



LA FUNCIÓN CUADRÁTICA DESDE EL ENFOQUE DEL APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS

JENNIFER CAMACHO TOBAR

CÓDIGO: 201429534

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
OCTUBRE, 2019



LA FUNCIÓN CUADRÁTICA DESDE EL ENFOQUE DEL APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS

JENNIFER CAMACHO TOBAR

CÓDIGO: 201429534

DIRECTOR DE TRABAJO DE GRADO

LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO

Profesora del Área de Educación Matemática

Instituto de Educación y Pedagogía

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI

OCTUBRE, 2019

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, a ***Dios*** por ponerme en el lugar donde me encuentro ahora, por guiarme a lo largo del camino y ser mi apoyo y fortaleza en aquellos momentos difíciles.

A mis padres; ***Jesus Maria Camacho y Emna Patricia Tobar***, que son mi mayor impulso a conseguir este título, pues a ellos les debo por todos sus esfuerzos para que hoy en día sea una profesional.

A mi esposo, ***Norbey Camilo Lopez***, por apoyarme, motivarme y ayudarme en este largo camino y tenerme la paciencia suficiente en los vaivenes que se presentaron en este sendero.

A mi hija, ***Victoria Lopez Camacho***, pues es ella mi mayor motivación para ser una profesional.

A mi hermana y mi cuñado, ***Jhohana Camacho Tobar y Cristian Alejandro Chalacan***, porque siempre me estuvieron motivando e impulsando a terminar este proyecto para ser una profesional.

A la profesora y tutora, ***Ligia Amparo Torres Rengifo***, quien ha confiado en mí y ha decidido dedicar su tiempo y compartir sus conocimientos para acompañarme y orientarme en la consolidación de este trabajo y en la formación como docente.

Finalmente, agradezco a todas las personas que estuvieron presentes en este largo camino, quienes me impulsaron y apoyaron en este proceso, quienes me ayudaron cuando más lo necesité, especialmente, agradezco a mi amigo ***Harvy Santiago Peña*** por sus alientos y motivación para terminar este proyecto.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN.....	I
INTRODUCCIÓN.....	III
1 Capítulo. Aspectos generales de la investigación.....	1
1.1 Presentación de la problemática.....	1
1.2 Objetivos	4
1.2.1 Objetivo General.....	4
1.2.2 Objetivos Específicos.....	4
1.3 Justificación.....	5
1.4 Antecedentes de investigación	8
1.4.1 Trabajos e investigaciones sobre Función cuadrática.....	8
1.4.2 Trabajos e investigaciones sobre la Metodología del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP).....	13
1.4.3 Aportes de los Antecedentes al Trabajo de Grado.....	16
2 Capítulo. Marco de referencia conceptual	18
2.1 Perspectiva didáctica.....	18
2.1.1 Algunas dificultades asociadas a la enseñanza y el aprendizaje de la Función Cuadrática.....	19
2.1.2 La Metodología del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP).....	21
2.1.3 Algunos aspectos sobre la Modelación.....	27
2.2 Perspectiva curricular.....	29
2.2.1 Desde los Lineamientos Curriculares.....	30
2.2.2 Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.....	35
2.2.3 Derechos Básicos de Aprendizaje.....	40
2.3 Perspectiva matemática.....	41
2.3.1 Algunos aspectos formales del Concepto de Función.....	42
2.3.2 Características de una Función $f(x)$	43
2.3.3 Algunos aspectos del concepto de Función cuadrática.....	48
2.4 Aspectos metodológicos.....	52
2.4.1 Fases.....	53

2.4.2	Enfoque del proyecto.	54
3	Capítulo. La función cuadrática en el contexto de la Institución Educativa Villacarmelo.....	56
3.1	Sobre la determinación del contenido del proyecto.	56
3.1.1	Encuesta A Los Estudiantes:.....	56
3.1.2	Entrevista semiestructurada realizada al coordinador académico de la Institución Educativa Villacarmelo – Sede Cacique Calarcá.	65
3.2	Sobre el diseño del proyecto	70
3.3	Sobre el Proyecto	71
3.3.1	Descripción del proyecto.	71
3.3.2	Puesta en acción.....	72
3.4	Institución beneficiada	78
3.4.1	Localización de la IEO Villacarmelo, sede: Cacique Calarcá.	79
3.4.2	Población y Muestra.	80
3.5	Descripción y análisis de los resultados.....	81
3.5.1	(S1) Situación 1: el fútbol en el tiempo	81
3.5.2	(S2) Situación 2: Organización de Torneo Interclase 2019	120
4	Conclusiones y algunas reflexiones finales	171
4.1	Conclusiones Generales	171
4.2	Algunas reflexiones didácticas.....	177
4.3	Proyecciones para futuros investigadores	179
5	Referencias bibliográficas.....	180
6	Anexos.....	185
6.1	Anexo 1: Aprendiendo La Función Cuadrática en el Contexto del Fútbol.....	185
6.2	Anexo 2: Esquemas presentados en la S2T1P3	202
6.3	Anexo 3: Folletos promocionales elaborados en la S2T5P1	204

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla I.	Contraste de los Beneficios y Dificultades de la Metodología ABP.....	24
Tabla II.	X vs. Y	45
Tabla III.	Tipos de repuesta pregunta 1 de la encuesta.....	56
Tabla IV.	Tipos de repuesta pregunta 2 de la encuesta.....	57

Tabla V. Tipos de repuesta pregunta 3 de la encuesta.....	58
Tabla VI. Tipos de repuesta pregunta 4 de la encuesta.....	59
Tabla VII. Tipos de repuesta pregunta 5 de la encuesta	59
Tabla VIII. Tipos de repuesta pregunta 10 de la encuesta.....	60
Tabla IX. Tipos de repuesta pregunta 6 de la encuesta.....	61
Tabla X. Tipos de repuesta pregunta 8 de la encuesta.....	62
Tabla XI. Tipos de repuesta pregunta 11 de la encuesta.....	64
Tabla XII. Roles en el ABP	73
Tabla XIII. Roles en el ABP.....	74
Tabla XIV. Roles en el ABP.....	74
Tabla XV. Roles en el ABP	75
Tabla XVI. Roles en el ABP.....	76
Tabla XVII. Roles en el ABP	77
Tabla XVIII. Roles en el ABP	77
Tabla XIX. Valor del mercado de James Rodríguez	105
Tabla XX. Valor del mercado de Radamel Falcao	105
Tabla XXI. Tipos de respuesta S2T2P1.....	126
Tabla XXII. Tipos de respuesta S2T2P2a.....	127
Tabla XXIII. Tipos de respuesta S2T2P2(b, c).....	127
Tabla XXIV. Tipos de respuesta S2T2P2(d, e)	128
Tabla XXV. Tipos de respuesta S2T2P3a	129
Tabla XXVI. Tipos de respuesta S2T2P2b.....	130
Tabla XXVII. Tipos de respuesta S2T2P4b	132
Tabla XXVIII. Tipos de respuesta S2T2P5(a, b).....	134
Tabla XXIX. Tipos de respuesta S2T2P6a.....	135
Tabla XXX. Tipos de respuesta S2T2P6b	135
Tabla XXXI. Tipos de respuesta S2T2P8.....	137
Tabla XXXII. Tipos de respuesta S2T3P2a.....	143
Tabla XXXIII. Tipos de respuesta S2T3P2b	143
Tabla XXXIV. Tipos de respuesta S2T3P3.....	145
Tabla XXXV. Tipos de respuesta S2T3P5	147
Tabla XXXVI. Tipos de respuesta S2T4P1	150
Tabla XXXVII. Tipos de respuesta S2T4P2.....	150
Tabla XXXVIII. Tipos de respuesta S2T4P3	153
Tabla XXXIX. Ejemplo 3 S2T4P4.....	154
Tabla XL. Ejemplo 3 S2T4P4.....	154
Tabla XLI. Ejemplo 3 S2T4P5	155
Tabla XLII. Ejemplo 3 S2T4P6.....	156
Tabla XLIII. Tipos de respuesta S2T4P7	157
Tabla XLIV. Tipos de respuesta S2T4P8	158

Tabla XLV. Tipos de respuesta S2T4P9.....	159
Tabla XLVI. Tipos de respuesta S2T4P10	159
Tabla XLVII. Tipos de respuesta S2T4P11	160
Tabla XLVIII. Tipos de respuesta S2T4P12.....	161
Tabla XLIX. Tipos de respuesta S2T4P13	162
Tabla L. Tipos de respuesta S2T4P13a.....	163
Tabla LI. Tipos de respuesta S2T4P13b	164
Tabla LII. Mundiales de Futbol desde 1930 hasta 2018	188
Tabla LIII. Mundiales consecutivos desde 1950 hasta el 2018	189
Tabla LIV. Valor del mercado de James Rodríguez.....	193
Tabla LV. Valor del mercado de Radamel Falcao.....	193
Tabla LVI. Promedio del Valor del mercado de James Rodríguez	191
Tabla LVIII . Promedio del Valor del mercado de Radamel Falcao	191
Tabla LVIII. Valor del mercado de 4 jugadores de fútbol.....	192
Tabla LIX. Relación precio vs cantidad vendida de uniformes.....	194
Tabla LX. Relación Precio de venta vs. Ganancias de la venta de los uniformes	197

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Dos ejemplos de ejercicios que involucran la Resolución de problemas	33
Ilustración 2. Ejemplos de ejercicios que involucran la modelación.....	34
Ilustración 3. Tipos de repuesta pregunta 10 de la encuesta.....	60
Ilustración 4. Tipos de repuesta pregunta 10 de la encuesta.....	60
Ilustración 5. Tipos de repuesta pregunta 7 de la encuesta.....	62
Ilustración 6 Tipos de repuesta pregunta 9 de la encuesta.....	63
Ilustración 7. Tipos de repuesta pregunta 12 de la encuesta.....	65
Ilustración 8. Ubicación corregimiento Villacarmelo.....	79
Ilustración 9. Ubicación de la Institución Educativa Villacarmelo - Sede Cacique Calarcá.....	79
Ilustración 10. ejemplo de respuesta S1T2P5	91
Ilustración 11. ejemplo de respuesta S1T2P5g	95
Ilustración 12. ejemplo de respuesta S1T2P5g	96
Ilustración 13. Ejemplo 1 de la respuesta de la S1T2P5a.....	98
Ilustración 14. Ejemplo 2 de la respuesta de la S1T2P5a	99
Ilustración 15. Ejemplo 3 de la respuesta de la S1T2P5a	99
Ilustración 16. ejemplo de respuesta S1T1P5c	100
Ilustración 17. Ejemplo 1 de la respuesta de la S1T2P5e.....	100
Ilustración 18. Ejemplo 1 de la respuesta de la S1T2P5f.	101
Ilustración 19. Ejemplo 1 de la respuesta de la S1T2P5f.	101
Ilustración 20. Ejemplo de la tabla S1T3P6 para los años con más de un registro.	110
Ilustración 21. Ejemplo S1T3P6b.....	112

Ilustración 22. Ejemplos de S1T3P6d.....	114
Ilustración 23. Ejemplo 1 de S1T3P6d	114
Ilustración 24. Ejemplo 1 de S1T3P7	115
Ilustración 25. Ejemplo 1 de S1T3P7	115
Ilustración 26. Ejemplo 1 de S1T3P7	116
Ilustración 27. Ejemplos del proceso de conversión S1T3P7b.....	116
Ilustración 28. Ejemplo de S1T3P7c	117
Ilustración 29. Ejemplo 1 de la S1T3P5.	118
Ilustración 30. ejemplos S1T3P5	119
Ilustración 31. Ejemplo 1 respuesta a S2T2P7(a, b).....	138
Ilustración 32. Ejemplo 2 respuesta a S2T2P7(a, b).....	139
Ilustración 33. Ejemplo 1 respuesta a S2T2P8	139
Ilustración 34. Ejemplo 2 respuesta a S2P8.....	140
Ilustración 35. Ejemplo 1 - S2T4P2.....	151
Ilustración 36. Ejemplo 2 S2T4P2 Ilustración 37. Ejemplo 3 S2T4P2	152
Ilustración 38. Ejemplo 1 S2T4P6.....	156
Ilustración 39. Esquema G1 Ilustración 40. Esquema G2 Ilustración 41. Esquema G3.....	202
Ilustración 42. Esquema G4 Ilustración 43. Esquema G5	202
Ilustración 44. Esquema G6 Ilustración 45. Esquema G7	203
Ilustración 46. Esquema G8 Ilustración 47. Esquema G9 Ilustración 48. Esquema G10.....	203
Ilustración 49. Folleto del G1	204
Ilustración 50. Folleto del G2	204
Ilustración 51. Folleto del G3	205
Ilustración 52. Folleto del G4	205
Ilustración 53. Folleto de G5	206
Ilustración 54. Folleto del G6	206
Ilustración 55. Folleto del G7	207
Ilustración 56. Folleto del G8	207
Ilustración 57. Folleto G9	208
Ilustración 58. Follero G10	208

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Estructuración de formulación del estándar.	31
Figura 2 Coherencia Vertical y Horizontal de los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas para grado 8° y 9°	39
Figura 3. Relación de perspectivas	52

RESUMEN

El presente trabajo de grado se desarrolla desde la perspectiva de la metodología del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), desde esta perspectiva, se diseña el proyecto de acuerdo a los intereses establecidos por los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Villacarmelo – sede Cacique Calarcá, determinando un contexto que favorece el aprendizaje del concepto de la Función Cuadrática. Teniendo en cuenta lo anterior, se decidió desarrollar este proyecto a través de una metodología participativa, el cual quedó definido el contexto del Fútbol, así pues, se diseña el proyecto *“Aprendiendo la función cuadrática en el contexto del fútbol”* para el estudio de la función cuadrática a través de dos situaciones. Esta propuesta involucra actividades que permitan potencializar el desarrollo del pensamiento variacional y los procesos de modelación propuesto por el MEN (2006) pues este pensamiento se caracteriza por el estudio de la variación y el cambio en diferentes contextos, así mismo, a partir de las preguntas orientadoras, los estudiantes desarrollan habilidades y estrategias para el trabajo en equipo, el aprendizaje colaborativo, el manejo del tiempo etc., que le permite la construcción del aprendizaje significativo del concepto de función cuadrática a partir de lo establecido. En conclusión, se puede afirmar que los estudiantes, a partir del proyecto, no solo aprenden algunos aspectos referidos al concepto de la función cuadrática, sino que también, aprenden de otras disciplinas como es el deporte, en cuanto a la historia del fútbol y algunas de sus características desarrolladas en este proyecto.

Palabras claves: Aprendizaje Basado en Proyectos, Función Cuadrática, el Fútbol y las Matemáticas, Contexto, Álgebra escolar.

SUMMARY

The present degree work is developed from the perspective of the methodology of Project Based Learning (ABP), from this perspective, the project is designed according to the interests established by the ninth grade students of the Villacarmelo Educational Institution - campus Cacique Calarcá, determining a context that favors the learning of the concept of the Quadratic Function. The context in which this project is developed was analyzed through a participatory methodology, which defined the context of football, so the project "*Learning the quadratic function in the context of football*" is designed for the study of the quadratic function through two situations within this context. This proposal involves activities that allow the development of variational thinking and the modeling processes proposed by MEN (2006) to be potentiated, since this thought is characterized by the study of variation and change in different contexts, as well as from the questions counselors, students students skills and strategies for teamwork, collaborative learning, time management, etc., which allows the construction of meaningful learning of the concept of quadratic function from the established context. In conclusion, it can be affirmed that students, from the project, not only learn some aspects related to the concept of the quadratic function, but also, learn from other disciplines such as sport, in terms of football history and some of its characteristics developed in this project.

Keywords: Project Based Learning, Quadratic Function, Soccer and Mathematics, Context, School Algebra.

Introducción

Este trabajo de grado tiene como propósito favorecer el aprendizaje de la función cuadrática a partir de la metodología del Aprendizaje Basado en Proyectos. Para esto se aborda la problemática referida al aprendizaje de la función cuadrática por parte de estudiantes de 9° grado de educación básica, desde tres aspectos: el primero, desde el álgebra en general; el segundo, desde la enseñanza tradicional, y tercero, desde los procesos de modelación, centrado en los problemas que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje de las funciones y en particular de la función cuadrática. Además de la importancia de la contextualización de este concepto en la escuela.

Se presenta una nueva alternativa como solución a la preocupación que actualmente tiene Colombia frente al desarrollo de nuevas propuestas curriculares y estrategias metodológicas, la cual permita a los estudiantes una mejor comprensión y fortalecimiento en el campo de las matemáticas.

Como solución a este tipo de problemas, se han buscado modelos educativos y diseños curriculares para subsanar dichas preocupaciones; pero, en realidad no se han establecido cuáles estrategias son las más eficientes para mejorar la calidad educativa, ni se han definido políticas curriculares claras para enfrentar nuestra problemática en la educación matemática. Es por ello, que, como una vía de solución, proponemos la utilización del enfoque de Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), como una metodología cuyo centro es el estudiante mismo y las actividades que realiza para apropiarse del conocimiento. Este trabajo de grado se apoya en el ABP, con el interés de que el estudiante de grado 9°, de educación básica, aprenda la función cuadrática, privilegiando para ello los procesos de modelación matemática.

El cuerpo de este trabajo se ha estructurado en cuatro capítulos. En el primero, se hace una presentación de la problemática a solucionar: el aprendizaje de la función cuadrática por parte de estudiantes de 9° grado de educación básica. Esta sección también comprende la formulación de los objetivos (general y específico), y adicional a ello, se presenta la relevancia o justificación de la investigación a desarrollar; luego, se abordan los antecedentes de la investigación a nivel local, nacional e internacional; y, los aportes de estos para la formación del Trabajo de Grado. En el segundo capítulo, se desarrolla el marco referencial conceptual, en el cual se analizan los aspectos sobre la perspectiva didáctica, curricular y matemática. En cada uno de estos, se tiene en cuenta

los aspectos relevantes para la formación del proyecto, la continuidad del Trabajo de Grado y los aspectos a tener en cuenta en la enseñanza de la función cuadrática.

En el tercer capítulo, se realiza toda la propuesta de aula, se presentan las acciones realizadas para la elaboración del trabajo de grado, se elabora e implementa el proyecto y posteriormente se analizan los resultados obtenidos de la implementación de las situaciones diseñadas para el proyecto, y a partir de esto, se describen los avances y las dificultades que presentaron los estudiantes; articulando también una evaluación de la metodología diseñada en el ABP. Finalmente, se desarrolla el capítulo cuatro, en el que se presentan las conclusiones generales y algunas reflexiones didácticas en relación a la problemática, a partir de los resultados obtenidos de la implementación y el análisis y la organización del proyecto como tal.

1 Capítulo. Aspectos generales de la investigación

En este capítulo se describen los elementos generales que resultan importantes para plantear el problema de indagación de este trabajo; posteriormente se presenta la justificación, luego, los objetivos del trabajo que se pretenden alcanzar y dar respuesta con el desarrollo del trabajo; adicional a ello, algunos antecedentes que están relacionados con la problemática planteada, y por último, el referente metodológico, el cual se tendrá en cuenta para el desarrollo del proyecto.

1.1 Presentación de la problemática

Actualmente, en el contexto educativo hay preocupación por los problemas particulares en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; más específicamente, se tiene preocupación por las dificultades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar; dichas dificultades se presentan desde la misma naturaleza del álgebra, la transición del pensamiento numérico al algebraico, el lenguaje y las reglas que la rigen; así como también la preocupación de la enseñanza tradicional en el aprendizaje del álgebra.

Algunas de estas dificultades se centran en la comprensión del lenguaje algebraico, tales como lo mencionan diferentes autores: Lins (citado por Kieran, 1989); Kieran & Filloy (1989); MacGregor & Stacey (2000); Pizón & Gallardo (2000); los cuales señalan las siguientes dificultades: la generalización equivocada de procedimientos aritméticos, la resistencia a emplear ecuaciones, las dificultades en el empleo de los signos y expresiones, la falta de habilidad para expresar formalmente los métodos y procedimientos que se usan para resolver problemas, equivocaciones en la interpretación de las variables, el desconocimiento del significado de la igualdad, la omisión parcial de la incógnita, la diferenciación de la incógnita y de su coeficiente, etc.

Sin embargo, algunos investigadores han tenido como propósito centrarse en los procesos propios de las matemáticas *la resolución de problemas y la modelación matemática*, lo cual conlleva a la enseñanza más significativa de las matemáticas, situadas en el contexto¹ cotidiano.

¹ De acuerdo a los Estándares Básicos de Competencias, se entiende el contexto en el área de Matemáticas como situaciones problemáticas planteadas a partir de las mismas matemáticas, de otras disciplinas o de la vida cotidiana.

Estas dificultades generales de las matemáticas, se concretizan, de modo particular, cuando se enseña y aprende la Función Cuadrática en la educación básica en Colombia. Hay problemas tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de la Función Cuadrática, especialmente en 9° grado de educación básica.

Si bien la Función Cuadrática, como todos los demás conceptos matemáticos, son objetos matemáticos, pareciera no conseguirse elementos de la realidad cotidiana donde concretizarlos o donde pudiera tener un uso práctico. Es decir, la Función Cuadrática no es contextualizada cuando se enseña en la escuela colombiana.

Los problemas en la enseñanza y el aprendizaje de la Función Cuadrática para Kieran (1989), están asociados a las dificultades y fallas que se encuentran cuando se enseña y se aprende el concepto de función; en este sentido, algunos de los problemas en torno a este concepto, se debe al análisis y descripción de los elementos matemáticos que involucran los símbolos, las expresiones verbales, gráficos, expresiones algebraicas y numéricas y, a su vez, la dependencia entre variables. Hay también un conjunto de conceptos ligados al concepto de función que no parecen estar presentes en el desarrollo de las prácticas del docente en el aula de clase, como son variable, dependencia, transformación, sucesión o isomorfismo; sin la comprensión de esos conceptos al estudiante se le dificulta el dominio y el manejo práctico de función.

En la actualidad, el concepto de Función se sigue presentando desde la perspectiva de correspondencia o de asignación, su enseñanza obedece a procesos algorítmicos, memorísticos y de correspondencia, es decir, se enseña desde su expresión algebraica, realizando operaciones algorítmicas en las que se asigna un valor de para obtener valores de salida, lo cuales puedan ser presentados en tablas, para posteriormente representados en un plano cartesiano, realizando procesos memorísticos y repetitivos en los que se resume la enseñanza y el aprendizaje de este concepto, además de estar completamente desligados del contexto de los estudiantes, sin encontrarle un sentido al objeto matemático que se presenta. De acuerdo a lo dicho anteriormente, se está dejando por fuera la perspectiva variacional y de dependencia, quiere decir que, se está dejando a un lado la enseñanza de la función desde la variación entre magnitudes, patrones de variación y los comportamientos asociados a los cambios en sus distintas representaciones.

La enseñanza de las funciones incluye representaciones que denotan varios niveles procedimentales y estructurales, sin embargo, como lo demuestran los estudios anteriores, los

estudiantes tienden a eludir las definiciones y representaciones más formales y a interpretar las funciones como procedimientos para obtener una magnitud por medio de otra.

Otra limitación que se da, es que la escuela olvida, según Azcárate (1986), que el concepto de función se puede observar a partir de diferentes sistemas de representación, y cada una de estas se acerca a su definición permitiendo poner en relieve sus características e interpretaciones; estas son: el modelo físico o simulación, la descripción verbal, las tablas de valores, la gráfica y la fórmula o ecuación, siendo estas dos últimas los dos lenguajes de mayor abstracción y, por tanto, los más difíciles de interpretar, pues permiten tener una visión más completa de la función.

Por otra parte, Kieran (1989) considera que se presenta como un problema el hecho de que los estudiantes usan de una manera rutinaria la generación de tablas que satisface una ecuación algebraica de dos variables, la representación de puntos en un plano cartesiano adecuadamente escalado y que interpreten las coordenadas de los puntos de una gráfica, algunas veces con la intención de resolver un sistema de ecuaciones, hace que los estudiantes pierdan la visión del significado de los ejercicios, se apoyan únicamente en gráficas que son lineales y sean incapaces de interpretar gráficas en términos de situaciones reales. Así pues, la mayoría de estos procedimientos, se reducen a la aplicación de tan solo dos procedimientos resultando en un aprendizaje más mecánico y menos interpretativo.

Por otro lado, como se menciona en el texto de Kieran (1989), los principales obstáculos en el desarrollo del concepto de función y sus procesos se encuentran en el rechazo del dominio y el rango, los conceptos de imágenes y pre-imágenes son parcialmente comprendidos tanto en la forma gráfica como la algebraica, la variedad de ejemplos de funciones está limitado tanto gráfica como algebraicamente y el paso de la forma gráfica a la algebraica (modelación) es más difícil que la forma inversa y ambos procesos son limitados. Esta problemática y sus elementos que se hacen presente en la escuela, al momento de enseñar función, se repiten cuando también se enseña la Función Cuadrática.

Con base en lo anterior, el presente trabajo de grado se centra en responder la siguiente pregunta:

¿Qué elementos (covariación, dominio, representaciones, entre otros) de la función cuadrática se pueden movilizar en estudiantes de grado 9° de educación básica a través de una propuesta en el marco del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), en la cual se privilegia los procesos de modelación matemática?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General.

Favorecer el aprendizaje de la función cuadrática en estudiantes de grado 9° de educación básica de la Institución Educativa Villacarmelo, a través de una propuesta de aula en el marco del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), donde se privilegian los procesos de modelación matemática.

1.2.2 Objetivos Específicos.

- Documentar la problemática en la enseñanza y el aprendizaje de la función cuadrática desde las perspectivas curricular, didáctica del ABP y matemática.
- Determinar y articular los aportes (elementos) desde las perspectivas anteriores para el diseño de una propuesta de aula centrada en ABP.
- Caracterizar los avances y dificultades de los estudiantes de grado noveno, sobre la función cuadrática a través de la implementación y análisis de los resultados de la propuesta de aula.

1.3 Justificación

Actualmente, en Colombia se ha identificado en los sectores educativos, tanto rurales como urbanos, una gran diversidad cultural en cuestión de estudiantes; así pues, es necesario presentar alternativas y experiencias innovadoras respecto a los procesos de enseñanza y aprendizaje principalmente en la educación básica y media. Una de las cuestiones principales, se presenta en la comprensión del concepto de función, y específicamente en los procesos que se realizan en la función cuadrática, por esto, es importante abordar esta problemática, pues el concepto de función es fundamental en la formación matemática de los estudiantes.

Por otro lado, la educación debe ser vista como una construcción social, y no como se ha podido observar durante muchos años, como una formación individual; en este sentido, se propone la metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), como una estrategia práctica y teórica en la que los estudiantes a través de diversas actividades desarrollaran conocimientos, valores, habilidades y actitudes las cuales van a permitir un aprendizaje más significativo; además, se espera llevar al estudiante a que se convierta en un investigador en formación por medio de la práctica. Así mismo, se pretende poder reevaluar esos modelos tradicionales que se presentan en las clases de matemáticas que conllevan a unas grandes dificultades como son los bajos niveles de motivación, la dificultad en el aprendizaje, la falta trabajo en equipo y principalmente las dificultades que se dan en el desarrollo de los procesos de modelación matemática.

También, en lo que concierne al aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación, se plantea que este proceso matemático, ayuda y facilita en los estudiantes la construcción de nuevos conocimientos y habilidades durante el proceso de aplicación y socialización de conocimientos previos (Biembengut & Hein, 2004). De este modo, se pone de manifiesto la importancia de la modelación matemática en el ámbito escolar, así como el uso de contextos reales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde una metodología de ABP.

Por otro lado, según Sierpinskaia, (1985), existen en la mente simultáneamente experiencias previas que dan cuenta del concepto de función con algunas propiedades debido al conocimiento deductivo, producto de algún tipo de desarrollo académico, lo cual puede producir una serie de conflictos cognitivos desde lo epistemológico que puede actuar como obstáculo en aprendizaje que repercutan en la enseñanza, pues el concepto de función se concibe como una

relación entre magnitudes variables, y una de las dificultades de enseñanza y aprendizaje radica en comprender este concepto a través de sus representaciones.

El ABP es una propuesta que intenta favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje para superar las dificultades mencionadas anteriormente; son muchas las ventajas que esta metodología ofrece al proceso de aprendizaje, pues, este promueve en los estudiantes procesos de pensamiento. También, permite el aprendizaje a partir del trabajo en equipo, porque esta metodología incentiva el trabajo colaborativo, en el cual, a partir de trabajar el proyecto con sus compañeros de clase, aprenden a evaluar y retroalimentar las opiniones y el trabajo de sus compañeros, y así mismo en el desarrollo de la actividad. De igual forma, por medio de este trabajo están aprendiendo nuevos conceptos a través del desarrollo del conocimiento.

Además, el Aprendizaje Basado en Proyectos, adicionalmente lleva al estudiante a reflexionar sobre los problemas de la vida cotidiana en relación con un saber, lo cual hace que su interés sea mucho más grande que solo ver teoría sin una base real, con lo anterior, no quiere decir que todos los conceptos matemáticos sean vistos de una manera fácil en el mundo, pero por medio de esta metodología se busca retar al estudiante a que se vuelva el protagonista de su propio aprendizaje mediante la elaboración de proyectos, para así poder alcanzar un aprendizaje significativo².

Es por eso, que el proceso de elaborar un proyecto permite y alienta a los estudiantes a experimentar; a realizar aprendizaje basado en descubrimientos, aprender de sus errores, enfrentar y superar retos difíciles e inesperados, y más aún, que empiecen a incursionar en el campo de la investigación con ayuda de la tecnología, que en este caso va a ser una herramienta, que nos ayudará a visualizar la función cuadrática en situaciones cotidianas en el aula de clase, y a la vez, propiciar un ambiente de aprendizaje innovador que vaya más allá de una simple creación de una gráfica en un programa, generando un aprendizaje conjunto del estudiante con el docente a través de la actividad de proyectos y la vinculación con las TIC.

Por medio de este trabajo se pretende mostrar al estudiante qué elementos de la función cuadrática se encuentran inmersos en la vida cotidiana, aun teniendo presente que no todos los

² Aprendizaje Significativo Según Ausbel, debe ser una actividad significativa para el que aprende y dicha significatividad está directamente relacionada con la existencia de interacciones entre el conocimiento nuevo y el que ya posee el alumno.

conceptos matemáticos son susceptibles de ser aplicados como éste, ya que existe un nivel de abstracción que se escapa a ello.

Por lo anterior, se busca generar un ambiente donde los estudiantes realicen proyectos para hacer construcciones de conceptos, y a su vez, fortalecimientos de habilidades matemáticas. Adicional a ello, se busca identificar qué impacto tiene trabajar a través de proyectos, en las actitudes de los estudiantes, referido a esto, al interés que pueda generarse, si se presenta algún tipo de desmotivación en el estudio de esta disciplina, y a su vez, observar el rendimiento de ellos con respecto a la modelación matemática de problemas de la vida cotidiana.

Por lo manifestado anteriormente, podemos afirmar que es pertinente presentar la alternativa de ABP como una metodología innovadora que permita integrar distintas áreas del conocimiento y formas de aprendizaje, teniendo en cuenta las necesidades y preferencias que se encuentran en un determinado contexto, permitiendo que los estudiantes aprendan matemáticas y desarrollen competencias para pensar matemáticamente. Para ello es importante diseñar y desarrollar ambientes de aprendizaje centrados en el que aprende, enfocando su práctica a la construcción de conocimientos con significado a partir del reconocimiento y valoración de sus conocimientos previos y sus formas de pensar, razonar y argumentar en un ambiente de aprendizaje colaborativo.

1.4 Antecedentes de investigación

Después de un rastreo bibliográfico, se pudieron encontrar los siguientes documentos con referencia a la función cuadrática y Aprendizaje Basado en Proyectos; siendo investigaciones previas que sirven de marco referencial bibliográfico. Para ello, se realiza una breve descripción de los textos encontrados, pues estos permiten ubicar el problema de investigación en el contexto de aula.

1.4.1 Trabajos e investigaciones sobre Función cuadrática.

A continuación, se presentan algunos trabajos con referencia a la función cuadrática a nivel local, y nacional.

1.4.1.1 A Nivel Local.

Se encuentra la investigación de Avirama Gutiérrez, L. M. & Gustin Ortega, J. D. (2012), intitulada: *Una propuesta para la enseñanza de la ecuación cuadrática en la escuela a través de la integración del material manipulativo*, trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física), Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle.

En este trabajo académico se presenta la ecuación cuadrática como objeto de estudio, abordando algunos aspectos sobre la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas en estudiantes de la educación básica en Colombia; por ello, el objetivo general se expresa así: “Propiciar un acercamiento al reconocimiento y soluciones de la ecuación cuadrática en grado noveno de la educación básica a través de actividades que involucran la integración del Puzzle Algebraico.”, (p. 19).

Se cuestiona la forma tradicional de enseñar las matemáticas en la escuela, la cual se enfoca en la exposición del maestro, ejemplos y ejercicios para los estudiantes. Como una solución a esta problemática, los dos autores proponen realizar un diseño e implementación de una secuencia didáctica conformada por tres situaciones problema, en las que se desprenden una serie de actividades que involucran la resolución de problemas y la integración de materiales manipulativos como el puzzle algebraico.

Finalmente, en este trabajo se observó que al momento de realizar actividades con material manipulativo se puede enriquecer las prácticas educativas que se llevan a cabo en el aula de clase y a la vez los estudiantes reciben la atención apropiada para alcanzar su aprendizaje. Además, se concluye que a partir de puzzle se llegó a un acercamiento más efectivo a la resolución de problemas en ecuaciones cuadráticas, pues fue una actividad de mejor agrado para los estudiantes y esto permitió identificar elementos necesarios para dar una solución a un problema.

El problema que encontramos en este trabajo es el ambiente artificial con el que trabaja; es decir, se trabaja solo con seis (6) estudiantes y no con todo un salón de clase, que estaría formado por más de veinticinco (25) estudiantes. Esto hace cuestionables sus resultados, porque más bien con muy pocos estudiantes, estos deberían haber tenido una mayor atención personalizada y así obtener mejores resultados; por lo general, solo la mitad sale bien o tiene correctas las respectivas actividades. Además, no se presentan las fases de comprensión y asimilación que realizan los estudiantes a partir del problema planteado; en otras palabras, del problema se pasa a la solución, sin tener acceso al proceso de comprensión y análisis del mismo.

También, se encuentra el estudio realizado por Hurtado García, A. F. y Zúñiga Patiño, F. Y. (2011), intitulado *La función cuadrática en los textos escolares de grado noveno de la educación básica*, trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. Esta investigación aborda la Función Cuadrática como objeto de estudio; y se propuso como objetivo general: “Establecer las características curriculares y las Praxeologías Matemáticas de algunos textos escolares colombianos alrededor de la función cuadrática.” (p. 11). Específicamente, se realizó un análisis de textos escolares con el fin de reconocer la coherencia que guarda la propuesta educativa del texto, con la idea que el Ministerio de Educación Nacional (MEN) propone sobre la Función Cuadrática.

Es decir, el propósito era buscar y reconocer, el tratamiento que el texto escolar le da al concepto de función cuadrática y para ello se centró en el análisis de dos textos escolares de noveno grado (9°) de la educación básica que han estado dentro del mercado durante los años 2007 al 2009.

En este trabajo, también se reconoce en el análisis de textos escolares la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) como herramienta para llevar a cabo el análisis didáctico de

la propuesta del texto escolar; esta teoría se centra en el análisis de las *Praxeologías Matemáticas* las cuales se componen de tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

Los autores concluyen que, al momento de comparar la estructuración del contenido correspondiente a la *función cuadrática* presente en los dos textos escolares, en el primer texto (texto Delta) se observó que el concepto de función se muestra como una caracterización de sus elementos y definen los conjuntos en los que se presentan este tipo de función. Mientras que en segundo texto (texto Espiral) la propuesta del concepto función cuadrática se da a partir de un ejemplo que busca mostrar la forma en cómo se realiza su gráfica y las características del polinomio que define la función cuadrática.

En cuanto a las Praxeologías Matemáticas, las autoras concluyen que texto Delta presentan un alto nivel de completitud para este tema, mientras que para el texto Espiral se establece un nivel bajo de completitud debido a que no se destaca en mayor medida un cumplimiento medio o alto de los indicadores mencionados anteriormente.

Dentro la revisión matemática e histórica realizada, los conceptos matemáticos que se utilizaron tienen una relación amplia entre sí, se pudo ver que tanto los elementos que hacen parte de la función cuadrática y los que hacen referencia a la ecuación cuadrática muestran una integración a partir de sus formas de representación, muchos de estos términos son utilizados en los libros de texto analizados y no solamente en estos sino en la mayoría de los libros utilizados para la educación matemática en el grado noveno (9°).

Uno de los elementos que tiene esta investigación que se pudiera cuestionar es la muestra utilizada: solo dos libros; esa muestra no representa todo el mercado colombiano; de tal forma que sus conclusiones no podrían ser generalizadas. Hace falta continuar con el estudio para tener una visión más completa del tratamiento de la Función Cuadrática por parte de las editoriales escolares colombianas.

Así mismo, se encuentra la investigación realiza por Ruiz (2011), titulada *Una secuencia didáctica desde la perspectiva de la orquestación instrumental: la función cuadrática en grado noveno de educación secundaria*, trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física, en el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle.

Este trabajo de grado busca, bajo la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y la orquestación instrumental, realizar un diseño, implementación y evaluación de una secuencia didáctica; este diseño permite estudiar la función cuadrática de una forma menos tradicional. En

este trabajo, en la problemática se menciona el tratamiento que se le da a la función cuadrática y los procesos de enseñanza, los cuales, como en el trabajo lo afirma, son poco efectivos, dado que pueden presentar imprecisiones y dificultan el aprendizaje del estudiante. Se diseñó una situación didáctica en la cual se comprenden tres actividades; además, utilizaron la herramienta Cabri para su desarrollo. La metodología de investigación inspirada en la perspectiva de la micro-ingeniería didáctica ayudó en la realización de la secuencia didáctica.

El autor de este trabajo de grado concluye que el diseño de la secuencia didáctica y la interacción con el recurso (Cabri) permite identificar características de nivel cognitivo, matemático y didáctico en torno a la enseñanza de la función cuadrática. Además, muestra una forma diferente a la tradicional de enseñar la noción de función cuadrática, y al mismo tiempo sirve para que profesores puedan diseñar sus propios métodos de enseñanza haciendo uso de este instrumento.

El trabajo de Ruiz Quiñonez (2011) otorga un papel preponderante al profesor, porque este “asume un papel central en cuanto a la coordinación de los sistemas de instrumentos en la clase y el saber puesto en juego.” (p. 20); esto pudiera ser una limitante si se toma en cuenta los postulados de la Psicología Cognitiva que centra el papel activo en el estudiante, dado que es él quien aprende y el profesor pasa a ocupar un rol de orientador y facilitador.

Por último, el estudio realizado por Henao Saldarriaga, S. M. y Vanegas Díaz, J. A. (2012). *La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción de modelos cuadráticos*. (Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física). Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle.

Este trabajo de grado busca, a través del enfoque de la *Educación Matemática Realista* (EMR), realizar un diseño didáctico el cual favorezca los modelos cuadráticos que permita estudiar el proceso de modelación matemática de estudiantes de los dos grados de educación media (10° y 11°). El trabajo aborda a los *niveles de matematización* y la incidencia de las tareas diseñadas en el aprendizaje de los *modelos cuadráticos*.

Este diseño se realiza bajo los parámetros de la investigación cualitativa, centrada en un estudio de caso, desarrollándose en el *Laboratorio de Matemáticas de la Universidad del Valle*. En el estudio participaron 19 estudiantes de los dos últimos años de educación básica. La metodología fue la observación participante.

En dicha investigación, se concluyó que, a través de actividades con relación a la EMR, los estudiantes pudieron tener una mejor comprensión y conexión entre los contextos y los modelos

abordados. Además, demostraron ocupar un lugar protagónico en la integración de la modelación matemática para el trabajo matemático y esto se refleja inicialmente en la fundamentación teórica de las tareas diseñadas, que también trascienden al plano de lo práctico al mostrar que este tipo de tareas logran dar un lugar central a los estudiantes, pues en esta investigación, los estudiantes no están como receptores pasivos, sino como sujetos activos que construyen la matemática mediante herramientas que se basan en consideraciones propias, que paulatinamente se desarrollan y evolucionan. Por otro lado, promueven la interacción y reflexión entre los estudiantes, dando lugar a la creación de diversos modelos con niveles de abstracción diferentes y, por último, crear la necesidad, por parte de los estudiantes, de construir modelos que les permitan comprender la situación dada y en algunos casos resolverla.

Aunque no es fácil cuestionar los resultados obtenidos, los mismos no pudieran ser generalizados y comparados con resultados arrojados en un salón de clase real. La investigación dice realizarse bajo los parámetros del enfoque cualitativo, pero una característica esencial del mismo es trabajar en el ambiente o contexto natural de los hechos investigados, y, cuando se trata de procesos de enseñanza y aprendizaje, el contexto natural es el salón de clase y no un laboratorio.

1.4.1.2 A Nivel Nacional.

Se encuentra la investigación realizada por Mosquera Quintero M. (2015), intitulada *Propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones de segundo grado de variable real en el /marco de la enseñanza para la comprensión para fortalecer el pensamiento variacional en el grado 9 de la IER YARUMITO*. (Tesis de maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales). Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

En esta tesis de maestría, el autor diseñó una propuesta didáctica la cual posibilita a los estudiantes de grado 9 de la IER Yarumito el aprendizaje de las funciones cuadráticas de variable real, con el fin de fortalecer sus competencias en el pensamiento variacional, con énfasis en la modelación, resolución y el planteamiento de problemas. El trabajo se enfocó en elaborar una propuesta didáctica de enseñanza, la cual les sirvió como carta de navegación y permitió observar las bondades del uso de metodologías de enseñanzas alternativas para el fortalecimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje, y en consecuencia el fortalecimiento de competencias en los estudiantes. Mosquera (2015), concluye que, al realizar diversos ejercicios contemplados en las

guías de actividades, en muchos de los casos permitió a los estudiantes procesos de autonomía y descubrimiento frente al aprendizaje, así como, la construcción de algunos de los conceptos y aplicaciones de la temática a la vida cotidiana, lo cual hizo que el proceso de enseñanza fuera más ameno.

1.4.2 Trabajos e investigaciones sobre la Metodología del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP).

Respecto a la metodología ABP, se encontraron los siguientes trabajos e investigaciones a nivel nacional e internacional que tienen que ver con esta metodología.

1.4.2.1 A Nivel Local.

En primer lugar, se presenta el Trabajo de Maestría de Benavides Rivera, L. D.; Panesso Cruz, L. B. (2017), titulado “*Aprendizaje Basado En Proyectos Mediado Por Tic En La Promoción Del Aprendizaje De Operaciones Combinadas*”. (Tesis de Maestría en Educación). Universidad ICESI, Cali.

Los autores de este trabajo de maestría proponen el ABP como estrategia de aprendizaje para la enseñanza de las operaciones combinadas en grado tercero, este trabajo recopila información sobre las razones por las cuales implementar la metodología del ABP, tomando como su eje principal el desarrollo del proceso de resolución de problemas. Dentro de las posibilidades que desarrolla el ABP, es movilizar a los estudiantes a ser protagonistas y artífice de su proceso de aprendizaje, así mismo, permite incorporar los lineamientos curriculares para establecer los parámetros en los que se ha diseñado este Trabajo de Maestría.

Del mismo modo, es importante rescatar que, este es el único trabajo que se encontró a nivel local, el cual trabajó con la metodología de ABP en matemáticas una propuesta de aula, la cual pretende implementar estrategias dentro del salón de clase en las cuales el estudiante diseñe en una hoja de cálculo funciones matemáticas para resolver problemas y entregar como producto una cartilla con Sudokus y crucigramas numéricos realizado por cada equipo de trabajo. Los estudiantes participantes fueron seleccionados, ocho en total, cuatro con el mejor rendimiento en matemáticas y los otros cuatro con el rendimiento más bajo de la clase.

1.4.2.2 A nivel Nacional.

Por otra parte, se encuentra la investigación Ciro Aristizabal, C. (2012), titulada *Aprendizaje Basado en Proyectos (A.B.Pr) como Estrategia de Enseñanza y Aprendizaje en la Educación Básica y Media*. (Tesis de maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales). Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

La autora muestra que durante la educación secundaria se proponen muchas metodologías de aprendizaje, es por eso que este trabajo recopila lineamientos básicos para la implementación de la metodología ABP como estrategia integradora de teoría y práctica de la asignatura de ciencias naturales, promoviendo competencias cognitivas, colaborativas, tecnológicas y metacognitivas. La propuesta pretende brindar un apoyo en el ámbito educativo, para la implementación de una metodología que complemente los temas de las clases teóricas con la aplicación de proyectos diseñados para este fin y a la vez, incentivar mediante su realización, actividades como: investigación, planeación, búsqueda de soluciones, trabajo cooperativo y actitudes como: autorregulación, disciplina y perseverancia, entre otros elementos que benefician la formación integral de los estudiantes.

La metodología propuesta fue aplicada en el diseño y construcción de un proyecto sobre cohetes hidráulicos como método de aproximación a la física mecánica. Como conclusión se llegó a que trabajar con proyectos ofrece unos beneficios invaluable como el trabajo con gusto, la disposición, el cambio de actitud de los estudiantes y los aprendizajes significativos que se generan cuando se les ofrecen metodologías diferentes y activas.

También, se encuentra el artículo realizado por Matos, N. R.; Arias A. F. & Caraballo, P. A. (2015), *Sobre la reflexión de Aprendizaje Basado en Proyectos: estrategia pedagógica en la enseñanza de las matemáticas*, publicado en la *Revista Métodos* (no. 13), del Colegio Mayor de Bolívar, los autores hacen una reflexión analítica de la investigación “Efecto del Aprendizaje Basado en Proyectos mediados con tecnología móvil en la resolución de problemas aditivos con números enteros negativos”. El documento parte del análisis del problema que presentan los estudiantes para desarrollar las competencias matemáticas, aunado a las dificultades que presentan para comprender los conceptos abstractos que les plantean los docentes. Se parte de la propuesta de incorporar en las prácticas pedagógicas de los educadores de matemáticas, una estrategia soportada en la teoría constructivista, denominada: Aprendizaje Basado en Proyectos -ABP-, como

una forma de eliminar la metodología tradicional de enseñanza docente, la cual genera estímulos desagradables y coadyuva a los fracasos en el desarrollo de competencias matemáticas. Finalmente, el documento plantea, de manera sucinta que la utilización del ABP mejora el desempeño de los estudiantes en la competencia de resolución de problemas.

Como conclusión Matos, N. R.; Arias A. F. & Caraballo, P. A. (2015), señalan que la implementación de la estrategia pedagógica denominada ABP permite mejorar el desempeño de los estudiantes en la competencia de resolución de problemas, independiente del tipo de mediación que emplee el docente. De igual manera, ésta promueve el trabajo colaborativo, así mismo, promueve a que se conciba la matemática como una actividad que socialmente se debe compartir, estimulando un aprendizaje significativo.

1.4.2.3 A Nivel Internacional.

En el artículo de Garrigós Sabaté, J. y Valero García, M. (2012), intitulado *Hablando sobre Aprendizaje Basado en Proyectos con Júlia*, publicado en la *Revista de Docencia Universitaria. REDU. Número monográfico dedicado a Innovaciones en el diseño curricular de los Planes de Estudio. Vol.10 (3) Octubre - diciembre. Pp. 125-151.*

En este trabajo, los autores hacen críticas a las metodologías usadas en el currículo español, y para ello hace un diálogo con una alumna ficticia llamada Julia, quien va mostrando su experiencia de clase y destaca la importancia y diferencia de lo aprendido cuando se usa ABP. También señala unas fallas de esta metodología, en cuestión de la forma en como es empleada por los profesores; por ejemplo, nunca se muestran proyectos realizados por sus compañeros de los años anteriores; no se hace uso de la modelación. Asimismo, usando ABP los profesores se quedan con lo abstracto en Física o Ingeniería y no con casos reales y prácticos.

Se expone acerca del desarrollo de ciertas habilidades transversales no es tarea fácil, ni siquiera en el caso de que el profesorado se coordine en una cadena de asignaturas pero que sí se puede desarrollar a través de proyectos un acercamiento para resolver múltiples situaciones de la vida real a las que el estudiante se enfrentará al trabajar en equipo. Por lo anterior se puede evidenciar la complejidad de identificar habilidades y actitudes que pueden obtener los estudiantes o que surgen a través de las diferentes actividades que se llevan al salón de clase.

Los autores concluyen que la ABP “mejora la motivación del alumnado, consigue que se esfuerce más en general y contribuye al desarrollo de habilidades transversales que luego son apreciadas en el momento del ejercicio profesional.” (p. 148).

Se encuentra, también, la investigación de López Quijano G. (s/f), intitulada *La Enseñanza de las Matemáticas, un reto para los maestros Del Siglo XXI*. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

El estudiante de hoy necesita entornos de aprendizaje diferentes a los tradicionales, que lo motiven constantemente a la construcción del conocimiento matemático, que estén acordes con los cambios tecnológicos y sociales, tendientes a fortalecer en él habilidades y competencias útiles en su desempeño cotidiano, que lo potencien para enfrentar un mundo cada vez más exigente, cambiante y globalizado. Un entorno para el aprendizaje de las matemáticas, donde se conjugan aula especializada, ambiente de estudio colaborativo, aprendizaje basado en problemas y un sistema de evaluación formativa, proporciona al estudiante una amplia gama de posibilidades para que él construya socialmente el conocimiento matemático de manera reflexiva sobre su propio quehacer cotidiano.

Finalmente, López Quijano G (s/f), considera que el Aprendizaje Basado en Proyectos es un enfoque integral de la enseñanza y aprendizaje en el aula diseñado para involucrar a los estudiantes en la investigación de problemas autóctonos. En este artículo, representa un argumento de por qué el proyecto tiene el potencial de ayudar a las personas a aprender. Así mismo, como dentro de este marco los estudiantes buscan alternativas de soluciones a problemas no triviales, que conllevan a generar preguntas, debates de ideas, realizando predicciones, diseñando planes y/o experimentos, a su vez, recolectando y analizando datos, estableciendo conclusiones y creando o mejorando productos y procesos. Adicionalmente, los docentes deben buscar crear ambientes de aprendizaje significativos en los cuales se garanticen la motivación y la indagación de diferentes temas aprender dentro y fuera del aula de clase.

1.4.3 Aportes de los Antecedentes al Trabajo de Grado

Teniendo en cuenta lo anterior, los trabajos que se realizaron en torno a la función cuadrática concluyen que uno de los principales problemas se encuentra en la comprensión del concepto de función y sus sistemas de representación, así mismo, cómo la enseñanza tradicional

tiene efectos en el aprendizaje de los estudiantes, donde el profesor tiene el papel central en los procesos de enseñanza y aprendizaje, el cual limita la construcción del conocimiento. Por otro lado, proponen situaciones didácticas encaminadas al trabajo en el aula como una propuesta motivadora para el aprendizaje de los estudiantes haciendo de la enseñanza un proceso menos tradicional.

Respecto a la metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos según los trabajos anteriores, esta aporta a la enseñanza y el aprendizaje de distintas áreas de conocimiento; pues, por medio de esta, se pueden alcanzar las metas propuestas en el aula de clase. En cada uno de estos trabajos y artículos de investigación mencionados anteriormente, muestran que la metodología propuesta (ABP) permite desarrollar habilidades de investigación, actitudes, aptitudes, comunicación y resolución de problemas en los estudiantes, siendo esto beneficioso para la construcción del conocimiento, ya que, por medio de esta metodología se motiva al estudiante a ser partícipe de su propio aprendizaje e incita el trabajo colaborativo. Además, deja a un lado la enseñanza tradicional, cambiando los roles de estudiante y docente, en el cual el docente se vuelve un orientador y el estudiante asume el papel de investigador.

Para efectos de este trabajo de grado, pudimos observar que a nivel local se encontró un trabajo que implementa la metodología ABP en el área de matemáticas en el tema de operaciones combinadas de suma y resta. Por otro lado, respecto a la función cuadrática se encontraron varios trabajos los cuales toman la función como el objeto de estudio. A nivel nacional (Colombia), encontramos que muy pocas universidades han trabajado o investigado a partir de la metodología ABP. A nivel internacional, se encontraron diversos trabajos e investigaciones sobre la metodología ABP en distintas áreas del conocimiento, las cuales dieron un aporte teórico en este trabajo, pero ninguno de estos trabajos mencionados anteriormente vincula la función cuadrática con esta metodología. Por ende, se considera este trabajo como un tipo de desarrollo investigativo en el cual se quiere alcanzar una nueva alternativa de enseñanza y aprendizaje de dicho concepto.

2 Capítulo. Marco de referencia conceptual

En este capítulo se presenta el marco de referencia conceptual en el que se basa el presente trabajo, el cual se fundamenta desde tres perspectivas: didáctica, curricular y matemática, las cuales direccionan este proyecto como una alternativa para la enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática, por medio de la identificación de algunas de las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de la función; interpretación del concepto y los sistemas de representación.

También se analizan aspectos matemáticos con referencia a la función cuadrática y sus sistemas de representación; aspectos curriculares en el que se presentan las orientaciones del MEN, referentes a la enseñanza y aprendizaje del álgebra con respecto a la función; y un análisis de ciertas dificultades tratadas por investigaciones previas sobre la función cuadrática en secundaria. Por último, se presentan algunos aspectos metodológicos sobre la construcción y el diseño del proyecto.

2.1 Perspectiva didáctica

Como se mencionó en la problemática, algunas de las dificultades que se presentan en la Educación Básica Secundaria en el área de las matemáticas, tienen que ver con la comprensión e interpretación del concepto de función por parte de los estudiantes; a causa de su complejidad por su grado de abstracción, las dificultades por parte de los sistemas de representación y los problemas que se generan al modelar situaciones reales. Estas dificultades se relacionan directamente al estudio del Álgebra, en la comprensión y tratamientos de las expresiones algebraicas a nivel simbólico, y los cambios a otros registros de representación como el geométrico y viceversa.

Algunas de estas dificultades son expuestas en los documentos de Kieran C., Azcarate C., y Serpiska, entre otros; así mismo como en algunos trabajos de grado del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle en los que se trata la función cuadrática.

Estas dificultades involucran implicaciones didácticas en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar, especialmente el caso de la función cuadrática.

2.1.1 Algunas dificultades asociadas a la enseñanza y el aprendizaje de la Función Cuadrática.

Generalmente la presentación del concepto de función en la escuela tiene gran complejidad en los estudiantes de secundaria por parte de su interpretación en un contexto real, ya que es necesario que ellos relacionen un contenido abstracto y matemático con su entorno. Las dificultades que se presentan en el concepto de función, son generales para los tipos de funciones, tales como:

Según Kieran (1989), algunos de los problemas con respecto al concepto de función se deben al análisis y descripción de los elementos matemáticos que involucran los símbolos, las expresiones verbales, gráficos, expresiones algebraicas y numéricas y a su vez la dependencia entre variables.

Según Azcárate (1996), el concepto de función puede evidenciarse en múltiples formas de representación, en donde individualmente, tenemos una proximidad a su significación, desde diferentes aspectos, tales como: el modelo físico o simulación, la descripción verbal, las tablas de valores, la gráfica y la fórmula o ecuación, en donde encontramos que estos dos últimos elementos, presentan una mayor abstracción frente a los demás, debido a que brindan un panorama más amplio de la función.

Según Kieran (1989), se refleja en forma de contratiempo la situación de que los estudiantes utilizan progresivamente la construcción de tablas que satisfagan una ecuación algebraica de dos variables, la ubicación de puntos en un plano cartesiano correctamente escalado y su interpretación de acuerdo al tipo de gráfica obtenida; en ocasiones con la pretensión de dar solución a un sistema de ecuaciones, los estudiantes se desvían del significado de los ejercicios, apoyándose netamente en gráficas lineales y generan dificultades para interpretarlas en términos de situaciones reales. De esta manera, la gran parte de estos procesos se limitan a la aplicación de solo dos métodos, teniendo como consecuencia un aprendizaje más mecánico y menos interpretativo.

Por otro lado, como se menciona en el texto de Kieran (1989), los obstáculos más importantes en la construcción del concepto de función y sus métodos, se hallan en la devolución del dominio y el rango; los conceptos de imágenes y pre imágenes son entendidos de forma fragmentada, tanto gráficamente como algebraicamente; las múltiples ejemplificaciones de

funciones, están restringidos de forma gráfica como algebraicamente, y la transición de la primera a la segunda (modelación) es más complicada que la inversa.

La visualización matemática requiere de la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación a otro (Hitt, 1998). Varios estudios han propuesto la importancia de los sistemas de representación en el aprendizaje de algunos conceptos matemáticos. Tal como se ha descrito en el capítulo 1, un elemento común de esas investigaciones, es que los estudiantes de secundaria, en torno a un concepto específico, no son capaces de coordinar varios sistemas de representación. En este sentido, Hitt (1998) menciona que la visualización está fuertemente vinculada con los sistemas semióticos de representación, enfatizando en que la mayoría de profesores privilegian el trabajo sobre los procesos algebraicos sin atribuirle importancia a los procesos visuales.

En particular, el concepto de *función* es uno de los conceptos matemáticos que por excelencia admite la consideración de diferentes sistemas de representación, por lo que la visualización es un proceso de uso constante por parte de los estudiantes, y es común ver que, ante la necesidad de responder a cierta consigna, se acuda a otras representaciones para poder explicar o responder.

Hitt (2003) establece que en lo que al concepto de función se refiere, hay dificultades tanto en profesores como en estudiantes, y la causa principal es la consideración y tratamiento de este concepto desde solamente un registro imperante sobre los demás, el algebraico, lo cual produce una limitación en su comprensión. El problema, como se ha mencionado antes, no es el poco trabajo con otras representaciones, sino la inadecuada articulación entre ellas. Justamente, esta articulación no es considerada usualmente por los profesores en la construcción del concepto de función. Así pues, el autor propone que las tareas de conversión promoverán un mejor entendimiento de las funciones y permitirían también el desarrollo de procesos de visualización.

Adicionalmente, algunas de las dificultades centradas en el concepto función, se deben a la falta de construcción de su definición, se da principalmente desde una relación de correspondencia, la correlación y asignación de valores a una magnitud más que una relación de dependencia, en el que se beneficia la enseñanza del concepto de función a partir de relaciones entre magnitudes, cambios de una variable respecto a la otra, razón de cambio, el comportamiento de las magnitudes en los distintos tipos de representación, etc.

Teniendo en cuenta los diversos problemas en torno a la función, y en particular a la función cuadrática, como se ha mencionado anteriormente, diferentes autores han presentado distintas alternativas de tratamiento para la introducción del álgebra en el cual está inmerso el concepto de función, estas son: la generalización de patrones numéricos y geométricos, las leyes que rigen las relaciones numéricas, la resolución de problemas, la resolución apoyado en el uso de modelos concretos, la introducción de situaciones funcionales y la modelización de fenómenos físicos y matemáticos, así como también, los procesos de covariación para la enseñanza de la función. De manera particular, y para efectos de este trabajo, estará enfocado en la modelización de fenómenos físicos y matemáticos y la descripción de los procesos de covariación en los niveles, a partir de contextos reales, debido a su aporte en el desarrollo del concepto matemático.

2.1.2 La Metodología del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP).

El Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), es una alternativa de aprendizaje que se está implementando en la actualidad, aunque no es una metodología nueva, está tomando gran fuerza por los grandes desafíos que se enfrentan en la escuela y la necesidad de motivar e involucrar activamente a los estudiantes en su proceso de aprendizaje. En el proceso de implementación y diseño de un proyecto nos exige pensar en la educación de una manera diferente, pensar en el rol que desempeña el docente en este proceso, y proveer a los estudiantes estrategias que le permitan conducir al conocimiento y al aprendizaje autónomo. El ABP es una metodología en la cual los estudiantes están en el centro del proceso de aprendizaje y les proporciona el control sobre qué conocimientos y competencias van a adquirir, al tiempo que dan solución a problemas reales de sus contextos.

2.1.2.1 Orígenes del Aprendizaje Basado en Proyectos.

El ABP ha tomado fuerza en el campo de la educación en los últimos tiempos, dejando a un lado la enseñanza tradicional donde el estudiante hace parte de este proceso como un sujeto pasivo y el docente es quien imparte todo el conocimiento. El ABP tiene sus raíces en el período greco-romano, del cual podemos destacar a Confucio y Aristóteles, que fueron exponentes de la filosofía del *aprender haciendo*. Siglos después, este enfoque del aprendizaje fue tomado por el

filósofo John Dewey, quien propuso una educación de carácter práctico, que se expandió con fuerza en Estados Unidos aproximadamente en el siglo XX, y con el transcurso del tiempo, recibió el nombre de Project Based Learning (Boss, 2011).

Esta metodología surge a finales de la década de los 60, denominada el Aprendizaje Basado en Proyectos la cual se introdujo en las Universidades de Case Western Reserve, en Estados Unidos, y de McMaster, de Canadá. Al mismo tiempo, en las Universidades de Roskilde y Aalborg, en Dinamarca, nace el Aprendizaje Basado en Proyectos; cuya base tiene como objetivo lograr o elaborar un producto final con el que se busca fortalecer el aprendizaje y enseñanza de los estudiantes. El objetivo por el cual surge esta metodología fue con el fin de mejorar la calidad educativa mediante el trabajo integrado y la resolución de problemas, por la necesidad de innovar la manera de aprender y de enseñar en la escuela, fomentar la motivación por aprender por parte de los estudiantes y cambiar el rol de docente.

La base fundamental del ABP es el constructivismo que progresó a partir de los trabajos de psicólogos y educadores tales como Lev Vygotsky, Jerome Bruner, Jean Piaget y John Dewey. Este movimiento constructivista, busca proveer al estudiante de herramientas que le proporcionen la generación y modificación de ideas para elaborar su propio conocimiento, este enfoque, fue lo que encaminó la mirada de las metodologías de la educación hacia el aprendizaje como un proceso activo del individuo.

2.1.2.2 ¿Qué es el Aprendizaje Basado en Proyectos?

La metodología de ABP consiste en el desarrollo de un proyecto de un tema en particular o general, el cual se pueden vincular varias disciplinas del saber. La implementación del ABP se puede trabajar desde tres enfoques como son el método de instrucción, la estrategia de aprendizaje, y la estrategia de trabajo.

Esta metodología al lograr vincular otras disciplinas, se puede trabajar desde uno o varios enfoques y esto será determinado por las condiciones en las cual se realiza el proyecto. Es decir, que se plantea el proyecto de acuerdo al contexto de los estudiantes, la disposición de los recursos y las necesidades que se observen del grupo en general, teniendo en cuenta las bases curriculares. Pero sin importar el enfoque bajo el cual se aplica, se caracteriza porque el profesor o grupo

profesores y alumnos realizan un proyecto en grupo sobre temas reales, enfocado a su quehacer educativo.

El ABP es un conjunto de tareas basadas en la resolución de preguntas o problemas a través de la implicación del alumno en procesos de investigación de manera relativamente autónoma que culmina con un producto final presentado ante los demás (Jones, Rasmussen, & Moffitt, 1997, citado por Sanchez, (s/f)).

Así mismo, el ABP busca incentivar en los estudiantes a que solucionen problemas reales a través del planteamiento de nuevas preguntas, debatiendo ideas, recolectando y analizando datos, reflexionando sobre su proceso de aprendizaje, trazando conclusiones, comunicando sus ideas, creando productos y compartiendo sus aprendizajes con una audiencia real, en este caso sus compañeros.

2.1.2.3 Rol del estudiante y del docente

En el Aprendizaje Basado en Proyectos, los estudiantes son el centro del aprendizaje y tienen un rol activo en este proceso, pues son quienes formados en pequeños grupos de trabajo y después de haber recibido instrucciones del profesor, empiezan a realizar su proceso de aprendizaje de manera autónoma, consciente y colaborativo. El trabajo en equipo les permite el intercambio de información para resolver una tarea, y por medio de la colaboración aprenden a ayudarse mutuamente enriqueciendo sus procesos cognitivos tomando de todo su equipo de trabajo las ideas diversas para su propio aprendizaje. Por ende, La clase cambia de ser un espacio en el cual el profesor es el único que imparte sus conocimientos a ser diálogo abierto entre estudiantes-estudiantes y estudiantes-profesores.

Por otra parte, esta metodología no está diseñada para profesores que quieren ser el centro del proceso de enseñanza y aprendizaje, pues en esta, el profesor actúa como un orientador del aprendizaje, permitiéndole a los estudiantes autonomía y responsabilidad en la construcción del conocimiento. Además, los docentes deben promover ambientes de aprendizaje adecuados para el proceso de aprendizaje, modelando y guiando el proceso. Entre las actuaciones del docente está

en incentivar y motivar los procesos realizados por los estudiantes en la construcción del conocimiento, reforzar el trabajo en grupo y valorar los esfuerzos grupales e individuales, orientar el aprendizaje y retroalimentar y evaluar el proceso.

2.1.2.4 Beneficios y dificultades de Trabajar con el Aprendizaje Basado en Proyectos.

El Aprendizaje Basado en Proyectos no es un proyecto transversal en el cual los estudiantes aprenden cosas que no están en el currículo, la finalidad de trabajar por proyectos, bien sea de manera transversal a todas las asignaturas o de manera particular en algún área del conocimiento, como proyecto de aula, es incluir estrategias de aprendizaje a partir del ABP en el cual se movilicen contenidos del currículo y de la o las asignaturas involucradas. En la siguiente tabla podemos presentar algunas beneficios y dificultades de trabajar con el ABP.

Tabla I. *Contraste de los Beneficios y Dificultades de la Metodología ABP*

Beneficios	Dificultades
<ul style="list-style-type: none"> • Aumenta la motivación por el aprendizaje por parte de los estudiantes. • Adquieren el conocimiento de forma significativa, es decir, que a partir de lo que ya saben y conocen construyen un nuevo conocimiento que perdura por más tiempo. • Se trabaja en grupo, de manera colaborativa, en el cual se desarrollan estrategias y habilidades en el aprendizaje. • Involucra el contexto real. • Integra otras disciplinas, aunque también se puede trabajar de manera individual en áreas del conocimiento. • El estudiante participa activamente en la construcción del conocimiento, mientras que el docente orienta el proceso bien sea con instrucciones o por medio de actividades. • Permite integrar el uso de las TIC, aunque no es indispensable para el desarrollo de proyectos. • Los estudiantes mediante el trabajo con proyectos desarrollan habilidades socioemocionales, tales como la autoconfianza, 	<ul style="list-style-type: none"> • La implementación de proyectos puede resultar una tarea difícil para los docentes, pues este introduce un cambio de roles y de la metodología a aplicar. • El desprendimiento de la enseñanza tradicional es un desafío tanto de docentes como de estudiantes. • Integrar un proyecto transversal, es un reto para todos los docentes, pues en este debe incluir el currículo. • Requiere de mayor tiempo de preparación de los problemas y un compromiso en el proceso de consulta e investigación de la información. • Los grupos son numerosos y por lo tanto se puede perder el control. • Los estudiantes, sobre todo los más jóvenes, se pueden perder en la tarea y olvidar sus propósitos de aprendizaje. • El tiempo de discusión debe ser administrado adecuadamente, de lo contrario, se puede perder la atención del grupo.

autonomía y colaboración con sus compañeros (Thomas, 2000; ChanLin, 2008).	• Integrar el uso de las TIC, puede parecer un reto para los docentes, así mismo como controlar el uso de esta por partes de los estudiantes.
• Promueve la investigación en el aula.	

Fuente: Elaboración propia.

A pesar de las ventajas y los beneficios de la Metodología del ABP, no se puede dejar a un lado los impedimentos que se pueden presentar en el momento de su aplicación, es decir que, al momento de su implementación se pueden tener obstáculos principalmente de dos tipos, el primero referido a las dificultades que presentan los estudiantes y el segundo referido a las dificultades que presentan los docentes, como son, el manejo de la información, la argumentación y síntesis de las respuestas, el manejo del tiempo, pérdida de control de la clase, diseño de un proyecto bien definido que incluya el currículo, etc.

La mayoría de estas se deben a la falta de experiencia en la implementación de esta metodología, adicionalmente, se encuentra el rechazo de algunos docentes por generar cambios en enseñanza y el aprendizaje, así como la incorporación de nuevas técnicas y estrategias que esto implica, como lo es el uso de las TIC y el trabajo en equipo, sin embargo, a través de su aplicación se van alcanzando las herramientas y estrategias suficientes para superar algunos de estas dificultades.

2.1.2.5 Fases del ABP y Estrategias de Implementación

López (2004) señala que la metodología ABP se centra en un conjunto de actividades interrelacionadas y coordinadas entre sí y tiene un objetivo claro: aprender un conocimiento en el caso del ámbito educativo. Este proyecto se hace en grupo (trabajo colaborativo), o, por lo menos, se evita al máximo el trabajo individual del estudiante. Es necesario que el profesor haya analizado el proyecto y ofrezca al alumno las herramientas necesarias para la solución; no se trata que el docente le dé la herramienta, sino que tenga la certeza de que el alumno la ha de conseguir.

Se inicia con una determinación en el contexto a trabajar y una pregunta generadora (o varias de ellas) es el comienzo del proyecto. En la siguiente tabla se presentan las fases del ABP las cuales da orientaciones para realizar la implementación de esta metodología, también, es importante mencionar que no es necesario pasar por todas las fases de manera secuencial, sino a partir de como este diseñado el proyecto se irán viendo los avances en cada una de estas fases.

Adicionalmente, aunque no es indispensable el uso de las TIC y herramientas Web 2.0 en el proceso de implementación del ABP, estas permiten ser utilizadas como una estrategia de consulta de información, indagación, difusión y presentación del proyecto.

FASES DEL APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS (ABP)	
Selección Del Tema Y Planteamiento De La Pregunta Como Punto De Partida	
FASE 1	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Se opta por elegir un tema que se encuentra ligado al contexto real del estudiante. ✓ Se debe tener en cuenta que el tema elegido permita desarrollar las metas de aprendizaje, competencias y habilidades. ✓ Se da inicio al planteamiento de la pregunta, la cual servirá como guía abierta o punto de partida.
Formación De Los Equipos	
FASE 2	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Se realiza la organización de grupos de trabajo, para que haya diversidad de perfiles y cada uno desempeñe un rol, se retoma el aprendizaje colaborativo como estrategia de construcción de conocimiento.
Definición De Los Objetivos Y Descripción Del Producto Final	
FASE 3	<ul style="list-style-type: none"> ✓ En este espacio se establece el producto que deben desarrollar teniendo en cuenta las competencias que se quieren alcanzar y habilidades a potenciar.
Planificación, Organización Y Asignación De Responsabilidades	
FASE 4	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Se determina el plan de trabajo como estrategia de organización, en este se especifica las actividades, tareas previstas y asignación de responsabilidades a cada uno de los integrantes del grupo. ✓ Es preciso realizar un cronograma que permita establecer los tiempos de cada actividad para su desarrollo.
Investigación En Contexto	
FASE 5	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Es aquí donde se debe dar autonomía a los estudiantes para que indaguen, contrasten y analicen la información necesaria para el desarrollo de la investigación como estrategia pedagógica. ✓ El rol del docente es de orientador y actúa como guía, se asume la investigación como un medio para producir construcción del conocimiento.
Análisis Y La Síntesis De Datos	
FASE 6	

- ✓ En este momento se pone en común la información, documentos e ideas recopiladas, a partir de esto se genera ejercicios de reflexión y debate frente al tema y la pregunta problema.
- ✓ Se elaboran posibles hipótesis, y por último, se compila la información a partir del análisis realizado, y se busca entre todos la mejor respuesta a la pregunta inicial.

2.1.3 Algunos aspectos sobre la Modelación.

La incursión de la matemática como una ciencia que manipula variables para el estudio de situaciones de diferente clase necesita de un sentido de estudio pertinente que debe ser resaltado en el aula de clase. Tal sentido, normalmente atribuido a una necesidad de relacionar a las matemáticas con situaciones reales, no solo se remite a una aplicación práctica de los conceptos matemáticos, sino que trasciende al aporte de ellos para la formación de un razonamiento que permita modelar situaciones que son susceptibles de ese practicismo.

Modelar, entendido como una construcción o sistema de carácter cognitivo, permite aproximarse al comportamiento matemático de determinadas variables involucradas en contextos tanto generales como específicos. De esta manera, un modelo permite caracterizar situaciones donde la matemática permite describir los patrones que pudiesen estar presentes, y aquellos que no lo están; todo ello, debido a que un modelo también se constituye como un sistema, que está teóricamente solidificado, para utilizar los elementos que lo forman, para describir las situaciones dichas, por medio de unidades referenciales, que permiten a su vez realizar predicciones dentro del mismo sistema. Lo anterior, puede evidenciar una complejidad sobre lo que se debe entender como modelar, debido a que no tiene una sola perspectiva para definirse; sin embargo, les brinda un fuerte sentido de estudio a las matemáticas, para ajustarlo a una realidad que las muestra como cercanas a ella.

Hans Freudenthal (1905 – 1990) fue un matemático neerlandés, de nacionalidad alemana, que realizó aportes significativos al campo de la educación matemática. Uno de ellos, es la perspectiva que aborda la Educación Matemática Realista (EMR). Aquella, indica que la matemática debe colaborar a la formación humana, ciudadana y social, de los estudiantes que se aproximan al conocimiento matemático; de tal manera, que tal conocimiento se aproxime en sí mismo a ese contexto y entorno que es próximo a ellos, es decir, aquel en el que se desenvuelven cotidianamente. Esto no afirma que el formalismo deba omitirse, pero si establece principios

fundamentales como teoría que pretende relacionar directamente al estudiante con el practicismo de la ciencia que aprende:

En primer lugar, la EMR debe tomar como base situaciones problema, que el estudiante pueda visualizar, reflexionar y que sean susceptibles de inducirlo a estudiarlas; esto con el fin de producir en el estudiante la capacidad de matematizar. Este término, siendo uno de los más emblemáticos en educación matemática, como se indica en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006), ya que desde 1977, Freudenthal introdujo el término “matematización”, y se ha adoptado como un sinónimo de modelación. Sin embargo, es importante puntualizar qué significado tienen tales conceptos, y es que ellos esencialmente funcionan como intermedio entre la situación de estudio, es decir, la situación problema; y la situación ya apropiada por el estudiante, para realizar esquematizaciones, para caracterizar estructuralmente la nueva situación; incluso, motivando a la generación de nuevas conjeturas, teorías u otras formulaciones, que evidencien esa conexión realista de la matemática con el entorno del alumno.

Existen otros principios que describen la EMR de Freudenthal, pero vamos a centrar nuestra atención en la manera como refleja el aprendizaje en matemáticas. Este término, se asocia a una forma de interacción colectiva, que permita comprender los conceptos matemáticos, de forma más eficiente; es decir, por medio de un proceso de construcción social y análisis cooperativo. Por ello, define dos nociones: interacciones sociales verticales (referidas a aquellas que se dan entre el docente y el alumno), y las interacciones sociales horizontales (referidas a aquellas que se dan entre alumnos). Esto indica que los individuos que forman el espacio de aprendizaje trabajan de forma unánime para estudiar las situaciones elegidas con anterioridad por el docente, de tal forma, que cada uno puede reflexionar de ellas, e inferir elementos que lo ayuden a matematizar.

Otro de los principios relacionados al anterior, está dado por la estrecha correspondencia que hay entre los lineamientos curriculares de la matemática en la EMR. Freudenthal pretende con esta teoría, es facilitar la transición del conocimiento informal, al conocimiento formal, en los estudiantes; teniendo el conocimiento pre formal como un proceso incluido entre ellos. Esto con el fin, de brindar una accesibilidad a tal conocimiento, para quien desee aproximarse, es decir, sin exclusión. Para las pretensiones mencionadas, que constituyen una matematización progresiva, es importante reconocer que esa transición no ocurre de la forma estricta que pareciese, como etapas generales; sino que, existen procesos específicos que unidos la conforman; esto es, una matematización vertical y una matematización horizontal. Entendidos como conceptos macro,

cada uno engloba niveles de comprensión, por los cuales se espera, el estudiante atraviese. Estos niveles son: situacional, referencial, general y formal.

En primer lugar, la matematización horizontal, se relaciona solamente con el nivel situacional; en éste, el estudiante debe con sus elementos primarios de análisis y de su experiencia previa, entender e interpretar, la situación de estudio que se le ha presentado, utilizando elementos de ella misma para caracterizarla. Este proceso de reconocimiento ayuda al estudiante a familiarizarse con el desafío propuesto, y le permite entender cómo está percibiéndolo. Esto incluye, los conceptos matemáticos que identifica, su forma de relación, y su papel en la situación. En pocas palabras, es el proceso de indagar el problema de forma estructural.

En segundo lugar, la matematización vertical, comprende los niveles referencial, general y formal. En lo que se busca esquematizar la situación para establecer una representación sistemática de ella, por medio de un modelo matemático. Esto implica la formulación de conjeturas, la realización de pruebas y la forma como se procede de aquellos casos particulares, a la generalidad de los elementos inmersos en la situación.

En el nivel referencial, se utilizan herramientas de tipo visual, material, y el uso de representaciones para elaborar una esquematización inicial de la situación; haciendo énfasis en las condiciones iniciales del problema. Mientras que, en el nivel general, se comienza a pensar sobre qué elementos de la situación son susceptibles de ser generalizables, es decir, a través de la indagación previa, el estudiante va a comenzar en todos los casos posibles, y en la variación de las condiciones y en cómo afecta a su situación de estudio; esto es, reconocer patrones y manipular variables propias para estimar qué tan sustanciales son en el problema. Finalmente, en el nivel formal, el estudiante profundiza en los tópicos matemáticos que ha reconocido, sus formas de manifestación en la situación, con qué otros conceptos están implicados, y qué métodos o procedimientos son necesarios para trabajar con ellos, siendo importante evidenciar que no es estático este nivel, sino que, gracias a la diversidad de las matemáticas existen múltiples maneras de abordar el problema, y así mismo, de reflejarlo en ellas.

2.2 Perspectiva curricular

En este apartado se toma como referencia los aportes que se presentan en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

(2006) y los derechos básicos de aprendizaje, como propuestas pedagógicas del Ministerio de Educación Nacional (MEN), los cuales determinan pautas para el diseño curricular en las instituciones educativas y para propuestas de aula en la escuela.

2.2.1 Desde los Lineamientos Curriculares.

En la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, se presentan cinco procesos contemplados en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), los cuales permiten realizar la actividad matemática; estos son: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Para este trabajo de grado, nos centraremos en los procesos de modelación desde el concepto de función a través de situaciones reales, pues este permite al estudiante no solamente aprender las matemáticas de manera aplicada a las otras áreas del conocimiento, sino también mejorar la capacidad para leer, interpretar, formular y solucionar situaciones problema. Es importante introducir en el aula, alternativas que propicien un espacio en el cual se permita la interacción de diferentes procesos, conceptos y disciplinas, para un aprendizaje más significativo.

2.2.1.1 Propuesta del MEN para la Educación Matemática.

A partir de los Lineamientos Curriculares que expide el MEN se reconoció que la educación matemática debe ir más allá de aspectos académicos, es decir, que involucren otros aspectos importantes como lo social, cultural y político, entre otros, que actúan en los procesos educativos.

Para efecto de este trabajo de grado se tendrá en cuenta el contexto a partir de los lineamientos curriculares que expide el MEN. El contexto tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que les dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas (MEN, 1998, p. 36).

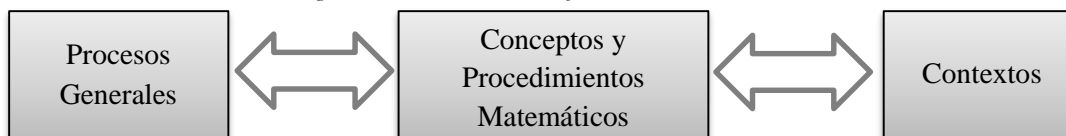
En otras palabras la expresión contexto, tal como se expresa en los lineamientos curriculares, no refiere exclusivamente a la recreación ficticia en el espacio escolar de situaciones relativas al entorno social y cultural que rodean a la institución educativa, sino que ante todo, hace referencia a la creación de situaciones tanto referidas a las matemáticas, otras ciencias, el entorno social y cultural, etc.; como a situaciones hipotéticas a partir de las cuales los alumnos puedan pensar, formular, discutir, argumentar y construir conocimiento. Así pues, la contextualización de los conceptos matemáticos debe ser entendida como el uso de escenarios de las ciencias (naturales y humanísticas), de la vida diaria y las matemáticas, para permitir el desarrollo significativo de la actividad intelectual del estudiante.

Del mismo modo, se reconoció que las matemáticas son una disciplina en constante transformación, pues las matemáticas que se enseñaban años atrás ya no son correspondientes a las necesidades que hoy en día se requieren, ni tampoco a los avances científicos y tecnológicos actuales en términos educativos. Teniendo en cuenta lo anterior, el MEN busca aclarar, promover y orientar a las distintas instituciones educativas, en el desarrollo y ejecución de procesos curriculares en el área de matemáticas, partiendo del hecho que las matemáticas deben ser integradas con la vida y las demás áreas de estudio, es decir que las matemáticas deben ser un medio para explorar la realidad.

Por lo tanto, en relación con el quehacer matemático, los Lineamientos Curriculares proponen tres grandes aspectos para organizar el currículo; estos son procesos, conocimientos básicos y contextos.

En la figura 1, se muestra que estos tres aspectos mencionados anteriormente trabajan de manera transversal, uno relacionado con el otro, y que son aplicados a partir de la elaboración del currículo hasta su ejecución en el aula, así, propiciando un aprendizaje de calidad y, a su vez, ayudando a que no se genere un aprendizaje repetitivo o tradicional de conceptos y procedimientos, sino en procesos de pensamiento ampliamente aplicables y útiles para aprender.

Figura 1. Estructuración de formulación del estándar.



Fuente: (Men,2006;77)

Según la estructuración del currículo de matemáticas en Colombia, los conocimientos básicos se relacionan con los contenidos a enseñar y las habilidades relacionadas con los contenidos matemáticos, al mismo tiempo, con los conceptos y procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático. Por otro lado, los cinco tipos de pensamiento propuestos en los Lineamientos Curriculares: pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional. Cada uno de estos pensamientos está estrechamente relacionado con ciertos contenidos matemáticos como se indica en cada uno de ellos, y a la vez el trabajo con procesos que implementen estos pensamientos facilita la enseñanza de los contenidos correspondientes.

Sin embargo, hay que aclarar que los sistemas correspondientes a cada pensamiento no son ni deben ser el medio exclusivo para desarrollarlo.

Según el MEN, los sistemas son aquellos propuestos desde la Renovación Curricular: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistemas de datos y sistemas algebraicos y analíticos.

Por otro lado, los procesos generales tienen que ver con el proceso de aprendizaje, es decir, es aquel que estandariza el proceso matemático, a través del razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. A continuación, se presentaron las definiciones y explicaciones de cada uno de los procesos en los que se desarrolla este trabajo, correspondientes a los Lineamientos Curriculares para la educación matemática.

2.2.1.2 Procesos de Resolución y el Planteamiento de Problemas.

Este proceso es importante, pues en las actividades curriculares se encuentra presente la mayor parte del tiempo y está principalmente como un elemento para lograr un alto grado de comprensión y manejo de los nuevos conocimientos. Además, involucra e integra contenidos matemáticos presentados en diversas situaciones contextualizadas de diversa índole, pues, a partir del quehacer matemático, se puede llevar a una aplicación en la cual cobra sentido. Este proceso, al abordar situaciones ligadas a experiencias permite que el estudiante pueda llegar a tener interdisciplinaridad para distintas disciplinas y conceptos (no solamente conocimiento matemático), el cual es uno de los objetivos por parte de la resolución de problemas. Esto beneficia al estudiante en tanto que permite resolver problemas no únicamente a partir de las matemáticas,

sino con la intervención de otras áreas del conocimiento que incluye también simbolismos y representaciones que se necesitan para replantear el problema en términos más manejables.

En la resolución y planteamiento de problemas expuesto por los Estándares Curriculares, es importante que los problemas abordados en cada situación sean abiertos, para que sea posible encontrar múltiples soluciones o tal vez ninguna.

A partir de lo anterior, ilustramos dos ejemplos de Resolución de Problemas Matemáticos:

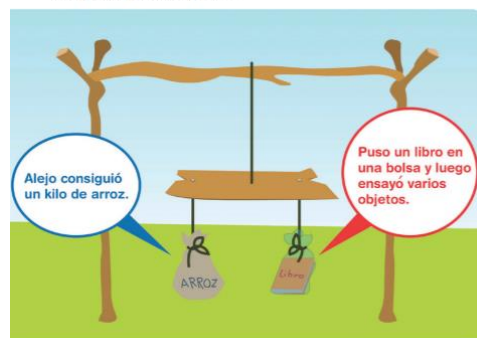
Ilustración 1. Dos ejemplos de ejercicios que involucran la Resolución de problemas

Multiplica, divide, suma y resta fracciones que involucran variables (fracciones algebraicas) en la resolución de problemas. Por ejemplo: Había 8 tortas para repartir entre n niños. Tres niños se fueron antes de la repartición. ¿Cuánto más recibe cada niño? ¿Cuál es la porción extra?

Antes, cada niño recibía $\frac{8}{n}$; Ahora, cada niño recibe $\frac{8}{n-3}$
 porción extra = $\frac{8}{n-3} - \frac{8}{n} = \frac{8n}{(n-3)n} - \frac{8(n-3)}{(n-3)n} = \frac{8n - 8(n-3)}{(n-3)n} = \frac{8n - 8n + 24}{(n-3)n} = \frac{24}{(n-3)n}$
 Así, si había originalmente 15 niños, cada niño recibe $\frac{2}{15}$ más de torta ($\frac{24}{(15-3)15} = \frac{24}{12 \times 15} = \frac{2}{15}$). Si había originalmente 48 niños, cada niño recibe $\frac{1}{90}$ más de torta ($\frac{24}{(48-3)48} = \frac{24}{45 \times 48} = \frac{1}{90}$).

Tomado de: Los Derechos Básicos de Aprendizaje

Analiza diferentes situaciones en las que se comparan objetos según magnitudes y describe estrategias para: calcular la distancia recorrida por un auto que se mueve a cierta velocidad constante durante un intervalo de tiempo; calcula o estima la cantidad de tela que se gastaría en un vestido, la longitud de una cinta para cubrir el borde de una mesa; busca longitudes cercanas a un metro o pesos cercanos a un kilogramo e identifica otros objetos que podrían tener esa longitud o ese peso.



2.2.1.3 Procesos de Modelación.

La modelación está integrada en los distintos procesos presentes en el desarrollo cognitivo del estudiante, como lo vemos en la resolución de problemas y el razonamiento, que a la vez constituyen este proceso; por ende, la modelación es de gran importancia en la educación matemática, debido a que su participación en una situación problema, cuyos datos no revelan cómo proceder para ser resuelta, permite dar un panorama de lo que se presenta en ella.

Por lo anterior, podemos decir que este proceso es donde el estudiante pone en juego sus conocimientos, y la destreza para utilizarlos, para crear un modelo matemático que dé cuenta de la situación para ser resuelta matemáticamente. La ejecución y aplicación de este proceso de modelación de una situación a términos matemáticos dan cuenta del éxito que ha tenido el

estudiante y como este se ha apropiado del conocimiento y ha creado herramientas valiosas para ver cómo es el funcionamiento del conocimiento en situaciones diferentes. (MEN, 1998, p. 76)

Por otra parte, el proceso de modelación que se emplee en una situación problema contextualizada permite decidir qué variables y relaciones entre variables son importantes, lo que posibilita establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, obtener resultados y verificar qué tan razonables son éstos respecto a las condiciones iniciales.

A partir de lo anterior, ilustramos algunos ejemplos de la Modelación Matemática:

Ilustración 2. Ejemplos de ejercicios que involucran la modelación

Manipula expresiones lineales (del tipo $ax + b$, donde a y b son números dados), las representa usando gráficas o tablas y las usa para modelar situaciones. Soluciona ecuaciones lineales (del tipo $ax + b = c$, donde a , b y c , son números dados). Por ejemplo:

- Soluciona la ecuación $7 - 3x = 11$:

Opción 1:

$$\begin{array}{l} 7 - 3x = 11 \\ +3x \quad +3x \\ \hline 7 = 11 + 3x \\ -11 \quad -11 \\ \hline -4 = 3x \\ +3 \quad +3 \\ \hline -\frac{4}{3} = x \end{array}$$

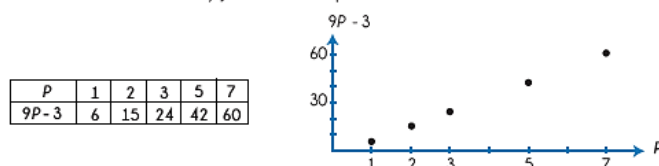
Opción 2:

$$\begin{array}{l} 7 - 3x = 11 \\ -7 \quad -7 \\ \hline -3x = 4 \\ +(-3) \quad +(-3) \\ \hline x = -\frac{4}{3} \end{array}$$

- Luisa tiene cuatro veces más primos que Felipe. Jairo tiene 3 primos menos que Luisa. Entre los tres tienen 42 primos. ¿Cuántos primos tiene cada uno?

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Felipe} & \text{Luisa} & \text{Jairo} & \text{Total} & & & \\ P & + & 4P & + & 4P - 3 & = & 9P - 3 = 42 \rightarrow 9P = 45 \rightarrow P = 5 \end{array}$$

Así, Felipe tiene 5 primos, Luisa tiene 20 primos (4×5),
y Jairo tiene 17 primos ($20 - 3$).



- La gasolina subió 4% de un día para otro. Es decir, se multiplicó por un factor de 1,04.

$$\begin{array}{l} \text{Factorizar G} \\ G + 0,04G = (1 + 0,04)G = 1,04G \\ \text{G más 4\% de G} \end{array}$$

aumentar en 4% es multiplicar por 1,04

Tomado de: Los Derechos Básicos de Aprendizaje

En pocas palabras, las políticas educativas y pedagógicas para la enseñanza del conocimiento matemático en Colombia están recogidas en los Lineamientos Curriculares, emanados por el MEN.

Se espera que en lo filosófico la Educación Matemática trascienda lo meramente académico y esté más asociada con lo social, cultural y político de la vida del estudiante. En lo curricular, se espera que la educación matemática se vea integrada a las demás áreas del conocimiento como lengua, historia, etc. En lo operativo, se debe tener presente los aspectos de procesos, conocimientos básicos y contextos. Estos buscan una ejecución no tradicional, repetitiva y memorística; se espera que la educación matemática tenga una aplicación útil y provechosa en la vida cotidiana del estudiante. Es precisamente en este nivel operativo-funcional en el que se hacen presentes los procesos generales matemáticos, que están conformados por la resolución y planteamiento de problemas y la modelación.

La estrategia de resolución y planteamiento de problemas aportan sus tres características básicas: la aplicabilidad y adaptabilidad a la vida cotidiana del estudiante; la transversalidad curricular, que permite ver el uso de la matemática en las otras áreas de conocimiento; y la libertad en la respuesta, no se puede limitar la resolución del problema a una y única respuesta, porque los problemas de vida cotidiana se pueden abordar y resolver desde diferentes ángulos posibles y coherentes. Este aporte se da gracias a la modelación, en tanto que esta aporta la modelación matemática, o la representación mental y cognitiva, de planteamiento del problema y su respectiva solución.

2.2.2 Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.

El propósito de los estándares de competencias en matemáticas debe responder a la estructuración del currículo de matemáticas. Es decir, esos estándares se adaptan al grado del estudiante y según el tipo de pensamiento matemático que se va a estudiar, pero teniendo en cuenta los procesos y contextos, como se observa en la gráfica 1. La génesis de dichos estándares de competencias en matemática se debe a factores educativos, sociales y políticos. En efecto, en el primer factor se busca una educación de calidad y de excelencia en condiciones de igualdad y equidad para todos los ciudadanos; con el segundo factor, se espera que la matemática tenga un valor social en la medida que dé respuestas a problemas sociales cotidianos y reales de los estudiantes; el factor político pretende que el rol de la educación matemática contribuya en la consolidación de los valores democráticos.

La conceptualización de competencia matemática se asume de forma amplia en tanto que es un conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras transversales, integrales, complementarias y relacionadas entre sí, cuyo objetivo general es contribuir con un desempeño matemático que no sea rígido, eficaz, retador y desafiante para el estudiante.

Vista de esta forma, la competencia matemática es un indicador de la formación en matemáticas, concebida como proceso y no como un producto terminado y aislado. Si se asume la formación en matemáticas como un proceso continuo, entonces el aprendizaje de las matemáticas no es inmediato y terminado en cada grado u objetivo enseñado, sino que se da en un progresivo crecimiento de adquisición en cada objetivo impartida, y asociado dicho crecimiento a los contextos institucionales y socioculturales en donde se desarrolla. Pero, hay también un contexto menor e inmediato que propicia el desarrollo de las competencias, como es el aula de clase. El aula debe propiciar y promover un ambiente de aprendizaje que permita ese crecimiento de las competencias en matemáticas; aquí, el rol de profesor es clave, en tanto que este se debe esperar en presentar situaciones problemas significativos, comprensivos y relevantes para el estudiante; así, se posibilita un avance rápido y consolidado a niveles de competencias más y más complejos.

El aprendizaje de las matemáticas se da, pues, de forma gradual, continua e integradamente, porque así se logra la superación de los niveles de complejidad creciente que se plantea en el proceso educativo matemático. Esto necesita e implica una alta coherencia tanto vertical como horizontal. La coherencia vertical supone la integración y relación de un estándar general con los otros estándares del mismo pensamiento que se imparte en los otros grados. La segunda implica el mismo proceso de integración, pero de un estándar particular.

Así, por ejemplo, la función cuadrática en el nivel de octavo a noveno grado, en la coherencia vertical se da con el pensamiento variacional; mientras que en la coherencia horizontal estará subordinada a la tarea particular asignada al estudiante.

Por otro lado, en el documento de los estándares se da mucha importancia al conocimiento previo del estudiante; es decir, cuando el estudiante va a la escuela ya tiene un saber sobre matemática, que aprendido en su casa y en su vida cotidiana. Este conocimiento matemático, de naturaleza informal, debe ser aprovechado por el docente. En esta medida se alimentan en el estudiante actitudes positivas hacia las matemáticas como el aprecio, la seguridad y la confianza.

Se trata de hacer uso mayéutico de este saber informal matemático, que unido con el conocimiento formal, permite la aplicación de las matemáticas en diversos y variados contextos de uso.

Así mismo, el documento de los estándares de competencias en matemáticas se proponen orientaciones referidas a la evaluación. Se inclina por la evaluación formativa, más que la acumulativa, que unida con una adecuada presencia y uso de los materiales y recursos didácticos, permiten el progreso en el aprendizaje matemático; por supuesto sin olvidar las actividades tanto individuales como grupales. Todos los elementos didácticos se adaptan al grado en el que esté ubicado el estudiante. A continuación, para efectos de este trabajo, se presenta una breve descripción del pensamiento variacional, el cual se va a tener en cuenta para el desarrollo de este trabajo.

2.2.2.1 Desde el Pensamiento Variacional.

Puesto que el pensamiento variacional se vincula directamente con la función cuadrática, se consideró necesario ampliar un poco más lo que se propone en el MEN para su desarrollo, pues se busca mirar la coherencia curricular en las praxeologías didácticas.

El pensamiento variacional, como su nombre lo indica, pone su acento en el estudio sistemático del concepto de variación y cambio en diferentes contextos: en las ciencias naturales y experimentales, en la vida cotidiana y en las matemáticas mismas. Desde lo matemático hay una relación directa con los otros pensamientos, muy especialmente el métrico pues el pensamiento variacional se encarga, fundamentalmente, de la modelación matemática y esto requiere de la activación constante de procesos de medición, elaboración de registros y establecimiento de relaciones entre cantidades de magnitud (MEN, 1998).

Es así como la comprensión de las situaciones provenientes de la observación y la sistematización de patrones y regularidades, tanto numéricas como geométricas, las variaciones proporcionales, las ciencias experimentales, la ingeniería y demás áreas del conocimiento que se basen en los principios de cálculo diferencial, adquieren más sentido cuando se estructuran desde el pensamiento variacional (Universidad de Antioquia, 2007, p. 15).

El pensamiento variacional puede describirse como una manera de pensar dinámica que intenta reproducir mentalmente sistemas que relacionan sus variables internas, de tal manera que

covarién en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de las mismas o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (Vasco, 2002, p. 70)

El MEN (1998) mostró que el desarrollo del pensamiento variacional debe iniciarse desde los primeros años de escolaridad a través de situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de variación y cambio, cuyo interés se enfatice a que sean situaciones de la vida práctica buscando propiciar la implementación de estos procesos por parte de los estudiantes y tratar de que los reconozcan, se familiaricen con ellos y le faciliten la comprensión de los conceptos matemáticos.

Por tanto, el MEN (1998) delega al profesor una gran responsabilidad, ya que le encarga el estudio de los diversos aspectos que intervienen en el aprendizaje del estudiante como lo es el aspecto sociocultural, espacio que le ofrece unas herramientas al individuo desde las cuales él puede abordar o interpretar todo lo que pueda influenciar su formación, el docente debe tenerlo en cuenta y tratar de potenciar este aprendizaje mediante el diseño e implementación de situaciones amplias y diversas que vayan orientadas a que los alumnos puedan establecer relaciones con su accionar cotidiano y sus experiencias escolares. Con esto se hizo evidente que el futuro maestro que vaya a desempeñar la labor de enseñar las matemáticas debe vigilar que su práctica sea coherente con la propuesta del MEN (considerando básicamente el funcionamiento en el ámbito escolar).

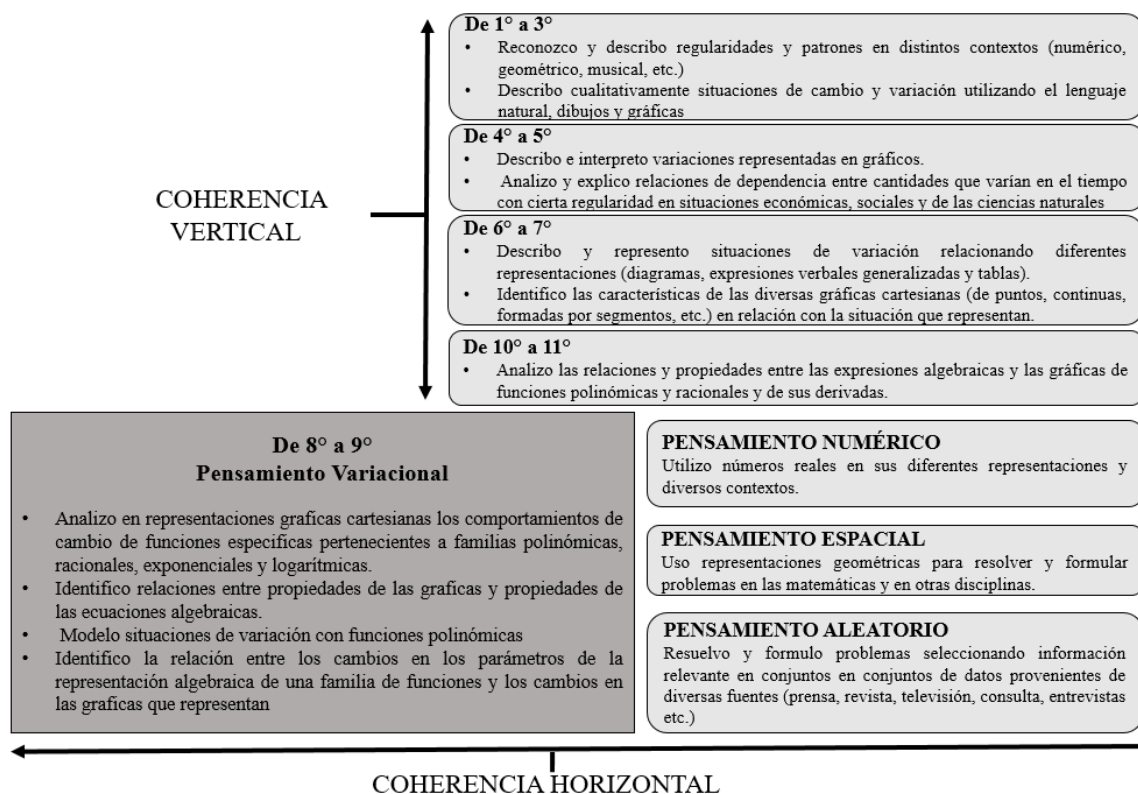
Ante lo expuesto, surge la necesidad de considerar el caso del texto escolar, ya que como se mencionó éste tiene una función educativa ayudando al estudiante a acercarse al conocimiento matemático. Sin embargo, este acercamiento al conocimiento que pretende el texto no es fácil de lograr, debido a consideraciones que se destacan en la propuesta del MEN. El texto escolar no siempre tiene presente los aspectos socioculturales que caracterizan a cada individuo por ser un objeto comercial que depende de su aceptación masiva. También se puede presentar el caso de que la propuesta del texto escolar no considere que los procesos de enseñanza estén encaminados al desarrollo de competencias básicas en Matemáticas.

En fin, el documento de los estándares de competencias en matemáticas muestra las políticas curriculares y pedagógicas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Colombia; al tiempo que propone orientaciones puntuales en el nivel operativo y funcional del aula, que permitirán el desarrollo continuo, progresivo e integral del pensamiento matemático general. En el caso particular, el pensamiento variacional aporta en la formación matemática una

forma de pensar dinámica, cambiante, adaptable y libre para la comprensión y resolución del problema planteado, que dependerá del contexto sociocultural cotidiano y real del estudiante y de su personalidad. Estos elementos son importantes en este proyecto en tanto que va a permitir una mejor propuesta en el marco del Aprendizaje Basado en Proyectos para el aprendizaje de la función cuadrática, centrada en los procesos de modelación matemática.

A continuación, se muestra la gráfica 2, en el cual se relacionan algunos estándares articulados al estudio de la función (ecuación cuadrática), en el grado noveno. Para objeto de este trabajo se hace referencia a la coherencia vertical y horizontal, del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos con los estándares de otros pensamientos y de él mismo.

Figura 2 Coherencia Vertical y Horizontal de los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas para grado 8° y 9°.



Como se pudo observar en el esquema anterior, el concepto, la representación y la contextualización de función están presente en diferentes pensamientos, de tal manera que lo dicho por el MEN (2006) en cuanto a la relación que hay entre los elementos conceptuales y los cinco tipos de pensamiento matemático y que a su vez son aprovechados para el diseño de situaciones

de aprendizaje. En nuestro caso será un gran recurso para fortalecer y darle base suficiente a la elaboración del proyecto, teniendo en cuenta la metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos.

2.2.3 Derechos Básicos de Aprendizaje.

En el afán de mejorar la calidad educativa del país, el gobierno, y en particular el Ministerio de Educación, ha venido desarrollando diferentes herramientas para fortalecer las prácticas escolares y así mejorar los aprendizajes de los niños, niñas y jóvenes de Colombia. Por eso han desarrollado Los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), como una herramienta dirigida a la comunidad educativa en el cual se identifican los saberes básicos que se pretende, deben aprender los estudiantes en cada uno de los grados de escolaridad, de primero a once, y en las áreas de Lenguaje y Matemáticas.

Los Derechos Básicos de Aprendizaje se relacionan estrictamente con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias (EBC) para guardar su coherencia en los contenidos que se enseñan. La diferencia que este documento presenta con los lineamientos es que en este se plantean elementos para la construcción de rutas de aprendizaje año a año para que, como resultado de un proceso, los estudiantes alcancen los EBC propuestos por cada grado escolar. Pero, no obstante, los DBA se deben considerar como un apoyo para el desarrollo de propuestas curriculares que pueden ser articuladas con los enfoques, metodologías, estrategias y contextos definidos en cada establecimiento educativo, esto quiere decir, que cada institución es autónoma de generar sus propias estrategias, pero partiendo de estos recursos dados por el ministerio, así mismo, en el marco de los Proyectos Educativos Institucionales materializados en los planes de área y de aula.

Sin embargo, esta relación estricta que el Ministerio de Educación plantea en los tres documentos (Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Competencias y Derechos Básicos de Aprendizaje) solo se da a nivel teórico, pero no en el sentido práctico de aula. Así, por ejemplo, si se toma el objetivo para la función cuadrática que se indica en los Derechos Básicos de Aprendizaje se puede percibir esta contradicción.

En los Derechos Básicos de Aprendizaje se señala este saber básico para la función cuadrática:

Expresa una función cuadrática ($y = ax^2 + bx + c$) de distintas formas ($y = a(x + d)^2 + e$, o $y = a(x - f)(x - g)$) y reconoce el significado de los parámetros a , c , d , e , f y g , y su simetría en la gráfica. (Grado 9º, p. 2)

Y luego, se propone un solo y único ejercicio para lograr este aprendizaje, pero este ejercicio solo tiene una única solución, y con ello queda eliminado el pensamiento variacional, que se establecen en los Lineamientos Curriculares; así el proceso de modelación se reduce también a una sola manera de representar cognitivamente el problema que se propone. De igual manera, en relación con los Estándares Básicos de Competencias es incoherente que un solo ejemplo del concepto de función cuadrática contribuya a la adquisición, desarrollo y consolidación de ese conocimiento matemático; debido a que él engloba un conjunto de elementos articulados entre sí, para constituirse como un objeto matemático, y es importante estudiarlo desde diferentes perspectivas y representaciones, para entender explícitamente cómo se interrelacionan.

Por otro lado, los conocimientos que se requieren para dar solución al problema planteado para lograr ese objetivo de comprender el concepto de función cuadrática están dispersos; es decir, los conocimientos de representación gráfica, resolución de variables, entre otros, están separados por la organización temática en la que se encuentra dicho concepto. No se ofrecen otros ejercicios que, aunque no sean resueltos en el documento, pudieran dejar la puerta abierta otras posibilidades, y su adaptación a los diversos contextos socioculturales e institucionales de Colombia.

La progresividad en el aprendizaje del conocimiento matemático, como señala los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, sugiere que primero se estudia la fórmula canónica de la función cuadrática y luego las distintas escrituras de ella. De tal forma que no es oportuno estudiar esos dos saberes en un solo contenido, como plantean los DBA en grado noveno. Se puede decir que no hay una estricta coordinación, relación y coherencia pedagógica y educativa entre los tres documentos.

2.3 Perspectiva matemática

En este apartado no se ahondará en el desarrollo histórico del objeto matemático central de nuestro proyecto, la función cuadrática; sino que se hará referencia a la teoría matemática formal, que acepta o rechaza la manera como se abordan las definiciones de la función en la escuela.

En la perspectiva matemática se tomará en cuenta el concepto de función en general desde Azcárate, C. (1996); pero como este proyecto está centrado en la función cuadrática, se realiza un estudio de la misma desde la perspectiva que se brinda en el libro Matemática, *Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado*, de Illuzi, A. y Sessa, C. (2010).

2.3.1 Algunos aspectos formales del Concepto de Función.

La introducción al estudio de las funciones numéricas en la escuela, está mediada por la conceptualización y formalización del mismo concepto, apoyados en la teoría matemática construida a través del tiempo. Tales referentes teóricos sufren cambios en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje por medio del discurso utilizado por el docente y los textos escolares que se utilizan en el aula de clase. A continuación, se realiza un acercamiento del concepto de función en general desde la perspectiva de Azcárate C (1996) presentado en su libro *Funciones y Gráficas. Matemáticas: cultura y aprendizaje*.

2.3.1.1 ¿Qué es una función?

De manera intuitiva, se puede decir que una función matemática corresponde a una dependencia entre cantidades o magnitudes. En donde, existe una variable que se moviliza en un rango de valores (denominada como **variable independiente**), que genera un cambio directamente en una y solo una cantidad o magnitud sujeta a su comportamiento (denominada como **variable dependiente**). Por lo tanto, en una función se pueden definir distintos parámetros, los cuales la componen con respecto a su notación matemática.

2.3.1.2 El Problema de Definir: Diversas Definiciones en los Libros de Texto.

En los libros de texto, antiguos o actuales, la metodología que se emplea para introducir el concepto de función es muy variada. Hay libros en los cuales se presenta la definición de él, y seguido a ello se realiza un estudio detallado sobre los aspectos teóricos que se derivan de ella; estos libros son comúnmente, aquellos que se utilizan para abordar el concepto desde una perspectiva más formal. Mientras que hay otros que indican la definición, y continúan con

ejemplos concretos para mostrar cómo se aplica o qué tipo de contextos puede observarse, en donde ocurre en algunos casos, que ellos son alejados de la realidad; y otros libros, abordan el estudio de funciones desde ejemplos que luego servirán para llegar a la definición.

En el libro de Azcárate & Deulofeu (1990), se presentan algunos ejemplos del tratamiento que se da al concepto de función en los libros de texto, a partir de algunos libros observados en la secundaria E. Castelnuovo (1996). En estos se pueden observar las distintas definiciones, las cuales se pueden resumir como:

- Correspondencia entre valores de variables.
- Correspondencia entre elementos de dos conjuntos.
- Dependencia entre dos variables.
- Conjunto de pares ordenados.

Azcárate menciona que por la gran variedad de definiciones que se presentan del concepto de función, no existe un criterio estándar que permita introducir este concepto. También, este diverso tipo de definiciones involucran otros términos como: variable, correspondencia, relación etc.

2.3.2 Características de una Función $f(x)$.

En primer lugar, debemos especificar qué condiciones se necesitan que una función esté bien definida: Para x (variable independiente) sobre la cual la función está definida, **existe su imagen**. Además, esta imagen **debe ser única**; esto es, que no existen dos o más imágenes para algún x .

Como lo menciona Azcárate, una función está formada por tres elementos:

1. **Dominio:** Es el conjunto de valores sobre los cuáles está definida la función. Llamado comúnmente como conjunto de salida.
2. **Codominio:** Es el conjunto de valores asociados a los valores del dominio de la función, es decir, el conjunto de las imágenes de la función.
3. **Regla de asignación:** Es una condición que especifica como se relaciona cada x (variable independiente) del dominio, con un elemento y (variable dependiente) del codominio.

Por medio de las ejemplificaciones que presentan Azcárate & Deulofeu (1990), podemos evidenciar que hay diferentes maneras de expresar las funciones; lo cual describiremos a continuación:

Los autores mencionados utilizan cuatro formas para representar las funciones:

- a. Expresión verbal:** Esta forma utiliza la lengua natural para describir la regla funcional de asignación entre dos conjuntos. Por ejemplo, Azcárate & Deulofeu (1990) presentan la función sobreyectiva³ (pp. 29):

$$\begin{aligned} h: Z &\rightarrow S \\ x &\rightarrow h(x) = \text{resto de dividir } x \text{ por } 7 \end{aligned}$$

La manera como se expresa el residuo del cociente de x entre 7, fue realizada con lengua natural, por medio de la expresión “resto de dividir x por 7”.

b. Fórmulas

Una forma de indicar una función por medio de una fórmula sería utilizando expresiones algebraicas, tal como sigue: Consideremos la función

$$\begin{aligned} g: X &\rightarrow Y \\ x &\rightarrow g(x) = 7x \end{aligned}$$

Dicha función $g(x)$ es definida por medio del producto entre el escalar 7 y una variable x , pero se expresa solamente la operación, sin exponerla en lenguaje natural.

c. Tablas y gráficas

Conocer la forma como se expresa una función por medio de fórmulas y en expresión verbal, en ocasiones nos brinda información relevante de acuerdo con su estructura; podemos identificar rasgos de su dominio y codominio, empleando métodos analíticos, tal como en el caso de la función:

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow Y \\ x &\rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Donde podemos identificar que $x = 0$ no pertenece al dominio de la función f , dado que la indetermina. Sin embargo, estas fórmulas describen modelos ya precisados. Y en múltiples casos, es ese modelo el que debemos identificar por medio del comportamiento

³ La función sobreyectiva la definen Azcárate & Deulofeu (1990) como aquella donde todos los elementos del codominio, son imagen por lo menos de un elemento del dominio.

de los valores particulares que obtenemos para los elementos del dominio y codominio, y una forma muy práctica de presentarlos, es por medio de tablas y gráficos.

La construcción de las tablas consta de dos filas, o también dos columnas, donde en una de las filas se registra los elementos del dominio de la función, y en la segunda, se ubican los elementos correspondientes al conjunto de llegada (codominio). Así pues, aparecen explícitamente los pares de origen – imagen, que se suelen simbolizar como x e y . Un ejemplo de esto lo podemos ver a continuación:

“Dado un x arbitrario del subconjunto de Z , $10 < x < 20$, al dividirlo por 7 tiene asociado un resto y , que es uno de los elementos del conjunto S ”.

Tabla II. X vs. Y

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y	4	5	6	0	1	2	3	4	5

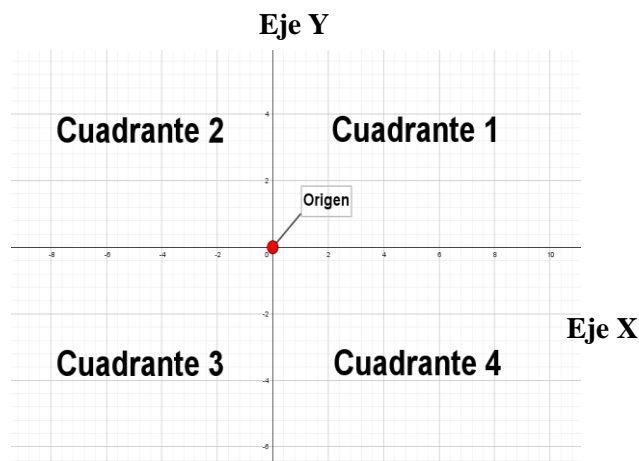
Fuente: Azcárate & Deulofeu (1990), Funciones y gráficas.

Como se observa en el ejemplo anterior, el dominio de la función es un conjunto finito, y por tanto se puede expresar todos los pares origen – imagen de la función. Sin embargo, si el dominio es un conjunto infinito, solo se puede hacer una representación parcial y se escogen unos cuantos valores que representen la función.

La construcción de la tabla permite observar regularidades en el comportamiento de la función, como son: diferencias constantes, diferencias que crecen o decrecen, productos o cocientes constantes, etc. Además, es de gran utilidad para recoger datos experimentales, tanto para verificar una ley como para descubrirla.

La representación gráfica más clásica y común, es el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, la cual está conformada por dos rectas perpendiculares, donde la horizontal representa el eje x (abscisas) y la vertical representa el eje y (ordenadas). El punto de intersección de las rectas se conoce como origen de coordenadas y se representa con la letra O . Cada punto P en el plano tiene asignado dos números, correspondientes a la posición en cada uno de los ejes mencionados, indicando además la distancia a ellos, y se expresan por medio de coordenadas como $P(x,y)$ (Ver gráfica 1).

Gráfica 1. Plano Cartesiano



Fuente: <https://www.matematica7.com/plano-cartesiano.html>.

Gráfica SEQ Gráfica * ARABIC 3.

Los problemas que usualmente se trabajan con la gráfica de una función, es su lectura e interpretación. Para ello se puede construir la gráfica de la función a partir de una tabla, utilizando algunos valores (pares), los cuales se trasladarán a los puntos correspondientes en el plano cartesiano.

En la perspectiva matemática se hizo un acercamiento del concepto de función en general desde Azcárete, C. (1996); pero como este proyecto está centrado en la función cuadrática específicamente, se realiza un estudio de esta desde la perspectiva que se brinda en el libro *Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado*, de Illuzi, A. y Sessa, C. (2010).

A diferencia del libro de Azcárete, C. (1996) que se centra en lo teórico y poco en lo didáctico, el libro de Illuzi, A. y Sessa, C. (2010) pone énfasis en lo didáctico y lo práctico. La teoría surge de ese manejo práctico, mediante ejercicios divertidos y amenos.

En los dos primeros capítulos (Construcción de fórmulas cuadráticas para contar colecciones e Introducción a la función cuadrática a partir de problemas en contextos geométricos), se estudia la función cuadrática sin el abordar de su fórmula matemática, y sin los elementos que esto implica. El primero propone situaciones que implican el conteo de ciertos elementos de una figura cuyo “tamaño” varía”, así que puede haber más de una solución y varias formas de dar esa respuesta; esto evidencia la presencia del pensamiento variacional. Mientras que el segundo capítulo propone el análisis del modo de variación de una función cuadrática y la forma de su

gráfica. La función cuadrática se puede aplicar en la solución de varios tipos de problemas y esto también plantea que la resolución se puede representar de diversas formas (tabla de valores, gráfica cartesiana, fórmulas, etc.); también se busca que el estudiante pueda hacer varias fórmulas equivalentes. Nuevamente, se hace presente el pensamiento dinámico, cambiante y adaptable a varias situaciones de vida.

El tercer capítulo estudia la función cuadrática a partir de la forma canónica de su fórmula. Se observa en este capítulo un proceso de progresividad del aprendizaje matemático, porque solo después de dos capítulos aparecen con propiedad los elementos formularios de función cuadrática. A partir de su fórmula, se expone situaciones geométricas que involucran funciones cuyo gráfico es una parábola. Se usa la expresión canónica de la función cuadrática. En el capítulo siguiente, se usa la forma factorizadas y la desarrollada: $ax^2 + bx + c$. Por tal motivo, este cuarto capítulo resuelve problemas usando distintas expresiones algebraicas de una función cuadrática. Por lo tanto, se quiere que el alumno comprenda, mediante los distintos ejercicios y actividades, que cada expresión de la fórmula de una función cuadrática aporta una información particular sobre su gráfica.

Otro aspecto didáctico de este libro analizado es el uso de actividades grupales e individuales, así como escritas, y otras cuyas soluciones se dan de modo oral. Y un mismo tema es estudiado con varios ejercicios, y dan más de tres o cuatro posibles soluciones (si es el caso); esto con el fin de advertir al profesor de las diversas maneras que puede ser modelado esos problemas planteados.

Esta visión del aprendizaje de las matemáticas y de modo particular de la función cuadrática que presenta el libro Illuzi, A. y Sessa, C. (2010), es muy orientador cuando se quiere hacer una propuesta que favorezca el aprendizaje de la función cuadrática, privilegiando los procesos de modelación matemática, porque ofrece muchos elementos didácticos y prácticos a ser considerados e imitados, tal como la presencia del pensamiento variacional en la resolución de los ejercicios; además, se centra únicamente en cuatro aspectos básicos de la función cuadrática, y no en muchos objetivos que pudieran saturar y agotar al estudiante; presentando también varios ejercicios en cada objetivo; se usan colores en las representaciones gráficas o en las otras respuestas; ofrecen actividades individuales y grupales, cuyas respuestas pueden ser orales o escritas o ambas; brinda orientaciones al docente y permite que los ejercicios puedan ser modificados y adaptados al contexto de aula.

A continuación, se presenta la teoría correspondiente al objeto matemático de función, en particular el de función cuadrática, la cual fue tomada de los textos académicos de Zill y Dewar (1992).

2.3.3 Algunos aspectos del concepto de Función cuadrática.

La función cuadrática o polinomial o de segundo grado, es una función definida de \mathbb{R} en \mathbb{R} , de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ donde } a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ y } a \neq 0.$$

La anterior expresión se denomina la forma general de una función cuadrática, y por medio de ella, podemos mostrar los tres elementos que la componen:

- I. Inicialmente tenemos un término, en donde la variable x se encuentra elevada al cuadrado. El coeficiente a que lo acompaña debe ser distinto de cero, dado que, si se permitiese esta condición, la función correspondería a una función lineal de la forma $f(x) = bx + c$, dado que $a = 0$, y la gráfica cartesiana correspondiente cambiaría de ser una parábola, a ser una recta.
- II. El segundo término, dado por bx , incluye a la variable x con exponente 1. En este caso, la constante que lo acompaña puede tomar cualquier valor de los reales.
- III. El tercer término, es aquel donde la variable tiene exponente cero, por lo que corresponde a una constante C .

Teniendo en cuenta estos componentes de la expresión general de una función cuadrática, podemos generar otras maneras de presentarla, en donde corresponde a casos generales donde $b = 0$, $c = 0$, o ambos a la vez. Así, se consignan las múltiples expresiones, como se ve a continuación:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = ax^2 + bx$$

$$f(x) = ax^2 + c$$

$$f(x) = ax^2$$

$$a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ y } a \neq 0.$$

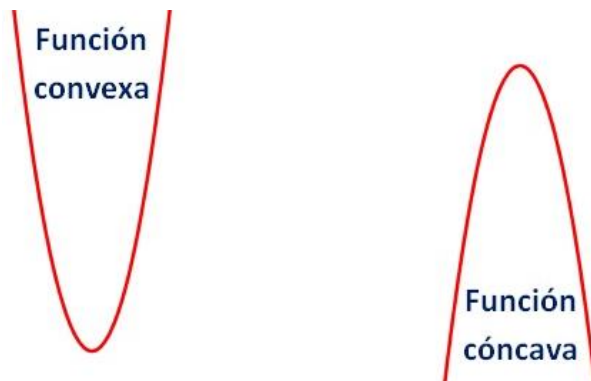
$$a, b \in \mathbb{R}, \text{ y } a \neq 0, c = 0$$

$$a, c \in \mathbb{R}, \text{ y } a \neq 0, b = 0$$

$$a \in \mathbb{R}, \text{ y } a \neq 0, b = 0 \text{ y } c = 0$$

Un aspecto importante sobre la gráfica de una función cuadrática es la **concavidad de la parábola**. Esta se determina por el valor que tiene el coeficiente que acompaña el primer término, donde si $a > 0$, la curva *abre hacia arriba* (y es una función convexa), y si $a < 0$, la curva *abre hacia abajo* (la función es cóncava).

Gráfica 2. Característica de la gráfica de la parábola



Gráfica de dos parábolas: una convexa y la otra cóncava.

Fuente: <http://www.matematicasdigitales.com/concavo-convexo-la-eterna-polemica/>

A continuación, se pretende describir analíticamente qué ocurre en cada uno de los casos precisados para la expresión general, en relación con su representación geométrica:

I. Caso 1: La expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$

Para analizar la forma completa de la función cuadrática, se recomienda realizar la gráfica de por lo menos dos funciones que se encuentren dentro de la familia de funciones que se describen con dicha expresión, en un mismo plano, en donde al realizar cambios en los coeficientes, podemos concluir que:

- ✓ La gráfica de este tipo de funciones es una parábola y su eje de simetría es paralelo al eje de las ordenadas.
- ✓ El signo del coeficiente a determina la abertura de las ramas de la parábola.
- ✓ El signo del término independiente c indica el punto de corte de la curva con el eje de las ordenadas.
- ✓ El vértice de la parábola tiene como coordenadas:

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Cuando en una función cuadrática hacemos $f(x) = y = 0$, tenemos una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, y $a \neq 0$. Teniendo en cuenta esta consideración, definimos $\Delta = b^2 - 4ac$ como el **discriminante**, y con respecto a él se cumple que:

- ✓ Si $\Delta > 0$, entonces la ecuación tiene dos raíces reales y diferentes.
- ✓ Si $\Delta = 0$, entonces la ecuación tiene dos raíces reales e iguales.
- ✓ Si $\Delta < 0$ entonces la ecuación no tiene solución en los reales, y por tanto, las raíces son complejas.

II. Caso 2: La expresión $f(x) = ax^2 + bx$

Podríamos afirmar que esta función está incompleta, debido a que le falta el término constante c , y esto no es en el sentido literal, sino que se tomó $c = 0$.

Si realizamos variaciones en los coeficientes a y b , obtenemos que cuando el término bx es positivo, la curva se desplaza hacia la izquierda, y cuando el término bx es negativo la curva se desplaza hacia la derecha. En este caso, podemos caracterizar la parábola resultante como sigue:

- ✓ Su eje de simetría es el eje de las ordenadas.
- ✓ La abertura de sus ramas está determinada por el coeficiente a ; si $a > 0$, entonces las ramas de la parábola “*abren hacia arriba*”, y si $a < 0$, entonces, lo hacen “*hacia abajo*”.
- ✓ El origen del sistema de coordenadas satisface este tipo de funciones.
- ✓ El signo del segundo término bx indica la forma en que la curva se traslada sobre el eje de las abscisas.

III. Caso 3: La expresión $f(x) = ax^2 + c$

En este caso, la forma es incompleta dado que $bx = 0$. Al graficar esta función notamos que cuando la constante c es positiva la gráfica se desplaza hacia arriba, y cuando es negativa se desplaza hacia abajo. También podemos detallar que:

- ✓ La representación gráfica de esta función cuadrática es una parábola.
- ✓ Es simétrica con respecto al eje de las ordenadas.

- ✓ La abertura de la parábola está determinada por el coeficiente a . Si $a > 0$, la parábola “abre hacia arriba” y si $a < 0$, entonces “*abre hacia abajo*”.
- ✓ El vértice de la parábola es un punto de la forma $(0, c)$
- ✓ El término independiente y su signo indican cuánto se desplaza el vértice de la parábola sobre el eje de las ordenadas en relación con el punto de origen.

IV. Caso 4: La expresión $f(x) = ax^2$

El análisis para este caso es muy similar a los anteriores, con la diferencia de que, dado que la gráfica de esta función sigue siendo una parábola, el vértice de ella es el origen del sistema de coordenadas.

Finalmente, es necesario realizar unas reflexiones sobre las tres perspectivas analizadas como se muestra en la siguiente ilustración. La perspectiva didáctica advierte que es necesario desarrollar actividades que contribuyan a una mejor comprensión e interpretación del concepto de Función por parte del estudiante; no deben ser actividades descontextualizadas e irreales al mundo del estudiante; y, al mismo tiempo, con un alto grado de abstracción para el grado donde se encuentra el estudiante, de forma tal que este puede tratar con destrezas y habilidad las expresiones algebraicas a nivel simbólico (si es el caso) o su manejo en representaciones gráfica o natural.

Por su lado, la perspectiva curricular hace énfasis en los aspectos sociales, culturales y políticos en el manejo del aprendizaje de las matemáticas; como un saber formal práctico, las matemáticas se introducen en la vida del estudiante y solicita de las autoridades una educación de calidad, enraizada en los valores democráticos y sociales. Un marco de Aprendizaje Basado en Proyectos para el aprendizaje de la función cuadrática debe también tener en cuenta esos valores.

Mientras las dos perspectivas anteriores (didáctica y curricular) se centran en el escenario de la enseñanza, así como en las actividades y los materiales didácticos del aprendizaje, la perspectiva matemática se centra en el que enseñar; es decir, en el contenido teórico y nocional que es oportuno para estudiantes de grado 9° de educación básica, que van a aprender la función cuadrática, mediante el privilegio de procesos de modelación matemática. De tal forma que la perspectiva matemática obliga a una adaptación de lo teórico al contexto del desarrollo cognitivo y mental del estudiante para así facilitar es modelación matemática de la función cuadrática.

De acuerdo a las perspectivas mencionadas anteriormente, en la siguiente gráfica 4, podemos observar los aportes que realizan cada una de estas perspectivas a grandes rasgos para el desarrollo de este trabajo:

Figura 3. Relación de perspectivas



Fuente: Elaboración propia.

2.4 Aspectos metodológicos

En este apartado se presenta la metodología a la que se inscribe este trabajo de grado, la cual permitirá el logro de los objetivos propuestos; organizada en tres fases establecida de acuerdo a los objetivos de este proyecto, Documentación del problema, diseño e implementación de la propuesta, Descripción y análisis de los resultados. Con el fin de dar cuenta el proceso que se realiza en este trabajo de grado, determinar la elaboración de la propuesta de aula, los participantes que harán parte del estudio, los materiales, herramientas e instrumentos que serán utilizados para la recolección de datos, los cuales servirán posteriormente para el análisis de la información recopilada.

2.4.1 Fases

El desarrollo de cada una de estas fases está estrechamente relacionado con las actividades definidas en los objetivos tanto generales como específicos, así mismo, como en las fases descritas en el Aprendizaje Basado en Proyectos. Por lo tanto, el diseño de este trabajo de grado se dará esencialmente en tres fases:

2.4.1.1 Fase 1: Documentación de la problemática.

En la primera fase, se documenta la problemática, lo cual se ha realizado en el período febrero–junio 2018, en la que se ha identificado el problema de la enseñanza y el aprendizaje de la función cuadrática en 9º grado; y para ello, se han tenido en cuenta los reportes que los investigadores citados en los antecedentes locales y nacionales han realizado. De igual forma, se tiene en cuenta la perspectiva didáctica, curricular y matemática para abordar, desde estos tres panoramas interdisciplinarios, la proyección que tiene en cada una la problemática planteada.

2.4.1.2 Fase 2: Diseño e implementación.

En la segunda fase, se hace uso del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), a través de la modelación de la función cuadrática, para diseñar el proyecto que será aplicado en el aula de clase y se escribe el documento final en el que está comprendido todo el proyecto. En donde se busca involucrar a los estudiantes en un proceso en el cual relacionen lo aprendido, con situaciones del contexto de los participantes involucrados en este proyecto, donde sea partícipe el desarrollo del pensamiento variacional y elementos característicos de la función cuadrática. En esta fase, se define el enfoque en el cual se desarrolla la propuesta, se seleccionan las actividades que servirán como base para el diseño de las situaciones que están comprendidas en este proyecto, las cuales estarán divididas por tareas, para luego ser resueltas por los estudiantes de grado noveno.

Adicionalmente, se establecen instrumentos de recolección de información durante dichas situaciones: registros de video, hojas de trabajo, encuestas y/o entrevistas; los cuales serán pertinentes para la elaboración de nuestro análisis.

2.4.1.3 Fase 3: Descripción y análisis de los resultados.

En la tercera fase, se analizarán los resultados obtenidos en las situaciones de la Fase 2, y a partir de esto, se determinarán los avances y las dificultades que presentaron los estudiantes; articulando también una evaluación de la metodología diseñada en el ABP. Generando las conclusiones finales, a partir de los resultados y la organización del proyecto como tal. Prosiguiendo con la elaboración de reflexiones didácticas y, por último, terminando con la escritura del informe final.

2.4.2 Enfoque del proyecto.

Se realizará un trabajo de corte mixto, teniendo en cuenta que se combinará el enfoque cualitativo y cuantitativo. Este método mixto posee varias ventajas según lo afirman Sampieri, Fernández Collado & Baptista Lucio (2006) como son: amplitud en los datos que serán recolectados, diversidad, profundidad, riqueza interpretativa, mayor sentido del entendimiento, de igual manera el poder usar la conversión de datos cualitativos en cuantitativos y viceversa.

Mediante el marco referencial conceptual y los datos aportados por las entrevistas a los profesores de 9º grado se ha tenido una comprensión del fenómeno bajo estudio: la problemática en la enseñanza y aprendizaje la función cuadrática, desde el contexto del fútbol.

Esta propuesta de aprendizaje por proyectos, está basada en un tipo de investigación descriptiva encaminada hacia la exploración, la descripción y el entendimiento, los cuales están directamente relacionados con la sistematización de las experiencias del trabajo con los estudiantes, además, permite caracterizar el tipo de respuestas aportados por los participantes por su calidad interpretativa de estas, la comprensión e interpretación de los fenómenos.

Según Sampieri (2006), la palabra diseño se refiere a un plan o estrategia que se desarrolla para obtener la información que se requiere en una investigación. En el caso de este trabajo de grado, el método de observación es directa, el diseño es descriptivo no experimental, sin grupo de control. Se ha establecido este tipo de diseño, pues este permite crear grupos de trabajo antes de iniciar la implementación del proyecto, formándose y agrupándose de manera independiente al proceso, la selección de los grupos, no corresponde a una asignación por características particulares, sino que fueron distribuidos al azar. De esta manera, se disminuye la variabilidad

entre determinados aspectos, y se estandariza la caracterización de la población, de tal forma que el estudio de la información obtenida a través de las diferentes actividades, puedan ser estudiadas de forma generalizada. Respecto al diseño no experimental, Sampieri (2006) firma que este permite observar los fenómenos en su entorno natural sin manipular las variables que intervienen en el proceso.

Por lo anterior, el diseño elegido permitirá observar las situaciones sin intervenir en las variables participantes, con el fin de realizar un análisis objetivo para este proyecto de la forma más natural en las que se resolvieron las actividades de esta propuesta, en las que no se afecten los resultados. En resumen, para observar y registrar la información se contarán con técnicas de recolección de datos en las cuales no se intervengan ni manipulen los resultados, para su posterior análisis.

Adicionalmente, esta propuesta esta mediada por las TIC, por medio del uso de la calculadora, el celular, el computador y herramientas 2.0 como Geogebra y Canva, involucra la importancia del *hacer* para la construcción del conocimiento del estudiante.

Para la sistematización de la información obtenida en la implementación del proyecto, se implementarán técnicas de recolección de los datos como son; la entrevista, la encuesta, las hojas de trabajo, audios y videos de los procesos que realizan en el desarrollo de las actividades, este tipo de herramientas de corte cualitativo y cuantitativo facilitarán la manipulación de los datos y contribuirá al análisis de los resultados obtenidos en la implementación del proyecto. Para posteriormente analizar los argumentos, respuestas o justificaciones que dan los estudiantes al resolver problemas referentes al pensamiento variacional.

3 Capítulo. La función cuadrática en el contexto de la Institución Educativa Villacarmelo.

3.1 Sobre la determinación del contenido del proyecto.

Para determinar el contenido de este proyecto fue importante realizar una fase diagnóstica, la cual involucra una encuesta realizada a los 30 estudiantes y una entrevista realizada al coordinador de la IEO Villacarmelo, con el fin de caracterizar a los estudiantes e identificar aspectos relevantes para este proyecto, como lo es el contexto en el cual se diseñaron las actividades.

El diagnóstico realizado en este diseño metodológico, tiene la funcionalidad de caracterizar al grupo de individuos que serán partícipes de las dos situaciones que se desarrollan en torno al concepto de la función cuadrática. El entorno social, cultural y turístico del corregimiento Villacarmelo, en el que se ubica la institución en donde se implementaron dichas situaciones determinan en buena medida los aspectos de intereses y motivaciones, en conjunto con unas necesidades prioritarias, que son reconocidas por los estudiantes; y sobre los cuales, se fundamentan las actividades, para generar una relación directa entre los estudiantes y tales motivaciones.

Este apartado consta de dos fuentes informativas: Las encuestas realizadas por los estudiantes, que tienen 12 preguntas en total; y una entrevista realizada al coordinador de la institución. A continuación, se presenta la información recopilada a través de cada una de esas fuentes, con el fin de brindar el panorama más amplio posible de las respuestas dadas, y su alcance para nuestro estudio.

3.1.1 Encuesta A Los Estudiantes:

- **Pregunta no. 1:** Escribe el nombre del corregimiento o vereda al cual perteneces o vives.

Tabla III. Tipos de respuesta pregunta 1 de la encuesta

LOCALIZACIÓN		% DE ESTUDIANTES
VEREDA	Buitrera	8%
	Pasaje minero parte alta	8%
	Pasaje la sierra	8%

	Los chorros	22%
	La fonda	22%
	La choclona	8%
	Callejón Chiquinquirá	8%
	Dosquebradas	15%
CORREGIMIENTO	Villacarmelo	60%
	Camino del minero	40%

La tabla anterior, muestra una dispersión significativa con respecto a las localizaciones demográficas de los estudiantes. En donde se manifiesta que la gran mayoría pertenecen al corregimiento de Villacarmelo; sin embargo, con una diferencia del 20%, encontramos que los demás estudiantes se encuentran en el corregimiento del camino del minero.

- **Pregunta no. 2:** Escribe por los menos tres (3) actividades o expresiones culturales, sociales, familiares y turísticas le gustan de su corregimiento.

Tabla IV. Tipos de respuesta pregunta 2 de la encuesta

ACTIVIDAD	% ESTUDIANTES
Celebraciones en Diciembre	3%
Bingos bailables	3%
Reuniones para hablar del corregimiento	3%
La tarabita	3%
Mejoramiento de las calles	3%
Clases de artes plásticas	3%
Clases de baile	3%
Salidas a río	10%
Fiesta de la Virgen del Carmen	10%
Practicar deporte (Futbol, caminata, entre otros)	16%
Ferias de Villacarmelo	20%
Mercado de la montaña	23%

Un 49% de los estudiantes gustan de actividades de entretenimiento, tales como Celebraciones de diciembre, Ferias de Villacarmelo, entre otras. Además, se puede observar que muy pocos estudiantes disfrutaban de acudir a reuniones y actividades en pro de su corregimiento; o bien, no atribuyen asignaciones o selecciones a dichas actividades.

En el caso de las actividades de ocio (clases de artes plásticas, clases de baile, practicar deporte), el deporte es el que más se resalta, con un 16% de las respuestas, lo que puede ser una puerta de entrada para nuevos métodos educativos en áreas específicas como, en este caso, las

matemáticas. Pese a que hubo actividades con mayor porcentaje, se afirma la relevancia del deporte, debido a la articulación de esta pregunta con algunas de las siguientes; lo que muestra que además de ser una actividad escolar y, además, constituye momentos de integración y de proyección personal.

- **Pregunta no. 3:** Indique por los menos dos (2) actividades que le guste desarrollar en sus tiempos libres.

Tabla V. Tipos de respuesta pregunta 3 de la encuesta

ACTIVIDAD	% ESTUDIANTES
Trabajar	3%
Compartir con la familia	3%
Jugar Basquetbol	3%
Teatro	3%
Clases de música	3%
Observar animales o recorrer el bosque	6%
Dibujar	3%
Estudiar	3%
Ver videos	3%
Leer	9%
Escuchar música	12%
Ver TV	12%
Jugar (en el celular, videojuegos, entre otros)	15%
Jugar Futbol	21%

El resultado obtenido por mayoría de porcentajes, es favorable para el estudio dado que la población presenta un especial interés en los deportes, entre los que destaca el Futbol como una de las dos actividades que más les gusta realizar en sus tiempos libres; esto pese a que se manifiesta en la generalidad de la encuesta que los involucra, puede ser permeado por otras actividades en este caso, que son más inmediatas. Esto es, debido a que jugar con diferentes elementos tangibles, ver TV, escuchar música, y leer, tienen una similitud entre sí, frente a la selección por los estudiantes. Sin embargo, se resalta el jugar Futbol, como una actividad que muestra gran cantidad de situaciones susceptibles de matematización, que son acoplables a los métodos de enseñanza como herramienta que facilite la comprensión de nuevos conocimientos.

- **Pregunta no. 4:** Teniendo en cuenta tu entorno, escribe algunos problemas que le preocupan de tu corregimiento y ¿por qué?

Tabla VI. Tipos de respuesta pregunta 4 de la encuesta

PROBLEMATICAS	%ESTUDIANTES
La administración de la Institución	5%
Falta de docentes en la I.E.	5%
Servicios Públicos	12%
Contaminación y Desechos	12%
Delincuencia común	12%
Riñas entre habitantes	18%
Adicción a las Drogas	18%
Otros	18%

Se puede evidenciar una cantidad alarmante de estudiantes que reportan problemáticas como las riñas y la adicción a las drogas, cada uno con un 18%. Problemáticas que normalmente pueden alterar negativamente el entorno y el desarrollo de los estudiantes, dificultando su proceso de aprendizaje, dado que aparte de que estas pueden generar modificaciones en la rutina de ellos, también pueden transformarse en factores de estrés y otras manifestaciones negativas para ellos. Además, se puede notar un descontento por parte de los estudiantes con la calidad de la institución educativa, que, como se mencionó anteriormente, puede generar dificultades directas con respecto a los múltiples escenarios en donde ellos desarrollan procesos de aprendizaje.

- **Pregunta no. 5:** Escribe la actividad económica que desempeñan tus padres.

Tabla VII. Tipos de respuesta pregunta 5 de la encuesta

ACTIVIDAD ECONÓMICA	% DE ASIGNACIONES
Ninguna	5%
Independiente	5%
Ama de casa	5%
Auxiliar	10%
Oficios varios	15%
No respondió	20%
Trabajo estable/fijo	40%

No podemos determinar característica alguna sobre el 20% de los estudiantes que no respondieron a la pregunta; debido a que no establecen una actividad económica específica. Por lo tanto, este porcentaje queda indefinido. Por otro lado, podemos asociar la actividad de Auxiliar con la de trabajo estable, debido a que ambos proveen una cierta remuneración para las necesidades del hogar; lo que además determina una ocupación para los padres de familia de los estudiantes.

Esto nos permite indicar, que el 50% de los estudiantes, están inmersos en un contexto familiar (delimitado por sus padres), en donde hay un ingreso económico al menos recurrente.

Los estudiantes indican oficios varios, para representar aquellas labores de agricultura, tales como la producción del café, guadaña, entre otros; además de utilizarlo, como una etiqueta para una diversidad de tareas de manera general, así como con el término *independiente*. Esta fijación por parte de los estudiantes presenta mucha ambigüedad, sin embargo, lo asociamos al 50% estudiado anteriormente, para indicar un ingreso económico al menos recurrente. Lo que nos permite indicar que un 70% de los encuestados, presenta esta condición.

Podríamos así concluir, que hay un buen nivel de subsistencia en los padres del grupo de estudiantes encuestados.

- **Pregunta no. 10:** Marca con una X cuales de las siguientes actividades me llaman la atención:

Tabla VIII. Tipos de repuesta pregunta 10 de la encuesta

ACTIVIDAD	% DE ASIGNACIONES
La agricultura	18%
El turismo	21%
El comercio	14%
La producción de alimentos	12%
El deporte	35%

Algunas de las respuestas representativas con respecto a las dadas por todo el grupo, se presentan a continuación:

Ilustración 3. Tipos de repuesta pregunta 10 de la encuesta

Porque me gusta el futbol y lo juego

Encontramos que los estudiantes tienen una tendencia muy emotiva hacia el deporte en general, siendo en lo específico, el futbol el más mencionado. Los estudiantes asociaron esta actividad como un símbolo de la comunidad, dentro y fuera de su institución escolar.

Ilustración 4. Tipos de repuesta pregunta 10 de la encuesta

¿Por qué?
me llama la atención el turismo por que me parece interesante la forma en que las personas se expresan de sus diversos lugares turísticos.

El corregimiento, en pro de las actividades económicas, turísticas y agronómicas, influencia positivamente a los estudiantes para interesarse por ellas, y hacer parte; dando lugar a su gusto por conocer diferentes lugares y conocer de sus culturas. Mostrando un sentido de pertinencia muy arraigado en los estudiantes por en el corregimiento donde viven.

- **Pregunta no. 6:** De las actividades anteriores, indica cuáles realizan en tu colegio.

Tabla IX. Tipos de respuesta pregunta 6 de la encuesta

ACTIVIDAD	% DE ASIGNACIONES
Mercado de la montaña	8%
Agricultura y comercio	24%
Cultural y turístico	28%
Deporte: Futbol	40%

Se puede apreciar que la actividad más realizada por los estudiantes en su colegio es el deporte, más específicamente el Futbol, dando paso a usar esta disciplina deportiva para la mejora de sus procesos de aprendizaje de varias asignaturas, entre ellas las matemáticas; constituyéndose como una oportunidad de aprendizaje bajo el marco teórico del ABP. Sin embargo, cabe resaltar que las tres actividades adicionales, a pesar de que entre ellas hay una distribución de las asignaciones, encontramos que los estudiantes les brindan una importancia significativamente alta a las actividades de agricultura y comercio (en donde pertenece también el mercado de la montaña), como también las de cultura y turismo. Lo que brinda un panorama positivo, frente a las opciones que tienen los estudiantes para enriquecer sus conocimientos en diversas culturas y áreas de conocimiento donde las matemáticas también están inmersas.

- **Pregunta no. 7:** Si consideras que las matemáticas se pueden relacionar con tu entorno. Escribe de qué forma puedes ver esta relación.

Como se mencionó en el análisis de la pregunta no. 6, los estudiantes atribuyen una importancia enorme a las actividades desarrolladas en su corregimiento; y las respuestas representativas mostradas anteriormente, evidencian que escenarios como el mercado de la montaña, las salidas que se hacen en la institución, diversifican los conocimientos de los estudiantes a la vez que desarrollan competencias para estudiar los entornos en los que se desenvuelvan. Esto nos muestra que, los estudiantes mencionan los ejemplos por un fundamento matemático en sus actividades,

más no porque explícitamente reconozcan el concepto de función. A continuación, se colocan las respuestas representativas:

Ilustración 5. Tipos de respuesta pregunta 7 de la encuesta

7) La producción de Alimentos, venta de objetos en venta.
Salidas pedagógicas.

7) se relaciona en toda clase de forma tanto económico como físicos ya que la física es parte de la matemáticas

⑦ Se relaciona ya que las matemáticas están en todo lo que hagas como (b) por ejemplo: el manejo de tu dinero, en el manejo del comercio del corregimiento, los recursos del corregimiento.

las matemáticas se relacionan con los recursos y las mejoras del corregimiento

7) All si considero ya que todo tiene medidas y ocupa un volumen. y en ventas para tener porcentajes.

- **Pregunta no. 8:** Escribe si en clase de matemáticas ya han visto el concepto de función e indica que recuerdas de este concepto.

Tabla X. Tipos de respuesta pregunta 8 de la encuesta

RESPUESTA OBTENIDA	% DE ASIGNACIONES
No respondió	6%
Si	34%
No	60%

La anterior tabla, muestra de forma dominante como los estudiantes manifiestan no haber visto el concepto de función en la clase de matemáticas. Un 60% de los encuestados, responden esto. Sin embargo, un 34% afirma haber visto el concepto en clase. Pese a esto, podemos afirmar que representa una desventaja para nuestro estudio el que más de la mitad de los encuestados no

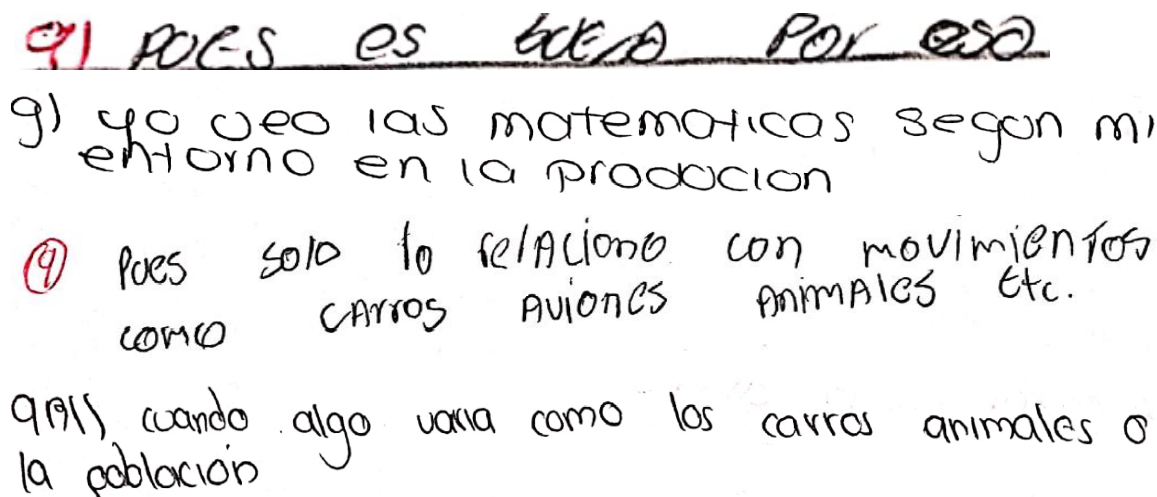
tengan presente este concepto; debido a que representa un reto sustancial para el diseño metodológico, debido a que en sí mismo el trabajo implementado, debe brindarles el panorama del concepto de función, y específicamente, el de función cuadrática.

No podríamos afirmar radicalmente que los estudiantes no vieron tal concepto, debido a que esencialmente la respuesta puede transmitir una confusión frente a lo que entienden por función. Y simplemente optan por indicar que no lo recuerdan.

- **Pregunta no. 9:** Indica como el concepto de función se relaciona con tu entorno.

A continuación, se presentan cuatro respuestas representativas, escogidas para puntualizar las observaciones de esta pregunta:

Ilustración 6 Tipos de respuesta pregunta 9 de la encuesta



Encontramos que las respuestas, enmarcadas en un panorama cualitativo, no corresponden a situaciones específicas en donde se evidencia el concepto de función. La primera respuesta, no tiene sentido en sí misma, debido a que no responde ni se relaciona con el enunciado. La segunda, tercera y cuarta respuesta son consecuentes, identificando factores, individuos o variables que son necesarias para establecer relaciones funcionales. Es importante dar cuenta, que implícitamente se encuentra un concepto de variación, pero explícitamente no se hace alusión a relaciones de dependencia.

- **Pregunta no. 11:** Desde tu experiencia académica, cuáles de las siguientes funciones conoces y te llaman la atención.

Tabla XI. Tipos de respuesta pregunta 11 de la encuesta

TIPO DE FUNCIÓN	% DE ASIGNACIONES
Constante	30%
Lineal y afín	
Cuadrática	0%
Exponencial	
No marcó ninguna de las opciones	35%
No recuerda ⁴	35%

En esta pregunta, podemos evidenciar cómo los estudiantes tienen falencias para recordar las clases de funciones trascendentes. Donde el 70% no marcó ninguna de las opciones o no recuerdan los conceptos. Además de ello, el 30% de los estudiantes, marcaron la función constante, pero sin añadir información alguna. Lo que presenta una ambigüedad para generar conclusiones de sus respuestas. Esta situación representa una desventaja frente al diseño metodológico del presente trabajo, debido a que nuestro énfasis se enmarca en el estudio de la función cuadrática, sin embargo, representa una oportunidad de aprendizaje, para que el ABP genere un impacto positivo en el grupo de estudiantes, y se le ayude a generar un acercamiento por los conceptos centrales.

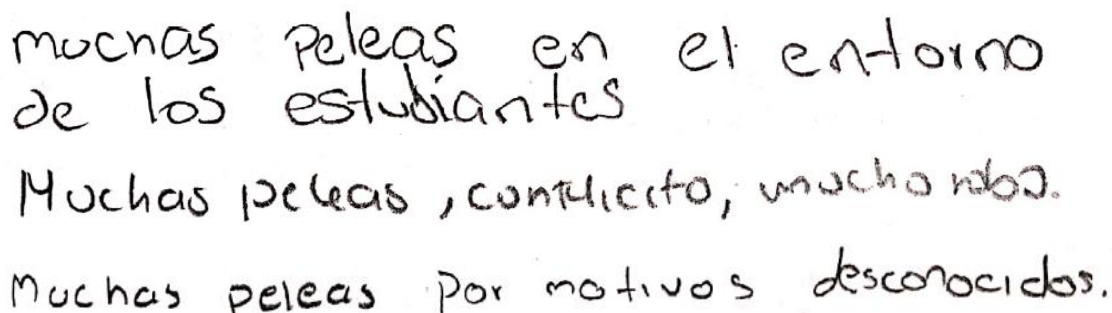
- **Pregunta no. 12:** Enuncia un problema o una situación la cual tenga relación con la función anteriormente marcada.

Teniendo presente que esta pregunta está vinculada directamente con el número 11, encontramos que esta ejemplificación va ligada al caso de la función constante, que fue la clase de función con mayor porcentaje de escogencia. Se entiende que los estudiantes asociaron el nombre de la función, con sucesos que ocurren de forma progresiva. En este caso, un buen número de estudiantes manifestaron que situaciones donde se evidencia relación con el concepto, son tales que involucran conflictos estudiantiles. En general, es relevante destacar la forma como los estudiantes están percibiendo su ambiente de aprendizaje institucional, sin embargo, en aras del objetivo de este análisis, solo podemos concluir que las asociaciones se hicieron con fundamentos

⁴ Los estudiantes agregaron la opción “No recuerda” al no estar incluida entre las opciones.

alejados de los matemáticos. A continuación, se presentan respuestas representativas en este caso, que reflejan lo mencionado:

Ilustración 7. Tipos de respuesta pregunta 12 de la encuesta



muchas peleas en el entorno
de los estudiantes

Muchas peleas, conflicto, machobos.

Muchas peleas por motivos desconocidos.

3.1.2 Entrevista semiestructurada realizada al coordinador académico de la Institución Educativa Villacarmelo – Sede Cacique Calarcá.

Esta entrevista se ha utilizado como una técnica de recolección cualitativa, con el fin de obtener información de forma oral y personalizada sobre el entorno en el que está inmerso la actividad académica en la Institución Educativa Villacarmelo, así mismo describir algunas características de la población que acoge esta institución, las experiencias y opiniones presentadas por el coordinador que ha sido participe de esta entrevista. Se ha optado por realizar la entrevista al coordinador académico por la antigüedad en esta institución, nos permitía obtener más información del corregimiento, de la institución y de los estudiantes que esta acoge. Inicialmente se pensó en el profesor de Matemáticas, pero este estaba recién vinculado a la institución Educativa y no conocía mucho de este lugar.

En la entrevista semiestructurada se decide de antemano qué tipo de información se desea obtener y con base a esto se establece un guion de preguntas. Sin embargo, la diferencia de este tipo de entrevista con una de tipo estructurada es la flexibilidad en las intervenciones de las preguntas, pues pueden ir variando de acuerdo a las respuestas del entrevistado, esto permite recoger información rica y productiva.

A continuación, se presenta el análisis realizado a la entrevista, para esto se ha realizado la transcripción de la misma el entrevistador se identificará en esta transcripción como JC, y el entrevistado, el Coordinador Académico de la Institución Educativa Villacarmelo, quien estará identificado en esta transcripción como CE.

Las preguntas realizadas se categorizan en el siguiente orden, que se obtienen de las respuestas dadas por el docente y que resulta enriquecedor para este Trabajo de Grado, por ende, las respuestas se han clasificado en cuatro aspectos importantes, partimos de los antecedentes de la institución en la que se menciona como ha cambiado la procedencia de los estudiantes que pertenecen a la institución y el crecimiento que esta ha tenido, la información académica de la institución; respuestas que describen el enfoque de la institución, el trabajo por proyectos y la intervención de otros programas académicos en la institución, caracterización de los estudiantes que están actualmente en la institución; se describen algunos problemas e intereses mencionados en la entrevista y la caracterización del corregimiento Villacarmelo; aquí se describen las actividades, los problemas, necesidades y riquezas que tiene este lugar y cómo estás intervienen en el desarrollo académico.

1. **Antecedentes de la institución:** esta categoría resulta de la respuesta dada por el docente a la siguiente pregunta realizada en la entrevista: De acuerdo a la población que acoge la institución, ¿los estudiantes que asisten a ella pertenecen al corregimiento o hay de otros lugares?, a la cual, el profesor empieza abriendo un panorama a la presentación de los antecedentes de la institución, las cuales describen las condiciones en las que se encontraba la institución hace doce años atrás, cuando el llegó a hacer partícipe de esta. Menciona que la institución educativa tenía muy pocos estudiantes, pues en ese momento los que estudiaban en la institución pertenecían únicamente al corregimiento, además, su oferta académica era hasta grado noveno, y por la poca cantidad de estudiantes se había implementado la metodología Escuela Nueva en la cual integraban dos grupos por clase. También cuenta de los pocos docentes que eran en ese momento y como a ellos les tocaba cubrir todas las áreas del conocimiento. Adicionalmente, Hace un contraste en su respuesta, mencionando el momento por el que están pasando actualmente, que ha causado gran impacto y es debido a la procedencia de los estudiantes que han acogido, pues estos, ahora no son únicamente del corregimiento (área rural) sino que provienen de la ciudad (área urbana), lo que ha impactado en las costumbres de esta comunidad, y dice que aunque esto ha favorecido en el crecimiento de la institución, también ha sido un desafío para los docentes adoptar nuevas estrategias para atender a la nueva población educativa.
2. **Información académica de la institución:** esta categoría resulta de las respuestas dadas por el docente a las siguientes preguntas: -¿Teniendo en cuenta que la institución educativa

Villacarmelo es Rural, ¿cuál es el enfoque principal está la institución?, ¿De qué manera se realizan esos Proyectos Pedagógicos?, -Profesor, por otro lado, cuando usted dice que la media técnica es agroecoturismo ¿Quiénes son los encargados de dar esta media técnica?, -¿En la institución también está el SENA?, -¿Profesor, por otra parte, que otros proyectos se están desarrollando en la institución educativa aparte de los proyectos pedagógicos productivos? y -Y, de acuerdo a las actividades artísticas ¿Cuál es el trabajo que se realiza en la institución la artística?

Con el fin de conocer el enfoque principal de la institución, y las propuestas académicas que en ella realizan, se profundizó en esta categoría, para obtener mayor información pertinente para este trabajo. La institución educativa cuenta con un énfasis en educación ambiental, claramente por tratarse de una institución que está ubicada en un corregimiento han adoptado este enfoque para ser coherentes con su entorno. En cuanto a la metodología que desarrollan sus clases es Escuela Nueva, además trabajan por proyectos actividades extracurriculares como son los programas; ***Todos aprender*** (programa del MEN) el cual se reformo para fortalecer las áreas de castellano y matemáticas, acoge los grados de primero a séptimo. ***Mi Comunidad Es Escuela*** (programa de la Alcaldía, ejecutado por la Universidad del Valle) para ofrecer en su programa lectoescritura, escuela para padres, artes, deporte, música, comunicación social etc. y el programa de servicio social de los estudiantes que se denomina, ***Conservando y Embelleciendo el río***, proyecto que promueve el cuidado y la prevención de la contaminación del río y sus alrededores, controlan el ingreso de las personas, cuidan el río y previenen el desecho de basuras en lugares inadecuados, especialmente en tres puntos del importantes del corregimiento en el que se ve mayor afluencia de bañistas que son: La Fonda, El Chispero (el minuto) y el Carmen. También, se realizan ***Proyectos Pedagógicos Productivos (PPP)*** por niveles de grado, y estos tienen que ver con la siembra, la producción, el cuidado de la huerta, el lombricultivo, el compost etc. proyectos en torno al énfasis de la escuela. Y finalmente, también cuenta con la media técnica, en la cual los egresados de la institución salen titulados como ***Técnicos en Agroecoturismo***, media técnica que se da en los grados 10 (*Producción de bioinsumos agrícolas*) y 11 (*transformación de alimentos*), en contra jornada, con una intensidad de 9 horas semanales, adicionales a la jornada académica

habitual y este año sale la primera promoción con otro título adicional, otorgado por el SENA como *Técnicos En Operación de Alojamientos Rurales*.

Como se menciona anteriormente, estos programas se desarrollan extracurricularmente y aunque algunos de estos fortalecen la actividad académica, no incluyen temas propios de una o varias asignaturas dentro del currículo. Además, estas se desarrollan de acuerdo al entorno y al énfasis de la institución educativa, vemos como la formación pedagógica que los estudiantes adquieren, aparte de la académica, está enfocada en los ambientes rurales. por ejemplo, el programa Mi Comunidad es Escuela, está enfocado en promover en los estudiantes otras actividades lúdicas, académicas, recreativas etc. favoreciendo la formación integral de los estudiantes.

3. **Caracterización de los estudiantes que pertenecen a la institución:** esta categoría resulta de las respuestas dadas por el docente a las siguientes preguntas: -De acuerdo a la población que acoge la institución, los estudiantes que asisten a ella pertenecen al corregimiento o hay de otros lugares, - ¿Cuáles son las que usted puede observar que son las de mayor interés de los estudiantes dentro y fuera de la institución?, y - De acuerdo a las problemáticas que se dan en el entorno de los estudiantes dentro y fuera de la institución, como usted lo mencionaba ahora, el consumo de drogas, que otras nos podría contar. La respuesta a estas preguntas, caracterizan a los estudiantes que pertenecen a esta Institución Educativa, en ellas menciona, como los cambios que ha tenido la institución con respecto a la acogida de población diferente a la que inicialmente atendían, ha impactado a esta comunidad académica, pues aunque ya tenían problemas de consumo de drogas en algunos estudiantes, con la llegada de las nuevas comunidades, se visibilizaron más estas problemáticas, influyendo en el vocabulario, en el comportamiento etc.

Por otro lado, también se mencionan algunos de los intereses de los estudiantes, actividades que precisa como de mayor interés por la entonación de sus respuestas, como son el deporte, la música y el desarrollo cultural. Resalta la participación activa de los estudiantes en la parctica del deporte, en los torneos interclase de Futbol, además, el entusiasmo de los estudiantes por participar en actividades artísticas como la música, la producción audiovisual etc.

4. **Caracterización del corregimiento Villacarmelo:** esta categoría resulta de las respuestas dadas por el docente a las siguientes preguntas: - Profesor desde su tiempo en la institución

usted ¿Qué actividades conoce que sean propias del corregimiento?, - Profesor, de acuerdo a esas actividades que usted menciona ¿en el corregimiento se presentan actividades de deporte o turismo? ¿Cuáles cree usted que son las actividades en las que más se involucran los estudiantes?, y - Entonces, profesor teniendo en cuenta el corregimiento ¿qué otras dificultades se pueden mencionar que se presenten en este lugar? La respuesta a estas preguntas, caracterizan a grandes rasgos necesidades, problemas y actividades económicas y culturales que se realizan en el corregimiento, este está ubicado en una zona de protección como reserva natural, y otra parte pertenece al Parque Natural Farallones de Cali, en el corregimiento se realizan actividades culturales y económicas como son Las Fiestas Patronales de la virgen del Carmen, el río que es turístico en el corregimiento y tiene tres puntos principales, la Fonda, el Chispero (el Minuto) y la Candelaria, el mercado de la montaña (actividad nueva, que lleva menos de dos años), en este mercado ofertan lo que están produciendo en la zona, se realiza dos veces al mes, una vez en la cabecera del corregimiento y otra en la vereda la fonda. Adicionalmente, la institución se ha involucrado en el mercado de la montaña sacando a la venta los productos (pulpa de fruta, fungicidas naturales etc.) que realizan en los grados 10 y 11 y se han llevado proyectos educativos en las fincas cercanas a la institución que promueven el turismo.

Por otra parte, el docente menciona las necesidades más relevantes del corregimiento, como lo es la falta de comunicación, la señal de teléfono llega hasta la vereda La Fonda, el Consumo de sustancias psicoactivas por parte de algunos estudiantes a raíz de la integración de estudiantes de la comuna 18, y la frecuencia de bañistas que utilizan los alrededores del río para consumir. La falta de atención médica, pues cuenta con un puesto de salud con doctores practicantes, y los especialistas solo van una vez por semana, adicional a esto, no se atienden urgencias pues no hay las condiciones para hacerlo, la contaminación y la inseguridad a causa de las personas que suben al río, son algunos de los aspectos mencionados por el docente.

De acuerdo a lo presentado anteriormente, el diagnóstico realizado, ha permitido hacer una caracterización de la población que constituye nuestro conjunto de individuos que participan en el estudio; la cual nos arrojó no solamente aspectos relacionados con las necesidades propias del

entorno de los estudiantes, sino que también reflejó sus intereses que fueron determinantes para el diseño del proyecto.

El tema de este proyecto se definió a partir de los intereses del trabajo de grado, pero el enfoque en el cual se direcciona esta propuesta y el contexto en el que se desarrolla, se determinó a partir de los intereses de los estudiantes y los resultados obtenidos en los análisis de la encuesta y la entrevista. Pues en estas se destaca con gran firmeza, Actividades como; el Mercado de la Montaña y el deporte (el fútbol) lo que ha delimitado las opciones de trabajar en uno de estos dos contextos. Finalmente, para decidir el contexto en que se desarrolla este proyecto, se socializaron las respuestas más relevantes obtenidas en el análisis, para lo cual, los estudiantes decidieron trabajar en el contexto del Fútbol, conocer su historia, reglas etc.

3.2 Sobre el diseño del proyecto

En este Trabajo de Grado se seleccionaron diferentes referentes teóricos y metodológicos, que orientaron el diseño de las actividades que se desarrollan en este proyecto. La construcción de este proyecto se ha enfocado en la metodología del ABP como un proyecto de instrucción y estrategia en el aprendizaje (VER ANEXO 1). La situación 1: El fútbol en el tiempo, se diseñó teniendo en cuenta los intereses de los estudiantes en su entusiasmo por querer aprender sobre la historia de este deporte. La situación 2: Organización del torneo Interclase 2019, se diseñó teniendo en cuenta el entorno en el que se desenvuelven los estudiantes y los intereses planteados en el diagnóstico, es decir, que se ha tenido en cuenta la actividad económica que se realiza con mayor relevancia en el corregimiento que es el mercado de la montaña y los intereses de los estudiantes en trabajar en torno al fútbol y se han relacionado estos dos aspectos para diseñar esta situación. Para el diseño de estas situaciones se seleccionaron diferentes actividades y se ajustaron para esta propuesta. Las fuentes seleccionadas son: Una Mirada a las Matemáticas en el aula del programa de cualificación y acompañamiento a docentes del municipio de Tuluá en el diseño de secuencias didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes, Trabajo de Maestría en Educación de Benavides Rivera L. D. Panesso Cruz L. B. (2017) titulado Aprendizaje Basado En Proyectos mediado por TIC en la promoción del aprendizaje de operaciones combinadas.

3.3 Sobre el Proyecto

3.3.1 Descripción del proyecto.

En el proyecto diseñado a partir de la metodología del ABP mediado por las TIC, denominado “Aprendiendo con el Fútbol”, los 30 estudiantes de grado noveno (9°) trabajarán en equipos de tres personas, para un total de 10 grupos de trabajo, con el fin de realizar las diferentes actividades involucradas en las dos situaciones diseñadas en el contexto del fútbol, con el fin de que los estudiantes aprendan algunos aspectos de la función cuadrática. Los equipos se formarán al azar de la siguiente manera: se asignará un número del uno al diez a cada uno de los estudiantes y se agruparán las personas con el mismo número asignado. Adicionalmente, el producto final que los estudiantes compartirán en su grupo, será la elaboración de un folleto promocional de la organización logística de un torneo de fútbol institucional.

Este proyecto, a pesar de estar enfocado en enseñar y aprender la función cuadrática, no deja de lado otras disciplinas como, educación física y tecnología, siendo así un proyecto integrador de otras disciplinas del saber, aunque no sea un proyecto transversal a todas las áreas del conocimiento. Este está conformado por dos situaciones en el contexto del fútbol, la primera situación contiene una actividad de reflexión inicial a partir de dos videos y la socialización de tres preguntas con el docente, y tres tareas con sus distintas actividades, cada una de ellas se desarrolla en torno a la historia del fútbol, a nivel mundial y nacional para conocer los antecedentes de este deporte, indagar y consultar información que les permita extraer y sintetizar datos relevantes, pertinentes y adecuados para la construcción de su conocimiento, así mismo, identificar procesos matemáticos comprendidos en este contexto como lo son la identificación de patrones, la lectura de tablas etc. con el objetivo de ubicar a los estudiantes en el contexto del fútbol y su relación con las matemáticas. Cabe resaltar que, el fin de este proyecto no es únicamente enseñar el concepto matemático involucrado, sino también, que los estudiantes trabajando en equipo, desarrollen distintas estrategias y habilidades para la recolección de datos, indagación y síntesis de la información, entre otras.

La segunda situación, está ubicada en el contexto del fútbol a nivel institucional, esta tiene como objetivo organizar y promocionar un torneo, el cual se desarrollará durante la elaboración de las cinco tareas comprendidas en esta situación, para finalmente presentar la información a

todos los participantes por medio de un folleto promocional. Igualmente, estas tareas tienen como fin mostrar a los estudiantes que el futbol no es un deporte aislado de las matemáticas y que en este no solo se desarrollan actividades deportivas, sino también, actividades de logística, organización, mercadeo etc.

La información recopilada por los estudiantes durante la elaboración de la situación será a partir de la instrucción del docente, por medio de las hojas de trabajo, pero los contenidos de cada una de las indagaciones serán determinadas por cada equipo de trabajo, así mismo, como el diseño de cada folleto promocional.

Es importante, mencionar un aspecto importante en el diseño del proyecto, y es el uso de las TIC, aunque no es un eje principal del proyecto es un mediador del conocimiento, el cual nos permitió alcanzar los objetivos propuestos. Para la primera situación, las herramientas TIC involucradas son los videos presentados, el uso del computador y del celular para sus investigaciones. En la segunda situación, de igual forma, se utiliza el computador y el celular para realizar investigaciones, esquemas y diseños requeridos en la elaboración de esta situación, pero hay un software importante que nos permite aprender y enseñar características importantes del concepto, Geogebra, este ha sido elegido por su facilidad de manejo y entendimiento.

Geogebra es un programa dinámico, el cual permite desarrollar el pensamiento variacional desde diferentes momentos, pues este, ayuda al estudiante a identificar y describir una las relaciones de dependencia presentadas en esta situación, ayudan a construir y asignar algunas características propias de la función cuadrática, realizando conjeturas a partir de las representaciones gráficas, tabulares y algebraicas que facilita este programa. Así mismo, permite validar el proceso que han realizado los estudiantes en las tareas anteriores y reestructurar sus conocimientos.

3.3.2 Puesta en acción

Duración: se realizarán siete sesiones, en las que los estudiantes trabajarán en equipos. Los equipos fueron formados al azar asignándoles un número del uno al diez a cada uno de los treinta estudiantes, y agrupar los estudiantes con igual número, resultando diez grupos de trabajo de tres personas cada uno. Las sesiones se organizaron de la siguiente manera:

Sesión 1: Dos clases. estas dos clases se harán en la sala de sistemas con el fin de realizar la Tarea 1 y Tarea 2 de la Situación 1, se inicia proyectando dos videos por medio del video beam y se realiza una pequeña plenaria en la cual se hacen tres preguntas puntuales de socialización antes de iniciar con las tareas antes mencionadas. Esta actividad les permite observar y extraer información importante de cada uno de los videos para después poder dar respuesta a las siguientes actividades. Adicionalmente, deben realizar unas actividades de consulta en las cuales es importante verificar si pueden extraer información objetiva y trabajar en grupo.

Propósito: Aprender sobre los antecedentes del futbol e identificar algunos aspectos matemáticos asociados a este contexto.

Tabla XII. Roles en el ABP

ACTIVIDAD DOCENTE	ACTIVIDAD ESTUDIANTES
<ul style="list-style-type: none"> - El docente proyecta los videos, en los cuales se presenta una breve introducción sobre la historia del futbol. - El docente realiza tres preguntas, enfocadas en la información presentada en el video, buscando la participación de los estudiantes. - Brindará las hojas de trabajo a cada uno de los grupos. - El docente está presente en las soluciones que realizan los estudiantes y guía su proceso de aprendizaje 	<ul style="list-style-type: none"> - Los estudiantes participan activamente sobre los interrogantes planteados en la socialización de los videos. - Realizan las preguntas presentadas en las hojas de trabajo. - Trabajan en grupo y realizan preguntas que les ayude a orientar su proceso. - Realizan consultas pertinentes y seleccionaran la información adecuada para dar respuesta a las actividades planteadas.

Sesión 2: Dos clases. De igual forma, en estas dos clases los estudiantes deben trabajar en los mismos grupos formados inicialmente para realizar la tarea 3 de la situación 1. Esta tarea ha sido diseñada con el fin de que los estudiantes puedan observar aspectos matemáticos en el contexto del fútbol, además de conocer un poco de la historia de este deporte a nivel de Selección Colombia, aquí deberán realizar procesos aritméticos, interpretación de tablas, comprensión del enunciado etc. utilizando sus saberes previos con el fin de dar respuesta a esta tarea.

Propósito: Aprender sobre los antecedentes del futbol e identificar algunos aspectos matemáticos asociados a este contexto.

Tabla XIII. Roles en el ABP

ACTIVIDAD DOCENTE	ACTIVIDAD ESTUDIANTES
<ul style="list-style-type: none"> - Provee las hojas de trabajo a cada uno de los grupos. - Está presente en las soluciones que realizan los estudiantes y guiara su proceso de aprendizaje - Al finalizar la tarea, realiza una plenaria con el fin de validar sus respuestas. 	<ul style="list-style-type: none"> - Realizan las preguntas presentadas en las hojas de trabajo. - Trabajan en grupo y realizan preguntas que les ayude a orientar su proceso. - Realizan conclusiones de acuerdo a las tareas presentadas hasta ahora con el fin de validar su proceso.

Sesión 3: Una clase. En esta clase se inicia la situación 2, partiendo desde la tarea 1, en la cual cada grupo de estudiantes debe consultar información que posteriormente plasmarán en el folleto promocional, para esto, esta clase se realizara en la sala de sistemas, pero los estudiantes también podrán consultar esta información con personal de la institución (profesores, administrativos etc.). Cada grupo deberá plantear una estrategia de recolección de información para poder trabajar en grupo y presentar la información requerida. Adicionalmente, podrán utilizar cualquier programa de su preferencia para realizar el esquema en el que plasmen la información requerida.

Propósito: Aprender sobre algunos aspectos del Concepto de Función asociados al contexto del futbol.

Tabla XIV. Roles en el ABP

ACTIVIDAD DOCENTE	ACTIVIDAD ESTUDIANTES
<ul style="list-style-type: none"> - El docente brinda a cada grupo las hojas de trabajo. - Facilita los recursos y herramientas necesarias para la consulta, extracción y selección de la información para realizar el esquema. - Está presente en las soluciones que realizan los estudiantes y guiara su proceso de aprendizaje 	<ul style="list-style-type: none"> - Realizan consultas pertinentes y seleccionaran la información adecuada para dar respuesta a las actividades planteadas. - Realizan las preguntas presentadas en las hojas de trabajo. - Trabajan en grupo, y realizaran preguntas que les ayude a orientar su proceso.

-
- Trabajan en equipo para responder a cada una de las actividades planteadas y presentaran la información en los esquemas realizados.
-

Sesión 4: Dos clases. En estas clases se trabaja la tarea 3 de la situación 2 y para ello, cada grupo debe ocuparse de su respectiva hoja y desarrollar las actividades propuestas. En esta tarea se continúa trabajando en el contexto del futbol, pero sus preguntas están enfocadas particularmente en la compra y venta de uniformes, al ser estos dos aspectos de mayor interés de los estudiantes. Esta tarea tiene como fin dar conocer otros aspectos que también se ven involucrados en este deporte, así mismo, identificar algunas características del concepto de función, particularmente, la función lineal, desde la determinación de magnitudes involucradas en la situación, la variación entre magnitudes, lectura de tablas, identificación de patrones etc. permitiendo identificar algunos aspectos propios de este concepto matemático.

Propósito: Aprender sobre algunos aspectos del Concepto de Función, en particular, la función cuadrática, asociados al contexto del futbol.

Tabla XV. Roles en el ABP

ACTIVIDAD DOCENTE	ACTIVIDAD ESTUDIANTES
<ul style="list-style-type: none"> - El docente brinda las hojas de trabajo a cada uno de los grupos. - Está presente en las soluciones que realizan los estudiantes y guiara su proceso de aprendizaje. - Amplia los conocimientos sobre el concepto de función, teniendo en cuenta la información presentada en las hojas de trabajo. 	<ul style="list-style-type: none"> - Realizan las preguntas presentadas en las hojas de trabajo. - Trabajan en grupo, y realizaran preguntas que les ayude a orientar su proceso. - Trabajan en equipo para responder a cada una de las actividades planteadas.

Sesión 5: Dos clases. En estas clases se trabaja la tarea 3 de la situación 2, cada grupo debe trabajar como equipo para resolver las actividades de esta tarea, dentro de los beneficios que desarrolla el ABP, es el manejo del tiempo y para esto es necesario que lo hagan de forma coordinada, en la

que cada uno de los equipos pueda expresar sus ideas. Adicionalmente, las actividades que se desarrollan en esta tarea tienen como objetivo, presentar algunas características del concepto de función, particularmente, la función cuadrática, desde la determinación de magnitudes involucradas en la situación, la variación entre magnitudes, la lectura de tablas, identificación de patrones etc. permitiendo de las matemáticas en contexto identificar algunos aspectos propios de este concepto.

Propósito: Aprender algunos aspectos de la función cuadrática, como son sus características, sus representaciones etc. mediado por el uso de TIC.

Tabla XVI. Roles en el ABP

ACTIVIDAD DOCENTE	ACTIVIDAD ESTUDIANTES
<ul style="list-style-type: none"> - El docente motiva a los equipos a realizar las preguntas expuestas en la hoja de trabajo. - Brinda las hojas de trabajo a cada uno de los grupos. - Está presente en las soluciones que realizan los estudiantes y guía su proceso de aprendizaje. - Amplia los conocimientos sobre el concepto de función cuadrática, teniendo en cuenta la información presentada en las hojas de trabajo. 	<ul style="list-style-type: none"> - Desarrollan las actividades propuestas con en la hoja de trabajo y realizan preguntas que orienten el proceso aprendizaje. - El trabajo en grupo les permite realizar procesos de socialización y discusión para generar conclusiones en esta tarea.

Sesión 6: Dos clases. En estas clases se trabaja la tarea 4 de la situación 2, para ello cada grupo debe trabajar con su respectivo equipo y resolver las actividades con ayuda de las TIC, utilizando el programa Geogebra, para representar gráficamente los aspectos estudiados en este problema. El objetivo de la tarea es dar a conocer algunas características del concepto de función cuadrática, teniendo en cuenta lo que se ha aprendido en la tareas anteriores como son, la razón de cambio, la relación entre magnitudes, la lectura de tablas, identificación de patrones, identificar diferentes tipos de representación (expresión algebraica, gráficas, tablas), así mismo, aspectos particulares de la expresión algebraica (parámetros) de la forma general de la función cuadrática y su respectivos cambios se ven representados en la gráfica etc.

Propósito: Caracterizar por medio de Geogebra, el concepto de la función cuadrática.

Tabla XVII. Roles en el ABP

ACTIVIDAD DOCENTE	ACTIVIDAD ESTUDIANTES
<ul style="list-style-type: none"> - El docente motiva a los equipos a utilizar el programa Geogebra, hará breve exploración en sus aplicaciones y aspectos necesarios para dar solución a la tarea. - Brinda las hojas de trabajo a cada uno de los grupos. - Está presente en las soluciones que realizan los estudiantes y guiara su proceso de aprendizaje. - Amplia los conocimientos sobre el concepto de función cuadrática, teniendo en cuenta la información presentada en las hojas de trabajo. 	<ul style="list-style-type: none"> - Realizan las preguntas presentadas en las hojas de trabajo. - Exploran el programa Geogebra y conocerán algunas de las aplicaciones de este programa. - Desarrollan las actividades propuestas con ayuda del programa y las preguntas que realicen orientando el proceso. - El trabajo en grupo les permite realizar procesos de socialización y discusión para generar conclusiones en esta tarea, con respecto a toda la situación presentada.

Sesión 7: Una clase. En esta clase se trabajará la tarea 5 de la situación 2, para ello cada grupo deberá trabajar con su respectivo equipo y deberá ponerse de acuerdo para realizar un folleto promocional en el que presentaran aspectos obtenidos a lo largo del desarrollo de las situaciones. Para esto, crearán el folleto en la herramienta 2.0 Canva en la sala de sistemas, para luego ser proyectados cada uno de los resultados al finalizar la clase, en la que darán las conclusiones respecto al trabajo en este proyecto.

Propósito: Diseñar los folletos publicitarios

Tabla XVIII. Roles en el ABP

ACTIVIDAD DOCENTE	ACTIVIDAD ESTUDIANTES
<ul style="list-style-type: none"> - El docente motiva a los equipos realizar el folleto promocional en el que involucren información consultada y determinada en el proyecto. - Brinda las hojas de trabajo a cada uno de los grupos. 	<ul style="list-style-type: none"> - Exploran el programa Canva, a partir del video presentado. - Cada uno de los equipos realizan el folleto promocional, en el que deberán incluir información encontrada y determinada en el proyecto.

- Está presente en las soluciones que realizan los estudiantes y guiara su proceso de aprendizaje.	- El trabajo en grupo les permite realizar procesos de socialización y discusión para unificar sus ideas y crear un solo resultado.
- Proyecta el video, el cual es un tutorial en YouTube para el uso de Canva.	- Cada grupo presenta, al final de la clase, los folletos realizados y algunas conclusiones al termino del proyecto.

Recursos

Este proyecto esta mediado por las TIC, para su desarrollo se emplean herramientas como Geogebra, Canva, YouTube y PowerPoint.

Herramientas

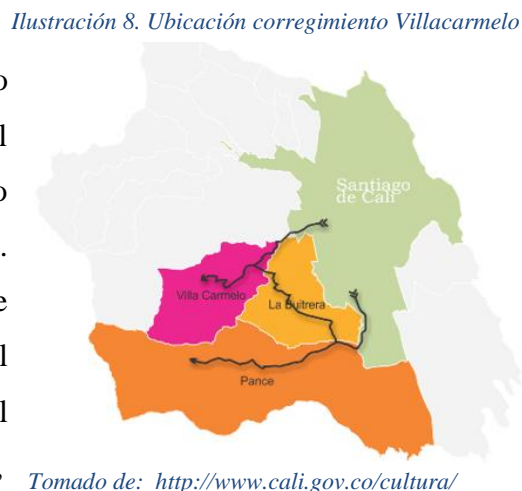
1. Proyector video beam
2. Sala de sistemas
3. Calculadora
4. Tablero
5. Internet

3.4 Institución beneficiada

El presente trabajo de grado se desarrolla en la Institución Educativa Villacarmelo, cuenta con las siguientes sedes: sede principal Cacique Calarcá, ubicada en el Kilómetro 5,8, en el corregimiento Villa Carmelo, Vereda la Fonda, Vía La Reforma, Cali, Valle del Cauca. Sede Nuestra Señora del Carmen, ubicada en la Cabecera Corregimiento Villacarmelo, Valle Del Cauca, Cali. La primera sede mencionada cuenta con los cursos de secundaria (6° a 9°) y transición, y en la segunda están los grados de primaria (1° a 5°) y de secundaria (10° y 11°).

3.4.1 Localización de la IEO Villacarmelo, sede: Cacique Calarcá.

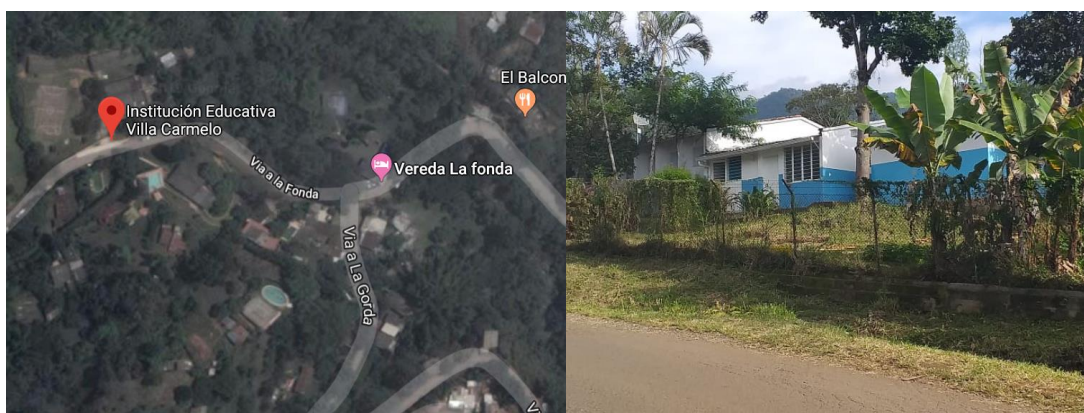
El corregimiento de Villacarmelo, es un corregimiento ubicado en la parte occidental del municipio de Santiago de Cali. Limita al norte y occidente con el corregimiento de Los Andes, al sur con el corregimiento de Pance y al oriente con el corregimiento de La Buitrera. Es uno de los corregimientos con menor densidad de población. Está compuesto por 6 veredas: El Carmen/Minuto, Villacarmelo (cabecera del corregimiento), La Candelaria, La Fonda, Dos Quebradas, Alto de Los Mangos.



Tomado de: <http://www.cali.gov.co/cultura/>

La Institución Educativa que se ha elegido para la implementación y desarrollo del trabajo de grado “La Función Cuadrática desde el enfoque del Aprendizaje Basado en Proyectos”, es la Institución Educativa Villacarmelo, sede Cacique Calarcá, (rural) de carácter oficial, con una población estudiantil de estratos 1 y 2.

Ilustración 9. Ubicación de la Institución Educativa Villacarmelo - Sede Cacique Calarcá



Tomado de google maps

La Institución Educativa Villacarmelo está localizada en la vereda la Fonda – Valle del Cauca, de acuerdo con bases del censo realizado por el DANE, el corregimiento de Villacarmelo habita una población de 869 habitantes. En tiempo, está a 30 Minutos del casco urbano de Cali.

En 1998, la Secretaría de Educación Departamental le dio el reconocimiento oficial a la Institución con especialidad en Agroturismo. Atiende a niños de transición a quinto de primaria, en edades que oscilan entre los 3 y los 9 años, y de sexto a undécimo, en edades que oscilan entre los 11 y los 18 años. La Institución cuenta con el apoyo en su formación académica con el Servicio Nacional de Aprendizaje, SENA, mediante la oferta de especialidad en Operación de Alojamiento Rural.

Actualmente la Institución Educativa Villacarmelo, cuenta con 300 estudiantes distribuidos en dos sedes, la sede principal ubicada en la cabecera municipal del corregimiento y la otra sede en la vereda la Fonda, Los estratos socioeconómicos predominantes son 1 y 2, principalmente y residen en los sectores de La Buitrera, Villacarmelo, La Fonda, La Paz, Los Chorros y Dos Quebradas. Estos sectores se caracterizan por ser escenarios vulnerables a problemas socioculturales como el consumo de drogas, violencia intrafamiliar, la conformación de pandilla y hurtos, entre otros. En este sentido, en el sector La Fonda son comunes los problemas entre la comunidad por causa de terrenos, la falta de cobertura en salud y vías, y el cuidado de los espacios públicos.

3.4.2 Población y Muestra.

Para la implementación del proyecto, se consideró un grupo de 30 estudiantes de grado noveno de la IEO Villacarmelo, sede Cacique Calarcá, los cuales están entre las edades de 13 y los 19 años, en el que 60% son de género masculino y el 40% son de género femenino. En dicho grupo se implementará el proyecto diseñado a partir de la metodología del ABP mediado por las TIC, denominado “Aprendiendo con el Fútbol”, el cual tiene como objetivo, movilizar en los estudiantes algunos aspectos del concepto de la Función Cuadrática, como son sus diferentes representaciones y aplicaciones en la realidad.

Se ha escogido el grado noveno (9°), pues de acuerdo a los Estándares Básicos de Competencias, los Lineamientos Curriculares y los DBA, en este nivel los estudiantes ya tienen mayor apropiación y manejo del álgebra, además, en este grado es donde se deben hacer los procesos de generalización de la aritmética, estudio de la variación y del cambio en situaciones reales o en contextos matemáticos.

3.5 Descripción y análisis de los resultados

En este apartado se describirán los tipos de respuestas obtenidos en la implementación del proyecto, las cuales, determinarán los avances y las dificultades que presentaron los estudiantes en el proceso de aprendizaje de la función cuadrática; articulando también una evaluación de la metodología diseñada en el ABP, la matematización horizontal y vertical (Modelación desde EMR) y los niveles de covariación alcanzados por los estudiantes en el análisis de los resultados.

3.5.1 (S1) Situación 1: el fútbol en el tiempo

Partiendo de la idea principal de este proyecto, que es enseñar la función cuadrática a partir del contexto del fútbol, esta situación está conformada por una reflexión inicial que se hace a partir de la observación de dos videos y tres tareas las cuales están enmarcadas en el origen y los antecedentes del futbol, el reconocimiento del fútbol a nivel mundial y la participación de la Selección Colombia en los Mundiales. La tarea 1 denominada; Origen del fútbol parte desde los antecedentes del fútbol a nivel mundial, la tarea 2 denominada; El fútbol en la Copa Mundo, se desarrolla particularmente en las selecciones de cada país que han participado en los mundiales a través del tiempo, y la tarea 3 denominada; Colombia y el fútbol, se desenvuelve en el fútbol nacional, particularmente en algunos antecedentes de la Selección Colombia.

(A) Antecedentes Históricos

Antes de iniciar las tres tareas comprendidas en esta situación, se observaron dos videos, los cuales son la fundamentación conceptual que constituyen los antecedentes históricos del fútbol para esta primera situación, con el fin de reflexionar con ayuda del profesor lo observado en este video se generaron tres puntos relacionados con el origen de este deporte.

Los dos videos en cuestión, se denominan; El origen del futbol y La historia del fútbol para niños con una duración de 00:01:57 y 00:05:20 respectivamente.

Seguidamente, se presenta de manera detallada de los estilos de respuesta presentados por los grupos de estudiantes para cada una de las preguntas, pertenecientes a la reflexión de estos videos.

(P1) Pregunta 1: Lo que más les llamó la atención de los videos sobre el origen del fútbol.

- a. Origen del fútbol: Esta categoría se refiere a los antecedentes históricos de este deporte. Algunas de las respuestas relevantes, en esta categoría, dada por los estudiantes son: “el fútbol es un deporte creado hace mucho tiempo”, y “el fútbol fue creado por los ingleses”. Cuatro de diez grupos mencionaron esta categoría en la reflexión escrita a partir de la observación de los videos, es decir un 40%.
- b. Adaptaciones del fútbol: Esta categoría se relaciona con las respuestas dadas por los estudiantes en las que determinaban aquellos aspectos que fueron cambiando a lo largo del tiempo, a las condiciones del juego, la definición del nombre como un único deporte, y las reglas que fueron creadas para dar a este deporte una organización dentro y fuera de la cancha. Algunos grupos dieron respuestas como: “lo que más nos llamó la atención fue todos los nombres que recibió antes de llamarse fútbol...” y “era un juego sin ninguna regla en cuanto a la cantidad de jugadores”. Seis de diez grupos de estudiantes contestaron en sus preguntas esta categoría, es decir un 60%.
- c. Violencia en el fútbol: Esta categoría resulta de las respuestas comunes que dieron algunos grupos, refiriéndose al modo en el que se jugaba el fútbol en las antigüedades, específicamente, a la violencia física que involucra este juego como se muestra en el video. Algunos de los grupos detallan en sus respuestas aspectos como: la violencia contra los capitanes de cada equipo, las represalias adoptadas para el equipo perdedor etc. Siete de diez grupos mencionaron esta categoría en sus reflexiones, es decir, el 70% de los grupos.
- d. Rituales en torno al fútbol: Esta categoría resulta de la respuesta dada por un solo grupo, al mencionar como en los inicios del deporte se realizaban rituales parecido a lo que hoy se conoce como fútbol. Uno de diez grupos mencionó esta categoría en su respuesta, es decir un 10%.
- e. Deportes derivados del fútbol: Esta categoría se refiere a las respuestas en las que se menciona más específicamente, los juegos que surgieron con este deporte como el Rugby y el voleibol, pues al ser un deporte sin reglas los jugaban de muchas formas distintas. Tres de diez grupos mencionaron esta categoría, es decir un 30%.

(P2) Pregunta 2: La importancia de Inglaterra en los inicios el deporte catalogado como fútbol.

En el contenido de las respuestas dadas, se observa que los diez grupos establecen una relación importante de Inglaterra en el origen del fútbol, y que este se reconociera a nivel mundial gracias a este país. Sin embargo, cabe destacar que un solo grupo de los diez, menciona a Inglaterra como el país que estableció los primeros parámetros del futbol, en cuanto a las reglas, y fue donde surgió lo que hoy se conoce como FIFA.

(P3) Pregunta 3: El significado de la palabra fútbol.

La palabra fútbol significa balón – pie, todos los grupos dan la respuesta correcta al significado de esta palabra, pero, cabe resaltar que dos de diez grupos, amplían sus respuestas mencionando que también se puede llamar soccer, como es conocido en algunos países.

En esta primera actividad, la intención de estos dos videos, es que los estudiantes conozcan un poco sobre el contexto en el que ellos eligieron trabajar y ha sido de agrado y asombro lo que se ha presentado en los videos, pues los estudiantes mencionan durante la socialización, información extraída de cada uno de los videos, los cuales les han permitido generar conclusiones y respuestas sobre las actividades que aquí se presentan, como por ejemplo en momentos cuando se menciona la práctica de rituales en torno a este deporte, o la violencia con la que se practicaba, como uno de los aspectos destacados en las respuestas de *SIAP1* y como veremos en las siguientes tareas. Se puede observar, a partir de la plenaria como los grupos han comprendido de manera general la historia presentada en estos dos videos que tratan sobre el origen del fútbol y cómo este deporte ha evolucionado desde sus inicios, en la respuesta dada por los grupos en el punto *SIAP3* los estudiantes retienen información explícita presentada en los videos para dar una respuesta a este punto. Además, expresan por medio de sus interpretaciones, sus respuestas, sus intervenciones, y las discusiones entre cada uno de los estudiantes de cada grupo para dar una única respuesta. Estos videos les permitieron compartir sus ideas, debatir en grupo, conocer sobre la historia del fútbol, y ampliar sus conocimientos enfocados a la formación del saber y no únicamente al contenido matemático.

(S1) Situación 1: El Fútbol En El Tiempo**(T1) Tarea 1: Origen Del Fútbol**

Esta tarea está diseñada en el marco del origen y los antecedentes del fútbol, con el fin de dar a conocer a los estudiantes algunos aspectos históricos que surgieron a partir de los cambios que tuvo este deporte a nivel mundial al pasar del tiempo. Con esta tarea se pretende que los estudiantes, puedan consultar, extraer y sintetizar información importante relacionada con el origen del fútbol, establecer aspectos importantes en este deporte y puntualizar ideas generales en este contexto.

A continuación, se realizará una presentación detallada de los estilos de respuesta presentados por los grupos de estudiantes para cada una de las preguntas, pertenecientes a esta tarea.

(P1) Pregunta 1: Escriban en cinco (5) renglones una síntesis de los antecedentes del fútbol.

A continuación, se presenta la clasificación por categorías (cinco en total) de la información presentada en las síntesis realizadas por los grupos de estudiantes; indicando, además, la cantidad de ellos que incluyeron a cada categoría.

- a. Origen del Fútbol y sus reglas de juego: Esta categoría hace referencia a los antecedentes que dieron lugar a la creación y consolidación de este deporte. Los estudiantes mencionan regularmente que el Fútbol fue creado por los ingleses, pero que los franceses participaron significativamente en la adaptación del modo de juego para reducir la violencia en él. Seis de diez grupos mencionaron esta categoría en la síntesis elaborada, es decir un 60%.
- b. Origen de la FIFA: Esta categoría hace referencia a los antecedentes que dieron lugar a la creación de la FIFA particularmente. Los estudiantes precisaron fechas relacionadas a este aspecto, como, por ejemplo, que fue en el año 1904 cuando se creó, y qué múltiples denominaciones tenía anteriormente. Además de mencionar que los franceses fueron quienes la fundaron. Cinco de diez grupos mencionaron esta categoría en la síntesis elaborada, es decir, el 50% de los grupos.
- c. Violencia en el Fútbol: Esta categoría hace referencia a características del modo de juego del Fútbol en las anteriores épocas, específicamente, a la violencia física que se presentaba

en el video. Este aspecto fue muy relevante para los estudiantes, a tal punto que fueron muy detallistas en aquellos actos que reflejaban severidad, denominando el Fútbol como “peligroso”. Siete de diez grupos mencionaron esta categoría en su síntesis, es decir, el 70% de los grupos.

- d. Adaptación del balón de Fútbol: Esta categoría se refiere a aquellos aspectos que fueron cambiando a lo largo del tiempo, con respecto a características generales del balón utilizado en los juegos de Fútbol, como su material. Los estudiantes mencionan aspectos como la evolución que ha tenido la fabricación del balón, para facilitar el modo de juego. Dado que anteriormente, se usaban balones de goma, caucho, del intestino de un buey e incluso se jugaba con la cabeza de los capitanes (ya que se sacrificaban aquellos que pertenecían a los equipos perdedores). Cuatro de diez grupos mencionaron esta categoría en su síntesis, es decir, el 40% de los grupos.
- e. Fútbol por Estratos sociales: Esta categoría hace referencia a la división que existía dentro del Fútbol, con respecto a los jugadores y las estratificaciones sociales que había en su momento. Los estudiantes mencionan el hecho de que las escuelas privadas jugaban “soccer” y los de escuelas públicas jugaban “Fútbol”, haciendo esa distinción en los términos para cada uno. Dos de diez grupos mencionaron esta categoría en su síntesis, es decir, el 20% de los grupos.

(P2) Pregunta 2: Escriban la importancia de la creación de las reglas en el origen de este deporte.

A continuación, se presenta la clasificación por categorías (dos en total) de la información presentada en las respuestas de los grupos de estudiantes:

- a. Reducir el riesgo: Esta categoría hace referencia a la disminución de los factores que puedan afectar físicamente a los jugadores. Todos los grupos de estudiantes mencionaron que la creación de las reglas permitió reducir los peligros a la integridad de los jugadores, mencionando aspectos como la pérdida de partes del cuerpo en los juegos, y asociando la reducción de violencia, al mejoramiento del deporte, teniendo un aporte positivo a la sociedad.
- b. Orden del juego: Esta categoría hace referencia a la organización del modo de juego, generando una estandarización de él. Cinco grupos de diez, mencionaron que las reglas

facilitan el orden en el campo de juego, esto es, una regulación de cómo se desenvuelven los partidos y los criterios para medir las sanciones, entre otros aspectos.

(P3) Pregunta 3: Escriban cómo se llama la asociación más antigua del fútbol y en qué año se fundó.

Dado que las dos respuestas a esta pregunta son datos puntuales obtenidos del video, podemos clasificar las categorías a partir de ellos:

Cómo se llama la asociación más antigua del fútbol:

- a. Asociación Federación: Seis de diez grupos contestaron con este nombre. Es decir que el 60% de los grupos identificaron la respuesta correcta.
- b. Federación Asociación: Tres de diez grupos contestaron con este nombre. Se visualiza un cambio de orden en el nombre, lo cual hace incorrecta la respuesta dado que no necesariamente corresponden a la misma entidad.
- c. Federación y asociación y FIFA: Un solo grupo contestó con este nombre. Es una respuesta imprecisa, debido a que no presenta una sola denominación.
- d. Federation asiociation: Un solo grupo contestó con este nombre. Es similar a la categoría b, dado que es la traducción en inglés de ella; sin embargo, está escrita incorrectamente, y no corresponde a la misma entidad que la categoría a.

En qué año se fundó:

- a. 1863: Cinco de diez grupos contestaron este año. Es decir que el 50% de los grupos identificaron la respuesta correcta.
- b. 1963: Cuatro de diez grupos contestaron incorrectamente la pregunta con esta opción.
- c. No colocó: Un solo grupo no respondió la pregunta.

(P4) Pregunta 4: Consulta otros datos, anécdotas, hechos etc. que consideren importantes y completa esta historia.

Esta pregunta pretende que los estudiantes hagan una recolección de información adicional a la brindada en los videos vistos en clase, para fortalecer la introducción de ellos en el contexto en el cual serán desarrolladas todas las situaciones en este proyecto. Debido a que la pregunta es

abierta, y existen muchos acontecimientos que se consoliden como respuesta, se plantearon las siguientes seis categorías:

- a. Anécdota de un equipo de fútbol: Esta categoría recoge aquellos acontecimientos que toman como sujeto principal el equipo de fútbol completamente. Dos de diez grupos mencionaron eventos de este tipo.
- b. Anécdota de un partido: Esta categoría recoge aquellos acontecimientos que ocurrieron durante un partido de fútbol. Dos de diez grupos mencionaron eventos de este tipo.
- c. Anécdotas de un jugador: Esta categoría recoge aquellos acontecimientos que toman como sujeto principal de acción a algún jugador de fútbol particular. Ocho de diez grupos presentaron eventos de este tipo.
- d. Anécdota por evento futbolístico: Esta categoría recoge aquellos acontecimientos que se refieren a la realización de alguna copa, torneo o competencia de este estilo. Dos de diez grupos presentaron eventos de este tipo.
- e. Información inconclusa: Esta categoría recoge aquellas respuestas que no son claras con respecto a los acontecimientos, debido a que no dio datos precisos, y no permite ubicar al lector sobre ellos. Solo uno de diez grupos presentó este caso.
- f. No contestó la pregunta: Solo un grupo no respondió a la pregunta indicada, y, por ende, no cumplió con la consulta.

Esta primera tarea, refleja cómo los estudiantes han construido un panorama general sobre el origen del fútbol y las características que han evolucionado a lo largo del tiempo. Han reconocido que este deporte no siempre ha sido como hoy en día se práctica, y que debió pasar por un proceso para ajustarse a las condiciones con las que hoy se desarrolla. El ejercicio de consultar las anécdotas para completar la información brindada por los videos, les permitió evidenciar cómo existen múltiples situaciones que pueden generarse durante los partidos, que incluso se presentan contratiempos a pesar de la organización del campo, y que los jugadores desempeñan una profesión sujeta a muchos factores imprevistos; esto, acercó a los estudiantes a un contexto muy particular, y les fortaleció el interés por conocer más sobre este tema, a tal punto que los acontecimientos colocados fueron incluso de la vida personal de los jugadores, despertando en ellos ese interés por

la investigación de determinadas situaciones pero que dan inicio a generar habilidades de indagación y consulta como es lo que se espera en este proyecto.

Se reconoce como la exigencia principal en la *SITIP1*, la restricción que se coloca de cinco renglones para la síntesis en la primera pregunta. Es una especificación que limita a los estudiantes con respecto a la cantidad de información que pueden presentar. En este sentido, solamente tres grupos lograron consignar la información en los cinco renglones; uno lo hizo en cuatro renglones, indicando cumplido parcial frente a lo solicitado; y siete grupos ocuparon de seis a diez renglones, mostrando que no manejan la estructura de una síntesis, debido a que manifiestan una necesidad de articular todos los aspectos mencionados, e incluso presentan mucha redundancia para mencionar una sola categoría, por lo que no son concisos a la hora de escribir sus ideas. Además, los estudiantes no presentan fluidez en dicho escrito, sino que solo se encargaban de mencionar las oraciones sin conectarlas entre sí.

Se reconoce además que una categoría muy predominante, fue el de la violencia en el fútbol. Es entendible que este aspecto llamara la atención, ya que este es el deporte central de la institución, y el reglamento y el modo de juego utilizado en ella no refleja situaciones tan extremas como las expuestas en el video. Así mismo, las síntesis que se debían realizar en la *SITIP1* mostraron gran interés en el origen del fútbol y la FIFA, debido a que son términos muy familiares para ellos, dado que aparecen mucho en los medios de comunicación que frecuentan, e incluso en otros espacios donde este deporte aparece.

En general, fue notorio en el desarrollo de esta primera tarea, como los estudiantes se motivaron, interactuaron y compartieron anécdotas e historias en torno al fútbol. Pues las diferentes fases que se presentaron en el desarrollo de esta sesión, se pudo observar el trabajo en equipo, la participación, y el interés en aprender sobre este deporte, a pesar de que algunos tuvieron ciertos problemas al momento de plasmar sus ideas, la mayoría de los participantes conocieron información general sobre el origen de este deporte. El rol que desarrolló la docente en la resolución de las tareas fue importante pues sirvieron de apoyo en los procesos de participación e interacción entre los grupos de trabajo.

(S1) Situación 1: El Fútbol En El Tiempo

(T2) Tarea 2: El Fútbol En La Copa Mundo

Esta tarea se desarrolla en el contexto del fútbol, enfocada particularmente en las selecciones de cada país que han participado en la copa del mundo a lo largo del tiempo. Este evento mundial al ser de gran impacto en la comunidad en general, causa gran motivación e interés en los estudiantes, pues este evento da el reconocimiento más importante a la Selección de cada país. Para esta actividad se entregan un texto con información relevante en torno a la copa del mundo, y las selecciones que han ganado y han participado en este encuentro deportivo, así mismo, se presentan datos representativos ocurridos en la historia del fútbol. Las actividades que se desarrollan en esta tarea tiene como fin, dar a conocer un poco más sobre este deporte y como este se va relacionando con las matemáticas, es decir que no solo se incorporan aspectos de la historia del fútbol sino cómo estos se relacionan con las matemáticas, por medio de fechas, tablas, identificación de patrones, modelación de expresiones algebraicas para un caso particular etc. permitiendo de las matemáticas en contexto y realizar algunas generalizaciones.

(P1) Pregunta 1: ¿En qué año se iniciaron los mundiales? Relaciona esta fecha con algún hecho histórico de la época.

La siguiente pregunta, hace parte del proceso de investigación que los estudiantes deben realizar para precisar datos históricos con respecto al desarrollo de los mundiales de fútbol. Para estudiar las categorías de respuesta, dividimos la pregunta en dos partes: La primera, hace alusión al año en el que comenzaron a realizarse los mundiales, por lo cual la respuesta es cerrada. Mientras que, la segunda parte, es una pregunta abierta ya que deben asociar acontecimientos que dieran lugar alrededor de la fecha indicada anteriormente.

¿En qué año se iniciaron los mundiales?

1930: Todos los grupos al realizar la consulta respectiva, descubrieron que los mundiales iniciaron en este año. Por lo tanto, esta es la única categoría de respuesta para esta pregunta.

Hechos históricos de la época:

- a. Elecciones de presidencia en Colombia: Un solo grupo mencionó este acontecimiento. Específicamente, las elecciones en este caso dieron como escogido al liberal Enrique Olaya Herrera (1880 - 1937).
- b. Comenzó la violencia en Colombia bipartidista: Siete grupos de diez, incluyeron en su respuesta este conjunto de conflictos, que recibe el nombre genérico de “*La violencia*”.
- c. La gran depresión: Seis grupos de diez, mencionaron este evento, también conocido como la *crisis del 29*, que correspondió a una crisis financiera mundial, previa a la Segunda Guerra Mundial (1939 - 1945). Además de ello, solo un grupo incluyó por separado este último hecho como respuesta.
- d. Descubrimiento de Plutón: Ocho grupos de diez incluyeron este evento en sus respuestas. Plutón es uno de los planetas que hace parte de los aprendizajes generales sobre nuestro sistema solar, por ende, puede ser una razón para ser la más mencionada.
- e. Década infame (golpe cívico – militar en la historia de Argentina): Siete grupos de diez, presentaron este evento, perteneciente a un contexto de otro país.
- f. Primer mundial (aplazados los de 1942 y 1946): Dos grupos de diez asociaron la fecha con este evento futbolístico, mientras que un solo grupo, incluyó los mundiales de Italia (1934) y de Francia (1938).
- g. Aceptación del fútbol como deporte olímpico (Siglo XX): Sólo un grupo mencionó un dato que además funciona como antecedente del deporte, y es su consolidación como deporte olímpico, atribuyendo mayor importancia al fútbol en general.

(P2) Pregunta 2: ¿Cuántos años pasaron entre la creación de la FIFA y el primer mundial de fútbol?

Esta segunda pregunta, permitirá identificar si los estudiantes son capaces de generar datos puntuales a partir de la información brindada a través de un texto. Por lo tanto, se podrá observar qué fechas relacionan y de qué manera, para establecer la respuesta. A continuación, se describe la categoría de la respuesta obtenida: 26 años; Todos los grupos coincidieron en que, desde la

creación de la FIFA (1904) y la realización del primer mundial (1930), transcurrieron 26 años; efectuando la diferencia entre el mayor año y el menor, para saber sus unidades de discrepancia.

(P3) Pregunta 3: ¿Cuántos mundiales en total se han realizado desde 1930 hasta la fecha?

Con la misma intencionalidad que la pregunta *SIT2P2*, se plantea a continuación las categorías de respuesta generadas por los estudiantes:

- a. 21 mundiales: Nueve de diez grupos a partir de la información dada, infieren que se realizaron a partir de 1930, 21 mundiales, debido a que por algunas casualidades se suspendieron dos.
- b. 23 mundiales: Un solo grupo contestó que se realizaron consecutivamente 23 mundiales, indicando que no tuvieron en cuenta los eventos que causaron la suspensión de dos de ellos en los años 1942 y 1946.

(P4) Pregunta 4: Si se hubiese realizado consecutivamente desde 1930 ¿Cuántos mundiales se habrían llevado a cabo?

Con la misma intencionalidad que la pregunta *SIT2P2*, se plantea a continuación la categoría de respuesta generada por los estudiantes; 23 mundiales: Todos los grupos coincidieron a partir de la información dada, que se hubieran realizado a partir de 1930, 23 mundiales, si no hubieran ocurrido interrupciones.

(P5) Pregunta 5: Completa la siguiente tabla, teniendo en cuenta los mundiales realizados consecutivamente entre 1950 y 2018.

Ilustración 10. ejemplo de respuesta SIT2P5

Número de Mundial	Año en que se realiza el Mundial	Años transcurridos
1	1950	0
2	1954	4
3	1958	8
7	1974	24
8	1978	28
9	1982	32
10	1986	36
14	2002	52
15	2006	56
16	2010	60
18	2018	68

En primer lugar, se cabe la pena resaltar que la resolución de cada uno de los índices que componen esta pregunta, tienen como base la tabla presentada (la cual ellos deben completar). La gran mayoría de los grupos (nueve de diez) realizaron esta tarea durante la sesión, y resolvieron cada interrogante. A continuación, se presentan las categorías de respuesta para cada uno:

(P5a) Pregunta 5a: Escriba cómo varía el número de años transcurridos de acuerdo al número del mundial.

Este primer índice, refleja cómo los estudiantes generan relaciones entre las cantidades indicadas en la tabla. Por supuesto, estas están vinculadas con datos reales presentados previamente al indagar en el contexto del fútbol. Dos de las tres categorías de respuesta formuladas, muestran esencialmente que algunos grupos prefieren simplemente indicar la diferencia de años entre los mundiales de forma puntual, mientras que otros formularon un patrón de comportamiento de todos en la tabla.

- a. Varía cada cuatro años: Cinco de diez grupos contestó de forma puntual la pregunta, indicando que cada mundial (ordenados) se realiza cada cuatro años, sin alguna justificación.
- b. Generó un patrón (cada cuatro años): Cuatro de diez grupos reconocieron el patrón de comportamiento a través de una expresión aritmética.
- c. No contestó la pregunta: Un solo grupo no respondió.

(P5b) Pregunta 5b: Para el tercer y cuarto mundial, ¿cuántos años han transcurrido desde el primero?

Este segundo índice refleja si los estudiantes pueden realizar un conteo, teniendo como partida un dato puntual de la tabla. Miremos las respuestas obtenidas, para el tercer y cuarto mundial respectivamente:

- a. 8 años y 12 años: Siete de diez grupos contestaron estos datos. Para ello, consideraron la posición de cada evento respectivamente, y el número de años que distancia a cada uno entre sí.
- b. 52 años: Dos de diez grupos contestaron esta cantidad. Esta respuesta puede deberse a un intento de contar los años transcurridos para un conjunto de eventos. Sin embargo, la

respuesta no se asocia a algún aspecto de este tipo, ni tampoco se explica cómo es obtenida; por lo tanto, aunque es puntual, es también inconclusa.

- c. No contestó: Un solo grupo (que no completó la tabla), no respondió la pregunta.

(P5c) Pregunta 5c: ¿De qué depende la cantidad de años transcurridos entre cada número de mundial?

- a. Depende que se haga cada cuatro años y exista un mundial: Dos de diez grupos manifestaron que la cantidad de años transcurridos depende de estas dos condiciones. El aspecto de la existencia de mundial, puede deberse tanque previamente se miró que dos mundiales fueron suspendidos por razones de fuerza mayor. Es por ello que los estudiantes consideran que no es suficiente que hayan transcurrido los 4 años, sino que también debe ser debidamente organizado.
- b. Depende del número de mundial: Un solo grupo indicó esta categoría. En sí se presenta una redundancia dado el enunciado, sin embargo, podría deberse ya que de acuerdo a este número se puede aplicar alguna operación directamente para hallar los años transcurridos. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que el enunciado realiza una diferencia de años por pares consecutivos.
- c. Depende de cada 4 años: Tres de diez grupos respondieron esta opción. Se entiende que buscaban mostrar que la regularidad es de cuatro años entre cada mundial.
- d. Depende que cada 4 años varía desde el inicio del mundial: Dos de diez grupos respondieron esta opción. La justificación es similar a la anterior respuesta, con la diferencia de que en este caso se indica que la regularidad se presenta desde el primer mundial (pese a que la respuesta no está bien formulada).
- e. Expresión algebraica: Un solo grupo respondió utilizando una fórmula. Este caso se revisa con detenimiento en el análisis global de la tarea 2.
- f. No contestó: Un solo grupo (que no completó la tabla), no respondió la pregunta.

(P5d) Pregunta 5d: Si un mundial se realizó en 1970, ¿qué número de mundial es? y ¿cuántos años transcurrieron desde el primero?

- a. Sexto mundial y 20 años transcurridos: Nueve de diez grupos respondieron con esta información. Un aspecto relevante de su cálculo, es que emplearon una diferencia con el

año 1974 (sabiendo que es el séptimo por la información atribuida en la tabla), en donde se le restó 4 años para ubicarse en 1970 (año de realización del sexto mundial).

- b. No contestó: Un solo grupo (que no completó la tabla), no respondió la pregunta.

(P5e) Pregunta 5e: ¿De qué depende el año en que se realiza un mundial?

- Secuencia de cuatro años: Ocho de diez grupos contestaron de esta forma. Se resalta el uso del término *secuencia*, ya que lo utilizan para precisar las unidades de cambio entre los años de ocurrencia de los mundiales.
- Identificar constante y variable: Un solo grupo indicó esta respuesta. Para identificar dichos elementos el grupo manifestó que necesitaban saber la fecha del primer mundial. Es decir, un proceso de reconocimiento de qué cantidades se mantienen constantes y cuáles varían.
- No contestó: Un solo grupo (que no completó la tabla), no respondió la pregunta.

(P5f) Pregunta 5f: Encuentre una expresión que permita calcular el año de realizarse un mundial determinado, a partir del año del primer mundial.

- Función incompleta: Dos de diez grupos presentaron una expresión incompleta, esto se refiere a que no tiene los elementos suficientes para asociar correctamente las variables entre sí, o indicar las operaciones correspondientes.
- Función completa: Tres de diez grupos presentar una expresión coherente, y que, aunque combine diferentes representaciones en ella, muestra la relación de las variables y las operaciones que la caracterizan.
- Función inconsistente: Tres de diez grupos presentaron una expresión que no tiene sentido por el uso incorrecto de los símbolos como la igualdad, condicionales, etc.
- No contestó: Dos de diez grupos no respondieron la pregunta.

(P5g) Pregunta 5g: Natalia del grado noveno de la institución educativa Villacarmelo, afirma que la expresión para calcular el año de realizarse un mundial determinado, está dada por:

$$A_t = 1950 + 4x$$

Pedro afirma que la expresión es:

$$A_t = 1950 + 4(x - 1)$$

Donde para ambos casos x es el número del mundial. Comprueba cuál de los dos estudiantes, tiene la razón. Justificando tu respuesta.

En este caso, detallaremos los argumentos dados por los estudiantes al analizar cada una de las expresiones propuestas:

Con respecto a la expresión de Natalia:

Se justifica que Natalia está incluyendo la fecha del primer mundial, pero que la letra que incluye no especifica a qué número de mundial corresponde, además de que es incorrecta por que no incluye el “- 1”.

Se justifica que es incorrecta porque no calcula el primer mundial sino el siguiente, por lo que se inválida ya que debe seguir una secuencia. Una validación realizó uno de los grupos, pero comprobando si resultaba el año en el cual se realizó el segundo mundial, obteniendo que la fórmula de Natalia arroja el sucesor de dicha secuencia.

Ilustración 11. ejemplo de respuesta SIT2P5g

Handwritten student work on grid paper showing a calculation for the year of the 3rd World Cup. The work is as follows:

$$\begin{aligned}
 E): At &:= 1950 + 4x \\
 &= 1950 + 4(2) \\
 &1950 + 4(2) = 8 \\
 &1950 + 8 \text{ da el mundial el 3 mundial}
 \end{aligned}$$

Reemplazo realizado por un grupo de estudiantes para el índice g de la pregunta 5.

Con respecto a la expresión de Pedro:

Un criterio de selección fue realizar un reemplazo, tomando $x = 1$, obtuvieron que en la expresión de Natalia se obtiene un resultado de $At = 1954$, mientras que para Pedro se obtiene $At = 1950$, correspondiente al año en el que se realizó el primer mundial.

Se considera como la expresión correcta debido a que el término $4(x-1)$ es asociado como el número de años transcurridos, y que sumado con la fecha inicial 1950, se obtiene la fecha en la que se realizará cada mundial.

Ilustración 12. ejemplo de respuesta SIT2P5g

eJ:

$$\begin{aligned}
 A &= 1950 + 4(x-1) \\
 &= 1950 + 4(1-1) \\
 &= 1950 + 4(0) \\
 &= 1950 + 0 \\
 &= \underline{1950}
 \end{aligned}$$

quiere decir que este fue el primer mundial del mundo

Reemplazo realizado por un grupo de estudiantes para el índice g de la pregunta 5.

Tres de diez grupos de estudiantes respondieron a esta pregunta de forma incompleta, pues, aunque identificaron la respuesta correcta no se mostraron elaboraciones ni justificaciones de sus respuestas.

(P5h) Pregunta 5h: ¿Tendría sentido considerar en nuestra expresión, valores negativos para el número de años acumulados?

Dos grupos justifican que los años en los que se realizan los mundiales ascienden y no descenden. Este argumento indica que la secuencia es creciente, ya que aumenta indefinidamente. Además de ello, otro grupo justificó que se requieren los años después de 1950, no los anteriores a esa fecha, por lo cual no tiene sentido tener valores negativos para esa variable, dado el comportamiento de la secuencia.

Siete de diez grupos de estudiantes no respondieron esta pregunta, por no lograr dar una justificación a la pregunta, aunque resolvieron las preguntas anteriores, no pudieron interpretar el sentido de los números negativos en esta pregunta.

(P6) Pregunta 6: Realicen una breve reflexión con relación al texto y los videos presentados en clase.

Esta segunda pregunta, se realiza con el fin de identificar si los estudiantes han sido capaces de ampliar su conocimiento a partir de la información brindada a través de las actividades hasta ahora presentadas. Por lo tanto, se podrá observar una síntesis de las ideas construidas con relación a los videos y el texto sobre los mundiales.

Los escritos en general, presentan dos líneas de argumentación, la primera hace alusión al contexto, en donde los estudiantes resumieron aspectos muy importantes que les llamó la atención de los videos y el texto trabajado. En esta línea, se ubican eventos se jugaba el fútbol con la cabeza de los capitanes después de ser decapitados, en épocas anteriores, lo que engloba los antecedentes del fútbol como la creación de la FIFA y del mismo deporte; este tipo de ideas se articularon, ya que los estudiantes asocian a entidades como la mencionada, como la máxima autoridad en el fútbol, y se entiende partiendo de la importancia del deporte en la institución, que en su discurso esos términos están incluidos, pero a través de la actividad se concientizan que tienen una historia.

Por otro lado, la segunda línea se enfoca en la importancia de las matemáticas en el fútbol, en donde los grupos de estudiantes describen las ventajas que atribuye, como por ejemplo la organización estructural de los eventos futbolísticos, incluyendo el número de partidos, tiempos de juego, número de jugadores, etc. En donde las matemáticas permiten utilizar las cantidades, y operar con ellas, para generar resultados como el número de goles, características de los jugadores como su peso y altura, entre otras características. Es por ello, que esta fase les ha dado a los estudiantes un acercamiento a la importancia de incluir las matemáticas en un estudio sobre el fútbol en general, y como ambas siempre han estado relacionadas. Finalmente, cabe resaltar que, en las reflexiones elaboradas, los estudiantes empleaban de media página a una completa para recolectar la información que consideran relevante.

Los grupos de estudiantes a través de la pregunta dos y tres, mostraron un manejo de la línea temporal, para ubicar los sucesos específicos trabajados (creación de la FIFA, mundiales realizados, etc.), indicando una comprensión lectora eficiente, de tal forma que fueron capaces de generar información, usando sus conocimientos previos. En la pregunta 3, *SIT2P3*, por ejemplo, una de las justificaciones fue que Uruguay ganó dos copas, y este tipo de afirmaciones incluyen a su vez información implícita, dado que no muestran cómo se asocia realmente al número de mundiales realizados; aunque este tipo de contradicciones se presentan, los estudiantes comienzan a utilizar los recursos brindados, para justificar los saltos entre los eventos, y dar sentido a la no ocurrencia (en este caso) de dos mundiales; así como otros grupos que lo asociaron a una guerra mundial. Sin embargo, en la cuarta pregunta, los estudiantes emplean el proceso inverso; ya que deben asumir una continuidad en las fechas, e incluir los dos mundiales suspendidos, para generar una conclusión sobre el supuesto de que fueron realizados.

Este conjunto de preguntas, ha permitido centrar de mejor forma a los estudiantes en un contexto más restringido, ya que se ha entendido cómo el fútbol fue originado, esta tarea los ubica entonces a escenarios que como ellos reconocen, están envueltos en situaciones de conflicto a pesar de ser muy reconocidos. Relacionar acontecimientos es importante, pero también conocer las épocas de ellos, pueden ayudar a ampliar su panorama sobre el deporte estudiado.

Por otro lado, remitiéndonos específicamente a la pregunta 5, *S1T2P5*, los estudiantes empiezan reconociendo, interpretando y caracterizando la información presentada en la tabla, en la que debían reconocer el número de mundiales realizados y los años transcurridos de mundial a mundial, esta primera actividad, remite a los estudiantes a un nivel situacional de la matematización horizontal, nivel que alcanza el 90% de los grupos, pues presentan en sus respuestas la interpretación de la tabla, identifican la variación, interpretan y caracterizan la información presentada.

Adicionalmente, la pregunta *S1T2P5(a, b, c, d)* se resalta el reconocimiento de patrones por parte de los estudiantes, identifican las magnitudes que varían y son susceptibles a posibles cambios, identificando un patrón de cambio a partir de la información dada, la mayoría de los grupos alcanzan un nivel referencial, de la matematización vertical. En esta actividad, a partir de las herramientas de tipo visual, como lo es la tabla, y las distintas representaciones utilizadas, en la que algunos de los grupos emplearon elementos como expresiones algebraicas y aritméticas para concretar las relaciones entre las cantidades. Sin embargo, debemos detenernos a detallar cómo lo hicieron: Se presentaron casos, donde los estudiantes le dieron sentido a los datos individualmente, y expresaron una relación entre ellos, un ejemplo de ello, es el siguiente:

Ilustración 13. Ejemplo 1 de la respuesta de la S1T2P5a

cada 4 años varían los mundiales por ejemplo
 $4(P-1) = 0$ $4 \times 0 = 0$ el 4 quiere decir la variable de los años
 $4(P-1) = 4$ $4 \times 1 = 4$ la letra P quiere decir el número del mundial
 $4(P-1) = 8$ $4 \times 2 = 8$
 $4(P-1) = 12$
 2 P// han transcurrido
 $3 = 8$ años
 el número del mundial se le resta 1 y se multiplica por 4 y esa ecuación nos representa los años transcurridos de los mundiales

Ilustración 14. Ejemplo 2 de la respuesta de la SIT2P5a

a. $4(P-1)=0$
 $4(P-2)=4$

P = Representa el número mundial
 y el resultado representa los años transcurridos en el tiempo

Donde los estudiantes reconocen que el cambio de los años entre cada mundial es de cuatro, pero lo identifican como una **variable** y no como una **constante**. Además de ello, asocian la letra P como el número del mundial, en donde se aprecia que pretenden representar todos los casos posibles para esa variable; esto puede inferirse como un intento de **generalización**, entonces, es aquí en que la mayoría de grupos de estudiantes alcanzan un nivel general en la matematización horizontal, pues son capaces de identificar aspectos que son generalizables en esta situación, pues identifican patrones de cambio y magnitudes susceptibles a ser manipulables. De igual manera, se evidencian casos de grupos de estudiantes que, aunque identifican, patrones de cambio y variables susceptibles a generar cambios, no identifican una generalización en el proceso, es decir, que no alcanzan un nivel de generalización, sino que se quedan en un nivel referencial de la matematización vertical, se presenta el caso de los estudiantes que no simplifican el proceso de reemplazo, sino que lo realizan uno por uno (Ver ilustración 15).

Ilustración 15. Ejemplo 3 de la respuesta de la SIT2P5a

los mundos de mundiales que sean realizados

1	0	4
2	4	4
3	8	4
4	12	4
5	16	4
6	20	4
7	24	4
8	28	4
9	32	4
10	36	4
11	40	4
12	44	4
13	48	4
14	52	4
15	56	4
16	60	4
17	64	4
18	68	4

Años Transcurridos

Cantidad de años que se van a variar para realizar el próximo partido

En los ejemplos que se ilustran, vemos que los estudiantes realizan un producto para obtener los años transcurridos. El ejemplo 3, permite evidenciar que el resultado es correcto, ya que cada caso particular coincide con dicha acumulación. Por lo cual, podemos evidenciar que se reconoce un patrón por la forma como expresan la relación.

Los años transcurridos deben ser consideradas como variables, pero con un aumento regular (dada por la constante 4). Sin embargo, los grupos en general, mostraron una necesidad de presentar los rangos de valores que toma, y no asociarlo con un símbolo, así como ocurrió con el número de mundial (P); pero la pregunta 5c, *SIT2P5c*, se presentaron casos de lo mencionado (Ver *Ilustración 16*)

Ilustración 16. ejemplo de respuesta SIT1P5c

The image shows a handwritten equation on grid paper: $4(a) - (4) = 5$. Below the term $4(a)$, there is a downward arrow pointing to the text "Número de Mundial". Below the term (4) , there is a downward arrow pointing to the text "años transcurridos".

Cuando se les solicitó indicar de qué depende el año en el que se realiza un mundial, se ve una tendencia a utilizar la palabra *secuencia*, en el sentido de que notan esa regularidad o patrón, y, por ende, pueden descifrar el año en el que se realizarán dichos eventos, o en qué fechas ocurrieron los anteriores. Los estudiantes utilizan el término variable para describir de que el cuatro es la cantidad de cambio entre los años transcurridos y los años de ocurrencia, y que este último, es una constante determinada por un inicio (el año 1950) y que el cambio mencionado, determina los años transcurridos. Este hecho puede evidenciarse en el siguiente ejemplo:

Ilustración 17. Ejemplo 1 de la respuesta de la SIT2P5e.

The image shows a handwritten response on grid paper. It begins with a circled letter 'e' followed by the text: "depende de que tiene una secuencia de que cada 4 años se re realiza el mundial". Below this, it says "se debe que tiene una variable = 4". The final line reads "una constante = el año en que empezó 1950".

Finalmente, cuando se les solicitó elaborar una expresión para calcular el año en el que se realizará un mundial determinado, se les indicó que debe ser a partir del año del primer mundial. Los estudiantes utilizaron este hecho e incluyeron el año 1950 como elemento importante de la solución, en donde se apoyaron en el reconocimiento del patrón mencionado inicialmente, para completar una fórmula concreta. Sin embargo, el modo como es escrita, puede invalidarla o volverse confusa. Tal es el caso donde utilizan el signo igual como un conector entre las expresiones, y no se rigen bajo la escritura de una ecuación; miremos un ejemplo de este caso:

Ilustración 18. Ejemplo 1 de la respuesta de la SIT2P5f.

F formula

$$1950 + 4 (2-1) = 4 \times 1 = 4 + 1950 = 1954$$

$$1950 + 4 (2-1)$$

En otro caso, se hizo la ecuación completa, pero no se reconoce el año de ocurrencia de los mundiales como una variable propiamente, y optan por colocar valores específicos. Sí conforman una ecuación correctamente, pero no expresa una generalización, por lo tanto, no se establece como un modelo. Sin embargo, sí generaron una expresión para el cálculo, por lo que puede asumirse que cumplió con lo solicitado en el enunciado.

Ilustración 19. Ejemplo 1 de la respuesta de la SIT2P5f.

6R/1

$$2010 = 4 (P-1) + 1950$$

el año del mundial

la variable de los años

la copa de mundial

la constante de los años

Finalmente, también ocurrió algo similar a lo anterior, y es que presentaron un sistema de ecuaciones; dado que pretenden incluir los casos posibles; es decir, dando el resultado buscado desde el principio, dejando una incógnita en cada ecuación, que se espera, sea distinta.

Por el contrario, la pregunta *SIT2P5g* pretende aclarar en los estudiantes esas confusiones anteriormente presentadas en la pregunta *P5f*, esta actividad tienen la intencionalidad de mostrar una generalidad de la actividad presentada, en esta actividad algunos grupos alcanzaron el nivel formal, de la matematización vertical, pues lograron identificar las variables involucradas, el patrón del cambio, el comportamiento de la expresión algebraica y procesos de tabulación que le sirvieron para verificar y aclarar sus resultados.

Es por ello, que este tipo de situaciones, han aproximado a los estudiantes a utilizar componentes matemáticos para construir relaciones entre cantidades. En donde a través de sus reflexiones elaboradas, podemos evidenciar que comienzan a relacionar matemáticamente los datos como las fechas, cantidad de partidos, longitud de la cancha, y otras variables que no necesariamente deben aparecer a la actividad, de tal forma que les brinda razones para continuar en este proceso de exploración del fútbol colombiano a través de la teoría de funciones (la cual no es introducida de forma explícita). Esta *SIT2P5*, pretendía hacer un primer acercamiento de los estudiantes a las expresiones algebraicas funcionales, con el fin de identificar la relación entre variables, con afirmaciones como, por ejemplo; a medida que avanza los mundiales aumentan los años transcurridos de mundial a mundial, en esta afirmación se puede observar un primer nivel en la variación. Así mismo, identificar la razón de cambio, e intentar dar una expresión generalizada para este caso en particular favoreciendo los procesos de modelación en los estudiantes, esta actividad servirá como punto de partida para las tareas siguientes diseñadas en este proyecto.

Adicionalmente, el trabajo en equipo permitió generar discusiones en cada equipo de trabajo, con el fin de argumentar cada una de las ideas que iban teniendo en este proceso, para así poder dar la mejor respuesta posible. Se observa que en el desarrollo de esta Tarea 2, los estudiantes trabajaron un poco más en equipo por el nivel de complejidad de cada pregunta, con el fin de ayudarse y colaborar en la construcción del conocimiento. Igualmente, se presentaron actividades que les permitía continuar con el ejercicio de adquirir destrezas y habilidades para la extracción de la información que necesaria, el análisis de las preguntas que se presentan y la toma de decisiones para dar una solución al problema planteado. Finalmente, los equipos de trabajo realizan una síntesis de lo que han aprendido sobre el fútbol, demostrando las ideas más relevantes que han construido a partir de las tareas presentadas.

(S1) Situación 1: El Fútbol En El Tiempo

(T3) Tarea 3: Colombia Y El Fútbol

Al ser el fútbol un deporte a nivel internacional y estar representado en cada país por medio de su Selección y cada uno de sus equipos locales, Colombia también hace parte de los eventos que se realizan en torno a este deporte, causando gran interés, entusiasmo y entretenimiento en los eventos que este equipo representativo participa. Uno de los eventos más importantes es la Copa Mundo, es por eso que partiendo de los intereses de los estudiantes y limitando nuestro contexto del fútbol para dar a conocer diferentes puntos de la historia de este deporte, se presenta un texto el cual trata sobre la formación de la Selección Colombia, su participación y trayectoria en este deporte. Aquí se plantean actividades no solo de tipo reflexivo y descriptivo sobre la historia del fútbol, sino que involucra contenidos matemáticos como lo es la lectura y construcción de tablas, identificación de patrones, cuantificación de valores, promedios etc. a partir del contexto planteado.

(P1) Pregunta 1: Indique el año en el que la selección Colombia participó por primera vez en la Copa Mundo y en los años que transcurrieron desde la formación de la Selección hasta este evento.

Año en el que la selección Colombia participó por primera vez en la Copa Mundo y que transcurrieron desde la formación de la selección hasta este evento.

- a. 1962 y transcurrieron 32 años: Ocho de diez grupos contestaron con estos datos.
- b. 1954 y transcurrieron 32 años: Un solo grupo de diez contestaron con estos datos.
- c. 1962, 1990, 1994, 1998, 2014, 2018: I Un solo grupo realizó este listado, indicando que entendieron que se preguntaba sobre cuáles años han pasado desde la formación de la selección específicamente, y no sobre los años transcurridos.

(P2) Pregunta 2: Escriba el número de años transcurridos entre el primer mundial y el segundo mundial en el que participó la Selección Colombia.

28 años: Todos los grupos coincidieron en esta respuesta. Esto indica que lograron identificar correctamente el dato que se les solicitó, a partir del texto brindado.

(P3) Pregunta 3: Escriba el número de años transcurridos entre el cuarto mundial y quinto mundial en el que participó la selección Colombia.

16 años: Todos los grupos coincidieron en esta respuesta. Esto indica que lograron identificar correctamente el dato que se les solicitó, a partir del texto brindado.

(P4) Pregunta 4: Escribe adicional a esta historia, la manera es que se practica el fútbol en tu institución y que actividades realizan en torno a este deporte.

- a. Torneo del colegio Interclase (en horas del descanso): Ocho de los diez grupos mencionaron el torneo Interclases, indicando que es una actividad que desempeñan como recreación, ya que normalmente se hace en el descanso o en horarios de clase; de acuerdo a su descripción, se conforman equipos de mujeres y hombres por grados, y estos se enfrentan entre sí. Para ello, se debe practicar mucho para su competencia, debido a que en ocasiones se compiten con otras instituciones. También mencionan que en ocasiones se compra una ficha, que debe tener hasta que su equipo sea eliminado. Los premios corresponden a medallas y trofeos, y se realiza anualmente.
- b. Costumbre entre compañeros: Tres grupos manifestaron que el fútbol se ha convertido en una costumbre para ellos. Esto muestra que este deporte se ha convertido en un elemento importante del contexto escolar de los estudiantes.

(P5) Pregunta 5: Observen las siguientes tablas que corresponden al valor del mercado, el club de pertenencia y la edad de James Rodríguez & Radamel Falco, y respondan.

Tabla XIX. Valor del mercado de James Rodríguez

Valor del mercado en millones de €	Club	Edad	Fecha
1	Atlético Banfield	18	oct-2009
2	Atlético Banfield	18	ene-2010
2,5	Atlético Banfield	18	abr-2010
4,5	FC Porto	19	ago-2010
7	FC Porto	19	jun-2011
9,7	FC Porto	20	sep-2011
13	FC Porto	20	feb-2012
18	FC Porto	20	jul-2012
23	FC Porto	21	abr-2013
35	AS Mónaco	22	ene-2014
60	Real Madrid FC	23	ene-2015
80	Real Madrid FC	24	feb-2016

Tabla XX. Valor del mercado de Radamel Falcao

Valor del mercado en millones de €	Club	Edad	Fecha
25	FC Porto	25	jun-2011
30	Atlético Madrid	25	sep-2011
35	Atlético Madrid	25	feb-2012
40	Atlético Madrid	26	abr-2012
50	Atlético Madrid	26	ago-2012
60	Atlético Madrid	26	ene-2013
60	Mónaco	27	ene-2014
55	Mónaco	28	ago-2014
45	Manchester United	29	feb-2015
35	Mónaco	29	jul-2015
23	Chelsea FC	29	feb-2016
15	Mónaco	30	jul-2016

Indiquen:

(P5a) Pregunta 5a: El intervalo de tiempo que aumentó el salario de James Rodríguez y el intervalo de tiempo que aumentó el salario para Falcao.

- Octubre 2009 - febrero 2016 (James R.) y junio 2011 - enero 2014 (Falcao): Tres de diez grupos presentó los intervalos de esta forma, como una manera simple de indicar los años de inicio y final donde se cumple la condición de cada jugador, colocando el mes y años puntualmente.
- Octubre 2009 - febrero 2016 (James R.) y junio 2011 - enero 2013 (Falcao): Cuatro de diez grupos presentó esta respuesta. En dónde la respuesta es similar a la anterior en estructura.
- 2009 - 2016 (James R.) y 2011 - 2016 (Falcao): Un solo grupo presentó los intervalos de esta forma, donde a diferencia de las dos anteriores respuestas, no sé incluyó el mes.

- d. [2009, 2016] para James R. y [2011, 2013] para Falcao: Un grupo presentó los intervalos como cerrados, remitiendo al hecho de que se incluyen los años tomados como límites de ellos.
- e. (Oct 2009; Feb 2016) para James R. y (Jun- 2011; enero-2013) y (ago-2014) para Falcao: Un solo grupo presentó esta respuesta. Se resalta el uso de la notación de unión de conjuntos para relacionar los intervalos con las condiciones solicitadas; además de representarlos como intervalos abiertos, y utilizando las fechas puntuales como límites de ellos. Esta notación, aunque pretende ser preciso con la información, contiene ciertas inconsistencias matemáticamente.

Con respecto a este índice, se reconoce que los estudiantes entienden el concepto de intervalo, y lo utilizan para indicar fechas puntuales para mostrar un comportamiento específico de la variable.

(P5b) Pregunta 5b: El intervalo de tiempo que disminuye el salario de James Rodríguez y el intervalo de tiempo que disminuye el salario de Falcao.

Con respecto a James Rodríguez:

- a. El salario de James R. no disminuye: Cinco grupos de diez, reconocieron que el salario de James Rodríguez no disminuye en ningún momento, es decir, que hay un aumento en todos los años.
- b. Disminuye del octubre 2009 hasta junio 2011: Un solo grupo indicó esta respuesta, sin embargo, es erróneo, debido a que durante dicho período el salario de James Rodríguez sigue aumentando.
- c. 2009 de octubre: Un solo grupo contestó de esta forma, siendo matemáticamente incorrecto, debido a que esta fecha no determina un intervalo de tiempo anual, sino un dato mensual, por lo cual no hay manera de concluir un decrecimiento de la variable.
- d. El intervalo de James no disminuyó: Dos de diez grupos indicó esta respuesta, aunque se entiende que la intención es expresar la respuesta del índice a, la frase está mal redactada, dado que “el intervalo de James” no corresponde a un intervalo de tiempo, y no corresponde “James” a un elemento matemático medible.
- e. \emptyset : Un solo grupo contestó con el símbolo del conjunto vacío. Se entiende que pretendía especificar que no existe intervalo de tiempo en el que disminuye el salario de James

Rodríguez, por lo tanto, dado que un intervalo es un conjunto de valores restringidos, entonces este es vacío.

Con respecto a Falcao:

- a. Agosto 2014 - Julio 2016: Dos grupos de diez indicaron este intervalo de tiempo; básicamente se utiliza este estilo para mostrar los límites del intervalo que determinan las dos fechas estipuladas.
- b. Hay un desplome salarial de 2014 a 2016: Un solo grupo indicó esta respuesta. En este caso se indica un intervalo de tiempo fijando los límites de él por medio de intervalos, donde se utiliza el término *desplome salarial* para referirse a una disminución en su valor de mercado.
- c. (enero 2014, Julio 2016): Un solo grupo expresó un intervalo abierto, en donde utilizan como límites superior e inferior, el mes y año respectivo. Es importante tener en cuenta que las fechas no corresponde a valores numéricos, por lo tanto, se presenta una inconsistencia en la escritura del intervalo.
- d. Enero 2014 hasta Julio 2016: Tres de diez grupos expresó su respuesta en lenguaje natural, es decir, sin incluir ninguna notación matemática.
- e. [2014, 2016]: Un solo grupo expresó un intervalo cerrado, en donde utilizan como límites superior e inferior, los años respectivos. Se entiende que los estudiantes incluyen los años 2014 y 2016, dentro del período de disminución.
- f. (entre agosto 2014 y Julio 2016): Un solo grupo respondió de esta forma. Hay inconsistencias en la escritura del intervalo abierto, debido a que no están separados correctamente los límites y las fechas no indican valores numéricos, además de incluir la palabra “entre” e “y”, combinando palabras con las notaciones matemáticas.
- g. 2015 de Julio: Un solo grupo contestó de esta forma, siendo matemáticamente incorrecto, debido a que esta fecha no determina un intervalo de tiempo anual, sino un dato mensual, por lo cual no hay manera de concluir un decrecimiento de la variable.

(P5c) Pregunta 5c: El salario máximo y mínimo para James Rodríguez y Falcao.

Salario máximo y mínimo para James Rodríguez:

- a. El mínimo es de 1 euro en el atlético y el máximo en el real Madrid: Esta respuesta fue dada por un grupo, la cual no es clara totalmente, dado que no se le solicita los datos del club en donde tuvo dichos salarios, sino los valores puntualmente. Dicho esto, el valor dado para el mínimo no se encuentra incluido en la tabla, y el valor del máximo no lo indica.
- b. Mínimo de 1 millón de euros y máximo de 80 millones de euros: Tres grupos de diez contestaron de esta forma, siendo la respuesta completa y correcta.
- c. Mínimo de 1 euro y máximo de 80 euros: Un solo grupo colocó esta respuesta. Aunque la respuesta está formulada, no es correcta, debido a que las unidades manejadas en las tablas para los salarios, está dada en millones de euros; por lo tanto, denotan cantidades diferentes.
- d. Mínimo de 1 millón de euros: Un solo grupo indicó esta respuesta incompleta, debido a que le falta indicar otro valor puntual, en este caso, el salario máximo para James Rodríguez.
- e. Máximo de 80: Un solo grupo presentó esta respuesta. Se presenta inconsistencia ya que carece de contexto, debido a que no coloca unidades de medida (millones de euros). Además, la respuesta es incompleta, debido a que le falta indicar otro valor puntual, en este caso, el salario mínimo para James Rodríguez.
- f. Mínimo de 1 y máximo de 80: Un solo grupo presentó esta respuesta. Se presenta inconsistencia, debido a que no coloca unidades de medida (millones de euros).
- g. El mínimo fue en Oct - 2009 y máximo en Feb - 2016: Esta respuesta fue dada por un grupo, la cual no es clara totalmente, dado que no se le solicita la fecha en la cual se registró dichos salarios, sino los valores puntualmente. Dicho esto, el valor dado para el mínimo no se encuentra incluido en la tabla, y el valor del máximo no lo indica.

Salario máximo y mínimo para Falcao:

- a. 15 euros en el Mónaco y el máximo fue en el atlético Madrid: Esta respuesta fue dada por un grupo, la cual no es clara totalmente, dado que no se le solicita los datos del club en

donde tuvo dichos salarios, sino los valores puntualmente. Esto debido a que no indicó el valor del salario máximo para este jugador.

- b. Mínimo de 15 millones de euros y máximo de 60 millones de euros: Tres grupos de diez contestaron de esta forma, siendo la respuesta completa y correcta.
- c. Mínimo de 25 millones de euros y máximo de 60 millones de euros: Un solo respondió de esta forma, siendo una respuesta completa, pero no es correcta con respecto al salario mínimo; sin embargo, reconocen que después de alcanzar dicho salario máximo, esta baja hasta 15 millones, indicando que sí identificaron el valor mínimo de dicha variable.
- h. Mínimo de 15 euros y máximo de 60 euros: Un solo grupo colocó esta respuesta. Aunque la respuesta está formulada, no es correcta, debido a que las unidades manejadas en las tablas para los salarios, está dada en millones de euros; por lo tanto, denotan cantidades diferentes.
- d. Máximo de 60: Un solo grupo presentó esta respuesta. Se presenta inconsistencia ya que carece de contexto, debido a que no coloca unidades de medida (millones de euros). Además, la respuesta es incompleta, debido a que le falta indicar otro valor puntual, en este caso, el salario mínimo para Falcao.
- e. Mínimo de 15 y máximo de 60: Un solo grupo presentó esta respuesta. Se presenta inconsistencia, debido a que no coloca unidades de medida (millones de euros).
- f. El mínimo fue en Jul-2016 y el máximo en Ene - 2013: Esta respuesta fue dada por un grupo, la cual no es clara totalmente, dado que no se le solicita la fecha en la cual se registró dichos salarios, sino los valores puntualmente.

(P6) Pregunta 6: Realiza las tablas de los promedios del valor del mercado de James Rodríguez y Radamel Falcao en aquellos períodos anuales en los que tenga más de un salario:

A continuación, se presentan dos respuestas obtenidas de forma general, al momento de completar la tabla: La primera, referida al caso donde sólo incluyen aquellos años donde se registró más de un valor del mercado para cada jugador; mientras que el segundo, se refiere al caso el caso donde se realiza el promedio del valor de mercado en millones euros, para cada uno de los años presentados, sin hacer distinción de la cantidad de registros de la variable mencionada inicialmente. Se presenta a continuación un ejemplo de cada caso:

Ilustración 20. Ejemplo de la tabla SIT3P6 para los años con más de un registro.

Valor del mercado en millones de €	Edad	Año
3	18,33	2010
8,35	19,5	2011
13,5	20	2012

Valor del mercado en millones de €	Edad	Año
27,5	25	2011
41,667	25,66	2012
59,5	27,5	2014
40	29	2015
19	29,5	2016

Valor del mercado en millones de €	Edad	Año
1	18	2004
3	18	2010
4	19	2011
15	20	2012
23	21	2013
35	22	2014
60	23	2015
80	24	2016

Valor del mercado en millones de €	Edad	Año
27	25	2011
41	25	2012
60	26	2013
57	27	2014
40	29	2015
19	29	2016

Es importante mencionar que esta tabla relaciona al mismo tiempo tres variables: Valores del mercado en millones de euros de cada jugador, su edad y el año de registro.

(P6a) Pregunta 6a: Carolina estudiante de noveno grado, afirma que el salario aumenta regularmente de acuerdo al período de juego. Esta afirmación es correcta para James Rodríguez o para Falcao, justifica tu respuesta.

- Para James R. siempre aumenta, pero para Falcao siempre disminuye: Tres grupos de diez indicaron esta respuesta. Debemos tener presente que es incorrecta, dado que para el caso del jugador Falcao, se puede delimitar un intervalo en donde su salario aumenta, y otro donde su salario disminuye. Esto indica que su salario no decrece para todos los años registrados en la tabla; mientras que el crecimiento si se da en este caso, para James Rodríguez.
- Para James R. ya que para cada año su precio se valoriza: Dos de diez grupos, indican que el salario de James Rodríguez aumenta (a esto hace referencia el término de *valorizar*), en donde como jugador adquiere mayor valor de mercado. Esto es cierto, por lo tanto, corresponde a la categoría de respuesta correcta. Una respuesta similar fue dada por un

grupo, en donde ellos presentan que para James R. ya que su período de juego y salario aumenta con el tiempo, sin embargo, no podemos afirmar algún aspecto sobre el período de juego, dado que no es una variable incluida en nuestros datos de referencia.

- c. Para James R. ya que de 2004 al 2016, se presenta incrementos en su salario: Un solo grupo de diez, delimitó este intervalo para definir el incremento del salario de James Rodríguez. Por lo cual, la respuesta presenta información adicional con respecto a la categoría anterior.
- d. Para James R. ya que tiene su salario en aumento constante: Dos grupos optaron por esta respuesta, y aunque es correcto afirmar que el salario de James Rodríguez aumenta, este cambio entre uno u otro no es constante. Por lo cual la respuesta es incorrecta.
- e. Para James R. ya que para Falcao hay un desplome salarial del año 2014 a 2016: Un solo grupo optó por esta respuesta, en donde utilizan el término desplome salarial, para referirse a una disminución del valor de mercado el jugador, asociado en este caso a un intervalo específico; en donde los estudiantes indican que hay un cambio total de 60 millones de euros a 15 millones de euros.

(P6b) Pregunta 6b: Se podría afirmar, para ambos jugadores, que el aumento del salario depende de la edad. Justifica tu respuesta.

- a. La edad no es un indicador para que el salario aumente: III Tres de diez estudiantes manifiestan que el aumento del salario no depende de la edad, lo cual es cierto, debido a que en el caso de Falcao, pese a que su edad aumente, su salario no siempre lo hace; aspecto que sí cumple James Rodríguez. Por lo tanto, la relación entre ambas variables no es estricta, y puede variar dependiendo del jugador en cuestión y otros factores.
- b. No. Ambos tienen diferentes edades y técnicas de jugar: Un grupo de estudiantes identificó que el rango de edades para ambos jugadores no coincide, en donde las edades expresadas de Falcao superan las de James Rodríguez. Es por ello que concluyen que el salario no depende de la edad, ya que ambos rangos son totalmente diferentes.
- c. No, dado un contraste de los salarios con base a las edades: Tres grupos de diez, realizaron una comparación de los salarios, teniendo en cuenta las edades expresadas. Agrupan en pares los datos y contrastaron, en donde encuentran que hay una variabilidad y no se determina una regularidad en ellos. También se presentó el caso, en donde se asocia a la

dependencia de la edad cuando hay una disminución de la variable cuando aumenta la edad; sin embargo, si el caso es de un aumento conjunto, no existe una dependencia.

Ilustración 21. Ejemplo SIT3P6b.

b) no depende de la edad debido a que en la tabla James tiene un salario de 30 € con 18 años a diferencia de Falcao con 25 años tiene un salario de 25 € y varía mucho con respecto a la edad y salario de ambos jugadores.

b) Falso, Al jugador James entre más años mayor sueldo Partiendo de ganar 1 millón de Euros a los 18 años hasta ganar 30 millones a los 24 años; Mientras que para Falcao a mayor edad menor salario, su mayor salario fue de 60 millones de € entre sus 26-27 años mientras que el más bajo fue a los 30 años (15 millones de €).

- d. No, dado que ambos no tienen similitud entre sus edades: Un solo grupo manifestó que debido a que el rango de edades presentado para cada jugador es disyunto, no puede compararse o establecer relación con su salario.
- e. No depende de la edad, pero sí de la forma en la que juega: Dos grupos de diez incluyeron un factor adicional para excluir una dependencia del salario con respecto a la edad; en donde establecen la relación del valor del mercado, es con la forma en la que juega, referido a sus técnicas de juego, y otras especificaciones implícitas en ellas.

(P6c) Pregunta 6c: Compara el promedio salarial de James y Falcao, teniendo en cuenta el salario promedio de ambos jugadores respecto a la edad.

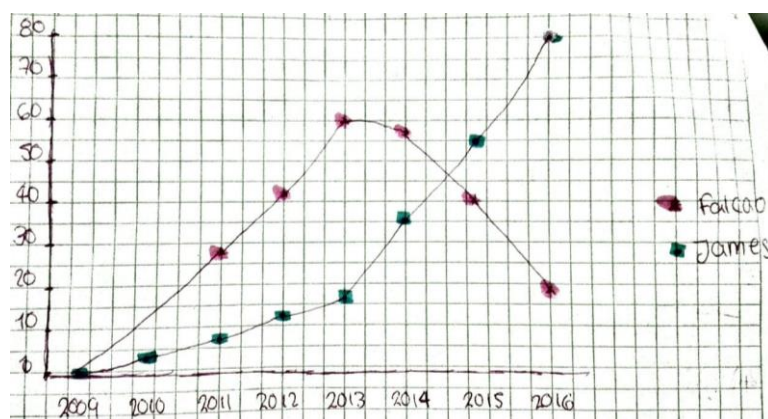
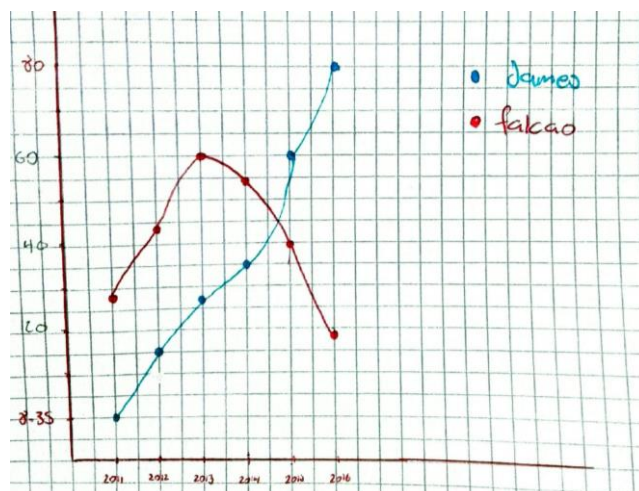
- a. El promedio del salario de James fue de 28 MEuros y el de Falcao 40 MEuros, el primer no disminuye, el segundo sí: Dos grupos de diez indicaron esta respuesta, en donde se formuló utilizando los datos puntuales de los salarios promedio de cada jugador, y el aspecto de su aumento o disminución de acuerdo a la edad.

- b. El promedio del salario de James fue de 36.97 MEuros y el de Falcao 40.93 MEuros. James R. Gana menos que Falcao: Dos grupos de diez indicaron esta respuesta, en donde se formuló utilizando los datos puntuales de los salarios promedio de cada jugador, comparándolos entre sí y determinando cuál es mayor.
Observación: No se tuvo en cuenta en la comparación, años anteriores al 2011.
- c. El promedio del salario de James fue de 21.33 MEuros y el de Falcao 40.25 MEuros, no se pueden comparar edad a edad: Un solo grupo presentó esta respuesta, en donde articula el hecho de que, al ser las edades diferentes en el rango de valores presentado, no pueden ser comparables los salarios promedio de cada jugador.
- d. El salario de James es 35.90875 y el de Falcao es de 40.9333333: Un solo grupo presentó esta respuesta, la cual se encuentra descontextualizada, dado que no incluye unidades de medida, y no responde a la pregunta realizada en el enunciado.
- e. James Rodríguez: 28.23125 y Radamel Falcao: 40.945: Un solo grupo presentó esta respuesta, donde se cumple lo dicho para la anterior.
- f. Falcao gana más dinero en 6 años que James en 8 años: II Dos grupos de diez fijaron esta respuesta, al comparar el salario promedio de cada jugador, de acuerdo a la diferencia entre el mayor valor de la edad y el menor, para cada uno (total de años transcurridos en edad).
- g. No la contestó: Un solo grupo no resolvió esta pregunta.

(P6d) Pregunta 6d: Realiza una gráfica de puntos, para cada una de las tablas V y IV, y determina qué comportamiento puede presentar esa información.

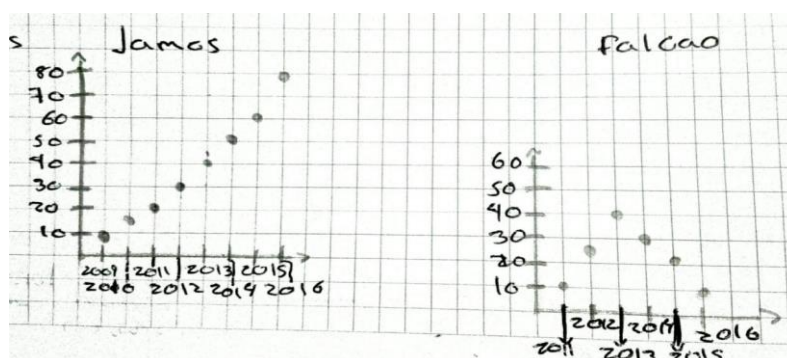
- a. Ambos conjuntos de datos en una sola gráfica: Cuatro grupos de diez, utilizaron este estilo de respuesta. Esta categoría se refiere a aquellos diagramas de puntos, en donde se realizó a la vez los datos referidos a James Rodríguez y Falcao, independientemente de las funciones que se asocian a las curvas realizadas. Todos los gráficos en este caso fueron unidos con líneas suaves, de forma consecutiva, lo que nos muestra cómo los estudiantes intentan establecer una regularidad geoméricamente. Un ejemplo puede verse a continuación:

Ilustración 22. Ejemplos de SIT3P6d



- b. Diagramas de puntos separados para ambas tablas: Seis de diez grupos, realizaron los diagramas de puntos para ambos jugadores de forma separada, esto es, ubicando los pares de datos en cada caso en planos diferentes. En este caso, la mayoría de los grupos no asoció ninguna curva uniendo los puntos entre sí. Solo un grupo unió una de las gráficas con línea suave.

Ilustración 23. Ejemplo 1 de SIT3P6d



En esta parte del proyecto, los estudiantes no identifican qué modelo sigue cada conjunto de puntos, dado que aún no ha sido introducido. Sin embargo, es relevante notar su pretensión de formular uno, para describir geométricamente la relación entre las variables de año (eje de abscisas) y valor de mercado promedio (en millones de euros).

(P7) Pregunta 7: Después de analizar la información anterior, escoge dos jugadores nacionales o internacionales según sea su preferencia, e indaga el valor del mercado más alto que han obtenido y en qué año fue, y resuelve:

Ilustración 24. Ejemplo 1 de SIT3P7

Jugador	Valor del Mercado en millones de €	Año	Club
C. Ronaldo	120	2018	Real Madrid
Neymar	180	2019	FC Paris Saint Germain
Carlos Bacca	25	2015	Sevilla FC
Teofilu Gutierrez	3.5	2015	River Plate

En esta pregunta, además de incentivarlos a la consulta de información y selección de la misma de acuerdo a sus preferencias, permite reconocer si a lo largo de las actividades han generado habilidades para la indagación y estrategias para la selección de la información. Aunque todos los grupos lograron tener la información requerida, no lograron completar la tabla completamente como lo vemos a continuación.

(P7a) Pregunta 7a: Completa la siguiente tabla comparativa con el valor del mercado más alto de los dos jugadores escogidos respecto al valor del mercado más alto de James y Falcao.

- a. Completó la tabla con los datos correctamente: Ocho de diez grupos completaron la tabla totalmente con la información de cada jugador.

Ilustración 25. Ejemplo 1 de SIT3P7

Jugador	Valor del Mercado en millones de €	Año	Club
Neymar	180	2019	FC Paris Saint Germain
Ronaldo	120	2018	Real Madrid
Quintero	10	2015	Stade Rennais FC
Teofilu	3.5	2015	Sporting CP

- b. Le faltó algún dato específico en la tabla: Dos de diez grupos no ingresaron los datos completos en la tabla.

Ilustración 26. Ejemplo 1 de SIT3P7

Jugador	Valor del Mercado en millones de €	Año	Club
James	80		
Falcao	60		
Christiano	120	2018	Real Madrid
Cavalli	2.5	2015	Sevilla FC

(P7b) Pregunta 7b: Con la información anterior, indica el valor del mercado en pesos colombianos para cada uno de estos jugadores, si un euro equivale a \$3800.

- a. Efectuó correctamente la conversión: Todos los grupos efectuaron correctamente la conversión entre las unidades de millones de euros y pesos colombianos. A pesar de ser el mismo proceso, se presentan casos en donde las unidades son expresadas con notaciones específicas, que no necesariamente remiten a aquellas que representan. Por ejemplo, se usó las comillas para representar unidades de millón, como se utilizó el símbolo de euros para representar los millones de euros, simplificando su escritura; sin embargo, se debe tener en cuenta que ambas cantidades no son equivalentes, aunque sea la misma moneda. Adicionalmente, cabe resaltar que se permitió el uso de la calculadora o del celular para realizar el cálculo de las operaciones, esto permite observar que a pesar de realizar las operaciones mediado por las TIC pudieron realizar las operaciones a cada una de estas preguntas.

Ilustración 27. Ejemplos del proceso de conversión SIT3P7b

7) b)	120' x 3800 → 456.000.000.000 C. Colombiano
	180 x 3800 → 684.000.000.000 Neymar
	25 x 3800 → 95000.000.000 C. Bocca
	3.5 x 3800 → 13.300.000 Tiofilo

(b)

Euro	3800	Neymar	180 €	Pesos Colombianos	$6,84 \times 10^{11}$
		Ronaldo	120 €		$4,56 \times 10^{11}$
		Quintero	10 €		$3,8 \times 10^{10}$
		Teofilo	3,5 €		$1,33 \times 10^{10}$

$\text{James} = 80€ \times 3800 = 304.000 \text{ Millones } \$$
 $\text{Falcao} = 60€ \times 3800 = 228.000 \text{ Millones}$
 $\text{Messi} = 180€ \times 3800 = 684.000 \text{ Millones}$
 $\text{Cruzeiro} = 120 \times 3800 = 456.000 \text{ Millones}$

(P7c) Pregunta 7c: Teniendo en cuenta que, en Colombia el salario mínimo es de \$828000 actualmente, indica a cuántas personas se les podría pagar un salario mínimo, con el valor del mercado de cada uno de estos jugadores.

- a. Efectuó un cociente entre el valor del mercado de cada jugador y el salario mínimo en Colombia: Nueve de diez grupos efectuó correctamente el cociente entre las cantidades indicadas.

Ilustración 28. Ejemplo de SIT3P7c

(c)

	828.000	Salario Mínimo ; (Cuánta) Personas
Neymar;	$6,84 \times 10^{11}$	$/828000 = 826086,4565$
Ronaldo;	$4,56 \times 10^{11}$	$/828000 = 550724,6277$
Quintero;	$3,8 \times 10^{10}$	$/828000 = 45893,71981$
Teofilo;	$1,33 \times 10^{10}$	$/828000 = 16062,80198$

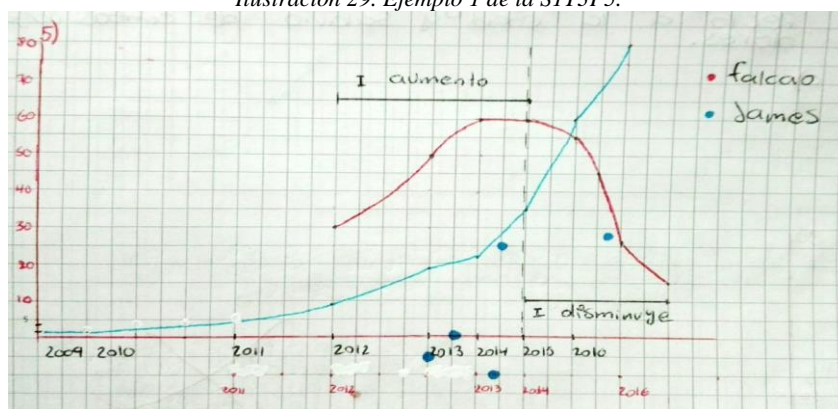
- b. No contestó la pregunta: Un solo grupo no resolvió la pregunta.

La tarea que se desglosó anteriormente, ha evidenciado que los estudiantes tienen una noción muy próxima de qué información brindan los intervalos. Para describirlos, no necesitan

restringirse a un solo sistema de representación, dado que cada uno puede presentar la misma información, desde una perspectiva distinta. La interpretación a las situaciones planteadas, movilizó a los estudiantes a utilizar dichos sistemas, en donde algunos casos, se usa para reconocer información gráficamente (sistema geométrico), en el cual se requieren de elementos sustanciales para realizar correctamente el análisis.

Si consideramos por ejemplo la determinación de aquellos intervalos donde aumenta el salario para cada jugador, la información que proporciona la tabla es suficiente para fijarlo, dado que simplemente se centra la atención en el comportamiento del valor del mercado, y se establece dicho aspecto de acuerdo a los años que han transcurrido. Uno de los grupos presentó una forma alternativa de ver esta información:

Ilustración 29. Ejemplo 1 de la SIT3P5.



En donde vemos que los estudiantes intentaron descubrir qué curva caracteriza el conjunto de puntos de salario y año. Notamos que la curva para James Rodríguez es creciente en todo su dominio, sin embargo, no correspondió a una función trascendente; igualmente en el caso de Falcao, en donde pese a que su salario no aumenta en todo el intervalo de tiempo registrado, su curva no corresponde a una función conocida. Esto se debe a que se utilizaron segmentos para unir los puntos, delimitando la relación gráfica entre pares de puntos consecutivamente, y no en la generalidad de los datos.

Otra forma de presentar los intervalos, dado por un grupo, fue especificar las fechas que están asociadas a elementos de ese intervalo. Esto es, elaborando un listado.

El uso de intervalos abiertos y cerrados, aunque sabemos que se determinan por la inclusión de los límites del intervalo, es usado como una forma de expresión por parte de los estudiantes. Este tipo de exploraciones les favorece el uso de las notaciones matemáticas, dado que una idea puede ser

expresada de muchas maneras en el lenguaje verbal, pero este no debe ser combinado con la simbología matemática, ya que esta está definida de una forma particular históricamente.

Ilustración 30. ejemplos SIT3P5

⑤

Valor del Mercado en millones de €	Fecha	James Rodríguez Tiempo Transcurrido
1	Oct-2009	0 Meses
2	ene-2010	3 Meses
2,5	abr-2010	3 Meses
4,5	ago-2010	4 Meses
7	jun-2011	10 Meses
9,7	sep-2011	3 Meses
13	feb-2012	3 Meses
18	jul-2012	4 Meses
23	abr-2013	9 Meses
35	ene-2014	9 Meses
60	ene-2015	12 Meses
80	feb-2016	13 Meses

RADAMEL FALCAO: (Oct-2009; feb-2016)

25	jun-2011	0 Meses
30	sep-2011	3 Meses
35	feb-2012	5 Meses
40	abr-2012	2 Meses
50	ago-2012	4 Meses
60	ene-2013	5 Meses
60	ene-2014	14 Meses
55	ago-2014	
45	feb-2015	
35	jul-2015	
23	feb-2016	
15	jul-2016	

(jun-2011, ene-2013)
(ago-2014)

Además de lo mencionado, puede afirmarse que los estudiantes tienen un dominio sobresaliente en el manejo de cantidades con respecto a la conversión, y redefinición por medio de otras cantidades. La comparación del salario de un jugador de fútbol y el salario mínimo en Colombia, no solamente combina aspectos matemáticos como sus operaciones, sino que también les permite a los estudiantes enterarse de mejor forma la escala de jugadores y contextualmente qué significan las variables que utiliza; el valor de mercado puede ser expresado en diferentes unidades, lo cual nos brinda una favorabilidad para realizar comparaciones, y generar conclusiones de acuerdo a la necesidad que se tenga.

Se puede observar a partir de esta tarea, que la mayoría de los estudiantes extraen información válida de cada una de las tablas y aunque no se presentan casos de generalización o identificación de patrones, los estudiantes pudieron extraer información de las tablas, analizar y caracterizar la situación, ubicándolos en un nivel situacional para esta tarea, así mismo, como en

el caso de la *SIT3P6*, los grupos de estudiantes además de extraer información de las tablas anteriores, realizaron operaciones de promedios para cada uno de los datos correspondientes y pudieron cumplir con dicha tarea y montar la nueva información en otra tabla. Esta actividad aquí realizada da cuenta de que los estudiantes tienen nociones básicas en el manejo de datos, en la lectura de tablas y han adquirido habilidades para la extracción de información de manera adecuada y pertinente para la solución de las tareas. Así mismo, durante la Tarea 3, se presentaron preguntas de indagación, reflexión y conclusión las cuales fomentan en los estudiantes el trabajo en grupo, la discusión para generar nuevas ideas y la síntesis de información para dar respuesta a cada una de las actividades.

3.5.2 (S2) Situación 2: Organización de Torneo Interclase 2019

Continuando con el objetivo principal de este proyecto, que es enseñar la función cuadrática a partir del contexto del fútbol por medio del ABP, esta situación se ha diseñado teniendo en cuenta los aspectos más relevantes que resultaron de la encuesta y la entrevista, los cuales fueron el contexto del fútbol y el Mercado de la montaña, a partir de estos dos aspectos se diseña esta situación la cual está conformada por cinco tareas. De esta situación tiene como objetivo organizar un torneo Interclase, de la cual resulta el producto que será presentado por cada uno de los grupos en la plenaria final, en la que socializarán los aspectos más relevantes obtenidos al realizar este proyecto, así mismo, mostrar sus ideas y creaciones al presentar sus folletos promocionales. Así pues, esta situación está conformada por: La Tarea 1 denominada; Consultado información, aquí consultaron, indagan y seleccionarán la información más importante que deben tener en cuenta para la logística del torneo. La Tarea 2 denominada; Pensando en la venta de los uniformes (Peto), en esta tarea se empieza a desarrollar aspectos iniciales del concepto de función, aquí se presenta la relación entre variables, la interpretación y lectura de tablas y gráficas etc. La Tarea 3 denominada; Pensando en la ganancia de los uniformes (Peto), se sigue teniendo en cuenta el contexto del fútbol, pero en aspectos de compra y venta de productos, en este caso de los uniformes, en esta trabajan aspectos del concepto de función en general y en particular de la función cuadrática, a partir de la relación entre variables. La Tarea 4 denominada; Analizando gráficamente la ganancia máxima de la venta de uniformes, en esta tarea se estudian características particulares de la función cuadrática, su comportamiento, las formas de representación etc. y finalmente la

Tarea 5 denominada; Diseñando el folleto promocional, en el que deberán consignar la información obtenida a lo largo de la situación 2 y mostrar su creatividad al realizar los folletos.

(S2) Situación 2: Organización de Torneo Interclase 2019

(T1) Tarea 1: Consultado información

Esta tarea está diseñada en el marco del contexto del fútbol, con el fin de dar a conocer a los estudiantes algunas características importantes en la práctica de este deporte. Con esta tarea se pretende que los estudiantes, puedan consultar, extraer y sintetizar información importante relacionada con el fútbol, establecer aspectos importantes en este deporte y puntualizar ideas generales en este contexto.

Planteamiento de la situación

Se le ha encargado al grado noveno (9°) de la institución educativa Villacarmelo, realizar la organización y promoción del próximo torneo de fútbol Interclase 2019; para la organización de este evento deben tener presente determinadas condiciones para asegurar que se realice satisfactoriamente. Es importante que tengan en cuenta que el torneo requiere fondos no solamente para la entrega de premios, sino para elementos de logística. Para esto, te brindaremos las recomendaciones que hace Ana.

(P1) Pregunta 1: Realiza una breve consulta para la organización de los partidos de fútbol.

(P1a) Pregunta 1a: Consulta las reglas del juego.

Las consultas que realizaron los equipos se basaron principalmente en las reglas que se deben tener en cuenta en un partido de fútbol como son; las medidas del balón, las características de la cancha, la definición de las sanciones y los tiros libre o del punto penal, la cantidad de jugadores permitidos en el juego y el tiempo que se puede jugar un partido de acuerdo a la edad de los participantes. Todos los grupos coincidieron en la información general presentada en estas consultas, excepto por un grupo (G2) que menciona características adicionales como son las reglas

de juego para partidos entre colegios o entre clases; por ejemplo, el consentimiento de los padres para que se juegue el torneo, la puntualidad para iniciar los partidos y sanciones tenidas en cuenta para equipos que no lleguen al encuentro. Estas reglas mencionadas únicamente por el (G2), son reglas particulares para torneos Interclase las cuales son importantes tener en cuenta para la organización del torneo.

(P1b) Pregunta 1b: Duración de los partidos.

En la consulta que realizaron los grupos, de acuerdo a la duración de los partidos, la respuesta más común entre los equipos es que cada partido duraba dos tiempos de 45 minutos, esto refiriéndose a un partido de nivel profesional, en esta respuesta coincidieron el 80% de los grupos. Por el contrario, uno de ellos precisó otros tiempos para los partidos, el G3 especificó la duración de los partidos infantiles entre las edades de 12 y 13 el cual tenía una duración de 40 minutos para cada tiempo, de acuerdo a la información que consultaron. El otro 20% de los grupos, tuvieron una respuesta diferente, uno de los grupos G1, especifica una duración de dos tiempos de 30 minutos y el G2, menciona una duración de dos tiempos de 20 minutos.

(P1c) Pregunta 1c: Número de jugadores por equipo.

En las respuestas presentadas por la mayoría de los grupos de trabajo, un 80%, establecen un total de 11 jugadores por cada equipo de fútbol mencionando una condición para iniciar los partidos, y es que este no se iniciará si cada equipo no cuenta, con un mínimo de 7 jugadores en el terreno de juego, esta respuesta presentada se refiere a la cantidad de jugadores permitidos en un partido de nivel profesional. Por el contrario, el 20% de los grupos restantes, dan una respuesta diferente, el G1, precisan en sus respuestas cantidad de jugadores para equipos a nivel escolar, en este caso para un Interclase que se desea realizar, establecen que, para poder dar inicio al partido, cada equipo debe contar con un máximo de cinco jugadores y un mínimo tres para los grados de primaria, y una máximo siete jugadores y mínimo de cinco para los grados de secundaria. Por otra parte, el G2 responden que cada equipo debe tener a sus jugadores habilitados en una planilla de inscripción para jugar en el terreno de juego, establecen un mínimo de 4 jugadores, pero no menciona ni un máximo de jugadores, ni una cantidad exacta para el partido de fútbol, así como tampoco menciona para qué tipo de torneo se debe tener en cuenta esta cantidad de jugadores.

(P1d) Pregunta 1d: Grados participantes.

Las respuestas presentadas para esta pregunta fueron variadas, los grupos de trabajo mencionaron diferentes formas de establecer los grados participantes para el torneo de fútbol, en esta respuesta todos los grupos tuvieron en cuenta en mencionar los grados que participaran en el torneo. Un 30% de los grupos mencionaron realizar el torneo con dos categorías una para primaria (1° a 5°) y otra para bachillerato (6° a 11°). El 40% de los grupos responden realizar el torneo solo con secundaria (6° a 11°), con una excepción de las respuestas en esta categoría, un solo grupo (G3) menciona como debe ser elegido el equipo de fútbol. El 20% de los grupos de trabajo mencionaron realizar el torneo de fútbol para los grados de tercero a noveno y solo el 10% contestaron realizar el torneo Interclase para los grados superiores (9°, 10° y 11°).

(P1e) Pregunta 1e: Horarios.

El 50% de los grupos responde realizar los torneos Interclase en jornada de la mañana de 8:00am a 12:00pm. El 30% de los grupos establecen un horario de 2:00pm a 5:00pm (en contra jornada) y el 20% de los grupos responden realizar los partidos en horas de descanso para que todos los demás estudiantes puedan participar del evento como espectadores.

(P2) Pregunta 2: Para la logística del Torneo Interclase 2019.

Esta pregunta tiene la intención, de involucrar a los estudiantes en el desarrollo logístico de un torneo, en el cual pueda observar todas las actividades que competen tener en cuenta del desarrollo logístico del evento deportivo y como en este se pueden observar procesos matemáticos, que intervienen en el contexto.

(P2a) Pregunta 2a: Datos de la institución donde se organiza.

El 100% de los grupos de trabajo responden a esta pregunta únicamente con el nombre de la institución de la cual se realizará el torneo, es decir, en la Institución Educativa Villacarmelo. No establecen ningún otro dato de este lugar.

(P2b) Pregunta 2b: Cantidad de uniformes necesarios

El 30% de los grupos que han contestado realizar el torneo en primaria y bachillerato, mencionan que cada equipo de fútbol formado por cada grado escolar deberá tener uniforme, en la cual responden que puede ser un máximo de siete petos y un mínimo de cinco. El 40% de los grupos que responden realizar el torneo solo en secundaria establecen una cantidad máxima de uniformes entre 21 y 30 petos. Y el 30% de los grupos responden de manera diferente, estableciendo cantidades de uniformes sin especificar ni para qué grados, ni para qué cantidad de equipos de fútbol.

(P2c) Pregunta 2c: Consulta el costo de fabricación de un uniforme sencillo (peto).

El 30% de los grupos responden que el costo de fabricación de un peto es de \$6000 pesos, por otra parte, el 50% de los grupos establecen un costo de \$3000 pesos para fabricar cada peto y el 20% de los grupos restante responde que el costo de fabricación de cada peto está alrededor de los \$4000 pesos.

(P2d) Pregunta 2d: Presupuesto necesario para la fabricación de uniformes

El 90% de los grupos establecen presupuestos generales, para dar respuesta a este punto, es decir, que no establecen una cantidad de jugadores y petos necesarios por cada equipo para establecer un precio. El 10% de los grupos establecen un presupuesto para realizar los uniformes por cada grupo participante, pero de igual forma no mencionan la cantidad de uniformes que se realizaría con este presupuesto asignado a cada equipo.

(P2e) Pregunta 2e: Premios y criterios de selección del ganador.

El 100% de los grupos coinciden en una parte de sus respuestas al establecer un incentivo monetario para el ganador del torneo Interclase. Por otra parte, al ampliar sus respuestas, el 50% de los grupos proponen dar trofeos para los tres primeros lugares en el torneo, siendo el segundo y tercer lugar premios de consolación. El 30% de los grupos deciden dar un solo trofeo e incentivo para el equipo que ocupe el primer lugar y el 20% restante coinciden en dar solo el incentivo monetario.

(P3) Pregunta 3: Posterior a la consulta que realizaste, haz un esquema en el que recopiles la información que consideres más relevante para la elaboración de un folleto promocional del evento.

Para dar respuesta a esta pregunta, los grupos de estudiantes han realizado un esquema de la información que colocarían en el folleto promocional, para realizar este esquema han utilizado la herramienta PowerPoint de la cual han resultado 10 esquemas, uno por cada grupo. Aunque no tiene definido formalmente un concepto de esquema, la mayoría de los diseños presentados por los grupos han realizado correctamente esta actividad, pues en sus resultados muestran una idea inicial de lo que se entiende por esquema, y así lo han mostrado en sus respuestas. (VER ANEXO 2).

De manera general para esta primera tarea de la situación 2 (*S2T1*), fue diseñada con el fin de involucrar a cada grupo de estudiantes a diseñar y plantear de forma muy básica y precisa la actividad logística para realizar el torneo Interclase de la institución a la cual pertenecen, evento que ha sido nombrado tanto en las actividades de diagnóstico, como en lo que ha desarrollado de este proyecto. En la *SITIP1(a, b, c, d, e)* se debía realizar la consulta de manera general, en diferentes fuentes de información (páginas web, profesores, libros etc.) o recursos disponibles en la institución para dar respuesta a estas preguntas, para las cuales, la mayoría de los grupos han establecido esta consulta en internet y han seleccionado información para realizar partidos de fútbol en un nivel profesional, y aunque la información que aquí se da es a nivel general para cualquier partido, en la extracción de la información no han tenido en cuenta que la información que esta actividad requiere es para la organización del torneo de fútbol Interclase. Unos pocos grupos enfocaron su indagación en la información que necesitan para organizar este evento, los cuales dieron de una manera más precisa sus respuestas. Adicionalmente, ninguno de los grupos incluyó las fuentes de las cuales tomaron los datos. Sin embargo, cada uno ha presentado una síntesis de la información, lo que permite observar que están adquiriendo estrategias para trabajar en equipo y extraer lo más relevante para dar respuesta a estas preguntas, y presentar datos pertinentes para la logística del torneo.

En la *S2TIP2 (a, b, c, d, e)*, ubica a los estudiantes en un contexto institucional y pensar el torneo en las condiciones de la institución a la cual pertenecen, preguntas a las cuales cada grupo responde de manera puntual y precisa, sin dar más detalles de lo que se solicita en cada una de las preguntas, cada grupo de estudiantes dan respuestas a partir de lo consultado en el punto anterior y establecen una organización del torneo de acuerdo a sus ideas socializadas en cada uno de los grupos. Finalmente, la *S2TIP3* cada grupo realiza un esquema con la información que cree

pertinente para la promoción del torneo, en el cual plasma los datos necesarios para elaborar el folleto final.

(S2) Situación 2: Organización de Torneo Intercolegiado 2019

(T2) Tarea 2: Pensando en la venta de los uniformes

Esta tarea se desarrolla en el contexto del fútbol, enfocada particularmente en la compra y venta de uniformes, en la cual se involucran los dos aspectos de mayor interés de los estudiantes. Las actividades que se desarrollan en esta tarea tienen como fin, dar a conocer otros aspectos que también se ven involucrados en este deporte, así mismo, incentivar a los grupos de estudiantes a colocarse en el papel de organizador del evento y dar propuestas apropiadas para la logística y publicidad del evento.

En esta tarea se presenta algunas características del concepto de función, particularmente, la función lineal, desde la determinación de magnitudes involucradas en la situación, la variación entre magnitudes la lectura de tablas, identificación de patrones etc. permitiendo de las matemáticas en contexto identificar algunos aspectos propios de este concepto.

Tabla XXI. Tipos de respuesta S2T2P1

(P1) Pregunta 1: Realicen un listado de las magnitudes involucradas en la situación, indicando cuales varían y cuáles no.				
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos de estudiantes que responden correctamente, identifican en la información presentada las magnitudes que varían (Precio de venta y cantidad vendida) y las que no varían (Costo de producción del uniforme).	7 (G1, G2, G4, G5, G6, G7, G9)	21	70%
T2	Grupos de estudiantes que responden de manera incompleta, identifican en la información presentada las magnitudes que varían (Precio de venta y cantidad vendida) pero no identifican la magnitud que no varía (Costo de producción del uniformes).	2 (G3, G10)	6	20%

T3	Grupos de estudiantes que responden de manera incompleta, identificando en la información presentada qué magnitudes intervienen, pero no define cuáles varían.	1 G8	3	10%
----	--	---------	---	-----

(P2) Pregunta 2: Analizando la tabla, respondan:

Tabla XXII. Tipos de respuesta S2T2P2a

(P2a) Pregunta 2a: Escribe cómo varía la cantidad de uniformes vendidos (C) cuando el precio de venta de cada uniforme (P) aumenta.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos de estudiantes que responden correctamente, expresan en sus respuestas que, cuando el precio de venta aumenta la cantidad vendida disminuye.	4 (G1, G2, G7, G9)	12	12	40%
T2	Grupos de estudiantes que responden correctamente, expresan en sus respuestas que, cuando <i>P</i> (Precio de venta) aumenta 1000, <i>C</i> (cantidad de uniformes vendidos) baja 5.	6 (G3, G4, G5, G6, G8, G10)	18	18	60%

Tabla XXIII. Tipos de respuesta S2T2P2(b, c)

(P2b) Pregunta 2b: Si el precio de venta fuese \$8000 pesos por cada uniforme, indica cuántos uniformes posiblemente se vendan considerando el mismo patrón de variación. (P2c) Pregunta 2c: Si el precio de venta fuese \$11000 pesos por cada uniforme, indica cuántos uniformes posiblemente se vendan considerando el mismo patrón de variación.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos que responden correctamente, siguiendo la información que se les presenta en la tabla e indican la información de uniformes vendidos para cada precio de venta. Cuando es a \$8000 venden 15 y cuando es a \$11000 no venden ninguno.	7 (G1, G2, G6, G7, G8, G9, G10)	21	21	70%
T2	Grupos que responden correctamente, pero presentan incertidumbre en la respuesta, indicando la información de uniformes posibles vendidos para cada precio de venta. Cuando es a \$8000 venden 15 y cuando es a \$11000 no venden ninguno.	1 (G3)	3	3	10%

T3	Grupos que responden correctamente, indicando la información de uniformes posibles vendidos para cada precio de venta, asociando causalidades por factores externos. Cuando es a \$8000 venden 15 y cuando es a \$11000 no venden ninguno.	2 (G4, G5)	6	6	20%
----	--	---------------	---	---	-----

Tabla XXIV. Tipos de respuesta S2T2P2(d, e)

(P2d) Pregunta 2d: ¿Cuánto aumenta el precio de venta de los uniformes cada que disminuyen 5 uniformes en la venta? Expliquen su respuesta. (P2e) Pregunta 2e: ¿Cuántos uniformes disminuyen cuando el precio de venta aumenta en mil pesos? Expliquen su respuesta.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos que responden correctamente, observando patrón del cambio en las magnitudes que varían, indicando que el precio de venta aumenta mil pesos cuando la cantidad vendida disminuye en 5 y viceversa.	4 (G1, G2, G3, G10)	12	12	40%
T2	Grupos que responden correctamente, observando patrón del cambio en las magnitudes que varía, pero no amplían sus respuestas con el enunciado presentado.	6 (G4, G5, G6, G7, G8, G9)	18	18	60%

De acuerdo con las respuestas a las preguntas S2T2P1 y S2T2P2(a, b, c, d, e), podemos evidenciar que la mayoría de los estudiantes han logrado identificar un patrón de cambio de manera inicial que caracteriza las magnitudes relacionadas en la tabla brindada. Este cambio se efectúa individualmente en ambas variables, pero se enlazan entre sí, para establecer la proporcionalidad entre ellas. La pregunta P1 muestra que el 70% de los estudiantes identificaron las cantidades variables, y las constantes, asociado también a la información que ellos ya conocen previamente por su experiencia, los resultados de esta actividad ubican a los grupos de estudiantes en un nivel situacional y referencial de la matematización vertical.

La pregunta P2a muestra que el 60% de los estudiantes, además de reconocer dicha relación entre cantidades, también lograr atribuirle un valor al cambio de cada una con respecto a la otra.

Esta información es importante debido a que reconocer la relación es relevante, pero esto debe ir acompañado de una cuantificación. Lo cual también se refleja en la pregunta P2(d, e).

La pregunta P2(b, c) muestra que el 70% de los estudiantes utilizan la relación para predecir resultados de una cantidad en términos de la otra, pero atribuyendo una justificación netamente matemática. En donde el 20% indican razones externas al contexto, como, por ejemplo, lo *caro* que serían los uniformes, y su impacto negativo en las ventas.

Lo anterior, permite afirmar que la mayoría de los estudiantes han logrado identificar que varía y cómo varía de acuerdo a la situación establecida, es decir que, han podido identificar las magnitudes involucradas en esta tarea, así como también, atribuirle una relación de dependencia de una variable respecto a la otra. El 70% de los estudiantes han identificado las magnitudes que varían y las que no, para dar respuesta a la pregunta *S2T2P1*. Por otro lado, para el análisis de la tabla no es necesario que ellos efectúen cálculos, pero sí es necesario que determinen un patrón de cambio de un dato al otro, debido a que toda la información se encuentra organizada en una tabla de datos. Las preguntas *S2T2P2(b, c, d, e)* son ejercicios puntuales con el fin de identificar la imagen asociada al valor del precio de venta, esta actividad del punto dos les permite, observar un primer caso de ejemplos concretos para determinar la razón de cambio involucrada en esta actividad. Mientras que, las pregunta *S2T2P2a* les permite responder a partir de la situación cómo varía una magnitud respecto a la otra.

(P3) Pregunta 3: Con la información del punto anterior, escriban:

Tabla XXV. Tipos de respuesta *S2T2P3a*

(P3a) Pregunta 3a: ¿Cuánto varía la cantidad de uniformes vendidos (<i>C</i>)?					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos que responden correctamente, en la tabla identifican el patrón de cambio en la cantidad de uniformes vendidos, el cual varía de 5 en 5.	10 (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10)	30	30	100%

Tabla XXVI. Tipos de respuesta S2T2P2b

(P3b) Pregunta 3b: ¿Cuánto varía el Precio de venta (P)?					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos que responden correctamente, en la tabla identifican el patrón de cambio en el precio de venta, el cual varía de 1000 en 1000.	10 (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10)	30	30	100%

(P3c) Pregunta 3c: Realicen algunas conclusiones, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los puntos anteriores.

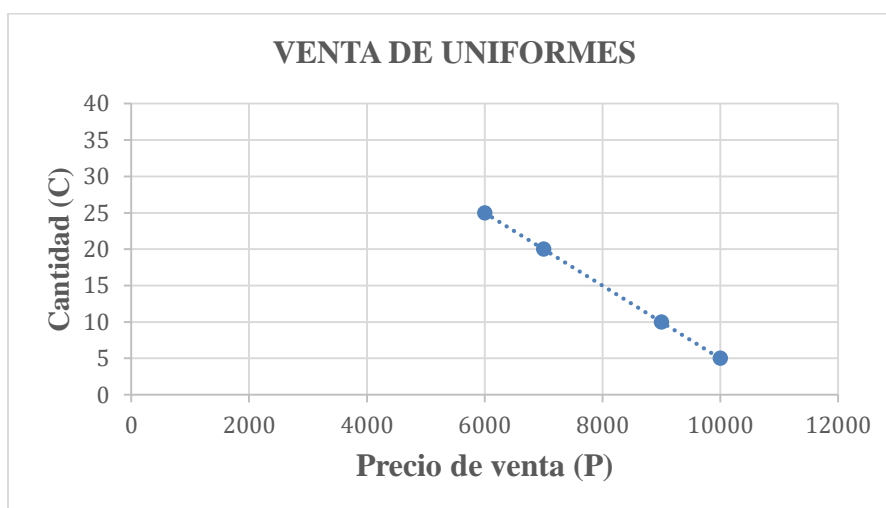
El 100% de los grupos coinciden en la principal conclusión, en la cual determinan que, si una magnitud varía la otra también lo hace, es decir que, si el precio de venta aumenta la cantidad de uniformes vendidos disminuye. Por otra parte, el 70% de los grupos en lugar de decir magnitudes, las llaman cantidades, haciendo referencia a las dos variables que estamos trabajando en esta situación. Es interesante ver que estos grupos relacionan magnitudes con cantidades al dar sus respuestas, quiere decir que se han dado cuenta que las variables que se están tratando en este problema intervienen cantidades, una de cantidad de dinero y la otra de cantidad de un producto, en este caso el uniforme (Peto).

La pregunta P3, en sus primeros dos índices, muestra un porcentaje de asertividad del 100%, justificado principalmente por ser preguntas que están estrechamente relacionadas con los patrones reconocidos en la pregunta P2d-e, es decir que, a partir de las actividades anteriores los estudiantes han logrado alcanzar un nivel situacional, pues son capaces de utilizar sus conocimientos previos para entender e interpretar la situación presentada, en estas preguntas los grupos de estudiantes reconocen cambios en las variables, relaciones entre las magnitudes e identifican patrones de cambio. En donde en este caso se pretende que los estudiantes observen el mismo concepto desde diferentes formas de organizar las preguntas. Esto refleja que una manera de presentar la información no necesariamente es entendible desde otra, debido a que los estudiantes deben utilizar los recursos intelectuales que tienen para comprender lo dicho en el

enunciado. Lo cual nos permite concluir, que para esta forma de presentación de la pregunta P3, el 100% de los estudiantes contestaron de acuerdo a lo solicitado.

Esta tercera pregunta, se relaciona con las dos preguntas anteriores, pues esta, está encaminada en responder de manera concreta cuando varía una magnitud con respecto a la otra, es decir, determinar datos puntuales para hallar la razón de cambio asociada a esta actividad. Se puede afirmar, de acuerdo a las respuestas dadas que, todos los grupos de estudiantes contestaron correctamente, pues determinan un patrón de cambio de un dato al otro como se presenta en la tabla para este ejercicio en concreto. Con estas tres preguntas mencionadas *S2T2P1P2*, se puede establecer que la mayoría de los estudiantes están en el primer nivel de la covariación, coordinación, es en el nivel en el que los estudiantes determinan la dependencia de las magnitudes involucradas como es este caso. Al terminar las preguntas uno y dos de la tarea 2, la mayoría de los estudiantes alcanzan la matematización horizontal y el primer nivel referencial de la matematización vertical, pues comprenden, analizan y utilizan herramientas visuales como las tablas para extraer información, para hacer un análisis preliminar de reconocimiento de la situación, como se puede observar en la pregunta 3c en la que las conclusiones determinan la relación de dependencia de una variable con respecto a la otra.

(P4) Pregunta 4: Otra forma de visualizar los datos obtenidos por Ana, es haciendo uso de la representación geométrica (en el plano cartesiano) de la relación entre el precio de venta de cada uniforme (P) y la cantidad vendida (C).



(P4a) Pregunta 4a: Realicen algunas conclusiones del tipo de gráfica que se obtiene y expliquen por qué decrece.

En las conclusiones formuladas por los grupos de estudiantes, podemos evidenciar un reconocimiento mayoritario de que la unión de los puntos, dados por el precio de venta (P), corresponde a una línea recta; sin embargo, no necesariamente lo presentaron con este nombramiento, sino que utilizaron expresiones como “línea parte de una recta”, en donde pretendían referirse al segmento de recta. Este tipo de hechos muestran que los estudiantes utilizan los recursos de su lenguaje verbal para expresar las ideas, pero estas matemáticamente se conceptualizan de una forma particular. Es por ello que también se resalta el uso de términos como decrecimiento, los cuales por sí solos manifiestan una relación inversa de las variables (para el caso de la función lineal).

Tabla XXVII. Tipos de respuesta S2T2P4b

(P4b) Pregunta 4b: Para el precio de \$8000 pesos por uniforme, ¿cuántos uniformes se venden? Gráfica el punto que indica esta relación (precio, cantidad).					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos que responden correctamente, extraen información a partir de la tabla y la gráfica; contestan que para el precio de \$8000 pesos, se vendieron 15 uniformes. Ubican en la gráfica el punto (8000, 15).	4 (G1, G2, G3, G4)	12	12	40%
T2	Grupos que responden correctamente, extraen información a partir de la tabla y la gráfica; contestan que para el precio de \$8000 pesos, se vendieron 15 uniformes. NO ubican en la gráfica el punto (8000, 15).	3 (G5, G6, G8)	9	9	30%
T3	Grupos que no respondieron la pregunta.	3 (G7, G9, G10)	9	9	30%

La pregunta S2P4b presenta dos caminos para resolverse. Uno de ellos corresponde a la localización de un punto, que, a la vez, se encuentra relacionando dos cantidades; una de ellas, que se identifica como la variable independiente, es el precio de venta (P), y la otra, es la variable dependiente que indica la cantidad de uniformes vendidos (C). El segmento ilustrado, a diferencia

de la tabla, muestra la tendencia de comportamiento de los datos de manera visual. Por lo que los estudiantes, deben reconocer qué significado tiene cada componente, y de qué manera se interrelaciona con los otros. El 40% de los estudiantes, logró ubicar el punto correspondiente a un precio de venta de \$8000, estableciendo la imagen correcta a este valor en el plano. Por otro lado, un 60% de los estudiantes no cumplió el objetivo, debido a que algunos lograron hallar el valor de la cantidad de uniformes correspondientes, pero no necesariamente por argumentos de tipo geométrico, e incluso, algunos grupos no contestaron la pregunta.

Se espera en esta pregunta *S2P4*, que los estudiantes realicen inferencias a partir de un diagrama de puntos, que conecta aquellos valores que son brindados por medio de la tabla inicial. No es necesario que ellos efectúen cálculos o estimaciones en este caso, debido a que toda la información se encuentra relacionada gráficamente. Nuevamente esta actividad está ubicada en un nivel situacional, el cual está ubicado en comprender la información presentada y describir los sucesos que esta presenta, sin embargo se puede decir, que a partir de las respuestas dadas los estudiantes también se encuentran en un nivel referencial, pues son capaces de extraer información y realizar conclusiones a partir de herramientas de tipo visual y el uso de representaciones por medio de tablas y graficas como se presenta en las actividades hasta ahora. La pregunta *S2P4b*, es un ejercicio de localización, simplemente con identificar la imagen asociada al valor del precio de venta de \$8000, ubicada en el eje de las ordenadas, la pregunta es resuelta. Sin embargo, estas dos cantidades se conforman como coordenadas, las cuales determinan el punto a marcar, y los estudiantes deben ser conscientes de cómo se conforma el plano cartesiano, para establecer las relaciones correctas entre las cantidades.

Este ejercicio no pretende que los estudiantes realicen predicciones sobre valor futuros o previos a los marcados en el gráfico, sino que infieran cómo se comporta un caso particular, contenido en el rango de valores trabajos desde la tabla, que son trasladados a un sistema geométrico.

(P5) Pregunta 5: Tome dos puntos que sean consecutivos, con sus respectivas coordenadas, y encuentren:

Tabla XXVIII. Tipos de respuesta S2T2P5(a, b)

(P5a) Pregunta 5a: La diferencia entre las coordenadas que corresponden a los precios de venta para esos dos puntos. (P5b) Pregunta 5b: La diferencia entre las coordenadas que corresponden a la cantidad de uniformes vendidos para esos dos puntos.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos que responden correctamente, al efectuar las diferencia entre dos puntos (coordenadas) consecutivos, establecen que la diferencia para el precio de venta es de \$ – 1000 ⁵ pesos y la cantidad de uniformes vendidos es de 5 <i>unidades</i> .	8 (G1, G2, G3, G4, G5, G7, G8, G9)	24	24	80%
T2	Grupos que responden incorrectamente, al efectuar las diferencia entre dos puntos (coordenadas) consecutivos, establecen que la diferencia para el precio de venta es de \$1000 pesos y la cantidad de uniformes vendidos es de 5 <i>unidades</i> .	2 (G6, G10)	6	6	20%

(P5c) Pregunta 5c: Realiza el procedimiento de los puntos a. y b. por lo menos tres veces, tomando diferentes puntos consecutivos y realiza algunas conclusiones.

En este ejercicio de repetición, los grupos de estudiantes seleccionaron correctamente los puntos dada la condición de ser consecutivos; en donde G6 y G10 nuevamente efectuaron incorrectamente el cálculo de la cantidad de uniformes, justificado por la necesidad de organizar los valores de mayor a menor en los sustraendos, de tal forma que el resultado sea positivo. Por otro lado, las conclusiones que realizaron se remitieron a resultados previos, en donde expresaban que estas diferencias mostraban el cambio de la cantidad de uniformes (C) y el precio de venta de ellos (P), el cual es de 5 y \$1000 respectivamente. Esto les permitió reconocer que el cambio es consecutivo y constante, utilizando como fundamento la recta ilustrada, las respuestas dadas por la mayoría de los estudiantes permite ubicarlos en un nivel de generalización, pues reconocen un cambio de las variables, un patrón de cambio que es general para todos los casos de esta tarea y reconoce las magnitudes que pueden ser manipulables en la situación.

⁵La cantidad de uniformes -1000 tiene sentido matemáticamente ya que es una diferencia consecutiva, pero no corresponde al sentido contextual.

(P6) Pregunta 6: Teniendo en cuenta la información obtenida en el punto anterior:

La relación encontrada antes, se conoce como **la razón de cambio** entre la cantidad de dos magnitudes, es decir, la magnitud del cambio de una variable por unidad de cambio de la otra. Esta relación está dada para dos puntos A (x_1, y_1) y B (x_2, y_2) de la siguiente manera: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Tabla XXIX. Tipos de respuesta S2T2P6a

(P6a) Pregunta 6a: Encuentren la relación entre las diferencias anotadas antes, mediante el cociente de estas.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos que responden correctamente, al efectuar la razón de cambio entre dos puntos (coordenadas) consecutivos , establecen que la relación es $-5/1000$ o un valor equivalente.	8 (G1, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9)	24	24	80%
T2	Grupos que no responden correctamente, al efectuar la razón de cambio entre dos puntos (coordenadas) consecutivos , establecen que la relación es $5/1000$ o algún otro valor.	2 (G2, G10)	6	6	20%

Tabla XXX. Tipos de respuesta S2T2P6b

(P6b) Pregunta 6b: Tomen en consideración diferentes puntos con sus respectivas coordenadas y encuentre la razón de cambio para cada caso.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos que responden correctamente, al efectuar la razón de cambio entre dos puntos (coordenadas) NO consecutivos , establecen que la relación es $-5/1000$	2 (G1, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10)	27	27	90%
T2	Grupos que no responden correctamente, al efectuar la razón de cambio entre dos puntos (coordenadas) NO consecutivos , establecen que la relación es $5/1000$.	1 (G2)	3	3	10%

Un aspecto importante en esta pregunta *S2T2P6*, es que los estudiantes tienen un apoyo teórico, y es la definición de la razón de cambio entre la cantidad de dos magnitudes. Para resolver esta pregunta, deben ser conscientes de que significa cada elemento inmerso en la expresión algebraica de su cálculo, dado que los subíndices de las variables X e Y , corresponde a una organización dado las posiciones de los puntos, en donde las coordenadas de un mismo punto, son asociados a un mismo valor del conjunto de subíndices. Inicialmente en la *S2T2P6a*, observamos que, para el primer cálculo, un 20% de los estudiantes organizaron incorrectamente las diferencias correspondientes, debido a que invirtieron las posiciones de ellas, y su relación es positiva. De acuerdo a esto, ambas cantidades serían directamente proporcionales, en donde a mayor precio de venta (P) de los uniformes, mayor será la cantidad vendida (C), lo cual contextualmente no es cierto. Esto evidencia que los estudiantes centran su atención en efectuar una operación, desligando su significado de la realidad de donde son obtenidos los datos.

Sin embargo, en la pregunta *S2T2P6b*, vemos que el proceso de verificación les ayudó a los estudiantes a comprobar que sus cálculos son erróneos o no, dado que el proceso de repetición les permite comprobar si los puntos comparten una relación entre las diferencias de sus coordenadas. Esto se refleja en la reducción de un 10% en aquellos grupos que obtuvieron el valor de la razón de cambio incorrecta, mostrando un mejoramiento de este proceso aritmético, es aquí, entonces donde los estudiantes profundizan en el conocimiento matemático a partir de la información presentada y reconocen cambios en sus respuestas, dan resultados más asertivos y construyen significados a partir situación trabajada, esto los ubica en un nivel de generalización como se puede observar se acuerdo a las conclusiones presentadas en la siguiente pregunta.

(P6c) Pregunta 6c: Escriban una conclusión relacionada con la razón de cambio encontrada.

Los grupos de estudiantes concluyeron de forma mayoritaria, que la relación entre el precio de venta (P) y la cantidad de uniformes (C), muestra el aumento de una variable con respecto a la disminución de otra, respectivamente; indicando que dicha relación es de 200 (para aquellos que la calcularon como $1000/5$), y de $-5/1000$ para aquellos que determinaron el valor correcto. Cabe resaltar que estas conclusiones relacionan el valor obtenido con los aspectos precisados en los anteriores puntos, donde los estudiantes han reconocido el comportamiento general de ambas variables, siendo inversamente proporcional y caracterizándolo a la definición de razón de cambio

dada anteriormente, la cual ha permitido generalizar el concepto matemático y definir características para este término (razón de cambio).

(P7) Pregunta 7: Teniendo en cuenta cómo cambia y cuánto cambia la cantidad de uniformes vendidos en relación al precio de venta. Ana, afirma que una forma general para calcular la cantidad de uniformes vendidos respecto a cualquier precio de venta, se puede dar mediante la siguiente expresión:

$$y = -\frac{1}{200}x + 55$$

Por el contrario, Victoria afirma que la expresión que permite calcular la relación entre la venta de uniformes y la cantidad vendida es:

$$y = -\frac{5}{1000}x + 11000$$

Donde para ambos casos es el precio de venta de cada uniforme.

(P7a) Pregunta 7a: Verifica cuál de los dos estudiantes tiene la razón. Justifiquen su respuesta.

(P7b) Pregunta 7b: Comparen estos valores con los registrados, en la tabla y en la gráfica anteriormente presentadas.

Tabla XXXI. Tipos de respuesta S2T2P8

(P8) Pregunta 8: Realice la gráfica correspondiente a las dos expresiones en el plano cartesiano.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos de estudiantes que responden correctamente, al realizar la gráfica de la expresión correspondiente a Ana y Victoria.	9 (G1, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10)	27	27	90%
T3	Grupos que no responden correctamente, realizando la gráfica correspondiente a la expresión de Ana, y las operaciones para crear su gráfica; pero elaboran erróneamente la gráfica correspondiente a la expresión de Victoria.	1 (G2)	3	3	10%

La inclusión de la razón de cambio en la expresión de una función lineal, le articula un significado matemático que comúnmente lo conocemos como pendiente de la recta, la cual representa dicha función. Conocer individualmente el valor de la razón de cambio, no garantiza que los estudiantes realicen la selección del modelo lineal correcto, que representa la cantidad de uniformes vendidos dado su precio de venta; ya que se necesita tener conceptualizados dos aspectos: El primero, que la función lineal gráficamente representa una recta, y el segundo, que el intercepto de la recta corresponde al valor cuando el precio de venta es de \$0. Este último debe ser asociado por ellos al contexto, debido a que, si dicha variable es cero, equivaldría a que los uniformes son dados gratis, por ende, hay una cantidad máxima asociada (matemáticamente positivas para ambas cantidades), que se describe por la relación hallada anteriormente.

Los estudiantes le dieron la razón a Ana, debido a que a pesar de que la expresión de Victoria, tiene la pendiente equivalente a la de su compañera, si la cantidad x es reemplazada por \$6000, se obtiene que, en la primera, la cantidad de uniformes vendidos es de 25, mientras que, en la segunda, corresponde a 10970. Este último valor fue excesivamente grande para los estudiantes, dado que a pesar de que los uniformes no serían vendidos sino regalados, está muy alejado de lo que la tabla refleja; de hecho, no coincide con la imagen asociado a ese precio de venta.

Otra razón similar, está dado por el hecho de tomar el precio de venta como \$0, esta comprobación indica que, de acuerdo a la expresión de Ana, la cantidad de uniformes vendidos corresponde a 55, mientras que en la de Victoria, es de 11000. Dando la razón a Ana, por el mismo contraste realizado en el caso anterior.

Ilustración 31. Ejemplo 1 respuesta a S2T2P7(a, b)

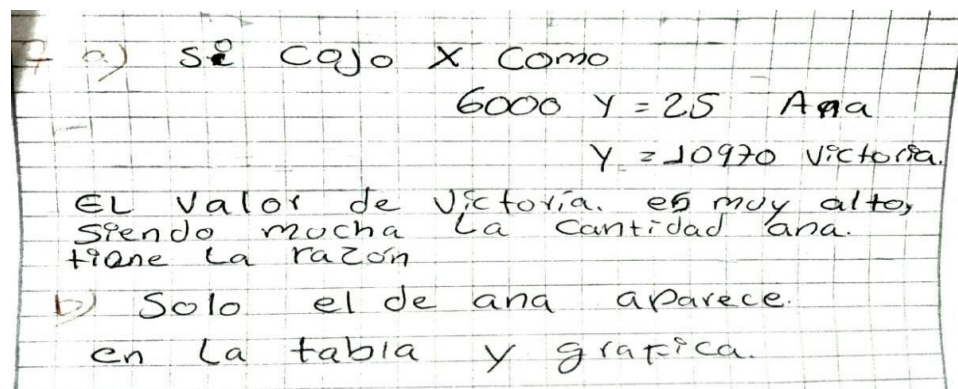
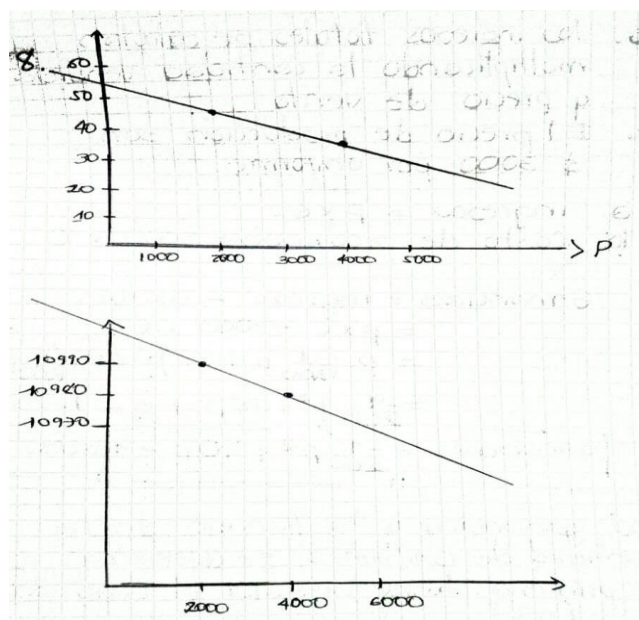


Ilustración 32. Ejemplo 2 respuesta a S2T2P7(a, b)

a.) si tomo x como 6.000 $y = 2,5$ (ana).
 $y = 10970$ (Victoria)
 la relación $\frac{-5}{1000} = \frac{1}{200}$ que aparece en la
 de ana y en la de victoria tambien, pero si
 $P = 0$
 b. solo el de ana aparece en la tabla y
 tiene sentido.
 el valor de
 C es 55 no
 11000.

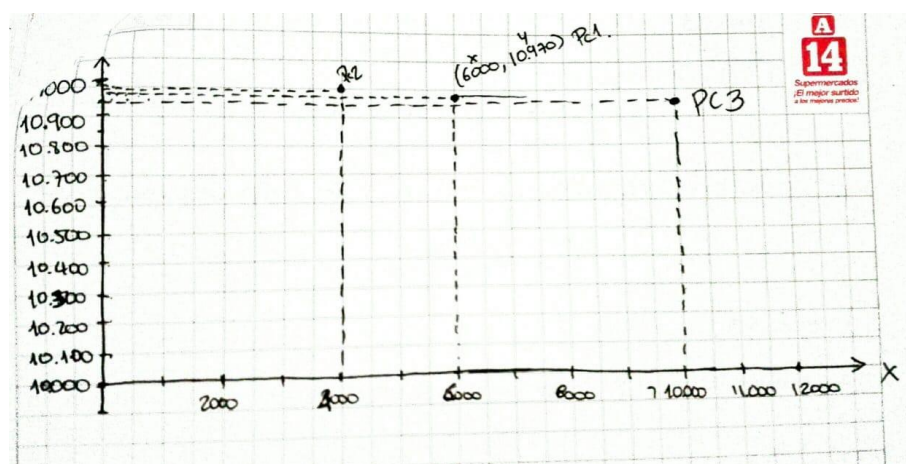
El 90% de los estudiantes, realizó correctamente el gráfico de las rectas determinadas por las expresiones de Ana y Victoria. En algunos casos, llama la atención el manejo de las escalas que emplean para dichos gráficos, pero ellos muestran las propiedades que tienen dichas expresiones, por lo tanto, cumplen la utilidad de lograr evidenciar propiedades geométricas, como la tendencia de decrecimiento, dado que la relación entre las cantidades P y C trabajadas, es inversamente proporcional. Los grupos realizaron ambos gráficos de forma separada, utilizando medidas en los ejes diferentes para ambos, especialmente en el eje de las ordenadas, dado la gran diferencia entre los valores que toman.

Ilustración 33. Ejemplo 1 respuesta a S2T2P8



Algunos de los gráficos, conectan los puntos como parte de una línea recta, indicando que los estudiantes tienen asociado la expresión dada por Ana y Victoria, como dicho gráfico. Sin embargo, es importante tener en cuenta la forma como se ubica, debido a que algunos grupos asociaron el origen del plano, como un valor distinto al punto (0,0); lo cual comienza a generar dificultades, debido a que la noción de intercepto, remitido al corte de la recta con el eje de ordenadas, toma la noción implícitamente de distancia al origen a dicho punto. Por lo cual, la ubicación dada en algunos casos es incorrecta (Ver ejemplo 2 S2T2P8).

Ilustración 34. Ejemplo 2 respuesta a S2P8



La pregunta S2T2P7(a, b) y S2T2P8 conjuntamente, desarrollaron en los estudiantes la capacidad de interpretar y obtener información, de un conjunto de datos, representado en diferentes sistemas. Con la necesidad de tomar decisiones sobre la aceptación de ciertas hipótesis, los estudiantes han comenzado a utilizar los conceptos matemáticos que han adquirido, para atribuir características a los objetos que se movilizan en la actividad, de tal forma que logren una asociación entre ellos, para dar respuestas coherentes.

El hecho de que logran identificar la razón de cambio, y la condición de que se conserva independientemente de los puntos que tome para su cálculo, les permite hacer una distinción especial: A pesar de que se trabajan con cantidades que varían, existen parámetros que se conservan, y que pueden ser observados desde un panorama distinto, como el geométrico y algebraico. Esa constante que estimaron, hace parte de la expresión de una función, la cual a su vez corresponde a una recta. Esta transitividad entre conceptos, es significativa debido a que ayuda a los estudiantes a organizar la información que obtienen, y a dar sentido a un constructo teórico sin

desligarse de una situación como la compra y venta de uniformes, que les muestra cómo las matemáticas no dejan de estar inmersas; es decir, existe un aprendizaje significativo.

La Tarea 2, incorpora a los estudiantes en un estudio progresivo, en donde se pretende comenzar con examinar la variabilidad que tiene el Precio de Venta (P) y la Cantidad vendida (C), teniendo como en cuenta los datos suministrados por Ana en su venta preliminar de uniformes. Esta tarea evidenció que los estudiantes logran conectar el sistema de representación tabular, con el sistema geométrico y a su vez, con el algebraico. Manejaron tres formas de presentar la información, en donde los atributos que pueden observarse en cada uno, no son los mismos.

El sistema de representación tabular, les permitió los estudiantes establecer cambios puntuales de las variables, de forma numérica. En donde las diferencias entre valores consecutivos, le permitió establecer una regularidad de ellas. Esta regularidad posteriormente, es conceptualizada y ubicada en una forma de representación con otros elementos adicionales, para conformar una expresión algebraica que recopile la relación existente entre las dos cantidades presentadas. Esta expresión sería graficada en el plano cartesiano, en donde finalmente sería asociada a un tipo de representación geométrico, que nos indique aspectos como su decrecimiento, y valores puntuales sin necesidad de efectuar cálculos (utilizando las escalas correspondientes), esta primera parte les aporta a los estudiantes pasar por los tres primeros niveles de matematización; situacional, referencia y general, pues la mayoría de los estudiantes de manera gradual alcanzan estos niveles en sus respuestas e interpretaciones de las actividades, es decir que logran pasar de una interpretación de la situación a una generalización de la misma, teniendo en cuenta sus características, sus variables, sus magnitudes y sus cambios.

Sin realizar un análisis cuantitativo exhaustivo, los estudiantes lograron identificar qué expresión algebraica representa las cantidades vendidas (C), a partir de propuestas exhibidas en la tarea. Utilizaron recursos como el reemplazo de valores particulares, para validar cuál es la correcta, y a su vez, establecer un puente entre esa nueva representación, y la tabular, de tal forma que se le atribuye un papel a cada una, con el fin de que, en conjunto, los tres sistemas abordados definan las variables en conjunto. En donde al finalizar la tarea, se puede observar como evidencia de aprendizaje, que los estudiantes han construido el concepto de función lineal, y manejan sus características principales como objeto matemático, es decir que, la mayoría de los estudiantes se ubican en el último nivel de la matematización, el nivel de generalización.

(S2) Situación 2: Organización de Torneo Intercolegiado 2019

(T3) Tarea 3: *Pensando en las ganancias de la venta de uniformes.*

Esta tarea continúa enfocada de manera particular en la compra y venta de uniformes para el torneo de fútbol, está diseñada con el fin de encontrar el mejor precio al que se deben vender los uniformes para obtener la mayor ganancia. Las actividades que se desarrollan en esta tarea tienen como objetivo, dar a conocer otros aspectos que también se ven involucrados en este deporte.

En esta tarea se presenta algunas características del concepto de función, particularmente, la función cuadrática, desde la determinación de magnitudes involucradas en la situación, la variación entre magnitudes la lectura de tablas, identificación de patrones etc. permitiendo de las matemáticas en contexto identificar algunos aspectos propios de este concepto.

(P1) Pregunta 1: Consulta:

(P1a) Pregunta 1a: De qué cantidades depende la ganancia de la venta de uniformes.

Esta pregunta ha sido contestada por el 100% de los grupos, el 60% de los grupos han precisado que las ganancias dependen de los ingresos totales menos el costo de producción, el 20% de los estudiantes dan la misma respuesta, pero le asignan una letra a cada una de las variables, $G = I - Cp$, para las que determinan como $I = \text{ingresos totales}$, $G = \text{Ganancias}$ y $Cp = \text{costo total de producción de los uniformes}$. El 20% restante de los grupos contestas que las ganancias depende de la cantidad vendida multiplicado por el precio de venta y se resta la costo de producción total, en esta respuesta que han dado dos de los grupos se puede observar que han reemplazado los ingresos totales por las variables que intervienen en el cálculo de estas.

(P1b) Pregunta 1b: Cómo se calculan ingresos totales de la venta de uniformes.

De igual forma, todos los grupos contestaron esta pregunta, el 80% determino que los ingresos totales dependen de la cantidad vendida por el precio de venta, y el otro 20% responden que los ingresos totales se calculan a partir de precio de venta por costo de producción de \$3000 pesos.

(P1c) Pregunta 1c: Cómo calcular el costo de producción total de los uniformes.

Para esta respuesta, los grupos responden que el costo de producción total de los uniformes se puede calcular a partir de la cantidad de uniformes vendidos por el costo individual al que se produce cada uno, a esta última, el 20% lo han reemplazado por \$3000.

Esta primera actividad presentada en la S2T3P1(a, b, c) permite poner en contexto a los estudiantes e identificar la información necesaria para dar respuesta a las siguientes preguntas que se presentan, es decir, que les permite consultar, indagar, socializar y extraer información asertiva para la construcción del conocimiento y la resolución de las tareas propuestas.

(P2) Pregunta 2: Usando la información del punto 7 de la tarea 1:

Tabla XXXII. Tipos de respuesta S2T3P2a

(P2a) Pregunta 2a: Escriba una expresión que le permita calcular los ingresos totales por la venta de uniformes.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T2	Grupo de estudiantes que contestan correctamente, escriben la expresión para los ingresos totales como $I = (\frac{-1}{200} * P + 55) * P$, o alguna ecuación algebraica equivalente.	4 (G1, G2, G3, G6)	12	12	40%
T3	Grupo de estudiantes que contestan correctamente, escriben la expresión para los ingresos totales como $Ingresos = P * C$	6 (G4, G5, G7, G8, G9, G10)	18	18	60%

Tabla XXXIII. Tipos de respuesta S2T3P2b

(P2b) Pregunta 2b: Escriba una expresión que le permita calcular el costo de producción de los uniformes.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T2	Grupo de estudiantes que contestan correctamente, escriben la expresión para calcular el costo de producción de los uniformes como $Cp = (\frac{-1}{200} * P + 55) * 3000$, o alguna ecuación algebraica equivalente a ella.	4 (G1, G2, G3, G6)	12	12	40%

T3	Grupo de estudiantes que contestan correctamente, escriben la expresión para los ingresos totales como $Costos = 3000 * C$	6 (G4, G5, G7, G8, G9, G10)	18	18	60%
----	--	--------------------------------	----	----	-----

Ambas preguntas estructuralmente tienen el mismo fin, con la distinción de aquellas variables que buscan representar por medio de una expresión. Esencialmente se presentan tres clases de respuestas, la primera correspondiente al caso donde los estudiantes optaron por utilizar información brindada anteriormente (en la pregunta *S2T2P7*), para precisar una forma de calcular los ingresos y los costos, a partir de la misma variable independiente. Un 40% de los estudiantes, empleó este método, en donde lograron indicar correctamente una expresión algebraica para una función dichas cantidades I y C .

Por otro lado, el 60% de los estudiantes tuvo una tendencia, a realizaron una expresión generalizada, en donde simplemente relacionan las cantidades asociado al contexto, en el cual, la función de los ingresos, quedó determinado por una función de dos variables (P y C), lo que es cierto, pero es impráctico. Mientras que, en el segundo caso, los costos se definen por una sola variable, pero no muestra que haya reconocido a la cantidad C como una función de la variable P .

La representatividad de las variables, no está definida de una forma única, sino que puede aplicarse de diferentes maneras; desde el uso de palabras completas como las palabras *ingresos* y *costos*, o simplemente utilizando letras como la I y la C . Sin embargo, existen ciertas reglas que debe cumplir una función para estar bien establecida, y es partiendo del concepto de equivalencia. Se puede plantear como punto de partida la siguiente inquietud *¿Una palabra es equivalente a un número real? ¿Pertenecen al mismo sistema de representación?* Estas preguntas son amplias, pero podemos responderlas con el hecho de que, matemáticamente no operamos con palabras, sino con números y variables. Es por ello, que consideramos como las respuestas correctas en un sentido completo, para las preguntas *S2T3P2(a, b)*, las de la clase T1, debido a que además de tener una escritura en donde todas las variables se expresan de una misma forma, también se utiliza la información ya establecida anteriormente, para precisar de forma directa la relación que existe entre ellas.

El reemplazo que se muestra en la clase T1 para ambos casos (Ingresos y Costos), refleja dos aspectos: El primero, es que los estudiantes asociaron como equivalentes, las cantidades vendidas y las cantidades producidas. Esto debido a que representan objetos manipulables en el contexto del torneo, que serán producidos y vendidos, y sobre ellos se evalúa el balance. El segundo aspecto, está relacionado al hecho de que han relacionado las cantidades vendidas por medio de la función trabajada anteriormente, en donde la comprobación que realizaron para determinar si funciona para calcular su valor, les permite reconocer que corresponde a una función lineal, y que puede ser reemplazado para generar una nueva función para describir otras variables.

Tabla XXXIV. Tipos de respuesta S2T3P3

(P3) Pregunta 3: Use las expresiones que halló en el punto 2, para expresar la función que representa las ganancias obtenidas por la venta de uniformes y realice las operaciones que se pueden efectuar en la función que representa las ganancias.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupo de estudiantes que contestan correctamente, usan las expresiones correspondientes a ingresos totales y cantidad vendida para hallar la expresión que calcula las ganancias $G = \frac{-1}{200}P^2 + 70P - 165000$.	3 (G1, G2, G3)	9	9	30%
T2	Grupo de estudiantes que contestan correctamente, pero no efectuaron las operaciones algebraicas para formular la función de las ganancias.	6 (G4, G5, G6, G7, G8, G9)	18	18	60%
T3	Grupo de estudiantes que expresaron la fórmula general para hallar las ganancias, pero no reemplazan las funciones correspondientes a la variable C y C_p .	1 (G10)	3	3	10%

Esta pregunta, comienza a exigir al estudiante enlazar las expresiones que halló anteriormente. Las ganancias, definidas como aquella diferencia entre los ingresos y los costos de producción, deben ser ahora representadas por medio de dos variables, que como se observó anteriormente, fue descrita por los estudiantes en un 40% como funciones de una sola variable: El precio de venta (P). Sin embargo, en este caso se agrega un componente importante, y es realizar operaciones algebraicas con el fin de simplificar la expresión a una función polinómica, sin

caracterizarla directamente como una cuadrática. Es por ello, que esta pregunta busca que el estudiante deduzca la función que será centro principal de las preguntas que se trabajarán posteriormente. Es por ello, que esta pregunta es progresiva, en donde deben realizarse los respectivos reemplazos y operaciones.

Solo el 30% cumplió el objetivo completamente. Debido que, el 60% de los grupos, acertó en las respuestas, pero el proceso que llevó a cabo no es correcto; ya sea porque efectuaron algún producto incorrectamente, no aplicaron las propiedades de potencias como es debido, o simplemente tuvieron alguna confusión en el procedimiento.

Finalmente, se tiene que un 10% de los estudiantes, expresó de forma muy general las relaciones entre variables, siendo impráctico debido al manejo de tres variables en una sola expresión, en cuanto puede ser reducido a solamente dos.

(P4) Pregunta 4: Mencione algunas diferencias entre la función que representa las ganancias que deja la venta de uniformes, y la función que representa la cantidad de uniformes vendidos, obtenida en el punto 7 de la tarea 1.

Esta pregunta les plantea un reto a los estudiantes: contrastar una función lineal con una función cuadrática, dadas sus características contextuales y matemáticas. Existe una desventaja en términos teóricos, debido a que los estudiantes han asociado geométricamente la función que representa la cantidad de uniformes (representada con una línea recta), pero aún desconocen qué curva corresponde a la función de las ganancias. Es por ello que la comparación debe efectuarse analíticamente.

Algunos de los argumentos que los estudiantes utilizaron, se remite a los términos P y P^2 , debido a que reconocen que el exponente cambia en ambas expresiones algebraicas. Además de realizar la aclaración, de que la función que representa las ganancias utiliza la cantidad de uniformes, pero ambas funciones no son equivalentes.

Es por ello, que podemos concluir con respecto al estilo de las preguntas, que los estudiantes emplearon una comparación componente a componente, en donde resaltan aquellos aspectos que difieren en la estructura algebraica de cada función. Sin embargo, esta comparación no fue demasiado descriptiva, lo cual se justifica debido a que aún no tienen mucha relación con el modelo de la función cuadrática, por lo tanto, desconocen sus atributos.

Tabla XXXV. Tipos de respuesta S2T3P5

(P5) Pregunta 5: Haciendo uso de la ecuación que representa la ganancia encontrada en el punto 4, complete la siguiente tabla					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos de estudiantes que contestan correctamente y completan la tabla	4 (G1, G2, G3, G6)	12	12	40%
T2	Grupos de estudiantes que contestan correctamente pero no completan la tabla	5 (G5, G7, G8, G9, G10)	15	15	50%
T3	Grupos de estudiantes que no completaron ningún dato de la tabla.	1 (G4)	3	3	10%

Teniendo en cuenta los datos de la tabla, indique que se puede concluir del comportamiento de las ganancias conforme aumenta el precio de cada uniforme.

Los grupos de estudiantes manifestaron que existen casos en donde los valores del precio de Venta (P) toman dos valores para una misma ganancia, esto debido a la necesidad de implementar técnicas como el despeje de ecuaciones, para hallar los valores de la primera variable, de acuerdo a uno dado de la segunda. Para este proceso, solo el G6 utilizó la ecuación cuadrática para hallar los valores precisos en estos casos. Sin embargo, cuando la tabla se encuentra completa, los estudiantes identificaron que el valor del precio de venta aumentó consecutivamente hasta un valor específico, en donde el precio que más ganancia brinda se encuentra a un valor de $P = \$7000$. En la misma tabla, los estudiantes encontraron que hay valores para la ganancia que se repiten, específicamente para un precio de venta de \$6000 y \$8000. Fruto de este proceso de análisis, una conclusión muy importante, es que para obtener la mayor ganancia no se requiere un precio de venta muy elevado, y es un valor accesible para las personas que estén interesadas en el torneo de fútbol que organiza la institución.

(P6) Pregunta 6: Teniendo en cuenta que este proyecto está basado en el contexto del Fútbol, consulta en diferentes fuentes, problemas parecidos que incluyan el concepto matemático que estamos trabajando.

Algunos grupos de estudiantes al realizar su consulta, presentaron ejemplos muy concretos que involucran el concepto de función cuadrática desde diferentes disciplinas, no propiamente del campo del deporte. Esta diversidad contextual refleja el interés de los estudiantes por indagar en otras situaciones similares, sin ser muy detallistas o descriptivos en dicha exploración. Ejemplos como la producción de alimentos en áreas rectangulares, muestran que asocian a la función cuadrática con magnitudes métricas, en este caso, relacionado a superficies. Además de ello, mencionaron ejemplos como el lanzamiento de pelotas y objetos como jabalinas, vinculado a la trayectoria que recorren dichos objetos en el proceso de lanzamiento. Sin embargo, otros ejemplos como *recorridos*, aunque está relacionado con el concepto de función, no lo es particularmente con la cuadrática, ya que las distancias se describen por medio de rectas, es decir, funciones lineales; también, presentaron casos como el MRU, en donde una de sus expresiones algebraicas corresponde a una función cuadrática, y es la ecuación de la posición dado el tiempo.

La Tarea 3 tienen como finalidad realizar la caracterización de tres variables de suma importancia, para la situación deportiva en la que se está incorporando a los estudiantes. Al organizar un torneo de fútbol, una parte importante de él es saber administrar los gastos para no generar pérdidas para la institución, y garantizar ofertas eficientes para motivar a los otros colegios a participar. Sin embargo, no es suficiente con conocer las reglas de un partido de fútbol, o cantidades de uniformes y sus precios, para saber cómo deben organizarse las entradas económicas.

Es por ello que se guía a los estudiantes, a acercarse a las variables de ganancia de venta de uniformes (G), los ingresos totales por las ventas de ellos (I), y el costo de producción. De tal forma que con ellos pueda esquematizar una propuesta con valores estimados con base a la venta preliminar de Ana, de conclusiones y recomendaciones sustanciales para la organización del evento.

De acuerdo a los niveles alcanzados en la tarea uno y dos de esta situación, los cuales fueron; nivel situacional y nivel referencial, y unos primeros acercamientos al nivel general, en esta tarea tres, los estudiantes mostraron en general la capacidad de reconocer cuáles de esas tres variables varían, debido a que es importante identificar cuáles deben permanecer constantes, y

cuáles pueden adoptar múltiples valores. Adicional a ello, los estudiantes tener una asociación entre una variable como la cantidad de uniformes vendidos, con una expresión algebraica construida para su cálculo; dando lugar a un modelo lineal representativo, al cual se le atribuye un significado a las componentes que lo conforman; y que es utilizado también para generar otros modelos que no son necesariamente lineales, lo cual los ubica en un nivel de generalización de la situación, pues los estudiantes son capaces de utilizar sus distintas representaciones y generar conclusiones a partir de estas, identificaron y reconocieron patrones de cambio, para finalmente lograr construir un significado al concepto de función cuadrática, aunque aún no los ubica en el último nivel de la matematización, ya tiene un acercamiento preliminar y unos avances en este nivel, pues aún les falta construir y concluir algunas características de este concepto de manera formal.

De esta manera, los estudiantes lograron formular una definición para realizar el cálculo de las ganancias, a partir del precio de venta de cada uniforme y las cantidades vendidas. En esta etapa, no se realizó la generalización como una función cuadrática, pero contempló la diferencia con respecto a los términos que se manejan en las funciones lineales abordadas con anterioridad. Es por ello, que analíticamente los estudiantes lograron establecer diferencias significativas entre los dos modelos manipulados por ellos.

(S2) Situación 2: Organización de Torneo Intercolegiado 2019

(T4) Tarea 4: Analizando gráficamente la ganancia máxima de la venta de uniformes.

Esta tarea está enfocada principalmente en compra y venta de uniformes, con el fin de conocer el mejor precio al que se deben vender los uniformes para generar la mayor ganancia posible. Las actividades que se desarrollan en esta tarea tienen como fin, dar a conocer algunas características del concepto de función cuadrática, teniendo en cuenta lo que se ha aprendido en la tareas anteriores como son, la razón de cambio, la relación entre magnitudes, la lectura de tablas, identificación de patrones, identificar diferentes tipos de representación (expresión algebraica, gráficas, tablas), así mismo, aspectos particulares de la expresión algebraica de la forma general de la función cuadrática y su respectivos cambios se ven representados en la gráfica etc.

Tabla XXXVI. Tipos de respuesta S2T4P1

(P1) Pregunta 1: Con ayuda de Geogebra, represente gráficamente las parejas ordenadas obtenidas en la tabla de la tarea 3.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupo de estudiantes que representan correctamente en Geogebra, las parejas coordinadas obtenidas en la tarea 3 punto 5.	10 (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10)	30	30	100%

Esta pregunta específicamente, solicita a los estudiantes que ubiquen los datos que deben haber estimado en la tabla de S2T3P5, donde evaluamos que el 40% completaron la tabla, utilizando elementos como la ecuación cuadrática para completar aquellos valores faltantes en la columna del precio de venta (P), mientras que aquellos valores de las ganancias (G), pueden ser obtenidos por medio del reemplazo de los valores de P . De tal manera que se conforman pares de valores, que serán ubicados en Geogebra como puntos en el plano. Para ello, el 100% de los estudiantes logró ubicar con éxitos aquellos puntos que encontraron, mostrando dominar la capacidad de ubicar puntos en el software a partir de sus coordenadas.

Tabla XXXVII. Tipos de respuesta S2T4P2

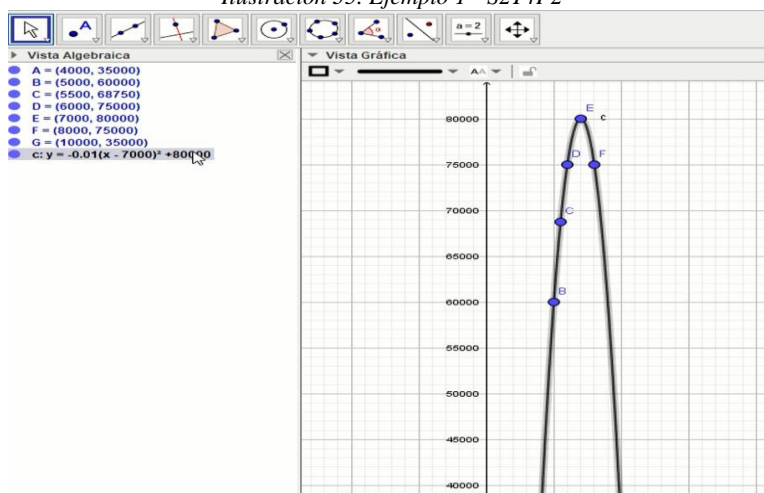
(P2) Pregunta 2: Grafique en Geogebra la función que representa la ganancia de la venta de uniformes y describa algunas de las características de dicha gráfica, la cual se conoce con el nombre de parábola.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupo de estudiantes que representan en Geogebra la expresión que representa las ganancias de la venta de uniformes.	3 (G1, G2, G3)	9	9	30%
T2	Grupo de estudiantes que grafican la parábola (usando la herramienta <i>canónica por cinco puntos</i>) en Geogebra, para obtener la expresión que representa las ganancias de la venta de uniformes en el software.	4 (G4, G5, G6, G8)	12	12	40%

T3	Grupo de estudiantes que unen los puntos ubicados en Geogebra, utilizando rectas y/o segmentos. Obteniendo funciones lineales, que no unifican una curva que contenga todos los puntos simultáneamente.	3 (G7, G9, G10)	9	9	30%
----	---	--------------------	---	---	-----

En esta pregunta, se evalúa dos aspectos: El primero referente a la deducción de un modelo matemático, a partir de la tendencia o comportamiento que tienen los puntos asociados a él; el segundo, corresponde al manejo que tienen los estudiantes sobre Geogebra, y la selección de las herramientas que utilizará para unir dichos puntos. Se utilizó grabación de pantalla para realizar el seguimiento de los procesos realizados por cada grupo, en donde nos centramos describir aquellas respuestas que formularon a partir de su proceso de exploración, con base a lo trabajo en sesiones previas donde se abordó el uso del software Geogebra.

Frente a los aspectos mencionados, el 70% de los estudiantes representó correctamente la función cuadrática asociada a las ganancias (G), definido en términos del precio de venta (P); ya sea por la herramienta *canónica por cinco puntos*, o de otra forma. Logrando cumplir el objetivo, de asociar correctamente la función dados sus puntos.

Ilustración 35. Ejemplo 1 - S2T4P2



Por otro lado, se evidencia que un 30% de los estudiantes, han generalizado la unión de los puntos en el plano, por medio de una función lineal. A pesar de reconocer que existen diferencias entre una función lineal como aquella determinada para la cantidad de uniformes vendidos, y una

función cuadrática como las ganancias, aunque no abstraen la idea de que geométricamente también existirán diferencias; y, además, que los elementos como los exponentes, o número de términos algebraicos en la expresión, influye en la gráfica que representa la función, de tal forma que deben presentarse cambios sustanciales.

Ilustración 36. Ejemplo 2 S2T4P2

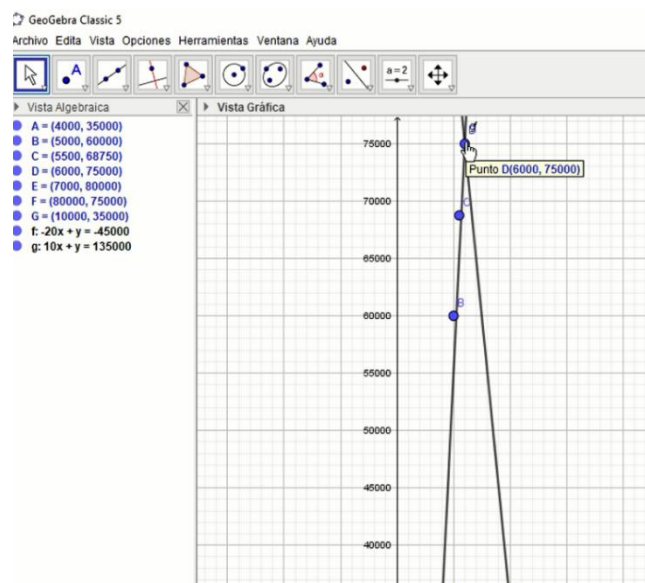
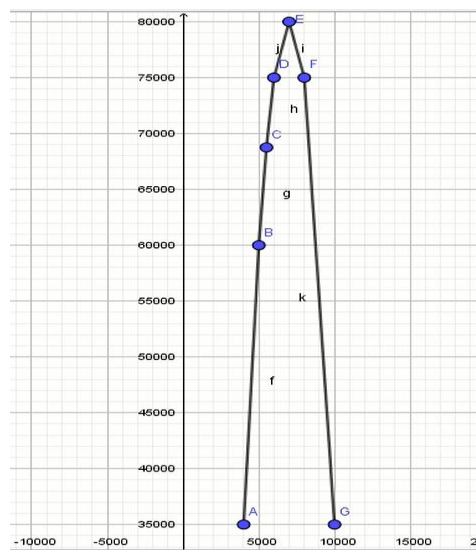


Ilustración 37. Ejemplo 3 S2T4P2



Sin embargo, pese a que se utilizaron elementos de una función lineal, los estudiantes por medio del proceso colectivo de aprendizaje, lograron realizar la gráfica de la función cuadrática, en donde se resalta la participación de sus compañeros en el proceso de generar conocimiento; de tal forma, que se realiza un contraste visual, sobre aquel modelo que consideran correcto sobre el comportamiento de las variables, y el modelo que realmente describe la relación entre ellas. Fortaleciendo el aprendizaje significativo que brinda este proyecto.

En esta pregunta, se realiza la introducción de la curva característica de una función cuadrática. La parábola tiene ciertas propiedades, que se espera, los estudiantes distingan a lo largo del desarrollo de las preguntas. Los aspectos que mencionan, se remiten al hecho de que durante una parte de la gráfica hay un aumento del valor de las ganancias (variable ubicada en el eje de ordenadas), hasta el punto donde el precio de venta corresponde a \$7000. Algunos grupos unieron los puntos utilizando rectas, por medio de la herramienta predeterminada en el software para este

fin, con lo cual, pese a que no es la gráfica correcta, ese cambio de aumento a disminución de las ganancias puede ser reconocido.

Otro aspecto relevante determinado por los estudiantes, corresponde a la repetición de los valores en ambas partes de la parábola, en donde para un mismo valor de ganancia, existen dos valores asociados para el precio de venta de los uniformes. Por lo cual, puede afirmarse que los estudiantes emplearon su razonamiento para establecer características generales del modelo, y tratar de entender por qué se presentan.

Tabla XXXVIII. Tipos de respuesta S2T4P3

(P3) Pregunta 3: Teniendo en cuenta la gráfica obtenida anteriormente, utilice el programa para marcar el punto máximo de ella, y escriba los valores de sus coordenadas. Este punto se denomina el vértice de la parábola . Interprete qué significado tiene en la situación que estamos estudiando.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos de estudiantes que marcan el punto máximo (vértice) en la gráfica de Geogebra como (7000, 80000).	G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10	30	30	100%

Independientemente de que la representación que los estudiantes hicieran, fuese asociado a rectas, segmentos o a la parábola, el 100% de los estudiantes identificaron cuál es el punto máximo de la gráfica (*Ver ejemplos 1 - 3 S2T4P2*). El concepto de vértice de la parábola permite aterrizar de forma más concretar al estudiante sobre el tipo de gráfica que debieron obtener, y como se mencionó en la descripción de la pregunta anterior, los estudiantes lograron llegar a dicha curva. Es por ello que este tipo de verificaciones y el proceso de socializar los resultados, permitió caracterizar la función cuadrática geométricamente, en donde los estudiantes a través de esta ubicación en Geogebra, reconocen que hay un punto en la parábola donde la ganancia es más alta con respecto a las demás (ganancia máxima).

Tabla XXXIX. Ejemplo 3 S2T4P4

(P4) Pregunta 4: Escribe la expresión algebraica que Geogebra genera con respecto a la gráfica. En general esta expresión está dada por: $ax^2 + bx + c$					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos de estudiantes que grafican la parábola (por medio de la opción canónica por cinco puntos) en Geogebra, y obtienen la expresión $-0,01x^2 + 70x - 165000$ que representa las ganancias de la venta de uniformes dada por Geogebra.	10 (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10)	30	30	100%

En las respuestas de esta pregunta se puede observar que los estudiantes en su totalidad, comprendieron la instrucción dada en el enunciado, y aplicaron la opción de Geogebra con respecto a las diferentes representaciones algebraicas de la función de las ganancias (como por ejemplo la forma canónica), para obtener los coeficientes correctos para la expresión completa de la función cuadrática a partir de la tabla de S2T3.

Tabla XL. Ejemplo 3 S2T4P4

Escribe a continuación los valores de los coeficientes a , b y c dados por Geogebra y compara con los coeficientes a y b de la expresión encontrada para las ganancias:					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos de estudiantes que contestan correctamente, e identifican en la expresión dada por Geogebra los coeficientes a , b y c ; los comparan con los coeficientes a , b y c de la expresión encontrada en el punto 3 de la tarea 2.	3 (G1, G2, G3)	9	9	30%
T2	Grupos de estudiantes que contestan correctamente, e identifican en la expresión dada por Geogebra los coeficientes a , b y c ; pero NO comparan con los coeficientes a , b y c de la expresión encontrada en el punto 3 de la tarea 2.	7 (G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10)	21	21	70%

En el proceso del cálculo de la función cuadrática que describe la parábola de las ganancias (G), el 30% de los estudiantes identificaron que Geogebra aproxima uno de los coeficientes, específicamente el valor de a , dado que previamente, en la deducción de la expresión algebraica de dicha variable, se obtuvo que a equivale a $-1/200$, que en representación decimal corresponde a -0.005 ; a lo cual, el software aproxima a dos decimales, atribuyendo el valor de $a = -0.01$. Sin embargo, con respecto a los otros coeficientes, Geogebra conserva el mismo coeficiente para el término x y el independiente, calculados en la expresión en *S2T3P3*.

(P5) Pregunta 5: Teniendo en cuenta que la expresión para hallar la coordenada del vértice está dada por:

$$\text{Vértice} = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right)$$

Tabla XLI. Ejemplo 3 *S2T4P5*

(P5) Pregunta 5: Reemplace los valores que obtuvo para los coeficientes a y b de la expresión encontrada, y verifique si el resultado de esta expresión, se ubica en el mismo punto ubicado en el ítem 3.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos de estudiantes que contestan correctamente, reemplazan los valores de los coeficientes a y b de la expresión algebraica $\frac{-1}{200}P^2 + 70P - 165000$ y al efectuar las operaciones les da como resultado (7000, 80000).	9 G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9	27	27	90%
T2	Grupos de estudiantes que contestan incorrectamente, reemplazan los valores de los coeficientes a y b de la expresión algebraica $\frac{-1}{200}P^2 + 70P - 165000$ y al efectuar las operaciones no da como resultado (7000, 80000).	1 G10	3	3	10%

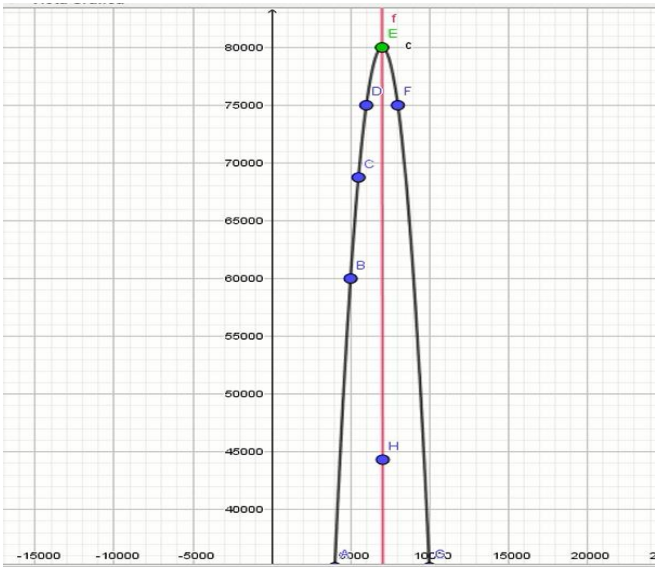
En este caso se puede observar que un 90% de los estudiantes, comprenden la aplicación de la fórmula para calcular el vértice de una función cuadrática, y comprueban efectivamente la veracidad de esta, mediante la obtención del punto (7000, 80000), el cual en la resolución de la pregunta *S2T4P3*, se validó que corresponde al punto máximo de la parábola (vértice).

Tabla XLII. Ejemplo 3 S2T4P6

(P6) Pregunta 6: Construyan en Geogebra una recta totalmente vertical que pase por el vértice. Esta recta se denomina el eje de simetría.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos de estudiantes que construyen la recta en Geogebra correctamente.	10 G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10	30	30	100%

En este caso, los estudiantes deben trazar una recta que pase por el vértice de la parábola, y estudiar sus propiedades con respecto a ella. El 100% de los estudiantes logró realizarlo, teniendo presente un elemento importante: El eje de simetría debe ser perpendicular al eje de las abscisas. Algunos grupos ubicaron el punto para trazar la recta, de tal forma que a simple vista pudiera verse totalmente vertical, sin embargo, es relevante poder brindar a los estudiantes el espacio para que generen sus propias estrategias.

Ilustración 38. Ejemplo 1 S2T4P6



(P6a) Pregunta 6a: ¿Puede notar alguna propiedad de esta recta con respecto a la parábola?

Los grupos de estudios manifestaron, que la recta trazada divide en dos partes iguales la parábola construida en Geogebra. Este tipo de conclusión es determinada visualmente, dado que el

software permite realizar construcciones un grado de precisión óptimo, lo cual facilita las posibilidades de manipular los objetos geométricos en el plano, e identificar características como que la recta pasa por el vértice de la parábola, es decir, aquel que determina la ganancia máxima. Sin embargo, los estudiantes al expresar estos resultados, indican en algunos casos que en este punto se hallan los valores máximos, pero debe tenerse en cuenta que esto solo ocurre para aquella variable que se ubica en el eje de ordenadas (en este caso), mientras la variable en el eje de abscisas puede seguir aumentando, aunque no necesariamente todos los valores que pueda tomar, tengan sentido contextualmente.

(P6b) Pregunta 6b: ¿Qué relación tiene ella con el vértice?

En esta pregunta, los estudiantes manifestaron el hecho de que en el vértice ocurre un cambio en el comportamiento de las ganancias. A partir de dicho punto, las ganancias dejan de crecer y comienzan a disminuir, por lo que la recta de simetría establece un límite en donde ese cambio se efectúa. Adicionando que, para algunos grupos, el eje de simetría solamente atraviesa el vértice, generando una relación de dependencia entre ambos objetos geométricos (punto - recta).

Tabla XLIII. Tipos de respuesta S2T4P7

(P7) Pregunta 7: Ana afirma que las coordenadas del vértice encontrado en el punto anterior indica, desde la situación, el punto máximo de la parábola el cual representa la ganancia máxima. Victoria afirma que, el vértice indica gráficamente el cambio de sentido de la gráfica. Analice estas afirmaciones y concluye.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos de estudiantes que contestan correctamente y concluyen que ambas afirmaciones son correctas.	10 G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10	30	30	100%

Los estudiantes concordaron que tanto Ana como Victoria tienen razón en sus afirmaciones. La gráfica muestra un aumento de las ganancias hasta el precio de venta de \$7000, donde la ganancia teniendo en cuenta dicho valor, es la más alta contemplada en la parábola. Es por ello, que podemos asociarla como la ganancia máxima. Sin embargo, una vez se alcanza este valor, las ganancias comienza a decrecer, debido a que la parábola conserva una forma, donde los intervalos descritos por el vértice (valores menores y mayores a él), están asociados a los mismos valores en

las imágenes. Por lo tanto, puede concluirse, que hay un cambio de sentido, cuando la ganancia máxima se ha obtenido.

Tabla XLIV. Tipos de respuesta S2T4P8

(P8) Pregunta 8: ¿Qué sucede si el precio de venta de cada uniforme es 2000 pesos? Interprete desde la gráfica y la ecuación de la parábola.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos de estudiantes que obtienen a partir de la gráfica y/o la ecuación de la parábola, una ganancia de - \$45.000, es decir, una pérdida.	4 (G1, G2, G3, G6)	12	12	40%
T2	Grupos de estudiantes que obtienen a partir de la gráfica y/o la ecuación de la parábola, una ganancia diferente a - \$45.000.	6 (G4, G5, G7, G8, G9, G10)	18	18	60%

Se les solicita a los estudiantes que expliquen qué ocurre cuando el precio de venta es de \$2000 por uniforme, en donde tienen dos recursos para realizarlo: Utilizar la gráfica de la función de las ganancias (G), e incluso su representación algebraica. El valor obtenido por el 40% de los estudiantes, corresponde -\$45.000, en donde ocurre que su interpretación fue el de una pérdida, dado que los costos de producción superan los ingresos que se reciben con la venta de los uniformes, existiendo un desbalance entre ambas cantidades.

Algunos de los grupos llegaron a valores como -\$65.000, lo cual también puede interpretarse como una pérdida, pero no es el valor concreto de la imagen del escalar que estamos evaluando. Por lo cual, no se acepta como respuesta correcta. Podríamos asumir este resultado erróneo, a la mala realización de cálculos, o distracciones externas, que alteran desde el buen uso de los paréntesis, hasta la abreviación de pasos que pueden ser factores de confusión, lo cual genera variaciones en los resultados.

Tabla XLV. Tipos de respuesta S2T4P9

(P9) Pregunta 9: Observando la parábola que representa las ganancias, indique cuál es el precio mínimo al que se debe vender cada uniforme, la cual no generaría ganancias. Justifique su respuesta.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos de estudiantes que contestan correctamente, ubican el precio mínimo en la gráfica de la parábola que es \$3000 pesos.	10 (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10)	30	30	100%

En esta pregunta se parte de una descripción gráfica construida por el estudiante, en donde este puede reconocer el punto mínimo de la función, a través de la opción de puntero de Geogebra, o simplemente haciendo un reconocimiento del punto en el cual la parábola por primera vez, cruza con el eje de las abscisas, es decir, cuando la ganancia equivale a \$0.

Este ejercicio requiere interpretar el contexto al que se asocia la función, dado que el precio mínimo de venta de cada uniforme no garantiza ganancia alguna, sino que es el mínimo valor que puede tomar el precio de venta. Por lo cual, los estudiantes asociaron dicho punto, con aquel donde *inicia la parábola*.

Se puede observar la concentración del 100% de los datos en un solo punto de la curva de selección, presentando la opción correcta.

Tabla XLVI. Tipos de respuesta S2T4P10

(P10) Pregunta 10: ¿Qué sucede si el precio de venta de cada uniforme es 12000 pesos? Interprete desde la gráfica y la ecuación de la parábola.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos de estudiantes que obtienen a partir de la gráfica y/o la ecuación de la parábola, una ganancia de - \$45.000, es decir, una pérdida.	4 (G1, G2, G3, G6)	12	12	40%
T2	Grupos de estudiantes que obtienen a partir de la gráfica y/o la ecuación de la parábola, una ganancia diferente a - \$45.000.	6 (G4, G5, G7, G8, G9, G10)	18	18	60%

Esta pregunta es similar a la S2T4P8, los estudiantes deben interpretar la variación de las ganancias (G), dado un nuevo precio en la venta de los uniformes, que puede ser observado por los estudiantes a través de cálculos o gráficamente.

Las frecuencias relativas presentes en esta tabla concuerdan al caso de la S2T4P8, validando la doble imagen presente en la función cuadrática, es decir, el 60% de los estudiantes ha fallado esta pregunta seleccionando la clase de respuesta T2; a lo cual, justificamos dicha ocurrencia por las mismas razones.

La pregunta es importante debido a que, dada la inclusión del eje de simetría, las dos partes de la parábola comparten las imágenes asociadas a los elementos de sus dominios, en cada partición dada por dicho eje. Es por ello, que este ejercicio funciona como una comprobación, en donde más que el cálculo, se pretende establecer relaciones gráficamente y analíticamente de la parábola, para identificar características adicionales a las ya formuladas.

Tabla XLVII. Tipos de respuesta S2T4P11

(P11) Pregunta 11: Observando la parábola que representa las ganancias, indique cuál es el precio máximo al que se puede vender cada uniforme para no generar ganancias. Justifique su respuesta.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos de estudiantes que contestan correctamente, ubican el precio máximo en la gráfica de la parábola que es \$11000 pesos.	10 (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10)	30	30	100%

En esta pregunta se parte de una descripción gráfica construida por el estudiante, en donde este puede reconocer el punto máximo de la función, a través de la opción de puntero de Geogebra, o simplemente haciendo un reconocimiento del punto en el cual la parábola nuevamente decae hasta reducirse a \$0 la ganancia.

Este ejercicio requiere interpretar el contexto al que se asocia la función, dado que el precio máximo de venta de cada uniforme no garantiza ganancias máximas, sino que es el mayor valor que puede permitirse. De hecho, este punto no atribuye ni ganancias ni pérdidas, por lo que presenta similitudes con el valor obtenido en S2T4P9, con la diferencia de que en ese caso se hallaba un precio mínimo.

Se puede observar la concentración del 100% de los datos en un solo punto de la curva de selección, presentando la opción correcta. Esto nos posiciona en un punto donde la única selección de los individuos fue la correcta \$11.000, mostrando una gran capacidad de percepción visual en ellos, buen manejo de las concepciones de máximo en la parábola y una gran concentración por parte de los mismos.

Tabla XLVIII. Tipos de respuesta S2T4P12

(P12) Pregunta 12: De acuerdo a los puntos anteriores, indica cuál es el conjunto dominio de la función que representan las ganancias. Recuerda que, el conjunto dominio de una función son los posibles valores que puede tomar la variable independiente, que en este caso es el Precio de Venta de cada uniforme.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos de estudiantes indicando el conjunto dominio del Precio de Venta (P) está dado por el intervalo (3000, 11000), pues tienen en cuenta el contexto de la situación.	3 (G1, G2, G3)	9	9	30%
T2	Grupos de estudiantes que responden indicando el conjunto dominio del Precio de Venta (P) como el intervalo (0, + infinito).	6 (G4, G5, G6, G7, G8, G9)	18	12	60%
T3	Grupos de estudiantes que responden indicando el conjunto dominio del Precio de Venta (P) como los reales positivos.	1 (G10)	3	3	10%

Esta pregunta requiere un conocimiento previo, y es el concepto de *intervalo*. Se debe resaltar el hecho de que los estudiantes respondieron en su mayoría (70%) erróneamente a la pregunta S2T4P12, debido a la falta conciencia sobre el contexto en el que se trabajaba la pregunta, siendo el caso en el que eligen el intervalo definido desde 0 hasta el infinito positivo, siendo la categoría de respuesta más presentada, con un porcentaje del 60%.

Se reconoce que las tres categorías de respuesta, presentar intervalos válidos, definidos de diferente forma. Sin embargo, debieron restringirse a los datos brindados por el problema en este caso, ya que, al definir matemáticamente el dominio de la función, perdieron los atributos brindados por el contexto.

Como se puede observar en T1, para lograr resolver adecuadamente este punto, se debe tener en cuenta el contexto de la pregunta y cómo este influye en la respuesta de la misma, dado que el dominio de la función no solo depende de las normas algebraicas y qué valores puede asumir la variable independiente, sino que también las limitaciones que ofrecen las condiciones.

Tabla XLIX. Tipos de respuesta S2T4P13

(P13) Pregunta 13: Utilizando la herramienta de deslizador en Geogebra, realiza deslizadores (con valores positivos y negativos) para los parámetros a y c.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos de estudiantes que utilizaron la herramienta deslizadores para generar uno para el parámetro a y otro para c; asociándolos correctamente a la función.	6 (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G10)	21	21	70%
T2	Grupos de estudiantes que utilizaron la herramienta deslizadores para generar uno para el parámetro a y otro para c; pero no lograron asociarla a alguna función.	3 (G7, G8, G9)	9	9	30%

Para estudiar las respuestas de esta pregunta, es importante dar cuenta si los estudiantes realizaron el procedimiento correcto al generar los deslizadores. El 70% logró asociar el deslizador correspondiente al coeficiente del término al cuadrado, y el asociado al término independiente. Sin embargo, el 30% no pudo realizarlo inicialmente, dado que la gráfica que realizaron no correspondía a una parábola, como se mostró en la descripción de las respuestas de S2T4P6. Por lo tanto, si se maneja un conjunto de segmentos, no se asociaron los deslizadores debido a que como tal no hay una función continua definida. Además de ello, si se define utilizando varias rectas, se requiere más de dos deslizadores para asociar los parámetros.

Los valores que definieron los estudiantes con respecto a cada deslizador, fueron seleccionados sin importancia; de hecho, algunos grupos utilizaron los predeterminados por el programa.

Tabla L. Tipos de respuesta S2T4P13a

(P13a) Pregunta 13a: Mueve el deslizador a y escribe qué sucede con la gráfica que representa las ganancias de la venta de uniformes cuando el parámetro a se hace menor y se hace mayor, realice unas conclusiones.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos de estudiantes que concluyen que cuando el parámetro a aumenta, la parábola se angosta; y si disminuye, la parábola se amplía. Cambia la concavidad cuando a cambia de signo.	9 (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9)	27	27	90%
T2	Grupos de estudiantes que concluyen que si ax^2 cambia, la parábola se recoge; a excepción de cuando a es pequeño, como $a = \frac{1}{2}$.	1 G10	3	3	10%

En esta pregunta, los estudiantes manifestaron por medio del movimiento de los deslizadores, un cambio en la amplitud de la parábola cuando a varía. El 100% de los estudiantes reconocieron que hay una alteración en la gráfica al desplazar el deslizador entre los valores definidos, sin embargo, no fue identificado el mismo cambio. El 10% de los estudiantes concluyeron que el cambio se debe al término ax^2 , en donde no se atribuye solamente a su coeficiente, sino al valor que pueda tomar la variable particularmente. Mientras que, el 90% concluyó sobre si la parábola se ampliaba o se hacía angosta con respecto al eje de simetría; si era cóncava hacia arriba o hacia abajo dado el signo del coeficiente del término al cuadrado, y qué ocurre si a equivale a cero, donde se comprueba que la función corresponde a una lineal.

El deslizador juega un papel importante, debido a que, si se define con un crecimiento adecuado, los cambios pueden notarse con mayor detenimiento, y el panorama del cambio de la parábola puede ser más detallado. Sin embargo, ningún estudiante cambió este aspecto, y en algunos casos, solo colocaron un dominio distinto al ya configurado por Geogebra.

Tabla LI. Tipos de respuesta S2T4P13b

(P13b) Pregunta 13b: Mueve el deslizador c y escribe qué sucede con la gráfica que representa las ganancias de la venta de uniformes cuando el parámetro c se hace mayor y se hace menor, realice unas conclusiones.					
Tipo de respuestas	Descripción de las respuestas	Número de grupos	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
T1	Grupos que concluyen que no existe cuando el parámetro c varía. Por ende, la forma de la parábola se conserva.	G4, G5, G6, G7, G8, G9	18	18	60%
T2	Grupos que concluyen que cuando el parámetro c varía la parábola se desplaza en dirección del eje Y	G1, G2, G3	9	9	30%
T3	Grupos que concluyen que debido a que el parámetro c es el término independiente, varía sin afectar la parábola.	G10	3	3	10%

En este caso, el proceso de estudio de la variación del término independiente, fue similar al indicado en *S2T4P13a*, con la excepción de que el 70% de los estudiantes, manifestaron que no hay cambio en la parábola, cuando dicho término cambia. Este aspecto puede deberse al hecho, de que, debido al zoom manejado en la gráfica en algunos casos, los estudiantes no se alejaron para notar las propiedades que tiene ese término con respecto a toda la gráfica. Por lo cual podríamos afirmar que la gran parte de los estudiantes, no caracteriza geométricamente la expresión total de la función de las ganancias (G).

(P14) Pregunta 14: Elabore un escrito en donde explique: los principales resultados obtenidos en esta tarea, valores importantes a tener en cuenta en la venta de los uniformes, y qué recomendaciones daría como organizador del torneo de Fútbol.

Los grupos de estudiantes asumen un papel en este escrito, de organizadores del torneo de fútbol, en donde deben articular este estudio matemático con base a una venta preliminar, para complementar la información y estimar valores puntuales a utilizar en la elaboración de su folleto y promocionar el evento. Una de las recomendaciones que presentaron, fue no elegir un valor muy alto en los precios de venta de los uniformes, ya que necesitan que estos sean comprados para generar ganancias importantes, es por ello que sugieren utilizar un valor de \$7000, en donde se halló la ganancia máxima. Además de ello, los estudiantes expresaron que la tarea les enriqueció

en la importancia de la función cuadrática, en donde indican que les ayuda a saber cuáles valores son mejores para generar ganancias altas, precisando la ganancia máxima como la mejor opción para su torneo.

Además de lo mencionado, los escritos reflejaron que no solamente el concepto de función cuadrática fue importante para esta fase del proyecto, sino que las matemáticas en general, ayudan para evitar pérdidas, y establecer relaciones significativas entre variables. Esto asociado al hecho, de que han formulado la idea, de que las ganancias siempre deben ser positivas, agregando que para que ocurra esto, las ganancias deben superar los costos de producción.

De esta forma, podemos evidenciar que esta fase del proyecto enriqueció el panorama matemático y contextual de los estudiantes con respecto al manejo de variables, y su manipulación para obtener información relevante.

El software Geogebra, se ha constituido en esta tarea como una herramienta que facilita los procesos de variación de parámetros, que, realizados a lápiz y papel, pueden ser más complicados. La interfaz del programa, permitió movilizar diferentes sistemas de representación al mismo tiempo (algebraico, geométrico y aritmético), de tal manera que, de acuerdo a las necesidades determinadas por cada pregunta, los estudiantes tenían diferentes acercamientos a él. Se puede notar la facilidad con la que se desarrollaron los estudiantes para realizar actividades que incorporan el uso de TIC, además que en el caso del software Geogebra mostraron una gran destreza al usar la herramienta “cónica por cinco puntos”, y esto se puede deber que la asocian con una gráfica que pasa por todos los puntos mencionados en la tabla de *S2T3*, esto quiere decir, que los estudiantes reafirman lo aprendido en esta tarea y son capaces de alcanzar el nivel esperado para esta tarea, y aunque no todos lograron cumplir con la tarea propuesta, el trabajo en equipo y las actividades de socialización permitieron la construcción del conocimiento en cada uno de ellos.

Aunque en algunos casos las respuestas no se asociaron directamente a una función cuadrática, se destaca la recursividad que tienen los estudiantes para brindar soluciones, desde sus concepciones y formulaciones, fortalecidas por el desarrollo del presente proyecto.

A excepción de algunos grupos, se puede divisar una fácil absorción de conocimientos, si se cuenta con antecedentes que sirvan para verificar los resultados obtenidos, en anteriores ítems, mediante la herramienta Geogebra.

Los estudiantes finalmente han validado por medio de esta tarea (teniendo en cuenta el diagnóstico realizado al iniciar el proyecto), que luego de comenzar con un panorama muy ajeno al concepto de función, debido a que no lo había trabajado propiamente; han ido construyendo las nociones, a partir de un contexto tan particular como el fútbol, de donde se han trasladado de conocer los antecedentes de este deporte, a ser organizadores de un evento, apoyado por cifras y cálculos efectuados desde la teoría de funciones.

En términos matemáticos, los estudiantes establecieron que el precio de venta (P) de \$7000 es aquel que mejor favorece su torneo de Interclase, dado las propiedades matemáticas que se han evidenciado en el proceso de exploración durante la tarea. Objetos geométricos como el eje de simetría y el vértice de la parábola, de manera conjunta, han permitido caracterizarse como elementos principales de la gráfica de la función de las ganancias (G), dado de esta forma por el modelo que las describe, es decir, que al final esta tarea la mayoría de los estudiantes lograron un nivel general en la construcción del conocimiento, pues se han apropiado de manera formal, y asertiva, el concepto de función cuadrática, algunas de sus representaciones y características de esta. Sin embargo, conocer el modelo no es suficiente, dado que debemos restringir condiciones asociadas al contexto, para no generar resultados que no sean necesarios, o inconsistentes. Por ejemplo, en el proceso de predicción a través del modelo, tener precios de venta (P) negativos no es considerado, debido a que carece de sentido en la realidad, dado que corresponde a una oferta realizada a otras instituciones, para generar ingresos por medio de la venta de los uniformes para el torneo.

(S2) Situación 2: Organización de Torneo Interclase 2019

(T5) Tarea 5: Diseñando el Folleto Promocional

Con ayuda de la herramienta Canva, realiza un folleto promocional en el cual se evidencia la información necesaria para los Interclase 2019, teniendo en cuenta la información obtenida de las tareas anteriores. Para poder utilizar este folleto, mira el tutorial Canva en YouTube. Link: <https://youtu.be/qOiBm3PqRSM>

Los estudiantes presentaron una diversidad muy amplia en la realización de los folletos promocionales, empleando un nivel de creatividad óptimo, y articulando sus gustos personales en

lo referente a gráficos y precisión de la información correspondiente al torneo de fútbol Interclase 2019.

Esta última tarea del proyecto, permitió evidenciar que los estudios sintetizaron visualmente la información más importante de toda la segunda situación, con el fin de llamar la atención de aquellas instituciones que estén interesadas en participar. Esta vez, no se presente articular el estudio analítico realizado anteriormente en torno a las ganancias (G) y el precio de venta de cada uniforme (P), sino que se pretende observar cómo los estudiantes utilizan sus propios resultados, sugerencias y conclusiones, para formular un recurso llamativo con el fin de promocionar y organizar de la mejor forma el evento.

Algunos de los folletos presentan información en inglés, articulan imágenes de Anime como Captain Tsubasa, fotos de jugadores reconocidos mundialmente por su desempeño en el campo de juego, así como un énfasis en el premio que se le entregará a los ganadores. (VER ANEXO 3) en el que se presentan los folletos realizados.

La situación 2 se consolida como la etapa final del proyecto, en donde se articulan todos los aspectos teóricos abordados. A través de ella, los estudiantes trabajaron con cifras estimadas por una venta preliminar de uniformes, es decir, no partieron de datos que ellos deben fijar inicialmente, sino que se les brinda como guía. Los estudiantes deben adquirir información a través de la relación entre las variables, el reconocimiento de patrones y regularidades, con el fin de elaborar una perspectiva matemática, que le permita obtener los mejores resultados para la organización de su torneo de fútbol.

La actividad no se limitó a realizarse de una sola forma, sino que la forma de abordar los conceptos inmersos, puede darse de diferentes maneras. De hecho, los estudiantes como primera evidencia de aprendizaje, mostraron la capacidad para consultar información pertinente y precisa, que sirva de apoyo para considerar los factores que serán necesarios tener en cuenta para organizar un torneo Interclase de fútbol.

Este tipo de indagación, tiene una exigencia particular, y es vincular los datos que obtiene con la institución a la que pertenece. El fútbol se ha mostrado desde el principio como un deporte muy importante en su contexto escolar, y, por ende, al realizar esta consulta, ellos están reforzando aquella información que han obtenido previamente.

Como una segunda evidencia de aprendizaje, se puede observar que los estudiantes lograron establecer razones de cambio entre cantidades, de acuerdo a sus aumentos o disminuciones de

unidades, con respecto a otra variable. En este caso, en la *S2T2*, el precio de venta (P) y la cantidad vendida (C), se conforman como las variables iniciales de estudio en esta situación.

Desde la Tarea 1, se ha hecho énfasis en el análisis de la **covariación entre variables**, específicamente el precio de venta de cada uniforme (P) y la cantidad de uniformes vendidas (C), en donde trasladados a la tarea 2 y Tarea 3 de esta situación, encontramos que a partir de ellas dos, podemos generar conclusiones sobre una tercera variable, que corresponde a las Ganancias de dichas ventas (G). El estudio de la covariación contempla el hecho de ver cómo se comporta una variable cuando otra está variando, o en pocas palabras, cuando se está realizando una variación conjunta de ambas variables.

Matemáticamente, no siempre dos variables van a estar relacionadas directamente; si tomamos en cuenta otras como el tiempo de fabricación de los uniformes, duración promedio de ellos o el costo de la inscripción al torneo Interclase durante los últimos años, podríamos ver relaciones directamente proporcionales con las cantidades que abordamos en la Situación 1, donde existe una influencia significativa en su comportamiento. Sin embargo, una forma de caracterizar dicha covariación, es por medio del modelo matemático que la describe.

En la Situación 2 los estudiantes reconocieron que la variable Precio de Venta (P) y las ganancias (G), en todo su dominio (dado por el contexto), no poseen una sola covariación. Durante el intervalo que se describe de \$3000 a \$7000, dicha relación es positiva, debido a que el crecimiento de una de ellas, ocasiona el aumento de la otra. A lo cual, una vez se alcanza la ganancia máxima ubicada en el vértice de la parábola, la covariación se torna negativa, dado que, a precios de venta muy altos, se presenta una disminución en las ganancias que se generan.

El proceso de optimización de la variable de la ganancia (G), es descrito en esta situación por medio de otra variable, dado que su expresión algebraica la incluye como una variable independiente. Esto significa que la primera depende de aquellos valores que tome la segunda, en donde si se pretende realizar una cuantificación de esa relación, la razón de cambio promedio puede brindarnos información aproximada valiosa.

Un proceso de análisis conjunto, se realiza a través de los deslizadores que fueron creados en *S2T4P13*, en donde se pretende utilizar dicha herramienta para validar si existe correlación entre los términos implicados en la expresión algebraica de la función, particularmente los coeficientes a y c . A pesar de que estos valores son constantes, los deslizadores le permiten cambiar de valor a una tasa de crecimiento, para comprobar qué comportamiento tiene la variabilidad de dichos

parámetros. Cuando se generan cambios en la parábola, como su concavidad, desplazamiento alrededor de los ejes y amplitud de la parábola, podemos ver que existe un proceso de covariación, en donde dichos parámetros al movilizarse en un intervalo numérico determinado, influye en los valores obtenidos para la ganancia.

De acuerdo a lo mencionado, los estudiantes mostraron como tercera evidencia de aprendizaje, el correcto uso del software Geogebra para realizar una caracterización de la curva que caracteriza una función cuadrática, a partir del estudio individual de sus componentes. Identificando el papel que ocupan los coeficientes de la expresión general de ella, el vértice de la parábola, los cortes con el eje de abscisas, el dominio de la función, y demás conceptos; que consolidan un estudio matemático que sustenta sus resultados.

Es por ello, que también podemos afirmar que los estudiantes, como cuarta evidencia de aprendizaje, lograron tener un manejo conceptual de las diferentes representaciones de una función cuadrática. A pesar que no trabajó la forma canónica y la forma factorizada, los estudiantes adquieren la destreza para diferenciar la forma de una función lineal y una cuadrática, no solo de forma algebraica, sino también geométricamente; apoyado también por las tareas resueltas en la anterior situación.

Finalmente, como quinta evidencia de aprendizaje, los estudiantes conectan la información obtenida matemáticamente, con una aplicación coherente de la misma. Este aspecto se refiere al hecho de se reconoce cómo deben variar cada una de las cantidades involucradas, en donde, por ejemplo, el precio de venta (P) no es asociado a valores negativos debido a que corresponde a una oferta, la cual debe generar algún tipo de ganancia. Así como también se le asignan atributos a la ganancia (G), ya que, si es negativa, se constituye con pérdidas, y significa que el ingreso recibido, no equipara lo invertido en la producción de los uniformes; por lo cual, debe buscarse un balance, y es justo el papel del software Geogebra y estudio de la parábola, que puede delimitarse dónde se hallan este tipo de datos.

A partir de los resultados obtenidos en esta tarea, y los análisis presentados se podría concluir que la mayoría de los estudiantes han alcanzado un nivel general de matematización en el desarrollo de las situaciones, pues determinaron aspectos importantes del concepto de función, y en particular de la función cuadrática, pero no alcanzaron un formalismo del concepto como tal, y aunque no todos llegaron a los mismos resultados, por medio de la plenaria, el trabajo en grupo y

el aprendizaje colaborativo se pudo construir el conocimiento necesario, aclarando dudas, y evitando confusiones por las respuestas dadas.

4 Conclusiones y algunas reflexiones finales

4.1 Conclusiones Generales

Con relación al primer objetivo específico, el cual consistía en documentar la problemática en la enseñanza y el aprendizaje de la función cuadrática desde las perspectivas curricular, la perspectiva didáctica y la perspectiva matemática, se puede concluir que:

- Desde la perspectiva curricular, el pensamiento variacional y los procesos de modelación propuestos por el MEN, plantea el estudio de la función desde la consideración de cambio de fenómenos y la variación, a partir de la relación entre magnitudes, la dependencia de variables, el patrón de cambio etc. resultando en un proceso dinámico, más el resultado de la asignación o correspondencia efectuada a la expresión algebraica, en la que terminan realizando procesos aritméticos reducidos a tablas y graficas de manera sistemática y mecánica, sin tener en cuenta el contexto y desligado totalmente de la realidad, lo cual termina dejando a un lado los procesos de modelación en el cual los estudiantes sean capaces de interpretar y definir modelos que le permitan llegar a generalizaciones de las situación planteada. Esta afirmación se fundamenta en las investigaciones que sustentan la problemática descrita por los diferentes autores presentados, la mayoría de ellos coinciden en la manera reducida y estática en la que se enseña el concepto de función en la escuela totalmente desligado del contexto, sin que este objeto matemático pueda ser interpretado desde el contexto de cada estudiante.
- Desde la perspectiva didáctica, teniendo en cuenta la problemática expuesta, una de las principales causas por las cuales se propone la implementación del ABP es la enseñanza tradicional que sigue siendo el modelo de enseñanza y aprendizaje en las instituciones, en el que el docente es el único poseedor del conocimiento y es quien pasa la información al estudiante, donde estos tienen una participación pasiva dentro de este proceso. En El Aprendizaje Basado en Proyectos propone una metodología constructivista, en la cual, el estudiante es un participante central y activo en el proceso de enseñanza y aprendizaje, pues es quien construye su conocimiento a partir de la investigación, la indagación, el trabajo en

grupo dando resultados de manera autónoma, pero siempre orientado por el docente, quien juega un papel importante en este proceso, pues es quien guía, orienta y brinda los recursos necesarios para realizar el proyecto. El ABP es una metodología que se puede trabajar de manera disciplinar o transversal, basando su diseño de acuerdo a las características de los estudiantes y los recursos disponibles, es por eso que este se puede enfocar como un método de instrucción, estrategia de aprendizaje o estrategia de trabajo, vinculado a los lineamientos curriculares establecidos por el MEN. Adicionalmente, se propone la teoría de la Modelación desde la EMR (Educación Matemática Realista) para determinar los procesos que se pretenden favorecer con este trabajo, así pues, que se tiene en cuenta los cuatro niveles, que son: en la matematización horizontal; el nivel situacional y en la matematización vertical; los niveles referencial, general y formal, para poder caracterizar el nivel de aprendizaje en cuanto a la modelación, alcanzado por los estudiantes,

- Desde la perspectiva matemática, el concepto de función se presenta como una asociación y estudio de fenómenos que presentan cambios y variaciones, el cual debe estar soportado en elementos de la variación, dependencia transformación y variación. A pesar de su amplio contenido e interpretación de este concepto, este sigue siendo presentado en las instituciones de manera reducida, es decir que, su enseñanza y aprendizaje se da únicamente desde la teoría de conjuntos definiéndolo como una relación de correspondencia entre valores de dos conjuntos, en el que uno es un conjunto de entrada que corresponde a una asignación de valores y el otro es el conjunto de salida, el cual usualmente es presentado por diagramas de ven, adicionalmente, este concepto se presenta desligado totalmente de un contexto real, limitando su enseñanza a procesos algebraicos y aritméticos, tabulaciones y gráficas, sin determinar un sentido contextual al objeto matemático.

Con relación al segundo objetivo; el cual está orientado a determinar y articular los aportes o elementos desde las perspectivas anteriores para el diseño de una propuesta de aula centrada en el ABP, se concluye que:

- El diseño del proyecto requería unas bases conceptuales bien establecidas, para esto fue necesario que el estudiante investigador realizará una formación complementaria en la Metodología del Aprendizaje Basado en Proyectos, en tanto se tomó un curso para conocer,

aprender y diseñar proyectos en este marco conceptual. Este curso se tomó de manera virtual en la página del Magisterio⁶, orientado por la profesora Maryuri Agudelo.

- El diseño e implementación de este proyecto se desarrolla a partir de dos situaciones contextualizadas, las cuales cobran importancia para el estudio de conceptos matemáticos dado que los estudiantes encuentran sentido a dichos elementos presentados a partir de las actividades planteadas, que le permiten entender fenómenos de la vida diaria. Así pues, el diseño de esta propuesta, tiene en cuenta la información compilada desde las perspectiva curricular, didáctica y matemática, y el diagnóstico realizado en el que se determina el contexto que han decidido trabajar los estudiantes, este último es de vital importancia en este proyecto, pues fue determinado a partir de los intereses de ellos y sirvió como motivador principal para la construcción de este concepto.
- Se realizaron dos actividades preliminares para la determinación del contexto en el cual se desarrolló el proyecto, estas fueron; una encuesta a los estudiantes y una entrevista al coordinador académico de la institución. Estos instrumentos cualitativos, dieron como resultado el contexto en el cual se desarrollan las actividades de este proyecto y fue socializado con los estudiantes los cuales manifestaron lo que querían aprender desde estas actividades propuestas, como fueron algunos antecedentes del futbol, las reglas, de este deporte, aspectos relevantes en el desarrollo histórico del mismo etc.
- También, se tuvo en cuenta durante el diseño de la propuesta aspectos relevantes de la covariación, pues esta, permite formar en los estudiantes el sentido de relación y dependencia entre magnitudes, enriqueciendo el conocimiento sobre el concepto matemático, dejando a un lado la enseñanza de la función como una actividad de correspondencia, para darle sentido en el contexto que se desarrolla en esta propuesta, en el que se busca que los estudiantes movilicen por medio de sus respuestas, acciones que los lleven a responder preguntas como: ¿qué cambia?, ¿cuánto cambia?, ¿cómo cambia?, ¿a qué razón cambia? y ¿cómo se comporta en la gráfica?, en sus distintas representaciones (tabular, grafica, expresión algebraica etc.) para enriquecer la construcción del conocimiento.
- Adicionalmente, para el diseño de esta propuesta se tuvieron en cuenta los lineamientos curriculares propuestos por el Ministerio de Educación, importante resaltar que esta

⁶ magisterio.com.co/articulo/el-aprendizaje-basado-en-proyectos

metodología busca integrar el currículo para el diseño de proyectos, y no crear proyectos independientes a la actividad académica que estén desligados de los aspectos curriculares que se enseñan en el aula de clase. Lo innovador en la implementación de esta metodología, es diseñar un proyecto instruccional bien definido, con los retos que se presentan en la escuela teniendo en cuenta el contexto de los estudiantes e involucrar el contenido curricular en este diseño, en el que el profesor sea un orientador del proceso de enseñanza y aprendizaje, y los estudiantes puedan adquirir herramientas y estrategias de investigación, que le ayuden a construir el conocimiento a partir de su aplicación y desarrollo.

- En cuanto a la metodología de la implementación, las actividades diseñadas en este proyecto fueron orientando el proceso de aprendizaje por parte los estudiantes y abriendo un panorama de posibilidades en la enseñanza por parte del docente, pues permitió observar los alcances de las respuestas y las construcciones de significados dadas por los estudiantes, generando nuevas expectativas en el momento de enseñar y aprender nuevos saberes. Esta metodología fomenta la construcción del concepto de función cuadrática, así como otras características propias del concepto de función en general. También, fue un reto el trabajo en grupo y el manejo del tiempo en el desarrollo del proyecto, pues en ocasiones los estudiantes se dispersaban en sus grupos de trabajo, lo cual influía en el desarrollo de las sesiones y para ello fue importante orientar, atraer y motivar el proceso para alcanzar los objetivos propuestos. Las plenarias realizadas sirvieron como un proceso de aprendizaje colaborativo en el que los estudiantes validaban sus conocimientos, aumentaban la autoestima, la participación y la discusión entre los grupos de trabajo.

Con relación al tercer objetivo, el cual consistía en caracterizar los avances y dificultades de los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Villacarmelo, sobre la función cuadrática a través de la implementación y análisis de los resultados de la propuesta de aula, se puede concluir que:

- La metodología del ABP, en relación con el estudio del concepto de la función cuadrática, evidenció un aprendizaje basado en una construcción del conocimiento colectivo, al cual, se le atribuye una responsabilidad significativamente alta de ese proceso a los estudiantes. El docente es un orientador, más permite que los estudiantes seleccionen la ruta de

exploración y acercamiento a los conceptos matemáticos. Vinculando a los estudiantes a un contexto específico como lo es el fútbol, siendo este un deporte de gran interés en la institución a la que pertenecen. El trabajo en equipo y el rol de cada uno de los estudiantes dentro de cada grupo de trabajo, permitió establecer funciones específicas de cada participante y a partir de esto lograr que se cumplieran los objetivos propuestos en este trabajo de grado.

- Los estudiantes alcanzaron a través del ABP, un dominio conceptual sobre el sistema de representación tabular, algebraico y geométrico, en los cuales se trabajó el concepto de función cuadrática aplicada al contexto del fútbol colombiano. En este sentido, el proceso de socialización fue muy importante, en donde la plenaria permitió reflejar las evidencias de aprendizaje alcanzadas por los estudiantes.
- La metodología del ABP permitió articular el proyecto desarrollado, con un currículo ya establecido, que permite disciplinariamente trabajar el concepto de función cuadrática a partir de un contexto de interés común en el grupo de estudiantes; generando una constante conexión entre el contexto global, nacional y local del fútbol, con un contexto matemático propio, articulando las TIC para obtener información pertinente que les ayude en los procesos de modelación y variación de parámetros, a partir de información obtenida y presentada de dicho contexto.
- La articulación de otras disciplinas en el desarrollo de este proyecto, permite dar a conocer a los estudiantes aspectos que involucran, no solamente, las matemáticas sino también ampliar sus conocimientos del deporte, que fue el contexto principal en este proyecto., fomentando la participación, el entusiasmo y el interés por aprender desde sus intereses.
- El uso de la tecnología, como fue el Software Geogebra, facilitó los procesos de variación, permitiéndoles a los estudiantes verificar sus respuestas, plantear modelos y definir algunas características de los conceptos trabajados, así mismo, permitió observar los cambios que se presentan en este tipo de función. La implementación del proyecto generó en los estudiantes actividades y conclusiones respecto al pensamiento variacional, favoreciendo el proceso de modelación para la función cuadrática en los estudiantes de grado noveno, validado a partir del aumento significativo que fueron los niveles de matematización horizontal y vertical, en el que alcanzaron al final de la actividad un nivel general del concepto de función cuadrática obtenidos después de la aplicación del proyecto ABP.

- La situación 2, la cual comprendía cinco tareas permitió realizar una construcción del concepto de función cuadrática haciendo que los estudiantes iniciaran con una interpretación de dependencia entre magnitudes, continuando con la descripción del comportamiento de las variables para que los estudiantes finalmente modelaran expresiones algebraicas que representaban funciones, como en este caso; la función de los ingresos, función que calculaba las ganancias, la función que calculaba la cantidad de uniformes producidos etc., para posteriormente esbozar gráficas a partir de la descripción y conocimiento de la forma en que se comportan y relacionan los cambios de las magnitudes involucradas.
- Por otra parte, la situación uno, permitió presentarle a los estudiantes aspectos previos al aprendizaje de la función cuadrática, que son importantes, para poder desarrollar y construir el concepto de función cuadrática, así mismo, determinar y caracterizar algunos aspectos importantes de este concepto. En esta primera actividad realizaron actividades de interpretación y lectura de tablas, reconocimiento de cambios de variables, dependencia entre variables, como también, la conversión de una moneda a otra (de Euros a pesos colombianos) y procesos estadísticos como la determinación del promedio a partir de los datos presentados.
- De igual forma, la plenaria realizada en el cierre de cada una de las tareas, les permitió hacer conclusiones respecto a los procesos de pensamiento variacional y los procesos de modelación que iban presentando los estudiantes en el desarrollo de las tareas, concretando información relevante, reevaluando lo aprendido y exponiendo sus conocimientos, ideas y logros alcanzados por medio de las situaciones presentadas.
- Finalmente, la implementación del proyecto no solo aportó conocimientos desde las matemáticas, desarrollando la construcción del concepto de función cuadrática, favoreciendo los procesos de modelación, sino que también se evidencia la potencialidad del trabajo interdisciplinar y transversal, el cual permitió avances en los procesos de comunicación, el diseño y la escritura de folletos, pero además, generar reflexiones importantes desde las ciencias sociales con relación al papel que juega las profesiones como el futbol, que son pagadas de una manera exorbitante comparadas con otras, reflexiones sobre la historia, en particular, los problemas de las guerras mundiales y como esto marcó en la historia del futbol y de la sociedad. La aplicación del proyecto y sus potencialidades

enriquece a los estudiantes en valores, en tanto que han realizado reflexiones desde la historia, los antecedentes sociales en el que están enmarcados el futbol, la importancia de las reglas etc. dándoles herramientas para el trabajo en grupo, el aprendizaje colaborativo y la discusión que les permitió la construcción del conocimiento.

Por lo tanto, se puede decir que se logró el objetivo general, favorecer el aprendizaje de la función cuadrática en estudiantes de grado 9° de educación básica desde una propuesta en el marco del Aprendizaje Basado en Proyectos, en el que se privilegian los procesos de modelación. En cuanto a favorecer el aprendizaje de la función cuadrática, se presentaron elementos importantes de este concepto como son, la covariación, los distintos tipos de representación como son la expresión algebraica desde su forma general, la tabulación y la gráfica de la función, la caracterización de la función cuadrática desde su comportamiento, el significado de los parámetros en la expresión algebraica y la representación de los cambios en la gráfica, etc. favoreciendo los procesos de modelación en los cuales los estudiantes desarrollan, interpretan y construyen la expresión algebraica de la función cuadrática que representa las ganancias y la gráfica de esta.

4.2 Algunas reflexiones didácticas

- El diseño y la implementación del proyecto desarrollado de acuerdo a los intereses de los estudiantes de grado noveno, antepone la importancia de trabajar a partir de proyectos en el que se involucre el currículo, pues estos permiten motivar el interés por aprender, desarrollar habilidades y competencias en los procesos de investigación, síntesis de información, y no solo el simple hecho de abordar contenidos programáticos de manera sistemática en el aula de clase. De esta manera, en el desarrollo de proyectos que, aunque sean diseñados como propuestas de aula, permiten involucrar otras disciplinas que permitirán la construcción del conocimiento evidenciando la transversalidad e interdisciplinariedad que se incluye esta metodología. La implementación propone diseñar proyectos en los cuales tenga en cuenta los lineamientos curriculares y para esto debe ser importante el replanteamiento del plan de área, pues no se trata solo de la enseñanza de contenido y fenómenos matemáticos, sino en la interpretación de los mismos en un contexto

real permitiendo la transversalidad de la construcción del conocimiento a partir de otras disciplinas.

- En el caso particular del análisis realizado a cada una de las respuesta, el diseño de la propuesta teniendo en cuenta la Modelación desde EMR y las características principales que implica la covariación permitió el desarrollo del pensamiento variacional y el proceso de modelación, que es importante debido a que su participación en una situación problema, cuyos datos develan cómo proceder para ser resuelta, permite dar un panorama de lo que se presenta en ella, logrando, entre otras cosas, la concepción del concepto de función cuadrática desde la relación de dependencia y favoreciendo los procesos de modelación que este implica.
- Este trabajo, aunque se centró en observar los avances que tenían los estudiantes en la concepción de la función cuadrática, a partir de la propuesta de aula, el uso de las TIC también permitió visualizar este proceso y realizar conclusiones a partir de las actuaciones del uso de estas, la visualización de la función cuadrática les permitió generalizar comportamientos de este tipo de función desde la representación de la expresión algebraica general de la forma , asignándole características propias de este objeto matemático.
- El trabajo en grupo, el aprendizaje colaborativo y la discusión y socialización por medio de plenarios, permitió en los estudiantes fomentar la autoestima, la participación, la apropiación del proceso de aprendizaje y esto se vio reflejado en los folletos promocionales presentados al final del proyecto implementado.
- El diseño de proyectos constituye una actividad importante y un reto para el educador, así mismo, le permite salirse de una enseñanza tradicional para hacer participe en la construcción del conocimiento a los estudiantes, el reto principal en esta metodología es poder construir y vincular todos los aspectos que se presentan en la escuela como son el contexto de los estudiantes, la diversidad, los niveles de aprendizaje, el currículo etc. para lograr un diseño bien estructurado de un proyecto. También, es necesario tener en cuenta los obstáculos que se pueden presentar en el diseño e implementación de una propuesta, pues esto le permitirá subsanar la mayoría de las dificultades que se puedan presentar en su desarrollo.
- Es importante que cuando los docentes deseen abordar una metodología diferente a la que trabajan tradicionalmente, se capaciten y aprendan los referentes conceptuales que este

implica, para poder generar mejores resultados en los procesos de implementación de las nuevas estrategias de aprendizaje.

4.3 Proyecciones para futuros investigadores

- ¿Cómo llegar a unos procesos de modelación más avanzados, hasta una formalización, basados en la Metodología del Aprendizaje Basado en Proyectos?
- ¿Es posible que se pueda implementar la Metodología del Aprendizaje Basado en Proyectos en los primeros niveles escolares (educación inicial y primaria)?

5 Referencias bibliográficas

- Agudelo Franco, M. (2019). Aprendizaje Basado en Proyectos. Curso Virtual, Magisterio.
- Álvarez-Gayou, J. L. (2005). Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología. Barcelona: Editorial Paidós.
- Avirama Gutiérrez, L. M. & Gustin Ortega, J. D. (2012). *Una propuesta para la enseñanza de la ecuación cuadrática en la escuela a través de la integración del material manipulativo*. (Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física), Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad Del Valle, Colombia.
- Ausubel, DP. (1968). Educational psychology: a cognitive view. New York, Holt, Rinehart and Winston.
- Azcárate, C., & Deulofeu, J. (1990). Funciones y gráficas. Matemáticas: Cultura y aprendizaje.
- Azcárate, C. (1996). *Motivating project-based learning: sustaining the doing, supporting the learning. educational psychologist*, 26 (3 & 4), 369 – 398.
- Biembengut, M. S., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemáticas. *Educación Matemática*, 16 (002).
- Benavides Rivera, L. D.; Panesso Cruz, L. B. (2017). *Aprendizaje Basado En Proyectos Mediado Por Tic En La Promoción Del Aprendizaje De Operaciones Combinadas*. Tesis de Maestría en Educación. Universidad ICESI, Cali.
- ChanLin, LJ. (2008). *Technology integration applied to Project- based learning in science. Innovations in Education and Teaching International*, 45, 55-65.

- Ciron Aristizabal, C. (2012), intitulada *Aprendizaje Basado en Proyectos (A.B.Pr) como Estrategia de Enseñanza y Aprendizaje en la Educación Básica y Media*. (Tesis de maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales). Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.
- Elliot, John. (2005). El cambio educativo desde la investigación-acción. Madrid: Morata.
- Galeana de la O, L. (s/f) Aprendizaje basado en proyectos. Universidad de Colima, Recuperado de <http://ceupromed.ucol.mx/revista/PdfArt/1/27.pdf>.
- Garrigós Sabaté, J. & Valero García, M. (2012), intitulado Hablando sobre Aprendizaje Basado en Proyectos con Júlia. *Revista de Docencia Universitaria (REDU)*. Número monográfico dedicado a *Innovaciones en el diseño curricular de los Planes de Estudio*, 10 (3), 125-151.
- García Hernández, E. (2000). Algunas aplicaciones del portafolio en el ámbito educativo. Recuperado de <http://www.quademsdigitals.net/index.php?accionMenu>
- Henao Saldarriaga, S. M. y Vanegas Díaz, J. A. (2012). *La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción de modelos cuadráticos*. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.
- Hernández, R.; Fernández, C, & Baptista, P. (2012). Metodología de la investigación. México, DF: McGraw-Hill/Interamericana.
- Azcárete, C. (1996). *Motivating project-based learning: sustaining the doing, supporting the learning*. *educational psychologist*, 26 (3 & 4), 369 – 398.
- Hitt, F. (1998^a). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. (pp. 245-264). En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

- Hitt, F. (1998b). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. *Revista Educación Matemática*, 10(2), 23-45.
- Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *Décimo primer encuentro de profesores de matemáticas del nivel medio superior*. Morelia: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
- Hurtado García, A. F. y Zúñiga Patiño, F. Y. (2011). La función cuadrática en los textos escolares de grado noveno de la educación básica. (Trabajo de pregrado). Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad Del Valle
- Illuzi, A. y Sessa, C. (2010). *Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado*. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación.
- Kieran, C. y Filloy, Y. (1989). El aprendizaje del algebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias*. 7(3), 229 – 240.
- López Melero, M. (2004). *Construyendo una escuela sin exclusiones. Una forma de trabajar con proyectos en el aula*. Málaga-Colombia: Aljibe.
- López Quijano, G. (s/f). *La Enseñanza de las Matemáticas, un reto para los maestros Del Siglo XXI*. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
- Mckernan, J. (2008). *Investigación-acción y curriculum*. Madrid: Morata.
- Matos, N. R.; Arias A. F. & Caraballo, P. A. (2015). Reflexión de Aprendizaje Basado en Proyectos: estrategia pedagógica en la enseñanza de las matemáticas. *Revista Méthodos*, (13), 26-38. Recuperado de openjournalsys.colmayorbolivar.edu.co/index.php/Methodos/article/view/12/30

- Ministerio De Educación Nacional [MEN] (1998). Lineamientos Curriculares para Matemáticas. Bogotá, Colombia.
- Ministerio De Educación Nacional [MEN] (2006). Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas. Bogotá, Colombia.
- Mosquera Quintero M. (2015), intitulada *Propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones de segundo grado de variable real en el marco de la enseñanza para la comprensión para fortalecer el pensamiento variacional en el grado 9 de la IER YARUMITO*. (Tesis de maestría). Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.
- Quijano G. (s/f). La Enseñanza De Las Matemáticas, Un Reto Para Los Maestros Del Siglo XXI. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
- Ruiz Quiñonez J. (2011). *Una secuencia didáctica desde la perspectiva de la orquestación instrumental: la función cuadrática en grado noveno de educación secundaria*, (Trabajo de pregrado). Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad Del Valle.
- Sanchez, J. (s/f). Qué dicen los estudios sobre el Aprendizaje Basado en Proyectos. Recuperado de <http://actualidadpedagogica.com>
- Villar Sola, S. (2013). Aprendizaje basado en proyectos. Tesis de pregrado en Ciencias de la Educación, Universidad de Zaragoza.
- Sierpinski, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 6,1, 1985.
- S. M. y Vanegas Díaz, J. A. (2012). *La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción de modelos cuadráticos*. (Trabajo de pregrado). Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad Del Valle.

Thomas, J.W. (2000). A review of research on Project – based learning. *The autodesk Foundation*. Retrieved from <http://www.autodesk.com/foundation>

Valles, A. (1999). *Estrategias de aprendizaje/1*. Valencia: PROMOLIBRO.

Vasco, C. (2002). El pensamiento variacional y la modelación matemática. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia. 1 – 14.

Walker, A., & Leary, H. (2009). A problema based learning meta-analysis: Differences across problema types, implementation types, disciplines, and assessment levels. *Interdisciplinary Journal of Problem-based Learning*, 3(1). Doi: 10.7771/1541-5015.1061.

6 Anexos

6.1 Anexo 1: Aprendiendo La Función Cuadrática en el Contexto del Fútbol

Tema: FUNCIÓN CUADRÁTICA

Área: Matemáticas

Edad: Entre las edades de 15 y 19 años

Grado: 9°

Planteamiento de la pregunta: ¿Qué elementos de la función cuadrática pueden movilizar en los estudiantes de grado 9° de la Institución Educativa Villacarmelo a través del contexto del fútbol?

Objetivo General

Favorecer en los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Villacarmelo de la zona rural de Cali, la apropiación de algunos elementos de la función cuadrática a través del estudio de un fenómeno de variación y cambio en el contexto del fútbol.

Objetivos específicos:

- Modelar situaciones de variación con funciones de segundo grado (cuadráticas), utilizando elementos como son: las diferentes formas de representación de la función cuadrática, el significado de los parámetros de la expresión general de la función cuadrática, algunas características del comportamiento de esta función, ejes de simetría y la representación geométrica en el plano cartesiano
- Conducir el aprendizaje del concepto de la función cuadrática, sus propiedades y representaciones, a partir de un contexto específico, como es el fútbol.
- Promover en los estudiantes estrategias de aprendizaje y trabajo colaborativo, con el fin de movilizar en ellos la participación, el entusiasmo y el interés por las matemáticas.

- Realizar un folleto promocional de un torneo Interclase de fútbol para su institución, utilizando la información obtenida de las tareas propuestas en este proyecto.

APRENDIENDO LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN EL CONTEXTO DEL FÚTBOL

Fecha: _____ Grado: _____
Nombre: _____ Edad: _____

SITUACIÓN 1: EL FÚTBOL EN EL TIEMPO

Observación y análisis de los videos y realizar las siguientes actividades.

Antecedentes Históricos

Video 1: Origen del fútbol⁷



Video 2: Chikopedia.com | La Historia del Fútbol para Niños⁸



Con el profesor se analizará:

- Lo que más les llamo la atención de los videos sobre el origen del fútbol.
- La importancia de Inglaterra en los inicios el deporte catalogado como fútbol.
- El significado de la palabra fútbol.

⁷ <https://youtu.be/vvcPZpKuZSQ>

⁸ <https://youtu.be/aijLCLKHEw>

TAREA 1:

En grupos de tres (3) estudiantes realicen la siguiente actividad:

1. Escriban en cinco (5) renglones una síntesis de los antecedentes del fútbol.
2. Escriban la importancia de la creación de las reglas en el origen de este deporte.
3. Escriban cómo se llama la asociación más antigua del fútbol y en qué año se fundó.
4. Consulta otros datos, anécdotas, hechos etc. que consideren importantes y completa esta historia.

TAREA 2: Lean con atención el siguiente escrito y realicen la actividad en grupos de tres personas.

Copas del Mundo

El origen del Mundial se remonta a las primeras décadas del siglo XX, cuando el fútbol fue aceptado como deporte olímpico y se disputaron las primeras competencias entre selecciones.

En 1904 se creó la FIFA (Federación Internacional de Football Association), el máximo organismo internacional del fútbol, que desde un principio trabajó para organizar su propia competición, aunque no fue posible hasta el año 1930.

Este primer mundial se disputó en Uruguay, que por aquel entonces era la selección dominante a nivel global. Y cumplió los pronósticos, imponiéndose en la final a Argentina ante 93.000 espectadores.

La II guerra mundial (1939 - 1945) también marcó la historia de los mundiales, obligando a suspender los de 1942 y 1946. Los mundiales anteriores, el de Italia 1934 y Francia 1938, estuvieron dominados por el equipo transalpino, que jugaba bajo la advertencia del dictador Mussolini de no deshonrar a su país (Italia), entonces varios jugadores argentinos fueron nacionalizados a la fuerza para mejorar la plantilla, y en la final se les obligó a todos a vestir camisetas negras, el color símbolo del fascismo italiano.








El Mundial da cabida a selecciones de casi todos los países del planeta, que compiten entre ellas en una fase previa que dura 2 años, y donde los primeros clasificados consiguen acceder a esta fase final. Las selecciones son elegidas por un comité de la FIFA, que la va rotando entre continentes, el número de equipos que acceden son actualmente 32, aunque está previsto ampliarlo a 48 en el año 2026.

El principal premio es el título de campeón del evento, el equipo que logra coronarse como campeón recibe el Trofeo de la Copa Mundial de la FIFA y lo custodia durante cuatro años, además recibe una réplica del trofeo y su nombre se graba en la base del trofeo original.

A continuación, se muestra la tabla de copas mundo disputadas desde sus inicios, Solo 8 elecciones han ganado mundiales de fútbol y 5 de ellas lo hicieron más de una vez.

Brasil es la selección más ganadora con 5 copas obtenidas, aunque curiosamente no pudo consagrarse en las dos ocasiones en las que fue local (1950 y 2014).

Tabla LII. Mundiales de Futbol desde 1930 hasta 2018

Campeón	Total	Mundiales
Brasil 	5 copas	Suecia 1958 Chile 1962 México 1970 Estados Unidos 1994 Corea / Japón 2002
Alemania 	4 copas	Suiza 1954 Alemania Occidental 1974 Italia 1990 Brasil 2014
Italia 	4 copas	Italia 1934 Francia 1938 España 1982 Alemania 2006
Argentina 	2 copas	Argentina 1978 México 1986
Francia 	2 copas	Francia 1998 Rusia 2018
Uruguay 	1 copa	Uruguay 1930 Brasil 1950
España 	1 copa	Sudáfrica 2010
Inglterra 	1 copa	Inglterra 1966

1. ¿En qué año se iniciaron los mundiales? Relaciona esta fecha con algún hecho histórico de la época.
2. ¿Cuántos años pasaron entre la creación de la FIFA y el primer mundial de fútbol?
3. ¿Cuántos mundiales en total se han realizado desde 1930 hasta la fecha?
4. Si se hubiese realizado consecutivamente desde 1930 ¿Cuántos mundiales se habrían llevado a cabo?
5. Completa la siguiente tabla, teniendo en cuenta los mundiales realizados consecutivamente entre 1950 y 2018.

Tabla LIII. Mundiales consecutivos desde 1950 hasta el 2018

Número de Mundial	Año en que se realiza el Mundial	Años transcurridos
1	1950	0
2	1954	4
		8
7		
	1978	
		32
10		36
14	2002	
15		
	2010	
	2018	

Analiza los datos de la Tabla anterior y contesta las siguientes preguntas:

- a. Escriba como varía el número de años transcurridos de acuerdo al número del mundial.
- b. Para el tercer y cuarto mundial, ¿cuántos años han transcurrido desde el primero?
- c. ¿De qué depende la cantidad de años transcurridos entre cada número de mundial?
- d. Si un mundial se realizó en 1970, ¿qué número de mundial es? y ¿cuántos años transcurrieron desde el primero?
- e. ¿De qué depende el año en que se realiza un mundial?
- f. Encuentre una expresión que permita calcular el año de realizarse un mundial determinado, a partir del año del primer mundial.
- g. Natalia del grado noveno de la institución educativa Villacarmelo, afirma que la expresión para calcular el año de realizarse un mundial determinado, está dada por:

$$A_t = 1950 + 4x$$

Pedro afirma que la expresión es:

$$A_t = 1950 + 4(x - 1)$$

Donde para ambos casos x es el número del mundial. Comprueba quién de los dos estudiantes, tiene la razón. Justificando tu respuesta.

- h. ¿Tendría sentido considerar en nuestra expresión, valores negativos para el número de años acumulados?

6. Realicen una breve reflexión con relación al texto y los videos presentados en clase.

TAREA 3: Lean con atención el siguiente escrito y realicen la actividad en grupos de tres personas.

Selección Colombia en los Mundiales

La selección de fútbol de Colombia es el equipo representativo del país en las competencias de este deporte conformada a finales de los años 1930. Está dirigida por la Federación Colombiana de Fútbol (FCF)⁹, la cual está afiliada a la Confederación Sudamericana de Fútbol (Conmebol)¹⁰ y la Federación Internacional de Fútbol Asociado (FIFA)¹¹, por lo que la selección participa en las competencias que estas entidades organizan y juegan. La Selección Colombia participó por primera vez en las eliminatorias para una Copa Mundial de Fútbol en Suiza 1954, treinta años después de la fundación de la Federación Colombiana de Fútbol.

Ha participado en fase final de seis Copas Mundiales de Fútbol (1962, 1990, 1994, 1998, 2014 y 2018). En Brasil 2014 logró la mejor participación terminando en el quinto (5°) puesto de 32 selecciones participantes.

En 1962 la Selección Colombia consiguió, por primera vez, un cupo en el Mundial de Chile y desde entonces ha participado en varias Copas del Mundo. El mundial de Chile en 1962 es recordado en Colombia no solo por ser la primera Copa del Mundo a la que asistió la Selección en la que no superó la primera ronda, sino que además ha pasado a la historia por el gol olímpico que anotó el barranquillero Marco Coll en el partido contra la Unión Soviética.

A fines de la década de 1980, La Selección Colombia se destacó a nivel internacional cuando el entrenador Francisco Maturana y una generación de jugadores como Carlos Valderrama (elegido el mejor jugador sudamericano en 1987 y 1993), René

Higuaita, Freddy Rincón, Leonel Álvarez, Arnoldo Iguarán, Albeiro Usuriaga, Faustino Asprilla, Adolfo Valencia, entre otros, alcanzaron el primer logro de esta Selección en la Copa América 1987, torneo en el que derrotó 2-1 al local Argentina en disputa por el tercer puesto.

En el Mundial de Italia 1990 el equipo del 'Pibe' Valderrama brilló por su gran calidad y comenzó a marcar una generación en este deporte. Durante la primera ronda del Mundial, en un enfrentamiento con Alemania definiría si clasificaría a octavos o caería eliminada en primera ronda, en este juego, después de pasar 89 minutos con un empate de 0-0, Alemania marca un 1-0, a pesar de esto, la Selección Colombia no se rindió, cuando estaba por darse terminado el partido justo en el último minuto de adición al tiempo reglamentario, en lo que fue la última jugada del partido con un gol de Freddy Rincón, la selección Colombia logra clasificar por primera vez a octavos de final, con un marcador de 1-1 frente a Alemania. La Selección fue eliminada en los octavos de final, en la que se enfrentó con Camerún perdiendo 2-1.

En el Mundial de Estados Unidos en 1994 Colombia llegó como gran favorita, luego de haber clasificado como primera en su grupo en las eliminatorias, con célebres partidos como el 5-0 contra Argentina en Buenos Aires. El equipo salió eliminado en la primera fase, en la que disputó partidos frente a Suiza, Rumania, y Estados Unidos, partido en el que el defensa central Andrés Escobar marcó un autogol y fue asesinado pasados unos días después de su regreso al país en Medellín. El equipo tricolor obtuvo su tercera clasificación consecutiva al Mundial de Francia 1998 siendo una de las 32 selecciones participantes en la Copa e hizo parte del grupo G. Jugó contra Rumania, Inglaterra

⁹ La Federación Colombiana de Fútbol (FCF), o Colfútbol, es el ente que rige las leyes del fútbol y el fútbol sala en Colombia. Fundada el 12 de octubre de 1924

¹⁰ La Confederación Sudamericana de Fútbol más conocida como CONMEBOL es la confederación de asociaciones (federaciones) de fútbol nacionales de América del Sur. Fundada el 9 de julio de 1916 en Buenos Aires

¹¹ Federación Internacional de Fútbol Asociación (FIFA), es la institución que gobierna las federaciones de fútbol en todo el planeta. Se fundó el 21 de mayo de 1904. Forma parte del IFAB, organismo encargado de modificar las reglas del juego. Además, la FIFA organiza la Copa Mundial de Fútbol, los otros campeonatos del mundo en sus distintas categorías, ramas y variaciones de la disciplina, y los Torneos Olímpicos a la par del COI.

y Túnez. Colombia quedó eliminada en la fase de grupos y pese a la eliminación, Faryd Mondragón fue nombrado como el mejor guardameta de la primera ronda del mundial

El Mundial de Brasil en 2014, el equipo tricolor tuvo en el vecino país la mejor participación en una Copa del Mundo, pues ocupó el quinto puesto final y obtuvo cuatro victorias consecutivas.

De la mano del entrenador argentino José Néstor Pékerman, Colombia se clasificó en el segundo puesto de las eliminatorias para la Copa Mundial Brasil 2014 por debajo de Argentina. Hizo parte del grupo D y jugó contra Grecia, Japón y Costa de Marfil. Tuvo un buen inicio en el Mundial llegando por primera vez a cuartos de final, en el cual fue eliminado por perder contra Brasil 1-2 tras un polémico arbitraje, este partido es recordado por el gol anulado a Mario Alberto Yepes. En este Mundial la Selección realizó un excelente trabajo quedando como la quinta mejor selección del mundo (y cuarta a nivel general de puntos totales), siendo el mejor resultado obtenido en la historia de los mundiales para la Selección de Colombia.

En el Mundial de Brasil 2014 también recibió otras distinciones como son; el premio Fair Play por ser la selección que promovió el juego limpio, con 5 tarjetas amarillas en 5 partidos disputados y ninguna tarjeta roja. James Rodríguez se convirtió en el máximo goleador de la cita, con 6 goles y consiguió que su primer gol marcado ante la selección de Uruguay fuera elegido como el mejor gol del Mundial. Además, este gol llevó a James ganar el premio Puskás 2014 como el mejor gol del año 2014. Juan Guillermo Cuadrado fue el jugador con más asistencias y el portero Faryd Mondragón logró convertirse en el jugador más longevo en jugar un partido mundialista. Incluso, los aficionados que estuvieron en Brasil 2014 eligieron a Colombia como la selección que mejores celebraciones realizó tras sus goles.

En el Mundial de Rusia 2018, la selección logró clasificar a este certamen quedando en el grupo H junto a Polonia, Senegal y Japón, y posteriormente pasar a octavos de final, en el que quedó eliminado tras enfrentarse a Inglaterra, en el que el conjunto de Pékerman perdió 3-4 en penales, quedando así eliminado del campeonato mundial.

A partir de las distintas Copa Mundo, se han destacado jugadores en la historia de la selección Colombia como son, el mediocampista Carlos Valderrama considerado uno de los mejores jugadores de la historia de Colombia, ocupa el 39.º lugar en el ranking del mejor jugador sudamericano del siglo XX publicado por la IFFHS¹² en 2004, el centrocampista Marcos Coll autor del único gol olímpico anotado en una Copa Mundial de Fútbol, el portero René Higuita elegido por la IFFHS como el octavo mejor golero sudamericano del siglo XX en 2004 y recordado por la jugada del Escorpión, los delanteros Faustino Asprilla ocupó el sexto lugar en la elección del Jugador Mundial de la FIFA 1993, Radamel Falcao García, elegido quinto mejor jugador del mundo en 2012, según la votación del FIFA Balón de Oro 2012, y James Rodríguez, ganador de la Bota de Oro en la Copa Mundial Brasil 2014.

En varias ocasiones se ha encontrado dentro de las diez mejores selecciones del mundo en la Clasificación mundial de la FIFA.

En la actualidad, La selección Colombia tuvo diferentes cambios, entre ellos al terminar el Mundial de Rusia 2018, el director técnico José Pékerman decidió renunciar a la selección culminando un ciclo de 6 años. En el 2019, la federación se reunió varias veces con el portugués Carlos Queiroz donde en el mes de Febrero, el Portugués asume como nuevo director técnico de la selección Colombia, fijando sus principales retos como la Copa América 2019 en Brasil y las Eliminatorias Sudamericanas a Qatar 2022.

¹² La Federación Internacional de Historia y Estadística de Fútbol (IFFHS), es una organización privada instituida el 27 de marzo de 1984, dedicada a establecer una documentación cronológica, estadística y científica del fútbol

a nivel mundial y determinar los récords mundiales en todas las áreas de dicho deporte de acuerdo con los principios de la FIFA.

1. Indique el año en el que la Selección Colombia participo por primera vez en la Copa Mundo y los años que transcurrieron desde la formación de la Selección hasta este evento.
2. Escriba el número de años transcurridos entre el primer mundial y el segundo mundial en el que participo la Selección Colombia.
3. Escriba el número de años transcurridos entre el cuarto mundial y quinto mundial en el que participo la selección Colombia.
4. Escriba adicional a esta historia, la manera es que se practica el futbol en tu institución y qué actividades realizan en torno a este deporte.

Observen las siguientes tablas que corresponden al valor del mercado, el club de pertenencia y la edad de James Rodríguez & Radamel Falcao, y respondan.

Tabla LIV. Valor del mercado de James Rodríguez

Valor del mercado en millones de €	Club	Edad	Fecha
1	Atlético Banfield	18	oct-2009
2	Atlético Banfield	18	ene-2010
2,5	Atlético Banfield	18	abr-2010
4,5	FC Porto	19	ago-2010
7	FC Porto	19	jun-2011
9,7	FC Porto	20	sep-2011
13	FC Porto	20	feb-2012
18	FC Porto	20	jul-2012
23	FC Porto	21	abr-2013
35	AS Mónaco	22	ene-2014
60	Real Madrid FC	23	ene-2015
80	Real Madrid FC	24	feb-2016

Tabla LV. Valor del mercado de Radamel Falcao

Valor del mercado en millones de €	Club	Edad	Fecha
25	FC Porto	25	jun-2011
30	Atlético Madrid	25	sep-2011
35	Atlético Madrid	25	feb-2012
40	Atlético Madrid	26	abr-2012
50	Atlético Madrid	26	ago-2012
60	Atlético Madrid	26	ene-2013
60	Mónaco	27	ene-2014
55	Mónaco	28	ago-2014
45	Manchester United	29	feb-2015
35	Mónaco	29	jul-2015
23	Chelsea FC	29	feb-2016
15	Mónaco	30	jul-2016

5. Indiquen:
 - a. El intervalo de tiempo que aumentó el valor del mercado de James Rodríguez y el intervalo de tiempo que aumentó el salario para Falcao.
 - b. El intervalo de tiempo que disminuye el valor del mercado de James Rodríguez y el intervalo de tiempo que disminuye el salario de Falcao.
 - c. El valor del mercado máximo y mínimo para James Rodríguez y Falcao

6. Realiza las tablas de los promedios del valor del mercado de James Rodríguez y Radamel Falcao en aquellos periodos anuales en los que tenga más de uno.

Tabla LVI. Promedio del Valor del mercado de James Rodríguez

Valor del mercado en millones de €	Edad	Año

Tabla LVIII. Promedio del Valor del mercado de Radamel Falcao

Valor del mercado en millones de €	Edad	Año

- a. Carolina estudiante de noveno grado, afirma qué el valor del mercado aumenta regularmente de acuerdo al periodo de juego. Esta afirmación es correcta para James Rodríguez o para Falcao, justifica tu respuesta.
 - b. Se podría afirmar, para ambos jugadores, qué el aumento del valor del mercado depende de la edad. Justifica tu respuesta.
 - c. Compara el promedio salarial de James y Falcao, teniendo en cuenta el valor del mercado promedio de ambos jugadores respecto a la edad.
 - d. Realiza una gráfica de puntos, para cada una de las tablas de los promedios del valor del mercado de James y Falcao, y determina que comportamiento puede presentar esa información.
7. Después de analizar la información anterior, escoge dos jugadores nacionales o internacionales según sea su preferencia, e indaga el valor del mercado más alto que han obtenido y en qué año fue, y resuelve:
- a. Completa el siguiente cuadro comparativo con el valor del mercado más alto de los dos jugadores escogidos respecto al valor del mercado más alto de James y Falcao.

Tabla LVIII. Valor del mercado de 4 jugadores de fútbol.

Jugador	Valor del Mercado en millones de €	Año	Club

- b. Con la información anterior, indica el valor del mercado en pesos colombianos para cada uno de estos jugadores, si un euro equivale a \$3800.
- c. Teniendo en cuenta que, en Colombia el salario mínimo es de \$828000 actualmente, indica a cuántas personas se les podría pagar un salario mínimo, con el valor del mercado de cada uno de estos jugadores.

SITUACIÓN 2: ORGANIZACIÓN DE TORNEO INTERCOLEGIADO 2019

Tarea 1: Consultando información

Se ha encargado al grado noveno de realizar la organización y promoción del próximo torneo de fútbol intercolegiados 2019 de la Institución Educativa Villacarmelo; teniendo presente determinadas condiciones para asegurar que el evento sea realizado satisfactoriamente. Es importante que tengan en cuenta que el torneo requiere fondos no solamente para la entrega de premios, sino para elementos de logística.

Para esto, te brindaremos las recomendaciones que hace Ana.

1. Realiza una breve consulta para la organización de los partidos de fútbol.
 - a. Consulta las reglas del juego.
 - b. Duración de los partidos.
 - c. Número de jugadores por equipo.
 - d. Grados participantes.
 - e. Horarios.
2. Para la logística de los equipos.
 - a. Datos de la institución donde se organiza.
 - b. Cantidad de uniformes necesarios
 - c. Consulta el costo de fabricación de un uniforme sencillo (peto).
 - d. Presupuesto necesario para la fabricación de uniformes
 - e. Premios y criterios de selección del ganador.
3. Posterior a la consulta que realizaste, haz un esquema en el que recopiles la información que consideres más relevante para la elaboración de un folleto promocional del evento.

Tarea 2: Pensando en la venta de los uniformes

Para este torneo se necesita recolectar fondos que serán utilizados en la compra de los premios para los equipos ganadores, por lo que las directivas de la institución han propuesto la venta de los uniformes de cada equipo participante.

Ana, ha realizado una venta preliminar de los uniformes sabiendo que el costo de producción de cada uniforme es de \$3000. Esto ha permitido hacer un estudio de la cantidad de uniformes vendidos con relación al precio de venta, como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla LIX. Relación precio vs cantidad vendida de uniformes

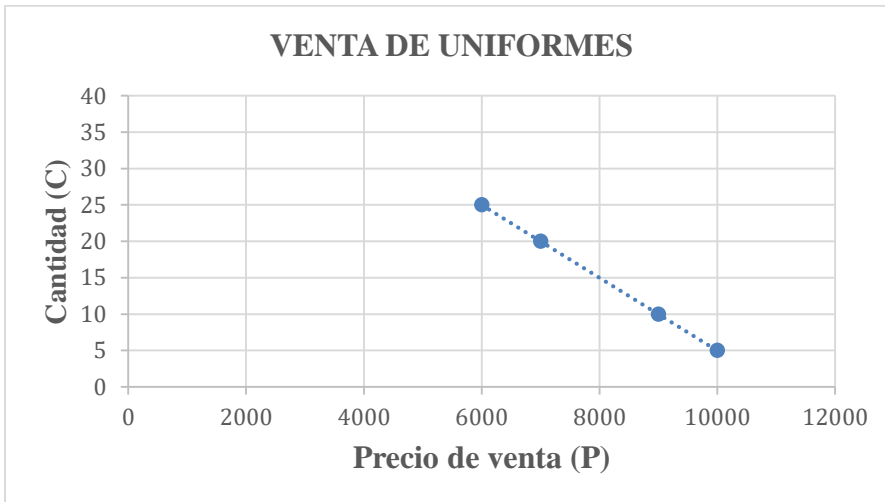
Precio de venta (P)	Cantidad vendida(C)
6000	25
7000	20
9000	10
10000	5

Con estos datos que Ana ha registrado necesita saber cuál debe ser el precio de venta de cada uniforme para obtener la mayor ganancia posible. Ayúdale a resolver este problema desarrollando las siguientes tareas.

1. Realicen un listado de las magnitudes involucradas en la situación, indicando cuales varían y cuáles no.
2. Analizando la tabla, respondan:
 - a. Escribe como varia la cantidad de uniformes vendidos (C) cuando el precio de venta de cada uniforme (P) aumenta.
 - b. Si el precio de venta fuese \$8000 pesos por cada uniforme, indica cuántos uniformes posiblemente se vendan considerando el mismo patrón de variación.
 - c. Si el precio de venta fuese \$11000 pesos por cada uniforme, indica cuántos uniformes posiblemente se vendan considerando el mismo patrón de variación.

- d. ¿Cuánto aumenta el precio de venta de los uniformes cada que disminuyen 5 uniformes en la venta? Expliquen su respuesta.
 - e. ¿Cuántos uniformes disminuyen cuando el precio de venta aumenta en mil pesos? Expliquen su respuesta.
3. Con la información del punto anterior, escriban:
 - a. ¿Cuánto varía la cantidad de uniformes vendidos (C)?
 - b. ¿Cuánto varía el Precio de venta (P)?
 - c. Realicen algunas conclusiones, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los puntos anteriores.
 4. Otra forma de visualizar los datos obtenidos por Ana, es haciendo uso de la representación geométrica (en el plano cartesiano) de la relación entre el precio de venta de cada uniforme (P) y la cantidad vendida (C).
 - a. Realicen algunas conclusiones del tipo de gráfica que se obtiene y expliquen por qué decrece.

Gráfica 3. Precio de venta Vs Cantidad de uniformes vendidos.



- b. Para el precio de \$8000 pesos por uniforme, ¿cuántos uniformes se venden? Grafica el punto que indica esta relación (precio, cantidad).
5. Tome dos puntos que sean consecutivos, con sus respectivas coordenadas, y encuentren:
 - a. La diferencia entre las coordenadas que corresponden a los precios de venta para esos dos puntos.

- b. La diferencia entre las coordenadas que corresponden a la cantidad de uniformes vendidos para esos dos puntos.
 - c. Realiza el procedimiento de los puntos a. y b. por lo menos tres veces, tomando diferentes puntos consecutivos y realiza algunas conclusiones.
6. Teniendo en cuenta la información obtenida en el punto anterior:

La relación encontrada antes, se conoce como **la razón de cambio** entre la cantidad de dos magnitudes, es decir, la magnitud del cambio de una variable por unidad de cambio de la otra. Esta relación está dada para dos puntos A (x_1, y_1) y B (x_2, y_2) de la siguiente manera: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

- a. Encuentren la relación entre las diferencias anotadas antes, mediante el cociente de estas.
 - b. Tomen en consideración diferentes puntos con sus respectivas coordenadas y encuentre la razón de cambio para cada caso.
 - c. Escriban una conclusión relacionada con la razón de cambio encontrada.
7. Teniendo en cuenta cómo cambia y cuánto cambia la cantidad de uniformes vendidos en relación al precio de venta. Ana, afirma que una forma general para calcular la cantidad de uniformes vendidos respecto a cualquier precio de venta, se puede dar mediante la siguiente expresión:

$$y = -\frac{1}{200}x + 55$$

Por el contrario, Victoria afirma que la expresión que permite calcular la relación entre la venta de uniformes y la cantidad vendida es:

$$y = -\frac{5}{1000}x + 11000$$

Donde para ambos casos x es el precio de venta de cada uniforme.

- a. Verifica cuál de los dos estudiantes, tiene la razón. Justificando tu respuesta.
 - b. Compara estos valores con los registrados, en la tabla y en la gráfica anteriormente presentadas.
8. Realice la gráfica correspondiente a las dos expresiones en el plano cartesiano.

Con la finalidad de ayudar a Ana para saber cuál debe ser el precio de venta de cada uniforme para obtener la mayor ganancia posible, continuemos con las siguientes tareas:

Tarea 3: *Pensando en las ganancias de la venta de uniformes.*

1. Consulta:
 - a. De qué cantidades depende la ganancia de la venta de uniformes.
 - b. Cómo se calculan ingresos totales de la venta de uniformes.
 - c. Cómo calcular el precio de producción de los uniformes.
2. Usando la información del punto 7 de la tarea 1:
 - a. Escriba una expresión que le permita calcular los ingresos totales por la venta de uniformes.
 - b. Escriba una expresión que le permita calcular el costo de producción de los uniformes.
3. Use las expresiones que halló en el punto 2, para expresar la función que representa las ganancias obtenidas por la venta de uniformes y realice las operaciones que se pueden efectuar en la función que representa las ganancias.
4. Mencione algunas diferencias entre la función que representa las ganancias que deja la venta de uniformes, y la función que representa la cantidad de uniformes vendidos, obtenida en el punto 7 de la tarea 1.
5. Haciendo uso de la ecuación que representa la ganancia encontrada en el punto 4, complete la siguiente tabla:

Tabla LX. Relación Precio de venta vs. Ganancias de la venta de los uniformes

Precio de venta (P)	Ganancias (G)
4000	
5000	
5500	

6000	
7000	
8000	
10000	

Teniendo en cuenta los datos de la tabla, indique que se puede concluir del comportamiento de las ganancias conforme aumenta el precio de cada uniforme.

6. Teniendo en cuenta que este proyecto está basado en el contexto del Fútbol, consulta en diferentes fuentes, problemas parecidos que incluyan el concepto matemático que estamos trabajando.

Tarea 4: Analizando gráficamente la ganancia máxima de la venta de uniformes.

1. Con ayuda de Geogebra, represente gráficamente las parejas ordenadas obtenidas en la tabla de la tarea 3.
2. Grafique en Geogebra la función que representa la ganancia de la venta de uniformes y describa algunas de las características de dicha gráfica, la cual se conoce con el nombre de parábola.
3. Teniendo en cuenta la gráfica obtenida anteriormente, utilice el programa para marcar el punto máximo de ella, y escriba los valores de sus coordenadas. Este punto se denomina el **vértice de la parábola**. Interprete qué significado tiene en la situación que estamos estudiando.
4. Escribe la expresión algebraica que Geogebra genera con respecto a la gráfica. En general esta expresión está dada por:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Denominada la **ecuación cuadrática general**. Note que a es el coeficiente de x^2 , b es el coeficiente de x y c no tiene variable, es decir, es el término independiente.

Escribe a continuación los valores de los coeficientes a , b y c dados por Geogebra y compara con la expresión encontrada para las ganancias:

a	b	c

5. Teniendo en cuenta que la expresión para hallar la coordenada del vértice está dada por:

$$\text{Vértice} = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right)$$

- a. Reemplace los valores que obtuvo para los coeficientes a y b de la expresión encontrada, y verifique si el resultado de esta expresión, se ubica en el mismo punto ubicado en el ítem 3.

6. Construyan en Geogebra una recta totalmente vertical que pase por el vértice. Esta recta se denomina el **eje de simetría**.
 - a. ¿Puede notar alguna propiedad de esta recta con respecto a la parábola?
 - b. ¿Qué relación tiene ella con el vértice?
7. Ana afirma que las coordenadas del vértice encontrado en el punto anterior indica, desde la situación, el punto máximo de la parábola el cual representa la ganancia máxima. Victoria afirma que, el vértice indica gráficamente el cambio de sentido de la gráfica. Analice estas afirmaciones y concluye.
8. ¿Qué sucede si el precio de venta de cada uniforme es 2000 pesos? Interprete desde la gráfica y la ecuación de la parábola.
9. Observando la parábola que representa las ganancias, indique cuál es el precio mínimo al que se debe vender cada uniforme, la cual no generaría ganancias. Justifique su respuesta.
10. ¿Qué sucede si el precio de venta de cada uniforme es 12000 pesos? Interprete desde la gráfica y la ecuación de la parábola.
11. Observando la parábola que representa las ganancias, indique cuál es el precio máximo al que se puede vender cada uniforme para no generar ganancias. Justifique su respuesta.
12. De acuerdo a los puntos anteriores, indica cuál es el conjunto dominio de la función que representan las ganancias. Recuerda que, **el conjunto dominio** de una función son los posibles valores que puede tomar la variable independiente, que en este caso es el Precio de Venta de cada uniforme.
13. Utilizando la herramienta de *deslizador* en Geogebra, realiza deslizadores (con valores positivos y negativos) para los parámetros ***a*** y ***c***.
 - a. Mueve el deslizador ***a*** y escribe qué sucede con la gráfica que representa las ganancias de la venta de uniformes cuando el parámetro ***a*** se hace menor y se hace mayor, realice unas conclusiones.
 - b. Mueve el deslizador ***c*** y escribe qué sucede con la gráfica que representa las ganancias de la venta de uniformes cuando el parámetro ***c*** se hace mayor y se hace menor, realice unas conclusiones.
14. Elabore un escrito en donde explique: los principales resultados obtenidos en esta tarea, valores importantes a tener en cuenta en la venta de los uniformes, y qué recomendaciones daría como organizador del torneo de Fútbol.

Tarea 5: Diseñando el folleto promocional

Con ayuda de la herramienta Canva, realiza un folleto promocional en el cual se evidencia la información necesaria para la publicidad de los intercolegiados 2019, teniendo en cuenta la información obtenida de las tareas anteriores, plasmando en él la información más importante que se debe tener en cuenta para este evento.

Para poder utilizar esta herramienta, mira el tutorial Canva en YouTube:

Link: <https://youtu.be/qOiBm3PqRSM>

6.2 Anexo 2: Esquemas presentados en la S2T1P3

Ilustración 39. Esquema G1



Ilustración 40. Esquema G2

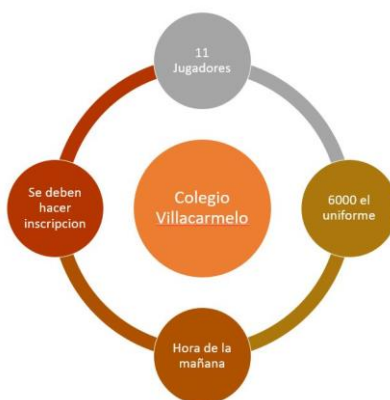


Ilustración 41. Esquema G3



Ilustración 42. Esquema G4

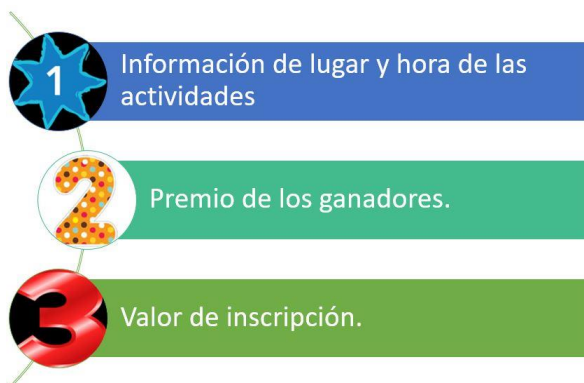


Ilustración 43. Esquema G5



Ilustración 44. Esquema G6



Ilustración 45. Esquema G7



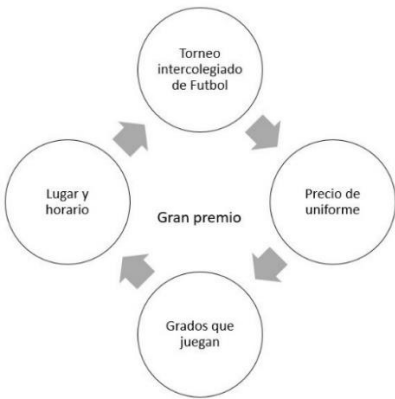
Ilustración 46. Esquema G8



Ilustración 47. Esquema G9



Ilustración 48. Esquema G10



6.3 Anexo 3: Folletos promocionales elaborados en la S2T5P1

Ilustración 49. Folleto del G1



Ilustración 50. Folleto del G2



Ilustración 51. Folleto del G3



Ilustración 52. Folleto del G4



Ilustración 53. Folleto de G5



Ilustración 54. Folleto del G6



Ilustración 55. Folleto del G7



Ilustración 56. Folleto del G8

17

REGLAS
TRADICIONALES
DE FUTBOL

LOS PARTIDOS DURAN 90
MINUTOS y SE PIDE 11
JUGADORES POR
EQUIPO!!!

GRADOS
10 Y 11

Ilustración 57. Folleto G9



Ilustración 58. Folleto G10



\$7000 POR UNIFORME

**PREMIO
DE
\$100.000**

