



**ANÁLISIS PRELIMINARES PROPIO DE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA: “UN
APORTE DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE VOLUMEN”**

KELY ESTEFANIA GUAQUEZ

PAMELA VELANDIA

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI

2019



**ANÁLISIS PRELIMINARES PROPIO DE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA: “UN
APORTE DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE VOLUMEN”**

KELY GUAQUEZ: 1222186 (3469)

PAMELA VELANDIA: 1134403 (3469)

DIRECTOR

FABIÁN PORRAS

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI

2019

DEDICATORIA

El presente trabajo investigativo lo dedicamos principalmente a Dios, por ser el inspirador y darnos fuerza para continuar en este proceso de obtener uno de los anhelos más deseados. A nuestros padres, por su amor, trabajo y sacrificio en todos estos años, gracias a ustedes hemos logrado llegar hasta aquí y convertirnos en lo que somos. Ha sido el orgullo y el privilegio de ser sus hijas, son los mejores padres.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Dios por bendecirnos la vida, por guiarnos a lo largo de nuestra existencia, ser el apoyo y fortaleza en aquellos momentos de dificultad y de debilidad.

Gracias a nuestros padres por ser los principales promotores de nuestros sueños, por confiar y creer en nuestras expectativas, por los consejos, valores y principios que nos han inculcado.

Agradecemos a nuestros Docentes del área de Educación Matemáticas, por haber compartido sus conocimientos a lo largo de la preparación de nuestra profesión, de manera especial, al tutor de nuestro proyecto de investigación Mg. Fabián Porras quien ha guiado con su paciencia, y su rectitud como docente.

RESUMEN

En este trabajo se aplican los análisis preliminares de una Ingeniería Didáctica, con el fin de aportar elementos a la posterior producción de situaciones de enseñanza con respecto a la construcción del concepto de volumen, en estudiantes de grado tercero de la I.E José Asunción Silva. Tales análisis abarcaron las tres dimensiones consideradas por una Ingeniería Didáctica: la epistemológica, la didáctica y la cognitiva.

El análisis epistemológico consistió en una revisión del desarrollo del concepto de volumen desde una perspectiva histórica. El análisis didáctico se enfocó en la enseñanza tradicional de este concepto y sus efectos, teniendo en cuenta el sustento teórico de las situaciones didácticas (TSD) de Brousseau. Al respecto se realizó una indagación de los patrones de enseñanza para el concepto de volumen que usa la docente de matemática de estos estudiantes. Finalmente, en el análisis cognitivo se identificaron las concepciones y dificultades que tienen estos estudiantes sobre el concepto de volumen, mediante algunas pruebas de campo.

De esta forma, se realizaron aportes a posibles situaciones de enseñanza para posteriores trabajos con respecto a la enseñanza y aprendizaje del concepto de volumen, que se obtuvieron a partir de la relación existente entre los tres análisis mencionados (los cuales fueron estimados como dichos componentes: histórico, didáctico y cognitivo).

Palabras Claves: Análisis preliminar, Ingeniería Didáctica, enseñanza del volumen, teoría, situaciones didácticas, dificultades cognitivas, historia epistemología del volumen.

ABSTRACT

In this work the preliminary analysis of a didactic engineering were applied, in order to make in later works the production of teaching situations with respect to the construction of the concept of volume, in third grade students of the I.E José Asunción Silva. These Such analyzes covered the three dimensions considered by didactic engineering: epistemological, didactic and cognitive.

In the first analysis, a review of the development of the concept of volume from a historical perspective was made. The didactic analysis focused on the traditional teaching of this concept and its effects, taking into account the theoretical sustenance of the didactic situations (TSD) of Brousseau. About that, an investigation of the teaching patterns was carried out for the volume concept that the math teacher of these students uses. Finally, an analysis was made where the conceptions and difficulties that these students have got about the concept of volume were identified, through some field tests.

In this way, contributions were made to possible teaching situations for further work with respect to the teaching and learning of the volume concept, which were obtained, based on the existing relationship between the three mentioned analyzes (which were estimated as those components: historical, didactic and cognitive).

TABLA DE CONTENIDO

1.	Introducción	1
2.	Justificación.....	2
3.	Problema de investigación.....	6
4.	Pregunta de investigación.....	9
5.	Objetivo General.....	9
6.	Objetivos Específicos.....	10
7.	Marco Teórico	10
7.1	Caracterización de la Ingeniería Didáctica	10
7.1.1	La Ingeniería Didáctica como Método de Investigación o como Producción de Situaciones de enseñanza.....	10
7.1.2	Análisis Preliminares	12
7.1.3	Concepción y Análisis a Priori de las Situaciones Didácticas.....	13
7.1.4	Experimentación.	14
7.1.5	Análisis a Posteriori y Evaluación.....	15
7.2	La Ingeniería Didáctica y sus Enfoques Teóricos.....	15
7.2.2	Planteamiento de Situaciones Didácticas desde el Enfoque de Brousseau, G.....	17
7.3	Transposición Didáctica del Concepto de Volumen	19
7.4	El Volumen y Sus Significados	20
7.5	Construcción de la Magnitud Volumen.	21
7.5.1	Comprensión de los Procesos de Conservación en la Construcción de la Magnitud Volumen.	22
8.	Metodología.....	23
8.1	Análisis preliminar.....	24
8.1.1	La Noción de Volumen. Un Acercamiento Histórico- Epistemológico.....	24
8.1.2	Ánalisis de la Enseñanza Tradicional y sus Efectos	24
8.1.3	Análisis de las Concepciones y Dificultades de los Estudiantes en la Enseñanza del Concepto de Volumen.....	27
8.2	Aportes a posibles situaciones de enseñanza para posteriores trabajos con respecto a la enseñanza y aprendizaje del concepto de volumen.....	33
9.	Resultados de Los Análisis, Aportes y Conclusiones	34
9.1.	La Noción de Volumen. Un Acercamiento Histórico- Epistemológico.....	35
9.2.	Análisis de la Enseñanza Tradicional y sus Efectos	42

9.2.1. Cómo la enseñanza tradicional ha evolucionado desde la perspectiva de la docente.	42
9.2.2. Correspondencia existente entre el currículo de la docente y la propuesta por parte del Ministerio de Educación	44
9.2.3. Metodología utilizada por la docente como estrategia de construcción de la magnitud de volumen	45
9.2.4 Falencias en las estrategias de la docente a apoyar desde la Ingeniería Didáctica en pro de una mejor construcción del concepto de volumen.	49
9.3. Análisis de las Concepciones y Dificultades de los Estudiantes en la Enseñanza del Concepto de Volumen.....	52
9.3.1 Análisis de la prueba 1	52
9.3.2. Análisis de la prueba 2	54
9.3.3. Análisis de la prueba 3	55
9.3.4. Análisis de la prueba 4	56
9.3.5. Análisis de la prueba. 5	58
9.3.6 Análisis de la prueba 6	58
9.3.7. Análisis de la prueba 7	59
9.3.8. Análisis de la prueba 8	60
9.4. Aportes a Posibles Situaciones de Enseñanza para Posteriores Trabajos con Respecto a la Enseñanza y Aprendizaje del Concepto de Volumen.....	61
9.5 Conclusión.....	70
10. Bibliografía	73
11. Anexos.....	78

INDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Resultado de pruebas saber (2016). Colegio José Asunción Silva. Recuperado de icfes interactivo	4
Ilustración 2. Caracterización de la prueba saber (2016). Colegio José Asunción Silva. Recuperado de icfes interactivo.....	5
Ilustración 3. Imagen para la prueba 1 a estudiantes.	28
Ilustración 4. Imagen para la prueba 2, c.	29
Ilustración 5. Imagen para la prueba 2, d.	30
Ilustración 6: Mapa mental de la ingeniera didáctica. De faria, E, (2006), pág. 2	50

Tabla de Anexos

Anexo A: Entrevista Docente	78
Anexo B: Protocolo de observación de las pruebas a estudiantes y dificultades por estudiantes	81
Anexo C: Imágenes de las pruebas a estudiantes.....	102

1. Introducción

Uno de los conceptos que más dificultades reporta al momento de su enseñanza es el de volumen. Por tal razón, en este trabajo se buscó dar un aporte desde un análisis preliminar propio de una Ingeniería Didáctica, el cual consistió en realizar tres tipos de análisis. Un acercamiento a un análisis epistemológico, un análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos; y un análisis de las concepciones y dificultades de los estudiantes.

En el acercamiento del análisis epistemológico se realizó una descripción breve del desarrollo histórico del concepto de volumen desde su construcción histórica a fin de brindar elementos que le permitieran al docente reflexionar sobre su quehacer didáctico.

Por su parte, en el análisis de la enseñanza tradicional se procedió a realizar una entrevista a un docente de matemática de grado tercero y sus respuestas se analizaron bajo la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, G. (1986) mencionadas en el texto de Chavarría J, (2006).

Luego en el análisis de las concepciones y dificultades de los estudiantes se realizaron algunas pruebas diagnósticas a los estudiantes de tercer grado de dicha profesora, cuyos resultados se contrastaron desde un enfoque cognitivo que permitió comprender dichas dificultades.

Por último, se generaron aportes a posibles situaciones de enseñanza en posteriores trabajos con respecto a la enseñanza y aprendizaje del concepto de volumen, ilustrados mediante la reflexión de los resultados finales en los análisis y razonados por las necesidades educativas experimentadas durante la implementación de éstos.

2. Justificación

El volumen es un concepto matemático que tiene una considerable aplicación en la vida diaria debido a que todos los objetos que existen ocupan un espacio. Por lo tanto, no es extraño que los estudiantes tengan la necesidad práctica de poner en ejercicio actividades como medir el volumen de un cuerpo, saber si un cuerpo puede o no entrar por un determinado lugar, conocer el espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros. Algunos investigadores en educación matemática, como Castrillón, J. (2014), Sainz, M. (2007), Saucedo G, Carbón L, Mantica, A. (2007), entre otros; han indagado con respecto a la enseñanza de este concepto en la escuela.

A partir de la revisión de distintas investigaciones, se ha evidenciado cómo el aprendizaje del concepto de volumen trae diversas dificultades debido a que, en la enseñanza tradicional de este concepto en el aula, se hace un gran énfasis en que los estudiantes manejen la unidad de medida con respecto a este, sin haberle dedicado suficiente tiempo a la construcción de una magnitud. Según Saucedo, G. *et. al* (2007) P. 4 “*la mayoría de la bibliografía escolar hace un tratamiento prioritario del sistema métrico decimal dando por supuesto que se sabe lo que es la magnitud que ha de ser medida, en este caso el volumen*”.

Desde los lineamientos curriculares MEN (1998) se plantea que la enseñanza del volumen permite desarrollar distintas nociones, asociadas a los diferentes tipos de pensamiento matemático y además se le asocia como indispensable en la enseñanza del sistema métrico decimal. Por ejemplo, este afirma que:

En el problema de averiguar por la equivalencia o no de dos volúmenes, aparte de la comprensión de la magnitud volumen, del procedimiento para

medirlo, de la elección de la unidad, aparte de las nociones del sistema métrico se necesitaría el conocimiento de los números utilizados, su tamaño relativo y los conceptos geométricos involucrados en la situación, nociones de sistemas numéricos y del geométrico, respectivamente.

Las orientaciones curriculares del ministerio de educación enfatizan la enseñanza de este concepto desde los primeros grados de escolaridad, puesto que si no es tratado a tiempo puede influir en niveles de escolaridad más avanzados.

A continuación, se presentan dos gráficas relacionadas con los resultados de las pruebas saber 2016 de los estudiantes de tercer grado de la institución José Asunción Silva, con respecto a los diferentes componentes evaluados por el ministerio de educación nacional.

Establecimiento educativo: IE JOSE ASUNCION SILVA

Código DANE: 276520002346

Fecha de actualización de datos: lunes 27 de febrero 2017

Año: 2016

Resultados de grado tercero en el área de matemáticas

Resumen

Detalles

Numérico-variacional

Geométrico-métrico

Aleatorio

Resumen

Lectura de resultados

En comparación con los establecimientos que presentan un puntaje promedio similar al suyo en el área y grado evaluado, su establecimiento es:

- Similar en el componente Numérico-variacional
- Débil en el componente Geométrico-métrico
- Fuerte en el componente Aleatorio

Ilustración 1. Resultado de pruebas saber (2016). Colegio José Asunción Silva. Recuperado de icfes interactivo

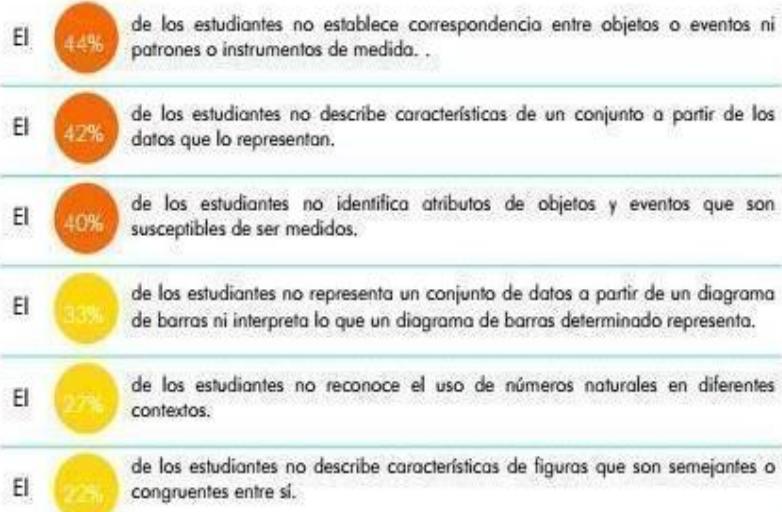


Ilustración 2. Caracterización de la prueba saber (2016). Colegio José Asunción Silva. Recuperado de icfes interactivo.

Al observar los resultados de la prueba saber, se puede concluir que los estudiantes del grado tercero de la institución José Asunción Silva se encuentran con debilidades, en el componente geométrico-métrico, en comparación con otras instituciones que presentan un promedio similar en el área y grado evaluado. Además, también puede observarse que, en relación con la problemática de investigación aquí planteada, el 40% de los estudiantes no identifica atributos de objetos y eventos que son susceptibles de ser medidos, esto afirma que los estudiantes presentan falencias en reconocer que el volumen y la capacidad son magnitudes asociadas a figuras tridimensionales.

Se hace entonces importante investigar al respecto y trabajar, desde el campo de la educación matemática, en la formulación de propuestas didácticas que permitan la construcción de este concepto debido a la importante aplicación que tiene este en la vida diaria ya que se hace parte de un mundo tridimensional, en el cual no es extraño que en algún momento se necesite medir el volumen de un cuerpo, pues según Bishop, G. (1999) citado por Luelmo, (2001) medir es una actividad común en todas las sociedades.

En consecuencia, resulta evidente la necesidad de introducir modificaciones en los procesos de enseñanza de los conceptos relacionados con el volumen, pero no es sólo cuestión de hacer cambios sin un sustento teórico adecuado. Al respecto es necesario disponer, previamente, de un conocimiento didáctico efectivo y de elementos relativos a la historia del concepto de volumen. Revisando las metodologías existentes para recoger tales elementos, los análisis preliminares sugeridos por la Ingeniería Didáctica resultan plenamente adecuados para proporcionar todos estos aspectos.

3. Problema de investigación

Las acciones didácticas del maestro en el aula muchas veces obedecen a la simple intuición, la cual “*es aceptada por algunos como fuente de conocimiento verdadero y rechazada por otros como potencialmente engañosa en toda búsqueda de verdad*” López. C (2007) P. 29. Para Fischbein (1987) citado en López, C. (2007) P. 29 “*la intuición no es la fuente primaria de conocimiento verdadero, pero aparenta serlo porque ese es exactamente su rol*”, por lo cual los docentes no deberían enfocarse directamente en acciones intuitivas, debido a que se perdería el sentido didáctico de la enseñanza de los conceptos matemáticos.

Una de las dificultades que presentan los docentes al momento de enseñar tiene que ver

con la construcción del concepto matemático, el cual es un aspecto muy importante a tener en cuenta, debido a que dependiendo del reconocimiento que se tenga sobre este, así mismo será el proceso de enseñanza.

En este caso, es de interés abordar aspectos referentes a la construcción de la magnitud volumen, para ello es importante reconocer las dificultades y nociones asociadas a este concepto. En el proceso de la construcción de una magnitud cualquiera, varias investigaciones como la realizada por el Ministerio de Educación MEN (1998) en los Lineamientos Curriculares, han reportado que a pesar de que los cuerpos son susceptibles de ser medidos, en el proceso de construcción de una magnitud los estudiantes muchas veces no logran identificar fácilmente algunas cualidades presentes en los cuerpos, como la longitud, masa, superficie, temperatura, capacidad o el volumen, entre otras. Al respecto Saiz (2007) P. 2 expresa que *“medir es tan común que de pronto se confunde la propiedad que estamos midiendo, la magnitud, con su medida y la cuestión se complica más aún cuando todo se mide con las mismas unidades, con el mismo sistema de medición”*.

Se observa entonces como en los procesos de enseñanza se pueden encontrar dificultades de tipo didáctico, debido a que los estudiantes pueden no distinguir el paso de una propiedad concreta a una abstracta en una magnitud. En lo correspondiente a esta problemática los lineamientos curriculares del MEN (1998) plantean que hay que tener en cuenta que la construcción de una magnitud requiere de tiempo para que los estudiantes identifiquen en el objeto o en el fenómeno la magnitud concreta como el largo, el ancho, el espesor, etc. y así posteriormente logren fundir en una sola la magnitud abstracta.

Cuando se habla de magnitud se hace alusión a cualquier tipo de medida, entre ellas se encuentran la longitud, el área y el volumen. Estas magnitudes planteadas desde el Sistema

Métrico Decimal (SMD) se han desarrollado tradicionalmente en ese mismo orden, primero la longitud, segundo el área y por último el volumen. Este proceso puede causar una dificultad en el aprendizaje de los estudiantes debido a que el concepto de área no conlleva directamente al de volumen, este concepto se puede dar a conocer sin tener algún conocimiento de ésta, ya que el volumen como objeto matemático presenta unas propiedades específicas, pues de acuerdo con Godino (2002) citado en Castrillón, J. (2014) P. 14. “el volumen se usa para designar la propiedad de todos los cuerpos de ocupar un espacio”.

Por otra parte, la enseñanza del concepto de volumen es de tipo práctico y aunque el volumen está inmerso en la gran mayoría de objetos, la experiencia muestra que los estudiantes cuando piensan en éste, tienen una tendencia a relacionar muchas veces este concepto directamente con una fórmula específica, lo cual es consecuencia del uso apresurado del sistema y no de la construcción del concepto de volumen como magnitud.

Otras problemáticas asociadas a la enseñanza del concepto de volumen tienen que ver con los procesos de conservación: por ejemplo, se menciona en Castrillón, J. (2014), que entre las dificultades más comunes que presentan los alumnos cuando requieren resolver situaciones que involucran la conservación de dicha magnitud, están las que se relacionan con la altura, ya que los estudiantes piensan que a mayor altura mayor volumen, sin prestar mayor atención al diámetro que conforma el recipiente; es decir, no hay claridad por parte de los estudiantes en cuanto al manejo de algunas variables como área de la base y altura, sino que sólo hay una relación entre lo que el alumno a simple vista considera más grande. Un claro ejemplo se da cuando se trasladan líquidos de un recipiente a otro que tienen diferente forma, pero igual capacidad, los alumnos no están seguros de que la altura sea un factor que interviene cuando se trata de determinar la cantidad de volumen que cabe en un recipiente.

Otra problemática asociada a la enseñanza de este concepto tiene que ver con que el volumen es un concepto que puede verse desde dos perspectivas que se pueden relacionar, volumen y capacidad, pero estas conllevan a dos significados diferentes: volumen interno y volumen externo. El primero es el espacio ocupado y el segundo es el espacio vacío que puede ser llenado. Kerslake (1976) citado por Dickson, (1991) destaca que por lo general se presentan los mismos esquemas o dibujos cuando se estudian los dos modelos de volumen, por lo tanto los alumnos no tienen *“la oportunidad de distinguir claramente ambos tipos de volumen ni de considerar las diferentes consecuencias que comporta cada tipo de medida”* P.148, esto implica que al momento de enseñarlo es importante tener en cuenta estos dos significados del volumen y no centrarse específicamente en la enseñanza de un solo tipo, como es el caso del volumen externo ocupado. Con relación a lo anterior surge la siguiente pregunta:

4. Pregunta de investigación

¿De qué manera los análisis preliminares de la Ingeniería Didáctica permiten recoger elementos teóricos que posibiliten la producción de situaciones de enseñanza con respecto a la construcción del concepto de volumen en estudiantes de grado tercero de la IE José Asunción Silva?

5. Objetivo General

Realizar los análisis preliminares propios de una Ingeniería Didáctica, con el fin de posibilitar en posteriores trabajos la producción de situaciones de enseñanza con respecto a la construcción del concepto de volumen, en estudiantes de grado tercero de la I.E José Asunción Silva.

6. Objetivos Específicos

- 6.1 Revisar el desarrollo del concepto de volumen desde una perspectiva histórica-epistemológica, en función de dar un aporte a la enseñanza del volumen.
- 6.2 Analizar la enseñanza tradicional del concepto de volumen y sus efectos, teniendo en cuenta el sustento teórico de las situaciones didácticas de Brousseau.
- 6.3 Identificar las concepciones y dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje del concepto del volumen.
- 6.4 Relacionar aspectos didácticos, epistemológicos y cognitivos, importantes a tener en cuenta en la elaboración de una secuencia didáctica.

7. Marco Teórico

7.1 Caracterización de la Ingeniería Didáctica

7.1.1. La Ingeniería Didáctica como Método de Investigación o como Producción de Situaciones de enseñanza.

De los aportes teóricos que posibilitan la enseñanza del conocimiento matemático, para el desarrollo de esta investigación se opta por una teoría que apunte hacia al análisis y comprensión de los diferentes fenómenos didácticos que intervienen en el proceso de enseñanza del concepto de volumen, para ello se opta por la Ingeniería Didáctica como base teórica. Teniendo en cuenta la descripción que hace Artigue, M. Douady, R. & Moreno L. (1995) citado en De Faria, E. (2006)

Para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo

tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo”.

El término Ingeniería Didáctica en general se utiliza en didáctica de las matemáticas con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje, conforme mencionó Douady (1996) P.241 citado en De Faria, E, (2006.)

...el término Ingeniería Didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la Ingeniería Didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase. P. 01.

Teniendo en cuenta que Artigue, M. et al (1995) caracteriza la Ingeniería Didáctica como *singular, no por los objetivos de las investigaciones que entran en sus límites, sino por las características de su funcionamiento metodológico. Estos trabajos son excepcionales tanto por la amplitud de las realizaciones didácticas involucradas, como por la importancia del aporte teórico al cual condujeron dichas realizaciones* P. 38. Por ello para este trabajo se tiene en cuenta la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación que permite recoger elementos teóricos en función de la elaboración de una propuesta didáctica; la cual, en trabajos posteriores, posibilita la producción de situaciones de enseñanza, teniendo en cuenta los elementos teóricos que arroje esta investigación.

En general la Ingeniería Didáctica se caracteriza por tener un esquema experimental basado en realizaciones didácticas en clase sobre la concepción, realización, observación y

análisis de secuencias de enseñanza a partir del registro de estudios de caso, donde cuya validación es interna y se basa en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

La Ingeniería Didáctica está integrada por un conjunto de fases que permiten la elaboración o sistematización de una secuencia de clase, las cuales comprenden distintos tipos de análisis que van directamente relacionados y estos son: análisis preliminares, concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas, experimentación, análisis *a posteriori* y evaluación. A continuación, se describirán algunas características de cada una de estos análisis y la relación que tiene uno de ellos con los objetivos de este trabajo. En la estructura investigativa de esta caracterización se tiene en cuenta lo mencionado por Artigue, M. *et al* (1995) y De faria, E. (2006) en sus investigaciones sobre Ingeniería Didáctica.

7.1.2. Análisis Preliminares

Para la concepción de una Ingeniería Didáctica son necesarios algunos análisis preliminares respecto a un marco teórico didáctico que se relacione directamente con los objetivos de investigación. Esto implica que dependiendo del tipo de objetivo que se plantee, así mismo será el nivel de exigencia de estos análisis.

A pesar de que Artigue, M. *et al* (1995), plantea que esta serie de análisis preliminares no se evidencian en las publicaciones, sino que son retomados y profundizados por el investigador en las diferentes fases de la ingeniería. Este trabajo de investigación se enfoca directamente en este tipo de análisis, como una fase que debe estar enmarcada en un proceso de una investigación; ya que los resultados de estos análisis servirán de sustento teórico en posteriores trabajos, coincidiendo así con la autora acerca de que “*los estudios preliminares tan sólo mantienen su calidad de “preliminares” en un primer nivel de elaboración*” puesto que estos

serán la base en la producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje.

Para la realización de esta propuesta de trabajo, fundamentada en los análisis preliminares de una Ingeniería Didáctica con respecto a la enseñanza del concepto de volumen, se tienen en cuenta algunos referentes teóricos que permitan interpretar, analizar y organizar un análisis de tipo didáctico; para ello se tiene en cuenta las dimensiones que menciona Artigue *et al* (1995). P. 40, con respecto a los procesos de construcción de una Ingeniería Didáctica:

- Dimensión epistemológica: asociada a las características del saber puesto en funcionamiento.
- Dimensión didáctica: asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.
- Dimensión cognitiva: asociada a las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza.

Teniendo en cuenta estas dimensiones, los análisis preliminares más frecuentes, al momento de realizar una Ingeniería Didáctica según Artigue M, *et al* (1995) P.38: “*análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza; análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos y análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución*”.

7.1.3 Concepción y Análisis a Priori de las Situaciones Didácticas.

En esta fase el investigador actúa sobre un determinado número de variables las cuales deben ser pertinentes en relación con el problema de investigación.

- Variables macro-didácticas o globales: concernientes a la organización global de la ingeniería

- Variables micro-didácticas o locales: concernientes a la organización local de la ingeniería.

En cuanto a nivel de escogencia, las primeras selecciones que se realizan son las variables globales ya que estas describen las fases donde van a intervenir las selecciones locales y aunque los dos tipos de selecciones se presentan de manera separadas no se puede olvidar que estas no son independientes entre ellas.

El objetivo del análisis *a priori* es determinar que las selecciones hechas permitan controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado, el cual se basa en un conjunto de hipótesis que se validan en la confrontación entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori* que se lleva a cabo en la cuarta fase. Este análisis *a priori* se concibe a partir de una parte descriptiva y una predictiva, que se centra en las características de una situación a-didáctica, en donde el profesor interviene más directamente en los procesos de devolución e institucionalización del concepto.

7.1.4 Experimentación.

La experimentación es la fase de la realización de la ingeniería, en el cual se busca respetar las selecciones y consideraciones hechas en los análisis *a priori*. Esta supone lo siguientes:

- Problemas de género gramatical de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación.
- El establecimiento del contrato didáctico.
- La aplicación de los instrumentos de investigación.
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

7.1.5. Análisis a Posteriori y Evaluación.

El análisis a priori se basa en la confrontación de los dos análisis, el *a priori* y *a posteriori*, que se fundamenta por la validación de las hipótesis formuladas en la investigación. Los cuales se realizan a partir del conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación (observaciones realizadas, producciones de los estudiantes metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas, entre otros). Si las hipótesis que se formulan explícitamente en los trabajos de ingeniería son relativamente globales ponen en juego que la amplitud de la ingeniería no permita involucrarse en verdad en un proceso de validación, por lo que es importante ponerles bastante cuidado a estos aspectos.

Teniendo en cuenta la caracterización realizada sobre las fases de la Ingeniería Didáctica se menciona que este trabajo de investigación se basa en el análisis preliminar, el cual se comprende por un barrido histórico-epistemológico del concepto de volumen; la identificación de las concepciones, dificultades y obstáculos que determinan la enseñanza de los estudiantes en relación con objeto matemático de estudio y un análisis de la enseñanza tradicional del concepto de volumen y sus efectos en relación con el sustento teórico de las situaciones didácticas de Brousseau (1986).

7.2. La Ingeniería Didáctica y sus Enfoques Teóricos.

En la elaboración de una Ingeniería Didáctica es importante conocer el sustento teórico de esta; para así poder entender el funcionamiento de la misma. Según Chavarría (2006) el planteamiento de una situación didáctica se puede dar desde dos enfoques: el tradicional y el proporcionado por Brousseau (1986). A continuación, se caracterizará algunos aspectos de estos enfoques, los cuales servirán de sustento para desarrollar un análisis de tipo didáctico en relación con la enseñanza del concepto de volumen.

7.2.1. Planteamiento de Situaciones Didácticas Desde un Enfoque Tradicional.

Teniendo en cuenta las características que presenta la metodología de enseñanza de los docentes es posible verificar y establecer cuándo una práctica de aula se fundamenta bajo criterios de una enseñanza tradicional.

Según García M. (2011) existen distintas teorías que sustentan este enfoque tradicional:

- Teorías conductistas: se establece que el aprendizaje del estudiante se realiza mediante acciones de estímulos y respuestas
- Teorías cognitivas: se encarga de los procesos a través de los cuales el individuo, obtiene conocimiento del mundo y toma conciencia de su entorno.
- Teoría de la enseñanza intuitiva: El aprendizaje de los estudiantes solo se realiza a partir del conocimiento intuitivo que tenga el docente.
- Teorías cognoscitivas: El aprendizaje precede al observar e imitar una conducta ya establecida.

Estas teorías nos permiten realizar una caracterización de este tipo de enseñanza, la cual se basa en:

- Rol del docente: Transmisor del conocimiento
- Rol estudiante: Pasividad frente al contenido que recibe, mecanización de algoritmos y conceptos de manera lineal
- Rol del conocimiento: Es puro y acabado.
- No hay desarrollo de trabajo grupal.

Este marco contextual de la enseñanza tradicional, permite analizar la metodología de enseñanza de un docente en contraste con la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, la cual se caracteriza a continuación.

7.2.2. Planteamiento de Situaciones Didácticas desde el Enfoque de Brousseau, G.

Este enfoque planteado por Brousseau, G. (1986), se basa en el conjunto de interrelaciones entre: estudiante, profesor y medio didáctico. Según Chavarría J, (2006), esta relación acontece cuando:

Los sujetos de la situación didáctica se relacionan con el medio que el docente elaboró para que se lleve a cabo la construcción del conocimiento (situación didáctica) y así el estudiante pueda, a su vez, afrontar aquellos problemas inscritos en esta dinámica sin la participación del docente (situación a-didáctica). P.2

Es decir que el profesor debe facilitar el medio, en el cual el estudiante construye su conocimiento, a través del planteamiento de situaciones didácticas y a-didácticas.

En esta teoría se plantea unas condiciones que se deben dar en una situación didáctica, las cuales se deben tener en cuenta al momento de enseñar.

- Situación acción. Consta de una situación a-didáctica en la cual el estudiante interactúa con el medio didáctico en la resolución de un problema planteado, por el docente, en este momento el estudiante trabaja individualmente con el problema, aplicando sus conocimientos previos.
- Situación de formulación. Consiste en enfrentar a un grupo de estudiantes con el problema dado, en el cual se hace necesario la interacción de cada estudiante con el medio didáctico; y así de esta manera cada integrante del grupo que participe del proceso pueda compartir sus ideas o experiencias en la construcción del conocimiento.

- Situación de validación. Ocurre después de que los estudiantes han interactuado con el medio didáctico y se da a partir de discusión entre docente- estudiante acerca de las tareas realizadas, esto con el fin de reflexionar acerca de si el proceso de solución es o no correcto y de esta manera validar las soluciones planteadas.
- Institucionalización del saber. En esta etapa los estudiantes ya han construido su conocimiento por lo cual la función del docente es volver sobre lo realizado hasta el momento, aportando con sus observaciones y así formalizar el saber enseñado.

Teniendo en cuenta la interrelación (profesor-estudiante-medio didáctico), al momento de plantear situaciones didácticas, además de tener en cuenta las condiciones anteriormente mencionadas, es importante resaltar el concepto transposición didáctica.

El concepto de transposición didáctica propuesto por Chevallard, Y (1985) P. 39, citado en Gómez (2005), es un proceso en donde:

“un contenido del saber sabio que haya sido designado como saber a enseñar sufre un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza. El trabajo que un objeto de saber a enseñar hace para transformarlo en un objeto de enseñanza se llama transposición didáctica”. P. 87.

El paso del saber sabio al saber enseñado es una relación un poco compleja en el sentido de que puede haber una gran distancia entre ellos, esta transposición implica un proceso de manipulación del saber, que está determinado por los objetivos de enseñanza que se deseé alcanzar y el contexto escolar donde se propone la situación didáctica.

Teniendo en cuenta lo anterior podemos analizar que la teoría de situaciones didácticas es importante porque al basarse en el conjunto de interrelaciones estudiante, profesor y medio didáctico; cada elemento de esta relación cumple un papel específico e indispensable en la construcción del concepto matemático. En cuanto al docente tiene como función elaborar el

medio didáctico que usara para la enseñanza, a partir de la transposición didáctica de este, lo cual implica que él debe realizar un proceso de manipulación del saber, teniendo en cuenta los objetivos de enseñanza que deseé alcanzar. Lo que implica que, aunque los estudiantes se enfrentan a un problema de manera a-didáctica en el cual construyen su propio conocimiento a través de la confrontación de sus ideas previas, no están totalmente solos en el proceso de aprendizaje.

7.3. Transposición Didáctica del Concepto de Volumen

Todo concepto matemático antes de ser enseñado sufre una transposición didáctica; por lo tanto, al momento de enseñar el concepto volumen, es importante considerar que esta transposición se realice a partir del análisis de diferentes aportes teóricos que posibiliten la enseñanza de este.

Teniendo en cuenta lo planteado desde los lineamientos curriculares MEN (1998), para enseñar un concepto matemático que esté inmerso en los sistemas métricos, tal como el volumen, se debe proponer a los estudiantes actividades que vayan encaminadas a desarrollar procesos y conceptos como los siguientes:

- La construcción de los conceptos de cada magnitud.
- La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes.
- La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de capturar lo continuo, con lo discreto.
- La apreciación del rango de las magnitudes.
- La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos.
- La diferencia entre la unidad y el patrón de medición.
- La asignación numérica.

- El papel del trasfondo social de la medición.

Aunque cada uno de los aspectos mencionados anteriormente son importantes, al momento de plantear una situación didáctica, para el desarrollo de este trabajo se considera conveniente profundizar acerca de la construcción de la magnitud volumen, sus significados y la relación que tienen con los procesos de conservación en una situación de enseñanza.

7.4. El Volumen y Sus Significados

El volumen es un concepto matemático que puede plantearse desde diferentes perspectivas. Piaget, J. Inhelder, B & Szeminska, A. (1960) citado en Sáiz, M. (2007) distinguen tres significados: volumen interno (la cantidad de unidades de material que conforman un cuerpo), volumen ocupado (la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos del entorno) y volumen desplazado (el volumen de agua desplazado por un cuerpo que se sumerge en este líquido).

En cambio, para Kerslake (1976) citado por Dickson, L., Brown, M. y Gibson. O. (1991), la palabra volumen puede utilizarse con dos significados: volumen interno de un hueco, como sinónimo de capacidad y volumen externo como cantidad de espacio ocupado.

Para aclarar el concepto de capacidad mencionado anteriormente, se tiene en cuenta el aporte hecho por Godino J, *et al* (2002); en el cual plantean que:

Esta se usa para designar la cualidad de los objetos de poder contener líquidos o materiales sueltos. En realidad, no se trata de una magnitud diferente del volumen: la capacidad de un recipiente coincide con el volumen del espacio interior delimitado por las paredes del recipiente, y viceversa, el volumen de un cuerpo coincide con la capacidad de un recipiente que envolviera completamente a dicho cuerpo. P.622.

Distintos autores reflejan su posición acerca de cuál de estos significados se adquiere de manera más fácil en los estudiantes, Kerslake (1976) citado por Dickson, L *et al* (1991) destaca

que en la vida cotidiana se hace mayor referencia al volumen/capacidad interno y al llenado total o parcial de cosas huecas y no al volumen como espacio ocupado, afirmando que las prácticas en el aula se limitan a llenar espacios huecos y hay una marcada carencia de actividades que apunten a la noción de volumen ocupado.

Teniendo en cuenta lo anterior, para este trabajo se opta por tomar los conceptos de volumen interno como la capacidad que tiene un recipiente ser llenado y volumen ocupado como el espacio que ocupa un objeto en relación a otro, pero de manera análoga. Haciendo hincapié en que se deben trabajar ambas nociones en el aula, pues los docentes deben brindar a los estudiantes diferentes significados del concepto matemático a trabajar en cada una de las situaciones planteadas.

7.5. Construcción de la Magnitud Volumen.

Aun cuando es necesario que los estudiantes conozcan el estándar de medida que sirve como referente para representar la unidad de la magnitud que se está usando en un proceso de enseñanza de una magnitud, este procedimiento no se puede realizar si antes no se ha cumplido con un requerimiento primordial, el de construir la magnitud, en este caso el volumen, pues un tratamiento acelerado hacia la construcción del Sistema de Numeración Decimal (SND) con respecto a esta magnitud, puede dejar de lado la construcción del concepto.

La construcción de la magnitud es un proceso que requiere tiempo, ya que los estudiantes deben crear en el objeto la magnitud susceptible de ser medida, para luego abstraer de todas esas magnitudes concretas la magnitud abstracta. Teniendo en cuenta lo que plantean los lineamientos curriculares del MEN (1998), el concepto de magnitud empieza a construirse cuando se sabe que hay algo que es más o menos que otra cosa y se pregunta: más qué o más de qué.

Por ello se propone realizar en los estudiantes procesos de percepción de las propiedades

de los objetos que han de ser medido, en este caso el volumen. El profesor debería estar dispuesto a exponer a los estudiantes a muchos estímulos que le permitan reconocer las propiedades de los objetos, pues no se puede dar por supuesto este tipo de procesos, ante esto Godino J. (2002) afirma que “*La mayoría de los niños tienen alguna experiencia que les permite desarrollar la percepción del mundo que les rodea. Sin embargo, esto se deja frecuentemente al azar y raramente se desarrolla de un modo sistemático*”. P. 639.

Esto conlleva a que otro aspecto fundamental para la construcción de una magnitud, después de haber percibido las propiedades de los objetos susceptibles de medición, es el proceso de comparación de objetos que compartan las mismas propiedades, lo cual se logra según los lineamientos curriculares del MEN (1998), en la dirección de menor a mayor, luego viceversa y una vez consolidada esa relación unidireccional se reversibiliza la relación para construir la inversa, y se coordinan ambas.

7.5.1. Comprensión de los Procesos de Conservación en la Construcción de la Magnitud

Volumen.

La adquisición del proceso de conservación en los estudiantes no es algo inmediato, existen aportes respecto a la edad en que se adquiere este proceso. De acuerdo con Piaget, Inhelder & Szeminska (1960) citado en Sáiz, M. (2007), la conservación se logra entre los siete y los once años; mientras que para otros las edades señaladas para su conservación son de 12 a 13 años; por lo que se considera conveniente trabajar estos procesos desde los primeros grados de escolaridad a partir del planteamiento de diferentes situaciones. Pero antes de realizar actividades relacionadas con el proceso de conservación con los estudiantes se considera importante primero realizar la construcción del concepto de la magnitud, en este caso específicamente del volumen.

Luego que el estudiante ha realizado un proceso de percepción y comparación, se hace

necesario desarrollar en ellos otros procesos, la capacidad de conservación: “*Se refiere a la capacidad que tienen algunas características de los cuerpos, de no cambiar, aunque se les manipule y se produzcan cambios de situación en los mismos, que perceptivamente puede llevar a engaño*” Godino, J. *et al* (2002). P. 637, se dice entonces que este concepto de conservación está relacionado con el principio de reversibilidad, que explicita que muchos cambios son reversibles y que, mediante la acción adecuada, se puede volver a la situación inicial.

Godino J, *et al* (2002), plantean que “*la adquisición del principio de conservación se puede facilitar planificando y realizando en clase tareas adecuadas que deben llevar al niño a: diferenciar acciones reversibles y no reversibles sobre objetos, reconocer qué propiedades cambian y cuáles no cuando se realizan determinadas acciones sobre los objetos, diseñar sencillos experimentos referidos a propiedades concretas sobre objetos concretos*”. P. 638.

Por lo anterior se establece que, en el aula, los docentes desarrollos situaciones de enseñanza encaminadas a que los estudiantes experimente el principio de conservación del volumen a partir de actividades prácticas que les permita que diferenciar acciones reversibles y no reversibles de los objetos a través de procesos de percepción, comparación y manipulación.

8. Metodología

Esta investigación opto por una metodología que apunte hacia el análisis y comprensión de los diferentes fenómenos que intervienen en el proceso de enseñanza del concepto de volumen, para esto se eligió la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación.

A continuación, se muestra la manera como, a través de los análisis preliminares propuestos en la metodología de la Ingeniería Didáctica, se da respuesta a los objetivos planteados en este trabajo.

8.1 Análisis preliminar

Los análisis preliminares se estructuraron en torno al funcionamiento de un sistema, que relaciona aspectos epistemológicos, didácticos y cognitivos, para lo cual se tuvo en cuenta la implementación de un proceso metodológico que permitió identificar elementos para la formulación de situaciones de enseñanza del concepto de volumen en trabajos posteriores

El desarrollo de la fase preliminar se enmarcó, inicialmente en un acercamiento epistemológico del concepto de volumen, luego el de la enseñanza tradicional y posteriormente las concepciones y dificultades de los estudiantes.

8.1.1. La Noción de Volumen. Un Acercamiento Histórico- Epistemológico.

El acercamiento al análisis epistemológico que se realizó en este trabajo se basó en una recopilación histórica- epistemológica, acerca de la construcción del concepto volumen desde la edad antigua hasta la edad moderna. Teniendo en cuenta los aportes dados por Baquero, C (2014); García, J & Calvo, O (2007) y Del olmo, M *et al* (1989), en el desarrollo de sus investigaciones; para ello se tuvo en cuenta dos aspectos: proceso histórico del concepto y problemáticas más comunes que se pueden identificar, en función de dar un aporte a la enseñanza del concepto de volumen.

8.1.2. Análisis de la Enseñanza Tradicional y sus Efectos

En el análisis de la enseñanza tradicional del concepto de volumen y sus efectos, se tuvo en cuenta aspectos teóricos y experimentales, con el fin identificar errores comunes de los docentes al enseñar este concepto.

Para los aspectos teóricos se tuvo en cuenta estudios realizados en el campo de la enseñanza acerca de este concepto, tomando como referencia Chavarría, J. (2006), además en

las concepciones planteadas por algunos autores acerca del volumen, y se tomaron como base los Derechos Básicos de Aprendizaje DBA, (2016), los lineamientos curriculares en educación matemáticas dados por el Ministerio de Educación MEN, (1998) y MEN (2006).

Por el lado experimental se planteó una entrevista, para la docente de matemáticas de grado tercero de la institución educativa José Asunción Silva del municipio de Palmira de la sede Piles, con el fin de interpretar y describir los objetivos propuestos en la siguiente entrevista.

- **FORMATO ENTREVISTA**

Datos contextuales

- Entrevistador: Pamela Velandia y Kely Guaquez
- Contexto investigativo: fase preliminar de la Ingeniería Didáctica, como proceso de investigación de la enseñanza del concepto de volumen en tercer grado de básica primaria

Guía de la entrevista

Objetivo 1:

Reconocer de qué manera la enseñanza tradicional ha evolucionado desde la perspectiva de la docente.

1. ¿Piensa usted que la enseña ha evolucionado?

Objetivo 2:

Identificar la correspondencia existente entre el currículo de la docente y la propuesta por parte del Ministerio de Educación.

2. ¿y hablando un poco de lo curricular, depende de lo que se plantea en los estándares para el área de matemáticas?

Objetivo 3

Establecer que metodología es utilizada por la docente como estrategia de construcción de la magnitud de volumen.

3. ¿Qué metodología aplica usted, al momento de enseñar?
4. Teniendo en cuenta, lo que me acabas de responder. ¿La metodología usada le permite un buen desarrollo de los conceptos matemáticos, en esencia del concepto de volumen? ¿por qué?
5. Describa la clase matemática la cual usted enseñó el concepto de volumen, tenga en cuenta la metodología, manera de participación de los estudiantes, tipo de actividades que proponen, medios y materiales didácticos, tipo de evaluación.
6. A partir del siguiente problema planteado, podría mencionar ¿cómo explicaría este problema en clase?

Se tienen que empacar frascos de 8 cm de diámetro y 15 centímetros de alto, el empacador dispone de cajas de base rectangular de diferentes tamaños y debe decidir la caja del tamaño más adecuado, explica diversos procedimientos que el empacador puede seguir para tomar la decisión más adecuada

Objetivo 4:

Determinar las posibles falencias en las estrategias de la docente a apoyar desde la Ingeniería Didáctica en pro de una mejor construcción del concepto de volumen.

7. Al momento del conocimiento abstracto, porque en matemáticas siempre hay aspectos abstractos, ¿cómo usted haría en ese momento? ¿Cómo le enseña a un estudiante ya el concepto de volumen mediante la fórmula?
8. ¿Desarrolla usted aspectos históricos del concepto de volumen?
9. ¿Qué conceptos previos se deben tener en cuenta para abordar la magnitud

volumen?

10. ¿Qué conceptos trabaja en torno a la magnitud volumen?

11. ¿En qué tipo de situaciones se basa para enseñar la magnitud volumen

8.1.3 Análisis de las Concepciones y Dificultades de los Estudiantes en la Enseñanza del Concepto de Volumen.

Este análisis buscó la identificación de las concepciones y dificultades que tienen los estudiantes, al momento de poner en práctica el conocimiento acerca del concepto volumen, para ello se realizó una prueba experimental a 6 estudiantes de grado tercero de la institución José Asunción Silva del municipio de Palmira de la sede Piles.

Para la construcción de la prueba se tuvo en cuenta los aportes dados por Del olmo, M. *et al* (1989), acerca de cómo adquirir el concepto de volumen desde diferentes aproximaciones; y para la realización del análisis se tuvo en cuenta los aportes de Lupiáñez, J. Rico, L. Gómez, P. Marín, A (2005).

La prueba experimental consistió en presentar al grupo de 6 estudiantes, situaciones que generaran discusión acerca del volumen, esto con el fin de identificar y analizar dificultades en torno al concepto de volumen en actividades cotidianas, en acciones de romper y rehacer, propiedades de conservación del volumen con respecto al tiempo, espacio, en acciones de modelar y cortar cuerpos sólidos, equivalencia de capacidad de recipientes abiertos y volumen de cuerpos sólidos; el color y la textura de un cuerpo como una variable que no afecta el volumen.

Esta prueba experimental fue grabada y luego transcrita en un formato de protocolo de observación y luego fue analizada de manera cualitativa.

- Prueba 1

Objetivo.

Reconocer si el estudiante identifica el concepto de volumen en actividades cotidianas.

Descripción de la prueba.

Se le muestra al estudiante la imagen de dos personas con diferente masa corporal, una frase y una serie de palabras.

Imagen:



Ilustración 3. Imagen para la prueba 1 a estudiantes.

Frase: Kely es más gorda que Pamela

Palabras: Bulto, cuerpo, corpulencia, capacidad, espacio, magnitud, dimensión, cavidad, extensión, volumen, gruesa, inflada

Con la anterior información el estudiante debe cambiar la palabra gorda por otra palabra sin que la frase pierda el significado.

- Prueba 2.

Objetivo.

Reconocer las dificultades que el estudiante presenta al identificar el concepto de volumen en acciones de romper y rehacer haciendo uso de policubos.

Descripción de la prueba

El estudiante debe realizar construcciones con policubos congruentes y reorganizar las piezas de una construcción para obtener otras diferentes, reflexionando sobre el volumen de cada una de ellas, teniendo en cuenta lo siguiente:

- a. Construir dos figuras con el mismo volumen y justificar la solución.
- b. Construir tres figuras con diferente volumen y ubicarlas de menor a mayor. Justificar la solución
- c. Se le dará al estudiante dos figuras de diferente volumen, con las siguientes condiciones: la parte exterior de las figuras son de la misma forma, pero una de ellas está hueca (faltan fichas en el centro de la figura), él debe justificar si las figuras tienen el mismo volumen usando cualquier estrategia de solución.



Ilustración 4. Imagen para la prueba 2, c.

- d. Se les mostrará a los estudiantes dos policubos de igual forma y del mismo volumen, pero de diferente color, ubicados en diferente posición. Se le pide al estudiante justificar si los dos objetos son de igual o diferente volumen.

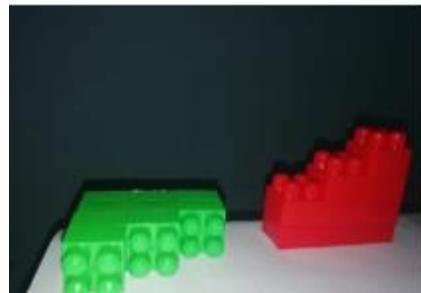


Ilustración 5. Imagen para la prueba 2, d.

- Prueba 3

Objetivo

Reconocer las dificultades que tienen los estudiantes para identificar las propiedades de conservación del volumen con respecto al tiempo y al espacio.

Descripción de la prueba

Se le presenta al estudiante la siguiente situación práctica: “La profesora Pamela trae un balón de Fútbol a la clase y lo mete a una caja (se le muestra el balón y la caja al estudiante) ¿El balón cabe en la caja? Luego la profesora se lo presta a su amiga Kely y ella se lo lleva para España dos años. Si la profesora decide traer el balón a clase y meterlo nuevamente a la caja. ¿El balón ocupará el mismo volumen en la caja?”, ¿por qué?

- Prueba 4.

Objetivo.

Reconocer las dificultades que el estudiante presenta al identificar el concepto de conservación del volumen en acciones de moldear y cortar cuerpos sólidos.

Descripción de la prueba.

La prueba se divide en dos partes:

- a. Se le entrega al estudiante un pedazo de plastilina, con el que debe construir dos esferas del mismo volumen, luego debe cambiar la forma de una de las dos, al de una salchicha y se le pregunta al estudiante. ¿La esfera y la salchicha tienen el mismo o diferente volumen? Justificar la respuesta
 - b. Se le muestra al estudiante dos pedazos de plastilina de igual volumen, se corta uno de ellos en cuatro partes con las que se construye una nueva (figura) y se le pregunta al estudiante ¿los dos cuerpos tienen igual o diferente volumen? ¿por qué?
- Prueba 5.

Objetivo

Reconocer las dificultades que el estudiante presenta para identificar el color y la textura de un cuerpo como una variable que no afecta el volumen.

Descripción de la prueba.

Se le presenta al estudiante dos objetos de la misma forma, pero con diferente textura, los cuales debe observar y tocar. Luego se le pregunta al estudiante, ¿los dos objetos tienen el mismo o diferente volumen? Justifica tu respuesta.

- Prueba 6.

Objetivo.

Reconocer las dificultades que el estudiante presenta para identificar que la cantidad de masa que hay dentro de un recipiente no afecta el volumen que este ocupa.

Descripción de la prueba.

Se le muestra al estudiante dos recipientes iguales, uno de ellos está lleno con granos de maíz, se le pide al estudiante que sujeté los recipientes y se les pregunta ¿los dos recipientes ocupan igual o diferente volumen? ¿por qué?

- Prueba 7

Objetivo.

Reconocer las dificultades que el estudiante presenta para identificar la equivalencia de capacidad de recipientes abiertos y volumen de cuerpos sólidos.

Descripción de la prueba.

Se entrega a los estudiantes una caja y grupo de policubos con los cuales debe llenar la mitad de la caja haciendo estimaciones de medida, teniendo en cuenta que si necesitan medir solo pueden ingresar a la caja de a dos fichas. El estudiante debe responder con cuantos policubos se llena la caja y justificar que proceso realiza para desarrollar la prueba.

- Prueba 8.

Objetivo.

Reconocer las dificultades que el estudiante presenta para identificar la equivalencia de capacidad de recipientes abiertos y volumen de líquidos.

Descripción de la prueba.

Se le muestra al estudiante cuatro recipientes de igual capacidad, dos de ellos son vasos plásticos totalmente iguales y los otros dos son recipientes de diferente forma (uno es ancho y el otro es delgado). Se llena de agua los dos vasos plásticos y luego se vacía cada uno de ellos en los otros dos recipientes que sobran, después de haber observado el proceso se le pregunta al estudiante. ¿Los dos recipientes ocupan el mismo o diferente volumen?

8.2 Aportes a posibles situaciones de enseñanza para posteriores trabajos con respecto a la enseñanza y aprendizaje del concepto de volumen

Los aportes y las conclusiones se realizaron con el fin de brindar elementos para la posterior formulación de situaciones de enseñanza del concepto de volumen. Aquí analizó la articulación existente entre los resultados en el barido epistemológico, el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos y el análisis de las dificultades que tenían los estudiantes en la enseñanza del concepto de volumen.

En primer lugar, el recorrido histórico epistemológico se realizó teniendo en cuenta la construcción histórica del concepto de volumen, a través de diferentes épocas, identificando aquellos autores protagonistas de su evolución, hasta llegar a teorías actuales; se utilizó para reconocer aspectos teóricos que permitieron más adelante hacer aportes a posibles situaciones de enseñanza sobre cómo se pudiera construir este concepto en el estudiante.

En segundo lugar, el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos que se basó en la teoría de situaciones de Brousseau, y donde se usó una entrevista a la docente de matemática de este grupo; se analizaron los resultados obtenidos con el fin de conocer las debilidades y/o fortalezas en su enseñanza sobre el concepto de volumen directamente desde su propia concepción. De esta manera, lograr compararla con los resultados obtenidos en las concepciones y dificultades de los estudiantes. Esto con el fin de, ver qué tan efectivo podría ser el trabajo que

se realiza entre el aprendizaje de los estudiantes y la enseñanza docente sobre este concepto.

En tercer lugar, el análisis de los resultados en las pruebas aplicadas a los seis estudiantes del grado 3º se utilizaron para identificar, por una parte, las habilidades y capacidades de éstos en el desarrollo de actividades didácticas, como las pruebas que contenía ejercicios sobre el concepto de volumen utilizando el entorno inmediato, o ejercicios con materiales didácticos como policubos que no hacen parte del trabajo con el entorno inmediato, y por otra parte, identificar las habilidades y capacidades de los estudiantes en el desarrollo de actividades a-didácticas, como las pruebas que contenían ejercicios donde se buscaba que el estudiante pudiera identificar el concepto de conservación de volumen en acciones de moldear y cortar cuerpos sólidos, la textura y el color de un cuerpo como una variable que no afecta el volumen o que la cantidad de masa que hay en un recipiente no afecta el volumen que se ocupa. De esta forma, se esperaba comprender qué relación tenían estos resultados con los resultados de las concepciones previas con las que venían los estudiantes, como evidencia y respaldo que pudiera ayudar a explicar los “por qué”, de los resultados obtenidos en los análisis de cada una de las pruebas.

Finalmente, después de reflexionar sobre estos tres aspectos, se pudo finalmente describir aportes a posibles situaciones de enseñanza en posteriores trabajos con respecto a la construcción del concepto de volumen a través de los aportes brindados desde La Ingeniería Didáctica. Y así mismo se obtuvo una conclusión que explica de qué manera los análisis preliminares de la Ingeniería Didáctica permitieron recoger elementos teóricos para posibilitar la producción de situaciones de enseñanza con respecto a la construcción del concepto de volumen en los estudiantes de grado tercero de la IE José Asunción Silva.

9. Resultados de Los Análisis, Aportes y Conclusiones

9.1. La Noción de Volumen. Un Acercamiento Histórico- Epistemológico.

A través de la historia la noción de volumen ha estado presente intrínsecamente desde lo tangible e intangible. Es decir, el ser humano desde que se instaura en el mundo se mueve en dimensiones que dialogan con la idea de volumen. Al respecto, diferentes culturas aportaron al desarrollo de este concepto, a las cuales, se les hace un rastreo a partir de los trabajos desarrollados por Baquero, C. (2014) y García, J *et al* (2007).

Esta perspectiva se inscribe en el legado de la civilización babilónica, egipcios, chinos, griegos, y algunos pensadores de la edad moderna como Cavalieri y Newton

Con respecto a los babilonios el concepto de volumen fue abordado a partir de la solución problemas reales relacionados en la construcción de edificaciones. Gracias a la articulación de algunas propiedades geométricas ellos lograron llegar a la expresión general $v = \frac{1}{2}h(p_1^2 + p_2^2)$, donde h es la altura y el perímetro de las bases son p_1^2, p_2^2 de esta manera lograban determinar volúmenes de prismas rectos, cilindros o troncos de cono.

Además, según O.A.W Dilke (1987) citado en De olmo, M *et al* (1989) los babilonios hicieron uso de unidades de capacidad.

10 Sila = 1 Ban (aproximadamente 0.82 litros)

6 Ban = 1 Nigida (aproximadamente 49.2 litros)

5 Nigida = 1 Gur (aproximadamente 266 litros)⁷

En cuanto a los egipcios, hicieron uso de la geometría en relación con la solución de problemas de volúmenes, atendiendo a la necesidad de almacenar granos y líquidos en recipientes, estableciendo así; el volumen de sólidos a partir de unidades de capacidad de

líquidos

También poseían fórmulas aproximadas para calcular el volumen de algunos sólidos geométricos como cubos, cilindros, pirámides de base cuadrada y troncos de cono. Se presenta a continuación la fórmula que utilizaban para el cálculo del volumen de un tronco de cono:

$v = \frac{h}{12} \left(\frac{3}{2}(D + d)\right)^2$ Siendo h la altura y $\frac{D+d}{2}$ la circunferencia media. De esta fórmula se deduce que el valor utilizado para π es 3, el cual era un valor más aproximado, en relación con el usado por los babilonios.

Según De olmo, M *et al* (1989) entre los procesos que realizaron los egipcios para medir el volumen, no solo utilizaban fórmulas, sino que también expresaban de manera verbal los procedimientos para resolver los problemas.

Por otro lado, en el continente asiático, la cultura china también hace sus aportes (entre el 206 a.C. y el 221 d.C.). Al establecer estrategias para la medición del volumen de sólidos tales como: prisma cuadrangular, pirámide con base cuadrada, prisma triangular y la pirámide con base cuadrada en la que uno de sus vértices es perpendicular a la base y el tronco de pirámide con base cuadrada, por medio de la fórmula $v = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h$ donde a es la longitud el lado del cuadrado superior, b la longitud el cuadrado de la base y h la altura; siendo ésta la correcta para cada sólido mencionado anteriormente.

En cuanto a los griegos, estos también hicieron aportes respecto de la medición de volúmenes de sólidos. Dentro de estos teóricos se encuentra a Demócrito (460-370 a.c), Eudoxo (390 a. C.-c. 337 a. C.), Euclides (325-265 a.c) y Arquímedes (287-212 a.c), entre otros.

En un principio Demócrito logró calcular el volumen de una pirámide y de un cono, sus resultados se deben a que imaginó que los sólidos estaban formados por una serie de innumerables capas paralelas.

Años más tarde (390 a. C.-c. 337 a. C.) Eudoxo de Cnido, filósofo, astrónomo y matemático demostró los dos teoremas que ya habían intuidos Demócrito, estos son: el volumen de una pirámide es igual a la tercera parte de un prisma de su misma base y altura; y el volumen de un cono que es igual a un tercio de la misma base y altura; además se le atribuye que se realiza con respecto al volumen de esferas.

A su vez Eudoxo de Cnido establece el denominado método exhaustivo, con el cual se podía abordar el problema de calcular el volumen de figuras planas no poligonales. Para ello era necesario el conocido axioma de Arquímedes que sirve de base para el método de exhaustivo. Este axioma fue importante porque permitió demostrar una proposición útil para que los griegos demostraron más adelante, diferentes teoremas relacionados con área y volumen de figuras curvilíneas. Al respecto Del olmo, M. *et al* (1989), enuncia la proposición:

...si de cualquier cantidad de magnitud sustraemos de nuevo una parte no menor de su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una parte no menor de su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una cantidad de magnitud menor que cualquier cantidad de magnitud del mismo tipo de antemano. P.159.

Ahondando en la historia, se encuentra los presupuestos expuestos por Arquímedes de Siracusa (287-212 a.c), entre los aportes más significativos se encuentra que enunció el principio de Arquímedes, el cual se lo atribuye a Eudoxo. Este permitió determinar el volumen de sólidos no geométricos a partir de la siguiente proposición expuesta en Baquero, C. (2014): “*un cuerpo*

al ser sumergido en un líquido en reposo realizará un empuje hacia arriba igual al volumen del cuerpo sumergido.”. P. 8.

Además, logró establecer la relación entre el volumen del cilindro, la esfera y el cono, la cual se desarrolla a partir del siguiente enunciado dado en Baquero, C. (2014): “*el volumen de un cilindro es igual al de una esfera y un cono, todos con el mismo radio en su círculo máximo y por altura el valor del radio*”. P.13, Este sirvió para determinar así, la aproximación del volumen de la esfera y cilindro de manera muy detallada, usando el método de exhaución propuesto por Eudoxo.

Según Baquero, C. (2014) muchos de los aportes de Arquímedes los realizó “*cortando mentalmente en múltiples tajadas diferentes sólidos para poder argumentar sus hallazgos*” P. 13, este proceso se aprecia como una extensa similitud al cálculo infinitesimal. Arquímedes logró llevar la aplicación de volumen a otros campos, específicamente a la mecánica, por ejemplo; hallar el volumen de los sólidos usando la ley de las palancas.

Además de los aportes ya mencionados, dentro de la civilización griega, se destaca Euclides (325-265 a.c) quien aborda la medida relativa de los sólidos geométricos a partir de la proporcionalidad y la razón entre magnitudes; específicamente de paralelepípedos, prismas y pirámides, García, J. & Calvo, O. (2007) menciona que:

Euclides mide una magnitud desconocida comparando con magnitudes conocidas, ésta es una teoría de la medida relativa. Ya que, para llegar a la comprensión de la noción de volumen, se debe hacer comparación entre objetos tridimensionales, y así finalizar con el conocimiento implícito que subyace en la medida absoluta. P.9.

Lo anterior implica que él no establece medidas absolutas sino relativas mediante la comparación de dos objetos. Además, Euclides usa el método de exhaución de Eudoxo aplicado en: la proporcionalidad entre esferas y cubos construidos sobre diámetro, la equivalencia entre el

cilindro y el cono. Su proceso en general de demostración según García, J. *et al* (2007) se basa en “*un sistema teórico en el que se da por sentado la veracidad de ciertas proposiciones por ser intuitivamente claras, y deducir de ellas todos los demás resultados*” P.10.

Ahora bien, en la edad moderna la concepción de volumen sufre cambios trascendentales de acuerdo al modo como se venía concibiendo por los diferentes geómetras. Jhohannes, K. (1571-1630), realizó también aportes al concepto de volumen mediante la división de forma perpendicular al eje de los cilindros, tal como lo planteaba Arquímedes en su época.

Kepler afirmaba que con este método se podía medir el volumen exacto de los sólidos, independientemente de que estos alteran su forma, por lo cual los elementos infinitesimales de Kepler tienen la misma dimensión que el cuerpo que se quiere medir. En Baquero, C. (2014) se menciona que todo esto se sucedió porque “*En cierta ocasión Kepler no quedó conforme con la manera en la que hallaron el volumen de un tonel de vino que estaba comprando, cosa que le despertó un gran interés por encontrar métodos de hallar su volumen*”. P. 24.

Para Bonaventura Cavalieri (1598- 1647) la idea de volumen se inscribe en el cálculo de áreas indivisibles, el cual se fundamenta bajo la siguiente proposición, mencionada en Baquero, C. (2014): “*Dados dos sólidos de igual altura y con sus bases pertenecientes al mismo plano M, se tiene que para todo plano paralelo a M que genera con cada sólido una sección transversal de igual área, entonces, los cuerpos tienen igual volumen*”. P. 22.

Este principio puede aplicarse para calcular el volumen de una semiesfera por comparación con el volumen comprendido entre un cilindro y un cono de igual radio que la esfera y con altura igual al radio, o el volumen de la intersección de dos cilindros perpendiculares. Al respecto Baquero (2014) menciona que “*la comparación entre los cuerpos,*

entonces si lo que se desea es hallar el volumen de un cuerpo se debe hallar otro sólido del que se pueda estimar fácilmente su volumen y determinar la razón entre sus áreas a una misma altura, y es como de esta manera se obtiene la razón entre el volumen de los dos sólidos”, P. 20.

Ya en el siglo XVII, se encuentra que Newton (1642- 1727) mediante el cálculo de las fluxiones, como él llamaba al también conocido como cálculo infinitesimal, rama de las matemáticas en la cual se estudia el cálculo a partir del proceso de integración o anti derivación; es muy común en ingeniería y en la matemática general y se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución; determina los máximos y mínimos de relaciones, las tangentes a curvas (parábola, conoide de Nicomedes, espirales, cuadratrices), el radio de curvatura, los puntos de inflexión y el cambio de concavidad de las curvas, su área y su longitud; estas últimas determinantes en el concepto de volumen.

A partir del recorrido histórico que se desarrolló en este trabajo se observa que la manera como fue concebida la noción de volumen respondía a diversas necesidades.

Desde la edad antigua existieron diferentes aportes en relación con el uso de la magnitud volumen. Está inicialmente fue abordada por las culturas babilónicas, egipcia, china; desde una perspectiva empírica; es decir a partir de actividades prácticas como la construcción de monumentos, pirámides y almacenamiento de diferentes líquidos. A diferencia de las culturas anteriormente mencionadas, los griegos se caracterizaron por tener un proceso más refinado y sistematizado en la aplicación de la noción volumen, en cuanto a los métodos de demostración.

Algo para resaltar es cómo a través de los años, estas culturas en busca de respuesta a problemas relativos a medidas exactas dieron lugar al desarrollo de este concepto, se pasó de dar

solución a problemas geométricos a la aplicación del cálculo infinitesimal; esto significa que se dio un gran avance en el uso de la magnitud volumen.

Pero este cambio se dio gracias a los aportes de Newton y Leibniz que de manera directa e indirecta retomaron el concepto para consolidar sus variadas propuestas alrededor de las matemáticas y la geometría. Los cuales tuvieron la necesidad de acudir a la propuesta de otros pensadores, con el objeto de profundizar dicha noción para sus intereses. Pero este avance no hubiera sido posible sin los aportes de sus antecesores: Eudoxo, Arquímedes, Cavalieri, Kepler, entre otros.

En la actualidad la noción de volumen es un concepto teórico práctico, el cual es manejado desde diferentes contextos, en este caso; el aspecto que le confiere a este trabajo tiene que ver con la enseñanza de esta magnitud en el aula de clases.

Teniendo en cuenta que muchas veces en la práctica escolar la enseñanza del volumen se reduce a la medida absoluta de los objetos y no a la construcción de la magnitud, al respecto MEN (1998) plantea que:

“la desatención de la geometría como materia de estudio en las aulas y el tratamiento de los sistemas métricos desde concepciones epistemológicas y didácticas sesgadas, descuida por un lado el desarrollo histórico de la medición y por otro reduce el proceso de medir a la mera asignación numérica. No es extraño, en nuestro medio, introducir a los niños y a las niñas en el mundo de la medida con instrumentos refinados y complejos descuidando la construcción de la magnitud objeto de la medición y la comprensión y el desarrollo de procesos de medición cuya culminación sería precisamente aquello que hemos denunciado como prematuro”. P.62.

Por lo anterior se considera importante que el docente realice una inspección histórica acerca de cómo fue concebido el concepto, manera como se realizaban los procesos de medición

de cuerpos sólidos en la antigüedad en relación con la actualidad, identificación así, posibles dificultades o ventajas que trajo la aplicación del volumen en el proceso histórico; y a partir de la reflexión de estos elementos el docente opte por una postura que amplíe su bagaje teórico para la enseñanza.

9.2. Análisis de la Enseñanza Tradicional y sus Efectos

Se presenta una entrevista a realizar a la docente de la Institución Educativa José Asunción Silva de la sede de Piles ubicada en la ciudad de Palmira Valle, para definir el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos como se requiere en los análisis preliminares propios de una Ingeniería Didáctica. Esta entrevista se fundamentó en la revisión realizada de las Pruebas saber para el grado tercero de esta institución. En dicha revisión se evidenció que en la población estudiantil de este curso hay falencias en relación con el pensamiento geométrico-métrico. Es menester mencionar que este análisis se tomó para ahondar en los aportes que los docentes están ofreciendo a la enseñanza de las matemáticas. Es importante revisar cómo los profesores asumen la matemática en la praxis educativa y de qué forma los niños aprehenden de ella y, así pues, atender a las situaciones didácticas que pretende Brousseau, G. (1986).

De acuerdo con lo anterior, se realizará la entrevista a la docente donde las preguntas están orientadas a un diálogo con los postulados ofrecidos por Chavarría, J. (2006) en el artículo *Teoría de las situaciones didácticas. Fundamentos y métodos de la didáctica* de García, M (2011) en su trabajo de grado *la enseñanza tradicional de la matemática y su influencia en el aprovechamiento escolar de los alumnos de nivel primaria*.

9.2.1. Cómo la enseñanza tradicional ha evolucionado desde la perspectiva de la docente.

Aquí se evidencian que para la docente la enseñanza de los conceptos básicos del volumen no ha trascendido; pues sigue siendo tradicional, lo que deja en claro que sus

metodologías no han cambiado. En su opinión, esto significa que para la educación pública los métodos actuales de enseñanza no han avanzado, sin embargo, siguen teniendo una esencia en la que el estudiante está sujeto a cumplir ciertos parámetros en un tiempo específico evitando propiciar el desarrollo de las habilidades y potencialidades de los niños y niñas. “Si bien es cierto que el MEN promulga unos lineamientos relacionados con la enseñanza de las matemáticas, es el sistema en el que se inscribe la educación en Colombia que no permite que el docente desarrolle adecuadamente estos lineamientos” manifestaba la docente. Ver pregunta uno, anexos. P. 77.

Lo anterior parece confirmar lo descubierto en la investigación realizada por García, M. (2011) en la que expresa que: *“La matemática se continúa enseñando con métodos tradicionalista”* Pues ésta se centra en el maestro y no en el estudiante. Así pues, los métodos tradicionales movilizan el aprendizaje repetitivo, memorístico y no significativo. Al respecto expresa García, M. (2011) que:

Básicamente la enseñanza tradicional está encargada y centrada más que nada en el contenido y en el maestro no en el alumno, por ello se pierde demasiado tiempo en que el alumno se aprenda de memoria conocimientos enciclopedistas; aquí el conocimiento memorístico de contenidos elementales que se encuentran consignados en el programa de estudios son relevantes para el maestro. Por lo tanto, no toma en cuenta al alumno, según él no puede perder tiempo en dialogar con sus alumnos, porque estaría atrasado en el programa de estudios. Este tipo de enseñanza ha permeado por mucho tiempo en el largo recorrido de la educación. P. 38.

De esta manera se entiende que la enseñanza tradicional exige responder en el cumplimiento de contenidos académicos descritos en los planes de área y aula, dificultando el ejercicio pedagógico entre el docente y el estudiante. en tanto que la tarea docente se sesga en depositar a los niños y niñas inscritas en el salón de clases, conceptos, teorías que deben ser memorizados para avanzar en los planes mencionados. Este tipo de enseñanza heredada de la tradición no permite la relación dialógica entre docentes y estudiantes, por el contrario, designa

una imposición de saberes que se limita en lo cognitivo, sin permitir adentrarse en las diferentes maneras de aprehender las cosas por parte de los estudiantes.

9.2.2. Correspondencia existente entre el currículo de la docente y la propuesta por parte del Ministerio de Educación

Para la docente, la enseñanza de las matemáticas y la misma educación en términos generales no ha evolucionado, en realidad, se trata del cumplimiento de documentos y no del desarrollo de las habilidades de los niños en las aulas de clase. Ver pregunta dos, anexos. P. 77. Sin embargo, si se revisa la propuesta por parte del Ministerio de Educación Nacional en relación sobre la enseñanza de las diferentes áreas, en este caso las matemáticas; se plantea que ésta debe ser enseñada mediante el desarrollo de las competencias que están en potencia de los niños y niñas. Para el Ministerio de Educación Nacional (2006) la noción de competencia se inscribe en “*(...) saber hacer en situaciones concretas que requieren la aplicación creativa, flexible y responsable de conocimiento, habilidades y actitudes*”. P. 10.

La propuesta del MEN (2006) se inscribe en el desarrollo de competencias por parte de los niños y niñas, competencias que no deben encapsularse en la memorización de contenidos que sean olvidados al salir del espacio escolar. Por el contrario, se trata de desarrollar estas habilidades y que el estudiante pueda emplear lo aprendido dentro y fuera de la escuela. No obstante, estas pretensiones son limitadas por el docente en tanto que debe cumplir con documentación que exige aislar estos ideales y volver a la enseñanza tradicional.

9.2.3. Metodología utilizada por la docente como estrategia de construcción de la magnitud de volumen

Respecto a la metodología utilizada por la docente, se puede inferir que basada en su formación académica (psicóloga), ella procura favorecer el aprendizaje significativo, lo que según ella de a poco va llevando a lo que se llama “constructivismo”. es decir, indaga, pregunta y trata que los estudiantes expresen su opinión o pensamiento con respecto a cierto tema y a su vez elaborar un plan constructivo y grupal con el objetivo de que sean ellos mismos quienes concluyan el aprendizaje al que se desea llegar. Ver pregunta tres, anexos. P. 77.

La docente, de acuerdo con la entrevista realizada, parece darle relevancia a la participación activa de los niños y niñas. No se trata de mera trasmisión de saberes, sino de que sean ellos mismos que descubran mediante la observación, el asombro, la exploración lo que se desea enseñar. Su metodología parte desde el aprendizaje activo y constructivista. Al respecto se encuentra algo similar en la propuesta de Brousseau, G. (1986), citado por Chavarría, J (2006). P. 1. Allí él manifiesta que “*el profesor es quien facilita el medio en el cual el estudiante construye su conocimiento. Así, Situación Didáctica se refiere al conjunto de interrelaciones entre tres sujetos: profesor-estudiante-medio didáctico*”

Se trata entonces de ofrecer las herramientas necesarias para que los niños se adentren en el universo del aprendizaje, para este caso de las matemáticas. Y no como un asunto de imposición, sino de descubrimiento, diversión, algo que los cautiva. En palabras del autor se trata del diálogo entre *situaciones didácticas y a- didácticas*. Desde esta dicotomía parece ser que la enseñanza y aprendizaje de la matemática, dejaría de ser un asunto de temor para los estudiantes. Por el contrario, propiciaría espacios significativos en lo que los niños y niñas reconocen la importancia de esta área en su cotidianidad.

Mediante las situaciones cotidianas y el uso de objetos, los niños viven y experimentan esta área como algo vivencial y no meramente conceptual. Desde el desarrollo de estas habilidades, la docente promueve que los niños comparan, realicen inferencias, establezcan diferencias entre objetos, entre otras cosas.

Como se mencionó anteriormente, de las afirmaciones de la docente, se podría deducir que su propuesta de trabajo en el aula se puede clasificar como actividad del tipo *situación didáctica-situación a-didáctica* puesto que busca consolidar la aprehensión de los conocimientos a través de la interrelación docente-estudiante en un ambiente idóneo para tal fin, además se infiere que, para ella, la enseñanza de las matemáticas juega un papel significativo en la formación de los futuros ciudadanos y por eso se ocupa de utilizar una metodología activa. Ver pregunta cuatro, anexos. P. 78.

Parece ser que la docente ha logrado poner a dialogar en su práctica pedagógica, los planteamientos descritos por parte del MEN y la enseñanza de la matemática, no como un asunto sesgado cognitivamente, sino como el enriquecimiento activo en la construcción de saberes. De acuerdo con lo anterior, cuando se indaga sobre cómo ella plantea situaciones problemas en las clases a los niños y niñas, la docente no deslegitima los postulados por parte del MEN, por el contrario, desde su metodología intentar dar cuenta de ellos, desde el desarrollo de las competencias al propiciar espacios vivenciales en los que los niños perciban que el aprendizaje matemático hace parte de la cotidianidad y de sus contextos. Razón por la cual, la docente, de acuerdo a sus respuestas, no plantea las situaciones problemas como algo teórico, sino que los lleva a la experimentación, a la práctica y al desarrollo tangible del problema.

Desde esta perspectiva, su praxis está relacionada con la propuesta de García, M (2011) y de Brousseau (1986) en tanto que dialoga con la enseñanza tradicional, pero trasciende a la

enseñanza activa y significativa. Se trata entonces de un punto medio, un equilibrio entre el legado de la escuela tradicional y las necesidades actuales. Necesidades que responden a múltiples contextos en los cuales los niños y niñas están inscritos Ver pregunta cinco, anexos. P.

78. Para García, M (2011), por ejemplo:

Enseñar matemáticas requiere ofrecer experiencias que estimulen la curiosidad de los alumnos y construyan confianza en la investigación, la solución de problemas y a la comunicación. Se debe motivar a formular y resolver problemas relacionados con su entorno para que puedan ver las diferentes partes de las matemáticas en cada aspecto de su vida. P.53.

Así mismo, es importante resaltar los pasos ya sean pequeños o grandes que se han obtenido teniendo en cuenta las normativas del Ministerio de Educación; ya que a pesar de que falta mucho camino por recorrer, se ha logrado tener en cuenta las competencias y la importancia de que cada niño y niña sí entiendan los temas en el salón de clases. Aunque en la práctica la cosa sea un poco más difícil, son normativas que ayudan a los docentes a promover con una mejor claridad las *situaciones didácticas y a- didáctica* en el proceso educativo, tal como lo expresa la docente en la entrevista; quien da a conocer su forma de trabajar en el salón de clase.

La docente, expresa la importancia de hacer de conceptos tales como el volumen, un marco atractivo, fácil, fluido y sobre todo activo para los estudiantes que, a pesar de su corta edad, tiene la capacidad cognitiva de expresar y construir conceptos que se manejan en la vida cotidiana ya sea de forma directa e indirecta. Ver pregunta cinco, anexos. P. 78.

Ahora bien, ante el cuestionamiento si hay una revisión del concepto de volumen a través de la historia inscrito en sus clases, la respuesta es negativa. La docente, se centra entonces en el manejo del concepto desde la cotidianidad, elementos que encuentra en su contexto y que pueden orientar su práctica pedagógica. Al respecto se encuentra en Brousseau, G. (1986) una invitación a que la formulación de los problemas planteados en las clases tenga un carácter significativo:

La formulación del problema: éste debe ser de interés para estudiante, además el tipo de pregunta formulada debe ser tal que no tenga respuesta inmediata. De modo que sean realmente problemas para el estudiante, donde éste debe acercarse y trabajar en ellos como en una situación a-didáctica. P. 44

Si bien es cierto que la historia permite contextualizar y entender el devenir de las situaciones, parece que la importancia se orienta en la significación de las prácticas de aula que conecten a los estudiantes en las dinámicas propuestas para el aprendizaje del concepto de volumen.

En línea con lo anterior, se indaga por los pre-conceptos que deberían tener los estudiantes para entender la noción de volumen. Al respecto, la docente responde que los conceptos son: *distancia, medida, cuántos pasos hay, ubicación espacial*; lo anterior, según la docente está mediado por un asunto empírico. Es decir, los estudiantes tienen estos conceptos en potencia interiorizados, la labor docente se centraría en llevarlos al acto mediante el ejercicio pedagógico.

En palabras de Chavarría, J (2006), atendiendo a la teoría propuesta por Brousseau, G. (1986) se trata de una relación *situación didáctica/ situación a- didáctica*. Desde este enfoque el planteamiento de la docente se consolida en que una vez construido el conocimiento de los estudiantes sobre los pre-saberes (ejercicio consolidado en la relación situación didáctica) transitar en la resolución y confrontación de estos conceptos en situaciones diversas que permitan validar lo aprendido y construido, pero no con la ayuda del docente. Ver pregunta seis. P. 78. Al respecto de estas relaciones, Chavarría, J. (2006) esboza que:

La Situación A- Didáctica es el proceso en el que, una vez que el estudiante ha recibido (o construido) el conocimiento, se le plantea un problema fuera de lo que trabajó en la situación didáctica, que debe afrontar y resolver sin la intervención del docente. Entonces, Situación A-Didáctica se puede ver como una validación del proceso de enseñanza-

aprendizaje". P. 1.

Se trata entonces de un aprendizaje significativo, convalidado en los pre-saberes que es orientado por los docentes y es puesto en acción en la medida que los estudiantes se desenvuelven en las situaciones a-didácticas.

9.2.4 Falencias en las estrategias de la docente a apoyar desde la Ingeniería Didáctica en pro de una mejor construcción del concepto de volumen.

Finalmente se indaga a la docente por los conceptos que aborda al tratar el tema de volumen y por las situaciones en que fundamenta su clase para enseñar la *magnitud del volumen*. Al respecto la docente expone que debe trabajarse el peso, la materia y la masa; y que se fundamenta en lo que el contexto le aporta. Ver pregunta nueve y diez, anexos. P. 79 - 80

Sus respuestas se consolidan en la participación activa del estudiante, en la que el docente asume un rol de orientador y provocador del tema a enseñar. Desde Chavarría (2006) este ejercicio expuesto es denominado *la situación de acción*. Aquí los estudiantes interactúan con el medio didáctico para llegar a la resolución de problemas y construcción del conocimiento. La postura de los estudiantes es significativa en tanto que ellos, una vez preparado el medio didáctico por el docente, se despliegan en la búsqueda del saber. Búsqueda permeada por unos pre-saberes que son puestos en juego en la medida que los estudiantes accionan en el medio didáctico resolviendo los problemas por ellos mismos.

Ahora bien, desde la Ingeniería Didáctica hay una propuesta por examinar las situaciones didácticas en tanto que la preocupación se centra en la organización, secuencia, articulación de las actividades planteadas en función de un proyecto o trabajo dirigido desde una

direccionalidad, es decir entre docentes y estudiantes. De esta forma lo planteando evoluciona mediante esta relación. Se trata entonces de un asunto activo donde ambos roles participan.

De este modo, se profundizó globalmente las repuestas de la docente a la luz de lo postulado por Brousseau, G. (1986), desde la perspectiva de la Ingeniería Didáctica. Al respecto en el artículo escrito por De faria, E. (2006). *Cuadernos de investigación y formación en educación matemáticas. Ingeniería Didáctica*, plantea un mapa mental que permite comprender la dimensión de la Ingeniería Didáctica en relación con los postulados de Brousseau, G. (1986).

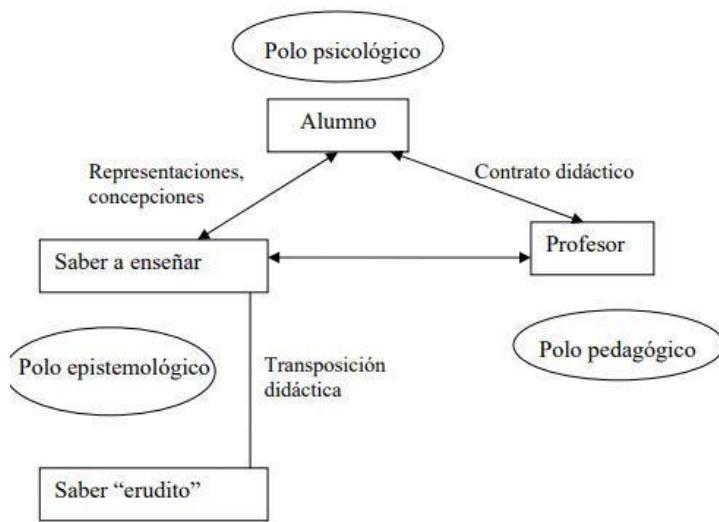


Ilustración 6: *Mapa mental de la ingeniería didáctica*. De faria, E. (2006), pág. 2.

La propuesta expuesta en el anterior mapa mental, esboza la articulación entre las relaciones didácticas y la ingeniería de la misma, ambas no fluctúan en cierta forma en la práctica pedagógica de la docente, o de alguna manera no se evidencia en la entrevista, pues la docente manifiesta no fluctuar entre el saber para llevar a los alumnos al saber a hacer, (ver pregunta ocho, anexos. P. 79), con esto impidiendo que se suscite en el estudiante un andamiaje orientado por el contexto en el cual está inscrito, sus potencialidades o pre-saberes en relación con lo enseñado por la docente.

La docente apela a un aprendizaje significativo en el que, el estudiante toma protagonismo de su educación, no obstante, no deslegitima la enseñanza tradicional. Su objetivo, parece estar centrado en mencionar que el proceso de enseñanza dialoga entre la educación tradicional, vista desde ese ofrecimiento de saberes cognitivos por parte del docente a sus estudiantes, en donde su papel inicial es ser receptores de la misma y el aprendizaje significativo, el cual busca que el estudiante aprenda a partir de su propia experiencia. Ver pregunta once, anexos. P. 80. Sin embargo, su papel no se inscribe en recibir la información para ahondar en lo que serían las situaciones *a-didácticas* como lo plantea De faria, E. (2006) en el anterior mapa conceptual, en relación con los postulados de Brousseau, G. (1986), donde se esperaría hacer de cada estudiante un promotor, explorador del conocimiento que acciona en cualquier medio didáctico, ejercicio que quizá la docente intenta promover en sus prácticas de aula con sus estudiantes pero no desarrolla en forma secuencial y articulada. Ver pregunta siete, anexos. P. 79.

En suma, la enseñanza de la matemática, propiamente del concepto de volumen desde la perspectiva de la docente es un asunto activo, significativo y vivencial en el proceso de aprendizaje; proceso mediado en la experiencia de las situaciones problemas para la aprehensión de conceptos matemáticos, pero no organiza esas experiencias en pro de alcanzar la construcción del concepto de volumen como un “todo” donde se reúna el conocimiento, capacidad de análisis y reflexión en un mismo sujeto en cualquier situación de la magnitud volumen.

Y por su parte la postura de la docente se centra en que quizá en la práctica no todos los niños y niñas tengan un mismo ritmo para expresar, entender y concluir ciertos temas, a pesar de que los docentes procuren manejar la mejor situación- didáctica y a - didáctica; sin embargo con el transcurrir del tiempo y teniendo en cuenta el ritmo de vida de las nuevas generaciones se

darán más y mejores herramientas que permitan sobrellevar cada asignatura tales como la matemática en un mejor ritmo y sin tanta timidez de parte de los estudiantes.

Por el momento se puede interpretar que una clase activa en la que todos construyen y definen ciertos conceptos, hace del aprendizaje en el salón de clases una actividad divertida, cotidiana y sin barreras invisibles que eviten ese amor a aprehender de una forma fluida.

9.3. Análisis de las Concepciones y Dificultades de los Estudiantes en la Enseñanza del Concepto de Volumen.

Este análisis muestra las concepciones y dificultades que tienen los estudiantes de grado tercero de la institución José Asunción Silva del municipio de Palmira de la Sede Piles en cada una de las pruebas planteadas, en torno al concepto de volumen en actividades cotidianas en: acciones de romper y rehacer, propiedades de conservación del volumen con respecto al tiempo, espacio, en acciones de modelar y cortar cuerpos sólidos, equivalencia de capacidad de recipientes abiertos y volumen de cuerpos sólidos, el color y la textura de un cuerpo como variables que no afecta el volumen; con respecto a esto se encontró lo siguiente:

9.3.1 Análisis de la prueba 1.

La prueba se planteó con el objetivo de reconocer si los estudiantes identifican el concepto de volumen en un contexto determinado. Para ello, en la prueba se presentó un conjunto de palabras utilizadas como sinónimos del concepto de volumen, pues Del olmo M, *et al* (1989). P.97. sugieren algunos términos del lenguaje que se utilizan para designar esta cualidad de los cuerpos.

Al desarrollar la prueba con el grupo de seis se encontró lo siguiente:

- Dos estudiantes asocian la prueba a conceptos estéticos corporales, es decir que están ubicados lejos del contexto fenomenológico con que se planteó la prueba, pues no reconocen la situación planteada desde el contexto dado.
- Tres estudiantes, aunque no referencian específicamente la palabra volumen, tiene un desarrollo cognitivo del significado del concepto matemático, pues referencian los sinónimos que se usan para referirse a este; solo un estudiante logra identificar la palabra volumen en el contexto dado. Se puede analizar que la concepción de volumen que estos cuatro estudiantes manejan está asociado al espacio ocupado por los cuerpos, es decir al volumen externo, referenciado bajo los siguientes términos del lenguaje: cuerpo, grueso, magnitud y bulto, y no a la capacidad como espacio vacío, pues en ningún momento eligen una palabra sinónima a este.
- Además, se encontró que un determinado estudiante no sabe distinguir entre un cuerpo grueso y uno delgado, por lo cual se puede inferir que esto puede convertirse en una dificultad, al momento de justificar cuando un cuerpo de la misma forma tiene mayor, menor o igual volumen. Con respecto a este aspecto los lineamientos curriculares (MEN, 1998) plantean que una magnitud empieza a construirse cuando se sabe que hay algo que es más o menos que otra cosa y se pregunta: más qué o más de qué, para que luego de esta etapa intermedia de construcción de magnitudes se pueda construir el concepto de volumen.

Esto significa o implica que para algunos estudiantes la noción de volumen puede estar sólo manejada desde algunas connotaciones del lenguaje, en vez de comprender que entre más espacio ocupa un cuerpo más volumen tiene dicho cuerpo visto desde distintos contextos fenomenológicos que le permitan reconocer que el volumen es una cualidad de los cuerpos que

está presente en todo lo que nos rodea.

9.3.2. Análisis de la prueba 2.

Esta prueba se planteó con el objetivo de reconocer las dificultades que los estudiantes presentan al identificar el concepto de volumen en acciones de romper, rehacer y cambiar de posición una figura, por lo cual se pidió a los estudiantes realizar distintas construcciones con policubos, las cuales se podían organizar según la estrategia que ellos decidieran.

Para esta prueba se le presentó a los estudiantes dos variables diferentes: construcción y percepción de figuras con igual o diferente volumen. Al analizar la información arrojada se encontró lo siguiente:

- Los estudiantes asocian el volumen de una figura a características referidas al color.
- Los estudiantes asocian el volumen de una figura directamente al tamaño del objeto utilizando términos como: grande, pequeño, mediano, alto y ancho. Por lo cual, al momento de realizar comparaciones entre el volumen de diferentes figuras, se centran específicamente en este tipo de características lo cual coincide con los lineamientos curriculares del MEN (1998) los cuales plantean que:

Las magnitudes intermedias de largo, ancho, espesor, altura, profundidad, etcétera; se conforman por un proceso relacional activo, que significa que cognitivamente los estudiantes primero logran la comparación en la dirección de menor a mayor, es decir la relación de ser más grande, que es anterior a la de ser más pequeño y una vez consolidada esa relación unidireccional se reversibiliza la relación para construir la inversa, y luego se coordinan ambas. Sólo cuando fracasan los intentos de someter los objetos y fenómenos a esas relaciones de desigualdad se construye la

equivalencia respectiva. P.39.

- Algunos estudiantes no reconocen que el cambio de posición en una figura no afecta el volumen de ésta, pues al acomodar los objetos de manera vertical, creen que su volumen aumenta, esto significa que hay una dificultad al percibir las características de la magnitud volumen, Del olmo M, *et al.* (1989), plantea que:

La percepción del volumen de un cuerpo es una tarea más difícil que la del área, pues esta puede captarse en la globalidad a través del sentido de la vista, pero para la primera han de elaborarse representaciones mentales del objeto a partir de los diferentes datos que recibimos mediante nuestros sentidos, principalmente de la vista y el tacto. P.115.

A partir de lo anterior se deduce que la representación mental que tienen los estudiantes acerca de la concepción de este concepto, se enfoca en asociar el volumen de una figura a características relacionadas al tamaño del objeto, dejando de lado otras invariantes como: espacio vacío de objetos con similares características (altura); Teniendo en cuenta las dificultades presentadas, el uso de policubos como material didáctico permite enfocarse en la construcción de la magnitud desde la percepción y comparación del volumen de cuerpos sólidos, a partir de procesos de reflexión en acciones de romper, rehacer o cambio de posición en una figura, ya que los estudiantes podrán organizar el material usando cualquier estrategia de solución. Ministerio de Educación y Ciencia (M.E.C) (1989) afirman que: “*el uso de materiales gadecuados por parte de los estudiantes constituye una actividad de primer orden que fomenta la observación, la experimentación y la reflexión necesarias para construir sus propias ideas matemáticas*”. P. 53.

9.3.3. Análisis de la prueba 3.

Esta prueba se planteó con el objetivo de reconocer las dificultades que tienen los estudiantes para identificar las propiedades de conservación del volumen con respecto al tiempo

y al espacio. Al analizar la información arrojada en la prueba, no se encontró dificultad en relación a lo planteado en el objetivo; pues los estudiantes en general reconocen que el volumen de un objeto no cambia por efectos de la distancia o el tiempo, por el contrario, ellos argumentan que este volumen se puede ver alterado solo si le ocurre un cambio físico a dicho objeto.

Considerando el aporte dado por Piaget, J. (1896–1980) sobre la teoría del desarrollo cognitivo, en el que describe unas etapas del pensamiento que se desarrollan como “*un proceso continuo, en donde las estructuras se organizan y se reorganizan moviéndose hacia un equilibrio, obteniendo resultados según el individuo y su tiempo*” Buitrago, L. (2013) p.17. y de acuerdo con la edad de los niños entrevistados, su desarrollo estaría ubicado en el estadio de las operaciones concretas, el cual se caracteriza por un tipo de pensamiento lógico, organizado y racional, que les permite aplicar lógica a los objetos físicos. Esto significa que la edad que tienen les permitió pensar qué cambios generan transformaciones respecto a la conservación del volumen en relación al tiempo y espacio en la prueba.

Según Buitrago, L. (2013). “*el niño que logra resolver los problemas de conservación en las etapas que le corresponden tendrá un posicionamiento cognitivo que le permite obtener la base para los conocimientos posteriores*”, p.18; por ello se consideró necesario analizar otros aspectos relacionados con la conservación del volumen, pero en acciones de moldear y cortar cuerpos sólidos; y así analizar si los estudiantes diferencian acciones reversibles y no reversibles sobre objetos; y si reconocen qué propiedades cambian y cuáles no, en el proceso de conservación del volumen.

9.3.4. Análisis de la prueba 4.

La prueba se planteó con el objetivo de reconocer las dificultades que el estudiante tiene

al identificar el concepto de conservación del volumen en acciones de moldear y cortar cuerpos sólidos, para ello se planteó dos pruebas, en la primera el estudiante debe construir dos esferas del mismo volumen con plastilina y cambiarle la forma a una de las dos; en la segunda se le muestra al estudiante dos pedazos de plastilina de igual volumen y se corta uno de ellos en cuatro partes, las cuales se unen en posiciones diferentes construyendo así una nueva figura. Después de desarrollar las pruebas con el grupo de estudiantes y analizar la información se encontró lo siguiente:

- En la primera prueba referente al modelado de objetos, cuatro estudiantes logran identificar que los cuerpos no cambian su volumen si se conserva la masa en acciones de este tipo, pues en sus argumentos expresan de manera intuitiva que el volumen de los objetos se conserva así sea que se cambie la forma. De tal manera que uno de ellos afirma que esto ocurre porque en ningún momento se le quita plastilina a los objetos inicialmente construidos. Por su parte, en la segunda prueba referente a la acción de cortar un objeto, solo la mitad del grupo de estudiantes logra identificar que al descomponer un cuerpo y unir cada una de sus partes éste conserva su volumen. Cognitivamente algunos estudiantes tienden a relacionar que el objeto que está dividido en pedazos tiende a ocupar más volumen.

Lo anterior evidencia que los estudiantes se les dificulta reconocer que los cuerpos no cambian su volumen si se conserva la masa del objeto en cualquier contexto, si no que tienen habilidades para identificarlo en contextos particulares, para algunos es fácil en acciones de moldear y para otros en acciones cortar cuerpos sólidos.

Con respecto a procesos de conservación Buitrago, L. (2013) p.19. sugiere que, aunque Piaget, J. (1896–1980) describe unas etapas que se dan de manera gradual, existen otros

factores que también intervienen en los procesos cognitivos como: la experiencia física que obtiene el niño al interactuar con los objetos y le permite diferenciar las propiedades que tienen éstos. Esto significa que a medida que el niño sea expuesto a mayores tipos de experiencias, lograra obtener mejores resultados en la identificación de propiedades de conservación del volumen.

9.3.5. Análisis de la prueba. 5.

La prueba se planteó con el objetivo de reconocer las dificultades que el estudiante presenta para identificar la textura y el color de un cuerpo como una variable que no afecta el volumen.

planteado se encontró que:

- Los estudiantes que presentaron la prueba, no manifiestan que la textura y color de los objetos afecte el volumen del objeto, esto significa que en su concepción de volumen este tipo de variables no es un distractor, exceptuando para los estudiantes que en la prueba dos si tuvieron dificultad con respecto a este proceso.

9.3.6 Análisis de la prueba 6.

Esta prueba se planteó con el objetivo de reconocer las dificultades que los estudiantes presentan para identificar que la cantidad de masa que hay dentro de un recipiente no afecta el volumen que este ocupa, para ello se le muestran al estudiante dos recipientes de igual volumen, uno lleno de granos de maíz y el otro vacío y se le pide que sujete los recipientes, esto con el fin de analizar las posibles dificultades que tiene el estudiante al observar este tipo de situación en relación con el objetivo planteado. Al desarrollar la prueba y analizar la información se encontró que:

- Cinco de los seis estudiantes entrevistados, identifican que la cantidad de masa que hay dentro de un recipiente no afecta el volumen que este ocupa. Para resolver la prueba estos estudiantes realizan comparaciones entre los dos recipientes, asociando la noción de volumen al tamaño de los vasos y no con respecto a lo que estos contienen, haciendo afirmaciones como: *“El mismo volumen si no que este lo llenaron y este no* (señala el recipiente lleno de maíz y el recipiente vacío), *pero si no lo hubieran llenado ocupan el mismo volumen”*
- Sólo un estudiante tiene dificultad en este aspecto, específicamente porque relaciona el estado del recipiente, estar lleno o vacío con la equivalencia del volumen de cada uno de los vasos, expresando lo siguiente: - *“No ocupan el mismo volumen porque este está lleno y este está vacío”*, esto significa que para el estudiante el volumen del vaso se relaciona con la cantidad de masa que hay dentro del vaso, lo que confirma lo expresado por Buitrago L, (2013) P. 54. cuando dice que la edad en que se encuentran el niño admiten la conservación del peso y la masa, pero niega la de volumen hasta que logre razonamientos intuitivos inversos y que la ausencia de invariantes en el pensamiento del niño es causa de la irreversibilidad del pensamiento. En este caso, en la concepción de volumen del estudiante, él no tiene presente que la cantidad de masa que hay dentro de los dos recipientes es una variable que no afecta el volumen que éste ocupa, ya que, ambos recipientes son totalmente iguales.

9.3.7. Análisis de la prueba 7.

El objetivo de esta prueba reconocer las dificultades que los estudiantes presentan para identificar la capacidad de recipientes abiertos y volumen de cuerpos sólidos en procesos de estimación, para ello se tiene en cuenta que Godino, J. *et al*, (2002) afirma que *“la capacidad de*

un recipiente y el volumen de un objeto como espacio ocupado, no son magnitudes diferentes, pues la capacidad de un recipiente coincide con el volumen del espacio interior delimitado por las paredes del recipiente, y viceversa". P. 622

Para el desarrollo de la prueba se pidió a los estudiantes expresar con cuántos policubos se llenaba la mitad de una caja, teniendo en cuenta que sí necesitaban hacer procesos de medición, sólo podían ingresar a la caja de a dos fichas. Al desarrollar la prueba y al analizar la información arrojada en ésta se encontró lo siguiente:

- Los estudiantes identifican la capacidad que tiene la caja de ser llenada desde lo que perciben visualmente, pues al terminar la prueba expresan que la mitad no está totalmente llena, pero no realizan procesos de estimación de medida, pues al momento de realizar el proceso de medir la capacidad del recipiente utilizando policubos, no logran desarrollar satisfactoriamente la prueba, ya que no comprenden cómo se puede llenar la mitad de la caja ingresando de a dos policubos, ya sea del mismo o diferente tamaño y estimar la totalidad de policubos que se necesitan. Es decir que se evidencia que los estudiantes se quedan cortos al momento de buscar estrategias de solución para estimar medidas y mirar la capacidad que tiene la caja de ser llenada.

Con respecto a la dificultad anteriormente mencionada Bright (1976) citado en MEN (1998) expresa que *"para avanzar en los procesos de medición es importante desarrollar la estimación aproximada, como el proceso de llegar a una medida sin la ayuda de instrumentos de medición"* P. 41; es un proceso mental, donde hay frecuentemente aspectos visuales y manipulativos.

9.3.8. Análisis de la prueba 8.

La prueba se planteó con el objetivo de reconocer las dificultades que el estudiante presenta para identificar la equivalencia de capacidad de recipientes abiertos y volumen de

líquidos. Para ello se les mostró a los estudiantes cuatro recipientes de igual capacidad, dos vasos totalmente iguales y dos de diferente forma (uno ancho y el otro delgado). Luego se llenó de agua los dos vasos iguales y se vació cada uno de ellos en los otros dos recipientes. Esto con el fin de que el estudiante observará lo que había ocurrido y así poder analizar posibles dificultades en relación con el objetivo planteado. Después de desarrollar la prueba con el grupo de estudiantes, al analizar la información arrojada se encontraron las siguientes dificultades.

Algunos de los estudiantes asocian que:

- La capacidad del recipiente depende de qué tan pequeño, alto, ancho, delgado o grueso sea el recipiente o también aluden a la forma o posición que tenga.
- La mitad de los estudiantes tienden a asociar que los recipientes más delgados y altos tienen más capacidad que los anchos y bajos, aunque también ocurre el caso contrario, donde uno de los estudiantes asume que el recipiente más ancho y bajo tiene más capacidad.

Según Buitrago, L. (2013) estas dificultades están asociadas a los procesos de conservación que han desarrollado los niños, en este caso están centrados en una sola dimensión y por ello responden que un recipiente tiene más o menos agua que otro. Por lo cual el autor especifica que, para mejorar este proceso, el niño debe realizar un juego de operaciones coordinadas entre sí de una forma sistemática y en conjunto que se oponen al pensamiento intuitivo de los primeros años, y que es a través de ver la posibilidad de una vuelta de una sustancia a su punto de partida la que le permite corregir esa intuición perceptiva y así transformar la relaciones en un sistema coherente de relaciones objetivas.

9.4. Aportes a Posibles Situaciones de Enseñanza para Postiores Trabajos con Respecto a la Enseñanza y Aprendizaje del Concepto de Volumen

Es importante tener presente, que, aunque los objetos matemáticos han sido considerados como paradigmas del conocimiento humano, existe una explicación histórica del desarrollo de ellos. La constitución del objeto matemático volumen conllevó un proceso histórico que fue desarrollado desde diferentes aportes de pensadores que ayudaron a la construcción del concepto; a partir de las ideas, concepciones y percepciones que haya tenido o tomado cada uno. En el breve recorrido histórico se analizó que, aunque estos puntos de vista pueden implicar diferentes o iguales intereses, se relacionan debido a que parten de necesidades ya sean sociales o personales, que se complementan o difieren con un propósito común: el de aportar a la medición de diferentes cuerpos sólidos.

Esto deja en evidencia que la capacidad de un individuo de percibir y manipular correctamente el volumen como concepto matemático no es sólo el conocimiento de una fórmula que le permite medir en sí cuerpos geométricos, sino también el fruto de un largo proceso de acumulación de competencias que se adquieren a través de la experiencia de soluciones a diferentes problemáticas que involucran este concepto.

Algo paradigmático es la manera como desde un enfoque tradicional de la enseñanza, muchas veces se les muestra a los estudiantes los temas matemáticos como objetos acabados (ver sustento en el *análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos*. P. 42), lo cual no les permite a los estudiantes reflexionar acerca de la concepción de volumen como el resultado de un proceso llevado por varios hombres a través de los años. El que el docente conozca de este proceso y se lo dé a conocer a sus estudiantes de manera adecuada, puede posibilitar que ellos tengan una mayor capacidad y competencia para alcanzar los objetivos matemáticos sobre el concepto de volumen según lo propuesto por el MEN (2006) en sus estándares.

Por tanto, es fundamental que el quehacer didáctico de un docente esté fundamentado en

un análisis detallado del desarrollo histórico del concepto volumen, que le permita dar un fundamento firme acerca de cómo desarrollar diferentes variables o tipos de procesos didácticos, que les ayuden a los estudiantes a mejorar su construcción personal del concepto.

Según Del olmo, M. *et al* (1989) el análisis didáctico debe ser un procedimiento cíclico que describa cómo el profesor debería idealmente diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje. Desde la Ingeniería Didáctica hay una propuesta por examinar las situaciones didácticas en tanto que la preocupación se centra en la organización, secuencia, articulación de las actividades planteadas en función de un proyecto o trabajo dirigido. Según Douady (1996) citado en De Faria, E, (2006):

...el término Ingeniería Didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la Ingeniería Didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase. P. 4

Esta organización, secuencia y articulación le permita al docente especificar cuál son contenidos que se deben usar para que los estudiantes reúnan el conocimiento, capacidad de análisis y reflexión, en cualquier situación de la magnitud volumen. Este procedimiento se realiza con la finalidad de que el profesor pueda primero identificar, los significados que considera relevantes a efectos de la planificación de la instrucción del concepto de volumen como tema matemático. Segundo organizar la información obtenida sobre esos significados relevantes, sobre el conocimiento de que se tienen los alumnos acerca de este concepto y sobre

su aprendizaje. Por último, enuncien y seleccione las capacidades que ellos esperan que desarrollem los alumnos sobre este tema matemático. Según Chavarría J, (2006), esta relación acontece cuando:

Los sujetos de la situación didáctica se relacionan con el medio que el docente elaboró para que se lleve a cabo la construcción del conocimiento (situación didáctica) y así el estudiante pueda, a su vez, afrontar aquellos problemas inscritos en esta dinámica sin la participación del docente (situación a-didáctica). P. 2

Se trata entonces de un asunto activo donde la finalidad principal es que los futuros profesores adquieran y empleen conocimientos para diseñar unidades didácticas sobre un tema matemático concreto.

Sin embargo, la docente en el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos contrasta una posición en cuanto al diseño de las unidades didácticas donde manifiesta que “*Si bien es cierto que el Ministerio de educación promulga unos lineamientos relacionados con la enseñanza de las matemáticas, es el sistema en el que se inscribe la educación en Colombia es el que no permite que el docente desarrolle adecuadamente estos lineamientos*”. P. 43. Aunque esta sea su posición hay que tener en cuenta que las capacidades aluden a cómo un estudiante puede movilizar y usar su conocimiento sobre un contenido concreto, y se desarrollan y movilizan por medio de las actuaciones de los escolares cuando se enfrentan a la resolución de problemáticas. Ver sustento en, análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos

Pero al ir desarrollando capacidades relativas en diferentes niveles de competencia y capacidades sobre el concepto de volumen, los estudiantes se hacen paulatinamente más competentes en esta área. En la propuesta de Brousseau, G. (1986) él manifiesta que “el profesor es quien facilita el medio en el cual el estudiante construye su conocimiento” es decir que es el mecanismo por el cual se está movilizando el aprendizaje y el esquema pragmático utilizado por

los docentes, los que no se están organizando correctamente (ver sustento en análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos P. 50) esto es porque, para describir las capacidades que se espera que un estudiante desarrolle durante la implementación de problemáticas sobre la medida de cuerpos sólidos, hay que delimitar y concretar el nivel cognitivo al que se dirige esa planificación. Centrándose en lo que plantea Artigue, M. *et al* (1995) citado en De Faria, E. (2006)

Para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo. P.4.

Las capacidades que van desarrollando los alumnos en distintas resoluciones de problemáticas planteadas sobre la medida de diferentes cuerpos sólido contribuyen, en mayor o menor medida, a la evolución de sus competencias, y esas capacidades se muestran al afrontar problemáticas a-didácticas; teniendo en cuenta que en lo planteado por Chavarría (2006) éste afirma que:

La Situación A- Didáctica es el proceso en el que, una vez que el estudiante ha recibido (o construido) el conocimiento, se le plantea un problema fuera de lo que trabajó en la situación didáctica, que debe afrontar y resolver sin la intervención del docente. Entonces, Situación A-Didáctica se puede ver como una validación del proceso de enseñanza-aprendizaje. P.1

Por ejemplo, en la pruebas del análisis de las concepciones y dificultades de los estudiantes donde se plantearon algunos ejercicios sobre el concepto de volumen utilizando el entorno inmediato, haciendo énfasis en que esta es la principal metodología utilizada por la

docente Olga para abordar la magnitud de volumen con sus estudiantes; se encontró que después de realizarse estas pruebas los estudiantes, en su mayoría mostraron una concepción baja de volumen en la que primaba el conocimiento intuitivo. Ver pruebas uno y tres en, resultados del análisis de las concepciones y dificultades de los estudiantes. P. 51 & 55. Es decir que, la labor de la docente ha sido medianamente efectiva, y según los objetivos de estas pruebas los estudiantes saben identificar las propiedades de conservación del volumen con respecto al tiempo y al espacio, pero se les dificulta identificar el concepto de volumen en actividades cotidianas.

Así mismo, cuando se les planteó a estos mismos seis estudiantes las pruebas con materiales didácticos como policubos que no hacen parte del trabajo con el entorno inmediato, se pudo establecer que las pruebas arrojaron resultados bajos e insuficientes, (ver pruebas dos y siete en, resultados del análisis de las concepciones y dificultades de los estudiantes. P. 53 & 58 - 59), ya que los estudiantes debieron salir de un contexto muy patente como es estudiar el entorno inmediato al que su docente los tenía acostumbrados hacia un contexto más reflexivo. Sin embargo, esto no quiere decir que la propuesta de la docente no sea importante, si bien, utilizar materiales didácticos para abordar la magnitud del concepto de volumen puede ayudar a consolidar aspectos más introspectivos de este concepto, no se puede olvidar que estos estudiantes son niños de entre siete y nueve años y lo que aprenden a través del contexto en el que se encuentran a esta edad es primordial.

No obstante, en las otras pruebas donde se buscaba que el estudiante pudiera identificar el concepto de conservación de volumen en acciones de moldear y cortar cuerpos sólidos, la textura y el color de un cuerpo como una variable que no afecta el volumen y que la cantidad de masa que hay en un recipiente no afecta el volumen que se ocupa; se pudo observar que a la mayoría de los estudiantes se les facilitó comprender y efectuar estas situaciones de enseñanza un poco

más enfocadas a la a-didáctica, donde los estudiantes pudieron no sólo reflexionar, sino también experimentar y argumentar sobre situaciones corrientes acerca del concepto de volumen en cualquier espacio de la vida cotidiana acorde a su edad. Ver pruebas cuatro, cinco y seis en, resultados del análisis de las concepciones y dificultades de los estudiantes. P. 56 - 58. Esto se dio porque los estudiantes marcaron niveles de dominio al movilizar las capacidades para resolver tareas.

En este proceso pruebas se contempló el conjunto de interrelaciones entre estudiante, profesor y medio didáctico donde se sufrió una transposición didáctica, teniendo en cuenta lo postulado por Chevallard, Y. (1985), citado en Gómez, M. (2005) quien explica la transposición didáctica como un proceso en donde

.. un contenido del saber sabio que haya sido designado como saber a enseñar sufre un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza. El trabajo que un objeto de saber a enseñar hace para transformarlo en un objeto de enseñanza se llama transposición didáctica.

P. 87.

El paso del saber sabio al saber enseñado fue una relación un poco compleja en el sentido de que puede haber una gran distancia entre ellos, esta transposición implica un proceso de manipulación del saber, que está determinado por los objetivos de enseñanza que se deseen alcanzar y el contexto escolar donde se propone la situación didáctica. Entonces este contrato didáctico se define como el conjunto de reglas explícitas e implícitas que interfieren en un determinado lugar de aprendizaje con respecto a la relación docente-estudiante.

Dadas las condiciones que anteceden al desarrollo de las pruebas realizadas a los estudiantes, se propone tener como manifiesto que:

- Ante nada, la vital importancia de conocer los conceptos previos del grupo de estudiantes, no sólo tratar de saber la cantidad de información que posee, sino cuales son las estrategias o mecanismos que les conllevan más fácilmente a la apropiación del concepto de volumen, mediante sus relaciones y diferencias, que le permitirán una mejor orientación en sus experiencias dentro del contexto y que éstas puedan ser aprovechados para su enseñanza. Esto con hacer cumplir lo planteado por Artigue, M *et al* (1995) P. 40, sobre la propuesta de la dimensión cognitiva de la ingeniería didáctica en la que explica que se debe asociar las características cognitivas de los alumnos a lo que se dirige la enseñanza.
- También, es necesario inicialmente potencializar el desarrollo de la capacidad de expresión verbal para que posteriormente esto lleve al estudiante a exponer sus pensamientos, ideas, opiniones y críticas sobre el material concreto es decir todo instrumento, objeto o elemento que el maestro facilita en el aula de clases, con el fin de transmitir contenidos educativos desde la manipulación y experiencia que los estudiantes tengan con estos. Por consiguiente, Del olmo *et al* (1989) explica que el aprendizaje por parte de los estudiantes es significativo, de acuerdo a la especificidad de su lenguaje, ya que esto ayuda para que el proceso de la formación integral lleve al estudiante a interiorizar los nuevos conocimientos, aplicándolos a situaciones de su cotidianidad.
- Además, generar habilidades cognitivas de orden superior que capaciten al estudiante para dar respuestas creativas a la resolución de los diferentes problemas que enfrentan, tanto en el contexto del salón de clases como en la vida diaria, Ya que, se evidencia mayor asertividad cuando los estudiantes dan respuestas aproximadas a las diversas soluciones en los diferentes problemas que enfrentan ellos tanto en su contexto

inmediato, como en el salón de clases; desarrollando una mejor expresión verbal en un ambiente que le permita aprender de sus errores y mejorar el uso del lenguaje matemático mediante sus ideas, opiniones y críticas en su diario quehacer demostrando un mayor interés por el concepto. El profesor debería estar dispuesto a exponer a los estudiantes a muchos estímulos que le permitan reconocer las propiedades de los objetos, pues no se puede dar por supuesto este tipo de procesos, ante esto Godino J. (2002) afirma que “*La mayoría de los niños tienen alguna experiencia que les permite desarrollar la percepción del mundo que les rodea. Sin embargo, esto se deja frecuentemente al azar y raramente se desarrolla de un modo sistemático*” P. 639.

- Para terminar, es necesario generar espacios de aprendizaje colaborativo en el aula de clase para promover una enseñanza y aprendizaje en los aspectos del concepto de volumen, que brinde la posibilidad de identificar las formas de razonamiento geométrico, en relación al modelo pedagógico de Ausubel, D. (1983) quien manifiesta que la representación de las formas geométricas desde lo bidimensional y tridimensional, en articulación con los tipos de aprendizaje, permite al estudiante explorar y descubrir la apropiación de los aspectos del concepto de volumen, a través de la manipulación de material concreto con la participación de sus estudiantes conjuntamente y logrando una mejoría en sus desempeños, donde los conceptos aprendidos, no se queden únicamente en el proceso memorístico, sino que trasciendan a su realidad inmediata.

En los marcos de todas las observaciones anteriores, para posteriores trabajos con respecto a la construcción del concepto de volumen, una revisión curricular permitiría delimitar unas prioridades en los contenidos, en los objetivos y en los aspectos a evaluar. Con esa revisión, es posible concretar las capacidades que el docente desea que sus estudiantes desarrollen, para

que el alumno alcance los niveles a-didácticos.

En efecto, en la descripción curricular se deben expresar objetivos generales de aprendizaje que puedan interpretarse en términos de las capacidades y competencias seleccionadas. Esta interpretación genérica de un objetivo de aprendizaje para todo un curso brinda información para tomar decisiones sobre qué competencias interesa desarrollar y, por tanto, qué capacidades hay que esperar que los alumnos alcancen sobre cada aspecto sobre la medida de cuerpos sólidos.

En la información asumida en los contenidos se debe poner de manifiesto multitud de significados de las nociones matemáticas involucradas en el concepto de volumen y se deben, describir los vínculos que se establecen entre ellas. La cantidad y la fuerza de esos vínculos permitirán concluir que cuando se desarrollen ciertas capacidades, se estará contribuyendo especialmente a ciertas competencias.

9.5 Conclusión

En conclusión, para recoger elementos teóricos sobre el concepto de volumen, es necesario que la docente tenga clara las concepciones de un barrido histórico desde sus inicios sobre el tema, ya que el entendimiento integro de todas las variables conceptuales que este barrido puede ofrecer, permite que la docente evalúe y confiera las mejores posturas frente a las distintas problemáticas que pueden presentarse al trabajar el concepto de volumen.

Además de esto, la docente debe inspeccionar si sus precisiones frente a las problemáticas que se puedan presentar, se están llevando a cabo correctamente con sus alumnos o no, es decir, ella debe percibirse de que lo que desea orientar a sus estudiantes está teniendo el impacto que ella desea, o si, por el contrario, no se están orientando adecuadamente esas precisiones.

En lo que se refiere a la enseñanza y aprendizaje en el grado tercero de la IE José Asunción

Silva, la docente debe organizar secuencialmente las concepciones identificadas en el estudio epistemológico para convertirlos en un currículo secuencial en pro de ir rebasando las diferentes problemáticas sobre la medición de cuerpos sólidos, que podrían utilizarse como situaciones a plantear a los estudiantes durante sus avances en la construcción del concepto de volumen.

Al evaluar las dificultades que tienen sus estudiantes y las diferentes debilidades que se presentaron en los casos de medición de cuerpos sólidos se puede decir que en los contenidos que el estudiante necesita ir adquiriendo en ese currículo la docente debe garantizar que:

- A los estudiantes se les debe enfrentar a situaciones que los pongan en posición de construir una concepción de volumen asociada a la capacidad como espacio vacío y al espacio ocupado por los cuerpos, que en el mismo orden de ideas sería el volumen interno y externo; referenciado bajo los términos del lenguaje: cuerpo, grueso, magnitud y bulto.
- Se debe trabajar con los estudiantes el volumen de una figura y su asociación directamente con el tamaño del objeto para que reconozcan que el cambio de posición en una figura no afecta el volumen de ésta, sin importar la manera en cómo se reacomoden o reubiquen los objetos, el volumen no aumenta, esto garantizaría una mejora en la habilidad para percibir las características de la magnitud volumen.
- Respecto al modelado de objetos y a la acción de cortar un objeto, se debe buscar que los estudiantes logren identificar que los cuerpos no cambian su volumen si se conserva la masa, es decir que el volumen de los objetos se conserva sin importar que se cambie la forma e identificar que al descomponer un cuerpo y unir cada una de sus partes éste conserva su volumen y que por el contrario el objeto que está dividido en pedazos no tiende a ocupar más volumen.

- Se debe instruir a los estudiantes que la cantidad de masa que hay dentro de un recipiente no afecta el volumen que este ocupa, realizando comparaciones entre los dos recipientes, asociando la noción de volumen al tamaño de los recipientes y no con respecto a lo que éstos contienen.
- Las situaciones de enseñanza deben incluir experiencias en las que sea necesaria la estimación de medida y de esta forma lograr que los estudiantes se fortalezcan en este aspecto través de la identificación de la capacidad que tiene un recipiente con polígonos de ser llenada.

De esta forma se amplían las probabilidades de que los estudiantes desarrollen las competencias relativas a la medición de cuerpos sólidos y puedan mostrar desempeños cercanos a los estándares necesarios para albergar íntegramente la noción del concepto de volumen en cualquier situación didáctica o a-didáctica según su nivel de estudio.

10. Bibliografía

- Artigue, M. Douady & R, Moreno L. (1995). Ingeniería Didáctica en educación matemática *“Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas”* (1 ed.) Bogotá Colombia Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
- Ausubel, D. (1983). *Psicología Educativa: un punto de vista cognoscitivo*. Psicología Educativa, 46.
- Boyer, C. (1991) [1989]. *A History of Mathematics (Second edition, revised by Uta C. Merzbach edición)*. Nueva York: Wiley.
- Baquero, C. (2014) *Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de volumen dirigida a estudiantes de grado octavo*. Universidad Nacional de Colombia
- Brousseau G (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Recherches en Didactique des Mathematiques, 7 (2): 33-115 [Traducción de Julia centeno, Begoña Melendo y Jesus Murillo]
- Brousseau G (1997). Theorie de situation didactiques et ses applications.
Recuperado de:
<http://math.unipa.itgrim/brousseaumontreal03.pdf>
- Buitrago, L. (2013). *Conservación de masa, peso y volumen en niños de tercer grado*. Tesis maestría, Tegucigalpa
- Castrillón J. et al (2014) *Diseño de una unidad didáctica para la enseñanza del concepto de volumen, que favorezca el aprendizaje significativo en los estudiantes del grado 9o de la I.E el Pedregal del municipio de Medellín* (Tesis de Maestría en enseñanza de las Ciencias exactas y Naturales). Universidad Nacional de Colombia.

- Calderon, D. & Leon, O. (2012). *La Ingeniería Didáctica como metodología de investigación del discurso en el aula*. En: Rodríguez et al. (2012), *lenguaje y educación: perspectivas metodológicas y teóricas para su estudio*. (P 71-104) Bogotá: Universidad Pedagógica de Colombia.

- Chamorro, M (1994), *Didáctica de la matemática para la educación infantil* P. 43-62. Universidad Complutense de Madrid

Recuperado de:

<https://unmundodeoportunidadesblog.files.wordpress.com/2016/02/didactica-matematicas-en-infantil.pdf>

- Chavarría J, (2006) *La teoría de las situaciones didácticas. fundamentos y métodos de la didáctica*. Escuela de matemáticas universidad nacional.
- Chevallard, Y. (1985) *La transposition didactique; du savant au savoir enseigne*. Paris, La Pensee sauvage.
- De Faria E, (2006). *Ingeniería Didáctica*. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 1 (2).
- Del olmo, M. Moreno, M & Gil, F (1989). *Superficie y volumen ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* (P.97-125) edid. síntesis.
- Dickson, L., Brown, M. y Gibson. O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Cerdanyola, España, edid Labor, S.A.
- Douady, R. (1996). *Ingeniería Didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde*. En Barbin, E., Douady, R. (Eds.). *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas*. Francia. Topiques éditions. Publicación del I.R.E.M.

- Felix Klein, (1939) “*Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Geometry*”.
- El Rincón Matemático (2008) *Estrategias y materiales para la enseñanza de las matemáticas*.

Tomado de:

<https://pedagogas.wordpress.com/2008/05/27/material-concreto/>

- García, J & Calvo, O (2007). *La medida de sólidos en los libros XI y XII de los elementos de Euclides*. (tesis pregrado). Universidad del valle, Cali, Colombia.
- García, M. (2011). *La enseñanza tradicional de la matemática y su influencia en el aprovechamiento de los alumnos a nivel de primaria* (Tesis de pregrado). Universidad pedagógica nacional, Ciudad del Carmen, México.
- Godino, J. Batanero, C. & Roa, F (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros* (Proyecto de investigación) Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada.
- Godino, J. Batanero, C. Contreras, A. Estepa, A, Lacasta, E. & Wilhelmi, M (2013) *La Ingeniería Didáctica como investigación basada en diseño*.

Recuperado de:

https://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20et%20al_2013%20Ingenieria%20didactica.pdf

- Gómez, P. & Lupiáñez, J. (2007) *Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. PNA, 1(2). P.79 - 98.
- Gómez, M (2005). *Trasposición didáctica historia del concepto*. Revista latinoamericana de estudios educativos, 1 (1), P. 83-115

Recuperado de:

<https://www.redalyc.org/pdf/1341/134116845006.pdf>

- Lopera, R. (2014). *Comprensión del concepto de volumen mediante el doblado de papel en el marco de la Enseñanza para la Comprensión*. Tesis Maestría, Medellín.
- Luelmo, M. (2001). *Medir en secundaria: algo más que fórmulas*. X JAEM Ponencia. P.83, 727-737.
- Lupiáñez, J. Rico, L. Gómez, P. Marín, A (2005). *Ánálisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Conferencia presentada en V Congresso Ibero-americano de Educação Matemática (CIBEM) (18-22 Jul 2005). Oporto, Portugal
- López C (2007). *La intuición y la matemática. Revista ciencia y tecnología*. Publicación anual de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Palermo. ISSN: 1850-087 0 | ISSN (en línea): 2344-9217
- M.E.C. (1989). *Diseño curricular base, educación secundaria obligatoria. España*.
- MEN. (1994). *Ley 115 de 1994, Artículo 78. Regulación del Currículo*. Bogotá D.C. Colombia. Ed. Magisterio.
- MEN (1998) *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Santa Fe de Bogotá D.C. Colombia. Ed. Magisterio.
- Recuperado de

https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

- MEN, (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Santa Fe de Bogotá D.C. Colombia. Ed. Magisterio.
- MEN (2016) *Derechos básicos de aprendizaje V.2*. Santa Fe de Bogotá D.C. Colombia. Ed. Magisterio. Recuperado de

http://itgonzalosuarez.edu.co/gsr-content/uploads/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf

- Rodríguez, L. (2004). *El modelo argumentativo de toulmin en la escritura de artículos de investigación*. Revista digital universitaria, 5(1), 1-5
- Sáiz, M. (2002). *El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto matemático volumen y su enseñanza*. Tesis de doctorado. México: DME, Cinvestav.
- Sáiz, M. (2005). *Transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del volumen. Documento de trabajo de la autora*.

Disponible en:

<http://es.scribd.com/doc/52362622/Una-discusion-sobre-el-concepto-matematico-devolumen-con-fines-didactico>

- Sáiz, M. (2007). *El Volumen ¿Por dónde empezar? que acompaña a la conferencia magistral*. Versión corregida en 2013.

Disponible en:

<http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig4/ConfMagist.pdf>

- Saucedo, G. Carbó, A. Mántica A. (2007) *Volumen, ¿qué se necesita conocer para enseñarlo?* Facultad de humanidades y ciencias. Universidad nacional de Argentina.
- Valencia, M. (2002) Apuntes de historia de las matemáticas, Volumen 1, nº1,

11. Anexos

11.1 Anexo A: Tabla, entrevista Docente

	PREGUNTA	RESPUESTA DOCENTE	
	1. ¿Piensa usted que la enseñanza ha evolucionado?	<p><i>“Pues...tanto como evolucionar no, pienso más bien que las metodologías que se están manejando ahora en la educación son las que intentan evolucionar, pero el mismo sistema no deja que vaya más allá; por lo menos el sistema educativo de orden público no permite que sean metodologías que se puedan aplicar amplia y favorable con los estudiantes”.</i></p>	
	2. ¿y hablando un poco de lo curricular, depende de lo que se plantea en los estándares para el área de matemáticas?	<p><i>Aclaro, obviamente nosotros manejamos, te voy a explicar, se maneja un plan de área, un plan de aula y un módulo, este es el último recurso que se utiliza, ahí es donde está la clase desmenuzada por decirlo así y el plan de aula parte de lo que dice el plan de área y en el plan de aula obviamente se tiene en cuenta las normas del Ministerio, que son los estándares, los DBA entonces nosotros trabajamos a partir de ahí.</i></p>	
	3. ¿Qué metodologías aplica usted al momento de enseñar?	<p><i>“Pienso que tiene que ver con mi enfoque. Yo soy psicóloga clínica educativa, trabajo mucho con lo que es el aprendizaje significativo de Vygotsky y de Esmunier, y fuera de eso lo aproximo a todo lo que es el constructivismo, entonces el aprendizaje significativo que yo realizo en todas mis clases parte de preguntas, de explorar los preconceptos de los niños, de que ellos mismos con sus palabras elaboren los significados o por lo menos se aproximen a ellos y reorganicen todo”.</i></p>	

	<p>4.Teniendo en cuenta, lo que me acabas de responder. ¿La metodología usada le permite un buen desarrollo de los conceptos matemáticos, en esencia del concepto de volumen? ¿porque?</p>	<p><i>“Sí, yo creo que lo que yo trato de hacer con ellos sí permite un buen desarrollo de los conceptos matemáticos. Lo que más hago es, primero trabajar desde la cotidianidad; segundo desde su entorno, es decir que ellos trabajen con los objetos que tengan en su entorno o con las situaciones, las experiencias que viven aquí mismo en la vereda y fuera de eso que ellos sean muy participativos y activos, entonces siento que, si hay una forma de mostrarles desde la comparación, desde la diferenciación, desde la inferencia. El objetivo es que ellos traten de manejar sus mismas herramientas mentales”.</i></p>
	<p>5. Describa la clase matemática la cual usted enseñó el concepto de volumen, tenga en cuenta la metodología, manera de participación de los estudiantes, tipo de actividades que proponen, medios y materiales didácticos, tipo de evolución.</p>	<p><i>“Pues el volumen yo lo manejo como te digo con objetos, por ejemplo, empezamos a comparar, y si te hablo directamente sobre el volumen a ellos no se les dificulta mientras ellos lo puedan vivenciar directamente y así digamos aprendan fácil y son de los indicadores de logros que ellos alcanzan fácil porque ellos lo hacen desde la comparación y la vivencia les queda fácil. Ellos aplican el volumen entonces ellos ven el cuerpo, cuando estamos viendo la materia y la diferencia de la masa corporal y ellos van distinguiendo que todo es volumen. Para ellos el concepto de volumen no fue un concepto difícil de aprender a ellos les fue más sencillo, pero desde el mismo ejemplo”.</i></p>
	<p>6. A partir del siguiente problema planteado, podría mencionar ¿cómo explicaría este problema en clase?</p> <p>Se tienen que empacar frascos de 8 cm de diámetro y 15 centímetros de alto, el empacador dispone de cajas de base rectangular de diferentes tamaños y debe decidir la</p>	<p><i>“Lo realizaría vivencial. Yo por ejemplo traería el frasco, miraría que me cabe en el frasco y le pediría a cada uno una caja de cualquier tamaño. Entonces ellos traen la caja de diferentes tamaños y comenzamos sin todavía llevarlos a la experimentación, no más con observación, de ahí realizar preguntas como ¿lo que hay en el frasco en cuál de las cajas puede caber? (se realizará con solo la visualización) sin medidas y ¿porque? la argumentación de la respuesta que cada estudiante da es muy importante ya que a veces se limitan a decir sí o no de ahí ya pasamos al proceso de la experimentación y comprobar o refutar lo dicho. Es decir, ellos parten de una hipótesis luego realizan la</i></p>

	<p>caja del tamaño más adecuado, explica diversos procedimientos que el empacador puede seguir para tomar la decisión más adecuada</p>	<p><i>argumentación de ahí una proposición y de último se llega a una respuesta”.</i></p>
	<p>7. ... y al momento del conocimiento abstracto, porque en matemáticas siempre hay aspectos abstractos, ¿cómo usted haría en ese momento? ¿Cómo le enseña a un estudiante ya el concepto de volumen mediante la fórmula?</p>	<p><i>“En ese caso, si toca apoyarse un poco de lo teórico y de los algoritmos, ecuaciones, hay que apoyarlo y ahí si tienes que trabajarla desde el proceso de la movilización y sobre todo de la comprensión. yo te digo algo antes de usar terminologías técnicas en el área de matemáticas me voy a terminologías más sencillas para hacer la construcción del pensamiento abstracto que es lo más difícil y por eso te digo que tiene mucho que ver con las herramientas mentales que tienen los niños y dependen de su desarrollo de primera infancia”.</i></p>
	<p>8. ¿Desarrolla usted aspectos históricos del concepto de volumen?</p>	<p><i>“No la verdad es que yo arranco, tengo en cuenta plan de área, plan de estudio y cuando elaboro mi modulo lo ajusto al aquí al ahora y lo que realmente pueda aprender el niño, pero yo no recojo esos conceptos y no lo aplico porque no se la verdad ni sabía cuáles eran los aspectos históricos del volumen, tendría que empezar por investigar esa palabra”.</i></p>
	<p>9. ¿Qué conceptos previos se deben tener en cuenta para abordar la magnitud volumen?</p>	<p><i>“Los conceptos previos que se deben de tener en cuenta es todo lo que significa distancia, medida, cuántos pasos hay, ellos lo hacen de manera empírica y la parte del volumen la manejan desde el mismo espacio por eso es tan importante en ellos la ubicación espacial, porque ellos saben de manera empírica desde pequeños que es volumen, que es más grande más pequeño, que es más liviano no más desde cargar un objeto ellos lo saben”.</i></p>

<p>10. ¿Qué conceptos trabaja en torno a la magnitud volumen?</p> <p>11. ¿En qué tipo de situaciones se basa para enseñar la magnitud volumen?</p>	<p><i>“Yo creo que lo que se debe trabajar es peso, masa y materia”.</i></p> <p><i>“Yo parto desde ellos mismo, desde lo que tienen aquí en su entorno inmediato que es el salón de clase, entonces empezamos a mirar que tiene volumen y comparamos. Empezamos a mirar si tiene más o menos volumen, empezamos a mirar si tiene peso entonces empezamos a cargar los elementos para mirar cuál pesa más, cuál ocupa más espacio y por qué pesa más u ocupa más espacio, entonces yo relaciono el volumen con el peso y doy ejemplos desde la misma experiencia, cambiando de posiciones para que ellos entiendan que el volumen se conserva”.</i></p>
--	--

11.2 Anexo B: Protocolo de observación de las pruebas a estudiantes y dificultades por estudiantes

E: Estudiante

P: Investigador

Prueba 1

E	Diálogo entre estudiantes e investigador	Dificultades de los estudiantes en la prueba.
E1	<p>P: ¿De las palabras que están acá abajo, por cual la cambiaste?</p> <p>E1: Por cuerpo y grueso.</p> <p>P: La palabra gorda se puede cambiar por cuerpo y grueso. ¿Por qué elegiste cuerpo ?</p> <p>E1. Por qué debe estar como Pamela, más delgadita (señalando en la imagen a Pamela y tocando su cuerpo).</p> <p>P: ¿ y grueso ?</p> <p>E1: grueso es como estar más delgada, más flaca.</p> <p>P: ¿ Quién está más flaca ?</p> <p>E1: Pamela que Kely (señalando la imagen a Pamela).</p> <p>P: Entonces, tú elegiste cuerpo y grueso ¿por qué?</p> <p>E1: Porque, ella está más gorda que Pamela (señala en la imagen a Kely).</p>	<p>E1 al utilizar la palabra cuerpo no la relaciona en términos de que entre más espacio ocupa un cuerpo más volumen tiene dicho cuerpo, si no que asocia la actividad a conceptos estéticos corporales.</p> <p>E1 presenta dificultad al a asociar un cuerpo grueso a uno delgado como sinónimos.</p> <p>E1 reconoce que Kely tiene más volumen que Pamela en términos de</p>

		gorda y flaca.
E2	<p>P: ¿Tu cual elegiste? (Señalando a E2)</p> <p>E2: Yo cuerpo, lo mismo que eligió Wendy.</p> <p>P: ¿Por qué elegiste cuerpo y grueso?</p> <p>E2- Porque ella no debería estar así gordita.</p> <p>P: ¿Quién no debería estar así?</p> <p>E2: Ella (señalando en la imagen a kely)</p> <p>P: ¿Kely no debería estar gordita? ¿Porque?</p> <p>E2: No.</p> <p>P: Pero en la oración “Kely es más gorda que Pamela” tu cambiaste la palabra gorda por cuerpo y grueso. ¿Por qué elegiste cuerpo? y ¿por qué elegiste grueso?</p> <p>E2: Porque a ella no le deberían decir gorda, si no gruesita y ya.</p>	<p>E2 relaciona la palabra gorda con grueso.</p> <p>E2 asocia la prueba a conceptos estéticos corporales.</p>
E3	<p>P: ¿Tu cual elegiste? (señala a E3).</p> <p>E3: Cuerpo y magnitud.</p> <p>P: ¿Por qué elegiste “cuerpo”?</p> <p>E3: Porque ella tiene más cuerpo que ella (señala en la imagen a Kely).</p> <p>P: ¿Por qué elegiste “magnitud”?</p> <p>E3: No sé (Mueve la cabeza).</p> <p>P: ¿Por qué elegiste magnitud? ¿tú por qué dijiste, yo voy a cambiar la palabra gorda por magnitud?</p> <p>E3: No sé (Mueve la cabeza).</p>	<p>E3 relaciona la palabra gorda con cuerpo en términos de que reconoce cuando un cuerpo tiene más.</p> <p>E3 elige la palabra magnitud, pero no justifica la elección.</p>
E4	<p>P: ¿Tu cuál elegiste? (señala a E4)</p> <p>E4: Bulto y grueso.</p> <p>P: ¿Por qué elegiste “bulto”?</p> <p>E4: Porque esta, es más gorda que está (señala en la imagen primero a Kely y luego a Pamela)</p> <p>P: ¿Por qué escogiste “grueso”?</p> <p>E4: Por qué esta, está más gruesa que esta. (señala en la imagen primero a Kely y luego a Pamela)</p>	<p>E4 relaciona la palabra gorda con los términos bulto y grueso.</p>

E5	<p>P: ¿Tu cuál elegiste? (señala a E5)</p> <p>E5: Bulto y grueso.</p> <p>P: ¿Por qué elegiste “bulto”?</p> <p>E5: Porque ella está más gorda que Pamela (señaló en la imagen a Kely).</p> <p>P: ¿Y por qué elegiste “grueso”?</p> <p>E5: Porque Pamela está más gruesa que kely.</p> <p>P: ¿Pamela está más gruesa que Kely? (señala a Pamela)</p> <p>E5: ¡Ah, no! Kely está más gruesa que Pamela.</p>	E5 relaciona la palabra gorda con los términos bulto y grueso.
E6	<p>P: ¿Tu cuales elegiste?</p> <p>E6: Volumen y grueso.</p> <p>P: ¿Por qué elegiste “volumen”?</p> <p>E6: Por que Kely tiene más volumen que Pamela.</p> <p>P: ¿Porque sabes que Kely tiene más volumen que Pamela?</p> <p>E6: Porque es más gruesa.</p> <p>P: ¿Por qué elegiste “grueso”?</p> <p>E6: Porque Kely es más gordita que Pamela.</p>	E6 relaciona la palabra gorda en términos de volumen y asocia este concepto al grosor que tiene un objeto.

Prueba 2a

E	Diálogo entre estudiantes e investigador	Dificultades de los estudiantes en la prueba
E1 y E2	<p>P: Las fichas tienen el mismo volumen ¿por qué?</p> <p>E1: Porque estos dos son más volumen que el otro (agarro las fichas rosada y agua marina).</p> <p>P: ¿Cuáles?</p> <p>E2: Rosado, agua marina y amarillo.</p> <p>P: ¿Las tres tienen el mismo o diferente volumen?</p> <p>E2: Tienen diferente volumen.</p> <p>P: ¿Cuales tienen diferente volumen?</p> <p>E2: Estos dos tienen diferente volumen (coge la ficha amarilla y agua marina) y estos dos también tienen diferente volumen (coge la ficha amarilla y rosada), todos tienen diferente volumen.</p> <p>P: ¿Todos tres tienen diferente volumen?</p> <p>E2: Si (mueve la cabeza).</p>	<p>E1 utiliza expresiones para asociar el medio volumen de una figura de manera incorrecta.</p> <p>E1 asocia el volumen de una figura directamente con el tamaño (realiza comparaciones a partir de la altura de las figuras determinando las figuras como más grandes).</p> <p>E1 asocia como que lo grueso tiene poco volumen</p>

<p>P: ¿Hay, alguno que tengan igual volumen?</p> <p>E2: No (mueve la cabeza de lado a lado).</p> <p>P: ¿ No hay con igual volumen?</p> <p>E1: Solo estos dos tiene igual volumen (agarra el agua marina y el rosado) y el otro no tiene igual volumen, es como medio volumen (agarra el amarillo).</p> <p>P: ¿Y por qué dicen que estos tienen el mismo volumen? (señala la figura aguamarina y rosado).</p> <p>E2: No, Wendy fue que dijo que esto tenia lo mismo (señala a E1).</p> <p>P: ¿Tú, dices que no?</p> <p>E2: No, yo digo que no tienen el mismo volumen.</p> <p>P: ¿Y por qué dices que no?</p> <p>E2: Porque un oso y un panda no son iguales</p> <p>P: Ah, tú estás viendo las imágenes, pero si no miramos las imágenes si no las fichas ¿tienen el mismo volumen ?</p> <p>E2: No.</p> <p>P: ¿Por qué?</p> <p>E2: Porque no tiene el mismo color.</p> <p>P: ¿ Tu, por qué dices que tienen el mismo volumen? (señaló a E1).</p> <p>E1: Porque estos son más grandes que este (señaló la ficha agua marina y rosada como grandes y las separó de la amarilla).</p> <p>E1: porque estos tienen más volumen que este, (señaló que la figura aguamarina y rosada tienen más volumen) porque este es como grueso (cogió el amarillo) y estos son como más duros (cogió el agua marina y rosado).</p> <p>P: Ahora tú me dijiste que estos sí tenían el mismo volumen (señalo la figura de color agua marina y rosado) ¿ por qué ?</p> <p>E1: Porque son del mismo tamaño, pero no tienen el mismo color.</p>	<p>y lo duro tiene más volumen. (dificultad para diferenciar lo grueso de lo duro en el contexto).</p> <p>E2 no diferencia cuando varias figuras tienen diferente volumen, asocia el concepto de volumen a características referidas al color.</p>
---	--

E3 y E4	<p>P: ¿Ustedes cuales hicieron?</p> <p>E3 y E4: Estas dos (muestran las figuras).</p> <p>P: ¿Tienen el mismo o diferente volumen?</p> <p>E3: El mismo volumen.</p> <p>P: ¿Por qué?</p> <p>E3: Porque todos son iguales.</p> <p>P: ¿Iguales de qué?</p> <p>E3: De alto y (se quedó pensando)</p> <p>E4: Y de tamaño.</p> <p>P: ¿Tu por qué dices que tienen el mismo volumen? (señala a E4)</p> <p>E4: Porque están iguales.</p> <p>P: Son del mismo volumen, ¿por qué están iguales de qué?</p> <p>E3: De las fichas.</p> <p>P: ¿Cómo así de las fichas?</p> <p>E3: (Señala las fichas, pero no comenta nada al respecto).</p>	<p>E3 y E4 asocia el concepto de volumen a características asociadas al tamaño (el alto de la figura) y a la cantidad de fichas con que se forma la misma figura.</p>
E5 y E6	<p>P: Ustedes construyeron este. ¿Tienen el mismo volumen ?</p> <p>E6: Si.</p> <p>P: ¿Por qué dices que tienen el mismo volumen? (señaló a E6).</p> <p>E6: Porque los dos están gordos y también los dos están altos.</p> <p>P: ¿Y tú? (señaló a E5).</p> <p>E5: También porque están del mismo tamaño.</p>	<p>E6 asocia el concepto de volumen a características asociadas al ancho(gordo) y a la altura de las figuras.</p> <p>E5 asocia el concepto de volumen a figuras del mismo tamaño.</p>

Prueba 2b

E	Diálogo entre estudiantes e investigador	dificultades de los estudiantes en la prueba
E1 y E2	<p>P: ¿Cuáles eligieron? ¿cuál es la de menor volumen? (señaló a E1 Y E2)</p> <p>E2: Esta (ficha fucsia)</p> <p>P: ¿De ahí cual le sigue?</p>	<p>E1 y E2 organizan figuras de manera ascendentes según su volumen pero tienen en cuenta sólo características asociadas a</p>

	<p>E2: Esta (ficha amarilla)</p> <p>P: ¿Luego?</p> <p>E2: Esta (ficha morada)</p> <p>P: ¿Por qué?</p> <p>E2: Porque esta (ficha morada) está más grande y está más pequeña (ficha fucsia), pero si estas dos se juntan (ficha amarilla y fucsia) esta queda más grande y está más pequeña (ficha morada)</p> <p>P: Si yo coloco este acá (pone la de color fucsia encima de la de color amarilla) P: ¿cuál queda con mayor volumen?</p> <p>E2: Estas (las fichas fucsia y amarilla juntas)</p>	la altura.
E3 y E4	<p>P: ¿Qué fichas eligieron? ¿Cómo las ubican de menor a mayor?</p> <p>E3: Menor, medio y mayor volumen.</p> <p>P: ¿Por qué esta (ficha amarilla) tiene menor volumen que esta (ficha de dos colores)?</p> <p>E3: Porque esta es más pequeña y esta es más grande.</p> <p>P: ¿Si yo coloco esta así, siguen teniendo el mismo volumen? (voltea la ficha de dos colores).</p> <p>E3: Estas dos si (ficha rosada y de dos colores) y esta no (ficha amarilla).</p> <p>P: ¿Estas dos siguen teniendo el mismo volumen? (agarra la ficha de dos colores y rosado).</p> <p>E3: Si porque esta parejo.</p> <p>P: ¿Y tú que dices, tiene el mismo volumen (señalando a E4)?</p> <p>E4: Tienen el mismo volumen.</p>	<p>E3 asocia el concepto de volumen a características del tamaño (grande, pequeña, mediana).</p> <p>E3 y E4 organizan figuras de manera ascendente según su volumen pero tienen en cuenta sólo características asociadas a la altura, cuando al problema se le aplica una variable (cambiar la posición de las figuras) ya sus argumentos con respecto a la posición de las figuras cambian.</p>
E5 y E6	<p>P: Me van a explicar por qué tienen diferente volumen. (señala a E5 y E6).</p> <p>E6: Esta es grande (ficha zapote), esta es mediana (ficha azul) y esta es más pequeña (ficha amarilla).</p> <p>P: ¿por qué dices que son de diferente volumen? (señala a E5).</p> <p>E5: Porque esta (ficha zapote) tiene más volumen que esta</p>	<p>E6 asocia el concepto de volumen a características del tamaño (grande, pequeña, mediana).</p> <p>E5 y E6 no asocian el volumen solamente a la altura de una figura, también observan otro tipo</p>

	<p>(ficha azul) y esta (ficha amarilla).</p> <p>P: Si yo levanto esta ficha ¿qué pasa? (levanta la ficha amarilla).</p> <p>E5: Está (la ficha amarilla) queda más grande que esta (ficha azul).</p> <p>P: ¿Es decir que esta tiene más volumen que está? (señalando la ficha amarilla).</p> <p>E5: No, estas dos siguen teniendo el mismo volumen.</p> <p>P: ¿Cómo así? Ustedes me habían dicho que esta (ficha amarilla) tenía menor volumen que esta (ficha azul).</p> <p>P: Ustedes me dijeron; puesto 1 (ficha amarilla) puesto 2 (ficha azul) y puesto tres (ficha zapote) entonces si yo la levanto (ficha amarilla) sigue ocupando el puesto número 1.</p> <p>E6: Sigue siendo el número 1.</p> <p>P: ¿Por qué?</p> <p>E6: Porque si uno la levanta, vuelve y la baja.</p>	<p>de características, reconocen que, aunque hay figuras más altas que otras, no necesariamente por este motivo las figuras tienen más volumen.</p> <p>Además E6 realiza procesos de cambio de posición de una figura para resolver situaciones problemas.</p>
--	---	--

Prueba 2c

E	Diálogo entre estudiantes e investigador	Dificultades de los estudiantes en la prueba.
E5 y E6.	<p>La siguiente actividad consiste en que ustedes me digan si esta figura y esta figura tienen el mismo volumen.</p> <p>E5 y E6: Si.</p> <p>E6. Si porque tienen el mismo tamaño y si uno los voltean siguen siendo del mismo tamaño.</p> <p>E5. Si uno los acuesta sigue siendo del mismo tamaño.</p> <p>E6. Ninguna es flaca, ninguna es gorda. Si las coloca así tiene el mismo volumen (voltea las fichas de todas las maneras).</p> <p>E5. Si uno las coloca así también tiene el mismo tamaño y el mismo volumen.</p>	<p>E5 y E6 no reconocen que las figuras son de diferente volumen, pues al momento de percibir las características de los objetos se centran en que sean del mismo tamaño y afirman que al cambiar la posición de estas figuras también se conservan el mismo volumen, pero no observa la variante de que una de las ficha está hueca.</p>

Prueba 2d

E	Diálogo entre estudiantes e investigador	Dificultades de los estudiantes en la prueba.
E1 y E2	<p>P: Si yo coloco estas fichas así (coloca la ficha fucsia acostada y la rosada parada).</p> <p>E2: Si esta (toca la rosada) queda más grande que esta (toca la fucsia).</p> <p>P: ¿Cuál queda más grande?</p> <p>E2: Esta (toca la figura rosada).</p> <p>P: La rosada está más alta ¿Pero, las figuras tienen el mismo o diferente volumen?</p> <p>E1, E2: Mismo volumen (responden a la vez).</p> <p>P: ¿Porque tienen el mismo volumen?</p> <p>E2: Porque los paró y quedan del mismo volumen.</p> <p>E1: Pero no son del mismo color.</p> <p>P: No son del mismo color, pero si yo las volteo ¿quedan del mismo o diferente volumen?</p> <p>E2: Quedan de diferente volumen.</p> <p>E1: Este (el fucsia) queda más grueso que esté (el rosado). Este (el rosado) queda más alto y el otro más grueso</p> <p>E2: No, yo digo que no porque esta (el rosado) de acá es más alta y está (el fucsia) de acá es más pequeña.</p> <p>P: ¿Quedan del mismo volumen?</p> <p>E2: no quedan del mismo volumen porque este está acostado y la otra está parada.</p> <p>P: Si las coloco así (una ficha parada y otra acostada) ¿quedan del mismo volumen?</p> <p>E1: De diferente volumen.</p> <p>P: ¿Por qué?</p> <p>E1:Porque este (el fucsia) está más grueso que esté (el rosado) porque este (el rosado) está más alto que esté (el fucsia)</p>	E1 y E2 no reconoce que el cambio de posición en una figura no cambia el volumen de esta.
E3 y	P: ¿Qué dicen si las coloco así? (coloca una ficha	E3 y E4 no reconoce que

E4	<p>levantada y otra acostada) ¿Tienen el mismo o diferente volumen?</p> <p>E3: Diferente volumen, porque esta (toca la rosada) está abajo y esta (toca la fucsia) está arriba).</p> <p>P: ¿Tu que dices que cambian de volumen o siguen siendo del mismo volumen?</p> <p>E4: Cambian de volumen.</p> <p>P: ¿Por qué?</p> <p>E4: Porque este (el fucsia) está más pequeño que este (el rosado).</p>	el cambio de posición en una figura no cambia el volumen de esta.
E5 y E6	<p>E5: Si uno los acuesta siguen del mismo tamaño.</p> <p>E6: Si uno los coloca así, este queda más abajo y este más alto (volteo las figuras, acostó una y dejo parada la otra).</p> <p>P: ¿si quedan así que pasa? (una ficha está acostada y la otra está parada).</p> <p>E6: Este queda más alto que este.</p> <p>P: ¿Pero, quedan con el mismo volumen?</p> <p>E6: Si, con el mismo volumen, porque si uno acuesta este también queda del mismo volumen.</p> <p>P: ¿ Si las coloco así, quedan con el mismo volumen ? (las figuras estaban acostadas).</p> <p>E6: Si.</p> <p>P: ¿así ? (levanta una figura y acuesta la otra).</p> <p>E6: Siguen siendo del mismo volumen por que tienen las mismas ficha.</p> <p>P: ¿ Quedan del mismo o diferente volumen (señala a E5, en cuanto a las figuras que se encontraban acostadas).</p> <p>E5: Quedan del mismo volumen.</p> <p>P: ¿Por qué ?</p> <p>E5: Porque este (agarró la figura azul) sigue teniendo más volumen que este (señalo la figura naranja).</p> <p>P: ¿ Este sigue teniendo más volumen que este ? (señaló primero la ficha azul y luego la ficha naranja).</p> <p>E5: Los dos tienen el mismo volumen, si los para así, también tienen el mismo volumen (levantó las dos figuras). Todos dos tienen el mismo volumen.</p> <p>P: ¿Si la acuesto así quedan del mismo volumen? (cuesta la ficha azul).</p> <p>E5: Del mismo volumen.</p>	E5 y E6 no reconoce que el cambio de posición en una figura no cambia el volumen de esta.

Prueba 3

E	Diálogo entre estudiantes e investigador	Dificultades de los estudiantes en la prueba.
E1	P: Resulta que yo le preste esta pelota a una amiga, ella se la llevó a un lugar muy lejos y después mucho tiempo ella la trajo ¿será que la pelota todavía cabe en la caja? (se escucha un eco por parte de los estudiantes que dice "si")	Los estudiantes en general reconocen que el volumen de un objeto conserva algunas propiedades como la de que este no cambia por efectos de la distancia y el tiempo, a menos que le ocurra un cambio físico a dichos objetos.
E2	E6: Porque ella no va crecer.	
E3	E3: Porque la caja es más ancha y la pelota no va creciendo, la pelota sigue siendo la misma.	
E4	E2: Lo que pasa es que ella se va acabando y se va volviendo vieja, pero el volumen sigue siendo lo mismo.	
E5	E3. Pero si ella se va dañando, se parte. E6: Pero si uno la pisa, se parte.	
E6	P: Si la piso, ¿cabe en la caja? E5: Cabe, pero partida. P: ¿El volumen de la pelota cambia cuando pasa el tiempo? E2: Lo que único que cambia es que se vuelve vieja. E3: No cabe, pero si se daña la caja. P: Si yo me llevo la caja para otro lugar y vuelvo a meter la pelota en la caja. ¿Cabe la pelota en la caja? (el estudiante responde al tiempo). E: Pero si es algo muy pequeño. E2: Si es algo pequeño, no cabe. Pero si es algo grande si cabe. (Los estudiantes señalan con las manos la forma del objeto donde debe ir la pelota, haciendo un círculo con sus dedos).	

Prueba 4a

E	Diálogo entre estudiantes e investigador	Dificultades de los estudiantes en la prueba.

E5K	<p>P: La siguiente prueba consta de dos partes:</p> <p>Primero van a construir dos esferas del mismo volumen con plastilina, luego con una de ellas van a construir un salchichón. ¿Los dos cuerpos tienen igual o diferente volumen?</p> <p>E5K: El mismo volumen, así que las cambien o las dañen son del mismo volumen.</p>	E5K reconoce que dos objetos son de igual volumen así al cuerpo se le cambie la forma, pues se conserva la masa de que está hecho el objeto.
E2K	E2K: Son de igual volumen porque aunque lo hayan hecho así, tienen el mismo volumen, solo que el otro era una bolita y este es un salchichón.	E2K reconoce que dos objetos son de igual volumen así al cuerpo se le cambie la forma.
E3	E3: Son del mismo volumen porque no quitamos plastilina.	E3 reconoce que dos objetos son de igual volumen así al cuerpo se le cambie la forma, se conserva la masa de que está hecho el objeto.
E4	E4: Igual volumen, porque las dos eran una bola y forme un salchichón.	E4 reconoce que dos objetos son de igual volumen así al cuerpo se le cambie la forma.
E1	E1: Son de diferente volumen, porque este es más gordo que el otro.	E1 no reconoce que dos objetos que tienen igual volumen, al cambiar de forma conservan el mismo volumen.
E6	E6: Igual volumen porque primero estaban las dos y yo las aplaste, pero siguen siendo del mismo volumen.	E6 reconoce que dos objetos son de igual volumen así al cuerpo se le cambie la forma.

Prueba 4b

E	Diálogo entre estudiantes e investigador	Dificultades de los estudiantes en la prueba.
E5K	<p>P: Observen lo que voy a hacer (coge dos pedazos de plastilinas con forma rectangular del mismo volumen y corta uno de ellos en cuatro partes y luego los une) ¿Los dos nuevos cuerpos ocupan el mismo o diferente volumen?</p>	<p>E5K asocia que el volumen del cuerpo depende de la forma.</p> <p>E5K no reconoce que al</p>

	<p>E5K: Diferente porque mire que este es así como redondeado y este es derechito.</p> <p>P: ¿Tu cual crees que tiene menos volumen?</p> <p>E5K: Este (señala la plastilina que está cortado en varias partes).</p>	<p>descomponer un cuerpo y unir cada una de sus partes este conserva su mismo volumen.</p>
E2K	<p>E2K: Igual porque, aunque lo hayan cortado tiene el mismo volumen, porque este y este son lo mismo. Solo que este lo pusieron mal (Señala la plastilina que está cortado en varias partes).</p>	<p>E2K asocia que el volumen de los cuerpos no depende de la forma.</p> <p>E2K reconoce que al descomponer un cuerpo y unir cada una de sus partes esta conserva su mismo volumen.</p>
E3	<p>E3: Este tiene menos y este tiene más (señala primero la plastilina de forma rectangular y luego la que está partido en pedazos), porque este es más grueso y este es mal delgado (señala primero que está partido en pedazos y luego de forma rectangular).</p>	<p>E3 relaciona que el objeto que está partido en pedazos es más grueso que el original, por lo tanto, tiene más volumen.</p> <p>E3 no reconoce que al descomponer un cuerpo y unir cada una de sus partes esta conserva su mismo volumen.</p>
E4	<p>E4: El mismo volumen porque este es igual que este. (Señala primero la plastilina de forma rectangular y luego la que está partido en pedazo).</p>	<p>E4 reconoce que al descomponer un cuerpo y unir cada una de sus partes este conserva su mismo volumen.</p>
E1	<p>E1: Diferente volumen porque este está más delgadito que este. (señala primero la plastilina de forma rectangular y luego la que está partido en pedazo).</p>	<p>E1 relaciona que el objeto que está partido en pedazos es más grueso que el original, por lo tanto, tiene más volumen.</p> <p>E1 no reconoce que al descomponer un cuerpo y unir cada una de sus partes</p>

		esta conserva su mismo volumen.
E6	E6: El mismo volumen porque aunque le hayan cambiado de forma siguen del mismo volumen.	E6 reconoce que al descomponer un cuerpo y unir cada una de sus partes este conserva su mismo volumen.

Prueba 5

E	Diálogo entre estudiantes e investigador	Concepciones y dificultades de los estudiantes en la prueba.
E5K	<p>P: Tenemos dos objetos, los van a observar y tocar (muestra dos objetos de igual forma y volumen, uno es de color blanco y textura lisa totalmente y el otro es de color rojo con blanco y la textura de la parte externa es rugosa y se los pasa a los estudiantes) ¿Los objetos tienen igual o diferente volumen?</p> <p>E1K: Tienen diferente volumen, porque creo que uno es más alto que el otro (compara los objetos).</p>	<p>E1K asocia el concepto de volumen a la altura del objeto y realiza procesos de estimación de medida.</p> <p>E1K ningún momento de la prueba percibe la textura y como una variable que no afecta el volumen de los objetos.</p>
E2K	<p>E2K: Igual volumen porque estos son iguales solo que de otro color.</p> <p>P: ¿Iguales en qué sentido?</p> <p>E2K: porque este, aunque este así, son los mismo que este (señala primero el objeto blanco y luego el rojo).</p>	<p>E2K reconoce que los dos objetos son de igual volumen y que el color no es una variable que incide en el volumen de los objetos.</p> <p>E2K en ningún momento de la prueba argumenta que la textura y el color sean una variable que afecta el volumen de los objetos.</p>
E3	E3: Iguales, porque son iguales y no tienen menos volumen (toca los objetos).	E3 reconoce que los dos objetos son de igual volumen y validar sus argumentos a partir de la comparación entre objetos.

		E3 en ningún momento de la prueba percibe la textura y el color como una variable que afecta el volumen de los objetos.
E4	E4: Igual volumen porque este es igual que este (mete la mano dentro de la parte hueca de los objetos y los compara), porque este es más gordo y esté un poquito flaco (señala primero el objeto rojo y luego el blanco).	E4 compara el volumen de objetos teniendo en cuenta la percepción de la parte hueca de los objetos. E4 en ningún momento de la prueba percibe la textura y el color como una variable que afecta el volumen de los objetos.
E1	E5: Son de igual volumen, porque este es más gordo que el otro (señala primero el blanco y luego el rojo).	E1 se le dificultad reconocer cuando dos objetos son de igual volumen debido a que piensa que dos objetos son de igual volumen si son de diferente ancho. E1 en ningún momento de la prueba percibe la textura como una variable que no afecta el volumen de los objetos.
E6	E: Son de diferente volumen, porque este está un poquito más alto (señala el objeto rojo).	E6 asocia el concepto de volumen a la altura del objeto. E6 en ningún momento de la prueba percibe la textura y el color como una variable que no afecta el volumen de los objetos.

Prueba 6

E	Diálogo entre estudiantes e investigador	Dificultades de los
---	--	---------------------

		estudiantes en la prueba.
E5K	<p>P: Observen para la siguiente prueba tenemos estos dos recipientes, uno lleno de granos de maíz y el otro vacío. ¿estos dos recipientes ocupan el mismo volumen?</p> <p>E5K. Tienen el mismo volumen porque mira si este fuera más alto y este mas chiquito no serían del mismo volumen (coloca un recipiente encima del otro), ocupa el mismo volumen porque es igualito, así le mermen ocupan el mismo volumen.</p>	<p>E5K asocia el concepto de volumen al tamaño de los objetos y realiza comparaciones entre los dos recipientes.</p> <p>E5K identifica que la cantidad de masa de que hay dentro de un recipiente no afecta el volumen que este ocupa.</p>
E2K	<p>E2K: El mismo volumen si no que este lo llenaron y este no (señala el recipiente lleno de maíz y el recipiente vacío), pero si no lo hubieran llenado ocupan el mismo volumen.</p> <p>P: Si está así ¿ocupan el mismo volumen o diferente?</p> <p>E2k: Ocupan el mismo volumen.</p>	<p>E2 identifica que la cantidad de masa de que hay dentro de un recipiente no afecta el volumen que este ocupa.</p>
E3	<p>E3: El mismo volumen porque lo mismo que cabe en este acá, cabe acá.</p>	<p>E3 realiza comparaciones entre la cantidad de masa que cabe entre un recipiente y otro, a partir de procesos de percepción.</p>
E4	<p>E4: No ocupan el mismo volumen, porque este está lleno y este está vacío (señala primero el recipiente que tiene maíz y luego el recipiente vacío).</p>	<p>E4 no identifica que la cantidad de masa de que hay dentro de un recipiente no afecta el volumen que este ocupa.</p>
E1	<p>E1: Ocupan el mismo volumen, porque si este no lo hubieran llenado ocupan el mismo volumen.</p> <p>P: ¿Pero así ocupan el mismo volumen o diferente volumen?</p> <p>E1: Igual volumen.</p> <p>P: ¿Porque?</p> <p>E1: Porque este, está más lleno que el otro (señala el recipiente lleno de maíz).</p>	<p>E1 identifica que la cantidad de masa de que hay dentro de un recipiente no afecta el volumen que este ocupa.</p>

E6	E6: Igual volumen, porque este tiene la misma textura, color y también si este lo llenamos sigue siendo del mismo volumen, sigue siendo del mismo ancho y largo.	E6 en este caso específico asocia el volumen de un objeto a la igualdad de la textura, color y tamaño del objeto. E6 identifica que la cantidad de masa de que hay dentro de un recipiente no afecta el volumen que este ocupa.
----	--	--

Prueba 7

E	Diálogo entre estudiantes e investigador	Dificultades de los estudiantes en la prueba.
E1 y E2	<p>P: La siguiente actividad consiste en llenar la mitad de esta caja con estos cubos. Tiene que quedar exacta, no les puede faltar, ni sobrar. ¿Cuáles utilizarían ustedes para llenar esta caja?</p> <p>E2: Una pregunta ¿de un solo color o de varios?</p> <p>P: Puedes escoger los que tú quieras, pero tienes que decirme. Con estos cubos se llena la mitad de esta caja. Pueden medir así (mete dos cubos a la caja) solamente pueden meter de a dos fichas dentro de la caja. Entonces, ¿cuáles son los que necesitamos para llenar la mitad de la caja?</p> <p>E2: (E1 y E2 buscan las fichas) ¿Con estos profes?</p> <p>P: ¿Con estos puedes llenar la mitad de la caja?</p> <p>E2: ¿Así? (señala la parte inferior de la caja) o ¿hasta arriba?</p> <p>P: La mitad de la caja. Para ti ¿qué es la mitad de la caja?</p> <p>E2: Dónde está la raya.</p> <p>P: ¿Puedes llenar la mitad de la caja con esas fichas?</p> <p>E2: Hasta acá (señala el borde de la caja y busca nuevas fichas).</p> <p>P: Con esas fichas, ¿llenas la mitad de la caja?</p>	E1 y E2 aunque reconocen que significa llenar la mitad de la caja, no realizan el proceso completo para llenar la totalidad de la mitad de la caja porque no realizan procesos de estimación y medición.

<p>E2: Sí creo.</p> <p>P: Miremos a ver.</p> <p>E2: (Coloca las fichas dentro de la caja).</p> <p>P: ¿Llenaste la mitad de la caja?</p> <p>E2: No.</p> <p>P: Entonces, ¿cuáles crees que faltan?</p> <p>E2: Faltan dos.</p> <p>P: ¿cuáles? Coloca las que tu creas hagan falta.</p> <p>E2: Ya (agarro tres fichas más).</p> <p>P: ¿Con esas?</p> <p>E2: (empieza a acomodar las fichas dentro de la caja)</p> <p>E2: Así profe.</p> <p>P: ¿Qué pasó? ¿Llenaste la mitad de la caja?</p> <p>E2: No.</p> <p>P: ¿Qué le faltó?</p> <p>E2: Me faltó poner aquí (toca una parte de la caja y empieza a buscar más fichas) Estos chiquitos (agarra varias fichas pequeñas, y mide una en la caja)</p> <p>E1 y E2: (Empiezan a acomodar las fichas dentro de la caja)</p> <p>P: ¿quedó llena la mitad de la caja? ¿Tú que dices? (señaló a E1)</p> <p>E1: Sí.</p> <p>P: ¿Por qué quedó llena?</p> <p>E1: (Voltea a ver a E2).</p> <p>E2: No, no quedó llena.</p> <p>P: ¿Tu que dices quedó llena la caja? (señaló a E2).</p> <p>E2: (Mueve la cabeza diciendo que no).</p> <p>P: ¿Por qué?</p> <p>E2: Porque falta aquí poner de estos bloques hasta arriba (señala una parte de la caja que las fichas quedan en la</p>	
---	--

	<p>parte de abajo).</p> <p>P: ¿Hasta dónde?</p> <p>E2: Hasta acá (sube su mano hasta el final de la caja), hasta dónde están estos (toca las fichas grandes) y toca ponerle de estos chiquitos así (agarra una ficha pequeña y la pone encima de las fichas grandes)</p> <p>P: entonces, ¿cuántos necesitamos para llenar la caja?</p> <p>E1 y E2 (Empiezan a buscar las fichas y proceden a meterlas dentro de la caja)</p> <p>E2: ¡Ayúdeme Wendy! (señaló a E1)</p> <p>E2 Y E1: (acomodan las fichas dentro de la caja)</p> <p>E2: ya</p> <p>P: ¿quedó llena la mitad de la caja?</p> <p>E2: Sí</p> <p>P: ¿Tu que dices quedó llena la mitad de la caja? (señaló a E1)</p> <p>E1: Si (mueve la cabeza de arriba a abajo)</p> <p>P: ¿por qué dicen que quedo llena?</p> <p>E2: Quedó llena porque pusimos de estos chiquitos hasta acá y dejamos aquí completo y antes nos pasamos (tocando el final de la parte alta de la caja).</p>	
E3 y E4	<p>P: Necesitamos llenar la mitad de esta caja, ósea de la línea para allá. Entonces, me van a decir ¿cuantos o cuales cubos necesitamos para llenar esta caja? Si necesitan medir, sólo pueden meter de a dos fichas en la caja.</p> <p>E3: (Organiza las fichas en la caja, metió 3 fichas).</p> <p>P: Metiste 3 fichas y no puedes meter 3 (le saca una ficha). Solo puedes meter de a dos fichas.</p> <p>E4: Metió 3 fichas.</p> <p>P: No, saca estos dos y mete otras dos. Tienen que calcular con cuántos cubos se llena la caja. Ustedes tienen que colocar los cubos acá y decirme “profe con estos se llena la mitad de la caja”.</p> <p>E3 y E4: (Escogen las fichas).</p>	E3 y E4 aunque reconocen que significa llenar la mitad de la caja, no realizan el proceso completo para llenar la totalidad de la mitad de la caja porque no realizan procesos de estimación y medición.

<p>E4: Con estos.</p> <p>P: ¿Está segura que con esos llenas la caja?</p> <p>E4: si (mueve la cabeza de arriba a abajo).</p> <p>E5: Si.</p> <p>P: ¿Seguros?</p> <p>E4 Y E5: Si.</p> <p>P: Listo, vamos a medir.</p> <p>E3 y E4: (Proceden a meter las fichas a la caja).</p> <p>P: ¿Se llenó la mitad de la caja? También habían dicho que, con esta ficha, ¿qué va hacer con esta? (una ficha quedó fuera de la caja).</p> <p>E3: (Se dirige a coger otras fichas).</p> <p>P:(La profe lo detiene) Esperen, ustedes me habían dicho que con estas fichas se llenaba la mitad de la caja. ¿se llenó la mitad de la caja?</p> <p>E4: No.</p> <p>P: ¿Sobró, faltó o que pasó?</p> <p>E4: Sobró este (agarra la ficha que no metieron en la caja).</p> <p>P: ¿Está llena la mitad de la caja?</p> <p>E3: No, le faltan.</p> <p>P: ¿Qué le falta?</p> <p>E3: Falta llenar hasta esta línea (la que divide mitad de la caja). Aquí faltan fichas.</p> <p>P: ¿Y qué más?</p> <p>E4: Le falta acá arriba (toca la parte alta de la caja)</p> <p>P: ¿Falta arriba para llenarla?</p> <p>E4: Si.</p> <p>P: ¡Ah bueno! entonces ¿cuáles fichas faltan para llenar la mitad de la caja?</p> <p>E3 y E4: (Empiezan a buscar de nuevo fichas).</p> <p>P: Es la última oportunidad, piensen bien.</p>	
--	--

	<p>E3 y E4: (Terminan de escoger las fichas).</p> <p>P: ¿Con esas?</p> <p>E3: Sí.</p> <p>P: Midan.</p> <p>E3 y E4: Meten las fichas a la caja. ¡Falta uno! (señaló E3)</p> <p>P: ¿Qué van hacer con este? (uno de los cubos escogidos no fue metido a la caja)</p> <p>E4: (Agarra la ficha y se queda pensando mientras la mueve).</p> <p>P: ¿Quedó llena la mitad de la caja?</p> <p>E3: No, le falta un poquito.</p> <p>P: ¿Qué le falta?</p> <p>E3: Aquí (señala una esquina de la caja).</p> <p>E3 y E4: (Organizan las fichas).</p> <p>P: ¿Ahí ya quedó llena la mitad de la caja?</p> <p>E3 y E4: Si.</p> <p>P: ¿Por qué?</p> <p>E3: Porque ya cubrió esto (muestra la caja)</p> <p>P: ¿Esta parte de arriba hay que llenarla?</p> <p>E3 y E4: Si.</p> <p>P: Entonces ¿por qué me dijeron que ya estaba llena?</p> <p>E3 y E4: (Se quedan pensando).</p> <p>P: ¿está llena la caja?</p> <p>E3: Todavía no, porque le falta arriba.</p>	
E5 y E6		E5 y E6 aunque reconocen que significa llenar la mitad de la caja, no realizan el proceso completo para llenar la totalidad de la mitad de la caja porque no realizan procesos de

		estimación y medición.
--	--	------------------------

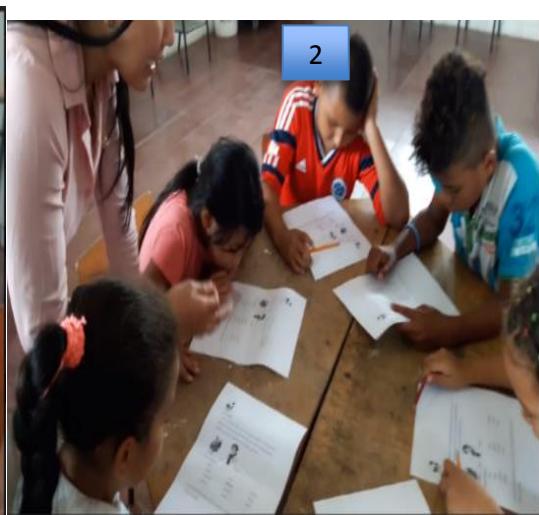
Prueba 8

E	Diálogo entre estudiantes e investigador	Dificultades de los estudiantes en la prueba.
E5K	<p>P: Tengo aquí los siguientes recipientes, van a observar lo que voy hacer (mostró a los cuatro recipientes de igual capacidad, dos vasos totalmente iguales y dos de diferente forma, uno ancho y el otro delgado. Llenó de agua los dos vasos y luego vació cada uno de ellos en los otros dos recipientes). Después de haber observado van a responder lo siguiente: ¿los recipientes ocupan el mismo o diferente volumen?</p> <p>E5K: No tienen el mismo volumen, pues mire que este ocupa más agua (señala el recipiente delgado y alto), y este casi no (señala el recipiente ancho y bajo) porque este es más ancho (señala el recipiente delgado y alto). No ocupa el mismo volumen porque este es redondo y este es parado.</p>	<p>E5k asocia que la capacidad del recipiente depende del tamaño y forma, especifica que el recipiente más alto y delgado tiene más capacidad. afirma que uno de los recipientes si ocupa más agua, pero en su justificación no lo afirma porque vea el nivel más alto del agua si no que alude al alto y forma del recipiente.</p> <p>E5K presenta dificultad al asociar un cuerpo alto como sinónimo a un ancho.</p>
E2K	Diferente volumen porque este es más delgado y este es como un poquito grueso, este es más pequeño solo que este no se llenó, este tampoco se llenó, pero este ocupa más agua y este casi no (señala primero el recipiente delgado y alto; luego el ancho y bajo).	E2K asocia que la capacidad depende de lo delgado, pequeño y grueso del recipiente y por ende observa un nivel de agua más alto. Aunque ambos recipientes no estén totalmente llenos, E2K especifica que el recipiente más delgado tiene más capacidad.

E3	Ocupan el mismo volumen porque usted le hecho el vaso de agua y le cambio a este también entonces ocupa el mismo volumen.	E3 reconoce que ambos recipientes aunque son diferentes ocupan el mismo volumen porque tiene la misma capacidad de líquido.
E4	No ocupa el mismo volumen porque este está más lleno que este (señala primero el recipiente delgado y alto; luego el ancho y bajo).	E4 asocia que el recipiente más delgado tiene más capacidad porque ve un nivel de agua más alto.
E1	Diferentes porque este es más gordo que el otro (señala primero el recipiente ancho y bajo; luego el delgado y alto).	E1 asocia que el recipiente más ancho y bajo tiene más capacidad.
E6	El mismo porque usted los tenía en el vaso y luego los hecho y cupo; y como este es más largo no importa porque cupo aquí y cupo acá.	E6 reconoce que ambos recipientes aunque son diferentes ocupan el mismo volumen porque tiene la misma capacidad de líquido.

10.3 Anexo C: Imágenes de las pruebas a estudiantes

Prueba 1.



3



ACTIVIDAD 1

1. Si tienes la siguiente oración : (Kely es más gorda que Pamela) y se quiere cambiar la palabra gorda por una palabra que represente los mismo ¿Cuál de las siguientes palabras elegirías? Encierra con un círculo dos de ellas y justifica tu elección.

Porque Bulto Sale con Grueso

Listado de palabras:

Bulto	Espacio	Extensión
Cuerpo	Magnitud	volumen
Corpulencia	Dimensión	Grueso
Capacidad	Cavidad	

2. Del anterior listado de palabras, ¿Cuál tu crees que le cambia el significado a la oración?
Justifica tu respuesta.

cuerpo Porque KELY quiere tener el Cuerpo que Pamela

4



ACTIVIDAD 1

1. Si tienes la siguiente oración : (Kely es más gorda que Pamela) y se quiere cambiar la palabra gorda por una palabra que represente los mismo ¿Cuál de las siguientes palabras elegirías? Encierra con un círculo dos de ellas y justifica tu elección.

por que KELY es mas gorda que PAMELA

Listado de palabras:

Bulto	Espacio	Extensión
Cuerpo	Magnitud	volumen
Corpulencia	Dimensión	Grueso
Capacidad	Cavidad	

2. Del anterior listado de palabras, ¿Cuál tu crees que le cambia el significado a la oración?
Justifica tu respuesta.

cuerpo *cuerpo no tiene nada que basta gorda*
que Pamela

5



ACTIVIDAD 1

1. Si tienes la siguiente oración : (Kely es más gorda que Pamela) y se quiere cambiar la palabra gorda por una palabra que represente los mismo ¿Cuál de las siguientes palabras elegirías? Encierra con un círculo dos de ellas y justifica tu elección.

Listado de palabras:

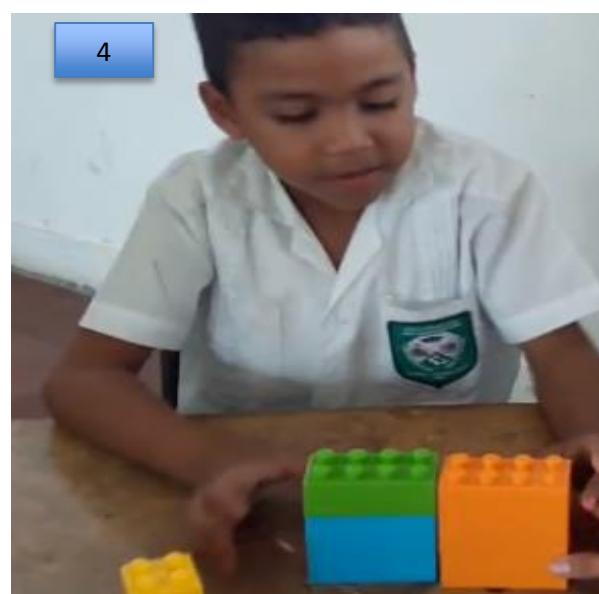
Bulto	Espacio	Extensión
Cuerpo	Magnitud	volumen
Corpulencia	Dimensión	Grueso
Capacidad	Cavidad	

2. Del anterior listado de palabras, ¿Cuál tu crees que le cambia el significado a la oración?
Justifica tu respuesta.

el Cuerpo *el Cuerpo no tiene nada que basta gorda*

Prueba 2





Prueba 3



Prueba 4



Prueba 5



Prueba 6



Prueba 7





Prueba 8

