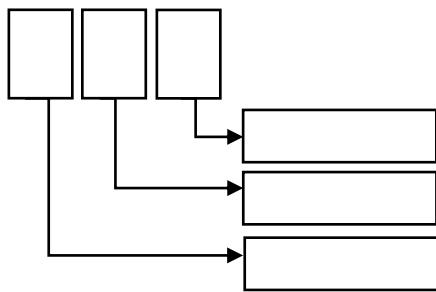
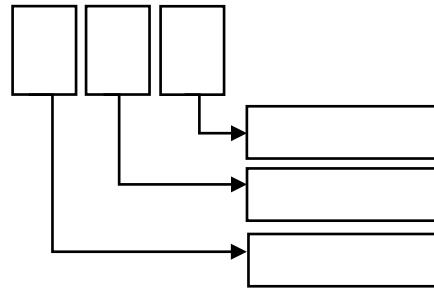
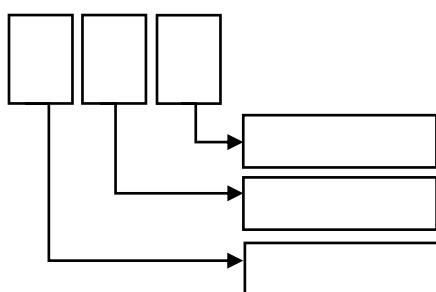
b.



c.



3. Si te dan estas tres cifras: 0, 1, 2. Representa a continuación los números que se pueden formar con las cifras dadas, e indica el valor de cada una de ellas en el número.



4. En la clase de hoy la profesora Cristina quiere enseñar algo nuevo a sus estudiantes, para ello comienza haciendo una pregunta a ellos.



Si pones una pera al lado de otra pera, tienes dos peras, ¿Es verdad?

Sí profe

Entonces, **¿Por qué 11 significa once y no dos?**



a. ¿Qué le responderías a la profesora?

5. Escribe al menos dos ideas nuevas que hayas aprendido con la profesora Cristina.

Anexo 2

esteban steider

P2

JUGAMOS

Situación 1: ¡Es hora de jugar con un rompecabezas!

Propósito: Reconocer el principio base 10 del Sistema de Numeración Decimal por medio de los bloques multibase 10.



La profesora Cristina llevó al grado segundo de un colegio de Cali, un rompecabezas matemático y les dijo a sus estudiantes: ¡vamos a divertirnos descubriendo las fichas de un rompecabezas matemático! Para resolver las siguientes tareas debes de utilizar siempre el rompecabezas que se te entregará. Por favor, cuidar cada ficha entregada.

Tarea 1: Identificando las fichas del rompecabezas

Para iniciar el juego debemos de reconocer las piezas del rompecabezas que nos están entregando. A partir de este responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos cubos tiene el rompecabezas?

20



2. ¿Cuántas barras tiene el rompecabezas?

90



3. ¿Cuántas plaquetas tiene el rompecabezas?

2



4. ¿Cuántos cubos se necesitan para formar una barra del rompecabezas?

10

5. ¿Cuántas barras se necesitan para formar una plaqueta del rompecabezas?

20

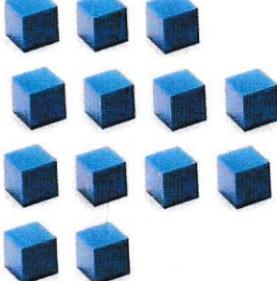
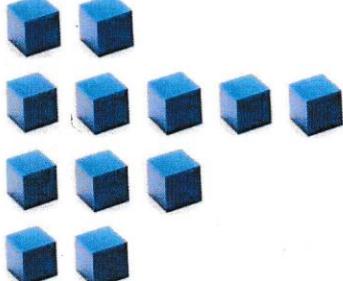
6. ¿Cuántos cubos se necesitan para formar una placa del rompecabezas?

200

Tarea 2: Armando y desarmando las fichas del rompecabezas

La profesora propone a sus estudiantes hacer representaciones de números con las fichas del rompecabezas.

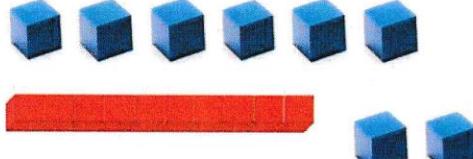
1. Andrés y Valentina quieren representar el número 12, para ello han hecho lo siguiente:

Andrés	Valentina
 	 

¿Cuál de las dos representaciones es correcta? Justifica tu respuesta

valentina y porque: tiene 12

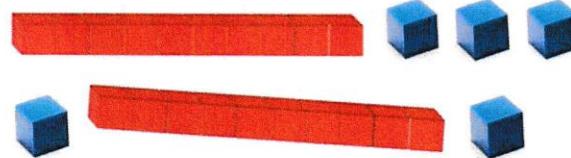
2. Claudia y Felipe representan el número 18 de forma diferente

 <p>Claudia</p>	 <p>Felipe</p>
	

¿Cuál de los dos representa el número de manera correcta? ¿por qué?

claudia y felipe y por que tienen 18

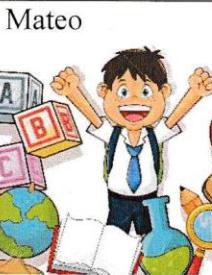
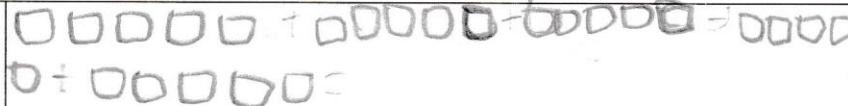
3. Mateo y Andrea están jugando con el rompecabezas matemático. Ambos desean representar el número 25.

 <p>Andrea lo representa así:</p>	
--	--

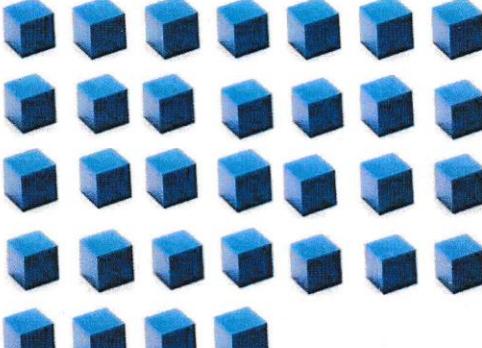
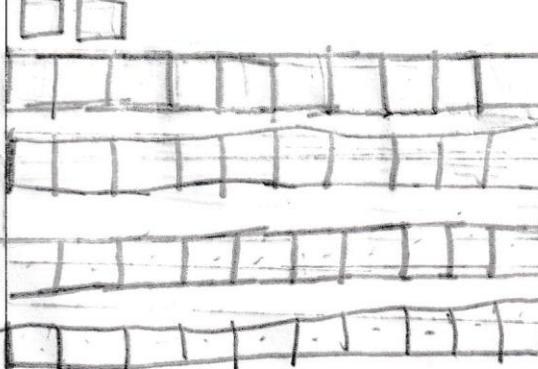
¿Está bien la representación de Andrea? Justifica tu respuesta

si representa

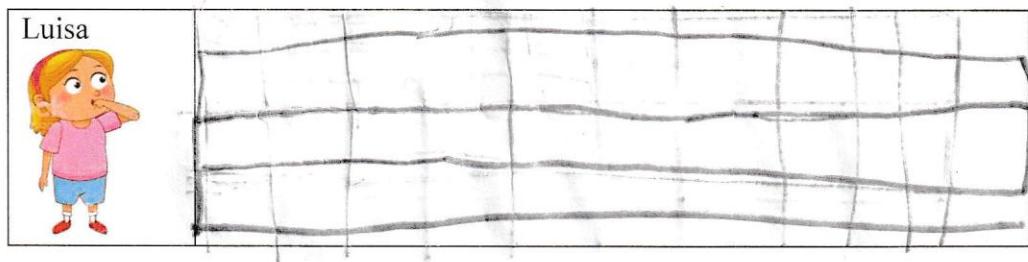
4. ¿Cómo podría Mateo representar de una forma diferente a la de Andrea el número 25?

 <p>Mateo</p>	
--	--

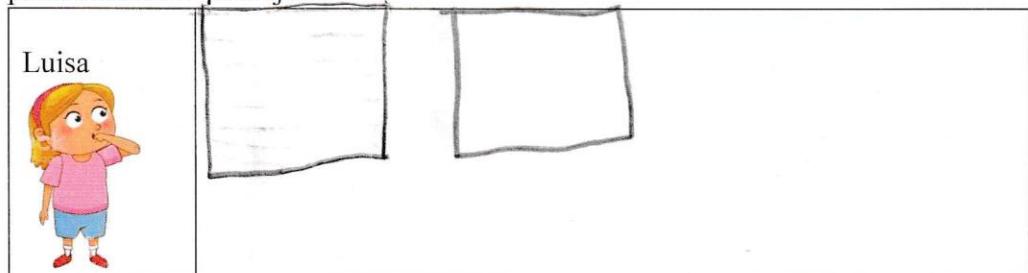
5. La maestra le solicita a Mateo representar el 42 de una forma. ¿Cómo lo podría representar Andrea utilizando la menor cantidad de fichas posibles?

Mateo		Andrea	
	 		

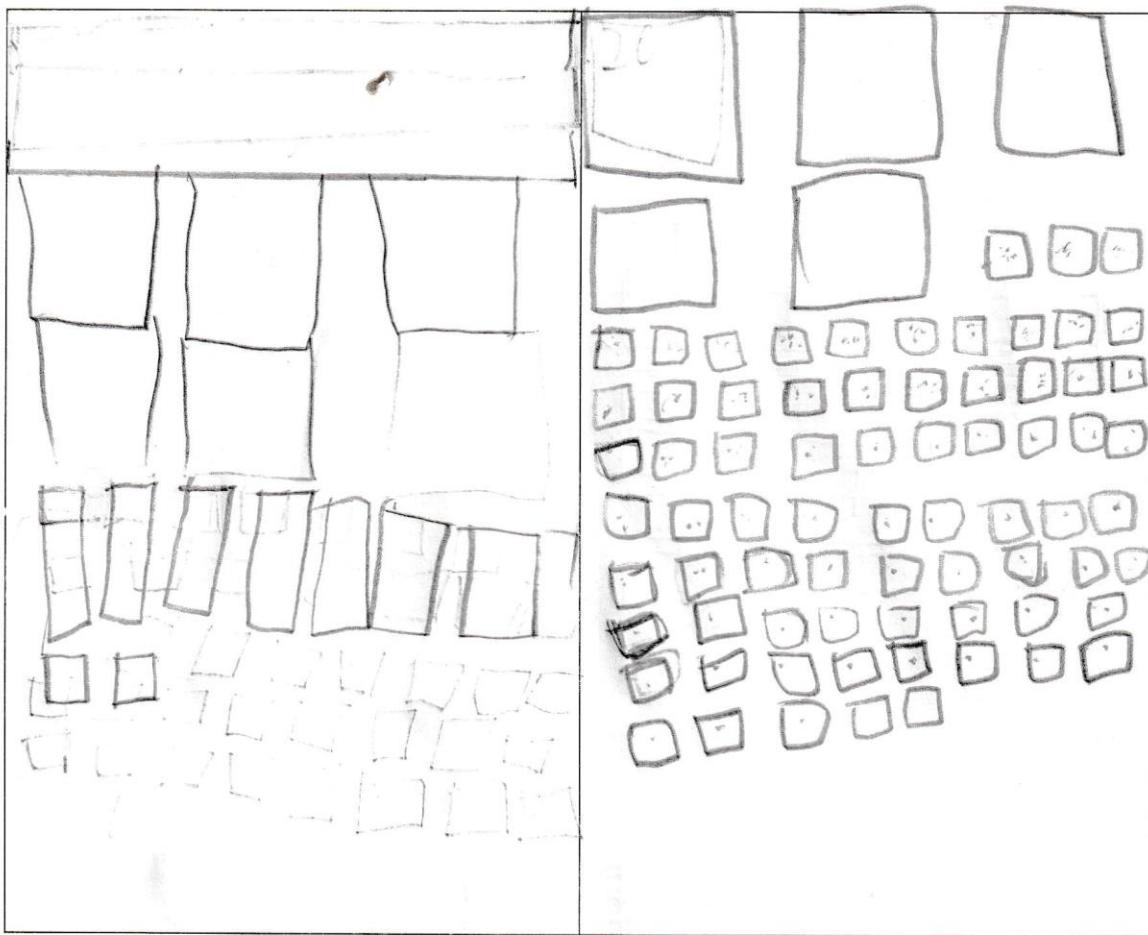
6. La maestra le pide a Luisa representar el número 30 pero sin usar los cubos. Ayúdale a Luisa con su tarea. ¡Dibújalo!



7. Si Luisa desea representar el número 200, sin utilizar barras ni cubos. ¿Cómo podría hacerlo? ¡Dibújalo!



8. Haciendo uso del rompecabezas, representa por lo menos de dos maneras distintas el número 572



9. A un estudiante del grupo, la profesora le muestra esta representación:

	¿Qué número está representando las fichas del rompecabezas matemático? <u>20</u>
---	---

10. Adivina que número se está representando con el rompecabezas matemático

El número que se está representando es 232

Tarea 3

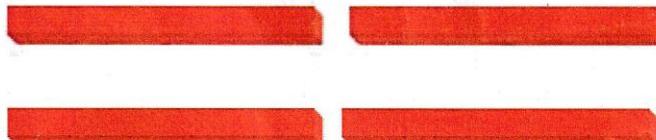


Ahora bien, la profesora Cristina indica a sus estudiantes que se van a cambiar los nombres de las piezas del rompecabezas matemático.

1. A partir de la información de la profesora completa los siguientes enunciados:

- Cada diez unidades pueden ser remplazada por una decena.
- Cada diez decenas es remplazada por una centena.
- Una centena contiene 100 decenas o 10 unidades.
- Una decena contiene 10 unidades.

2. Si te dan esta representación:



Responde:

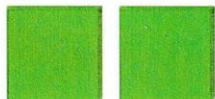
a. ¿Cuántas unidades hay en ella?

40

b. ¿Cuántas decenas hay en la representación?

4

3. Si te dan esta representación:



a. ¿Cuántas unidades hay en la representación?

200

b. ¿Cuántas decenas hay en la representación?

20

c. ¿Cuántas centenas hay en la representación?

3

4. Si te dan esta representación:



a. ¿Cuántas unidades hay en la representación?

221

b. ¿Cuántas decenas hay en la representación?

122

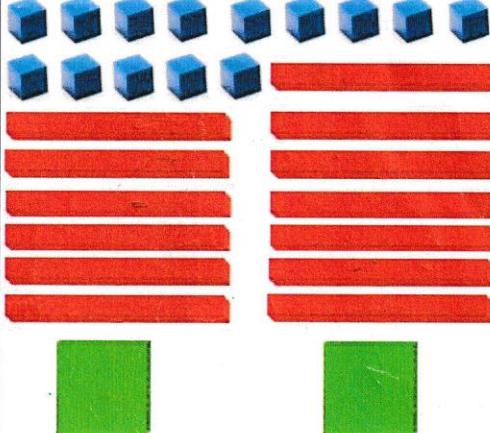
c. ¿Cuántas centenas hay en la representación?

1



La mejor forma de representar un número es **siempre utilizar la menor cantidad de fichas posibles.**

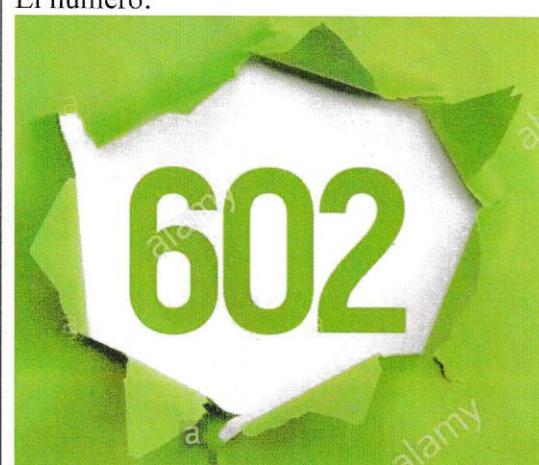
5. Teniendo en cuenta lo que dice la profesora responde:

	<p>a. ¿Es adecuada la representación? ¿por qué? Sí</p> <p>b. ¿Qué número se está representando? 244</p> <p>c. ¿Cuántas unidades hay en total? 14</p> <p>d. ¿Cuántas decenas hay en total? 130</p> <p>e. ¿Cuántas centenas hay en total? 2</p>
---	---

6.

<p>El número:</p> 	<p>Tiene:</p> <p>a. <u>5</u> Decenas</p> <p>b. <u>9</u> Unidades</p> <p>c. <u>0</u> Centenas</p>
---	--

7.

<p>El número:</p> 	<p>Tiene:</p> <p>a. <u>60</u> Decenas</p> <p>b. <u>2</u> Unidades</p> <p>c. <u>6</u> Centenas</p>
---	---

Esteban y es herde^{ra}

P2

Situación 2: VALORANDO LA POSICIÓN DE LAS CIFRAS DE UN NÚMERO

Propósito: Reconocer el valor que tienen los dígitos de un número según su posición.



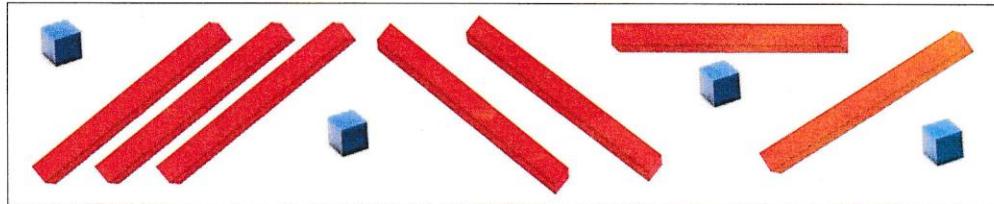
En una nueva clase, la profesora Cristina lleva a sus estudiantes de nuevo el rompecabezas matemático, y a partir de ahí les propone desarrollar las siguientes tareas:



Tarea 1: Valorando la posición de los dígitos en los números

Recuerda que: La idea es usar la menor cantidad de fichas posibles para representar un número con el rompecabezas matemático,

1. La profesora Cristina les dice a sus estudiantes que de acuerdo con la siguiente representación:

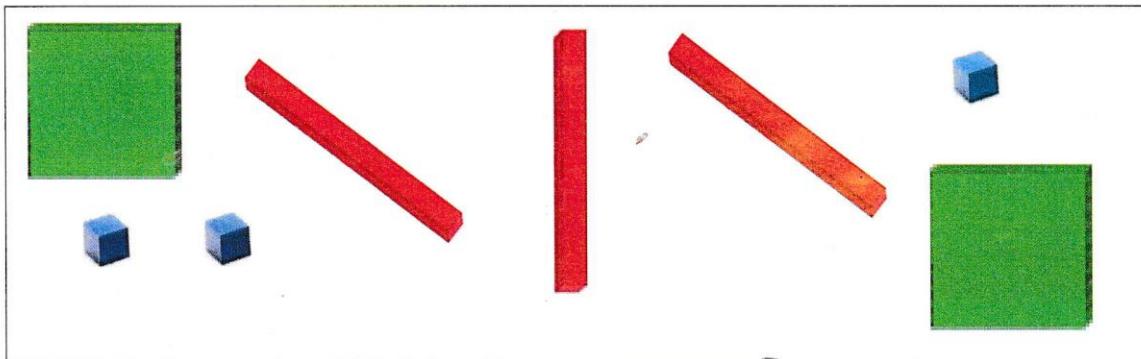


Responde los siguientes ítems.

- ¿Cuántas unidades sueltas (cubos) hay en la representación? 4
- ¿Cuántas decenas hay en la representación? 70
- ¿Qué números puedes formar con todas las fichas? Justifica tu respuesta. 74

No por que: Moneda 8 itaria

2.



a. ¿Cuántas unidades sueltas hay en la representación? 3 unidades

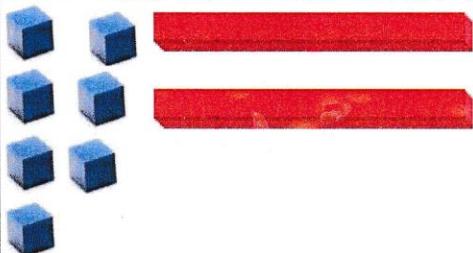
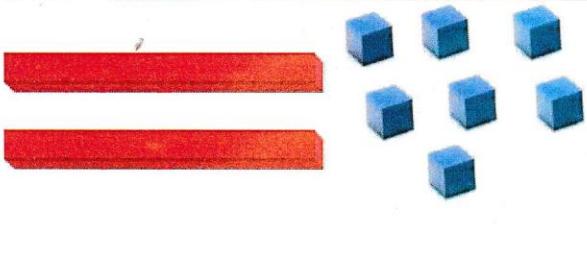
b. ¿Cuántas decenas hay en la representación? 3 decenas

c. ¿Cuántas centenas hay en la representación? 20 centenas

d. ¿Qué números puedes formar con todas las fichas? Justifica tu respuesta. 233



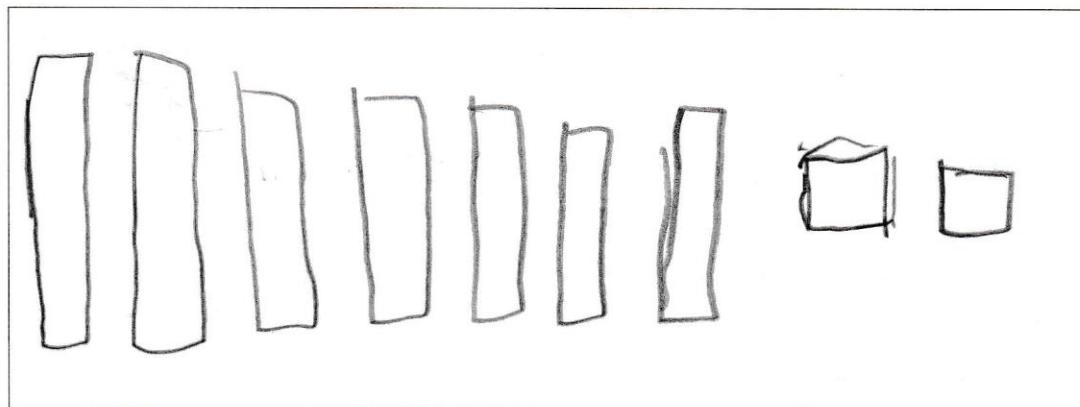
3. Teniendo en cuenta el mensaje que la profesora Cristina acaba de dar, decide mostrar las siguientes representaciones a Mateo y Andrea.

Mateo	Andrea
	

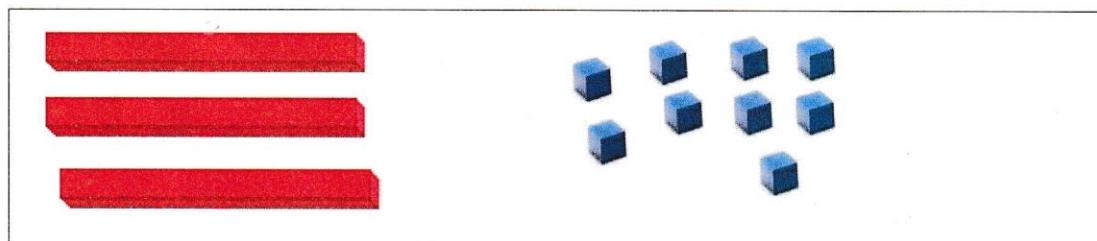
a. Mateo dice que tiene el número 72 y Andrea dice que tiene el número 27. ¿Cuál de los dos tiene la razón? Explica tu respuesta.

NO tiene el numero 72 Andrea tiene la razon y Mateo tiene la razon

b. Si quisiéramos representar el número 72 cuantas y cuales fichas debería de tener Mateo. Dibújalas en el cuadro.



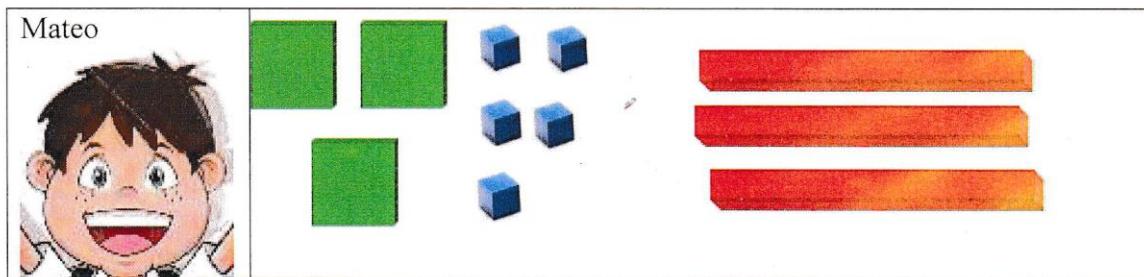
4. De acuerdo con la siguiente representación. Completa los espacios en blanco.



a. El número total representado es: 39
 b. El número 9 está en la **posición** de unidades sueltas.
 c. El número 3 está en la **posición** de decenas.

d. El número 0 está en la **posición** de centenas.

5. La profesora le da a Mateo la siguiente representación:

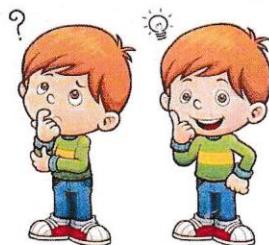


Mateo afirma que se está representando el número 353. ¿Es correcta la afirmación de Mateo? Justifica tu respuesta.

335 No es verdad

Tarea 2: Clase final de la profesora

1. ¡Adivinanza, adivinanza!: Adivina de qué número se está hablando:



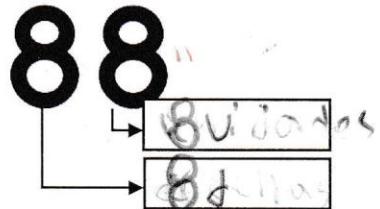
a. Tiene 2 unidades, 5 decenas y 3 centenas: 352

b. Tiene 7 decenas, 9 unidades y 7 centenas: 779

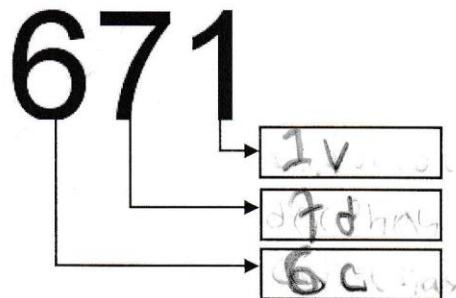
c. Tiene 12 unidades, 1 decena y 4 centenas: 412

2. Escribe el valor de cada cifra

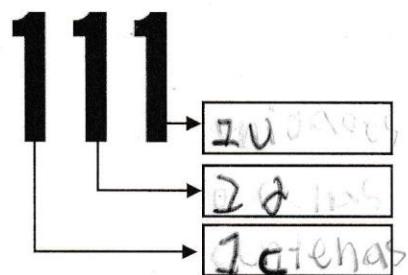
a.



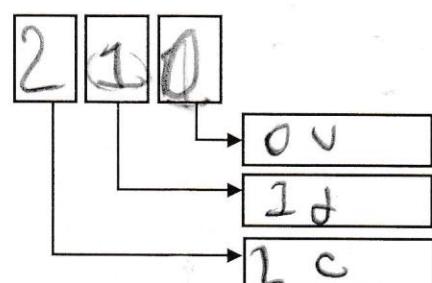
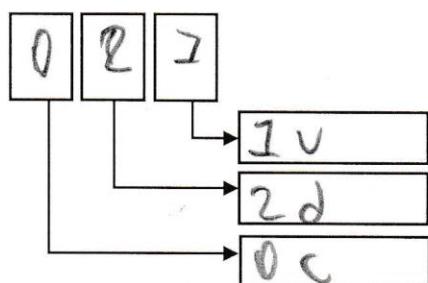
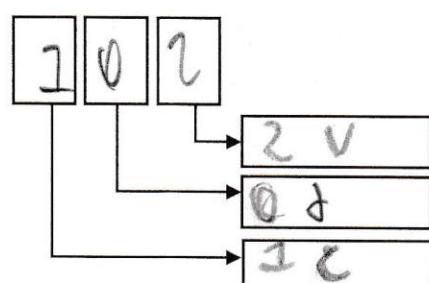
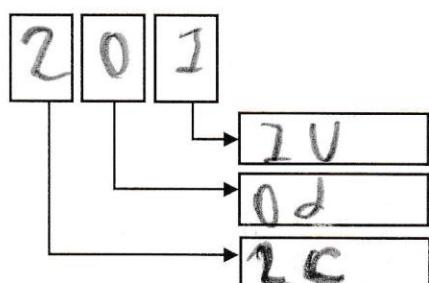
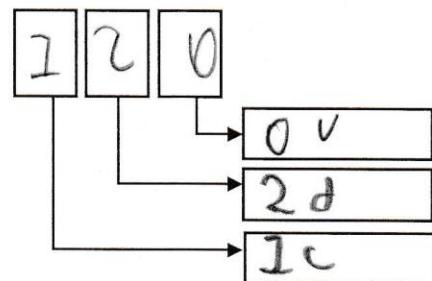
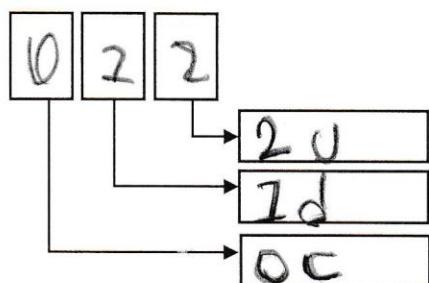
b.



c.



3. Si te dan estas tres cifras: 0, 1, 2. Representa a continuación los números que se pueden formar con las cifras dadas, e indica el valor de cada una de ellas en el número.



4. En la clase de hoy la profesora Cristina quiere enseñar algo nuevo a sus estudiantes, para ello comienza haciendo una pregunta a ellos.



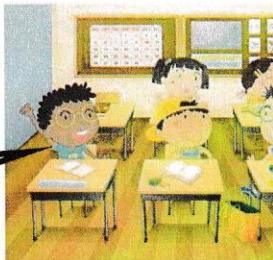
Si pones una pera al lado de otra pera, tienes dos peras, ¿Es verdad?

Sí profe

Entonces, ¿Por qué 11 significa once y no dos?

a. ¿Qué le responderías a la profesora?

que dos peras es igual a once



5. Escribe al menos dos ideas nuevas que hayas aprendido con la profesora Cristina.

que dos peras son mayor que una pera.

que los numeros sirven para contar.

