

Arte y geometría. Una propuesta didáctica para el aprendizaje de las transformaciones  
isométricas a través de un software de geometría dinámica

Lilibeth Fernández Gutiérrez

Mónica Mosquera Jaramillo

Universidad del Valle  
Instituto de Educación y Pedagogía  
Licenciatura en Matemáticas y Física  
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas  
Santiago de Cali  
2019

Arte y geometría. Una propuesta didáctica para el aprendizaje de las transformaciones  
isométricas a través de un software de geometría dinámica

Lilibeth Fernández Gutiérrez – 1229207

Mónica Mosquera Jaramillo - 1231690

Directora:

Mg. María Cristina Valencia Molina

Trabajo de grado para optar por el título de:

Licenciada en Matemáticas y Física y Licenciada en Educación Básica con Énfasis en  
Matemáticas

Universidad del Valle  
Instituto de Educación y Pedagogía  
Licenciatura en Matemáticas y Física  
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemática  
Santiago de Cali  
2019

Agradecemos al profesor Fernando Angulo por la idea  
de exaltar el trabajo del artista vallecaucano Omar Rayo, a la  
profesora María Cristina Valencia por su apoyo y asesoría contante,  
al profesor Jorge Enrique Galeano por su colaboración, exigencia y  
ejemplo de entrega a la educación, y en especial a nuestra alma  
máter, la universidad del valle.



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y  
PEDAGOGÍA  
Subdirección Académica

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO  
DE GRADO

Programa Académico \_\_\_\_\_

Fecha

Día	Mes	Año
23	05	2019

Código del programa: 3487-3469

Resolución del programa: \_\_\_\_\_

Título del Trabajo o Proyecto de Grado				
Arte y Geometría: Una propuesta didáctica para el aprendizaje de las transformaciones isométricas a través de un software de geometría dinámica				
Se trata de:				
Proyecto <input type="checkbox"/>		Informe Final <input checked="" type="checkbox"/>		
Director				
María Cristina Valencia Molina				
Nombre del Primer Evaluador				
Jorge Enrique Galeano				
Nombre del Segundo Evaluador				
David Benítez				
Estudiantes				
Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Teléfonos de contacto
Lilibeth Fernández	1227201	3487	lilibeth.fernandez@univalle.edu.co	321609521
Mónica Mosquera Jaramillo	1231690	3469	monica.mosquera-jaramillo@univalle.edu.co	3158408830
Evaluación				
Aprobado <input type="checkbox"/>	Meritorio <input checked="" type="checkbox"/>	Laureado <input type="checkbox"/>		
Aprobado con recomendaciones <input type="checkbox"/>	No Aprobado <input type="checkbox"/>	Incompleto <input type="checkbox"/>		
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:				
Director del Trabajo o Proyecto de Grado <input type="checkbox"/>		Primer Evaluador <input type="checkbox"/>	Segundo Evaluador <input type="checkbox"/>	
En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____				
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente):				
Firmas				
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador		





## TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN .....	1
1. CAPÍTULO I. ASPECTOS GENERALES.....	3
1.1 Presentación y contextualización del problema .....	3
1.2 Objetivos .....	7
1.2.1 Objetivo General .....	7
1.2.2 Objetivos específicos .....	7
1.3 Justificación.....	8
1.3.1 Antecedentes .....	11
2. CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO .....	19
2.1 Constructivismo e integración de un SGD en el aula de clase .....	19
2.2 Dimensión disciplinar de las transformaciones isométricas .....	23
2.2.1 Transformaciones en el plano euclidiano.....	24
2.2.2 Congruencia .....	25
2.2.3 Transformaciones isométricas .....	26
2.3 Dimensión didáctica de las transformaciones isométricas.....	30
2.3.1 Principios a la práctica del Bachillerato Internacional .....	31
2.3.2 Aportes históricos y didácticos del arte .....	33
2.3.3 Dificultades en el proceso de aprendizaje de las transformaciones isométricas. ....	37
2.3.4 El uso de un SGD en el aula.....	38
3. CAPÍTULO III: METODOLOGÍA .....	41
3.1 Modelo pedagógico del Bachillerato Internacional e investigación cualitativa.....	41
3.2 Descripción de la población .....	45
3.3 Descripción de las actividades .....	45
3.3.1 Actividad 1.....	50
3.3.2 Actividad 2.....	64
3.3.3 Actividad 3.....	75
3.3.4 Actividad 4.....	80
3.4 Puesta en práctica del conjunto de actividades. ....	86

4	CAPÍTULO IV: ANÁLISIS Y VALIDACIÓN .....	91
4.1	Actividad 1 .....	92
4.2	Actividad 2 .....	99
4.3	Actividad 3 .....	107
4.3.1	Validación de los objetivos .....	117
4.4	Actividad 4 .....	120
4.4.1	Validación de los objetivos. ....	123
5	CAPÍTULO V: CONCLUSIONES.....	140
	Referencias bibliográficas.....	143
	ANEXOS .....	147

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Cuadro de Poussin, ilustra el uso de la geometría como estructura interna en una obra de arte.....	33
Figura 2. Piet Mondrian “Composición de ajedrez en colores oscuros” Tomado de Franco (2003) .....	34
Figura 3. Fases y etapas de la investigación cualitativa.....	44
Figura 4. Piezas para construir la obra de la guía 1.1 “Actividad 1” .....	52
Figura 5. Piezas para construir obra de la guía 1.2 “Actividad 1” .....	55
Figura 6. Piezas para construir obra de la guía 1.3 “Actividad 1” .....	58
Figura 7. Piezas para construir obra de la guía 1.4 “Actividad 1” .....	61
Figura 8. Applet correspondiente a la guía 2.1 “Actividad 2” .....	65
Figura 9. Applet correspondiente a la guía 2.2 “Actividad 2” .....	68
Figura 10. Applet correspondiente a la guía 2.3 “Actividad 2” .....	71
Figura 11. Applet de cierre y socialización “Actividad 2”.....	74
Figura 12. Applet 3.1 para construir obra de la “Actividad 3”.....	76
Figura 13. Applet 3.2 para construir obra de la “Actividad 3”.....	76
Figura 14. Applet 3.3 para construir obra de la “Actividad 3”.....	77
Figura 15. Applet Protocolo para construir obra de la “Actividad 4”.....	82
Figura 16. Registros fotográficos tomados durante la implementación de la “Actividad 1”. .....	87
Figura 17. Registros fotográficos tomados durante la implementación de la “Actividad 2”. .....	88
Figura 18. Registros fotográficos tomados durante la implementación de la “Actividad 3”, Momento 1.....	89
Figura 19. Registros fotográficos tomados durante la implementación de la “Actividad 3”, Momento 2.....	89
Figura 20. Registros fotográficos tomados durante la implementación de la “Actividad 4”. .....	90
Figura 21. Ejemplos de respuestas a la pregunta 1, guía 1.1 de la “Actividad 1”, “cumplió” parte superior izquierda, “cumplió parcialmente” parte superior derecha y “no cumplió” parte inferior. .....	93
Figura 22. Ejemplos de construcciones pregunta 1, ítem 1.1, “Cumplió” parte superior, “Cumplió parcialmente” parte inferior izquierda, “No cumplió” parte inferior derecha. “Actividad 1”.....	94
Figura 23. Ejemplos de respuestas “cumplió” parte superior izquierda, “cumplió parcialmente”	

parte superior derecha y “no cumplió” parte inferior, a la pregunta 2 guía 1.2, 1.1 y 1.3 respectivamente de la “Actividad 1 .....	95
Figura 24. Ejemplo de casos particulares en los que la simetría es vista como una rotación en el espacio, pregunta 2, guía 1.3 “Actividad 1”. .....	96
Figura 25. Ejemplos de respuestas a la pregunta 3, “cumplió parcialmente” guía 1.3, 1.1 y “no cumplió” guía 1.2 de la “Actividad 1” respectivamente .....	97
Figura 26. Ejemplos de respuestas particulares de la pregunta 3, guías 1.1 y 1.3 respectivamente. .....	97
Figura 27. Ejemplos de respuestas “cumplió parcialmente” guía 1.1 y “no cumplió” guía 1.2 de la pregunta 4, “Actividad 1”. .....	98
Figura 28. Ejemplos de respuestas “Cumplió” y “cumplió parcialmente” guía 2.1 de la pregunta 1, “Actividad 2”. .....	101
Figura 29. Ejemplos de respuestas, “Cumplió” parte inferior guía 2.1, “cumplió parcialmente” parte superior izquierda, guía 2.2 y “no cumplió” parte superior derecha, guía 2.3 a la pregunta 3 “Actividad 2.....	102
Figura 30. Ejemplos de respuestas “Cumplió” guía 2.1, “cumplió parcialmente” guía 2.2 y “no cumplió” guía 2.3, respectivamente de la pregunta 4, Actividad 2”.....	103
Figura 31. Ejemplos de respuestas “Cumplió parcialmente” guía 2.1 y 2.3 y “no cumplió” guía 2.3, respectivamente de la pregunta 5b, “Actividad 2”. .....	104
Figura 32. Ejemplos de respuestas “Cumplió” guía 2.1 y “cumplió parcialmente” guía 2.2 respectivamente de la pregunta 6, “Actividad 2”.....	105
Figura 33. Ejemplos de respuestas “Cumplió parcialmente” guía 2.1 y “no cumplió” guía 2.2 respectivamente de la pregunta 7, “Actividad 2”.....	106
Figura 34. Ejemplos de respuestas, “Cumplió” Applet 3.2, “cumplió parcialmente” Applet 3.3 y “no cumplió” Applet 3.2 respectivamente de la pregunta 1, “Actividad 3”.....	109
Figura 35. Ejemplos de respuestas “cumplió” Applet 3.1, “cumplió parcialmente” Applet 3.2 y “No cumplió” Applet 3.3 respectivamente de las preguntas 2 y 1 de la “Actividad 3”.....	111
Figura 36. Ejemplos de respuestas “cumplió” Applet 3.1, “cumplió parcialmente” Applet 3.2 y “No cumplió” Applet 3.3 respectivamente de las preguntas 3 y 2-3, de la “Actividad 3”. .....	113
Figura 37. Ejemplos de respuestas “cumplió” Applet 3.1, “cumplió parcialmente” Applet 3.2 y “no cumplió” Applet 3.3, respectivamente de la pregunta 4, “Actividad 3”.....	114

Figura 38. Ejemplos de respuestas “cumplió” Applet 3.3, “cumplió parcialmente” Applet 3.1 y “No cumplió” Applet 3.2 respectivamente de la pregunta 5, “Actividad 3”.....	116
Figura 39. Ejemplos de respuestas “Cumplió” parte superior izquierda, “cumplió parcialmente” parte superior derecha y “no cumplió” parte inferior, de la pregunta 5 Applet 3.1 “Actividad 3”. .....	117
Figura 40. Ejemplo de construcción de la obra del Applet 3.1 “Actividad 3”. .....	118
Figura 41. Ejemplo de construcción de la obra del Applet 3.2 “Actividad 3”. .....	119
Figura 42. Ejemplo de construcción de la obra del Applet 3.3 “Actividad 3”. .....	119
Figura 43. Ejemplos de respuestas “Cumplió” del punto 1 “Actividad 4”. .....	121
Figura 44. Ejemplos de respuestas “Cumplió” parte superior izquierda, “cumplió parcialmente” parte superior derecha y “no cumplió” parte inferior, del punto 2 “Actividad 4”. .....	122
Figura 45. Ejemplo 1 de las construcciones de los estudiantes (protocolos) en la “Actividad 4”. .....	124
Figura 46. Ejemplo 2 de las construcciones de los estudiantes (protocolos) en la “Actividad 4”. .....	124
Figura 47. Ejemplo 3 de las construcciones de los estudiantes (protocolos) en la “Actividad 4”. .....	125
Figura 48. Ejemplo 1 de las construcciones de los estudiantes (protocolos) en la “Actividad 4”. .....	125

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Dificultades de los estudiantes en el estudio de las transformaciones isométricas. ....	37
Tabla 2. Esquema para la recopilación de datos de cada pregunta. ....	91
Tabla 3. Recopilación de las respuestas de la pregunta 1 “Actividad 1” .....	93
Tabla 4. Recopilación de las respuestas de la pregunta 2 “Actividad 1” .....	95
Tabla 5. Recopilación de las respuestas de la pregunta 3 “Actividad 1” .....	96
Tabla 6. Recopilación de las respuestas de la pregunta 4 “Actividad 1” .....	97
Tabla 7. Recopilación de las respuestas de la pregunta 1 “Actividad 2” .....	100
Tabla 8. Recopilación de las respuestas de la pregunta 3 “Actividad 2” .....	101
Tabla 9. Recopilación de las respuestas de la pregunta 4 “Actividad 2” .....	102
Tabla 10. Recopilación de las respuestas de la pregunta 5b - 5 “Actividad 2” .....	103
Tabla 11. Recopilación de las respuestas de la pregunta 6 “Actividad 2” .....	104
Tabla 12. Recopilación de las respuestas de la pregunta 7 o 6 “Actividad 2” .....	105
Tabla 13. Recopilación de las respuestas de la pregunta 1 “Actividad 3” .....	109
Tabla 14. Recopilación de las respuestas de las preguntas 2 y 1 “Actividad 3” .....	110
Tabla 15. Recopilación de las respuestas de las preguntas 3 y 2-3 “Actividad 3” .....	111
Tabla 16. Recopilación de las respuestas de las preguntas 4 y 4 “Actividad 3” .....	113
Tabla 17. Recopilación de las respuestas de las preguntas 5 y 5 “Actividad 3” .....	115
Tabla 18. Recopilación de las respuestas de las preguntas 6 “Actividad 3” .....	116
Tabla 19. Recopilación de las respuestas de la pregunta 1 “Actividad 4” .....	120
Tabla 20. Recopilación de las respuestas de la pregunta 2 “Actividad 4” .....	121
Tabla 21. Recopilación de las respuestas de la pregunta 3 “Actividad 3” .....	123

## **LISTA DE ANEXOS**

Anexo A. Currículo escrito, secuenciación de contenidos de geometría del Colegio “Jardín Tía Nora y Liceo los Alpes SAS” .....	147
Anexo B. Taxonomía de Bloom, niveles de aprendizaje. ....	148



## **RESUMEN**

En diversos momentos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, el estudio de la geometría ha sido relegado del currículo escrito y enseñado, factor que generó interés y llevó a desarrollar este trabajo de grado cuyo interrogante es ¿Qué elementos promueven el aprendizaje de las transformaciones isométricas a través del uso de un SGD, con el cual se construyen algunas de las obras del pintor Omar Rayo?, por esto se diseñó un conjunto de actividades, con el con el propósito de generar un aprendizaje significativo de las transformaciones isométricas en estudiantes de grado noveno del colegio “Jardín Tía Nora y Liceo los Alpes SAS” en el marco constructivista de la investigación cualitativa. En cada una de las actividades se brindaron los instrumentos y herramientas necesarias, que junto con la inmediatez del software al ejecutar una acción llevó a los estudiantes a autoevaluar y replantear constantemente sus acciones, de modo que finalizadas las prácticas describieron con detalle el uso de cada uno de los elementos geométricos de las transformaciones isométricas.

*Palabras claves:* Transformaciones isométricas, software de geometría dinámica SGD, arte, aprendizaje significativo, constructivismo.

## **ABSTRACT**

In very occasions in the teaching and learning of mathematics, the study of geometry has been relegated from the written and taught curriculum, a factor that generated interest and led to the development of this degree work in which the following question is arouse: What elements promote the learning of isometric transformations through the use of an SGD, in which some of the art work from the painter Omar Rayo are built? For this reason, a set of activities was designed with the purpose of generating a significant learning of the isometric transformations in ninth grade

students from the “Jardín Tía Nora and Liceo los Alpes SAS”; school in the constructivist framework of qualitative research. In each of the activities, the necessary instruments and tools were provided, which, along with the immediacy of the software when executing an action, led the students to constantly self-evaluating and rethinking their actions, so that after the practices the use of each and every geometric elements of isometric transformations would be thoroughly described.

*Keywords:* Isometric transformations, dynamic geometry software, art, significant learning, constructivism.

## INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las transformaciones isométricas<sup>1</sup> es tal vez uno de los contenidos de la geometría que se aborda con un rigor que no corresponde con su importancia en el desarrollo del pensamiento espacial, o que se queda de último en la ejecución del plan de área de matemáticas y en peores casos queda sin ser abordado; es por esto, y otros factores que se considera necesario proponer un conjunto de actividades que generen un aprendizaje significativo en los estudiantes, a través del arte y un software de geometría dinámica como mediador en el proceso de conceptualización de las transformaciones isométricas en el plano.

En este sentido, el presente trabajo se basó en el diseño y aplicación de un conjunto de actividades que permitieron realizar una aproximación a las transformaciones isométricas por medio del software de geometría dinámica Geogebra, en dicho software se construyeron las pinturas de Omar Rayo y fue de este modo que se integraron las áreas geometría y educación artística.

Así, en el primer capítulo se hace una presentación de la problemática que dio origen al trabajo, exponiendo los principales factores que influyen en la enseñanza de las transformaciones isométricas del plano euclidiano, a partir de las cuales se formuló la pregunta problema que sirvió como eje central para el desarrollo de este trabajo, y los objetivos que guiaron el desarrollo de la indagación.

En el segundo capítulo se hace una aproximación al problema, desde las dimensiones

---

<sup>1</sup> Las isometrías o transformaciones isométricas son movimientos rígidos del plano, preservan las distancias, significa que no deforman las figuras. Las isometrías conservan la forma y el tamaño de la figura original. Cuando una transformación cambia el tamaño o la forma de la figura tenemos una transformación no rígida”. Pando, S. A. (2009).

matemática y didáctica, así como una caracterización del software que se emplea para el desarrollo de las actividades.

En el tercer capítulo se presenta el desarrollo metodológico del trabajo con cada una de sus fases y etapas, desde la fundamentación y diseño de las actividades hasta la puesta en práctica de las mismas.

El cuarto capítulo presenta los resultados de la puesta en práctica de cada una de las actividades, análisis y validación de los objetivos propuestos al inicio del trabajo.

Y por último en el quinto capítulo se presentan las conclusiones y algunas recomendaciones de este trabajo de grado.

## 1. CAPÍTULO I. ASPECTOS GENERALES

En este capítulo se desarrolla la presentación y contextualización del problema, dando a conocer aquellos aspectos que llevaron a la formulación de la pregunta problema y planteamiento de los objetivos, junto con aquellos argumentos que permiten justificar la elaboración de este trabajo.

### 1.1 Presentación y contextualización del problema

La manera como se había abordado la enseñanza de la geometría en los últimos años en nuestra sociedad estaba caracterizada por una fuerte tendencia a la memorización de conceptos y propiedades, los cuales muchas veces se basaban en conocimientos previos que también habían sido memorizados y no comprendidos por los estudiantes; la resolución de problemas en la que se trataban aspectos métricos, planteando actividades como los cálculos de ángulos, lados, triángulos, volúmenes, entre otros. Y no en el estudio de aspectos y propiedades geométricas. (Barrantes, Balletbo, y Fernández. 2014)

Actualmente con la intención de alejarse de las *Matemáticas Modernas*, movimiento que se caracterizó por el estructuralismo y formalismo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que de una u otra forma llevó a disminuir el rol de la geometría euclidiana favoreciendo otros elementos de la matemática y puntos de vista para su enseñanza como por ejemplo: la teoría de conjuntos, la lógica y las estructuras abstractas (Hernández, V., y Villalba, M; 2001), el Ministerio de Educación Nacional (MEN) a partir de la renovación curricular de 1984, propone la Geometría activa como alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos a través de herramientas de exploración y representación del espacio.

Así mismo establece que la geometría activa “se trata de ‘hacer cosas’, de moverse, dibujar,

construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios<sup>2</sup> el material para la conceptualización o representación interna. ” (MEN, 1998, p. 57). Lo que implicaría que los estudiantes tendrían una participación activa en el desarrollo de las clases, en las que los docentes pueden valerse de diversos recursos o diseños de actividades que se trabajen con material manipulativo o recursos tecnológicos como Applets o Software de Geometría Dinámica (SGD)<sup>3</sup>, los cuales en las últimas décadas han tomado fuerza en la enseñanza de las matemáticas, dada la necesidad de incorporar y reestructurar el sistema educativo con fines de competitividad a través de la calidad educativa que se puede construir con los medios computacionales interactivos, como se plantea en los Lineamientos de Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas (1999); aprovechando la motivación y atracción que sienten los estudiantes por las máquinas digitales o recursos tecnológicos en general (Acosta, 2010).

Sin embargo, en el sistema de educación formal, usualmente los objetos geométricos son presentados a los estudiantes como el producto acabado de la actividad matemática y en algunos casos se van desplazando hacia el final del curso, lo que implica la exclusión o atención superficial de los mismos (Ballesteros y Gamboa, 2009); tal como se observa en las aulas colombianas de educación básica y media, pues los currículos están diseñados de manera que la clase de geometría se deja para final del año lectivo, o los libros de texto que usan los docentes presentan la unidad de geometría entre las últimas y por ende el tiempo dedicado a éstos contenidos no es el suficiente, restándole importancia a la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Sin tener en cuenta que la

---

<sup>2</sup> Los cuales se entienden como las acciones mentales y físicas que se involucran en la comprensión y el conocimiento. Vergara, C. (2017). Piaget y las cuatro etapas del desarrollo cognitivo.

<sup>3</sup> Los SGD se caracterizan por poseer una pantalla gráfica sobre la que el usuario puede dibujar objetos geométricos primitivos (puntos, rectas, segmentos, etc.) y registrar relaciones geométricas entre ellos (perpendicularidad, paralelismo, etc.) a partir de un repertorio prefijado. Estas acciones producen construcciones geométricas más o menos complejas en las que algunos objetos pueden ser seleccionados por el usuario y “arrastrados” por la pantalla, manteniendo las relaciones geométricas establecidas en la construcción (González, 2001, p. 278).

geometría permite a los estudiantes desarrollar habilidades para visualizar, argumentar, razonar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, conjeturar, entre otras; además de permitirles relacionarse con el entorno en el que se mueven (Ballesteros y Gamboa, 2009)

Así pues, teniendo en cuenta que el aprendizaje de la geometría favorece el desarrollo de habilidades asociadas al sentido espacial, al dominio de propiedades geométricas de algunas figuras y el desarrollo de habilidades intelectuales como percepción, imaginación, razonamiento lógico y abstracción (Pando, 2009), desde ámbitos como la vida diaria y la naturaleza.

Dado lo anterior, se consideró que las transformaciones isométricas eran un elemento clave en el aprendizaje y el desarrollo del pensamiento espacial, pues a partir de contextos cercanos al estudiante se pueden llevar a cabo actividades que les permitan hacer evidente la importancia de la geometría, llevándolo a apropiarse de habilidades como visualizar, razonar y argumentar. En concordancia con la noción de Geometría activa el MEN (1998) en los lineamientos curriculares establece que:

*Una transformación no puede definirse, ni mucho menos simbolizarse formalmente, antes de que los alumnos hayan hecho algunas transformaciones externas, moviéndose ellos mismos y moviendo hojas, varillas y otros objetos, deformándolos, rotándolos o deslizándolos unos sobre otros de manera física, de tal manera que ya puedan imaginarse esos movimientos sin necesidad de mover o transformar algo material (p. 40).*

En los diferentes grados de escolaridad el MEN propone los procesos que se deben evaluar: en grado tercero, reconocer y aplicar traslaciones y giros sobre una figura, así como reconocer y valorar simetrías en distintos aspectos del arte y el diseño; en grado quinto, la capacidad de conjeturar y verificar los resultados al aplicar transformaciones a figuras en el plano, así como identificar y justificar relaciones de semejanza y congruencia entre figuras; en grado séptimo, el estudiante debe mostrar la capacidad de predecir y comparar los resultados de aplicar

transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte; y para el grado noveno además de lo mencionado, se evalúa que el estudiante conjeture y verifique las propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.

Pero, a pesar de existir claridad sobre las competencias y procesos que se evalúan en cada grado, el ICFES establece que “en el aula no se desarrollan actividades en torno a las transformaciones de figuras bidimensionales en las matemáticas y en el arte” (como se citó en Ibarguen y Realpe, 2012, p. 7). De este modo se resalta la importancia de la enseñanza de la geometría y en particular el énfasis que se hace sobre el trabajo con las transformaciones isométricas, lo cual permite pensar en una manera de introducir al estudiante en esta temática de forma significativa, razón por la que se ha escogido el arte como un medio para acercar al estudiante a las transformaciones isométricas y sus diversas propiedades.

En este sentido se establece que las relaciones entre las matemáticas y el arte son muchas, pues los trabajos de diversos artistas tienen sus bases e inspiraciones sobre las matemáticas, del mismo modo, ésta se ha usado para analizar diferentes expresiones artísticas tales como la música, la arquitectura y la pintura entre otras. Así mismo reconoce que las representaciones artísticas constituyen un recurso didáctico que sirve tanto para desarrollar conceptos matemáticos de una manera visual e innovadora, como para contextualizar los contenidos curriculares de las matemáticas, pues es un camino ideal para que los estudiantes comprendan los conocimientos, tal como lo expone Vallejo (2011). Dado que en numerosas pinturas puede observarse la utilización de la geometría, se reconocen como un recurso de interés que puede ser llevado al aula con el fin de resaltar y aprovechar los contenidos geométricos que desarrolla el pintor, situando así un eje



innovador sobre el cual trabajar la geometría desde la base de un proyecto concreto y viable.

De este modo, a través de algunas pinturas del maestro vallecaucano Omar Rayo (1928-2010) y con uso de un SGD, se propone una situación de aprendizaje que incluirá componentes culturales, contextuales y tecnológicos, sobre los cuales se cree tendrán éxito en términos de potenciar, motivar y enriquecer la construcción del objeto matemático en cuestión.

De acuerdo con el breve panorama descrito anteriormente, surge el siguiente interrogante:

**¿Qué elementos promueven el aprendizaje de las transformaciones isométricas a través del uso de un SGD, con el cual se construyen algunas de las obras del pintor Omar Rayo?**

## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1 Objetivo General**

Promover el aprendizaje de las transformaciones isométricas a través del uso de un SGD con el cual se construyen algunas de las obras del pintor Omar Rayo, en un grupo de estudiantes de grado noveno.

### **1.2.2 Objetivos específicos**

- Abordar el estudio de las transformaciones isométricas con el uso de un SGD.
- Explorar el papel del arte como contexto que favorece la conceptualización de las transformaciones isométricas.
- Reconocer los elementos que promueven el aprendizaje de las transformaciones isométricas.

### 1.3 Justificación

La renovación curricular, que se llevó a cabo en nuestro país a partir de 1976 con la asesoría permanente del Dr. Carlos E. Vasco, hizo un llamado de atención sobre el énfasis que venía dándose a la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, proponiendo como alternativa la llamada “geometría activa”, expuesta y tenida en cuenta en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas de 1998, y es partir de este que se establecen los sistemas geométricos con el desarrollo del pensamiento espacial; el cual se constituye en un conjunto de procesos que construyen, manipulan representaciones de objetos, establecen relaciones entre ellos, y otorgan un lugar especial a las diversas representaciones que generan las transformaciones isométricas. Teniendo en cuenta esto, a continuación se presentarán diferentes posturas que avalan el propósito de este trabajo.

Thaqui (2009) presenta el punto de vista de algunos autores tales como Jackson (1975), Geddes (1992), Dixon (1995) y Edwuard (1993).

Jackson afirma que, en el ámbito curricular el estudio de las transformaciones es fundamental en toda la matemática, pues estas constituyen la aplicación de las funciones en la geometría; y en el ámbito didáctico considera las transformaciones isométricas como generadoras de tareas geométricas que se pueden desarrollar de forma dinámica.

Geddes, por su parte, considera que las transformaciones isométricas tienen una naturaleza dinámica, que le permite al estudiante interesarse por las tareas geométricas de modo que puede acercarse de manera instintiva o automática a estas, lo cual justifica que el estudio de las transformaciones isométricas posibilita realizar procesos de carácter intuitivo e informal.

Y algo semejante trabajan Dixon y Edwuard, pues la enseñanza de las transformaciones isométricas se realiza en un entorno dinámico con el cual desarrollan procesos de visualización en

las construcciones que llevan a cabo en el programa *The Geometer's Sketchpad*, y concluyen que el uso del programa permite a los estudiantes obtener resultados significativos, en comparación con una enseñanza que se desarrolla de manera tradicional. Cabe mencionar que la enseñanza de las transformaciones isométricas de manera interactiva -esto es, usando el computador- lleva al estudiante a comprender el comportamiento y funcionalidad exacta de una transformación.

En cuanto a los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) se expone la importancia y aplicabilidad que tienen los sistemas geométricos y el desarrollo del pensamiento espacial en diferentes ámbitos, ciencias y actividades, y en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) se expone que el estudiante debe poder predecir y comparar resultados de aplicar transformaciones isométricas sobre figuras en situaciones de la matemática y el arte. Razón por la cual se consideró la pintura como un medio para llevar al estudiante, a la construcción de las principales propiedades de las transformaciones isométricas.

Así pues, Basté (citada por Vallejo, 2011) resalta que el arte puede potenciar y llevar al estudiante a intuir nociones geométricas, desarrollar sentimientos y emociones estéticas, es por esto que la contemplación y creación de formas artísticas constituyen uno de los escenarios más adecuados, para la enseñanza y aprendizaje de nociones matemáticas. Del mismo modo, Corrales (citada por Vallejo, 2011) ha dedicado sus estudios a la afinidad entre las áreas de matemáticas y artísticas, con la intención de mostrar la utilidad que tienen las obras de arte a la hora de acercarse a un concepto matemático, es decir, demostrar que las matemáticas que han usado diversos artistas en sus obras, sirven como ejemplos de aplicaciones que podrían retomarse en el aula de clase.

En este sentido, las transformaciones isométricas presentes en las pinturas del Colombiano Omar Rayo, se pueden apreciar, reconocer y resaltar por la estrecha relación entre el arte y la geometría, la cual fundamenta sus bases en un movimiento artístico que se viene desarrollando

desde el renacimiento con León Battista Alberti (1404-1472), cuya intención se centró en la representación sobre el plano del cuadro (plano horizontal y vertical) y luego en el siglo XVI, con el surgimiento de grandes artistas y pintores como Johannes Werner, Luca Pacioli, Francesco Maurolico, Leonardo Da Vinci y Alberto Durero siendo este el primero en representar objetos tridimensionales.

Por otra parte, desde los Lineamientos de Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemática (MEN, 1999) se propone:

*Entender la tecnología como un campo de naturaleza interdisciplinar que constituye un poderoso factor de integración curricular, lo cual se concreta al abordar las actividades tecnológicas escolares que enfrentan a los estudiantes a problemas concretos de su entorno cuya solución no puede darse desde el marco de una sola disciplina. (p. 8-9)*

Siendo importante resaltar que el uso de un SGD en las clases de matemática es cada vez más frecuente, puesto que han sido creados o configurados pensando en la enseñanza y aprendizaje, con la ventaja que permiten explorar y manipular los objetos geométricos a medida que son construidos, realizar conjeturas sobre las propiedades e invarianza de las construcciones.

De este modo y como lo manifiesta Wertsch (citado en Moreno, 2002) “Todo aprendizaje está mediado por instrumentos” (p. 94), se considera válido abordar la enseñanza de las transformaciones isométricas desde un recurso o medio computacional que le permita al estudiante crear una versión del conocimiento, el cual por su naturaleza y contexto requiere una intervención para su interpretación; dicha intervención le corresponde al profesor quien a través de sus planteamientos guía al estudiante a una nueva construcción del saber o en su defecto a una nueva versión de su significado y utilidad (Moreno, 2002).

Ahora bien, teniendo en cuenta que el estudio de la geometría implica tres procesos cognitivos: construcción, visualización y razonamiento, los cuales pueden ser desarrollados de

manera independiente, el presente trabajo se centró en los procesos de construcción y visualización, pues como afirma Duval (1998) la construcción, además de guiar la visualización, establece conexiones, propiedades matemáticas o restricciones técnicas que dependen de las herramientas usadas.

Es por esto, que el software de geometría dinámica GEOGEBRA junto con las obras del pintor Omar Rayo, servirán como mediadores en el desarrollo de un conjunto de actividades para el aprendizaje de las transformaciones isométricas.

### **1.3.1 Antecedentes**

Con el fin de abordar la problemática de interés, se realizó una búsqueda en las bases de datos de la Universidad del Valle de aquellos trabajos o artículos que pudiesen servir de referencia o aporte para orientar y contextualizar la propuesta de este trabajo. Para esto se hizo un rastreo de las siguientes temáticas: relación arte y geometría, diseño de situaciones para el desarrollo del pensamiento espacial a través de las transformaciones geométricas, apoyados en un SGD y un recuento histórico de las transformaciones isométricas.

En cuanto a la relación arte y geometría, Mora (2011) en su trabajo de grado “*Alberto Durero: Relación geometría y experiencia*” expone la significativa relación entre la matemática y el arte, y de manera específica la relación entre la geometría y el arte que estableció el artista Alberto Durero (1471-1528) y cómo desde su tratado de pintura logró abordar problemas de la geometría. Esta relación la enmarca desde la época del renacimiento, en la cual el artista con su gran ingenio y teniendo en cuenta textos matemáticos que le sirvieron de apoyo en la elaboración de su tratado, destaca el por qué a lo largo de su contenido abarca diferentes nociones matemáticas que de cierta forma logran materializar los objetos matemáticos.

Y en “Algunas anotaciones históricas del arte y la matemática” Martínez (2014) muestra momentos históricos en los cuales la relación entre matemática y arte es notoria, presenta concepciones filosóficas y estéticas de los objetos matemáticos y analiza algunas producciones artísticas de pintores medievales y renacentistas que desarrollaron sus obras con base en la geometría. Profundiza en la relación entre la matemática y la pintura con el fin de proporcionar una herramienta didáctica que permita abordar algunas nociones u objetos matemáticos de manera significativa y motivadora.

A partir de estos referentes se hace evidente la existencia de un vínculo entre el arte y la matemática, de modo que este puede servir como contexto para el desarrollo de una propuesta de aprendizaje de las transformaciones isométricas.

Por otra parte, los cambios que traen los avances tecnológicos influyen en la educación, una manera de beneficiarse de estos es integrando las TIC (Tecnologías de la información y la comunicación) al aula de clase, un caso específico es la enseñanza de la matemática de manera que los docentes usen diversas estrategias o situaciones de aprendizaje que estén mediadas por un recurso informático o software.

En este sentido se han elaborado diversos trabajos que le apuestan a los SGD como una alternativa de apoyo que potencia el aprendizaje de los estudiantes, por lo que a continuación se presentan algunos de estos, junto con su aporte para el desarrollo de este trabajo.

Urbano (2010) en “*Transformaciones isométricas en las esculturas de San Agustín y su implementación en el aula con el uso de Cabri*” realizó un diseño de una secuencia didáctica para el grado quinto de la Educación Básica Primaria en las instituciones educativas de San Agustín, permitiendo al estudiante tener un encuentro con la cultura de sus antepasados desde el punto de vista histórico, artístico y geométrico, apoyado en el software Cabri Geometry II Plus.

Evidenciando con dicha secuencia que el grupo indígena del municipio de San Agustín, conocía y usaba las transformaciones isométricas, junto con diferentes figuras geométricas en sus esculturas.

Santacruz (2011) en su trabajo *“Gestión didáctica del profesor y emergencia del arrastre exploratorio en un AGD: El caso de la rotación en educación primaria”* propone una secuencia didáctica enmarcada en la microingeniería didáctica, en la cual se destacan dos factores: el primero es integrar el uso de instrumentos computacionales para mediar el aprendizaje de la transformación isométrica de rotación; y el segundo es resaltar la acción y gestión del profesor frente a la mediación de dichos instrumentos. Además, manifiesta en su trabajo un interés general por contribuir con este a la labor de todos aquellos profesores que desean integrar en sus clases instrumentos computacionales para el aprendizaje de las matemáticas.

Mediante el análisis de la secuencia diseñada en la tesis de Santacruz (2011), en el trabajo de grado *“Aprendizaje de la transformación de rotación en una secuencia didáctica que integra “Cabri Geometry II Plus” en 5° de Educación Básica”*, Riascos y Peña (2012), concluyen que una secuencia didáctica mediada por un AGD, permite a los estudiantes verificar el movimiento (rotación) de las figuras geométricas tras lo que visualiza en la pantalla, y que en compañía del docente logran desarrollar el pensamiento geométrico y matemático junto con la construcción del conocimiento, dado el dinamismo del programa.

Arcila, Bonilla y Cardona (2012), desarrollaron una serie de situaciones ligadas a la construcción geométrica de figuras en el espacio en su trabajo de grado *“Caracterización del uso de las transformaciones de isometría mediante el diseño de una secuencia de problemas abiertos de construcción geométrica con cabri 3d”* con la intención de reconocer aquellos elementos usados por los estudiantes en la construcción de las mismas, concluyendo que es necesario limitar el uso de algunas herramientas, para priorizar el uso de las transformaciones isométricas, lo cual

implica que poco son usadas en los procedimientos de construcción en el espacio y en caso de ser usadas, solo buscan reducir los pasos de construcción, pues en la mayoría de los casos se hace uso de elementos de una o dos dimensiones, sin considerar elementos tridimensionales.

En el trabajo de grado de Campo y Cuene (2011) *“Una secuencia de situaciones didácticas alrededor de la transformación de rotación en un ambiente de geometría dinámica”* llevaron a cabo un estudio experimental con estudiantes de la Educación Básica bajo el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas, la Ingeniería Didáctica y Teoría de la Génesis Instrumental, con el cual se analiza la implementación de una secuencia didáctica y resalta el rol del programa Geogebra frente al trabajo que se realiza con papel y lápiz, de modo que les permite reflexionar sobre la manera como el uso de Geogebra contribuye en la construcción del conocimiento matemático.

De acuerdo con lo expuesto se puede inferir que el uso un SGD o un AGD constituyen un recurso valioso para la enseñanza o aprendizaje de las transformaciones isométricas, puesto que permite al estudiante desarrollar procesos de construcción y visualización.

Finalmente, se realiza un barrido histórico desde los trabajos de Moriena (2006), Santacruz (2011) y Julio (2014), teniendo en cuenta los diferentes factores o elementos que han influido de una manera u otra en el proceso de construcción de las transformaciones isométricas, el lugar que han tenido en diferentes momentos de la historia, así como sus precursores y cambios surgidos en la construcción de dicha noción; de modo que se pueda establecer una postura clara sobre su naturaleza, funcionalidad y aplicación de las mismas. Considerando cuatro momentos especiales en el desarrollo de las transformaciones isométricas: la perspectiva de Euclides, la geometría proyectiva, la geometría analítica y el programa Erlangen de Felix Klein.

Así pues, Euclides (325 a.C. – 265 a C.) en su trabajo logra darle una organización y sistematización a la geometría con la cual se le da el estatus de ciencia deductiva, sin embargo, en



esos tiempos aún no se establece una sistematización de las transformaciones isométricas, pero si se establece la noción de congruencia la cual es fundamental y característica de las transformaciones.

Piaget y García (1980) citados en Santacruz (2011) establecen que:

*En Euclides se estudian las propiedades de las figuras y de los cuerpos geométricos como relaciones internas entre los elementos de dichas figuras o dichos cuerpos. No se toma en consideración el espacio como tal ni por consiguiente las transformaciones de las figuras en el interior de un espacio que las comprenda. (p. 29)*

Se puede decir que Euclides en la cuarta noción común “las figuras que coinciden entre sí son iguales”. Empieza a desarrollar el concepto de congruencia y con este se conservan tanto tamaño como forma, además Euclides usa esta noción para justificar el principio de superposición, el cual le permitió “mover” figuras en el plano sin que cambiaran los elementos antes mencionados. Según Moriena (2006):

*El uso del método de superposición de las figuras, ha dado lugar al debate alrededor del recurso de aplicación de un movimiento o de la idea de desplazamiento natural para superponer las figuras. Estos desplazamientos que intervienen, son desplazamiento de figuras y no transformaciones que operan sobre el espacio como conjuntos de puntos (p. 4)*

En términos de superponer, mover o hacer corresponder dos figuras se definen las transformaciones como un movimiento que asigna a un punto A un punto A' y a un punto B un punto B', de manera que la distancia entre A y B es exactamente igual a la distancia entre A' y B'. Es decir, que en el trabajo de Euclides no se desarrolla la noción de transformación, sino que se establece una correspondencia entre dos figuras que se superponen con el fin de establecer si existe o no una igualdad.

En cuanto al desarrollo de la perspectiva y la geometría proyectiva, la geometría que se estableció en el movimiento cultural conocido con el nombre de Renacimiento durante los siglos

XV y XVI estuvo estrechamente ligada al arte, en especial con la pintura y su propósito principal era representar en el lienzo los objetos de naturaleza tridimensional.

Así mismo en el siglo XVI la geometría mantiene importantes representantes como Johannes Werner, Luca Pacioli, Francesco Mauriloco, Leonardo Davinci y Alberto Durero quien contribuye con su libro de geometría “instrucción en la medida con regla y compás” (1525) a la necesidad de desarrollar diversos métodos y técnicas que les permitieran plasmar la realidad tridimensional, y es a partir de esta necesidad que surge la geometría proyectiva.

Gerard Desargues (1591-1661) usa la perspectiva para desarrollar su teoría sobre las cónicas, las cuales se pueden explicar cómo proyecciones perspectivas de un círculo en un plano no paralelo al plano que contiene al círculo. Pascal (1623-1662) siguiendo a Desargues hace uso de métodos proyectivos para realizar el tratado de las cónicas y las expresa como “Imágenes de la circunferencia del círculo” para lo cual usan la transformación, pues les permite demostrar que una relación verdadera en el círculo lo es en una cónica cualquiera (Moriera, 2006).

Jahn (1998) (citado en Julio, 2014) establece que:

*En este período histórico las transformaciones geométricas aparecen como instrumentos implícitos de transferencia de propiedades. Las únicas transformaciones utilizadas son las proyecciones, pero quedan en el contexto de las cónicas, y no son consideradas como objetos de estudio en sí mismas, sino como simples relaciones entre dos figuras donde prima la noción de invariante. (p. 13)*

En el siglo XVII la geometría analítica fue desarrollada por los matemáticos Fermat (1601-1665) y Descartes (1596-1650) con el fin de resolver problemas geométricos a través del álgebra, estudiar las curvas y superficies con propiedades algebraicas y ecuaciones, esto sobre un sistema coordenado, es decir, sobre un plano que se concibe como un conjunto de puntos asociados a pares ordenados.

Fermat establece una relación analítica entre puntos y coordenadas que permiten reconocer

una correspondencia biyectiva entre, los puntos del plano y sus coordenadas y asocia las ecuaciones a curvas, de manera que se puede vislumbrar una de las propiedades fundamentales de las transformaciones la correspondencia punto a punto de una figura inicial y una figura transformada.

Según Jahn (1998) y los autores Piaget y García en su obra “Psicogénesis e historia de las ciencias” (1983) concluyen que “la noción de transformación tiene su origen innegable en la Geometría Analítica”. (Julio, 2014, p.14)

Más tarde Campos (1994) (citado en Julio, 2014) afirma que en el siglo XVIII Euler había dado lugar a una afirmación muy importante “*Un desplazamiento plano es una rotación, o una traslación, o una traslación seguida de una simetría*” (p.14).

Luego en el siglo XIX los matemáticos retoman los aportes de la geometría proyectiva y establecen propiedades invariantes en las figuras y los aportes hechos por Fermat y Descartes en la época de la geometría analítica al establecer la correspondencia de puntos en un plano.

Es con base en las geometrías antes mencionadas, el aporte de la teoría de grupos y el contexto histórico que demandan las geometrías llevadas a cabo por Bolyai, Lobachevski y Riemann que se inicia el programa Erlangen de Felix Klein hacia el año 1872, el cual se constituye o concibe la geometría mediante transformaciones.

En esa época los matemáticos realizaron diversos trabajos relacionados con las transformaciones las cuales tenían sus aplicaciones en la geometría proyectiva pero aun así fue Poncelet (1788-1867) quien organizó y sistematizó las transformaciones. A partir de este, en el año 1840 Olinde Rodríguez realiza un trabajo bastante interesante para la comunidad matemática en el que prueba que cualquier movimiento rígido es el producto de una rotación y una traslación teniendo en cuenta un eje de rotación, así mismo Moebius (1790-1868) desarrolla el concepto de

simetría, bajo la idea de que una figura es simétrica si puede transformar de una o más formas en otra figura igual a la inicial (Julio, 2014).

Esta recopilación histórica muestra que el inicio de las transformaciones isométricas se dio en el arte y con el pasar de los años la necesidad de plasmar y sistematizar los objetos tridimensionales de la realidad se empieza a establecer propiedades de invarianza, con los cuales se da inicio el concepto de transformación isométrica que utiliza para el desarrollo y aplicación de este trabajo.

En general, se puede decir que en los últimos años se ha desarrollado un interés por realizar trabajos e investigaciones que vinculan la geometría con los recursos computacionales que brinda el avance tecnológico, pero en menor medida se ha buscado relacionar la matemática, en particular la geometría, con el arte. Por lo tanto, se considera importante proponer un conjunto de actividades que vinculen estas disciplinas (la geometría y el arte) como una manera de contextualizar y aplicar un objeto matemático, específicamente en las obras del pintor Omar Rayo, rescatando el valor cultural, no solo en la parte artística y estética sino, también la geometría que tuvo en cuenta para la realización de sus obras.

## **2. CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO**

A continuación, se exponen algunas perspectivas que abordan la relación matemática y arte, haciendo énfasis en la participación activa del estudiante en su proceso de aprendizaje y del profesor como promotor y generador de situaciones y procesos significativos. En este sentido, se tomará como referencia los principales aportes de la teoría constructivista y el aprendizaje significativo, la teoría de la mediación de un SGD en procesos de enseñanza y aprendizaje; y se tratarán algunos vínculos que existen entre la geometría y el arte a nivel epistemológico y didáctico.

### **2.1 Constructivismo e integración de un SGD en el aula de clase**

Díaz y Hernández (1999) reconocen que la educación ha recibido aportes de diferentes ciencias humanas, sociales y corrientes psicológicas cognitivas como: el enfoque psicogenético piagetiano, la teoría de los esquemas cognitivos, la teoría ausubeliana de la asimilación y el aprendizaje significativo, la psicología sociocultural vigotskiana y demás teorías instruccionales; las cuales comparten y aportan que el aprendizaje del estudiante debe darse por medio de la realización de actividades constructivas.

Coll, citado por Díaz y Hernández (1999), pone de manifiesto dos aspectos, en el primero expresa que el constructivismo goza de un proceso instruccional que da paso al aprendizaje significativo, la memorización comprensiva de los contenidos y su funcionalidad; lo cual se concretiza a través de actividades intencionales, planificadas y sistemáticas que propician una actividad mental constructiva.

Así, la consecuencia de esto será un estudiante mentalmente activo que aporta y elabora su conocimiento a partir de lo que le brinda el entorno; y en el segundo aspecto, resalta que la

enseñanza debe orientarse a culturizar a los estudiantes a través de prácticas auténticas (cotidianas, significativas, relevantes en su cultura) con procesos de interacción social similares al aprendizaje artesanal.

Teniendo en cuenta lo mencionado, es importante aclarar que de la teoría del constructivismo se toma sólo aquello que se centra en el desarrollo de las actividades que se proponen para el aprendizaje de las transformaciones isométricas, dado que son estas las que promueven procesos de construcción y visualización, y a su vez establecen conexiones, propiedades matemáticas o restricciones técnicas que dependen de las herramientas usadas (Duval, 1998), en este caso la construcción en Geogebra de algunas obras del pintor Omar Rayo permite integrar la cultura en la enseñanza de las transformaciones isométricas, desde las cuales se contextualiza y rescata el valor cultural que estas aportan a la región, se instruye al estudiante al tiempo que construye un conocimiento, entiende su significado y funcionalidad.

El constructivismo hace énfasis en una educación en la que se enseñe a pensar y a actuar sobre contenidos elocuentes y contextuados que generan un aprendizaje significativo; un aprendizaje en el cual es importante e indispensable que la información que se presenta al estudiante se relacione con su entorno y con sus saberes previos, que exista disposición por aprender y que la naturaleza de los materiales o recursos logren potenciar el significado de un objeto matemático, además de motivar y crear una actitud de disposición frente al saber (Díaz y Hernández, 1999).

Rabardel (citado por Sandoval, 2009) subraya que los instrumentos<sup>4</sup>, son parte esencial en la enseñanza pues estos generan de manera activa la construcción del conocimiento mediante las

---

<sup>4</sup> “un mediador de las relaciones entre el sujeto y el objeto. Constituye un universo intermedio cuya característica principal es pues doblemente adaptarse al sujeto y al objeto, una adaptación en términos de propiedades materiales y también cognoscitivas y semióticas en función del tipo de actividad en el cual el instrumento se inserta o está destinado a insertarse” (Rabardel, 1995, p.72)

acciones que pueda realizar con estos, es decir, que los instrumentos no son solo un elemento auxiliar de la clase. Tal como expresa Santillán (citado en Sandoval, 2009):

*El medio, (...). Es la base material que hace posible las acciones del sujeto, (...). La meta o fin no cambia si utilizamos una u otra herramienta, pero el proceso para alcanzar la meta, según los medios que se utilicen, cambia y cambia la estrategia. La planeación, una actividad cognitiva compleja, queda marcada por la herramienta, (...). La actividad cognitiva es inherente al instrumento (p. 82).*

En relación con el aspecto que se viene desarrollando, cabe destacar que diversos autores (ver, por ejemplo, Laborde y Capponi, 1994; de Villiers, 1995; Balacheff y Kaput, 1996; Mariotti, 2000) empezaron a estudiar e investigar sobre las consecuencias de incluir el uso de los computadores en las aulas de clase. Así Bartolini y Mariotti (2008) describe que la presencia de un computador puede cambiar la manera como se concibe un problema y sus dificultades, mostrar potencialidades en la resolución de un problema y transformar las prácticas rutinarias de la enseñanza.

Los computadores, sus herramientas y programas son recursos intelectuales y expresivos que han generado un realismo matemático, pues los objetos virtuales que aparecen en la pantalla son manipulables de forma que dan una impresión de existencia material, es decir, como modelos o representaciones de los objetos matemáticos a través de los cuales se puede explorar, relacionar y ejecutar ideas acerca del objeto (Moreno, 2002).

Para comprender mejor los sistemas de representación que se dan en una versión informática como un recurso de mediación, conviene resaltar que su principal característica es ser ejecutable por lo tanto se pueden realizar procesos y manipular objetos.

Y son estas características las que prevalecen en un entorno de geometría dinámica pues permiten trasladar figuras conservando sus propiedades y relaciones estructurales, lo cual se puede ver como una manera de manipular el objeto que le otorga un realismo a los objetos

geométricos. (Moreno, 2002).

Acorde con lo anterior cabe mencionar que la enseñanza de la geometría mediada por un SGD brinda diversas opciones de explorar, descubrir, reformular, conjeturar, validar o refutar, sistematizar, otorgando así al estudiante un protagonismo sobre el contenido que se le presenta; es en este sentido que el papel del profesor cambia para hacer las veces de co- partícipe, apoyo y co- aprendiz (González, 2001).

Precisamente ese cambio en el rol del profesor se da por el marco constructivista en el que se integra un SGD pues aparecen diversos factores debidos al cambio en las condiciones de trabajo, tipo de interacción con el software, a las actividades que se proponen, entre otras; los cuales influyen en la enseñanza de manera que ahora el tipo de decisiones que tome el profesor deben estar orientadas a apoyar el progreso del estudiante en su búsqueda, a sugerir otras alternativas ante los posibles errores que cometan los estudiantes, a cuestionar por medio de ejemplos o contraejemplos el desarrollo de sus actividades. (González, 2001).

Sandoval (2009) precisa el aporte de los SGD a la enseñanza de la geometría resaltando que la construcción y el arrastre<sup>55</sup> ayuda al estudiante en la transición de lo que percibe visualmente a lo teórico; además estos ofrecen un campo de exploración con el cual no cuenta una representación que se hace con lápiz y papel, ni tampoco se puede establecer un orden ni una dependencia entre los componentes de una construcción, lo cual es posible con un SGD, dándole así al profesor y al estudiante la posibilidad de ir y volver en el proceso con el fin de detectar posibles errores, validar una hipótesis o formular conjeturas.

Ahora bien, retomando que el conjunto de actividades de este trabajo se acoge bajo la teoría

---

<sup>5</sup> El arte permite la modificación directa de la forma o posición de los objetos geométricos construidos por el usuario mediante el uso del ratón (o algún otro periférico de la computadora) sin que se dejen de preservar las relaciones geométricas con las que fueron construidos. (Larios, (s.f.), p.1)



constructivista, el uso del SGD Geogebra estará acompañado de otro recurso didáctico como lo son las artes plásticas, en particular las obras del artista colombiano Omar Rayo, como una manera concreta y contextualizada de acercar a los estudiantes a diversos objetos geométricos.

En aras de crear las actividades con un enfoque interdisciplinar e implementarlas en el aula, el profesor tiene la responsabilidad de extraer y apropiarse de todas las posibilidades que brinda el arte observar, apreciar, desarrollar la creatividad, expresar emociones, establecer relaciones entre los elementos que componen la obra de arte.

El arte como mediador entre el ser humano y su estructura racional, afectiva y psicomotriz, lo faculta para aprender y apropiarse de experiencias que repetidas o dadas en momentos específicos disparan dispositivos diversos que conectan una situación con otra o que detallan un momento clave en su desarrollo, (...). Cualquier acercamiento a una obra estética, (...). Genera un apego al artista o a la obra misma, o por el contrario, cierto desacuerdo. En cualquiera de los dos casos existe una interacción y una aproximación a una realidad que activa los sistemas neuronales y posibilita aprender o enseñar (Parra, 2015, p.100-101).

Estas observaciones se relacionan con las propuestas de Alsina, Crooks y Alibali, citados por Antón y Gómez (2016) los cuales establecen que el estudiante tiene unas necesidades para poder desarrollar el pensamiento geométrico; observar el entorno, manipular objetos, simular situaciones reales y trabajar en grupo. Estos factores están reunidos en la expresión artística de modo que a través de esta se favorece la adquisición de los objetos geométricos.

Mora (2007) establece, que para abordar un contenido geométrico el arte constituye una herramienta esencial, pues el conocimiento se puede desarrollar en un contexto conocido y agradable para el estudiante, lo cual le permite interpretar la realidad, dar sentido al objeto matemático, experimentar y construir relaciones entre los conocimientos previos y el que ahora se intenta construir.

## **2.2 Dimensión disciplinar de las transformaciones isométricas**

En este apartado se considerarán todos los aspectos matemáticos de las transformaciones

isométricas que fundamentan el conjunto de actividades y los propósitos que se quieren lograr con su puesta en práctica, de manera que los estudiantes de grado noveno visualicen y construyan las transformaciones isométricas que se encuentran en las pinturas de Omar Rayo.

Dado lo anterior se establecen a continuación la conceptualización y caracterización de las transformaciones isométricas en el plano euclidiano, la congruencia de polígonos, las definiciones, teoremas, corolarios o propiedades que fundamenten desde la matemática esta propuesta de aprendizaje.

### **2.2.1 Transformaciones en el plano euclidiano**

La geometría activa propone el estudio de las transformaciones isométricas en términos de movimientos o desplazamientos sobre el plano euclidiano, acorde con esto se dará una mirada sobre aquellas posturas que concuerden con los objetivos que esta propone.

Moya (s.f) expresa que un movimiento es una transformación en el plano que conserva las distancias y los ángulos, es decir, que al mover o desplazar una figura esta ha de mantener su forma y su tamaño. Además, expone que las transformaciones que conservan las dimensiones se les denominan movimientos o isometrías.

Se puede establecer entonces, que un movimiento sobre el plano es una transformación que conserva la distancia entre pares de puntos, de modo que a cada punto A le corresponde un único punto A' y un punto B un único punto B', así la distancia  $(d(\overline{AB}) = d(\overline{A'B'}))$ .

De Villiers (1996) retoma la postura de Felix Klein y su programa Erlangen de 1972 para establecer que la geometría es sistemática y que por tanto se puede hablar de la geometría como un estudio de propiedades que permanecen invariantes bajo grupos de transformaciones, a las cuales por conservar las distancias y ángulos se les otorga el nombre de transformaciones isométricas.

Es así que el conjunto de actividades se enmarca en una geometría de las transformaciones isométricas, las cuales se conciben como un grupo sobre el plano euclidiano por mantener invariante las partes de una figura, lo cual da lugar a otro objeto importante para el desarrollo de dicha situación, la congruencia.

### 2.2.2 Congruencia

Las transformaciones isométricas que se realizan sobre cualquier tipo de figura geométrica permiten conservar su forma y su métrica, en este sentido Garzón y Valoyes, 2005 (citado en Santacruz, 2011) expresan que:

*... Es posible decir que dos figuras son congruentes si al mover una de ellas en el espacio, coincide con la segunda. Esta coincidencia incluye todos sus elementos constitutivos. La noción de congruencia así propuesta contempla el movimiento de las figuras, situación que no fue considerada en el trabajo euclidiano y que viene a ser resuelta posteriormente por Hilbert con la inclusión de los denominados axiomas de movimiento. (p. 29)*

Es así que, las traslaciones, rotaciones y simetrías son movimientos en el plano euclidiano que permiten conservar la métrica y la distancia entre puntos lo cual termina siendo una congruencia entre figuras que han sido desplazadas.

Dado lo anterior, se hace un recuento de los principales postulados, definiciones y teoremas que garantizan la congruencia entre figuras geométricas correspondientes; esto será bajo lo establecido por Moise y Downs (1989) en su libro “*Geometría Moderna*”.

**Definición:** Dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son congruentes, lo cual se simboliza  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  si sus lados correspondientes son congruentes y sus ángulos correspondientes también lo son, es decir si cumplen las siguientes congruencias:

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}; \overline{AC} \cong \overline{A'C'}; \overline{BC} \cong \overline{B'C'}$$

$$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'; \sphericalangle BCA \cong \sphericalangle B'C'A'; \sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'A'B'$$

**Postulado lado ángulo lado (LAL):** Dos triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  son congruentes si  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ,  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$  y  $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ .

**Teorema Ángulo Lado Ángulo (ALA):** Dos triángulos son congruentes si  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ,  $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$  y  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ .

**Teorema Lado Lado Lado (LLL):** Dos triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  son congruentes si  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ,  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$  y  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ .

**Teorema:** Si en un triángulo se tienen dos ángulos congruentes entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.

**Teorema:** Si un triángulo tiene dos lados congruentes entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.

**Corolario:** Un triángulo es equiángulo si y solamente si es equilátero.

**Definición:** Dos polígonos son congruentes si sus lados y ángulos correspondientes son congruentes.

### 2.2.3 Transformaciones isométricas

En adelante, las definiciones, teoremas y corolarios que corresponden a este apartado se toman como referencia del libro “Geometría Moderna” de Moise y Downs (1989). En el cual se establece que “Una transformación en un plano  $\Pi$  es una función biyectiva<sup>6</sup>  $f: \Pi \rightarrow \Pi$  del plano en sí mismo. Notaremos la imagen de un punto  $X$ ,  $(X)$  por  $X'$ .”

Las transformaciones isométricas también reciben el nombre de movimientos rígidos en el plano los cuales garantizan congruencia, de manera que si los puntos  $(P$  y  $P')$  y  $(Q$  y  $Q')$  son pares de puntos correspondientes entonces determinan los segmentos  $PQ \cong P'Q'$  son congruentes (Wiley

---

<sup>6</sup> Una función  $f: X \rightarrow Y$  es biyectiva si al mismo tiempo es inyectiva y sobreyectiva, es decir, para dos elementos  $x$  y  $y$  del dominio de  $f$  se cumple que  $x_1 \neq x_2$  entonces  $f(x_1) \neq f(x_2)$  y si para todo elemento  $y$  de  $Y$  existe un  $x$  en  $X$  talque  $f(x) = y$ .

& Sons, 1971)

Sea  $(X, Y)$  la distancia entre dos puntos  $X$  y  $Y$ . Una transformación  $f$  definida en un plano  $\Pi$  es una isometría si se cumple que  $(X, Y) = (f(X), f(Y))$  para todo par de puntos  $X$  y  $Y$  pertenecientes a  $\Pi$ .

Hacen parte de los movimientos rígidos las traslaciones, las rotaciones y las simetrías. En cuanto a las simetrías existen dos tipos, simetría axial y simetría central siendo la primera la que se tratará en el conjunto de actividades.

### **Traslaciones**

**Definición:** Una traslación es un movimiento definido mediante un vector  $\vec{v}$  que transforma cualquier punto en otro de forma que el vector  $\overrightarrow{PP'}$  tiene el mismo módulo, dirección y sentido que  $\vec{v}$ .

**Teorema 1:** Toda traslación es una isometría.

Demostración.

Sea  $l$  una recta del plano  $\Pi$  y  $d$  un número real positivo. Sean  $P, Q \in l$  tales que  $d = \overline{PQ}$ , y la traslación  $T_{\overrightarrow{PQ}}$  definida sobre  $\Pi$ . Demostraremos que para dos puntos distintos  $X, Y \in \Pi$  al aplicar la traslación  $T_{\overrightarrow{PQ}}$  sobre  $X, Y$  se cumple  $XY \cong X'Y'$ . La traslación  $T_{\overrightarrow{PQ}}$  transforma a  $X$ , en la orientación  $\overrightarrow{PQ}$ , en un punto  $X'$  donde  $\overline{XX'} = d$ . Análogamente  $T_{\overrightarrow{PQ}}$  transforma a  $Y$  en la orientación  $\overrightarrow{PQ}$  en un punto  $Y'$  donde  $\overline{YY'} = d$ . Luego  $T_{\overrightarrow{PQ}}$  envía a un segmento  $\overline{XY}$  en  $\overline{X'Y'}$ . Se cumple entonces que  $\overline{XX'} = d, \overline{YY'} = d, \overline{XX'} \parallel l, \overline{YY'} \parallel l$ . Entonces el cuadrilátero  $XX'Y'Y$  es un paralelogramo, por tener dos lados opuestos paralelos y congruentes, por lo tanto  $\overline{XY} \parallel \overline{X'Y'}$  y  $\overline{XY} \cong \overline{X'Y'}$ . Por tanto, la traslación  $T_{\overrightarrow{PQ}}$  es una isometría.

Como consecuencia del teorema anterior y de los resultados mencionados de las isometrías se tienen los siguientes corolarios.

**Corolario 1:** Un ángulo  $XYZ$  y su imagen  $X'Y'Z'$  son congruentes al aplicar una traslación  $TPQ$ , esto es  $(\angle XYZ) = \angle X'Y'Z'$ , donde  $\angle XYZ \cong \angle X'Y'Z'$ .

**Corolario 2:** Un polígono  $P$  y su imagen  $P'$  son congruentes al aplicar una traslación  $TPQ$ , esto es  $TPQ(P) = P'$ , donde  $P \cong P'$ .

**Corolario 3:** Una circunferencia  $C$  y su imagen  $C'$  son congruentes al aplicar una traslación  $TPQ$ , esto es  $(C) = C'$ , donde  $C \cong C'$ .

**Teorema 2:** La composición de dos traslaciones es una traslación.

**Teorema 3:** En un plano, el conjunto de las traslaciones junto con la composición es un grupo abeliano.

Demostración

Sea  $\mu$  el conjunto de todas las traslaciones del plano. Por el teorema anterior se tiene que  $\mu$  es cerrado con la operación de composición de traslaciones. Ahora bien, es claro que la composición de traslaciones es conmutativa y asociativa, la función identidad es una traslación y corresponde a la identidad de las traslaciones, cada traslación tiene inversa. Por lo tanto, el conjunto de las traslaciones junto con la operación de composición  $(\mu, \circ)$  es un grupo abeliano.

## **Rotaciones**

**Definición:** Una Rotación de centro  $O$  y ángulo  $\alpha$  es el movimiento que asocia a cada punto  $P$  otro  $P'$ , situado a la misma distancia de  $O$  que el punto  $P$  de forma que el ángulo  $\angle POP' = \alpha$ . Y se denota  $R(O, \alpha)$ .

**Teorema 4:** Toda rotación es una isometría.

**Corolario 4:** Un ángulo  $XYZ$  y su imagen  $X'Y'Z'$  son congruentes al aplicar una rotación  $(O, \alpha)$ , esto es  $(O, \alpha)(\angle XYZ) = \angle X'Y'Z'$ , donde  $\angle XYZ \cong \angle X'Y'Z'$ .

**Corolario 5:** Un polígono  $P$  y su imagen  $P'$  son congruentes al aplicar una rotación  $(O, \alpha)$ ,

esto es  $(O, \alpha)(P) = P'$ , donde  $P \cong P'$ .

**Corolario 6:** Una circunferencia  $C$  y su imagen  $C'$  son congruentes al aplicar una rotación  $(O, \alpha)$ , esto es  $(O, \alpha)(C) = C'$ , donde  $C \cong C'$ .

**Teorema 5:** La imagen de una recta al aplicar una rotación es otra recta. El ángulo que se forma entre ellas dos es igual al ángulo de rotación.

**Teorema 6:** La composición de dos rotaciones con centro común es una rotación con el mismo centro y la medida de su ángulo será la suma de sus ángulos.

**Teorema 7:** En un plano el conjunto de las rotaciones con el mismo centro, junto con la composición es un grupo abeliano.

### **Simetría Axial**

**Definición:** Es un movimiento que asocia a cada punto  $P$  otro punto  $P'$  de forma que el segmento  $\overline{PP'}$  es perpendicular a la recta  $r$  y, además, las distancias de  $P$  y  $P'$  a  $r$  son iguales; es decir, la recta  $r$  es la mediatriz del segmento  $\overline{PP'}$ .

**Teorema 8:** Una simetría axial es una isometría.

**Corolario 7:** Un ángulo  $\angle XYZ$  y su imagen  $\angle X'Y'Z'$  son congruentes al aplicar una simetría axial  $Sl$ , esto es  $\angle XYZ = \angle X'Y'Z'$ , donde  $\angle XYZ \cong \angle X'Y'Z'$ .

**Corolario 8:** Un polígono  $P$  y su imagen  $P'$  son congruentes al aplicar una simetría axial  $Sl$ , esto es  $P = P'$ , donde  $P \cong P'$ .

**Corolario 9:** Una circunferencia  $C$  y su imagen  $C'$  son congruentes al aplicar una simetría axial  $Sl$ , esto es  $C = C'$ , donde  $C \cong C'$ .

**Teorema 9:** Dadas dos simetrías  $Sl$  y  $Sm$ , y  $O$  el punto de intersección de las rectas  $l$  y  $m$ , entonces  $Sl \circ Sm = (O, 2\alpha)$ , en sentido horario.

**Corolario 10:** La composición de dos simetrías axiales con ejes secantes, es una rotación cuyo centro queda determinado por la intersección de los dos ejes y con un ángulo igual a dos veces el ángulo que forman entre ellos.

**Corolario 11:** Toda rotación se puede descomponer en dos simetrías axiales donde el centro de rotación es la intersección de los dos ejes de simetría, y el ángulo entre ellos es la mitad del ángulo de rotación.

**Corolario 12:** Si los dos ejes de simetría son perpendiculares obtenemos una rotación con un ángulo igual a  $180^\circ$ , esta composición es una simetría central de centro  $O$ . El centro es el punto de intersección de las rectas.

**Teorema 10:** Si los dos ejes de simetría axiales son paralelos es equivalente a una traslación donde la recta de traslación es perpendicular a los dos ejes de simetría y su medida es dos veces la distancia entre los ejes.

**Teorema 11:** Teorema Fundamental de las transformaciones y la congruencia

Dos triángulos son congruentes, si y sólo si, uno es la imagen del otro al aplicar una isometría.

**Teorema 12:** Dos polígonos son congruentes si y sólo si uno es la imagen del otro al aplicar una isometría.

### 2.3 Dimensión didáctica de las transformaciones isométricas

Teniendo en cuenta que lo que se quiere lograr con este trabajo es promover el aprendizaje de las transformaciones isométricas a partir del diseño e implementación de un conjunto de actividades, se hace necesario establecer los fundamentos didácticos que guían la construcción del mismo. Considerando conveniente precisar sobre los siguientes aspectos: el lugar que ocupa el objeto matemático en el Bachillerato Internacional, el aporte del arte como



elemento motivador y el lugar del software en el aula de clase.

### **2.3.1 Principios a la práctica del Bachillerato Internacional**

De acuerdo con la guía “El programa de los años intermedios: de los principios a la práctica<sup>7</sup>” de la Organización del Bachillerato Internacional, el PAI está dirigido a jóvenes cuyas edades estén entre los 11 y 16 años, etapa en la que los estudiantes están definiendo su identidad y consolidando su autoestima, dado que para dicho programa los logros académicos de los estudiantes están estrechamente relacionados con su bienestar personal, social y emocional; factores por los cuales el programa ofrece a los estudiantes la oportunidad de desarrollar su potencial, explorar sus propias preferencias de aprendizaje, afrontar riesgos adecuados y desarrollar una sólida noción de identidad personal y reflexionar sobre ella.

El PAI en búsqueda del desarrollo de las habilidades y actitudes, la comprensión de conceptos y la adquisición de los conocimientos necesarios para participar en una sociedad cada vez más globalizada, se guía por tres principios: aprendizaje holístico, conciencia intercultural y comunicación.

Además, el PAI proporciona una Guía de Matemáticas en la que se proponen cuatro ramas de estudio: números y operaciones, álgebra, geometría y trigonometría, y estadística y probabilidad.

Los cuales sirven como referencia para la elaboración del currículo del colegio y la planificación de los cursos de matemáticas, es decir, el colegio tiene la potestad de organizar las ramas de estudio de acuerdo con las necesidades de la comunidad educativa.

En relación con la rama geometría y trigonometría, el currículo escrito del colegio (Anexo A) ha definido que la enseñanza de las transformaciones isométricas debe abordarse en el quinto

---

<sup>7</sup> Organización del Bachillerato Internacional. (2014).

año del programa, equivalente al grado noveno del sistema educativo de nuestro país, cuya educación está guiada por Los Lineamientos curriculares (MEN 1998) desde los cuales se proponen tres aspectos que guían la constitución de un currículo y por ende de situaciones y propuestas de aula que permitan brindarle al estudiante un aprendizaje significativo.

El diseño de las actividades se centra en procesos de comunicación, razonamiento y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos; el contexto de las situaciones problema o actividades propuestas se desarrollará en términos de la misma matemática y del arte, los conocimientos que se desean trabajar están enmarcados desde el pensamiento espacial y los sistemas geométricos.

Un factor importante que se menciona en los Lineamientos Curriculares está dado a partir del contexto, pues este constituye un escenario esencial para el papel y la intervención del profesor en la implementación de las actividades, este debe potenciar y aprovechar dicho escenario de manera que le permita modificar y enriquecer dichas actividades en beneficio de la clase y del estudiante; en este sentido el op-art y la introducción de objetos geométricos en las obras de Omar Rayo constituyen un contexto adecuado y cercano a los estudiantes que permite retomar diversos objetos geométricos que ya se hubiesen trabajado en grados anteriores y por supuesto potenciar el aprendizaje de las transformaciones isométricas.

Además de lo anterior los Lineamientos Curriculares también han considerado la influencia de las tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en estos se estima que el profesor a de capacitarse, investigar y desarrollar diferentes conocimientos para integrar y dar un uso efectivo a las tecnologías; en términos de aprendizaje consideran que el uso de computadores y software afecta de manera positiva al estudiante pues ha generado que temas de la geometría u otras ramas de la matemática sean más accesibles e importantes para los mismos. Sin embargo, se deja claro

que antes de introducir la tecnología al aula se debe reflexionar en el conocimiento que se quiere enseñar desde la disciplina misma y desde su transposición.

### 2.3.2 Aportes históricos y didácticos del arte

Con el fin de analizar las obras del pintor Omar Rayo se hace necesario definir el “arte geométrico” y la geometría que usa para lograr su objetivo. De esta manera el arte geométrico se puede establecer como una expresión artística que se vale únicamente de formas geométricas para representar visualmente todo aquello que se quiere expresar. (Franco, 2003)

Al intentar definir el arte geométrico surgen otros términos y definiciones relacionados tales como: geométrico o geometría que pueden acercarse al objetivo que se quiere llevar a cabo. De esta manera se define:

*Geométrico: Ref. a la geometría// Fiel, preciso, riguroso//Se dice de la decoración a la base de líneas rectas y curvas, reproduciendo figuras geométricas. (BORGES, J. L. 1994. “Diccionario Enciclopédico”. Ed. Grijalbo. Barcelona, p. 873. Citado en Franco, 2003)*

*También se llama geometría a la presencia implícita de figuras geométricas en la construcción, o con otras palabras, a la disposición general de un conjunto plástico que tiende hacia ciertas figuras sin que estén expresamente representadas. Esta geometría interna ha sido objeto de muy numerosos estudios, que ponen a la vista la estructura de un cuadro cuyos puntos fuertes se encuentran colocados en los vértices de un polígono, o en una espiral, o en líneas oblicuas paralelas, etc. (SOURIAU, E. 1990. “Diccionario Akal de Estética”. Ed. Akal. Madrid, p. 617. Citado en Franco 2003).*

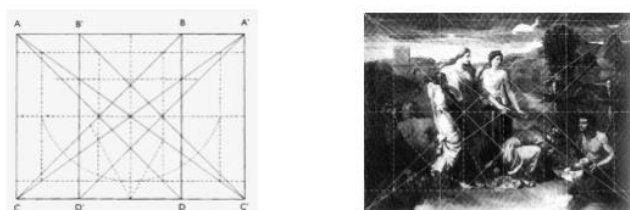
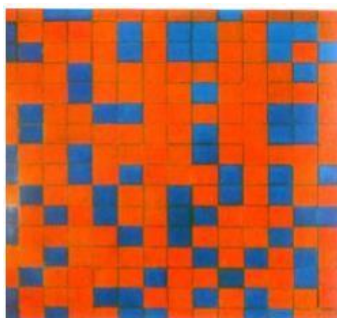


Figura 1. Cuadro de Poussin, ilustra el uso de la geometría como estructura interna en una obra de arte.

La geometría en el arte puede ser usada de manera implícita si se toma como estructura de obras figurativas o como un motivo plástico en sí, y de manera explícita cuando se observa la

intencionalidad de representar formas geométricas. Piet Mondrian fue uno de los primeros artistas en dejar clara la evidencia de formas geométricas en sus obras y es a partir de él que se empieza a considerar el arte geométrico en la pintura.



*Figura 2. Piet Mondrian "Composición de ajedrez en colores oscuros" Tomado de Franco (2003)*

Franco (2003) infiere que existe diferencia entre lo geométrico y la geometría, el primero se refiere a una manera o medio de expresar y representar las figuras y el espacio, y es en la representación que puede utilizar, o no, los elementos o atributos que brinda la geometría, y está por su parte, es una ciencia que estudia el espacio, las figuras, formas y relaciones métricas. Es decir, el arte geométrico se vale o apropia de los atributos de la geometría para expresar el contenido deseado. Cabe rescatar de esta diferenciación, que los signos visuales sobre los que trabajan o tratan la geometría y el arte geométrico son los mismos.

Elementos por los cuales se cataloga el trabajo de Omar Rayo como un exponente del arte geométrico desde el movimiento Op-art.

El Op-art es un movimiento artístico que surge a finales de los años 50 y se define en el año 1965 en el Museo de Arte Moderno de Nueva York en la exposición titulada The Responsive Eye, la cual agrupaba un grupo de artistas seguidores de este movimiento Bridget Riley, Ellsworth Kelly entre otros. La finalidad de esta tendencia es producir la sensación de movimiento en la superficie del cuadro por medio de formas simples, uso de colores y sombras que ante el ojo humano determinan espacios tridimensionales (Zuza, s.f)

Victor Vasarely, Josef Albers y Maurits C. Escher fueron los pioneros de este movimiento explorando en sus obras diversas formas y métodos de generar la sensación de movimiento o vibración en sus cuadros. El Op-art a diferencia de otras corrientes o movimientos artísticos no tiene la intención de transmitir o plasmar un aspecto emocional en sus obras, pues el observador debe interactuar y moverse desde diferentes ángulos para poder captar el efecto óptico de la obra.

Los elementos dominantes del arte óptico son: líneas paralelas rectas o sinuosas, contrastes cromáticos marcados, ya sean, poli o bi-cromáticos, cambios de forma o tamaño, la combinación o repetición de formas o figuras, también utiliza figuras geométricas como rectángulos, cuadrados, triángulos o círculos (Zuza, s.f). Hay quienes consideran que el arte óptico surge como una variación o interpretación de la abstracción geométrica y que sus bases tienen principios científicos y estructuras repetitivas para crear ciertos efectos en el observador.

Ahora bien, desde el punto de vista didáctico del sistema educativo de nuestro país, en la Educación Artística se proponen situaciones de aprendizaje siguiendo unas competencias: sensibilidad, apreciación estética y comunicación. Tres tipos de procesos a través de los cuales se adquieren dichas competencias: recepción, creación y socialización. Ésto enmarcado en un contexto bien sea cultural, social o ambos.

De esta forma, la apreciación estética permite al estudiante efectuar operaciones de abstracción, distinción, categorización y generalización, referidas al mundo artístico y a la obra de arte. Mediante ella es posible acceder a los distintos objetos, códigos, mecanismos y finalidades que los lenguajes artísticos y la cultura han construido históricamente en las Orientaciones Pedagógicas para la Educación Artística en Básica y Media (2010).

Retomando la idea del párrafo anterior la interpretación formal ha de desarrollarse por medio de habilidades y actitudes para la observación de las relaciones espaciales y geométricas,

que permitan crear hipótesis y maneras de representar dichas relaciones o regularidades que se han observado. Además, las Orientaciones Pedagógicas para la Educación Artística en Básica y Media (2010) manifiestan que tanto en la composición como en la construcción de las obras plásticas se tienen en cuenta relaciones espaciales, composiciones geométricas, referencias de movimientos y desplazamientos internos de la obra.

De este modo al poner en manifiesto la apreciación estética e intentar comunicar lo que el estudiante ha logrado identificar en una obra pueden establecer relaciones o parámetros, así como un patrón de repetición o variación en una figura, para poder establecer este tipo de aspectos el estudiante puede predecir, comparar, calcular o estimar posibles resultados.

Se considera que el trabajo del arte en relación con otras áreas contribuye a la construcción y fortalecimiento de discursos críticos y reflexivos, a establecer opiniones acerca del papel social e integrador del arte con respecto a los procesos educativos, lo cual conlleva a desarrollar en los estudiantes una identidad, sentido de pertinencia y conservación del legado cultural y artístico.

En cuanto a los procesos de evaluación la Educación Artística es flexible pues está se adapta a la implementación de diferentes metodologías, se puede configurar y reconfigurar teniendo en cuenta el contexto en el que se lleve a cabo, los propósitos y el enfoque sociocultural y pedagógico de la institución educativa.

Ros (2004) afirma que existe un lenguaje artístico, y que su adquisición implica conocer sus formas sintácticas, semánticas y pragmáticas. Lo cual desarrolla procesos de abstracción y pensamiento crítico, de modo que al apropiarse de estos conocimientos permite a los estudiantes realizar sus propias obras de arte, además se capacitan para apreciar y tomar una postura crítica frente a las obras o expresiones artísticas de los demás compañeros, artistas locales o nacionales.

En la elaboración del conjunto de actividades se ha considerado cada uno de los elementos

que se han mencionado anteriormente con el fin de que el estudiante al cabo de la implementación de dicha situación esté en la capacidad de comunicar, apreciar y crear una obra pictórica en la que dé cuenta de las transformaciones isométricas en el plano.

### 2.3.3 Dificultades en el proceso de aprendizaje de las transformaciones isométricas.

Se han realizado diversos trabajos cuyo discurso se desarrolla en torno a las transformaciones isométricas, en estos se reconocen una serie de dificultades que con frecuencia se generan en el proceso de aprendizaje de los estudiantes a la hora de abordar dicho contenido.

Autores como Thomas Kidder, Perhan, Schultz (1978), Moyer (1977) y Kuchemann (1981), han realizado investigaciones sobre las dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las isometrías en el plano o transformaciones, tal como lo plantea Julio, (2014).

Haciendo alusión a la tesis doctoral de Jaime, A (1996), expone una recopilación de las dificultades que presentan los estudiantes al realizar una transformación isométrica (Julio, 2014):

*Tabla 1.*

Dificultades de los estudiantes en el estudio de las transformaciones isométricas.

Traslaciones	Rotaciones	Simetría
No definen la distancia entre el objeto y su imagen.	No establecen un ángulo de rotación.	No determinan que el eje de simetría equidista de los puntos de la figura y su imagen.
No establecen la dirección del movimiento.	No se conservan las medidas entre la figura y su imagen.	No reconocen la perpendicularidad del segmento que une un punto y su homólogo con respecto al eje de simetría.
No hay uso de un lenguaje apropiado, ni de representaciones simbólicas.	No establecen un centro de rotación y la equidistancia.	Trazan una imagen paralela a la figura inicial, aunque ésta no sea paralela al eje de simetría.
		Desplazan en forma horizontal o vertical la figura aunque el eje de simetría esté inclinado.

Además de las dificultades que presenta el estudiante en el momento de enfrentarse al tema de transformaciones se considera que hay otros factores que influyen en su aprendizaje, Sordo

(2005) manifiesta que:

- El trabajo en el aula sería un poco más accesible si se trabajaran otro tipo de geometrías que ayuden a complementar la manera como se concibe el espacio.
- En la enseñanza de la geometría en primaria hay exceso de aritmetización a tal punto que el estudiante lo tiene instaurado en su contrato didáctico, se hace difícil cambiar esta perspectiva, además afecta una geometría que puede ser dinámica y la convierte en procesos de resolver algoritmos y problemas de aritmética.
- Al estudiante de primaria no se le exige un uso adecuado del lenguaje ni una rigurosidad en la simbolización de los objetos geométricos.

Teniendo en cuenta que la propuesta de este trabajo está dada desde el enfoque del aprendizaje, cabe aclarar que parte de las dificultades que se han presentado anteriormente tiene sus orígenes en una planeación curricular a la que le falta exigencia en ámbitos como la estructuración y sistematización de conceptos geométricos, y que además puede estar basada en los libros de texto los cuales a su vez pueden estar influenciados por intereses económicos o comerciales. Sin dejar de mencionar que si al realizar la transposición didáctica el profesor no ha limitado sus objetivos e intereses del tema, el estudiante termina adquiriendo un conocimiento voluble carente de rigor (Sordo, 2005).

Dado lo anterior se infiere que las dificultades en el aprendizaje de las transformaciones isométricas están relacionadas con el ámbito matemático y la forma como se enseñan, por lo cual serán tenidas en cuenta para el diseño, puesta en práctica y análisis de este trabajo, con el propósito de minimizar estos factores y lograr un aprendizaje significativo.

#### **2.3.4 El uso de un SGD en el aula**

Como ya se había mencionado anteriormente y teniendo en cuenta que el rol del profesor



es un aspecto fundamental en la implementación de la situación de aprendizaje, es de resaltar que la integración de la tecnología en el aula otorga al profesor la oportunidad y la responsabilidad de capacitarse para afrontar los cambios en la planificación de las actividades.

Dicha capacidad debe extenderse al punto de dirigir u orquestar a diversos estudiantes o grupos de estudiantes en un mismo momento, a intervenir en momentos claves, diagnosticar y prever posibles dificultades, así como realizar las pertinentes retroalimentaciones. Si bien la tecnología juega un papel importante, este se hace secundario frente al papel protagónico de quien dirige y organiza, el profesor (Sordo, 2005).

En palabras de Coll (2008) no es en la implementación de las TIC y en sus potencialidades que se genera un aprendizaje significativo, sino en las actividades que lleven a cabo el profesor y sus estudiantes en tanto que estén mediadas por una comunicación, intercambio y procesamiento efectivo de información que ofrecen las TIC y sobre las cuales se debe sacar provecho. Es decir, que su integración esté fundamentada en las potencialidades que esta puede ofrecer de modo que se impulsen nuevas formas de aprender, que no se trate de hacer lo mismo pero con mayor eficiencia sino de hacer cosas que antes no eran posibles por la falta de las TIC.

Para la implementación del conjunto de actividades se seleccionó el software de geometría dinámica Geogebra, el cual permite trabajar no solo en una vista gráfica para el trabajo de la geometría euclidiana, sino que también cuenta con vista algebraica, vista 2D y 3D, cálculo de probabilidad, hoja de cálculo entre otras vistas y funciones.

Este software es un elemento clave en el desarrollo de las actividades a través de las cuales se quiere dar cuenta entre otros factores, de los procesos de conjeturación y verificación que realiza el estudiante al interactuar o realizar las transformaciones isométricas a una obra pictórica.

Marrades y Gutiérrez señalan que:

*Los SGD ayudan a los profesores a crear ambientes de aprendizaje donde los estudiantes pueden experimentar, observar la permanencia o falta de permanencia de las propiedades matemáticas, y establecer o verificar las conjeturas mucho más fácilmente que en otros ambientes computacionales o que en el entorno tradicional de lápiz y papel. (2000, p. 95)*

El acercamiento e integración de las TIC se ha realizado desde diferentes áreas de la educación, sin dejar de lado la Educación Artística a la cual le brinda diferentes posibilidades y potencialidades. Estas vienen dadas por los artefactos que brindan ayudas audiovisuales e informáticas de diferentes ámbitos, épocas y lugares de manera que el estudiante puede interactuar con la información que brindan las páginas web de los diversos artistas, museos, blog de grupos y movimientos artísticos, multimedia, entre otras posibilidades que le permiten al estudiante acceder a ambientes diferentes a los locales. (Marrades y Gutiérrez, 2000)

De este modo, los principios a la práctica del Bachillerato Internacional, las Orientaciones Pedagógicas para la Educación Artística en Básica y Media y el uso de un SGD, servirán como guía que fundamentan y delimitan la elaboración de las actividades que se proponen al grado noveno para un aprendizaje significativo de las transformaciones isométricas.

### **3. CAPÍTULO III: METODOLOGÍA**

En este capítulo se presenta el marco metodológico de la investigación, el cual se relacionó con el modelo pedagógico de la institución y las diferentes etapas y fases que lo conforman, se describe tanto la población como las actividades con sus respectivos objetivos, Applets y puesta en práctica.

#### **3.1 Modelo pedagógico del Bachillerato Internacional e investigación cualitativa.**

Dado que la puesta en práctica de este trabajo se llevó a cabo en el colegio “Jardín Tía Nora y Liceo los Alpes SAS” de la ciudad de Cali, el cual hace parte de un modelo educativo conocido como Bachillerato Internacional (BI) que ofrece cuatro programas, entre ellos el Programa de Años Intermedios (PAI) que cuenta con unas exigencias particulares en la enseñanza y aprendizaje de las diferentes áreas descritas más adelante, fue indispensable la apropiación de este modelo educativo para el desarrollo de las actividades y puesta en práctica de las mismas.

Para la Organización del Bachillerato internacional (OBI), “la enseñanza y el aprendizaje surge de una concepción de la educación que celebra las numerosas formas en que las personas trabajan juntas para construir significado y comprender el mundo” (2014, p.12) desde un enfoque constructivista, considerando la indagación, la acción y la reflexión sus principales elementos en la enseñanza y el aprendizaje.

Además, los programas del BI reconocen y valoran el esfuerzo de los estudiantes en la construcción de significado tras el desarrollo de habilidades y aptitudes en contexto, teniendo presente que cada estudiante es un mundo diferente y no deben ser tratados como iguales. (OBI, 2014)

Así pues, este programa educativo se relaciona con el constructivismo por su interés en formar de manera íntegra a los estudiantes. De ahí que la metodología de este trabajo es de tipo

cualitativa en el marco constructivista, según lo plantea Thomas Schwandt en lo expuesto por Álvarez-Gayou. (2003).

La investigación cualitativa busca interpretar, comprender y explicar las interacciones y los significados subjetivos individuales o grupales en su marco de referencia o de contexto, como el constructivista, en el que la verdad de las interpretaciones o explicaciones son producto de la perspectiva, siendo el conocimiento y la verdad creados por la mente y no descubiertos por ella. (Álvarez-Gayou. 2003)

Desde la concepción de Calvache, Pantoja y Hernández (2015) la investigación cualitativa y la educación día a día se enfrentan a retos del actual sistema educativo y las tendencias mundiales, como el enseñar a través de las nuevas tecnologías, siendo necesario:

*Que el estudiante aprenda haciendo su propio aprendizaje, exigiendo un conocimiento como acción transformadora, para de esta manera, hacer referencia a la producción del conocimiento, evitando un conocimiento mecánico, permitiendo un saber contextualizado; sobre todo, una continua deconstrucción y reconstrucción del mismo, que desde una mirada interdisciplinaria conlleve al análisis y resolución de problemas de diferente índole subjetivos e intersubjetivos.*  
(p. 106)

Lo cual implica una reestructuración de la práctica educativa en el sentido constructivista, siendo esta realmente “una teoría sobre aprendizaje y no una descripción del acto de enseñar” (p.48), teniendo en cuenta los siguientes elementos: (Catherine Twomey F. 1996. Citado en Álvarez-Gayou. 2003)

- El aprendizaje no resulta del desarrollo, el aprendizaje es el desarrollo, lo que lleva a que los estudiantes formulen sus propias hipótesis, modelos y los prueben.
- El desequilibrio facilita el aprendizaje, pues los errores hacen parte de las concepciones de los estudiantes, siendo importante su exploración y discusión
- La abstracción reflexiva es la energía del aprendizaje. Implica la necesidad de generar un

espacio para la reflexión escrita entre las experiencias y estrategias.

- El diálogo dentro del salón de clase engendra nuevos pensamientos.
- El aprendizaje precede al desarrollo de estructuras, es decir, que las ideas generadas de los estudiantes son las bases para la generalización en otros contextos.

En general la investigación cualitativa es un proceso cíclico desde lo estructurado y estructurante. Estructurado porque se conforma por diversas etapas, pasos o fases, interconectadas de una manera lógica, secuencial y dinámica; estructurante porque busca métodos y estrategias de enseñanza orientados a despertar el espíritu investigativo en los estudiantes, en el mejoramiento de un hecho social. (Calvache et. al. 2015)

Las fases de una investigación cualitativa están resumidas en cuatro grandes fases, que a su vez están constituidas por diferentes etapas: Preparatoria, Trabajo de campo, Analítica e Informativa (Monje, C. 2011). Todo esto con la finalidad de proporcionar elementos y directrices para el desarrollo del proyecto de investigación.

Primera fase - Preparatoria: conformada por dos etapas: Reflexiva y de Diseño. La etapa Reflexiva se denominó formulación y fundamentación del problema, representa los primeros dos capítulos del trabajo, en los cuales se realizó la elección y formulación de la problemática, revisión y búsqueda de fuentes y bibliografía que sustentó dicha problemática, así como, la elección de un marco teórico que generó un soporte para la elaboración de la propuesta de aprendizaje.

En la etapa de diseño, se realizó la planificación del conjunto de actividades, para un grupo de estudiantes de grado noveno, acerca de la comprensión conceptual de las transformaciones isométricas por medio del análisis y la recreación de algunas de las obras del pintor Omar Rayo empleando el Software de Geometría Dinámica Geogebra y su puesta en práctica.

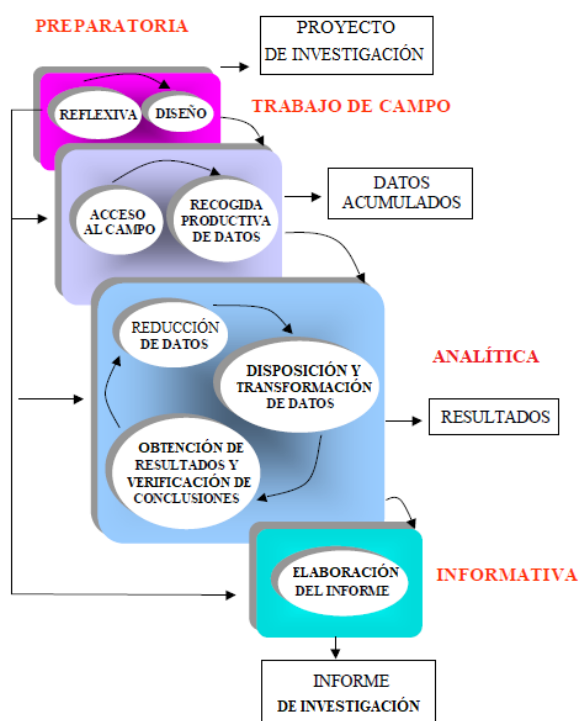


Figura 3. Fases y etapas de la investigación cualitativa<sup>8</sup>

La segunda Fase - Trabajo de Campo: dividida en dos etapas Acceso al campo y Recogida productiva de datos, en este caso la aplicación de las actividades, a partir de las cuales se recopiló la información necesaria por medio de guías que los estudiantes que desarrollaron en cada actividad, protocolos de construcción que brinda el SGD y registros audiovisuales.

Tercera fase – Analítica: corresponde al análisis de los datos, observaciones y experiencias recolectadas en la puesta en práctica de las actividades, para esto fue necesario hacer uso de procesos de cuantificación, en aras de mostrar los datos obtenidos de una manera eficaz y que permitieran validar los objetivos planteados en este trabajo a la luz de lo alcanzado con el desarrollo del conjunto de actividades, y finalmente se realizaron las respectivas conclusiones.

<sup>8</sup>Tomada de: Monje, C. (2011). Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa. Universidad Surcolombiana, Neiva, Colombia

Por último, la cuarta etapa – Informativa, corresponde al presente trabajo terminado.

### **3.2 Descripción de la población**

Las actividades fueron desarrolladas en el colegio “Jardín Tía Nora y Liceo los Alpes SAS” ubicado en la comuna 2, de la ciudad de Santiago de Cali (Valle del Cauca). Esta institución hace parte de la Organización del Bachillerato Internacional reconocida como BI, la cual ofrece diferentes programas de educación, entre estos el Programa de Años Intermedios (PAI), al cual hacen parte los estudiantes de grado noveno con quienes se llevó a cabo la aplicación del conjunto de actividades.

Este grupo contaba con 15 estudiantes cuyas edades oscilaban entre los 13 y 15 años, de modo que las actividades fueron desarrolladas por cada uno de ellos, para ser tenidas en cuenta en el análisis y validación de este trabajo.

### **3.3 Descripción de las actividades**

Apoyados en la teoría del constructivismo se diseñaron un conjunto de actividades, con la finalidad de promover procesos de construcción y visualización en los estudiantes de grado noveno del colegio “Jardín Tía Nora y Liceo los Alpes SAS”, tras la integración de la cultura y el arte a través de las obras del pintor Omar Rayo, con el uso de un SGD Geogebra, para el aprendizaje de las transformaciones isométricas; instruyendo a los estudiantes al tiempo que construyen el conocimiento, reconocen y entienden sus características y funcionalidad.

Para la puesta en práctica de las actividades, con anterioridad los estudiantes contaron con una inducción al SGD Geogebra dirigida por la profesora a cargo de la asignatura de geometría, que les permitió apropiarse del manejo del software y sus principales herramientas.

La propuesta de este trabajo para el aprendizaje de las transformaciones isométricas fue

compuesta por el diseño de cuatro actividades. Las tres primeras desde lo propuesto por Duval (1998) corresponden al acercamiento de los procesos de construcción y visualización de un objeto matemático, en este caso las transformaciones isométricas; dichas actividades se alinearon con la evaluación formativa que dispone el PAI, en la cual el profesor debe proponer e interpretar una variedad de actividades, tareas y situaciones que le permitan analizar el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

La cuarta actividad se propuso en términos de evaluar los conocimientos construidos o alcanzados por los estudiantes, lo que concuerda con la evaluación sumativa propuesta por el PAI, pensada para ofrecer información sobre el nivel de logro de los estudiantes, en relación con los objetivos propuestos.

Dado que el colegio propone tres tipos de evaluación sumativa (evaluación escrita, portafolio y protocolo), para la cuarta actividad se tomaron dos de estos tipos de evaluación. El protocolo que consiste en que el estudiante elabore un producto creativo en el cual aplique los conocimientos adquiridos, y la resolución de la guía de la actividad que hace las veces de evaluación escrita.

Cada una de las actividades contó con su respectiva guía y su diseño se estableció de acuerdo con las exigencias del programa, el cual determina que en el encabezado de cada actividad se especifiquen los siguientes elementos descritos desde la guía “El programa de los años intermedios: de los principios a la práctica” de la Organización del Bachillerato Internacional:

- *Contenidos*: Están determinados por la rama de estudio que corresponda al año o grado de escolaridad.
- *Habilidades*: Son aquellas destrezas que el estudiante desarrolla durante el proceso de



aprendizaje, descritas a partir de cinco enfoques de aprendizaje, centrándose en el enfoque de pensamiento creativo y de transferencia dado que manejan las siguientes habilidades.

Habilidades de pensamiento creativo:

- Crear soluciones novedosas para un problema
- Jugar con las ideas y experimentar
- Practicar la imitación de trabajos centrándose en el proceso creativo
- Emitir juicios intuitivos
- Evaluar las soluciones a los problemas

Habilidades de pensamiento de transferencia:

- Crear proyectos y productos utilizando conocimientos y habilidades adquiridos en las diferentes áreas disciplinarias
- Transferir el conocimiento actual al aprendizaje de nuevas tecnologías
- Tomar decisiones

➤ *Conceptos:* Constituyen un referente para la elección y planeación de los contenidos, en este caso se eligió Cambio pues al realizar una transformación isométrica un objeto tiene una variación en su posición y, espacio porque una transformación isométrica se determina en el marco de unas dimensiones geométricas.

➤ *Criterios a evaluar:*

A, conocimiento y comprensión: Seleccionar las matemáticas apropiadas para resolver problemas en situaciones tanto conocidas como desconocidas

B, investigación de patrones: Describir patrones como reglas generales coherentes con los hallazgos

C, comunicación: Usar lenguaje matemático apropiado (notación, símbolos y terminología) en explicaciones tanto orales como escritas.

D, aplicación de las matemáticas en contextos de la vida real: Aplicar debidamente las estrategias matemáticas seleccionadas para llegar a una solución

- *Nivel de pensamiento:* Permite ubicar los conceptos y contenidos de acuerdo con la apropiación que se tenga de estos, con las actividades propuestas se esperaba alcanzar el nivel de conocimiento y comprensión (Anexo B)
- *Términos de instrucción:* Con estos se definen objetivos, criterios de evaluación y permiten identificar el nivel de pensamiento de los conceptos que adquieren los estudiantes. De esta manera los términos utilizados son:

Construir: Hacer algo utilizando los elementos adecuados.

Escribir: Obtener la respuesta (o respuestas), por lo general, a partir de la información que se puede extraer. Se requieren pocos cálculos o ninguno, y no es necesario mostrar los pasos que se han seguido.

escribir: Exponer detalladamente una situación, evento, patrón o proceso.

Indicar: Especificar un nombre, un valor o cualquier otro tipo de respuesta corta sin aportar explicaciones ni cálculos.

Dibujar con precisión: Representar a lápiz por medio de un diagrama o un gráfico precisos y rotulados. Se debe utilizar la regla para las líneas rectas. Los diagramas se deben dibujar a escala. En los gráficos, cuando el caso lo requiera, los puntos deben aparecer correctamente marcados y unidos, bien por una línea recta, o por una curva suave.

Dibujar aproximadamente: Representar por medio de un diagrama o un gráfico

(rotulados si fuese necesario). El esquema deberá dar una idea general de la figura o relación que se pide y deberá incluir las características pertinentes.

Explicar: Exponer detalladamente las razones o causas de algo.

Medir: Obtener el valor de una cantidad.

Enumerar: Proporcionar una lista de respuestas cortas.

Los términos de instrucción le permiten al estudiante tener claridad sobre lo que debe hacer y lo que el profesor le quiere evaluar.

En cuanto a las actividades, teniendo en cuenta que las tres iniciales hacen parte de una evaluación formativa, se diseñaron diferentes guías, piezas y Applets, para que los estudiantes trabajaran un solo objeto matemático en cada actividad, esto con el propósito de que cada estudiante se enfocara en su propia tarea y no en la de sus compañeros, ya que al finalizar cada práctica se abriría un espacio en plenaria para discutir cada una de las situaciones y presentar las diferentes alternativas de solución, al tiempo que les permitiría predecir a que se enfrentarían en la siguiente actividad, o una vez que lo hiciesen recordaran o relacionarán aspectos que hubiesen nombrado sus compañeros en actividades anteriores.

Dado que no se trataba de un solo objeto matemático de estudio, (traslación, rotación y simetría axial), la profesora seleccionó cinco de los quince estudiantes para trabajar con un objeto matemático que podía ser la traslación; cinco con rotación y los cinco restantes simetría, para cada una de las actividades, teniendo en cuenta que en cada uno los estudiantes debieron trabajar un objeto matemático diferente al de la actividad anterior.

La actividad 1, cuenta con tres guías y cuatro conjuntos de piezas; la actividad 2 con tres guías y cuatro Applets, y la actividad 3 con una guía y tres Applets.

Para el desarrollo de estas actividades, antes de iniciar con la actividad 1, la profesora realizó una presentación en la que contextualizó a los estudiantes sobre el trabajo a desarrollar a partir de ese momento, y expuso brevemente quién era Omar Rayo y el papel de la geometría en sus obras.

### **Objetivos (Actividades 1, 2 y 3)**

- Explorar el estudio de las transformaciones isométricas en las obras de Omar Rayo mediante el uso de material manipulativo y un SGD Geogebra.
- Identificar los conocimientos previos de manera que reconozca las figuras geométricas básicas.
- Identificar procesos de construcción y visualización.
- Definir los elementos geométricos característicos de cada transformación isométrica.
- Evaluar la apropiación de las herramientas que brinda el SGD
- Verificar la adquisición de un lenguaje acorde a los objetos geométricos estudiados.

#### ***3.3.1 Actividad 1***

Con esta actividad se pretende que los estudiantes tengan el primer acercamiento directo a las obras de Omar Rayo y las transformaciones isométricas, tras la manipulación de las piezas dadas, las cuales les permitirán visualizar y planear la manera como construirán las obras presentadas en las guías.

Esta busca que los estudiantes se apropien o reconozcan la existencia de las figuras geométricas básicas, a las cuales se realizan ciertos movimientos para construir las obras, pues como lo plantea la geometría activa, los estudiantes aprenden haciendo; lo que al tiempo les permitirá ir reconociendo los elementos o condiciones que generan dichos

movimientos, evidenciado en la socialización que se desarrolla al finalizar el punto tres para dar solución al punto cuatro.

Todo esto para introducirlos al estudio de las transformaciones isométricas en las obras de Omar Rayo mediante el SGD Geogebra, en el cual las conciben como el movimiento, recorrido o rastro de una figura que deja “huella” en el punto de partida y tras un movimiento genera otra “huella” en un punto diferente al inicial.

**Tiempo previsto:** 10 minutos de organización y adecuación para la actividad y 20 minutos para el desarrollo de la actividad.

**Material didáctico:** piezas y guías del estudiante.

En cada guía, los estudiantes encontrarán las preguntas a desarrollar y el espacio necesario para dar respuesta a las mismas. Estas guías sólo se diferencian en la obra sobre la cual trabajarán: la guía 1.1 se enfoca en el estudio de la traslación, la guía 1.2 de la rotación y la guías 1.3 y 1.4 de la simetría axial.

Las piezas son las figuras geométricas básicas de algunas de las obras de Omar Rayo necesarias para dar solución a cada una de las guías. Para la elaboración de las piezas se seleccionaron e imprimieron en papel fotográfico algunas obras del artista, se recortaron las figuras geométricas básicas y se plastificaron para una mejor manipulación.

### **Piezas 1.1.**


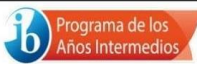
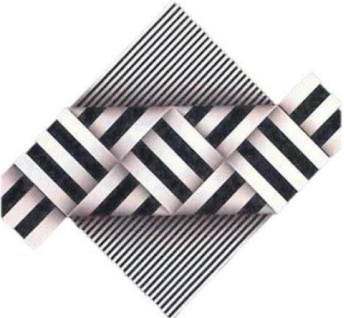
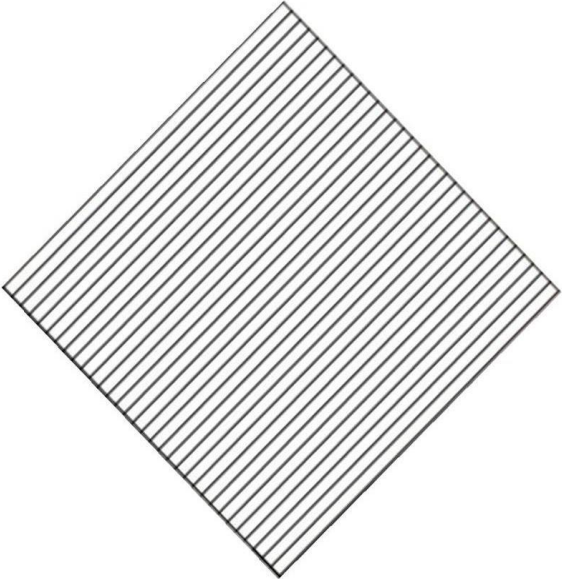
En estas piezas se entregaron dos figuras básicas congruentes (los triángulos) con el objetivo de evitar que los estudiantes rotaran uno de los triángulos para obtener el otro.



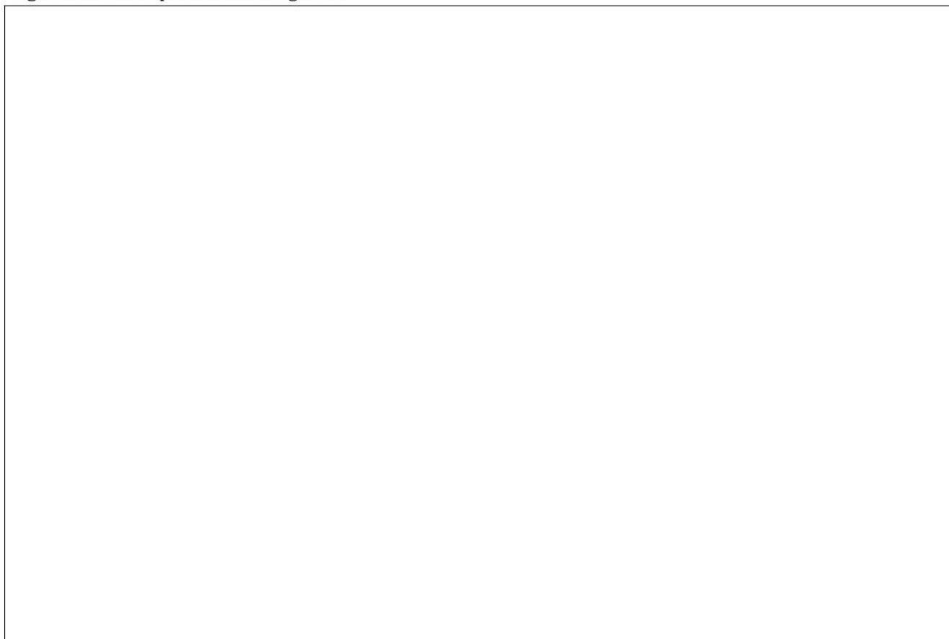
*Figura 4.* Piezas para construir la obra de la guía 1.1 “Actividad 1”

### **Guía 1.1**

En el primer punto de esta guía se indica al estudiante que mueva las piezas sin levantarlas del plano, esto con el fin de que los estudiantes empezaran a reconocer el movimiento que realizaban las piezas.

 <b>Actividad 1</b> 			
DOCENTE:	MÓNICA MOSQUERA JARAMILLO	Código: PMGC(DP)	9º
ESTUDIANTE		Año V	
TRIMESTRE: I		FECHA: ____/____/____	
<b>CONTENIDOS</b> Transformaciones Isométricas	<b>HABILIDADES</b> • Pensamiento creativo y de transferencia	<b>CONCEPTOS</b> • Cambio. • Espacio	
Criterios a evaluar: <input checked="" type="checkbox"/> A <input checked="" type="checkbox"/> B <input checked="" type="checkbox"/> C <input checked="" type="checkbox"/> D			
<b>Nivel de pensamiento</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Conocimiento</li> <li>• Comprensión</li> </ul>		<b>TÉRMINOS DE INSTRUCCIÓN</b> <b>Construir:</b> Hacer algo utilizando los elementos adecuados. <b>Escribir:</b> Obtener la respuesta (o respuestas), por lo general, a partir de la información que se puede extraer. Se requieren pocos cálculos o ninguno, y no es necesario mostrar los pasos que se han seguido. <b>Describir:</b> Exponer detalladamente una situación, evento, patrón o proceso. <b>Indicar:</b> Especificar un nombre, un valor o cualquier otro tipo de respuesta corta sin aportar explicaciones ni cálculos.	
<b>Tiempo estimado para la actividad:</b> 20 Minutos			
1. Utiliza las piezas que se te entregaron para <b>construir</b> la pintura de la figura 1, esto debes hacerlo en la menor cantidad de movimientos posibles y no debes levantar las piezas una vez que empieces el proceso.			
		<b>Antes de empezar</b> ¿Escribe cuál consideras que debe ser el proceso para construir la pintura de la figura 1? _____ _____ _____ _____ _____ _____	
<b>Construcción</b>			

2. **Escribe** los movimientos que tuviste en cuenta para construir la pintura de la figura 1, a partir de las figuras básicas que se te entregaron.



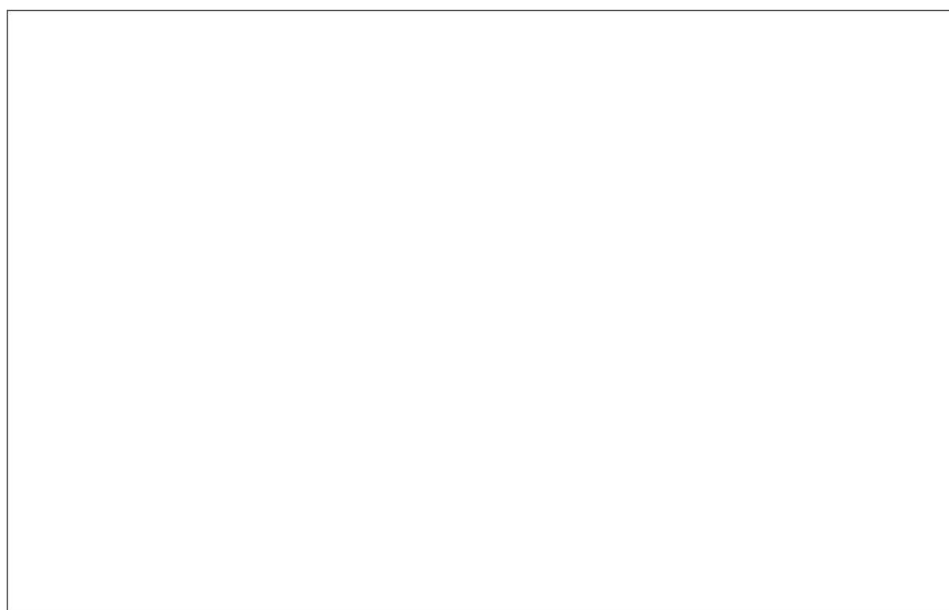
3. **Indica** tres elementos que consideres fundamentales para construir la pintura de la figura 1.

---

---

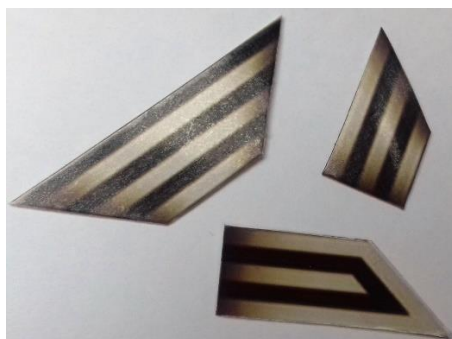
---

4. Después de construir y socializar tu trabajo de la pintura (figura 1), **describe** que se debe tener en cuenta durante el proceso de construcción de la pintura, para que quede igual a la figura 1.








## Piezas 1.2



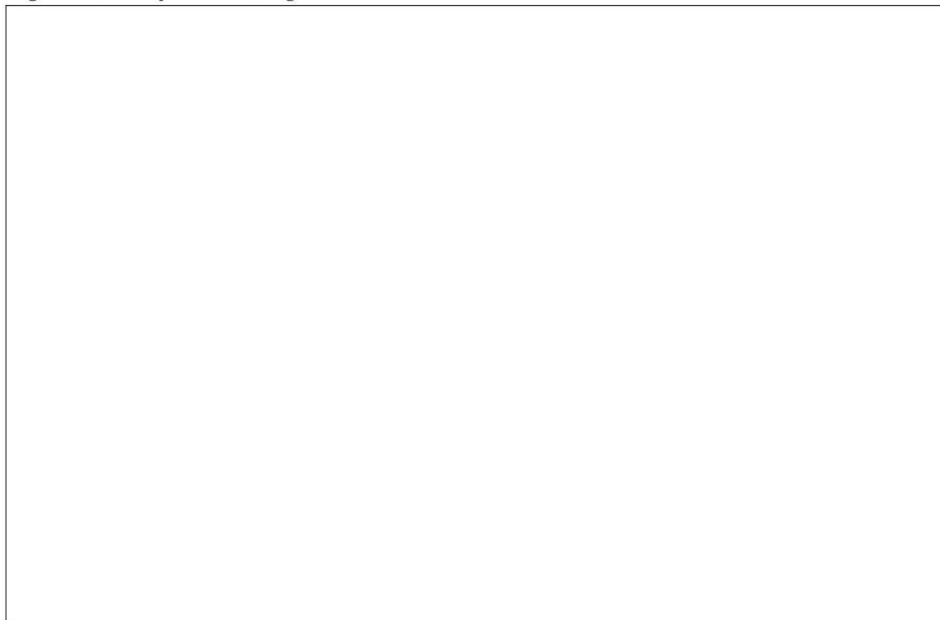
*Figura 5.* Piezas para construir obra de la guía 1.2 “Actividad 1”

## Guía 1.2

En el primer punto de esta guía se indica al estudiante que mueva las piezas sin levantarlas del plano, esto con el fin de que los estudiantes empezaran a reconocer el movimiento que realizaban las piezas.

 <b>Actividad 1</b> 			
DOCENTE:	MÓNICA MOSQUERA JARAMILLO	Código: PMGC(DP)	9º
ESTUDIANTE		Año V	
TRIMESTRE: I		FECHA: ____/____/____	
<b>CONTENIDOS</b> Transformaciones isométricas	<b>HABILIDADES</b> • Pensamiento creativo y de transferencia	<b>CONCEPTOS</b> • Cambio. • Espacio	
Criterios a evaluar: <input checked="" type="checkbox"/> A <input checked="" type="checkbox"/> B <input checked="" type="checkbox"/> C <input checked="" type="checkbox"/> D			
<b>Nivel de pensamiento</b> • Conocimiento • Comprensión	<b>TÉRMINOS DE INSTRUCCIÓN</b> <b>Construir:</b> Hacer algo utilizando los elementos adecuados. <b>Escribir:</b> Obtener la respuesta (o respuestas), por lo general, a partir de la información que se puede extraer. Se requieren pocos cálculos o ninguno, y no es necesario mostrar los pasos que se han seguido. <b>Describir:</b> Exponer detalladamente una situación, evento, patrón o proceso. <b>Indicar:</b> Especificar un nombre, un valor o cualquier otro tipo de respuesta corta sin aportar explicaciones ni cálculos.		
<b>Tiempo estimado para la actividad: 20 Minutos</b>			
 <p>Figura 3: "Kumo XV"</p>	<p>1. Utiliza las piezas que se te entregaron para <b>construir</b> la pintura de la figura 3, no debes levantar las piezas una vez que empieces con el proceso.</p> <p><u>Antes de empezar</u></p> <p>¿Escribe cuál consideras que debe ser el proceso para construir la pintura de la figura 3? _____</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>_____</p>		
<b>Construcción:</b>			

2. **Escribe** los movimientos que tuviste en cuenta para construir la pintura de la figura 3, a partir de las figuras básicas que se te entregaron.



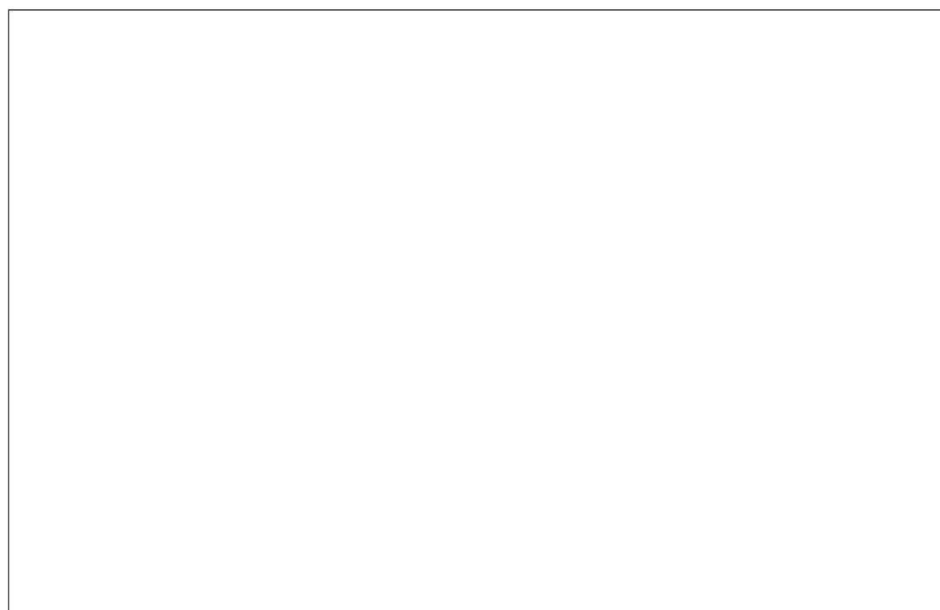
3. **Indica** tres elementos que consideres fundamentales para construir la pintura de la figura 2.

---

---

---

4. Después de construir y socializar tu trabajo de la pintura (figura 3), **describe** que se debe tener en cuenta durante el proceso de construcción de la pintura, para que quede igual a la figura 3.




### Piezas 1.3



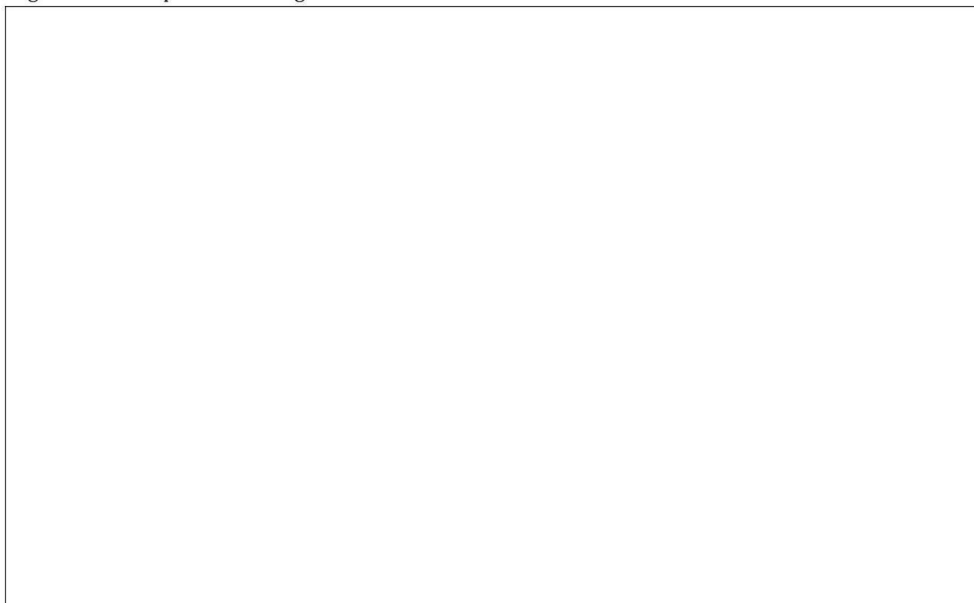
*Figura 6. Piezas para construir obra de la guía 1.3 “Actividad 1”*

### Guía 1.3

En esta guía a diferencia de las anteriores no se le indica al estudiante que mueva las piezas sin levantarlas del plano, dado que por la naturaleza del movimiento no es posible representar la obra de otra forma.

 <b>Actividad 1</b> 			
<b>DOCENTE:</b>	MÓNICA MOSQUERA JARAMILLO	<b>Código:</b> PMGC(DP)	9º
<b>ESTUDIANTE</b>		<b>Año V</b>	
<b>TRIMESTRE: I</b>		<b>FECHA:</b> ____/____/____	
<b>CONTENIDOS</b> Transformaciones isométricas	<b>HABILIDADES</b> • Pensamiento creativo y de transferencia	<b>CONCEPTOS</b> • Cambio. • Espacio	
<b>Criterios a evaluar:</b> <input checked="" type="checkbox"/> A <input checked="" type="checkbox"/> B <input checked="" type="checkbox"/> C <input checked="" type="checkbox"/> D			
<b>Nivel de pensamiento</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Conocimiento</li> <li>• Comprensión</li> </ul>		<b>TÉRMINOS DE INSTRUCCIÓN</b> <b>Construir:</b> Hacer algo utilizando los elementos adecuados. <b>Escribir:</b> Obtener la respuesta (o respuestas), por lo general, a partir de la información que se puede extraer. Se requieren pocos cálculos o ninguno, y no es necesario mostrar los pasos que se han seguido. <b>Describir:</b> Exponer detalladamente una situación, evento, patrón o proceso. <b>Indicar:</b> Especificar un nombre, un valor o cualquier otro tipo de respuesta corta sin aportar explicaciones ni cálculos.	
<b>Tiempo estimado para la actividad: 20 Minutos</b>			
1. Utiliza las piezas que se te entregaron para <b>construir</b> la pintura de la figura 2.			
		<u>Antes de empezar,</u> ¿Escribe cuál consideras que debe ser el proceso para construir la pintura de la figura 2? _____ _____ _____ _____ _____ _____	
Figura 2: "Colección laberintos geométricos"			
<b>Construcción</b>			

2. **Escribe** los movimientos que tuviste en cuenta para construir la pintura de la figura 2, a partir de las figuras básicas que se te entregaron.



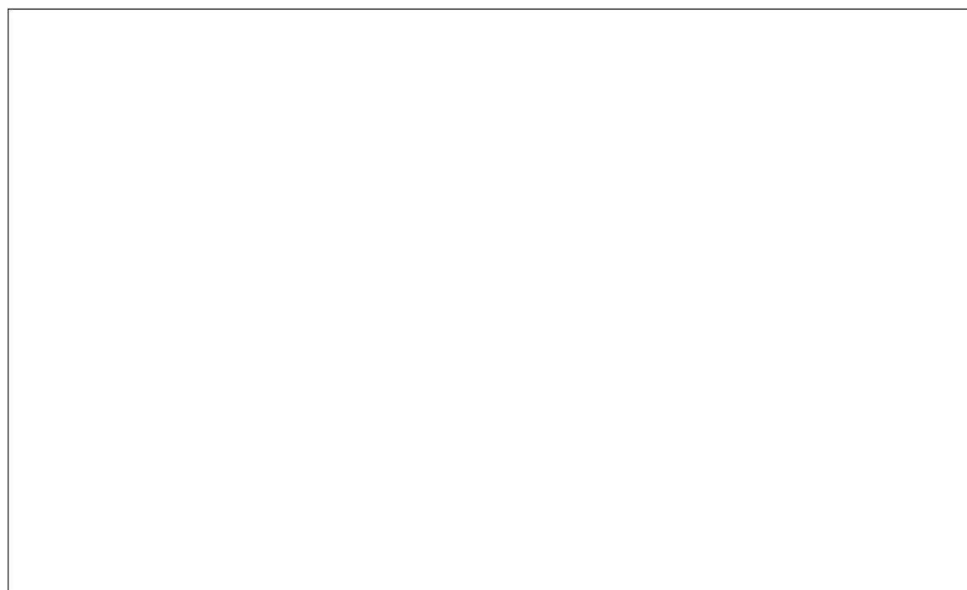
3. **Indica** tres elementos que consideres fundamentales para construir la pintura de la figura 2.

---

---

---

4. Después de construir y socializar tu trabajo de la pintura (figura 2), **describe** que se debe tener en cuenta durante el proceso de construcción de la pintura, para que quede igual a la figura 2.






## Piezas 1.4



*Figura 7. Piezas para construir obra de la guía 1.4 “Actividad 1”*

## Guía 1.4

En esta guía a diferencia de las anteriores no se le indica al estudiante que mueva las piezas sin levantarlas del plano, dado que por la naturaleza del movimiento no es posible representar la obra de otra forma.

<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p><b>LICEO LOS ALPES</b> <small>Licenciatura en Educación</small></p> </div> <div style="text-align: center;"> <b>Actividad 1</b> </div> <div style="text-align: right;">  </div> </div>			
<b>DOCENTE:</b>	MÓNICA MOSQUERA JARAMILLO	<b>Código:</b> PMGC(DP)	9º
<b>ESTUDIANTE</b>		<b>Año V</b>	
<b>TRIMESTRE: I</b>		<b>FECHA:</b> ____/____/____	
<b>CONTENIDOS</b> Transformaciones isométricas	<b>HABILIDADES</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Pensamiento creativo y de transferencia</li> </ul>	<b>CONCEPTOS</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Cambio.</li> <li>Espacio</li> </ul>	
<b>Criterios a evaluar:</b> <input checked="" type="checkbox"/> A <input checked="" type="checkbox"/> B <input checked="" type="checkbox"/> C <input checked="" type="checkbox"/> D			
<b>Nivel de pensamiento</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Conocimiento</li> <li>Comprensión</li> </ul>		<b>TÉRMINOS DE INSTRUCCIÓN</b> <b>Construir:</b> Hacer algo utilizando los elementos adecuados. <b>Escribir:</b> Obtener la respuesta (o respuestas), por lo general, a partir de la información que se puede extraer. Se requieren pocos cálculos o ninguno, y no es necesario mostrar los pasos que se han seguido. <b>Describir:</b> Exponer detalladamente una situación, evento, patrón o proceso. <b>Indicar:</b> Especificar un nombre, un valor o cualquier otro tipo de respuesta corta sin aportar explicaciones ni cálculos.	
<b>Tiempo estimado para la actividad:</b> 20 Minutos			
1. Utiliza las piezas que se te entregaron para <b>construir</b> la pintura de la figura 2,			
		<b>Antes de empezar</b> ¿Escribe cuál consideras que debe ser el proceso para construir la pintura de la figura 2? _____ _____ _____ _____ _____	
<p><b>Figura 2: "Serie odisea del equilibrio"</b></p> <div style="border: 1px solid black; height: 300px; width: 100%; margin-top: 10px;"> <p><b>Construcción</b></p> </div>			



2. **Escribe** los movimientos que tuviste en cuenta para construir la pintura de la figura 2, a partir de las figuras básicas que se te entregaron.

3. **Indica** tres elementos que consideres fundamentales para construir la pintura de la figura 2.

---

---

---

4. Después de construir y socializar tu trabajo de la pintura (figura 2), **describe** que se debe tener en cuenta durante el proceso de construcción de la pintura, para que quede igual a la figura 2.

## **Organización de la clase**

La actividad se desarrolló en el aula de clase, lugar en el que la profesora hizo una presentación sobre las guías, piezas y trabajo a realizar de manera individual por los estudiantes, luego entregará la guía “Actividad 1” con las piezas correspondientes, teniendo en cuenta las asignaciones por grupo previamente expuestas.

El papel de la profesora fue de observadora y fuente para dar solución a interrogantes que presentaron los estudiantes, en términos de forma y no de contenido.

Una vez todos los estudiantes dieron respuestas a los tres primeros puntos, se hizo la socialización de estos, para finalmente dar respuesta al punto cuatro y hacer el cierre de la actividad.

### **3.3.2 Actividad 2**

En esta actividad los estudiantes se enfrentaron al estudio de las transformaciones isométricas mediante el SGD Geogebra, en el cual se construyó una de las obras de Omar Rayo, mediante el movimiento de una de las transformaciones isométricas con el cual se esperaba que los estudiantes lograrán identificar las figuras geométricas básicas y describir el movimiento observado por cada una de estas, tras la exploración y observación del Applet en Geogebra.

En los Applets que se presentaron a los estudiantes, sólo estaban visibles las herramientas necesarias para la solución de una de las preguntas de la guía, con el fin de acercarlos al reconocimiento y apropiación de las características de los movimientos observados, para que así, expresarán con mayor precisión los elementos o condiciones, con las que cumplen los movimientos de las figuras geométricas básicas en la construcción de la obra.

A partir de la finalización y socialización de esta actividad el lenguaje de los estudiantes deberá empezar a ser más preciso en términos de los elementos geométricos de las

transformaciones isométricas.

**Tiempo previsto:** 10 minutos de organización y adecuación para la actividad y 40 minutos para el desarrollo de la actividad.

**Material didáctico:** guías y Applets del estudiante.

En cada guía los estudiantes encontraron las preguntas y el espacio para dar respuesta a las mismas. La guía 2.1 se enfocó en el estudio de la traslación, la guía 2.2 de la rotación y la guías 2.3 de la simetría axial.

Los Applets correspondían a tres de las obras de Omar Rayo construidas en Geogebra, para el desarrollo de cada una de las guías. Los archivos se encontraban previamente publicados en el perfil de Geogebra online de la profesora.

### Applet 2.1

<https://www.geogebra.org/classic/svesysxj>

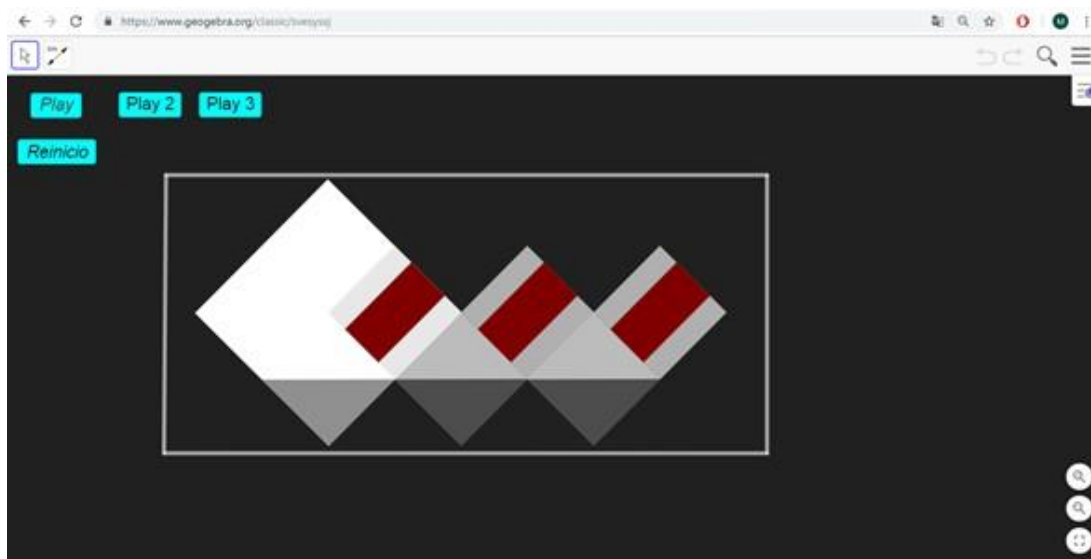





Figura 8. Applet correspondiente a la guía 2.1 “Actividad 2”

## Guía 2.1

 <b>Actividad 2</b> 			
DOCENTE:	MÓNICA MOSQUERA JARAMILLO	Código: PMGC(DP)	9°
ESTUDIANTE		Año V	
TRIMESTRE: I		FECHA: ____/____/____	
CONTENIDOS Transformaciones isométricas	HABILIDADES <ul style="list-style-type: none"> <li>Pensamiento creativo y de transferencia</li> </ul>	CONCEPTOS <ul style="list-style-type: none"> <li>Cambio.</li> <li>Espacio</li> </ul>	
Criterios a evaluar: <input checked="" type="checkbox"/> A <input checked="" type="checkbox"/> B <input checked="" type="checkbox"/> C <input checked="" type="checkbox"/> D			
<b>Nivel de pensamiento</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Conocimiento</li> <li>Comprensión</li> </ul>		<b>TÉRMINOS DE INSTRUCCIÓN</b> <b>Escribir:</b> Obtener la respuesta (o respuestas), por lo general, a partir de la información que se puede extraer. Se requieren pocos cálculos o ninguno, y no es necesario mostrar los pasos que se han seguido. <b>Describir:</b> Exponer detalladamente una situación, evento, patrón o proceso. <b>Dibujar con precisión:</b> Representar a lápiz por medio de un diagrama o un gráfico precisos y rotulados. Se debe utilizar la regla para las líneas rectas. Los diagramas se deben dibujar a escala. En los gráficos, cuando el caso lo requiera, los puntos deben aparecer correctamente marcados y unidos, bien por una línea recta, o por una curva suave. <b>Dibujar aproximadamente:</b> Representar por medio de un diagrama o un gráfico (rotulados si fuese necesario). El esquema deberá dar una idea general de la figura o relación que se pide y deberá incluir las características pertinentes. <b>Explicar:</b> Exponer detalladamente las razones o causas de algo. <b>Medir:</b> Obtener el valor de una cantidad. <b>Indicar:</b> Especificar un nombre, un valor o cualquier otro tipo de respuesta corta sin aportar explicaciones ni cálculos.	
<p>Teniendo en cuenta el trabajo desarrollado en clases anteriores, en esta actividad identificaremos los elementos necesarios para construir algunas de las obras de Omar Rayo, por medio de uno o más movimientos en el plano.</p> <p>1. <b>Escribe</b> cuales son las figuras geométricas básicas en la representación de la obra que te ha sido asignada.</p>			
<p>2. Explora y observa el applet con la obra que te ha sido asignada.</p> <p>3. Completa la tabla teniendo en cuenta lo observado en el applet.</p>			
<b>Dibuje con precisión</b> las figuras básicas.	<b>Describe</b> el movimiento de cada figura básica.	<b>Ilustra, representa o dibuja aproximadamente</b> como es dicho movimiento.	

4. En términos generales, **explica** la similitud o patrón que existe entre el movimiento de cada una de las figuras geométricas observadas en el applet.

5. **Medir** con ayuda de la herramienta “distancia o longitud”  y escribir:

- a. La distancia entre los vértices correspondientes de las figuras.

- b. **Describe** como son estas distancias entre sí.

---



---



---

6. Teniendo en cuenta los movimientos que realizaron las figuras geométricas básicas en el applet, **selecciona** de cada lista de palabras la opción que mejor se adaptan a dichos movimientos:

- |                  |                                    |               |
|------------------|------------------------------------|---------------|
| • En zigzag      | • Diagonal                         | • $0^\circ$   |
| • Circunferencia | • Abajo-arriba (vertical)          | • $90^\circ$  |
| • Parábola       | • Izquierda a derecha (horizontal) | • $180^\circ$ |
| • Arco           | • Arriba-Abajo (vertical)          | • $270^\circ$ |
| • En línea recta | • Derecha-Izquierda (horizontal)   | • $360^\circ$ |

7. **Indica** aquellos elementos matemáticos/geométricos que consideras son necesarios para que cada figura realice su movimiento y así poder construir la obra.

## Applet 2.2

<https://www.geogebra.org/classic/ztsvjjax>

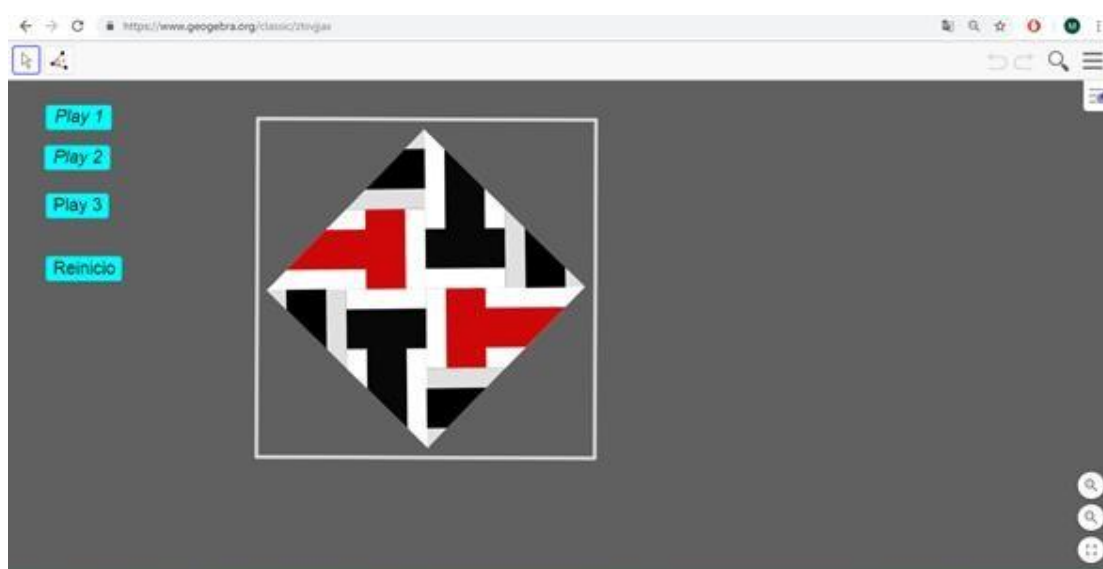





Figura 9. Applet correspondiente a la guía 2.2 “Actividad 2”

## Guía 2.2

 <b>Actividad 2</b> 			
<b>DOCENTE:</b>	MÓNICA MOSQUERA JARAMILLO	<b>Código:</b> PMGC(DP)	9°
<b>ESTUDIANTE</b>		<b>Año V</b>	
<b>TRIMESTRE: I</b>		<b>FECHA:</b> ____/____/____	
<b>CONTENIDOS</b> Transformaciones isométricas	<b>HABILIDADES</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Pensamiento creativo y de transferencia</li> </ul>	<b>CONCEPTOS</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Cambio.</li> <li>Espacio</li> </ul>	
<b>Criterios a evaluar:</b> <input checked="" type="checkbox"/> A <input checked="" type="checkbox"/> B <input checked="" type="checkbox"/> C <input checked="" type="checkbox"/> D			
<b>Nivel de pensamiento</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Conocimiento</li> <li>Comprensión</li> </ul>	<b>TÉRMINOS DE INSTRUCCIÓN</b> <b>Escribir:</b> Obtener la respuesta (o respuestas), por lo general, a partir de la información que se puede extraer. Se requieren pocos cálculos o ninguno, y no es necesario mostrar los pasos que se han seguido. <b>Describir:</b> Exponer detalladamente una situación, evento, patrón o proceso. <b>Dibujar con precisión:</b> Representar a lápiz por medio de un diagrama o un gráfico precisos y rotulados. Se debe utilizar la regla para las líneas rectas. Los diagramas se deben dibujar a escala. En los gráficos, cuando el caso lo requiera, los puntos deben aparecer correctamente marcados y unidos, bien por una línea recta, o por una curva suave. <b>Dibujar aproximadamente:</b> Representar por medio de un diagrama o un gráfico (rotulados si fuese necesario). El esquema deberá dar una idea general de la figura o relación que se pide y deberá incluir las características pertinentes. <b>Explicar:</b> Exponer detalladamente las razones o causas de algo. <b>Medir:</b> Obtener el valor de una cantidad. <b>Indicar:</b> Especificar un nombre, un valor o cualquier otro tipo de respuesta corta sin aportar explicaciones ni cálculos.		
<p>Teniendo en cuenta el trabajo desarrollado en clases anteriores, en esta actividad identificaremos los elementos necesarios para construir algunas de las obras de Omar Rayo, por medio de uno o más movimientos en el plano.</p> <p>1. <b>Escribe</b> cuales son las figuras geométricas básicas en la representación de la obra que te ha sido asignada.</p> <div style="border: 1px solid black; height: 60px; margin-top: 10px;"></div>			
<p>2. Explora y observa el applet con la obra que te ha sido asignada.</p> <p>3. Completa la tabla teniendo en cuenta lo observado en el applet.</p>			
<b>Dibuje con precisión</b> las figuras básicas.	<b>Describe</b> el movimiento de cada figura básica.	Ilustra, representa o <b>dibuja aproximadamente</b> como es dicho movimiento.	

4. En términos generales, **explica** la similitud o patrón que existe entre el movimiento de cada una de las figuras geométricas observadas en el applet.

5. **Medir** con ayuda de la herramienta “Ángulo” y escribir: 

a. El ángulo entre las figuras correspondientes.

b. **Describe** como son los ángulos entre sí.

---



---



---

6. Teniendo en cuenta los movimientos que realizaron las figuras geométricas básicas en el applet, **selecciona** de cada lista de palabras la opción que mejor se adaptan a dichos movimientos:

- |                  |  |        |
|------------------|--|--------|
| • En zigzag      | • Abajo-arriba, arriba-abajo                   | • 0°   |
| • En línea recta | • Izquierda a derecha                          | • 90°  |
| • Circunferencia | • Sentido de las manecillas del reloj          | • 180° |
| • Parábola       | • Derecha-Izquierda                            | • 270° |
| • Arco           | • Sentido contrario a las manecillas del reloj | • 360° |
| • Diagonal       |  | • 45°  |
|                  |  | • 60°  |

7. **Indica** aquellos elementos matemáticos/geométricos que consideras son necesarios para que cada figura realice su movimiento y así poder construir la obra.



### Applet 2.3

<https://www.geogebra.org/classic/afcmityy>

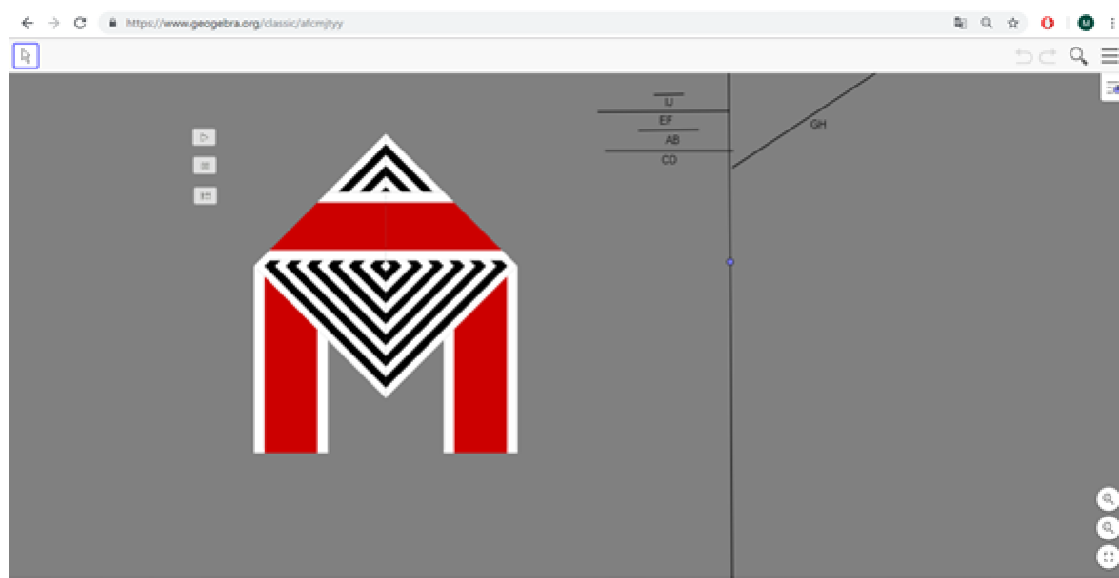




Figura 10. Applet correspondiente a la guía 2.3 “Actividad 2”

## Guía 2.3

 <b>Actividad 2</b> 			
<b>DOCENTE:</b>	MÓNICA MOSQUERA JARAMILLO	<b>Código:</b> PMGC(DP)	<b>9º</b>
<b>ESTUDIANTE</b>		<b>Año V</b>	
<b>TRIMESTRE: I</b>		<b>FECHA:</b> ____/____/____	
<b>CONTENIDOS</b> Transformaciones isométricas	<b>HABILIDADES</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Pensamiento creativo y de transferencia</li> </ul>	<b>CONCEPTOS</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Cambio.</li> <li>Espacio</li> </ul>	
<b>Criterios a evaluar:</b> <input checked="" type="checkbox"/> A <input checked="" type="checkbox"/> B <input checked="" type="checkbox"/> C <input checked="" type="checkbox"/> D			
<b>Nivel de pensamiento</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Conocimiento</li> <li>Comprensión</li> </ul>	<b>TÉRMINOS DE INSTRUCCIÓN</b> <b>Escribir:</b> Obtener la respuesta (o respuestas), por lo general, a partir de la información que se puede extraer. Se requieren pocos cálculos o ninguno, y no es necesario mostrar los pasos que se han seguido. <b>Describir:</b> Exponer detalladamente una situación, evento, patrón o proceso. <b>Dibujar con precisión:</b> Representar a lápiz por medio de un diagrama o un gráfico precisos y rotulados. Se debe utilizar la regla para las líneas rectas. Los diagramas se deben dibujar a escala. En los gráficos, cuando el caso lo requiera, los puntos deben aparecer correctamente marcados y unidos, bien por una línea recta, o por una curva suave. <b>Dibujar aproximadamente:</b> Representar por medio de un diagrama o un gráfico (rotulados si fuese necesario). El esquema deberá dar una idea general de la figura o relación que se pide y deberá incluir las características pertinentes. <b>Explicar:</b> Exponer detalladamente las razones o causas de algo. <b>Comparar:</b> Exponer las semejanzas entre dos (o más) elementos o situaciones refiriéndose constantemente a ambos (o a todos). <b>Indicar:</b> Especificar un nombre, un valor o cualquier otro tipo de respuesta corta sin aportar explicaciones ni cálculos.		
Teniendo en cuenta el trabajo desarrollado en clases anteriores, en esta actividad identificaremos los elementos necesarios para construir algunas de las obras de Omar Rayo, por medio de uno o más movimientos en el plano.			
1. <b>Escribe</b> cuales son las figuras geométricas básicas en la representación de la obra que te ha sido asignada.			
2. Explora y observa el applet con la obra que te ha sido asignada. 3. Completa la tabla teniendo en cuenta lo observado en el applet.			
<b>Dibuje con precisión</b> las figuras básicas.	<b>Describe</b> el movimiento de cada figura básica.	<b>Ilustra, representa o dibuja aproximadamente</b> como es dicho movimiento.	

<p>4. En términos generales, <b>explica</b> la similitud o patrón que existe entre el movimiento de cada una de las figuras geométricas observadas en el applet.</p>
<p>5. En el applet se encuentra una recta que hace las veces de espejo y diferentes segmentos, utilízalos para <b>comparar</b> las distancias.</p>
<p><b>Describe</b> como son estas distancias entre sí. (use el nombre de los segmentos para escribir sus comparaciones)</p>
<p>6. <b>Indica</b> aquellos elementos matemáticos/geométricos que consideras son necesarios para que cada figura realice su movimiento y así poder construir la obra.</p>

### Applet de cierre

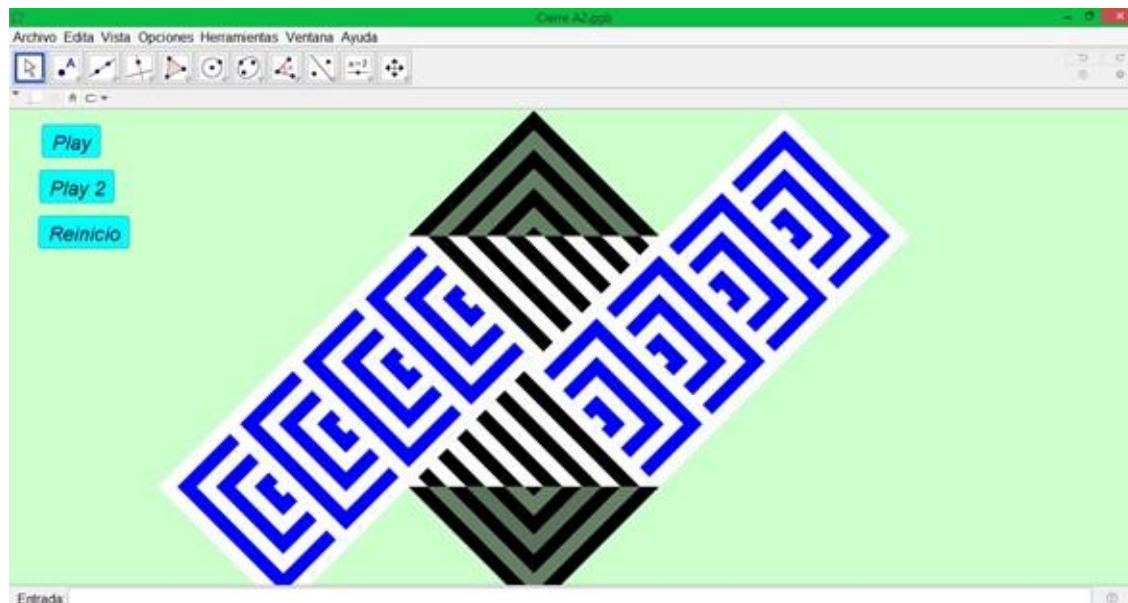






Figura 11. Applet de cierre y socialización “Actividad 2”

### Organización de la clase

La actividad se desarrolló en la sala de sistemas del colegio, lugar en el que la profesora entregó a cada estudiante una copia de la guía “Actividad 2” teniendo en cuenta que estos trabajarán sobre un objeto matemático diferente al de la actividad 1. Seguido se indicó a los estudiantes que ingresaran desde sus perfiles de Geogebra online al perfil de la profesora, en el cual encontraron los tres Applets de esta actividad con los nombres “Rayo 1”, “Rayo 2” y “Rayo 3”, indicándoles que Applet corresponde a cada una de las guías y dieran inicio a la exploración.

Al abrir cada Applet los estudiantes se encontraron con la obra completa para dar respuesta al punto uno de la guía, luego debían dar clic en el botón reinicio o (  ), seguido  de los botones Play (1,2,3) o el botón (  ), para  iniciaran la exploración del Applet y terminar de dar respuesta a la guía.

El papel de la profesora fue de observadora y fuente para dar solución a interrogantes que

presentaron los estudiantes en términos del contenido de las guías o los Applets.

Una vez finalizada la actividad, la profesora expuso una obra de Omar Rayo construida en Geogebra, en la cual se usaron todas las transformaciones isométricas para la socialización y formalización de los objetos matemáticos.

### **3.3.3 Actividad 3**

Con el primer momento se pretendió que los estudiantes lograrán planear y visualizar la manera cómo construirán la obra de Omar Rayo en Geogebra, que identificarán las figuras básicas, los posibles movimientos, los elementos necesarios para realizar el movimiento que escogieron y la cantidad de veces que eran necesario realizarlo.

En los Applets que se presentaron a los estudiantes, sólo estuvieron visibles las herramientas necesarias para la construcción y algunas similares con el fin de evaluar el nivel de apropiación de los estudiantes, el manejo del software y los elementos necesarios para llevar a cabo la construcción.

Lo que se esperaba en el segundo momento es que los estudiantes logaran confrontar y validar el plan propuesto en el primer momento.

**Tiempo previsto:** 10 minutos de organización y adecuación para la actividad y 40 minutos de resolución.

**Material didáctico:** Applets y guía del estudiante

Para esta actividad todos los estudiantes trabajaron con la misma guía, en la que encontraron las preguntas y los espacios para dar respuesta a las mismas.

Los Applets corresponden a tres de las obras de Omar Rayo, en las que se encuentran diferentes imágenes de las cuales sólo algunas permiten la construcción de la

obra asignada. Los archivos se encuentran previamente publicados en el perfil de Geogebra online de la profesora.

### Applet 3.1

<https://www.geogebra.org/m/fmmzvaj>

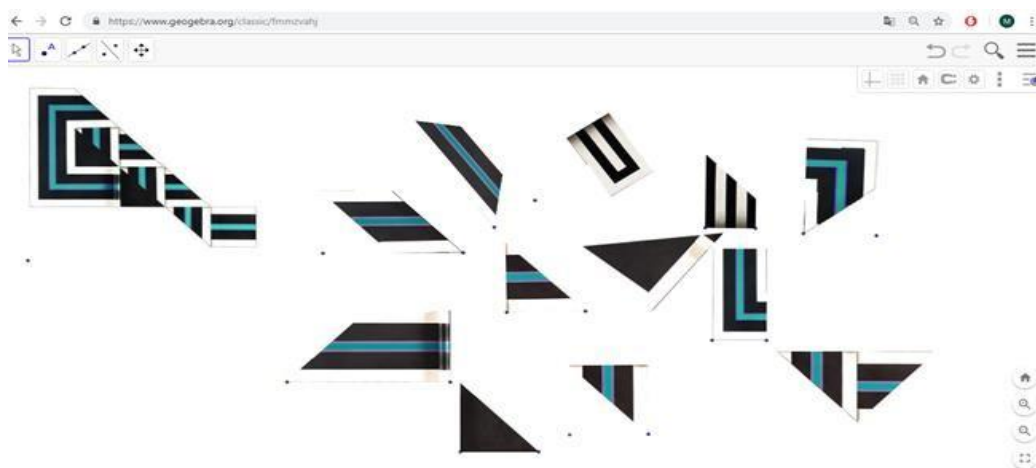


Figura 12. Applet 3.1 para construir obra de la “Actividad 3”.

### Applet 3.2

<https://www.geogebra.org/m/qyyvnh>

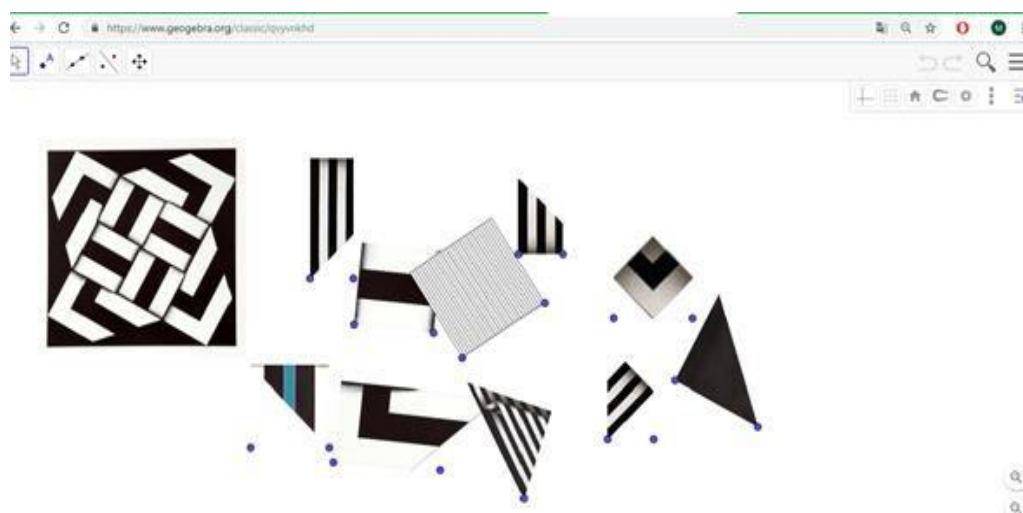


Figura 13. Applet 3.2 para construir obra de la “Actividad 3”

### Applet 3.3

<https://www.geogebra.org/m/qattajug>

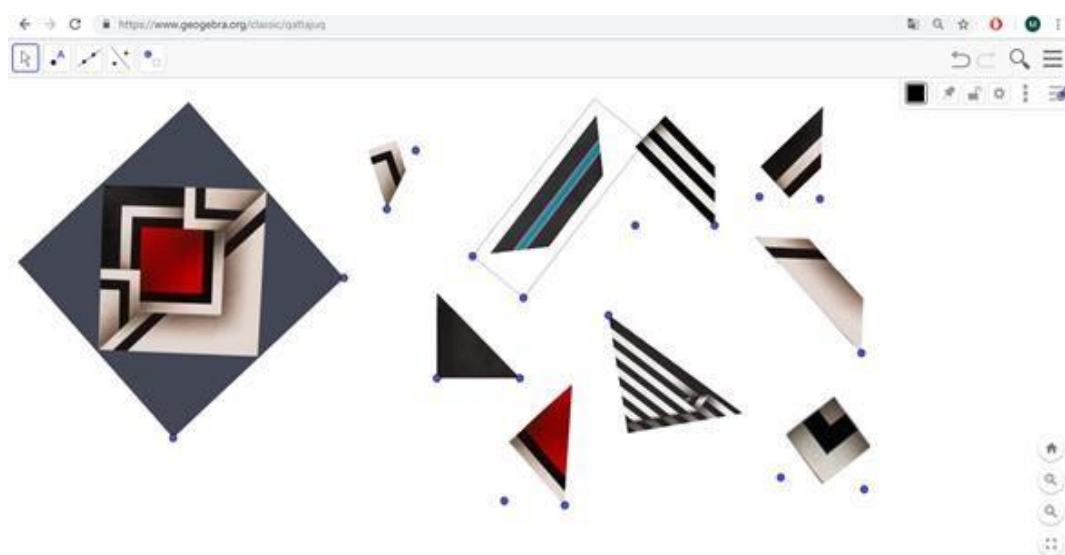

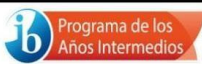


Figura 14. Applet 3.3 para construir obra de la “Actividad 3”

## Guía 3.

		<b>Actividad 3</b>			
DOCENTE:	MÓNICA MOSQUERA JARAMILLO		Código: PMGC(DP)	9º	
ESTUDIANTE			Año V		
TRIMESTRE: I		FECHA: ____/____/____			
<b>CONTENIDOS</b> Transformaciones isométricas		<b>HABILIDADES</b> • Pensamiento creativo y de transferencia		<b>CONCEPTOS</b> • Cambio. • Espacio	
Criterios a evaluar: <input checked="" type="checkbox"/> A <input checked="" type="checkbox"/> B <input checked="" type="checkbox"/> C <input checked="" type="checkbox"/> D					
<b>Nivel de pensamiento</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Conocimiento</li> <li>• Comprensión</li> </ul>		<b>TÉRMINOS DE INSTRUCCIÓN</b> <b>Escribir:</b> Obtener la respuesta (o respuestas), por lo general, a partir de la información que se puede extraer. Se requieren pocos cálculos o ninguno, y no es necesario mostrar los pasos que se han seguido. <b>Describir:</b> Exponer detalladamente una situación, evento, patrón o proceso. <b>Indicar:</b> Especificar un nombre, un valor o cualquier otro tipo de respuesta corta sin aportar explicaciones ni cálculos. <b>Dibujar con precisión:</b> Representar a lápiz por medio de un diagrama o un gráfico precisos y rotulados. Se debe utilizar la regla para las líneas rectas. Los diagramas se deben dibujar a escala. En los gráficos, cuando el caso lo requiera, los puntos deben aparecer correctamente marcados y unidos, bien por una línea recta, o por una curva suave.			
<b>Tiempo estimado para la actividad:</b> 40 minutos.					
En esta oportunidad debes recrear una obra de Omar Rayo					
<b>Momento 1</b>					
1. <b>Describe</b> cuál es tu plan para construir la obra de Omar Rayo					
<hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/>					
2. <b>Dibuja con precisión</b> las figuras básicas que utilizaras					
3. <b>Indica</b> el tipo de movimiento o movimientos que vas a realizar					
<hr/>					
4. <b>Escribe</b> las condiciones o elementos necesarios para generar el movimiento elegido.					
<hr/> <hr/>					
5. ¿Cuántas veces va a realizar dicho movimiento (s)?					
<hr/> <hr/>					



## Momento 2

1. ¿Coincidieron las figuras básicas elegidas? ¿Cuáles te faltaron?

---

---

---

2. ¿El tipo de movimiento elegido te permitió construir la obra? Si \_\_\_\_ No \_\_\_\_  
¿Por qué?

---

---

---

3. ¿Tuviste que cambiar el movimiento elegido? Si \_\_\_\_ No \_\_\_\_  
¿Por cuál movimiento? \_\_\_\_  
¿Qué elementos te permitieron determinar que elegiste el movimiento  
correcto? \_\_\_\_\_

---

---

4. ¿Fueron suficientes las condiciones o elementos elegidos para generar el movimiento? Si \_\_\_\_ No \_\_\_\_  
¿Qué faltó?

---

---

---

5. ¿Coincidieron la cantidad de veces que planeaste realizar el movimiento con la cantidad de veces que  
realmente realizaste el movimiento?

---

6. Dibuje y escriba el nombre de las herramientas de "Geogebra" que te permitieron recrear la obra.

### **Organización de la clase:**

La profesora presentó los tres Applets y a cada estudiante le entregó una copia de la guía “Actividad 3”, esta constaba de dos momentos:

El primer momento se desarrolló en el aula de clase de manera individual, pues por medio del video beam se proyectaron las imágenes de las tres obras que aparecen en los Applets, los cuales se nombraron como “Omar Rayo 1”, “Omar Rayo 2” y “Omar Rayo 3” estos fueron signaron a los estudiantes por la profesora de manera que no repitieran los objetos matemáticos trabajados en las actividades anteriores.

El segundo momento se llevó a cabo en la sala de sistemas del colegio, los Applets estaban publicados en el perfil de Geogebra online de la profesora y los estudiantes desde sus perfiles accedieron al recurso asignado. Cada Applet contó con la imagen completa de una obra de Omar Rayo que estaba fija sobre el plano, es decir, que no será susceptible de cambios, aun cuando el estudiante la hubiese manipulado con el botón “elige y mueve” que permite realizar pruebas de arrastre; además tenía imágenes recortadas de diversas obras del artista las cuales podía manipular con el botón mencionado, de modo que logaran cambiarlos de posición o tamaño según su conveniencia para la construcción de la obra. Una vez que el estudiante construyó la obra dio respuesta al segundo momento de la guía y publicó la construcción realizada en su perfil de Geogebra online.

#### **3.3.4 Actividad 4**

La “Actividad 4” se propone en términos de evaluar los conocimientos construidos o alcanzados por los estudiantes, que concuerda con la evaluación sumativa. Esta actividad contará con dos guías, las cuales cumplirán el papel de las evaluaciones tipo protocolo y evaluación escrita.

#### **Objetivos:**

- Evaluar los conocimientos contruidos con los estudiantes.
- Reconocer los elementos necesarios para realizar un movimiento en el plano y los que aplica en la construcción de su propia obra.
- Utilizar todos los movimientos en la realización de la obra.

La actividad se realizó en dos momentos, con el primer momento se esperaba que los estudiantes lograrán poner en práctica todo lo aprendido en las actividades anteriores: uso de los elementos que definen cada movimiento como el vector, el centro y ángulos de rotación, el eje de simetría y figuras básicas. Cabe resaltar que el Applet tenía la barra de herramientas completa, esto con el fin de evaluar el grado de familiaridad y apropiación del software por parte de los estudiantes.

Se realizó un segundo momento en el que los estudiantes realizaron en casa la adaptación de su construcción en un formato dado, esto con el propósito de exponer sus productos creativos (protocolos) en la biblioteca del colegio.

**Tiempo previsto:** 10 minutos de organización y adecuación para la actividad y 50 minutos de elaboración y construcción.

**Material didáctico:** Applet, guía del protocolo y guía del estudiante.

## Applet

<https://www.geogebra.org/classic/w95h53ac>

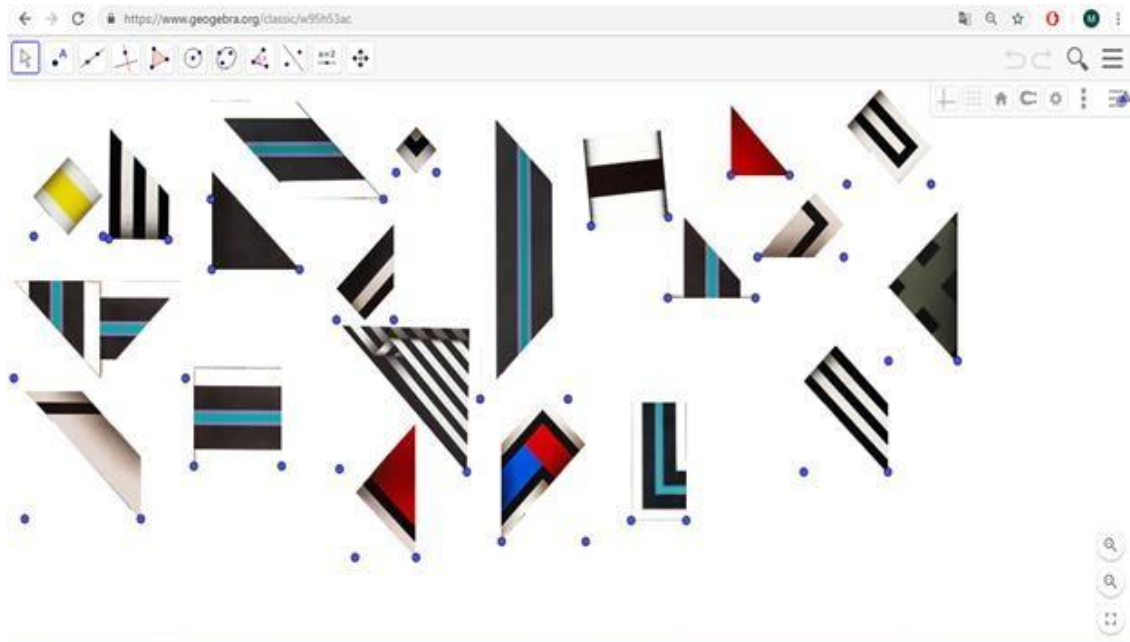



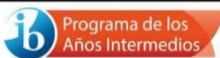


Figura 15. Applet Protocolo para construir obra de la “Actividad 4”.

## Guía del protocolo

 <b>Guía del Protocolo</b> 			
<b>DOCENTE:</b>	MÓNICA MOSQUERA JARAMILLO	<b>Código:</b> PMGC(DP)	9º
<b>ESTUDIANTE</b>		Año V	
TRIMESTRE: I		FECHA: ____/____/____	
<b>CONTENIDOS</b> Transformaciones isométricas	<b>HABILIDADES</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Pensamiento creativo y de transferencia</li> </ul>	<b>CONCEPTOS</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Cambio.</li> <li>Espacio</li> </ul>	
Criterios a evaluar: <input checked="" type="checkbox"/> A <input checked="" type="checkbox"/> B <input checked="" type="checkbox"/> C <input checked="" type="checkbox"/> D			
<b>Nivel de pensamiento</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Conocimiento</li> <li>Comprensión</li> </ul>	<b>TÉRMINOS DE INSTRUCCIÓN</b> <b>Describir:</b> Exponer detalladamente una situación, evento, patrón o proceso. <b>Dibujar con precisión:</b> Representar a lápiz por medio de un diagrama o un gráfico precisos y rotulados. Se debe utilizar la regla para las líneas rectas. Los diagramas se deben dibujar a escala. En los gráficos, cuando el caso lo requiera, los puntos deben aparecer correctamente marcados y unidos, bien por una línea recta, o por una curva suave.		
<p>Especificaciones de la tarea.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Debes Abrir tu perfil de “Geogebra Online”, buscar en los recursos de la profesora el applet “Protocolo Rayo” y seleccionar máximo tres figuras básicas. (Estás han sido tomadas de las obras de Omar Rayo).</li> <li>El objetivo de esta actividad consiste en que construyas tu propia obra con las figuras básicas que elegiste. La profesora te ha entregado una guía en la que debes <b>dibujar con precisión</b> las figuras básicas que elegiste y <b>describir</b> el proceso que llevas a cabo en la construcción de tu obra.</li> <li>Una vez hayas construido tu obra debes:             <ol style="list-style-type: none"> <li>Ocultar todos los puntos, líneas, vectores y demás construcciones y elementos que te permitieron construir tu obra, es decir, en pantalla solo debe verse tu obra.</li> <li>Publicarla en tu perfil.</li> <li>Tomarle un Screenshot y adaptarlo al siguiente formato.</li> </ol> </li> </ol> <p>En Word.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px auto; width: 80%;"> <p>Margen 2,5cm</p> <div style="border: 1px solid green; padding: 20px; text-align: center; margin: 10px auto; width: 60%;"> <p>Imagen centrada y de un tamaño visible</p> </div> <div style="text-align: right; margin-top: 10px;"> <p>Nombre y apellidos del estudiante              Título de la obra              Basado en las obras del pintor Omar Rayo</p> </div> </div> <ol style="list-style-type: none"> <li>Imprimir en papel fotográfico para exponer en el CREA.</li> </ol>			

## Guía 4. Evaluación escrita

 <b>Actividad 4</b> 			
DOCENTE:	MÓNICA MOSQUERA JARAMILLO	Código: PMGC(DP)	9º
ESTUDIANTE		Año V	
TRIMESTRE: I		FECHA: ____/____/____	
<b>CONTENIDOS</b> Transformaciones isométricas	<b>HABILIDADES</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Pensamiento creativo y de transferencia</li> </ul>	<b>CONCEPTOS</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Cambio.</li> <li>Espacio</li> </ul>	
Criterios a evaluar: <input checked="" type="checkbox"/> A <input checked="" type="checkbox"/> B <input checked="" type="checkbox"/> C <input checked="" type="checkbox"/> D			
<b>Nivel de pensamiento</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Conocimiento</li> <li>Comprensión</li> </ul>		<b>TÉRMINOS DE INSTRUCCIÓN</b> <b>Enumerar:</b> Proporcionar una lista de respuestas cortas. <b>Dibujar con precisión:</b> Representar a lápiz por medio de un diagrama o un gráfico precisos y rotulados. Se debe utilizar la regla para las líneas rectas. Los diagramas se deben dibujar a escala. En los gráficos, cuando el caso lo requiera, los puntos deben aparecer correctamente marcados y unidos, bien por una línea recta, o por una curva suave.	
<b>Especificaciones de la tarea</b> Para cerrar el trimestre tu protocolo consiste en crear tu propia obra, para esto encontraras en el applet algunas figuras básicas tomadas de las obras de Omar Rayo de las cuales escogerás MÁXIMO tres con estas y <u>los tres</u> movimientos trabajados en clases anteriores debes construir en Geogebra tu propia Obra.			
1. <b>Dibuja con precisión</b> las figuras básicas que utilizaras y nombra cada una como F1, F2 y F3 según sea el número de figuras escogidas.			
2. <b>Enumerar</b> los pasos que llevas a cabo para realizar tu obra.			

### **Organización de la clase:**

La “actividad 4” correspondió al protocolo que presentaron los estudiantes como cierre de todas las actividades desarrolladas. Esta actividad contó con dos guías, una que especificó las pautas para la entrega y presentación del protocolo la cual se publicó en el campus de la asignatura de geometría del grado noveno y se socializó al inicio de la clase. Y otra guía “Actividad 4” para el estudiante, en la que hizo la descripción de la elaboración de su protocolo (construcción de su obra). Esta guía se le entregó impresa a cada estudiante a manera de evaluación escrita.

El protocolo fue planteado para que los estudiantes lo llevaran a cabo en dos momentos diferentes:

El primer momento se desarrolló en la sala de sistemas del colegio, los estudiantes ingresaron a su campus, descargaron la guía “Guía de Protocolo” y en conjunto con la profesora realizaron la lectura y socialización de las especificaciones de la tarea.

Luego se les entregó la guía “Actividad 4”, que contaba con dos puntos, en el primero los estudiantes debían dibujar con precisión las figuras básicas que iban a utilizar en la construcción de la obra y en el segundo punto enumeraron los pasos que realizaron para culminar sus construcciones.

Después de esto, los estudiantes accedieron a sus perfiles de Geogebra, para buscar y abrir el Applet “Protocolo Omar Rayo”, con base en este empezaron a construir la obra bajo las condiciones expuestas en ambas guías. Y una vez terminaron la construcción hicieron entrega de la guía “Actividad 4”

El segundo momento corresponde a los ítems *c* y *d* del punto tres de la guía de protocolo, los estudiantes tenían la responsabilidad de terminar en casa dichos puntos que

corresponden a tomar un Screenshot a su obra, adaptarlo al formato establecido e imprimirlo para entregar en la siguiente clase.

### **3.4 Puesta en práctica del conjunto de actividades.**

Los estudiantes contaron con una inducción al SGD Geogebra, previa a la implementación de las actividades que estuvo dirigida por la profesora a cargo de la asignatura de geometría. La profesora con anterioridad creó un grupo en la aplicación Online del SGD en el cual inscribió el grupo de estudiantes y al que subió los recursos o materiales necesarios para el desarrollo de las actividades.

#### **Práctica Actividad 1**

Para dar inicio al desarrollo de las actividades la profesora a cargo realizó una presentación en PowerPoint con la que contextualizo a los estudiantes en el trabajo a desarrollar, exponiendo brevemente quién era Omar Rayo y el papel de la geometría en sus obras.

Una vez iniciada la presentación los estudiantes reconocieron de manera inmediata que se trataba del artista Omar Rayo, realizaron comentarios acerca del “Museo Omar Rayo” y compartieron sus experiencias en las visitas realizadas a este lugar. Después de esto la profesora formó tres grupos de cinco estudiantes, les entregó las guías de la actividad y la leyeron en conjunto para aclarar algunos apartados y preguntas de la actividad.

La profesora aclaró que uno de los cinco estudiantes debía hacer el papel de observador y tomar registro de lo que realizaban sus compañeros, para que una vez hubiesen terminado todos el punto tres de la guía, contará y socializara lo observado en su grupo; mientras que a los cuatro estudiantes restantes se les entregó el conjunto de piezas que correspondían a obras que se pueden construir a partir de traslación, rotación y simetría, de esta última se eligieron dos obras diferentes con el fin de reducir la probabilidad de que los estudiantes copiaran el proceso que llevaban a cabo



su compañero, dado que compartían en el mismo grupo.



*Figura 16.* Registros fotográficos tomados durante la implementación de la “Actividad 1”.

La mayoría de los estudiantes alcanzaron a resolver hasta el punto tres de la guía en el tiempo establecido para la clase, se recogieron las guías de los estudiantes y la socialización y solución del punto 4 de la guía tuvo que aplazarse para la siguiente clase.

El tiempo que se tomó para la presentación PowerPoint fueron 15 minutos, 10 minutos de organización y adecuación para la actividad y 35 minutos del desarrollo de la guía.

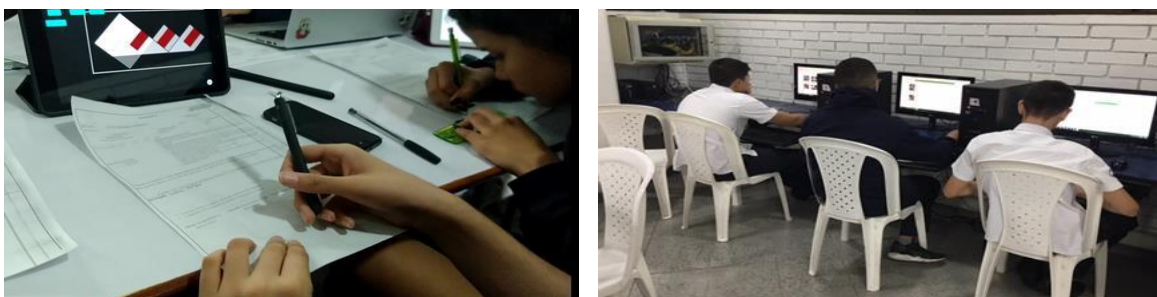
En la siguiente sesión se dieron 10 minutos para que aquellos estudiantes que no lograron resolver hasta el punto tres lo hicieran, luego de esto se llevó a cabo la socialización de la actividad y solución del punto 4 de la guía.

### **Práctica Actividad 2**

Esta práctica la profesora la inició en el aula de clase con la entrega de la guía impresa a cada estudiante y proyectó uno por uno los Applets que se trabajarían, al tiempo que se los asignaba a los cinco estudiantes que se enfocarían en su exploración. Luego de esto dio la instrucción de dirigirse a la sala de sistemas.

Una vez en la sala de sistemas cada estudiante abrió su perfil en Geogebra online, buscó el Applet asignado e iniciaron la exploración y completaron las guías correspondientes las cuales fueron entregadas a la profesora al finalizar la clase.

Algunos estudiantes realizaron la actividad desde sus tabletas dado que algunos computadores de la sala no funcionaban.



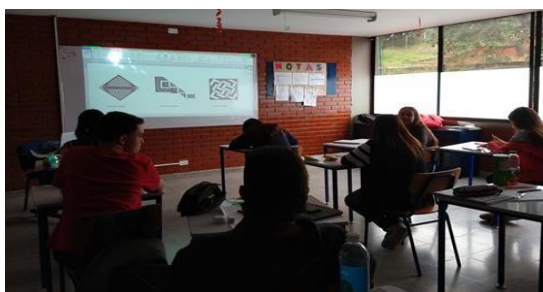
*Figura 17. Registros fotográficos tomados durante la implementación de la “Actividad 2”.*

Esta actividad tuvo una duración de 50 minutos, 10 minutos de organización y 40 minutos de resolución.

Para el cierre de la actividad, en la siguiente clase la profesora realizó la formalización y socialización de los elementos geométricos necesarios para obtener una transformación isométrica. Esto lo hizo por medio del Applet de cierre que recreaba una obra de Omar Rayo con los tres tipos de transformaciones isométricas.

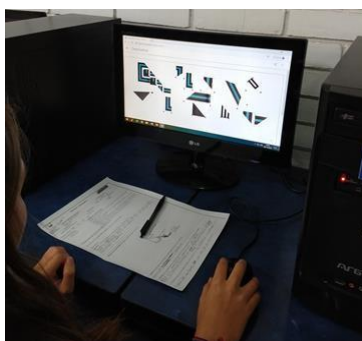
### **Práctica Actividad 3**

Dado que la guía de la “Actividad 3” estaba planeada para realizar en dos momentos diferentes, se dio inicio en el aula de clase donde fueron proyectadas las imágenes de las tres obras que estaban contenidas en los tres Applets a trabajar, la profesora asignó un Applet a cada estudiante, entregó las guías de trabajo, hizo la lectura en conjunto y las aclaraciones pertinentes; terminado esto los estudiantes iniciaron la solución del primer momento de la guía.



*Figura 18.* Registros fotográficos tomados durante la implementación de la “Actividad 3”, Momento 1.

Al terminar dicho momento se les indicó que debían desplazarse a la sala de sistemas para realizar la construcción y el segundo momento de la guía.



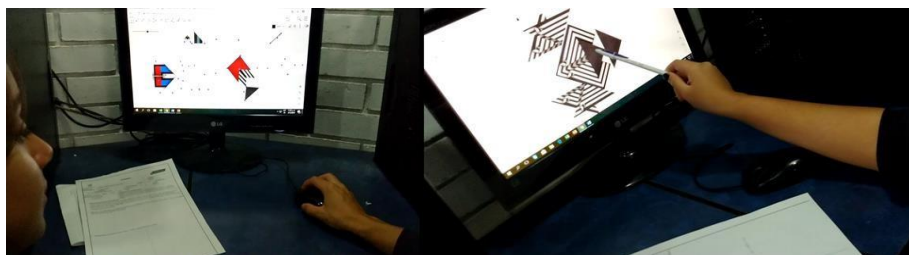
*Figura 19.* Registros fotográficos tomados durante la implementación de la “Actividad 3”, Momento 2.

La puesta en práctica de esta actividad se dio en dos sesiones de clase, en la primera se distribuyó el tiempo así: 10 minutos para organizar la clase y presentar la actividad, 20 minutos para la realización del primer momento de la guía y 20 minutos para instalarse en la sala de sistemas explorar el Applet e iniciar su construcción dado que las sesiones de clase contaban con 50 minutos los estudiantes tuvieron que guardar sus construcciones (en Geogebra online) hasta el punto que hubiesen logrado llegar, entregar las guías a la profesora y terminar en la siguiente sesión de clase.

#### **Práctica Actividad 4**

El desarrollo de esta práctica se inició en la sala de sistemas del colegio la profesora dio la instrucción a los estudiantes para que ingresaran al campus de la asignatura y descargaran la “Guía

del protocolo”, esta se leyó en conjunto aunque algunos estudiantes ya la habían descargado con anterioridad y tenían preguntas puntuales sobre el desarrollo del protocolo, se socializo la guía, se aclararon las pautas y condiciones de elaboración. La profesora indicó que ya podían ingresar a los perfiles de Geogebra online y les entregó la guía “Actividad 4” a cada estudiante y recalcó que la entrega del protocolo en físico se haría en la siguiente clase pero que la construcción debía quedar publicada al terminar la clase.



*Figura 20.* Registros fotográficos tomados durante la implementación de la “Actividad 4”.

La realización de esta actividad tuvo una duración de 50 minutos, aproximadamente 7 minutos de organización y 43 minutos de resolución. Al finalizar la clase la gran mayoría de estudiantes le mostraron y explicaron los resultados de sus construcciones a la profesora.

## CAPÍTULO IV: ANÁLISIS Y VALIDACIÓN

En este capítulo se presentan los resultados de la aplicación, un análisis detallado de las actividades y el alcance de los objetivos del conjunto de actividades, teniendo en cuenta la información y resultados recogidos en cada una de las actividades aplicadas en el Colegio “Jardín Tía Nora y Liceo Los Alpes SAS” a estudiantes del grado noveno, dichos resultados fueron recopilados por medio de registros audiovisuales como fotos, videos y audios realizados por la profesora, registros escritos realizados por los estudiantes en las guías entregadas en cada actividad y los protocolos de construcción que contiene cada una de las construcciones realizadas por los estudiantes en el SGD.

Para el análisis de las actividades se establece en el siguiente orden:

- *Criterios de evaluación por pregunta:* los cuales permitieron determinar la validez de las respuestas de los estudiantes a través de las siguientes categorías, Cumplió (C), Cumplió Parcialmente (CP) y No Cumplió (NC). Estos fueron diseñados con base a la Guía de Matemáticas del Programa de los Años Intermedios (OBI, 2014). La numeración de los criterios corresponde a la numeración de las preguntas en las diferentes actividades
- *Esquema de respuestas:*

Tabla 2.

Esquema para la recopilación de datos de cada pregunta

Número de pregunta									
Transformaciones	Traslación			Rotación			Simetría Axial		
Criterio de valoración	C	C P	NC	C	C P	NC	C	C P	NC
Número de estudiantes									

- *Interpretación de resultados por pregunta:* porcentajes que representan los resultados obtenidos, imágenes que evidencian dichos resultados y algunas apreciaciones sobre los mismos.
- *Validación de los objetivos:* a manera de cierre se relaciona la interpretación de los resultados por pregunta con los objetivos planteados en cada actividad.

#### **4.1 Actividad 1**

##### *Criterios de Valoración*

##### Cumplió:

1. Escribe su respuesta en términos del proceso de construcción teniendo en cuenta el papel de las piezas y los movimientos que podía realizar con estas  
Utiliza las piezas en toda la construcción.
2. Escribe el movimiento que realizó en la construcción de acuerdo a la guía asignada.
3. Indica tres elementos utilizados en las construcciones.
4. Expone de manera detallada lo que se debe tener en cuenta en el proceso de construcción.

##### Cumplió parcialmente:

1. Escribe su respuesta en términos del proceso de construcción sin tener en cuenta el papel de las piezas.  
Utiliza las piezas solo en una parte de la construcción.
2. Escribe con poca precisión el movimiento que realizó en la construcción de acuerdo a la guía asignada
3. Indica uno o dos elementos utilizados en las construcciones.
4. Expone algunos detalles de los elementos que se debe tener en cuenta en el proceso de construcción.

##### No cumplió:

1. No escribe su respuesta en términos del proceso de construcción y no tiene en

cuenta el papel de las piezas.

No utiliza las piezas en la construcción.

2. No escribe el movimiento que realizó en la construcción de acuerdo a la guía asignada
3. No indica los elementos utilizados en las construcciones.
4. No describe lo que debe tener en cuenta en el proceso de construcción.

Tabla 3

Recopilación de las respuestas de la pregunta 1 “Actividad 1”

1. ¿Escribe cuál consideras que debe ser el proceso para construir la figura 1? 1.1. Construcción									
Transformaciones	Traslación			Rotación			Simetría Axial		
Criterio de valoración	C	C.P	NC	C	CP	NC	C	CP	NC
Número de estudiantes (1)	1	2	1	0	1	3	3	1	0
Número de estudiantes (1.1)	1	3	0	0	0	4	1	1	2

De acuerdo con lo anterior se tiene que en la pregunta 1, el 33 % de los estudiantes cumplieron con lo que se planteaba, pues se evidencia la existencia de un proceso de construcción, en el cual tienen en cuenta el papel de las piezas entregadas, el 33 % cumplieron parcialmente, pues aunque escriben un proceso de construcción no tienen en cuenta las piezas entregadas; y finalmente el 33% no cumplieron, dado que sus escritos no hacían referencia a un proceso de construcción y no tienen en cuenta las piezas entregadas. (Ver figura 21).

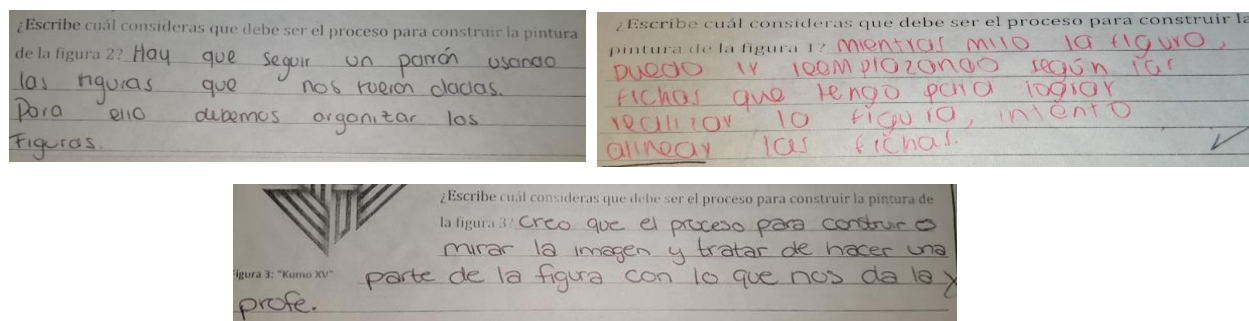


Figura 21. Ejemplos de respuestas a la pregunta 1, guía 1.1 de la “Actividad 1”, “cumplió” parte superior izquierda, “cumplió parcialmente” parte superior derecha y “no cumplió” parte inferior.

A partir de la evaluación por criterios se puede decir que la misma cantidad de estudiantes

se posicionan en cada uno de los criterios, pero al hacer la revisión por el tipo de transformación, en la guía de simetría axial la mayoría de estudiantes lograron cumplir con un proceso de construcción que involucra el movimiento de las piezas, en la guía de rotación la mayoría de los estudiantes no lo lograron, y en la guía de traslación los resultados variaron entre los criterios evaluados.

Por otro lado en relación a la construcción de la obra, se obtuvo que el 17% de los estudiantes lograron construir la obra utilizando las piezas dadas, el 33 % parte de la obra y el 50% hace la construcción pero sin utilizar las piezas dadas, tal como sucedió en las obras relacionadas con la guía de rotación y simetría axial, pero especialmente en la de rotación dado que ninguno de los estudiantes lo logró. (Ver figura 22)



Figura 22. Ejemplos de construcciones pregunta 1, ítem 1.1, “Cumplió” parte superior, “Cumplió parcialmente” parte inferior izquierda, “No cumplió” parte inferior derecha. “Actividad 1”.

Se consideró que esto pudo darse por tratarse del primer acercamiento a los objetos de estudio o poca apropiación del significado de las consignas de la guía asignada.



Tabla 4  
Recopilación de las respuestas de la pregunta 2 “Actividad 1”

2. Escribe los movimientos que tuviste en cuenta para construir la pintura de la figura 1, a partir de las figuras básicas que se te entregaron.									
Transformaciones	Traslación			Rotación			Simetría Axial		
Criterio de valoración	C	CP	NC	C	CP	N.C	C	CP	NC
Número de estudiantes	3	1	0	1	3	0	1	2	1

Dado lo anterior se tiene que en la pregunta 2, el 42% de los estudiantes cumplieron con lo planteado, puesto que escriben el movimiento que realizaron en la construcción de acuerdo a la guía asignada; el 50% de los estudiantes escribieron con poca precisión el movimiento que realizaron en la construcción de acuerdo a la guía asignada y sólo el 8% no escribió el movimiento que realizó en la construcción de acuerdo a la guía asignada. (ver figura 23)

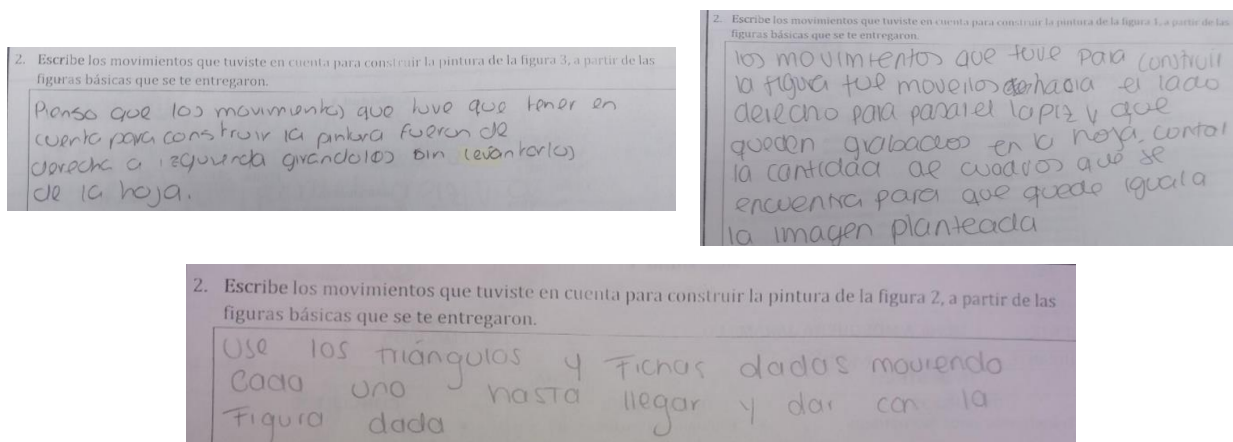


Figura 23. Ejemplos de respuestas “cumplió” parte superior izquierda, “cumplió parcialmente” parte superior derecha y “no cumplió” parte inferior, a la pregunta 2 guía 1.2, 1.1 y 1.3 respectivamente de la “Actividad 1

A la luz de los criterios de evaluación se puede decir que la misma cantidad de estudiantes cumplieron o cumplieron parcialmente con lo solicitado en este punto de la guía, mientras que la diferencia de ambos con respecto al porcentaje de los que no cumplen es bastante amplia. Es de resaltar que en las guías que corresponden a traslación y rotación no hubo estudiantes, que no cumplieran al menos con un aspecto de lo solicitado. También es importante mencionar que para la guía de simetría axial los resultados están distribuidos en

los tres criterios, lo cual se puede atribuir al cambio de sentido que tiene este movimiento, pues los estudiantes describen la simetría como una rotación “de un lado a otro” o una rotación sobre un eje. (ver figura 24).

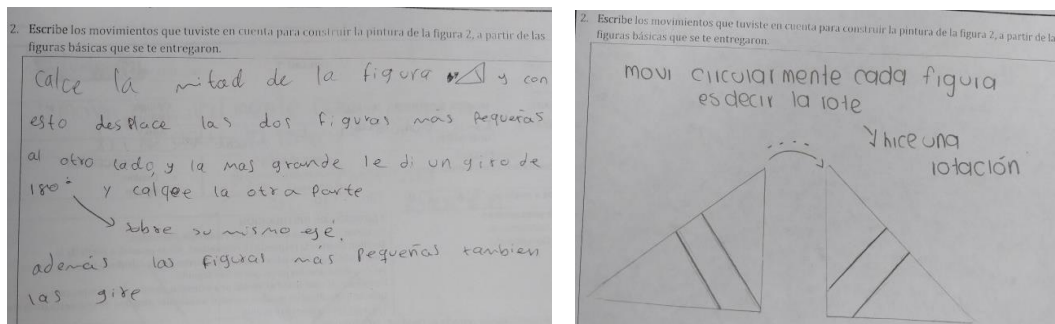


Figura 24. Ejemplo de casos particulares en los que la simetría es vista como una rotación en el espacio, pregunta 2, guía 1.3 “Actividad 1”.

Tabla 5.

Recopilación de las respuestas de la pregunta 3 “Actividad 1”

3. Indica tres elementos que consideres fundamentales para construir la pintura de la figura 1.									
Transformaciones	Traslación			Rotación			Simetría Axial		
Criterio de valoración	C	CP	NC	C	CP	NC	C	CP	NC
Número de estudiantes	0	4	0	0	1	3	0	3	1

En la pregunta 3, se registró que ninguno de los estudiantes Cumplió con lo que se planteaba, pues no indicaron tres elementos que tuvieron que usar en la construcción de la obra como lo expresaba la consigna según la guía asignada, el 67% Cumplieron Parcialmente, pues indicaron al menos uno de los elementos y 33% No cumplieron, ya que los elementos indicados no corresponden realmente a algo que debieron utilizar en la construcción de la obra. (Ver figura 25).

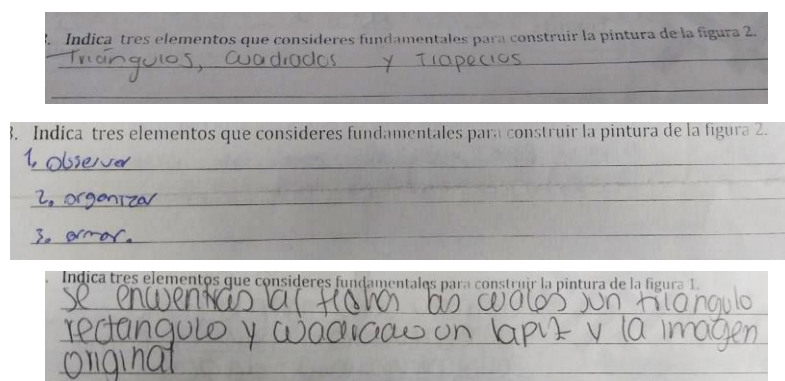


Figura 25. Ejemplos de respuestas a la pregunta 3, “cumplió parcialmente” guía 1.3, 1.1 y “no cumplió” guía 1.2 de la “Actividad 1” respectivamente

A partir de la evaluación por criterios es importante resaltar que aunque en ninguna de las tres guías los estudiantes lograron cumplir plenamente con lo solicitado en la pregunta, todos los estudiantes de la guía de traslación y la mayoría de la guía de simetría indicaron al menos un elemento fundamental para la construcción según su tipo de transformación, pero en ambos casos algunos estudiantes hicieron referencia a elementos como: “la rotación” y “ángulos” (ver figura 26); mientras que los estudiantes a los que se les asignó la guía de rotación no logran indicar elementos que realmente fueron necesarios en la construcción de la obra.

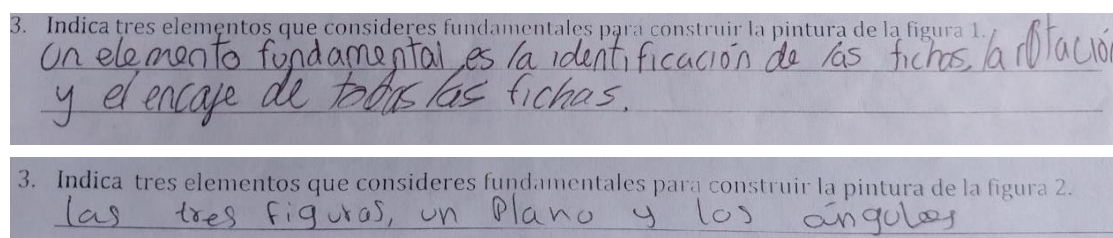


Figura 26. Ejemplos de respuestas particulares de la pregunta 3, guías 1.1 y 1.3 respectivamente.

Tabla 6.  
Recopilación de las respuestas de la pregunta 4 “Actividad 1”

4. Después de construir y socializar tu trabajo de la pintura (figura 1), describe que se debe tener en cuenta durante el proceso de construcción de la pintura, para que quede igual a la figura 1.									
Transformaciones	Traslación			Rotación			Simetría Axial		
Criterio de valoración	C	C P	NC	C	C P	NC	C	C P	NC
Número de estudiantes	0	3	1	0	1	3	0	2	2

En esta última pregunta de la actividad 1, el 50% de los estudiantes Cumplieron Parcialmente con lo que se planteaba, pues exponen con poco detalle lo que se debe tener en cuenta en el proceso de construcción de la obra, y el 50% No Cumplieron, dado que no describen lo que se debe tener en cuenta en el proceso de construcción. (Ver figura 27)

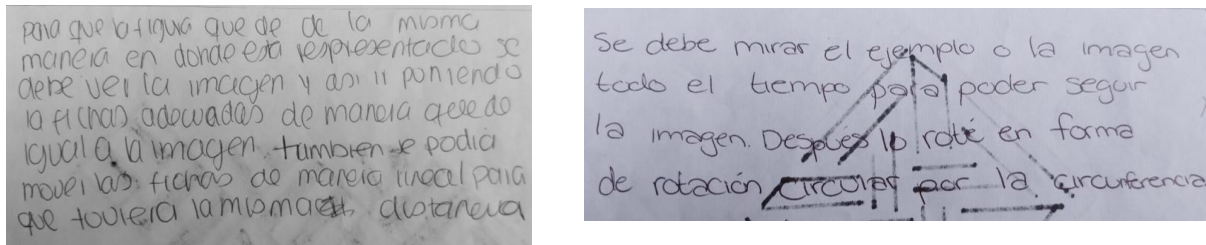


Figura 27. Ejemplos de respuestas “cumplió parcialmente” guía 1.1 y “no cumplió” guía 1.2 de la pregunta 4, “Actividad 1”.

En los criterios de evaluación se tuvo en cuenta que previo a la respuesta del punto cuatro se realizaba la socialización del trabajo desarrollado hasta ese momento, con el fin de que los estudiantes empezaran a apropiarse de los elementos o características de cada transformación, tras ser capaces de expresar con mayor precisión y detalle sus respuestas, por esto tales exigencias y quizás razón por la cual ningún estudiante alcanzó este nivel.

### Validación de los objetivos

Dado que con la primera actividad se pretendía que los estudiantes logaran apropiarse de la existencia de las figuras básicas y el reconocimiento de un movimiento, junto con sus elementos y condiciones que lo generan, se puede decir que el nivel de logro fue satisfactorio. Como se evidencia en el punto dos de la actividad, todos los estudiantes lograron identificar la importancia de las piezas dadas (figuras geométricas básicas) pues para la mayoría hacían parte de los elementos fundamentales en la construcción de la obra.

En cuanto al reconocimiento del movimiento y los elementos que lo generan, es

posible que en las respuestas de la guía no logaran hacer una apreciación clara, pero en el momento de la socialización, para dar inicio a la solución del punto cuatro, los estudiantes hicieron uso de términos como: “eje”, “lineal”, “deslizó”, “arrastró”, “volteo”, “girar” entre otros, acompañados con gestos y expresiones corporales que indicaban un movimiento de las piezas.

Por último, es importante resaltar que los instrumentos utilizados para la puesta en práctica de la actividad no fueron sólo elementos auxiliares de la clase, sino que constituyeron el inicio de un aprendizaje que más adelante se fortalece con el uso del SGD.

## **4.2 Actividad 2**

### *Criterios de valoración*

#### Cumplió:

1. Escribe todas las figuras geométricas básicas de la obra asignada
2. No se evalúa
3. Dibuja, describe e ilustra de manera correcta las figuras básicas y su movimiento.
4. Explica correctamente el movimiento de las figuras geométricas observadas en el Applet
5. Describe de manera correcta la relación entre las distancias/ángulos de las figuras básicas.
6. Selecciona todas las palabras que describen los movimientos que realizan las figuras geométricas básicas.
7. Indica los elementos geométricos necesarios para que cada figura geométrica básica realice su movimiento.

#### Cumplió parcialmente:

1. Escribe algunas figuras básicas de la obra asignada ó escribe más figuras básicas de las que son.
2. No se evalúa
3. Dibuja, describe o ilustra de manera correcta algunas figuras básicas y su

movimiento.

4. Explica con poca precisión el movimiento de las figuras geométricas observadas en el Applet
5. Describe con poco detalle la relación entre las distancias/ángulos de las figuras básicas.
6. Selecciona algunas palabras que describen los movimientos que realizan las figuras geométricas básicas.
7. Indica al menos un elemento geométrico necesario para que cada figura geométrica básica realice su movimiento.

#### No Cumplió

1. No escribe las figuras geométricas básicas de la obra asignada
2. No se evalúa
3. No dibuja o no describe o no ilustra las figuras básicas y su movimiento.
4. No explica el movimiento de las figuras geométricas observadas en el Applet
5. No describe la relación entre las distancias/ángulos de las figuras básicas.
6. No selecciona las palabras que describen los movimientos que realizan las figuras geométricas básicas.
7. No indica los elementos matemáticos/geométricos necesarios para que cada figura geométrica básica realice su movimiento.

Tabla 7.

Recopilación de las respuestas de la pregunta 1 “Actividad 2”

1. Escribe cuales son las figuras geométricas básicas en la representación de la obra que te ha sido asignada.									
Transformaciones	Traslación			Rotación			Simetría Axial		
Criterio de valoración	C	C P	N.C	C	C P	N.C	C	C P	N.C
Número de estudiantes	1	4	0	1	4	0	1	4	0

En este primer punto de la actividad se tiene que el 20% de los estudiantes lograron escribir todas las figuras geométricas básicas a partir de la representación completa de la obra asignada, mientras que el 80% escribe algunas o más de las necesarias, de modo que no hubo estudiantes

que no identificaran y escribieran al menos una de las figuras geométricas básicas (ver figura 28).

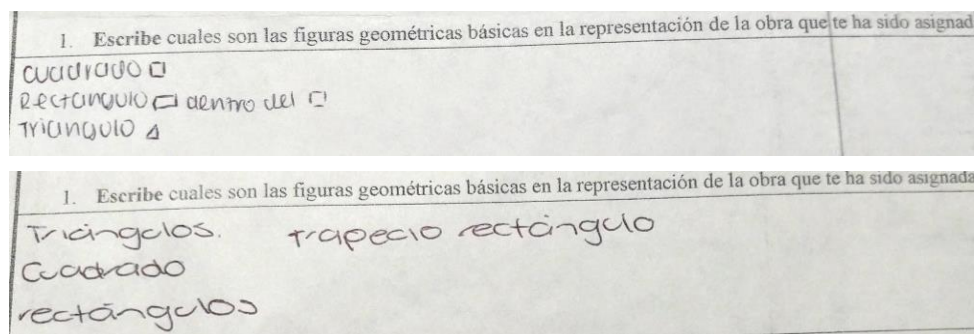


Figura 28. Ejemplos de respuestas “Cumplió” y “cumplió parcialmente” guía 2.1 de la pregunta 1, “Actividad 2”.

De acuerdo con los criterios de evaluación es importante resaltar que en este punto los estudiantes reconocen al menos algunas de las figuras básicas de las obras asignadas, lo cual lleva a pensar que, aunque hace falta precisión todos los estudiantes se apropiaron de la existencia de figuras básicas para la construcción de las obras.

Tabla 8.

Recopilación de las respuestas de la pregunta 3 “Actividad 2”

3. Completa la tabla teniendo en cuenta lo observado en el Applet: Dibuje con precisión las figuras básicas; Describe el movimiento de cada figura básica; Ilustra, representa o dibuja aproximadamente como es dicho movimiento.									
Transformaciones	Traslación			Rotación			Simetría Axial		
Criterio de valoración	C	C P	NC	C	CP	NC	C	C P	NC
Número de estudiantes	2	3	0	0	5	0	2	0	3

En el punto tres se obtuvo un 27% correspondiente a los estudiantes que dibujan, describen e ilustran de manera correcta las figuras básicas y su movimiento, el 53% de los estudiantes dibujan, describen o ilustran de manera correcta algunas figuras básicas y su movimiento y solo un 20 % de los estudiantes no logra cumplir con al menos uno de los requisitos de la pregunta tres. (Ver figura 29).

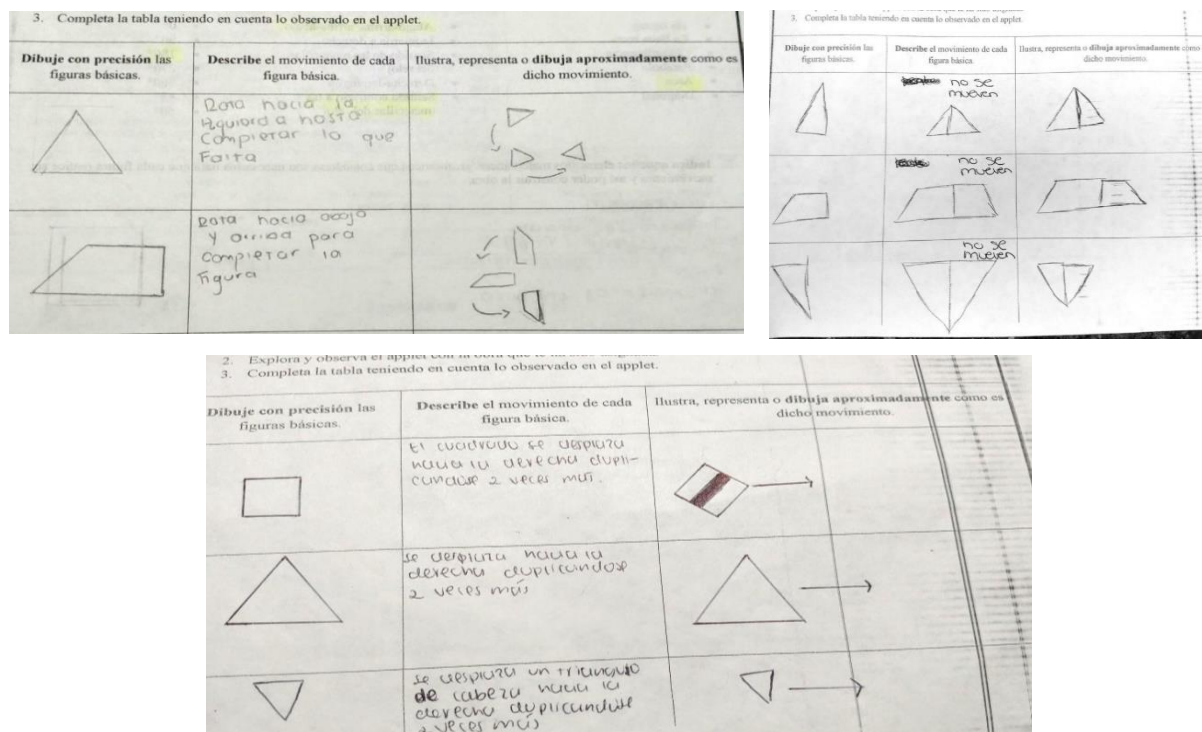


Figura 29. Ejemplos de respuestas, “Cumplió” parte inferior guía 2.1, “cumplió parcialmente” parte superior izquierda, guía 2.2 y “no cumplió” parte superior derecha, guía 2.3 a la pregunta 3 “Actividad 2

Desde los criterios de evaluación en este punto, es importante resaltar que sólo los estudiantes a los que se les asignó la guía la simetría axial no cumplieron con lo exigido, principalmente por el hecho de que no describieron el movimiento de las figuras, dado que lo asociaron a una “aparición de la nada” o que “no se mueve” (ver en Figura 29, parte superior derecha), lo cual quizás sea válido desde el Applet, dado que el movimiento como tal es algo que no se puede representar en el plano.

Tabla 9.

Recopilación de las respuestas de la pregunta 4 “Actividad 2”

4. En términos generales, explica la similitud o patrón que existe entre el movimiento de cada una de las figuras geométricas observadas en el Applet.									
Transformaciones	Traslación			Rotación			Simetría Axial		
Criterio de valoración	C	CP	NC	C	CP	NC	C	CP	NC
Número de estudiantes	4	0	1	1	3	1	2	1	2

En este punto se encontró que los estudiantes que explican correctamente el



movimiento de las figuras geométricas observadas en el Applet representan un 47%, mientras que los estudiantes que explican con poca precisión el movimiento de las figuras geométricas observadas en el Applet y aquellos estudiantes que no realizan una explicación representan el 26% cada uno. (Ver figura 30)

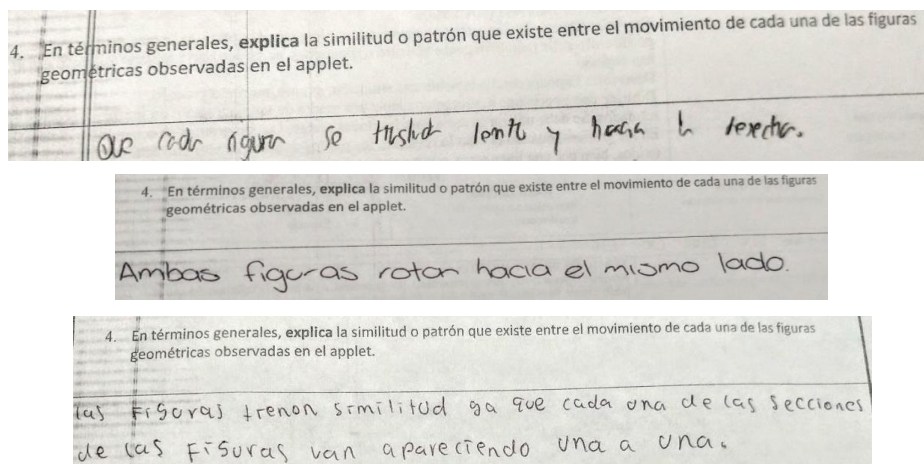


Figura 30. Ejemplos de respuestas “Cumplió” guía 2.1, “cumplió parcialmente” guía 2.2 y “no cumplió” guía 2.3, respectivamente de la pregunta 4, Actividad 2”.

Teniendo en cuenta los criterios que permitieron evaluar este punto se pudo establecer que aproximadamente la mitad de los estudiantes describen el movimiento realizado por las piezas en el Applet en el cual se presenta la obra, aunque cabe precisar que de dicha cantidad la mayoría corresponden en primer lugar a la guía que trabajaba la traslación y en segundo lugar la que trabajaba la simetría axial.

Tabla 10.

Recopilación de las respuestas de la pregunta 5b - 5 “Actividad 2”

5b. - 5. Describe cómo son los ángulos/distancias entre sí.									
Transformaciones	Traslación			Rotación			Simetría Axial		
Criterio de valoración	C	CP	NC	C	CP	NC	C	CP	NC
Número de estudiantes	0	1	4	0	1	4	0	2	3

Dado lo anterior se registró que sólo un 27% de los estudiantes describen con poco detalle la relación entre las distancias/ángulos de las figuras geométricas básicas, es decir, cumplieron parcialmente con lo que se pedía, mientras que el 73% de los estudiantes no describen relación

alguna entre las distancias/ángulos de las figuras básicas. (Ver figura 31).

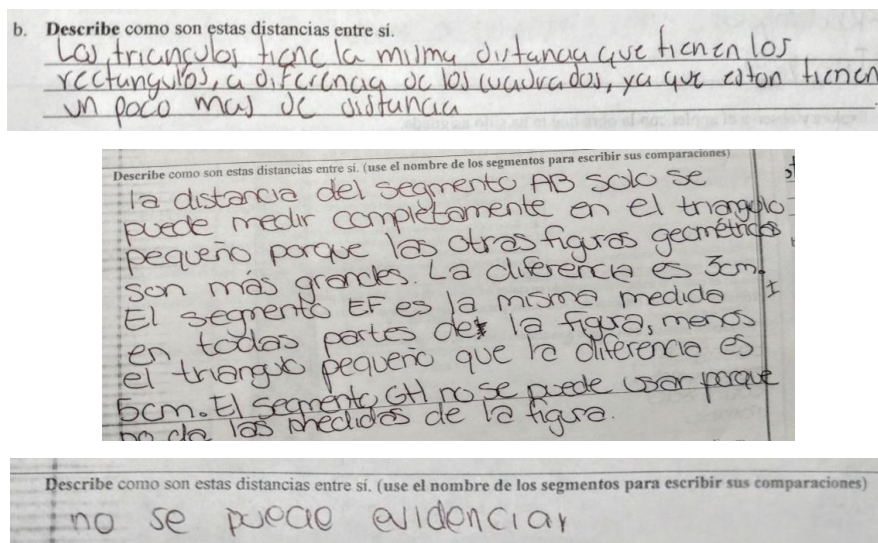


Figura 31. Ejemplos de respuestas “Cumplió parcialmente” guía 2.1 y 2.3 y “no cumplió” guía 2.3, respectivamente de la pregunta 5b, “Actividad2”.

Antes de resolver este punto se les solicitó a los estudiantes medir los ángulos o distancias de las figuras correspondientes en el Applet según sus guías, lo cual desde la práctica no fue una tarea fácil para los estudiantes pues como se observa la mayoría no lograron cumplir con lo planteado, lo que se podría relacionar con el hecho de que hasta el momento ninguna de las preguntas estuvo relacionada con las medidas de las figuras geométricas básicas, ya que en este punto se quería hacer evidente para los estudiantes a partir de las medidas y no solo de lo visual que los figuras y sus movimientos son iguales en todo momento.

Tabla 11.

Recopilación de las respuestas de la pregunta 6 “Actividad 2”

6. Teniendo en cuenta los movimientos que realizaron las figuras geométricas básicas en el Applet, selecciona de cada lista de palabras las opciones que mejor se adaptan a dichos movimientos.									
Transformaciones	Traslación			Rotación			Simetría Axial		
Criterio de valoración	C	CP	NC	C	CP	NC	C	CP	NC
Número de estudiantes	4	1	0	0	5	0	NO aplica	NO aplica	NO aplica

Esta consigna sólo la realizaron los estudiantes que tenían las guías de translación y

rotación por lo tanto de diez estudiantes el 40% selecciona de un listado, todas las palabras que describen las características de los movimientos que realizan las figuras geométricas básicas, y un 60% selecciona algunas palabras que describen los movimientos que realizan las figuras geométricas básicas. (Ver figura 32).

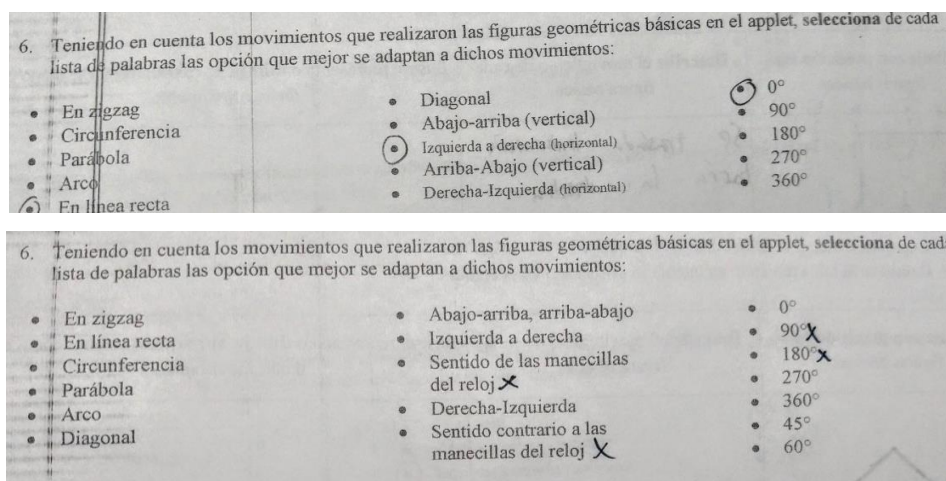


Figura 32. Ejemplos de respuestas “Cumplió” guía 2.1 y “cumplió parcialmente” guía 2.2 respectivamente de la pregunta 6, “Actividad 2”.

De este punto es válido resaltar que no hubo estudiantes que no cumplieran con los criterios establecidos para resolverlo, por el contrario los estudiantes identificaron y respondieron de manera correcta seleccionando dos o tres elementos de las respectivas listas que les fueron dadas. Y como en el punto anterior los estudiantes cuya guía correspondía a traslación fueron los más acertados.

Tabla 12.  
Recopilación de las respuestas de la pregunta 7 o 6 “Actividad 2”

7 ó 6. Indica aquellos elementos matemáticos/geométricos que consideras son necesarios para que cada figura realice su movimiento y así poder construir la obra.									
Transformaciones	Traslación			Rotación			Simetría Axial		
Criterio de valoración	C	CP	NC	C	CP	NC	C	CP	NC
Número de estudiantes	0	2	3	0	2	3	0	1	4

La “Actividad 2” se concluye con este punto, en el cual se evidenció que el 33% de los estudiantes lograron indicar al menos un elemento matemático/geométrico necesario

para que cada figura geométrica básica realice su movimiento, y un 67% no indicaron los elementos geométricos necesarios para que cada figura geométrica básica realice su movimiento. (Ver figura 33)

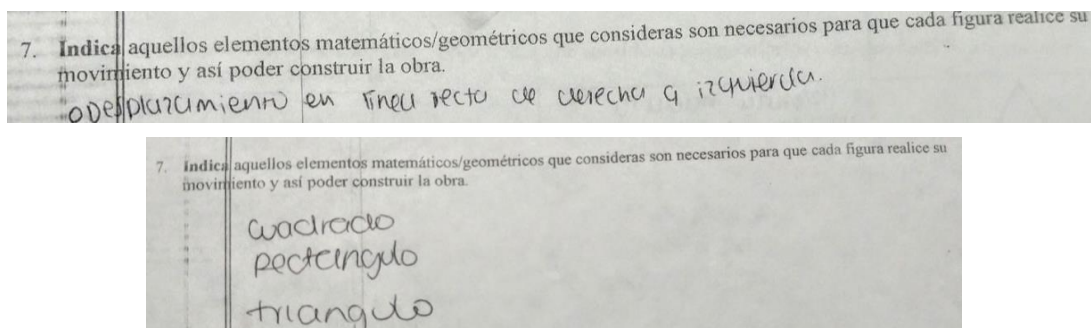


Figura 33. Ejemplos de respuestas “Cumplió parcialmente” guía 2.1 y “no cumplió” guía 2.2 respectivamente de la pregunta 7, “Actividad 2”.

Para el cierre de esta actividad se quería que los estudiantes identificaran elementos característicos de cada transformación isométrica o movimiento de las figuras observadas en el Applet, lo cual no fue tan satisfactorio dado que la mayoría no lo lograron, posiblemente porque no entendieron el enunciado de la pregunta, como se puede observar en la figura 33 de la parte inferior, pues nombraron las figuras cuando estas hacían parte de la pregunta. Aunque es importante resaltar que la tercera parte de los estudiantes lograron escribir al menos un elemento necesario para el movimiento de las figuras.

### Validación de los objetivos

El desarrollo y revisión de esta actividad permitió establecer que los estudiantes reconocieron las figuras geométricas que se consideraron básicas para la construcción de una obra de Omar Rayo, pues aunque no las dibujaron con precisión o a escala como lo sugiere el término de instrucción en la guía, realizaron bosquejos o dibujos a mano alzada en los cuales se identificaron con claridad las figuras geométricas a las que hacían referencia.

Se esperaba que al enfrentarse al Applet observar y explorar los movimientos que

realizaban las figuras básicas, les fuese más fácil describirlos en cada una de las guías, sin embargo las guías de traslación y rotación fueron las de mayor acierto en este aspecto como se evidencia en los porcentajes y apreciaciones expuestas en párrafos anteriores, dada la inmediatez del software y en particular al diseño del Applet. La simetría axial es una transformación isométrica cuyo movimiento no deja un rastro en el plano dada su naturaleza pues de haberlo hecho, hubiese sido necesario usar el SGD en 3D y esto se salía de las definiciones y conceptos utilizados en este trabajo. Es tal vez esta una razón por la cual los estudiantes no cumplieron con lo propuesto en la guía 2.3.

Aun así, se rescata que es a través de las observaciones, la exploración y el uso del SGD que los estudiantes tuvieron la posibilidad de ir y volver en el proceso de construcción, permitiéndoles reconocer los elementos matemáticos/geométricos de las transformaciones isométricas.

En los Applets que se presentaron a los estudiantes, sólo fueron visibles las herramientas necesarias para la solución de una de las preguntas de la guía, con el fin de acercarlos al reconocimiento y apropiación de las características de los movimientos observados, aun así este punto fue difícil llevarlo a cabo por los estudiantes no por la naturaleza de la herramienta sino porque en la construcción del Applet no se dejaron visibles los puntos que indicaban los vértices de las figuras.

### **4.3 Actividad 3**

#### *Criterios de valoración*

Cumplió:

1. Escribe un plan para construir la obra, teniendo en cuenta movimientos y figuras
2. básicas.
3. Dibuja con precisión las figuras básicas necesarias para la construcción y válida

correctamente.

4. Indica el movimiento que debe realizar y válida correctamente
5. Indica todos los elementos o condiciones necesarias para generar el movimiento elegido y válida correctamente
6. Responde el número exacto de veces que realizó el movimiento y válida correctamente
7. Dibuja y escribe todas las herramientas de “Geogebra” que le permiten construir la obra.

Cumplió parcialmente:

1. Escribe un plan para construir la obra, y no tiene en cuenta los movimientos o las figuras básicas.
2. Dibuja con precisión algunas figuras básicas necesarias para la construcción y válida correctamente.
3. Indica el movimiento que debe realizar, aunque la validación no es del todo correcta.
4. Indica los elementos o condiciones necesarias, o indica más de los elementos o condiciones necesarias para generar el movimiento elegido y válida correctamente
5. Responde un número mayor al número de veces que realizó el movimiento o no responde, pero válida correctamente
6. Dibuja y escribe algunas herramientas de “Geogebra” que le permiten construir la obra.

No cumplió:

1. No escribe un plan para construir la obra, ni tiene en cuenta los movimientos o figuras básicas.
2. No dibuja con precisión las figuras básicas necesarias para la construcción ni válida correctamente.
3. No indica el movimiento que debe realizar y no válida correctamente.
4. No indica los elementos o condiciones necesarias para generar el movimiento elegido y no válida correctamente
5. Responde un número mayor al número de veces que realizó el movimiento o no responde, y no válida correctamente
6. No dibuja ni escribe las herramientas de “Geogebra” que le permiten construir la obra.

Tabla 13.

Recopilación de las respuestas de la pregunta 1 “Actividad 3”

Momento 1									
1.Describe cuál es tu plan para construir la obra de Omar Rayo									
Transformaciones	Traslación			Rotación			Simetría Axial		
Criterio de valoración	C	CP	NC	C	CP	NC	C	CP	NC
Número de estudiantes	0	2	3	1	2	2	1	3	1

Dado lo anterior se tiene que, el 13 % de los estudiantes lograron escribir un plan para construir la obra, teniendo en cuenta movimientos y figuras básicas, el 47% alcanzan a escribir un plan para construir la obra, pero no tienen en cuenta los movimientos o las figuras básicas y el 40% no cumplen con las especificaciones que se establecieron en este punto. (Ver figura 34)

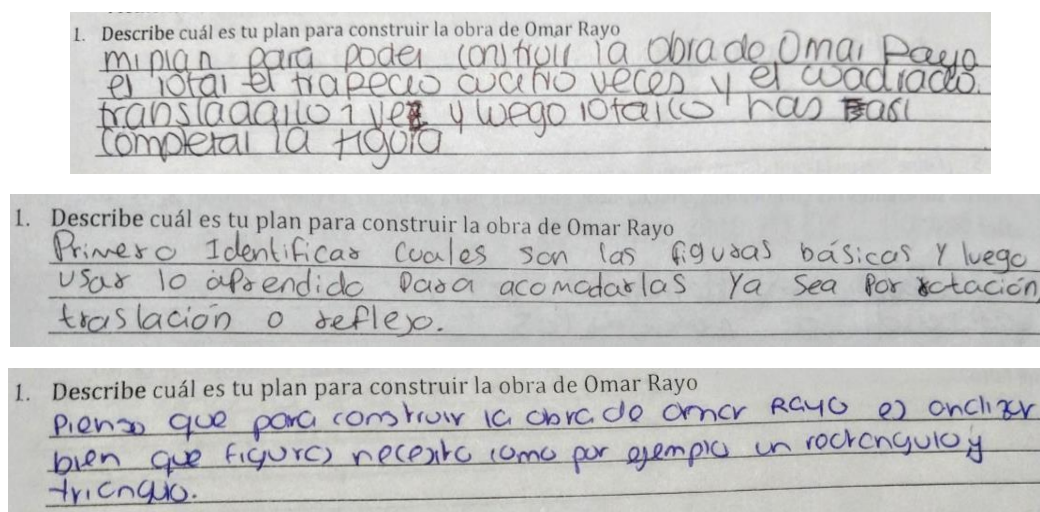


Figura 34. Ejemplos de respuestas, “Cumplió” Applet 3.2, “cumplió parcialmente” Applet 3.3 y “no cumplió” Applet 3.2 respectivamente de la pregunta 1, “Actividad 3”.

Dadas las respuestas de los estudiantes y los resultados que señalan que la gran mayoría de los estudiantes sólo tienen en cuenta algunos elementos como las figuras básicas para llevar a cabo una construcción o no tienen en cuenta al menos un elemento, se puede decir que no les es fácil prever un resultado y aún más, se les dificulta describir el proceso para llegar a él.



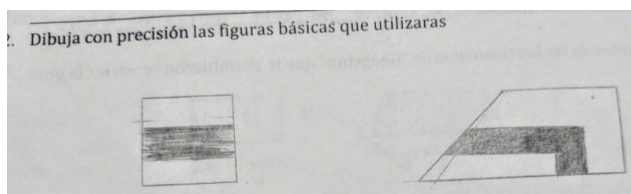
Tabla 14.

Recopilación de las respuestas de las preguntas 2 y 1 “Actividad 3”

Momento 1.									
2. Dibuja con precisión las figuras básicas que utilizaras									
Momento 2.									
1. ¿Coincidieron las figuras básicas elegidas? ¿Cuáles te faltaron?									
Transformaciones	Traslación			Rotación			Simetría Axial		
Criterio de valoración	C	CP	NC	C	CP	NC	C	CP	NC
Número de estudiantes	1	4	0	3	0	2	1	0	4

En este punto los estudiantes que dibujan con precisión las figuras básicas necesarias para la construcción y validan correctamente representan un 33%, los estudiantes que dibujan con precisión algunas figuras básicas necesarias para la construcción y validan correctamente representan el 27% y aquellos estudiantes que no dibujan con precisión las figuras básicas necesarias para la construcción ni validan correctamente representan el 40%. (Ver figura 35)

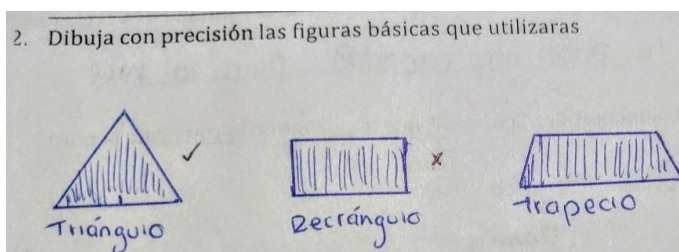
## Momento 1



## Momento 2

1. ¿Coincidieron las figuras básicas elegidas? ¿Cuáles te faltaron?  
 Las 2 figuras básicas que elegí son las mismas que están en la actividad

## Momento 1



## Momento 2

1. ¿Coincidieron las figuras básicas elegidas? ¿Cuáles te faltaron?  
 Sí, menos el rectángulo



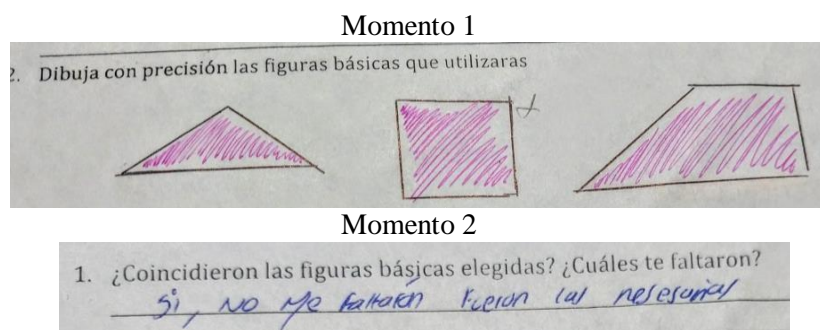


Figura 35. Ejemplos de respuestas “cumplió” Applet 3.1, “cumplió parcialmente” Applet 3.2 y “No cumplió” Applet 3.3 respectivamente de las preguntas 2 y 1 de la “Actividad 3”.

En ambos puntos de la actividad es de resaltar el hecho que la mayoría de los estudiantes logran identificar figuras geométricas básicas de las obras de Omar Rayo necesarias para su construcción, pero no lograron hacer una correcta validación al dibujar más figuras de las necesarias y no decir que realmente no coincidieron ya que por el contrario sobraron figuras y no faltaron, elemento importante para tener en consideración y si se llegase a dar una futura aplicación, incluir la pregunta ¿sobraron figuras?, la cual ayudaría a evitar interpretaciones erróneas por parte de los estudiantes.

Tabla 15.  
Recopilación de las respuestas de las preguntas 3 y 2-3 “Actividad 3”

Momento 1.										
3.Indica el tipo de movimiento o movimientos que vas a realizar										
Momento 2.										
2.¿El tipo de movimiento elegido te permitió construir la obra? Si_____No _____ ¿Por qué?				3. ¿Tuviste que cambiar el movimiento elegido? Si_____No _____ ¿Por cuál movimiento? ¿Qué elementos te permitieron determinar que elegiste el movimiento correcto						
Transformaciones		Traslación		Rotación			Simetría Axial			
Criterio de valoración		C	C. P	N.C	C	C. P	N.C	C	C. P	N.C
Número de estudiantes		1	4	0	2	1	2	2	0	3

De acuerdo con lo anterior se establece que los estudiantes que indican el movimiento que

deben realizar y validan correctamente, es decir, que cumplen con la especificación del “Momento 1” y del “Momento 2” representan un 33%, entre los estudiantes que indican el movimiento que deben realizar, pero la validación no es del todo correcta se encuentran el 33% y aquellos que no indican el movimiento que deben realizar y no validan de manera correcta representan el 33%. (Ver figura 36).

### Momento 1

3. Indica el tipo de movimiento o movimientos que vas a realizar  
 ROTACIÓN, necesito rotar las 2 figuras blancas hasta formar la obra.

### Momento 2

2. ¿El tipo de movimiento elegido te permitió construir la obra? Si ☒ No ☐  
 ¿Por qué?  
 Solo necesito rotar las 2 figuras blancas para formar toda la obra por medio de un punto, los ángulos y las figuras.  
 3. ¿Tuviste que cambiar el movimiento elegido? Si ☐ No ☒  
 ¿Por cuál movimiento?  
 ¿Qué elementos te permitieron determinar que elegiste el movimiento correcto? Observar que la obra está formada por solo 2 figuras y que solo se deben rotar para formarla.

### Momento 1

3. Indica el tipo de movimiento o movimientos que vas a realizar  
 pienso que realizare el movimiento de reflexión y traslación.

### Momento 2

2. ¿El tipo de movimiento elegido te permitió construir la obra? Si ☒ No ☐  
 ¿Por qué?  
 ya que elegí traslación y reflexión pero al final solo uso traslación.  
 3. ¿Tuviste que cambiar el movimiento elegido? Si ☒ No ☐  
 ¿Por cuál movimiento? traslación por reflexión.  
 ¿Qué elementos te permitieron determinar que elegiste el movimiento correcto? ya que tenía que mover los triángulos de un lado a otro.

### Momento 1

3. Indica el tipo de movimiento o movimientos que vas a realizar  
 Reflexión - traslación. Simetría

## Momento 2

2. ¿El tipo de movimiento elegido te permitió construir la obra? Si X No \_\_\_\_  
 ¿Por qué?  
ya que me permitió a como dar las figuras de manera  
como las obras de Omar Raso

3. ¿Tuviste que cambiar el movimiento elegido? Si \_\_\_\_ No X  
 ¿Por cuál movimiento? \_\_\_\_  
 ¿Qué elementos te permitieron determinar que elegiste el movimiento  
 correcto? la congruencia de las figuras me permitió  
determinar si estuvieron bien o mal.

Figura 36. Ejemplos de respuestas “cumplió” Applet 3.1, “cumplió parcialmente” Applet 3.2 y “No cumplió” Applet 3.3 respectivamente de las preguntas 3 y 2-3, de la “Actividad 3”.

Este punto como el primero de esta actividad le demanda al estudiante prever un posible objeto matemático entre la traslación, rotación y simetría axial. Es tal vez por esto que en cada criterio de evaluación se tiene el mismo número de estudiantes, pues estos en el afán de obtener buenas calificaciones no seleccionaron un solo objeto, sino que nombraron dos o los tres y luego en el segundo momento de validación asumieron que estaba bien porque aunque hubiesen nombrado los tres habían utilizado uno de estos para su construcción.

Tabla 16.

Recopilación de las respuestas de las preguntas 4 y 4 “Actividad 3”

Momento 1.									
4. Escribe las condiciones o elementos necesarios para generar el movimiento elegido.									
Momento 2.									
4.¿Fueron suficientes las condiciones o elementos elegidos para generar el movimiento? Si ____ No ____ ¿Qué faltó?									
Transformaciones	Traslación			Rotación			Simetría Axial		
Criterio de valoración	C	CP	NC	C	CP	NC	C	CP	NC
Número de estudiantes	4	1	0	0	3	2	3	0	2

En las soluciones de estos puntos se obtuvo que el 47% de los estudiantes indican todos los elementos o condiciones necesarias para generar el movimiento elegido y validan correctamente, aquellos estudiantes que cumplieron parcialmente con este punto sólo lograron

validar correctamente dado que a la hora de indicar los movimientos del “Momento 1” los nombraron todos o dos movimientos, con el fin de acertar en al menos uno y que no les quedará mal este punto, representado el 26%; y los estudiantes que no cumplieron con ninguna de las especificaciones de la pregunta representan el 26% restante (ver figura 37)

#### Momento 1

1. Escribe las condiciones o elementos necesarios para generar el movimiento elegido.  
un vector, un punto y la figura

#### Momento 2

4. ¿Fueron suficientes las condiciones o elementos elegidos para generar el movimiento? Si ☒ No ☐  
¿Qué faltó?  
Nada, solo falta la última figura

#### Momento 1

1. Escribe las condiciones o elementos necesarios para generar el movimiento elegido.  
necesito que se rote a  $180^\circ$ , también un punto de inicio/punto y que sea contrario a las manecillas

#### Momento 2

4. ¿Fueron suficientes las condiciones o elementos elegidos para generar el movimiento? Si ☒ No ☐  
¿Qué faltó?  
no falta nada porque todos los movimientos que ya hice fueron con un punto y rotación

#### Momento 1

1. Escribe las condiciones o elementos necesarios para generar el movimiento elegido.  
Rotación respecto un punto y el grado de  $70^\circ$  en sentido de las manecillas del reloj

#### Momento 2

4. ¿Fueron suficientes las condiciones o elementos elegidos para generar el movimiento? Si ☒ No ☐  
¿Qué faltó?

Figura 37. Ejemplos de respuestas “cumplió” Applet 3.1, “cumplió parcialmente” Applet 3.2 y “no cumplió” Applet 3.3, respectivamente de la pregunta 4, “Actividad 3”.

En este punto de la actividad la mayoría de los estudiantes logró escribir los elementos que necesitaban para poder generar el movimiento elegido en la construcción de la obra asignada, aunque no fueron del todo precisos al momento de escribirlos y su validación no sea la correcta en todos los casos.

Tabla 17.

Recopilación de las respuestas de las preguntas 5 y 5 “Actividad 3”

Momento 1. 5.¿Cuántas veces va a realizar dicho movimiento (s)?									
Momento 2. 5. ¿Coincidieron la cantidad de veces que planeaste realizar el movimiento con la cantidad de veces que realmente realizaste el movimiento?									
Transformaciones	Traslación			Rotación			Simetría Axial		
Criterio de valoración	C	CP	NC	C	CP	NC	C	CP	NC
Número de estudiantes	0	3	2	0	3	2	1	1	3

De lo anterior se establece que el 6% de los estudiantes responde el número exacto de veces que realizó el movimiento y lo valida de manera correcta, mientras que el porcentaje que representa a aquellos estudiantes que responden un número mayor al número de veces que realizó el movimiento o no responde, pero válida correctamente es el 47%. Este porcentaje es igual para los estudiantes que no cumplen con los criterios establecidos. (Ver figura 38).

## Momento 1

5. ¿Cuántas veces va a realizar dicho movimiento (s)?

4 veces porque hay 4 figuras

## Momento 2

5. ¿Coincidieron la cantidad de veces que planeaste realizar el movimiento con la cantidad de veces que realmente realizaste el movimiento?

Si, ya que hice el movimiento dependiendo de las figuras

## Momento 1

5. ¿Cuántas veces va a realizar dicho movimiento (s)?

No lo sé

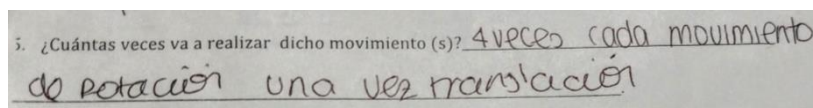
## Momento 2

5. ¿Coincidieron la cantidad de veces que planeaste realizar el movimiento con la cantidad de veces que realmente realizaste el movimiento?

Como no sabía, no puse una cantidad, pero lo hice 5 veces



## Momento 1



## Momento 2

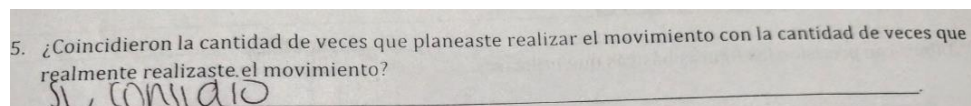


Figura 38. Ejemplos de respuestas “cumplió” Applet 3.3, “cumplió parcialmente” Applet 3.1 y “No cumplió” Applet 3.2 respectivamente de la pregunta 5, “Actividad 3”.

Se evidencia de nuevo que a los estudiantes se les dificulta realizar procesos de visualización dado que sólo un estudiante estableció por anticipado el número de movimientos que haría y este coincidió con los que se presentaban en la obra y su construcción. Sin embargo, en el “Momento 2” algunos argumentos de la validación fueron claros en las guías que desarrollaron la traslación y la rotación.

Tabla 18.  
Recopilación de las respuestas de las preguntas 6 “Actividad 3”

Momento 2.									
6. Dibuje y escriba el nombre de las herramientas de “Geogebra” que te permitieron recrear la obra.									
Transformaciones	Traslación			Rotación			Simetría Axial		
Criterio de valoración	C	CP	NC	C	CP	NC	C	CP	NC
Número de estudiantes	4	0	1	3	1	1	2	1	2

El cierre de la “Actividad 2” muestra que un 60% de los estudiantes dibujan y escriben todas las herramientas de “Geogebra” que les permitieron construir la obra, un 13% representa a los estudiantes que dibujan y escriben sólo algunas de las herramientas que debieron usar para la construcción y, los estudiantes que no alcanzaron ninguno de los criterios establecidos representan el 26% (ver figura 39).

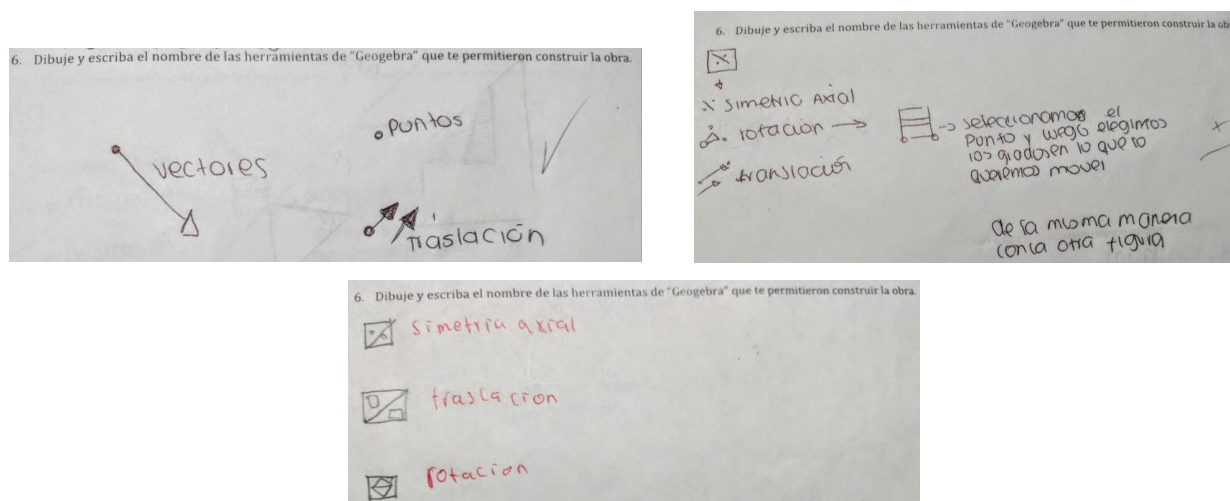


Figura 39. Ejemplos de respuestas “Cumplió” parte superior izquierda, “cumplió parcialmente” parte superior derecha y “no cumplió” parte inferior, de la pregunta 5 Applet 3.1 “Actividad 3”.

Para finalizar la actividad los estudiantes debían dibujar las herramientas que utilizaron de Geogebra para la construcción, lo cual muestra un buen nivel de apropiación de las herramientas del SGD Geogebra por parte de los estudiantes, a pesar de que un poco menos de la tercera parte de los estudiantes no lograron cumplir con lo indicado en la pregunta, quizás por el hecho que desde un principio no tenían claro el tipo de transformación a usar, lo cual los llevó a explorar por las distintas transformaciones haciéndoles concluir que de no haberlas utilizado todas no habrían podido construir la obra, como se puede evidenciar en la parte superior derecha de la figura 39 , aunque en este caso puntualiza en aquella que realmente le permitió construir la obra.

#### 4.3.1 Validación de los objetivos

Uno de los objetivos de esta actividad era que los estudiantes empezaran a desarrollar procesos de visualización, presentándoles el producto final para que pudieran prever la manera o el proceso para llegar a dicho producto, sin embargo, se encontró que los estudiantes tienen dificultades para crear un plan que los lleve a una posible solución, en este caso a la construcción de una obra de Omar Rayo, si bien identificaron las figuras básicas o algunos movimientos en el

plano, los elementos necesarios para realizar el movimiento que lleva a construir la obra sólo los reconocen cuando se enfrentan y trabajan en el SGD.

Cabe aclarar que aunque en el primer momento todos los estudiantes no lograron visualizar una posible solución, el manejo del SGD, las acciones y devoluciones que reciben los estudiante por parte de este les permitieron confrontar y evaluar sus procesos de manera que finalmente pudieran construir la obra que se les había asignado, es decir, cada vez que los estudiantes intentaba construir la obra, si esta no correspondía con la consignada en el Applet, debía replantar sus procesos de construcción.

En lo que respecta a la validación por parte de los estudiantes en el segundo momento de la actividad los resultados obtenidos no fueron los esperados, dado que muchos estudiantes contestaron SI en varias de las preguntas, solo por el hecho haber nombrado lo que usaron, sin tener cuenta aquello que no usaron. Siendo un posiblemente elemento causante de este error la falta de precisión en las preguntas, puesto que solo permitían aclarar una falla en caso que hiciese falta algo y no el caso más común que se presentó, que fue nombrar cosas de más.

<https://www.geogebra.org/m/s6ym4jgr>

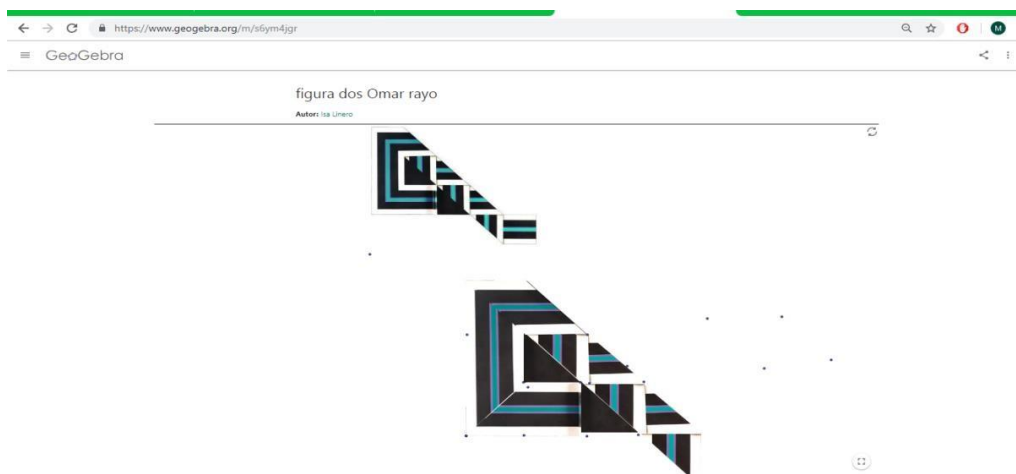


Figura 40. Ejemplo de construcción de la obra del Applet 3.1 “Actividad 3”.



<https://www.geogebra.org/m/ev27zxvw>

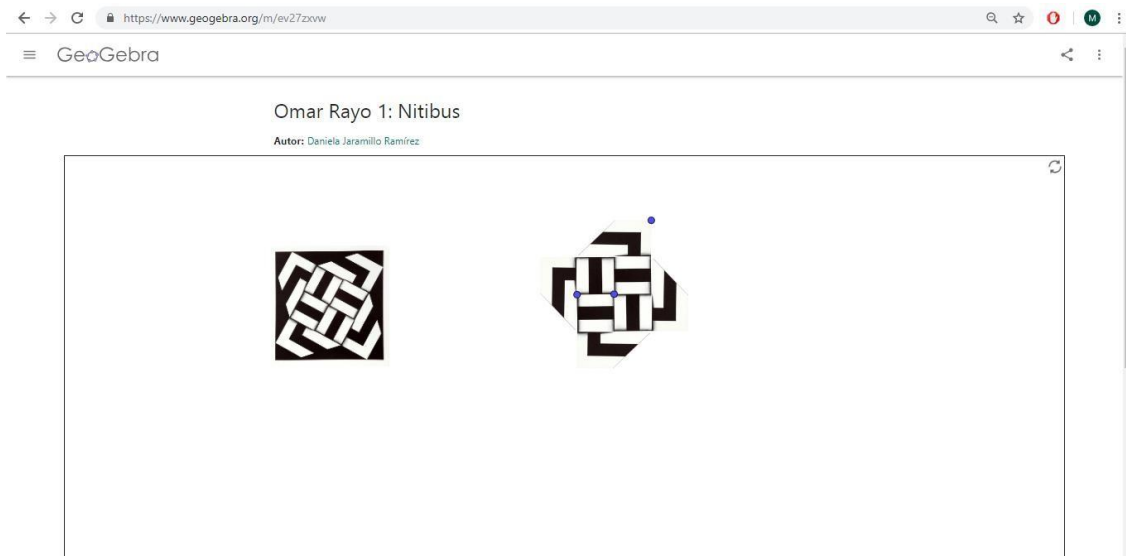


Figura 41. Ejemplo de construcción de la obra del Applet 3.2 “Actividad 3”.

<https://www.geogebra.org/m/cgjhfa8m>

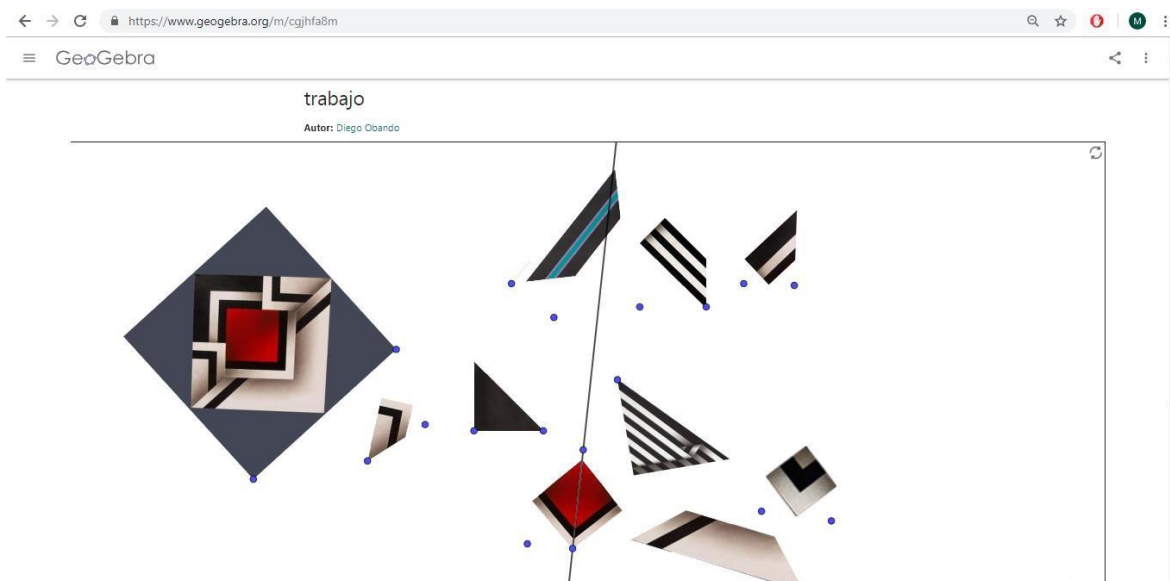


Figura 42. Ejemplo de construcción de la obra del Applet 3.3 “Actividad 3”.

Concluidas estas tres actividades se considera que se lograron los objetivos planteados al inicio, dado que los estudiantes se apropiaron y aplicaron del concepto transformaciones

isométricas, y los elementos que les permiten que se lleven a cabo mediante el del SGD y la contextualización de las obras del pintor Omar Rayo

#### 4.4 Actividad 4

##### *Criterios de valoración*

Cumplió:

1. Dibuja con precisión todas las figuras básicas para la construcción de su obra.
2. Enumera todos los pasos que lleva a cabo en su construcción de su obra.
3. Utiliza los tres movimientos de las transformaciones isométricas para realizar la construcción de su obra.

Cumplió parcialmente:

1. Dibuja con precisión algunas figuras básicas para la construcción de su obra.
2. Enumera algunos de los pasos que lleva a cabo en la construcción su obra.
3. Utiliza uno o dos movimientos para la construcción de su obra.

No cumplió:

1. No dibuja las figuras básicas para la construcción de su obra.
2. No coinciden o no enumera los pasos que lleva a cabo en su construcción.
3. No realiza la construcción de su obra.

*Tabla 19.*

Recopilación de las respuestas de la pregunta 1 “Actividad 4”

1. .Dibuja con precisión las figuras básicas que utilizaras y nombra cada una como F1, F2 y F3 según sea el número de figuras escogidas			
Criterio de valoración	C	CP	NC
Número de estudiantes	11	0	4

De acuerdo con lo anterior se tiene que los estudiantes que dibujan con precisión todas las figuras básicas para la construcción de su obra están representados por el 73% de

la población (ver figura 43), mientras que sólo el 23% no cumplió con este punto, es decir, no dibujó ninguna de las figuras que seleccionó para la construcción de su obra.

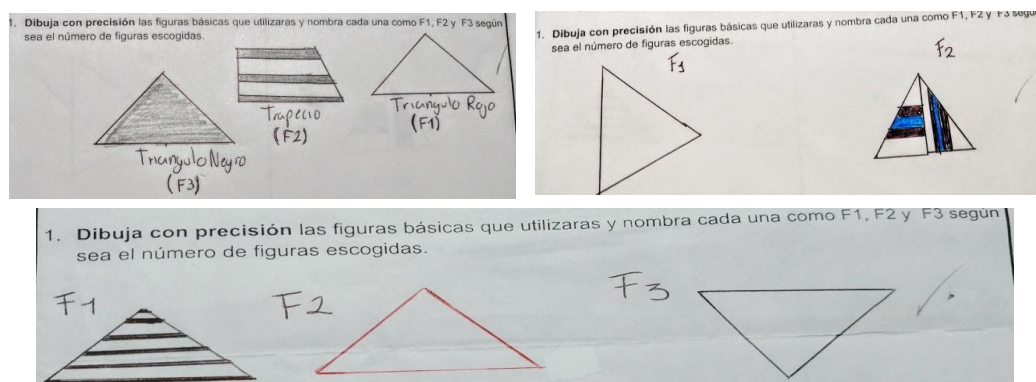


Figura 43. Ejemplos de respuestas “Cumplió” del punto 1 “Actividad 4”.

Los resultados de este punto son bastante favorables, pues finalmente 11 de 15 estudiantes dibujaron con precisión las figuras geométricas básicas nombrando cada una según las especificaciones dadas, esto muestra que finalmente los estudiantes lograron identificarlas y reconocerlas como parte fundamental para la construcción de una obra ya sea del artista Omar Rayo o de su autoría.

Tabla 20.

Recopilación de las respuestas de la pregunta 2 “Actividad 4”

2. Enumerar los pasos que llevas a cabo para realizar tu obra.			
Criterio de valoración	C	CP	NC
Número de estudiantes	6	5	4

Los estudiantes que cumplen con este punto representan el 40% de los estudiantes pues enumeran todos los pasos que llevan a cabo en la construcción de su obra y al realizar la revisión de los “protocolos de construcción” que brinda el software se verifica su correspondencia, los estudiantes que omitieron pasos o aumentaron pasos inexistentes representan el 33% y finalmente aquellos estudiantes que no realizaron este punto representan el 26%. (Ver figura 44).

2. Enumerar los pasos que llevas a cabo para realizar tu obra.

1. Seleccionar las 3 figuras
2. Con uno de los triángulos realicé simetría axial
3. Otra vez realicé simetría axial con un trapecio
4. Realicé traslación con el último triángulo de la figura
5. Realicé traslación con el primer triángulo de la "obra" (en ambos lados ya que el primer paso fue simetría axial)
6. Realicé rotación en los últimos dos trasladados. Arriba fue de  $45^\circ$  en sentido antihorario y el segundo fue de  $45^\circ$  en sentido horario.

2. Enumerar los pasos que llevas a cabo para realizar tu obra.

<p>Paso 1: Reflejar a <math>F_1</math></p> <p>Paso 2: Posicionar a <math>F_2</math> en el triángulo formado entre <math>F_1</math> y su reflexión.</p> <p>Paso 3: Rotar a <math>F_2</math> <math>180^\circ</math> en sentido <u>contra horario</u> con punto entre <math>F_1</math> y su reflexión.</p> <p>Paso 4: Traslador a <math>F_1</math> verticalmente hacia abajo.</p> <p>Paso 5: Traslador la reflexión de <math>F_1</math> de la misma manera.</p>	<p>Paso 6: Reflejar a <math>F_2</math></p> <p>Para posicionarlo entre <math>F_1</math> y su reflexión trasladada.</p>
--	---

2. Enumerar los pasos que llevas a cabo para realizar tu obra.

1. Para realizar mi obra primero debía escoger las 3 Figuras que debía usar para hacer el trabajo.
2. Luego, poco a poco, usando los 3 tipos de movimientos visto en clase en cada Figura, construí la Figura.
3. Usé la S. Axial en los 3 triángulos, poniéndolos a  $90^\circ$  y  $180^\circ$  grados.
4. Además, usé en los triángulos más pequeños la traslación y la rotación.

Figura 44. Ejemplos de respuestas "Cumplió" parte superior izquierda, "cumplió parcialmente" parte superior derecha y "no cumplió" parte inferior, del punto 2 "Actividad 4".

Es importante tener en cuenta que para poder determinar la cantidad de estudiantes en cada criterio de evaluación, la revisión de este punto estuvo sujeta al protocolo de construcción de Geogebra en el cual se puede ver el paso a paso de la construcción, resaltando que todos los estudiantes lograron construir su obra haciendo uso de al menos dos de las transformaciones y solo cuatro fueron catalogados como No cumplieron por el hecho de no hacer entrega de la guía 4.

Tabla 21.  
Recopilación de las respuestas de la pregunta 3 “Actividad 3”

3. Construcción de su propia obra en el SGD, haciendo uso de los tres movimientos en el plano.			
Criterio de valoración	C	C. P	N.C
Número de estudiantes	13	2	0

Finalmente, el 86% de los estudiantes realizó la construcción de su obra basándose en las obras del Omar Rayo y utilizando los tres movimientos en el plano, de modo que sólo un 14% de los estudiantes cumple parcialmente, es decir, se basan en las obras del artista, pero solo usan uno o dos movimientos en el plano.

#### 4.4.1 Validación de los objetivos.

En el desarrollo de esta actividad tal como se esperaba desde el cierre y socialización de la “Actividad 2” los estudiantes expresaron de manera escrita y oral la apropiación de objetos geométricos como vector, ángulos, centro o punto de rotación, eje de simetría, congruencia entre otros elementos necesarios para llevar a cabo un movimiento en el plano.

Habría que decir también que las descripciones de los procesos de construcción fueron revisados a la luz de los protocolos de construcción que brinda el SGD Geogebra, con estos se verificó que los estudiantes no sólo realizan los procesos que describen, sino que prueban una y otra vez, se devuelven en su construcción y experimentan diferentes movimientos que los lleven a una construcción más armónica o equilibrada.

Todo lo que se ha mencionado a lo largo de este capítulo se evidenció en los protocolos que entregaron los estudiantes al finalizar el conjunto de actividades, es decir, identificaron figuras geométricas básicas, alcanzaron una apropiación optima del software el cual contribuyó en los procesos de construcción y en estos se aplicaron los elementos geométricos de cada

transformación isométrica, apoyados en los procesos de visualización para lograr finalmente la construcción de su obra deseada. Para muestra de esto se exponen los siguientes registros fotográficos.

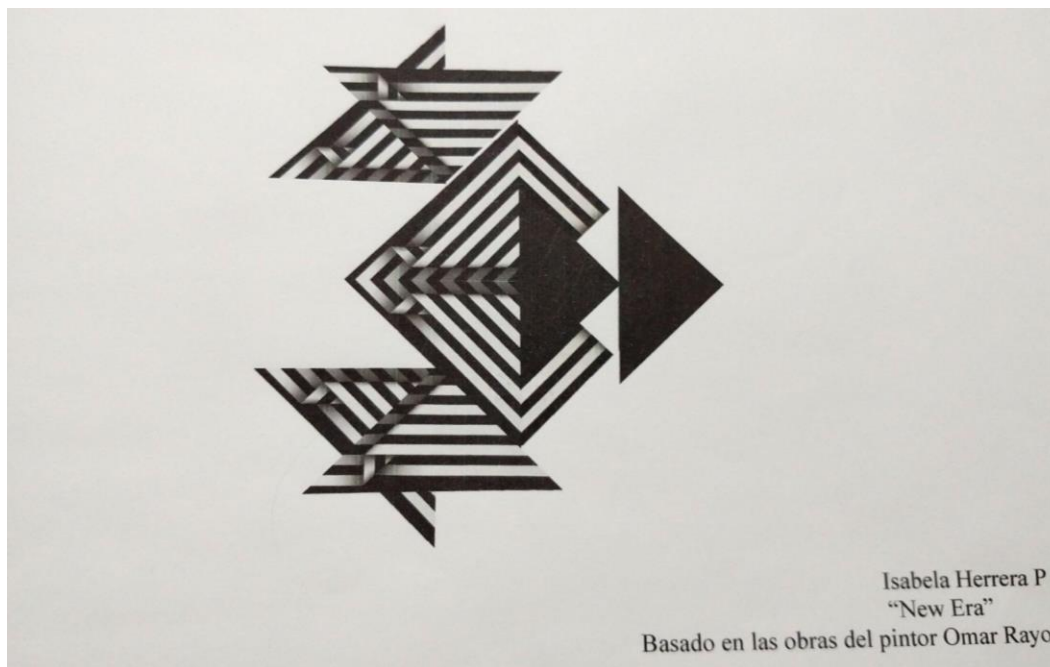


Figura 45. Ejemplo 1 de las construcciones de los estudiantes (protocolos) en la “Actividad 4”.

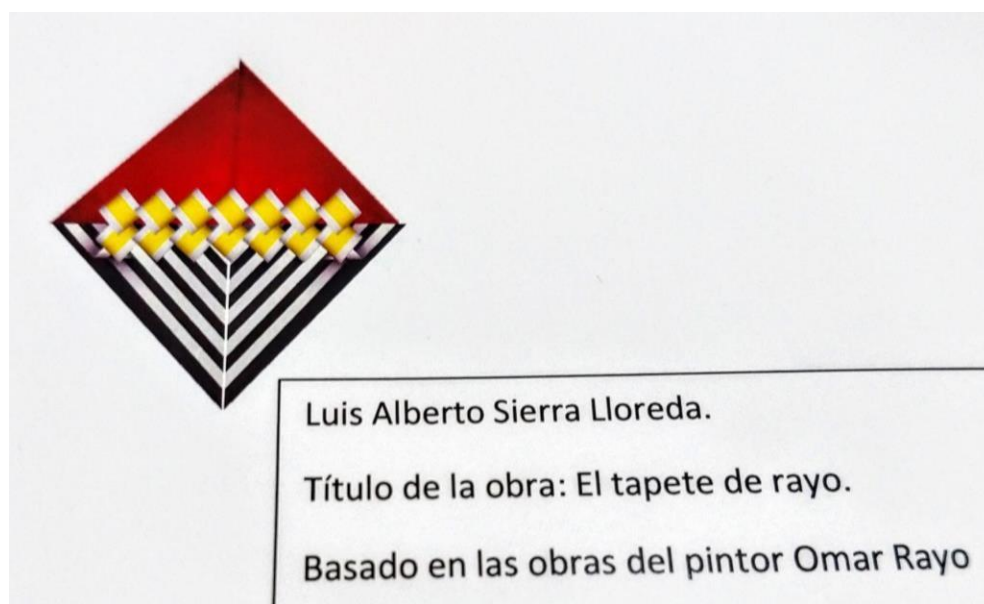


Figura 46. Ejemplo 2 de las construcciones de los estudiantes (protocolos) en la “Actividad 4”.

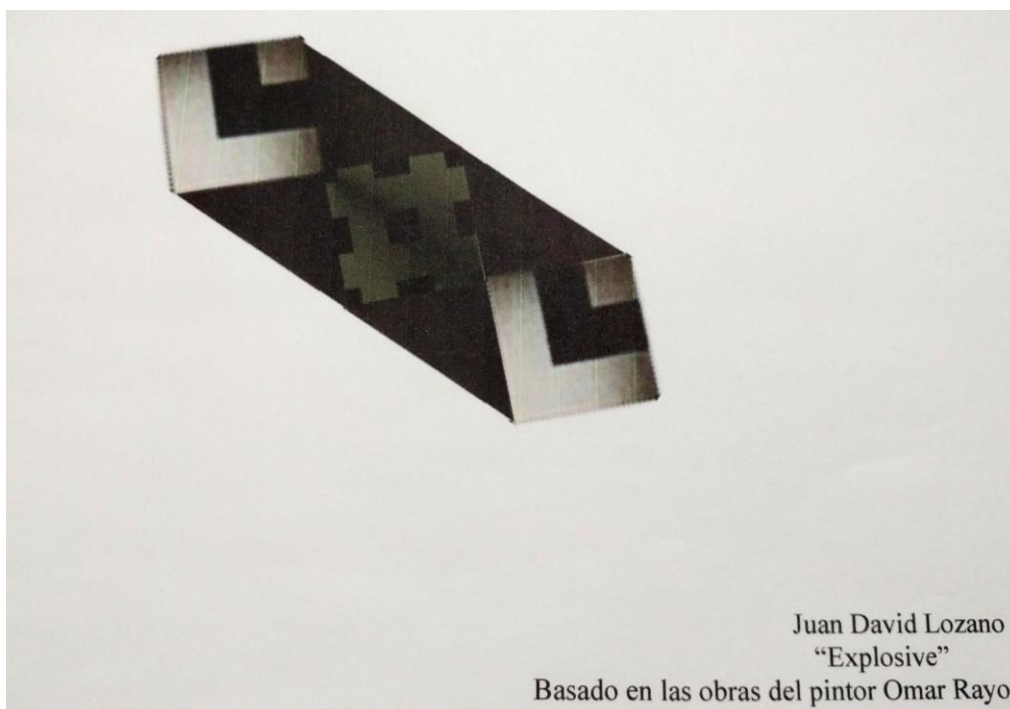


Figura 47. Ejemplo 3 de las construcciones de los estudiantes (protocolos) en la "Actividad 4".



Figura 48. Ejemplo 1 de las construcciones de los estudiantes (protocolos) en la "Actividad 4".

## CAPÍTULO V: CONCLUSIONES

En este punto del trabajo es importante recordar la pregunta que dio origen a la investigación ¿Qué elementos promueven el aprendizaje de las transformaciones isométricas a través del uso de un SGD, con el cual se construyen algunas de las obras del pintor Omar Rayo? desarrollada desde un marco metodológico de tipo cualitativo.

Al abordar el estudio de las transformaciones isométricas en el plano euclidiano por medio del SGD “Geogebra” se encontró a los estudiantes muy receptivos e interesados en trabajar con el software, lo cual permitió que en cada actividad la apropiación de los elementos geométricos fuese mejorando al punto que lograron construir diferentes obras de Omar Rayo en las que aplicaron los movimientos en el plano, que se correspondían con la obra.

En cuanto al análisis de los resultados que se recopilaron a lo largo de la puesta en práctica permitió establecer que a partir de las obras de Omar Rayo, los estudiantes en cada una de las actividades identificaron las figuras básicas utilizadas y al observarlas reconocieron patrones en su construcción, además durante el desarrollo de las clases resaltaron el papel de Omar Rayo en el arte y cultura del Valle del Cauca, es por esto que el uso de sus obras para el estudio de las transformaciones isométricas, fue un contexto idóneo pues los estudiantes se sintieron identificados y motivados desde el inicio de la práctica.

Ahora bien, con el desarrollo de las actividades, su validación y análisis se pudo reconocer que además del uso de un SGD y el arte como contexto, otros elementos que promueven el aprendizaje de las transformaciones isométricas son: el papel de la profesora, pues al guiar cada una de las actividades, realizar las intervenciones pertinentes, orientar su progreso y aclarar las dudas que surgieron en el proceso, llevó a los estudiantes a inferir y decidir por sí mismos las



acciones a desarrollar. Junto con el diseño de las actividades, pues en estas el seleccionar un conjunto de herramientas del SGD para cada actividad, permitió al estudiante familiarizarse y apropiarse de su función en la medida que hacía uso de ellas en cada construcción que llevaba a cabo. Además, el diseño de cada actividad y Applet generó en los estudiantes la necesidad de confrontar sus respuestas y procesos de construcción con las obras que se les habían asignado.

Con relación a lo expuesto por Julio (2014) sobre las principales dificultades que presentan los estudiantes al realizar una transformación isométrica, se puede decir que con el uso del SGD se logró que en las traslaciones los estudiantes establecieran la dirección de los movimientos y usaran un lenguaje apropiado que permitiera identificar que el movimiento trabajado era una traslación.

En cuanto a la rotación se puede decir que los estudiantes establecieron con precisión el ángulo y el sentido de la rotación reconociendo que al conservarse dichos elementos la construcción terminaba siendo armónica y en cuanto a la simetría los estudiantes lograron determinar el eje de simetría en diferentes posiciones bien sea vertical, horizontal o transversal.

## **Recomendaciones**

Para un futuro trabajo o estudio de las transformaciones isométricas enfocado en la congruencia como propiedad invariante, se sugiere crear nuevas preguntas que profundicen en la congruencia de las figuras básicas al obtenerse por medio de un movimiento. Así mismo se sugiere que las actividades y Applets propuestos en este trabajo pueden servir como instrumentos o material de apoyo para profesores o estudiantes que empiezan a familiarizarse con el uso del SGD Geogebra, también podrían editarse y considerarse como

fichas de trabajo para el laboratorio de matemáticas de la Universidad del Valle y retomarse en el curso con dicho nombre.

### Referencias bibliográficas

- Acosta, M. E. (2010, octubre). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. *Undécimo Encuentro Colombiano Matemática Educativa. ASOCOLME*. Bogotá, Colombia.
- Álvarez-Gayou, J. L. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología*. 1. México: Paidós.
- Antón, A., y Gómez, M. (2016). La geometría a través del arte en educación infantil. *Enseñanza & teaching*, (34), 93-117. doi: <http://dx.doi.org/10.14201/et201634193117>.
- Arcila, J., Bonilla, J., y Cardona, G. (2012). *Caracterización del uso de las transformaciones de isometría mediante el diseño de una secuencia de problemas abiertos de construcción geométrica con cabri 3d* (Trabajo de grado para optar al título de Licenciados en Matemáticas y Física). Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado de: <http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/4715/1/CB-0461353.pdf>
- Barrantes, M., Balletbo, I., y Fernández, M. (2014, noviembre). Enseñar geometría en secundaria. En Memoria del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación (pp. 1-14). Buenos Aires Argentina.
- Ballesteros A, E. y Gamboa A, (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 4 (5). Recuperado de: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6915/6601>
- Bartolini, M. B., y Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education*, New York, 746-783.
- Campo, W., y Cuene, Y. (2011). *Una secuencia de situaciones didácticas alrededor de la transformación de rotación en un ambiente de geometría dinámica*. (Trabajo de grado para optar por el título de Licenciados en Educación Básica con énfasis en Matemáticas). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Calvache, O., Pantoja, D., y Hernández I. (2015, Julio). Naturaleza de la Investigación Cualitativa y su Implicación en el Campo Educativo, *Revista Universitaria: Docencia, investigación e innovación*, 3 (2), 101-113. Recuperado de: <http://revistas.udenar.edu.co/index.php/duniversitaria/index>
- Coll, C. (2008). Aprender y enseñar con las TIC: expectativas, realidad y potencialidades. *Boletín de la Institución Libre de Enseñanza*, 72, 17-40. Madrid. Recuperado de: <https://www.educ.ar/recursos/70819/aprender-y-ensenar-con-las-tic-expectativas-realidad-y-potencialidades>




- Delgado, J., & Mosquera, M. (2009). *Evaluación de los aprendizajes referidos a las transformaciones de isometría en la integración de Tecnología: Un estudio monográfico* (Trabajo de grado para optar por el título de Licenciados en Educación Básica con énfasis en Matemáticas). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- De Villiers, M. (1996). Algunos desarrollos en enseñanza de la geometría (3): Software de Geometría Dinámica. *The Future of Secondary School Geometry. La lettre de la preuve, Novembre-Décembre 1999*. [Traducido por Martín Acosta]. Recuperado de: <http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/viewFile/68/63>
- Díaz, F., y Hernández, G. (1999). *Constructivismo y aprendizaje significativo*. México: Mc Graw Hill.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. *NEW ICMI STUDIES SERIES*, (5), 37-51.
- Franco R. C. B. (2003). *Arte geométrico: análisis y tendencias de su desarrollo plástico*. (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada, España. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/10481/929>
- González, M. (2001). *La Gestión de la clase de Geometría utilizando sistemas de Geometría Dinámica*. En Gómez, P., y Rico, L. (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. (277 - 290). Granada, España: Universidad de Granada. Recuperado de: <https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprenggeom/archivos2/homenaje/19Gonzalez-LopezMJ.PDF>
- Hernández, V., y Villalba, M. (2001). Perspectivas en la Enseñanza de la geometría para el siglo XXI. *Recuperado de: <http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm>*.
- Ibarguen, Y., y Realpe, J. (2012). *La enseñanza de la simetría axial a partir de la complementariedad de artefactos*. (Trabajo de grado para optar por el título de Licenciadas en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas). Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado de: <http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/3858/4/CB-0470299.pdf>
- Julio B. L. J. (2014). *Las transformaciones en el plano y la noción de semejanza* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Recuperado de: <http://bdigital.unal.edu.co/39463/>
- Larios, V. (s.f.). La influencia de la computadora como mediadora semiótica entre el conocimiento y el alumno: El caso de la Geometría .
- Marrades, R. y Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment”, *Educational Studies in Mathematics* . 44 - 87. Recuperado de: <https://doi.org/10.1023/A:1012785106627>
- Martínez, V. (2014). *Algunas anotaciones históricas sobre arte y matemáticas: una herramienta didáctica en perspectiva* (Trabajo de grado para optar por el título de Licenciadas en

- Educación Básica con Énfasis en Matemáticas). Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado de:  
<http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/7078/1/3469-0430847.pdf>
- Moises, E. y Downs (1989). *Geometría Moderna. [Gemetry]*. México: Sistemas Técnicos de Edición.
- Monje, C. (2011). *Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa. Guía didáctica*. Universidad surcolombiana, Neiva, colombia. Recuperado de:  
<https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Guia-didactica-metodologia-de-la-investigacion.pdf>
- Mora, O. J (2007). Geometría dinámica para el análisis de obras de arte. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (9), 83-99.
- Mora, S. J. A (2011). *Alberto Durero: Relación geometría y experiencia* (trabajo de grado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Moreno, L. (2002a). Instrumentos matemáticos computacionales. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.). Proyecto de incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia. Memorias de seminario Nacional. Bogotá, Colombia: Enlace Editores.
- Moriena, S. (2006). Reseña histórica y aplicaciones de las transformaciones geométricas del plano. *Facultad de Humanidades y Ciencias Universidad Nacional del Litoral. Prov. de Santa Fe (Argentina)*.
- Moya, F. (s.f). Movimientos en el plano; para CEPA de COSLADA
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998). *Matemáticas. Lineamientos Curriculares*. Primera Edición. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.
- \_\_\_\_\_. (1999). *Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas, Apoyo a los Lineamientos Curriculares*. Bogotá, Colombia: MEN.
- \_\_\_\_\_. (2006). *Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá, Colombia.: MEN.
- \_\_\_\_\_. (2015). *Saber 3°, 5° y 9°*. Bogotá, Colombia: Icfes, mejor Saber.
- \_\_\_\_\_. (2016). *Prueba Saber 3°, 5° y 9°. Matemática grado 9°*. Bogotá, Colombia: Icfes, Mejor Saber.
- \_\_\_\_\_. (2010) *Orientaciones Pedagógicas para la Educación Artística en Básica y Media*. Bogotá, Colombia: MEN
- Obando, F. (2008). *Análisis del tratamiento de las transformaciones geométricas en los textos escolares de los grados 6° y 7°* (Trabajo de grado para optar por el título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas). Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado de:  
<http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/xmlui/bitstream/handle/10893/3860/CB-0449664.pdf?sequence=4>
- Organización del Bachillerato Internacional, OBI (2014). El programa de los años Intermedios. De los principios a la práctica. (Versión en español).Cardiff, Wales. Reino Unido.

- Pando, F. S. A. (2009). El extraño mundo de las teselaciones. Un paseo por la geometría para estudiantes de bachillerato. (Tesis de maestría). Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM. México. Recuperado de: <http://132.248.9.195/ptd2009/junio/0644147/Index.html>
- Parra, O. (2015). El arte: Una ventana didáctica. *Hallazgos*, 12(24), p. 89-106. Recuperado de: <http://www.scielo.org.co/pdf/hall/v12n24/v12n24a06.pdf>
- Piaget, J. y García, R. (1998). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo XXI.
- Riascos, C., y Peña, J. (2012). *Aprendizaje de la transformación de rotación en una secuencia didáctica que integra "Cabri Geometry II Plus" en 5° de Educación Básica* (Trabajo de grado para optar por el título de Licenciados en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas). Universidad del Valle, Buenaventura, Colombia.
- Ros, N. (2004). El lenguaje artístico, la educación y la creación. *Revista Iberoamericana de educación*, 35(1), 1-8. Recuperado de: <https://rieoei.org/RIE/article/view/2901/3826>
- Sandoval, I. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática*, 21(1), p. 5-27. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516761002>
- Santacruz, M. (2011). *Gestión didáctica del profesor y emergencia del arrastre exploratorio en un AGD: El caso de la rotación en educación primaria* (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado de: <http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/xmlui/handle/10893/3897>
- Sordo, J. (2005). Estudio de una estrategia didáctica basada en las nuevas tecnologías para la Enseñanza de la Geometría. (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Madrid. Recuperado de: <https://biblioteca.ucm.es/tesis/edu/ucm-t28911.pdf>
- Thaqi, X. (2009). *Aprender a enseñar transformaciones geométricas en primaria desde una perspectiva cultural*. (Tesis doctoral). Universitat de Barcelona, Barcelona, España. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/2445/41437>
- Urbano, R. (2010). *Transformaciones isométricas en las estructuras de San Agustín y su implementación en el aula con el uso de Cabri* (Trabajo de grado para optar por el título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas). Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado de: [http://www.etnomatematica.org/publica/trabajos\\_grado/transfor-cabri.pdf](http://www.etnomatematica.org/publica/trabajos_grado/transfor-cabri.pdf)
- Vallejo, F. L. (2011, Febrero). *La matemática en el arte: su didáctica*. *Revista Digital Ciencia y didáctica*. (50). 63- 83. Recuperado de <http://www.enfoqueseducativos.es/>
- Vasco, C. (1991). Geometría activa y geometría de las transformaciones. *INTEGRACIÓN*, 9(1), p. 1-12.
- Zuza, B. E. (s.f.). *El clasismo geométrico*. Recuperado de: <https://docplayer.es/22030621-Tema-4-el-clasicismo-geometrico.html>

## ANEXOS

## Anexo A. Currículo escrito, secuenciación de contenidos de geometría del Colegio “Jardín Tía Nora y Liceo los Alpes SAS”

<div>    </div> <div> <p><b>CURRÍCULO ESCRITO</b> (Planificación vertical) <b>SECUENCIACIÓN DE CONTENIDOS</b> 2018 – 2019</p> </div>					
SEXTO	SEPTIMO	OCTAVO	NOVENO	DECIMO	ONCE
UNIDAD 1	UNIDAD 1	UNIDAD 1	UNIDAD 1	UNIDAD 1	UNIDAD 1
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Conceptos básicos de geometría</li> <li>• Recta</li> <li>• Segmento</li> <li>• Punto</li> <li>• Ángulo</li> <li>• construcción de ángulos con regla y compas.</li> <li>• clasificación de ángulos.</li> <li>• Plano cartesiano</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Definición de geometría y medidas de conversión lineal</li> <li>• Medidas de conversión de superficie</li> <li>• Medidas de conversión de volumen.</li> <li>• Medidas de conversión de capacidad.</li> <li>• Medidas de conversión de masa.</li> <li>• Medidas de conversión de tiempo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Conceptos geométricos y definiciones</li> <li>• Punto</li> <li>• Recta</li> <li>• Plano</li> <li>• Rectas paralelas</li> <li>• Rectas perpendiculares</li> <li>• Rectas secantes</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Congruencia</li> <li>• Transformaciones en el plano</li> <li>• Traslaciones</li> <li>• Rotaciones</li> <li>• Simetría axial</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Rectas</li> <li>• Pendiente de una recta</li> <li>• Ecuaciones de la recta</li> <li>• Posición relativa entre dos o más rectas (secantes, paralelas y perpendiculares)</li> <li>• Analisis dimensional</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Poliedros</li> <li>• Poliedros regulares e irregulares</li> <li>• Prismas</li> <li>• Pirámides</li> <li>• Situaciones p</li> </ul>

**Anexo B. Taxonomía de Bloom, niveles de aprendizaje.**

