UNA PROPUESTA DE AULA PARA EL ESTUDIO DE ALGUNOS ASPECTOS DE LA FUNCIÓN A PARTIR DE LA GRAFICACIÓN COVARIACIONAL

ALEJANDRA MARTÍNEZ JIMÉNEZ

DIANA MARCELA VÉLEZ GÓMEZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Santiago de Cali, octubre de 2019

UNA PROPUESTA DE AULA PARA EL ESTUDIO DE ALGUNOS ASPECTOS DE LA FUNCIÓN A PARTIR DE LA GRAFICACIÓN COVARIACIONAL

ALEJANDRA MARTÍNEZ JIMÉNEZ

201331903

DIANA MARCELA VÉLEZ GÓMEZ

201328093

Informe final presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciada en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

Dirigido por

Mg. RONALD ANDRÉS GRUESO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Santiago de Cali, octubre de 2019

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

Universidad del Valle

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Programa Académico ______________________

Código del programa: 3469

Resolución del programa: ________

Fecha

Día	Mes	Año
24	10	2019

Título del Trabajo o Proyecto de Grado

Una propuesta de aula para el estudio de algunos aspectos de la función a partir de la graficación Covariacional

Se trata de:

Proyecto ☐ Informe Final ☒

Director

Ronald Andrés Grueso

Nombre del Primer Evaluador

Joan Sebastian Ordoñez

Nombre del Segundo Evaluador

Estudiantes

Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Télefonos de contacto
Alejandra Martínez J.	1331903	3469	alejandra.martinez.jimenez@correounivalle	316 534 88 82
Diana Marcela Vélez G.	1328093	3469	diana.marcela.velez@correounivalle.edu	318 857 62 76

Evaluación

Aprobado ☒ Meritorio ☐ Laureado ☐
Aprobado con recomendaciones ☐ No Aprobado ☐ Incompleto ☐

En el caso de ser ***Aprobado con recomendaciones*** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de ______________ (máximo un mes)* ***ante:***

Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐ Primer Evaluador ☐ Segundo Evaluador ☐

En el caso de que el Informe Final se considere ***Incompleto*** *(diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de ______________ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el:* dd ____ mm ____ aa ____

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la ***razón del desacuerdo*** *y las* ***alternativas*** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firmas

Ronald Andrés Grueso	Joan Sebastian Ordoñez	
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

Recomendaciones ☐	Observaciones ☐	Razón de desacuerdo - Alternativas ☐

Si se considera necesario, usar hojas adicionales.

El trabajo es viable a partir de la problemática que lo fundamenta y en esta medida, le adjudica un papel interesante a la graficación covariacional en estudiantes de Secundaria.
Así mismo, se muestra coherencia entre los objetivos propuestos, lo que se hace en el desarrollo y las respectivas conclusiones.
Se recomienda socializar los resultados de este trabajo en algún evento de educación Matemática.

Firmas

Ronald Andrés Grueso	Joan S. Ordoñez	
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Dios primeramente, por prestarnos la vida y bendecirnos con buena salud.

Inmensas gracias a nuestras familias por su constante apoyo emocional y económico, mientras terminábamos nuestros estudios universitarios y particularmente este Trabajo de Grado.

Un agradecimiento especial a nuestro tutor, el profesor Ronald Andrés Grueso, quien pese a sus múltiples ocupaciones, siempre mostró paciencia y gran colaboración para con nosotras, en la escritura y culminación de nuestro Trabajo de Grado.

Gracias también a los directivos y estudiantes del Colegio Comercial Nueva Era Vallegrande, por permitirnos ocupar algunos de sus espacios de clase, para la implementación de la Propuesta de Aula

A nuestro evaluador, el profesor Joan Sebastián Ordoñez, gracias por sus valiosas recomendaciones, las cuales nos ayudaron a mejorar este documento.

Finalmente, expresamos nuestra gratitud a todas las personas que de alguna u otra manera, estuvieron presentes y nos apoyaron tanto en nuestra formación docente como la culminación de este Trabajo de Grado.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

En el presente Trabajo de Grado se presenta y desarrolla una propuesta para el estudio de algunos aspectos de la función, la cual está fundamentada en el marco conceptual del Razonamiento Covariacional (Carlson et al, 2003) y el método gráfico que proponen Dolores y Salgado (2009), acerca de los elementos para la Graficación Covariacional. Para ello, se diseñó y aplicó una Propuesta de Aula (a estudiantes de grado décimo del Colegio Comercial Nueva Era Vallegrande), para potencializar, a través de tareas de covariación, el desarrollo del pensamiento variacional que se propone en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), debido a que este se caracteriza por el estudio de la variación y el cambio en distintos contextos. Con tareas de covariación, se intentó abordar el estudio de la representación gráfica de una función, a partir del estudio de sus cambios.

Después de la implementación de la Propuesta de Aula, se caracterizaron, analizaron e interpretaron las respuestas (escritas y verbales) de los estudiantes, según los niveles de covariación de Carlson et al (2003), los elementos referentes a la Graficación Covariacional de Dolores y Salgado (2009) y los aspectos matemáticos involucrados.

Por último, se realizaron unas conclusiones generales teniendo en cuenta las dimensiones matemática, didáctica y curricular; también se presentan algunas limitaciones que se tuvieron en este Trabajo de Grado, las cuales se puedan tener en cuenta en futuros estudios sobre esta misma línea de investigación. Dentro de los resultados de la implementación de la Propuesta de Aula, se logró evidenciar que los estudiantes sí pueden llegar a bosquejar la gráfica de una función, a través del estudio y análisis de los cambios que ocurren entre las magnitudes involucradas.

Palabras claves: función, covariación, Razonamiento Covariacional, Graficación Covariacional y pensamiento variacional.

INTRODUCCIÓN

Diferentes investigaciones en Educación Matemática tienen como uno de sus propósitos, asegurar en los estudiantes el aprendizaje de diferentes conocimientos matemáticos. En particular, la enseñanza y aprendizaje del concepto de función ha sido una tarea compleja, en tanto que, a pesar de que numerosas investigaciones han tratado de plantear alternativas al respecto, muchas de las prácticas en el aula no se han modificado, y esto ha hacho que algunos de los resultados de las evaluaciones de los estudiantes, en diferentes escenarios, no sean los esperados. "La aprehensión del concepto de función no parece una tarea fácil, la gran cantidad de investigaciones realizadas con estudiantes para detectar obstáculos en el aprendizaje del concepto confirman la dificultad del concepto" (Hitt, 1996, p. 246).

En esa misma línea sobre las dificultades en el aprendizaje del concepto de función, es de resaltar las falencias en lo que a la representación gráfica se refiere, pues en la escuela, ha prevalecido su uso y bosquejo, como la ubicación de coordenadas cartesianas en el plano, las cuales carecen de sentido para los estudiantes, en tanto no las relacionan con el contexto que se esté trabajando. Como alternativa que permite hacer frente a dicha dificultad, la literatura revisada muestra el interés de diferentes investigadores en Educación Matemática, por proponer marcos referenciales y secuencias o guías de enseñanza que atiendan al estudio de la función a partir de su representación gráfica. Tal es el caso de Dolores y Salgado (2009), quienes aportan variados elementos para la Graficación Covariacional, que se pueden tener en cuenta en el diseño de tareas que apunten al estudio del concepto de función, desde una perspectiva covariacional.

En concordancia con las dificultades y problemáticas en torno a la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, y particularmente el estudio de su representación gráfica, los aspectos de la función que se toman para este Trabajo de Grado son: variable dependiente e independiente, relación de dependencia, razón de cambio ("cambio de los cambios"), dominio y rango, intervalos de crecimiento y decrecimiento y puntos de inflexión. Cabe aclarar que dichos aspectos del concepto de función, y en particular, volcados hacia el estudio de la representación gráfica de la función, no se pretenden trabajar (con los estudiantes) en ese tipo de lenguaje (términos matemáticos), sino que se abordan desde lo que estos significan (interpretación) en el contexto general de la Propuesta de Aula.

La documentación y el desarrollo de este estudio, así como los resultados obtenidos tras la implementación de la Propuesta de Aula, se estructuraron en cuatro capítulos, así: En el primero se describen los aspectos que dan cuenta de la problemática que subyace y la manera en que esta se reconoce (manifiesta). Luego se encuentran los objetivos y la justificación, en la cual se explicita la pertinencia de dar solución a la problemática. Posteriormente se plantean los antecedentes a este Trabajo de Grado, los cuales muestran el panorama frente al problema en cuestión, y que han sido organizados en tres aspectos (dificultades asociadas al concepto de función, registros de representación y visualización matemática, Razonamiento Covariacional y Graficación Covariacional). Finalizando este capítulo, se encuentra el *marco contextual*, en el cual se detallan las características académicas, sociales y geográficas del Colegio Comercial Nueva Era Vallegrande, pues fue donde se implementó la Propuesta de Aula.

En el segundo capítulo, se presenta el marco teórico que fundamenta este Trabajo de Grado, el cual está organizado en tres dimensiones (matemática, didáctica y curricular); aquí se explica cómo se enlazan dichas dimensiones y el aporte que hicieron a la consolidación de las tareas que conforman la Propuesta de Aula.

En el tercer capítulo se detalla la metodología y desarrollo de la implementación de la Propuesta de Aula, es decir, se presenta el tipo de estudio, los propósitos de las tareas y presentación de las mismas, así como los análisis de los resultados de las respuestas (escritas y verbales) de los estudiantes, que se obtuvieron en la implementación de las tres situaciones que conforman la Propuesta de Aula.

En el cuarto y último capítulo, se plantean las conclusiones y reflexiones que se derivan de este estudio, de acuerdo con los siguientes elementos: objetivos propuestos, intención de la Propuesta de Aula (en términos de sus propósitos), marco teórico planteado e interpretaciones de los resultados encontrados.

CAPÍTULO 1: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

En el presente capítulo se presentan los componentes necesarios para explicar y delimitar la problemática y cómo esta se manifiesta; este planteamiento cierra con la pregunta problema que guía este trabajo. Después se exponen el objetivo general y los objetivos específicos. Luego se muestra la justificación de este estudio, en la cual se describe la importancia de realizar el mismo. Posteriormente se encuentran los antecedentes que sustentan el presente trabajo, que se constituyeron a partir del rastreo de investigaciones que se centran en tres aspectos, a saber: dificultades alrededor del concepto de función, relevancia de los registros de representación y visualización, Razonamiento Covariacional y Graficación Covariacional. Finalmente, se presenta el marco contextual, en el cual se describen las características académicas, sociales y geográficas de la Institución Educativa en la cual se implementó la Propuesta de Aula.

1.1 Planteamiento del problema

Actualmente, el pensamiento variacional se ha convertido para muchos investigadores en una de las principales fuentes de estudio, debido a la importancia que tiene la variación dentro de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pues esta permite la modelación de fenómenos y eventos dinámicos de la vida cotidiana. Uno de los investigadores interesados en este pensamiento ha sido Vasco (2006), quien manifiesta que este pensamiento permite a los estudiantes comprender mejor los diversos contextos que les rodean.

Según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional[1] (MEN, 1998), el desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos es fundamental para generar capacidades de análisis en situaciones de variación y de cambio, puesto que permite modelar, a través de variables, diversos patrones y relaciones entre magnitudes. Luego, el concepto de función está asociado al desarrollo de este, debido a que requiere de nociones como variable, función, razón de cambio, entre otras, y

[1] En adelante, se utilizan las siglas MEN para referirse al Ministerio de Educación Nacional. Nótese que las orientaciones (documentos) curriculares propuestas por esta entidad, se citan como (MEN, respectivo año) según indican las Normas APA.

además -desde un punto matemático- este concepto permite modelar ciertos eventos relacionados con la variación y el cambio.

La función es un concepto complejo de entender, debido a que se le atribuye una multiplicidad de registros de representación semiótica[2], lo cual requiere diferentes niveles de abstracción (Gatica, Cosci, May, Baracco, Muratona, Zambrano y Quiroga, s.f).

Según Duval (2004), el trabajo con las representaciones semióticas permite que los estudiantes se acerquen a la comprensión de los objetos matemáticos (cuya naturaleza es abstracta), pues a ellos sólo se puede acceder a través de sus distintas representaciones semióticas. En Gatica et al (s.f), se encuentra una breve descripción sobre los distintos registros de representación semiótica asociados al concepto de función, la cual deja ver qué elementos se deberían considerar en la aprehensión del mismo[3].

Así pues, resulta importante que los estudiantes trabajen el concepto de función desde los diversos tipos de representación semiótica que propone Duval (2004), efectuando, además, cambios entre estas representaciones semióticas y estableciendo la relación entre cada una de ellas, pues esto ayudará a que los estudiantes puedan comprender realmente este concepto.

La comprensión de los objetos matemáticos requiere, necesariamente, un trabajo de coordinación[4] y conversión[5] entre registros de representación semiótica. Sin embargo, en García, Vázquez e Hinojosa (2004) se ha encontrado que los estudiantes presentan dificultades al momento de solucionar preguntas que requieren una coordinación entre registros de representación semiótica del concepto de función, debido a que privilegian el tratamiento del registro algebraico y dejan de lado otros registros de representación semiótica, por ejemplo, el registro gráfico.

Es claro que la coordinación entre distintos registros de representación del concepto de función es fundamental para su aprendizaje; sin embargo, y como lo expone Gatica et al (s.f)

---

[2] Se entiende como registros semióticos de representación a aquello que está relacionado con un sistema particular de signos, las cuales pueden ser expresadas en otro sistema de representación (Duval, 2004).

[3] La importancia de los registros propuestos por Gatica et al (s.f), se amplía en la Dimensión Didáctica del marco teórico del presente Trabajo de Grado.

[4] Se refiere a poder establecer ciertos isomorfismos entre las representaciones, es decir, que el análisis de los comportamientos encontrados en un registro, sean análogos con los comportamientos encontrados en otro registro y que, además, se puedan establecer correspondencias entre sí.

[5] Por conversión se entiende el paso de un registro de representación a otro, manteniendo las mismas reglas semánticas que componen al registro inicial.

en sus consideraciones finales, no es suficiente un énfasis superficial en cada uno de estos registros, pues aun cuando estudiantes de un curso de Cálculo aprobaron esta asignatura, haciendo hincapié en representaciones gráficas, la mayoría de ellos tuvieron una tendencia a evadir las características visuales de este tipo de representación[6]. Por ello, se señala que es necesario promover -de manera reiterada- el trabajo o articulación de los distintos registros de representación, pero apuntando fuertemente al tratamiento gráfico.

En estudios como los de Fabra y Deulofeu (2000) y Pecharromán (2008), se señala que, al aumentar la complejidad de la gráfica, los estudiantes incurren en acciones como: atender de manera excesiva a los puntos relevantes de la gráfica y su función; la representación de funciones continuas, sin serlo; y la falta de percepción de dependencia entre las variables (covariación), como tendencias significativas o dificultades reiteradas en los estudiantes, que persisten pese al continuo trabajo sobre las mismas. También es importante resaltar la investigación de González y Martín (2004) quien encontró que a los alumnos se les dificulta relacionar los coeficientes del registro algebraico de las funciones, con los rasgos geométricos de su representación gráfica; lo anterior, se debe a que los estudiantes prefieren acudir al registro tabular de la función (representación con la cual se sienten más confiados) que a los razonamientos que requiere el gráfico[7].

Es importante aclarar que el registro de representación gráfico del concepto de función se constituye en un elemento fundamental para el aprendizaje y enseñanza del mismo, dado que permite expresar la relación de dependencia entre dos variables y brindar una descripción global de la función, a partir de las características y variaciones que presenta su recorrido (Azcárate y Deulofeu, 1999).

Además de lo anterior, algunas investigaciones han encontrado que las representaciones semióticas que más predominan en la enseñanza del concepto de función son la algebraica y gráfica, debido a que las actividades que se proponen en el aula, suelen estar relacionadas con graficar una función a partir de su ecuación (Guzmán, 1998; Gatica et al, s.f). Sin embargo, en Azcárate y Deulofeu (1999) se ha encontrado que la mayoría de esas actividades llevan a los estudiantes a un proceso mecánico y guían a concepciones erróneas sobre la interpretación de

[6] De manera general, algunas características visuales de la representación gráfica (de una función) son: dominio, rango, máximos y mínimos, puntos de inflexión, entre otros.
[7] En el caso de funciones cuadráticas, por ejemplo, se tiene que el signo del coeficiente principal, indicará la posición de la gráfica; para funciones lineales, indicará la pendiente (inclinación) de la gráfica; entre otros.

la gráfica. Al respecto, Dolores (2004) señala que los estudiantes trabajan con las funciones de manera puntual, es decir, son capaces de trazar y leer puntos (sobre la gráfica cartesiana), pero no pueden reflexionar sobre el comportamiento de la función en intervalos definidos o en forma global.

Por su parte, Hitt (1998) señala que los profesores de matemáticas, cuando la función es objeto de estudio, tienden a enfatizar sobre los procesos algebraicos, restando importancia a los procesos visuales, lo cual conduce a que los estudiantes sean reticentes en cuanto a la utilización de los registros gráficos. Al respecto, este autor expone que es necesario que los estudiantes desarrollen habilidades para convertir un registro de representación a otro, dado que las consideraciones visuales para la consolidación y comprensión de los conceptos y objetos en matemáticas, requieren de un especial tratamiento, debido a su naturaleza abstracta. De igual manera, Dolores (2004) retoma lo expuesto por Hitt, al afirmar que existen dificultades cognitivas en la interpretación de las gráficas, debido a que se requieren procesos profundos de visualización.

Sobre esto, Grueso y González (2016) afirman que es relativamente usual que en la escuela se aborden algunos registros de representación del concepto de función (por ejemplo, tabular, gráfico y algebraico), pero poco se privilegie la identificación de relaciones entre los elementos de cada registro, lo cual ha ocasionado que los estudiantes analicen estas distintas representaciones como entidades aisladas, en lugar de articularlas para comprender el concepto de función.

En ese sentido, se resalta entonces el potencial que tiene el trabajo -por parte de los estudiantes- con la representación gráfica de la función, puesto que en este registro es posible analizar cómo suceden y en qué forma, los cambios de un evento dinámico, por ejemplo. Al respecto, Azcárate y Deulofeu (1999) señalan que la gráfica permite ‘ver’ las particularidades de la función, tales como: variaciones y periodos constantes, crecimiento y decrecimiento, continuidad, máximos y mínimos, entre otras características, las cuales pueden facilitar una mayor comprensión del fenómeno que se estudia.

Even (citado en Dolores, 2004) encontró que los estudiantes que utilizan con facilidad y libertad el análisis general de los cambios de la función en el registro gráfico, tienen una comprensión más amplia y profunda (de las relaciones entre dichos cambios) que aquellos que prefieren restringir su comprensión a las características locales y específicas que se pueden apreciar en la representación gráfica de este concepto. Como contraste o punto neutral, Dolores (2004) sostiene que, al contrario de inclinarse por una u otra forma de análisis, lo que se espera es poder coordinar ambos tipos, y así, contribuir notablemente al desarrollo de la habilidad de análisis de funciones a través de sus gráficas.

Así pues, debido a la dificultad de los estudiantes en lo que tiene que ver con la lectura e interpretación de los cambios de las variables en la representación gráfica del concepto de función, se considera pertinente abordar el marco conceptual del *Razonamiento Covariacional* propuesto por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2003). Este marco conceptual permite clasificar las actuaciones de los estudiantes cuando abordan actividades de covariación, es decir, aquellas que requieren la coordinación de dos cantidades que varían, mientras se atienden la forma en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra.

Como una propuesta para hacer frente a las dificultades asociadas a la interpretación de la representación gráfica de la función, Dolores y Salgado (2009) plantean el método de la Graficación Covariacional; se considera que este método es integrador, debido a que permite -a la par- construir la gráfica de la función y analizar el comportamiento variacional de esta. De este modo, se estaría dejando de un lado la forma tradicional de graficar, es decir, de que el trazo del dibujo de la gráfica de la función consista sólo en la ubicación de un conjunto discreto de puntos.

La dificultad que genera en los estudiantes la elaboración e interpretación de la gráfica de una función, se constituye en una problemática, pues esto influye en que los estudiantes comprendan la función como una relación de correspondencia, y no como una dependencia entre variables. Es decir, se requiere mayor consideración del registro gráfico y sus potencialidades, para la comprensión del concepto de función.

Es de resaltar que la propuesta de Dolores y Salgado (2009), no cuenta con antecedentes en cuanto al énfasis e implementación de este método gráfico en el aula, es decir, no se encuentran investigaciones sobre el diseño de situaciones que apunten al estudio del concepto de función, desde la perspectiva de la Graficación Covariacional. Luego, dada su estrecha relación con el Razonamiento Covariacional propuesto por Carlson et al (2003), resulta necesario e interesante el diseño de una secuencia de tareas que involucre ambos marcos teóricos, dirigida a estudiantes de los últimos niveles escolares de la educación colombiana.

Se considera que los elementos descritos hasta ahora (para dar cuenta de la problemática), son motivos para pensar en el diseño de tareas como las que aquí se proponen, pues estas pueden contribuir a que los estudiantes alcancen un mayor dominio de la representación gráfica del concepto de función, lo cual, a su vez, puede favorecer una mejor comprensión de dicho concepto por parte de los estudiantes. Además, debido a que estas teorías se han planteado, principalmente, como alternativas para hacer frente a las dificultades y problemáticas con el cálculo universitario, resulta interesante el estudio que aquí se propone, en tanto también podría entenderse como una apuesta para procurar que los estudiantes superen algún tipo de falencia (como las ya documentadas) antes de terminar la secundaria. A partir de lo anterior, se define la pregunta problema que se pretende abordar en este Trabajo de Grado:

¿Qué actividades o tareas podrían tenerse en cuenta para que estudiantes del Colegio Comercial Nueva Era Vallegrande puedan construir e interpretar la gráfica de una función, a través de la Graficación Covariacional?

1.2 Justificación

La pertinencia de este Trabajo de Grado se constituye, por un lado, desde las orientaciones curriculares que plantea el MEN, en articulación con investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, y en particular, de su registro gráfico; y por otro lado, desde los resultados de las Pruebas Saber[8] 9 del Colegio Comercial Nueva Era Vallegrande, en el cual se implementó la Propuesta de Aula.

En las últimas dos décadas, se ha estado investigando y reflexionando sobre la importancia del desarrollo del pensamiento variacional, debido a que este es fundamental para que los estudiantes comprendan las situaciones de variación y cambio que están a su alrededor (Ávila, 2011). Para desarrollar este pensamiento en los distintos niveles escolares de la educación colombiana, es importante analizar las variaciones, regularidades y comportamientos existentes entre las variables, procurando que los estudiantes analicen los fenómenos de cambio que pueden estar representados en tablas y gráficas (MEN, 2006).

En particular, el análisis de las representaciones gráficas de las funciones permite que los estudiantes interpreten el comportamiento de una función -en términos de sus cambios- desde

[8] Las Pruebas Saber son evaluaciones aplicadas periódicamente para monitorear el desarrollo de las competencias básicas en los estudiantes de educación básica, como seguimiento de calidad del sistema educativo

la gráfica, analizando cómo cambian las variables dependiente e independiente (cada una en relación con la otra), y que así, los estudiantes logren representar dichos cambios en términos algebraicos.

Así mismo, Bachelard (citado en Dolores, 2004) reporta que los estudiantes poseen dificultades en la lectura e interpretación de la representación gráfica del concepto de función, debido a que la poca utilización de este en el aula, provoca diversos conflictos cognitivos en los alumnos; sin embargo, el autor manifiesta que, para abordar dichas dificultades, es necesario indagar y trabajar en términos de obstáculos cognitivos y didácticos.

Otro elemento que brinda argumentos sólidos para la justificación, en específico para el trabajo de algunos aspectos de la función, en su representación gráfica, a través del método de la Graficación Covariacional, es la revisión de resultados de pruebas internas y externas de Matemáticas, tales como Pruebas Saber y PISA.

Las pruebas PISA[9] son diseñadas y aplicadas por la OECD[10], y tienen como propósito principal evaluar los conocimientos y habilidades de estudiantes de 15 años, que estén finalizando la secundaria; su aplicación es cada 3 años y evalúa las áreas de lectura, matemáticas y ciencias[11]. La prueba de matemáticas pretende evaluar siete (7) componentes básicos: comunicación, matematización, razonamiento y argumento, planteamiento de estrategias para la resolución de problemas, el uso del lenguaje simbólico, formal y técnico, y el uso de herramientas matemáticas.

En la Figura 1 se puede evidenciar que para el año 2015, en el área de Matemáticas, Colombia mejoró sus resultados en 7 puntos porcentuales, comparados con el 2009. Es de notar, que hasta el 2015, Colombia nunca ha subido al nivel medio de calificación de esta prueba.

---

[9] PISA, por sus siglas en inglés: Programme for International Student Assessment.

[10] La OECD (en español, Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos) es una entidad de cooperación internacional, constituida por 37 estados, cuyo objetivo es coordinar sus políticas económicas y sociales (OCDE, 2017-2018).

[11] Dado los intereses de este Trabajo de Grado, sólo interesa el componente matemático de dichas pruebas.

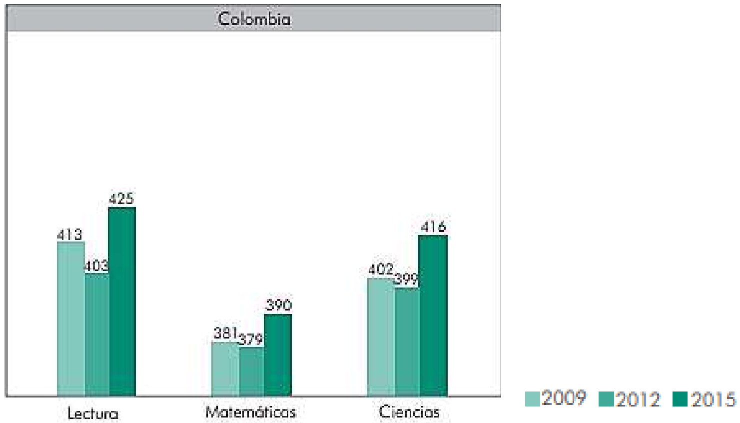


Figura 1. Resultados de la prueba PISA 2015, por área en Colombia

Fuente: SNIEE[12] - ICFES

Por su parte, en la Figura 2 se muestra los resultados de la Prueba Saber 9[13] del año 2017, correspondientes al Colegio Comercial Nueva Era Vallegrande, respecto a las competencias y componentes evaluados en Matemáticas. En general, se puede afirmar que dichos resultados están por debajo del promedio a nivel nacional, pues en ellos se observa que el 90% de los estudiantes se encuentran en insuficiente o mínimo, en el componente numérico-variacional y la competencia de razonamiento-argumentación.

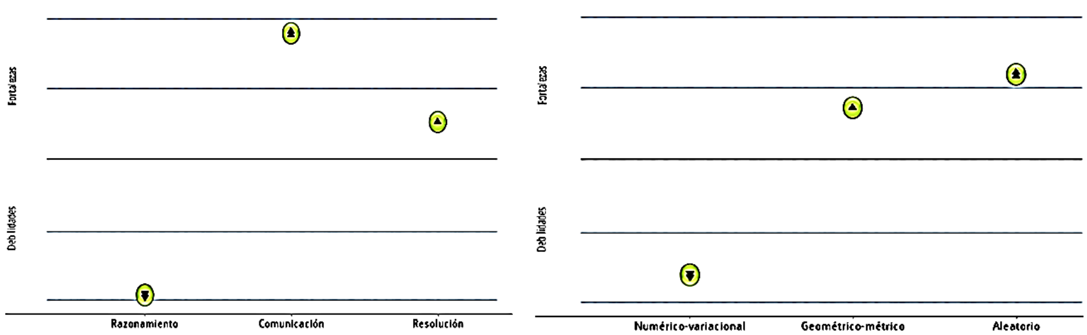


Figura 2. Resultados Prueba Saber 9 (2017), Colegio Comercial Nueva Era Vallegrande

Con base en lo anterior, se puede evidenciar que es necesario trabajar el componente numérico y el variacional, ligados a la competencia de razonamiento-argumentación, utilizando preguntas asociadas al concepto de función y sus registros. Así pues, es importante que toda actividad o tarea que se proponga a los estudiantes, esté contextualizada en fenómenos de la

---

12 SNIEE son las siglas para el Sistema Nacional de Información de Evaluación Educativa, entidad encargada de gestionar los resultados de este tipo de pruebas. Las figuras 2, 3, 4 y 5 (que siguen), se tomaron de esta misma fuente.

13 Aquí interesan los resultados de las Pruebas Saber 9, debido a que la Propuesta de Aula que se propone está dirigida a estudiantes de grado décimo.

vida real, además, que involucre el estudio de tablas y gráficas, para que los alumnos logren conjeturar y comunicar sobre las situaciones de variación y cambio que se proponen.

Luego, en este Trabajo de Grado se intenta plantear actividades de covariación para trabajar algunos aspectos de la función a través de la Graficación Covariacional, que se alejen un poco de las formas de enseñanza usuales del concepto de función, tomando en consideración situaciones dinámicas donde el estudiante pueda poner en contexto sus conocimientos matemáticos previos.

1.3 Antecedentes

Al referirse al concepto de función, son muchos los estudios e investigaciones que se encuentran alrededor de este, debido a que es un concepto importante y base para el estudio del cálculo, al permitir la comprensión de algunas nociones como continuidad, límite o derivada de funciones, y en general, para el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes. Pese a esto, se siguen reportando dificultades asociadas a la comprensión de dicho concepto, las cuales están vinculadas con el manejo de los registros de representación y el sentido que se le adjudica a su significado y caracterización. Particularmente y dado el interés ya mencionado, también importan las carencias y dificultades que se derivan propiamente del registro gráfico de la función.

En ese sentido, en este apartado se explicitan algunas de las investigaciones que se han realizado alrededor de estos temas, los cuales se han agrupado en las siguientes categorías:

- ***Dificultades asociadas al concepto de función***. En este eje se agrupan aquellas investigaciones que tienen como punto en común, detectar las dificultades más frecuentes en los procesos de significación y utilización de los diferentes registros de representación asociados al concepto de función, debido a que se considera la dificultad que prevalece en estudiantes de básica, media y educación superior.

- ***Registros de representación y visualización matemática.*** En este eje se agrupan aquellas investigaciones que hacen alusión al manejo de los distintos registros de representación, en lo que refiere al aprendizaje del concepto de función; en ellas se evidencia las dificultades en los procesos de formación, tratamiento y conversión de los registros de representación.

- ***Razonamiento Covariacional.*** En este eje se presentan aquellas investigaciones que han considerado el marco conceptual de Razonamiento Covariacional propuesto por Carlson et al (2003), como instrumento para analizar las actuaciones de los estudiantes, cuando se enfrentan a tareas de covariación. De igual manera, también se exhibe el método gráfico propuesto por Dolores y Salgado (2009), el cual aporta una serie de elementos para el estudio de la función (como covariación), a partir de la Graficación Covariacional.

A continuación, se explicitan las investigaciones que se seleccionaron frente a cada categoría, en términos del tipo de estudio que se realizó, la población a la cual estaban dirigidos y los resultados encontrados.

- ***Dificultades asociadas al concepto de función***

Una de las investigaciones de interés, es la realizada por González y Martín (2004), la cual tuvo como propósito diagnosticar las dificultades de los estudiantes, en torno a la conversión entre los registros gráfico y simbólico de la función, particularmente, en el trabajo con las funciones lineales y cuadráticas. En dicho estudio, diseñaron un cuestionario para estudiantes de 4° grado de Enseñanza Secundaria Obligatoria[14], tomando como referencia reflexiones de Moschkovich y Zaslavsky et al (ibídem), en relación con las dificultades -por parte de los estudiantes- para identificar los coeficientes de una ecuación lineal (en intersección con el eje x), y las confusiones que se derivan de los aspectos algebraicos de pendiente, escala y ángulo.

El análisis de los resultados de dicha prueba, aplicada a 21 alumnos, arrojó que, por un lado, los estudiantes presentan dificultades para relacionar los coeficientes de las ecuaciones algebraicas de las funciones, con las características geométricas de su representación gráfica. Y por otro, que los alumnos cometen numerosos errores al asociar y escribir la expresión algebraica de una función, a partir de su representación gráfica, en tanto no identifican correctamente sus coeficientes y confunden el tipo de función que se está analizando. Como conclusión, los autores plantean que los estudiantes reconocen el concepto de función desde un punto de vista operativo, razón por la que señalan la necesidad de diseñar actividades de instrucción específicas, las cuales fomenten el manejo de la función como un objeto dinámico.

[14] En España, la Educación Secundaria Obligatoria se constituye de cuatro cursos, con estudiantes entre los 12 y 16 años. Comparando esta estructura educativa con la de Colombia, se puede concluir que estos cursos corresponden a los grados 6º, 7º, 8º y 9º del sistema educativo colombiano.

En relación con lo anterior, Dolores (2004) afirma que efectivamente, los estudiantes poseen dificultades en la comprensión e interpretación de la gráfica de una función, específicamente en lo que tiene que ver con en el reconocimiento de nociones como: crecimiento y decrecimiento, puntos de estabilización y comportamiento. Para su investigación, aplicó un cuestionario a 40 estudiantes de bachillerato, quienes ya habían estudiado el tema gráficas de funciones (sin el uso de derivadas), con el fin de identificar las concepciones alternativas de estos, cuando responden a preguntas específicas sobre el comportamiento global de una función y su ubicación en el plano (representación gráfica).

En dicho estudio, se detectaron las siguientes concepciones alternativas de los estudiantes: función de imágenes positivas o negativas, función creciente o decreciente, función de imágenes positivas y además crecientes, función de imágenes positivas y además decrecientes, función de imágenes negativas y además crecientes, función de imágenes negativas y además decrecientes.

Dentro de los resultados que reporta Dolores (2004) frente a su investigación, se mencionan los siguientes: 1) Los estudiantes poseen imprecisiones para reconocer la relación entre dos puntos sobre la gráfica; 2) Los alumnos afirman que cuando la gráfica de una función tiene imágenes positivas, la función es creciente, y viceversa; 3) Es evidente la falta de conciencia por parte de los estudiantes, para comprender la relación existente entre dos variables en una gráfica cartesiana; 4) Cuentan con poco dominio para coordinar diferentes registros de representación, especialmente, el paso del registro gráfico al algebraico.

Como conclusión general, Dolores (2004) señala que las concepciones alternativas que se obtuvieron a partir del análisis de las respuestas al cuestionario, son resultado de una lectura e interpretación errada de las gráficas y su comportamiento, por parte de los estudiantes.

A partir de lo anterior, es posible decir que los estudiantes de secundaria[15] poseen dificultades en la coordinación de las representaciones gráfica y algebraica del concepto de función.

Investigaciones como la de García, Vázquez e Hinojosa (2004), evidencian que esta dificultad también persiste en estudiantes de ingeniería. Para su investigación, diseñaron y

---

[15] En México, la secundaria se conoce como Nivel Medio Básico, y comprende los grados 7º, 8 y 9º de escolaridad colombiana.

aplicaron un test a 431 estudiantes, con el propósito de detectar las deficiencias de aprendizaje y dominio en la correspondencia semiótica entre los registros gráfico y algebraico, en relación al concepto de función. El análisis de sus resultados arrojó que, por un lado, las dificultades se evidencian en la solución de tareas sobre el pasaje del registro gráfico al algebraico; y por otro, tales dificultades se generan debido al privilegio en el tratamiento de la representación algebraica de la función, razón por la cual se debe incrementar el aprovechamiento y aplicación del registro gráfico y la conversión entre registros.

La inquietud de si los profesores de matemáticas poseen esta misma dificultad en cuanto al manejo de los diferentes registros de representación del concepto de función, y de manera particular, del dominio de la representación gráfica, conduce al trabajo de Hitt (1998a). Este autor realizó una prueba a 30 profesores de matemáticas de secundaria, con el fin de reconocer las dificultades que estos presentan en la articulación de diferentes representaciones del concepto de función. A partir de su investigación, el autor identifica y propone cinco niveles para la construcción y comprensión del concepto de función, aunque señala que estos también pueden ser válidos para otros conceptos:

Nivel 1	Ideas imprecisas acerca del concepto (combinación incoherente entre diferentes representaciones)
Nivel 2	Identificación de diferentes representaciones o sistemas de representaciones de un concepto
Nivel 3	Paso de un registro de representación a otro, preservando el significado
Nivel 4	Articulación coherente entre dos sistemas de representación
Nivel 5	Articulación coherente entre distintos sistemas de representación en la solución de un problema.

En los resultados de esta prueba, se evidencia que dichos profesores no articulan coherentemente los registros de representación involucrados con el concepto de función, debido, principalmente, a que no usan la definición del concepto y no clasifican subconceptos, tales como: como dominio, rango, variación y pendiente.

Luego de hablar sobre las dificultades que subyacen a la articulación entre las representaciones gráficas y algebraicas del concepto de función, es necesario ahondar en investigaciones sobre la importancia de las representaciones semióticas en el estudio de un concepto matemático, en particular, el de función.

- ***<u>Registros de representación y visualización matemática</u>***

Gatica et al (s.f) desarrollaron una investigación sobre las conversiones entre registros de representación, para la comprensión del concepto de función. Para ello, realizaron una prueba a 48 estudiantes de primer año de Ingeniería Agronómica, en la cual se les pedía realizar conversiones entre diferentes registros referidos al concepto de función. En su análisis, estos autores encuentran que en general, los estudiantes poseen dificultades para realizar la conversión del registro gráfico al simbólico (algebraico), debido a que la mayoría de las actividades propuestas durante los cursos vistos, se enfocan en graficar las funciones a partir de su ecuación (cuando ésta ya se conoce). Al respecto, los autores concluyen que:

❏ Los estudiantes suelen construir una idea del concepto de función (acercamiento), desde sus conocimientos previos e intuiciones (sin un razonamiento lógico), debido a que se les dificulta establecer y comprender las coordinaciones entre los diversos registros de representación semiótica.

❏ Es necesario diseñar distintas secuencias de enseñanza (actividades), las cuales tengan en cuenta el manejo de todas las representaciones del concepto de función (incluyendo sus aplicaciones puntuales), para así contribuir a que los estudiantes logren, de manera gradual, una construcción significativa del concepto de función.

Por su parte, Guzmán (1998) realizó una investigación con la cual buscaba poner en evidencia el rol que juegan los registros de representación, en las respuestas de estudiantes universitarios, frente a un cuestionario sobre nociones relativas a funciones reales. Como marco de análisis para las respuestas de los estudiantes, el autor tomó el enfoque cognitivo desarrollado por Duval (2004). De las conclusiones que expone Guzmán (1998), se destacan las siguientes:

❏ Por lo general, los estudiantes son mono-registros, es decir, sus respuestas están dadas en un solo registro de representación; además, no coordinan -explícitamente- dos o más de estos registros.

❏ Las respuestas de los estudiantes se quedan en aquel registro en el cual está planteada la pregunta, o recurren al registro algebraico que, con frecuencia, es el más privilegiado en el aula de clases.

Otro elemento importante que se debe tener en cuenta al trabajar el concepto de función en la escuela, es la *visualización matemática*, al ser necesaria para interpretar y articular las distintas representaciones de un concepto matemático.

En Zimmermann y Cunningham (citado en Hitt, 1998, p. 7), se define la visualización como *el proceso de formación de imágenes (mentalmente, o con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología) y el uso de tales imágenes en forma efectiva para el descubrimiento matemático y el entendimiento*. Desde esta perspectiva, se considera que la visualización matemática es fundamental para la articulación y comprensión de los diferentes registros de representación, debido a que esta es uno de los insumos principales de los estudiantes, para el tratamiento de los registros que se requieren en el aprendizaje del concepto de función.

En ese sentido, es pertinente citar a Hitt (1998a), quien, en su investigación, intenta probar que es necesario un acercamiento a las consideraciones visuales que se requieren en la resolución de problemas sobre el concepto de función, que involucren distintas representaciones. Desde esa mirada, el autor establece el principio de que se pueden generar representaciones erróneas, y por tanto, confusiones, por parte de los estudiantes, al intentar resolver problemas sobre funciones sin la debida instrucción, enfatizada en el manejo de varios registros de representación. Lo anterior se sustenta en el hecho de que la visualización requiere exigencias cognitivas superiores a las que emergen al pensar algorítmicamente la solución de un problema (Hitt, 1998a). Del apartado de conclusiones, destacan las siguientes:

- ❑ Los estudiantes manipulan, de forma correcta, las transformaciones en un mismo registro de representación, predominando el algebraico; sin embargo, persisten las dificultades en la articulación de varios registros, cuando se trata de convertir una representación en otra, particularmente, de lo gráfico a lo algebraico (simbólico).

- ❑ No es suficiente tomar en consideración las representaciones geométricas de la función, para abordar y resolver un problema: también es necesaria una articulación libre de contradicciones, entre los diferentes registros de representación semiótica.

- ❑ Es fundamental promover el uso de nuevas tecnologías que permitan dar un significado concreto a las nociones asociadas al concepto de función; claro, la introducción de estas tecnologías implica la realización de un análisis y cambio en el currículo de matemáticas.

- ❑ Es importante el diseño de nuevos materiales didácticos para la enseñanza del concepto de función, en los cuales se le otorgue un rol importante a la visualización, como base principal para la resolución de problemas de este tipo.

- ***Razonamiento Covariacional***

Antes de presentar los antecedentes relacionados directamente con el nombre de esta categoría, es pertinente citar una investigación relacionada con el diseño y análisis de actividades de covariación, donde además se explicitan los elementos teóricos y metodológicos a tener en consideración, al momento de aplicar este tipo de actividades en la escuela.

Una de las propuestas significativas que se han desarrollado en torno a la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, es a partir del *Razonamiento Covariacional*. Este término fue acuñado por Carlson et al (2003), para referirse a las actividades cognitivas (de los estudiantes) implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atienden a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra (covariación).

En la elaboración del marco conceptual, Carlson et al (2003) investigaron la complejidad de construir procesos mentales que involucran la razón de cambio en una relación entre dos variables. A partir de esto, proponen las llamadas Acciones Mentales (AM) y Niveles de Razonamiento Covariacional (N). Las Acciones Mentales se relacionan con los comportamientos de los estudiantes durante la solución de situaciones de variación y de cambio; dichos comportamientos permiten clasificar o ubicar a los estudiantes en los Niveles de Razonamiento Covariacional, de acuerdo a sus comprensiones y habilidades.

A partir de estas Acciones Mentales y Niveles de Razonamiento Covariacional, Carlson et al (2003) aplicaron una prueba de cinco ítems a 20 estudiantes universitarios que habían terminado un curso de Cálculo, con la cual se pretendía que analizaran aspectos covariantes de distintos eventos dinámicos como, por ejemplo, agua llenando una botella de forma esférica, temperatura cambiando a lo largo de un periodo y una escalera deslizándose sobre una pared. Después de analizar las respuestas de todos los estudiantes, estos investigadores seleccionaron a seis estudiantes para hacer una entrevista, la cual tenía como fin contrastar las respuestas de la prueba escrita, con sus argumentos verbales (más detallados), para así caracterizar cuáles Acciones Mentales evidencia cada estudiante, y así lograr saber qué Nivel de Razonamiento Covariacional había alcanzado cada uno.

Dicho marco conceptual es un instrumento con el cual se puede determinar y así analizar, el Razonamiento Covariacional de un estudiante, frente a una actividad específica (de covariación), a partir de sus comportamientos manifestados escrita y verbalmente, que den cuenta de las AM que sustentan cada Nivel[16]. Finalmente, Carlson et al (2003) puntualizan sobre las siguientes conclusiones:

- ❑ La mayoría de los estudiantes mostraron comportamientos asociados a las acciones mentales 1, 2 y 3, lo cual indicó que se ubican en el Nivel 3 de Razonamiento Covariacional, pues este contempla los niveles de razonamiento 1 y 2, soportados por las respectivas AM1 y AM2.

- ❑ La mayoría de estudiantes no fueron capaces de coordinar la razón de cambio promedio con los incrementos de la variable de entrada (AM4), por lo que no se pueden ubicar en el Nivel 4 de Razonamiento Covariacional.

- ❑ La mayoría de estudiantes tuvieron dificultad tanto para coordinar la razón de cambio instantánea de la función con respecto a la variable independiente, como para explicar por qué una curva es suave; tampoco logran argumentar lo que representa un punto de inflexión en una gráfica. Es decir, no alcanzaron el Nivel 5 de Razonamiento Covariacional.

A continuación, se mencionan las investigaciones relacionadas directamente con esta categoría de Razonamiento Covariacional.

Hitt y Morasse (2009) desarrollaron una propuesta de aula para estudiantes de tercer grado de secundaria[17], con la cual se pretendía promover los procesos de modelización matemática y construcción del concepto de covariación, a través de situaciones problema que incentiven el pasaje de las representaciones funcionales naturales hacia las institucionales. Dicha propuesta de aula estaba conformada por cinco actividades. Las dos primeras tenían como foco principal, promover las representaciones funcionales de los alumnos, fomentando una idea del Razonamiento Covariacional en la situación. La tercera y cuarta tenían como objetivos, relacionar directamente las representaciones tabular y algebraica, promoviendo con ello, el

---

[16] Estos elementos se amplían en la Dimensión didáctica del marco teórico de este Trabajo de Grado.

[17] En Quebec (Canadá), la educación primaria consiste en 6 cursos y la educación secundaria en 5; esta última se subdivide en 2 ciclos, de tres y dos cursos, respectivamente. De este modo, el tercer año de secundaria corresponde al grado 9º en Colombia.

inicio de un proceso de institucionalización de las actividades anteriores. Con la última actividad, se buscaba que los estudiantes pudieran fortalecer su conocimiento sobre las representaciones algebraicas más difíciles de abordar, respecto a las otras actividades.

Como conclusión, Hitt y Morasse (2009) señalan que los estudiantes tuvieron un acercamiento significativo al concepto de covariación, lo cual es indispensable para la construcción y significación del concepto de función.

Otro de los referentes nacionales que sobresale en esta categoría es el de Ávila (2011), quien se interesó por el desarrollo del Razonamiento Covariacional en estudiantes de grado décimo, a través de la utilización software dinámicos. En dicho trabajo, expone un modelo de estudio de casos para analizar las actuaciones de los estudiantes, cuando se enfrentan a tareas relacionadas con funciones lineales y cuadráticas, presentadas en software Geogebra y Modellus. Esta investigación toma en consideración el marco conceptual de Carlson et al (2003), para clasificar a los estudiantes en los respectivos niveles, de acuerdo a sus habilidades de Razonamiento Covariacional.

La autora presenta sus conclusiones en tres categorías: función lineal y cuadrática, Razonamiento Covariacional y el uso de herramientas tecnológicas. De aquellas conclusiones, llaman la atención las siguientes:

- ❑ El estudio de las funciones lineales y cuadráticas debería ser abordado desde la noción de variación, dejando a un lado el enfoque conjuntista de la enseñanza tradicional.

- ❑ Los estudiantes dieron cuenta, principalmente, de habilidades correspondientes al Nivel 3; la mayor parte del análisis de sus respuestas, dio muestras de la exteriorización de comportamientos que daban cuenta de la coordinación en la dirección de cambio (AM1 y AM2) y la cantidad de cambio de una variable que es dependiente con los cambios de otra (AM3), siendo esta última, aquella que se conoce como variable independiente. En lo que respecta a la construcción de gráficas, la mayor parte del tiempo se observó un razonamiento lineal, así como la ubicación de puntos y segmentos entre esos puntos.

- ❑ Las actividades experimentales, presentadas en distinto software dinámico, fueron de gran utilidad, pues les permitieron a los estudiantes, observar, representar y manipular los objetos y conceptos matemáticos estudiados; de este modo, pudieron llegar al planteamiento de diversas conjeturas, las cuales fueron de gran ayuda para obtener sus respuestas.

Por su parte, Grueso y González (2016) desarrollaron una investigación en la cual presentan una propuesta para el estudio de la función, a través de situaciones de covariación dentro de eventos dinámicos. Para ello, diseñaron una propuesta de aula dirigida a estudiantes de noveno grado de educación básica, tomando como referente principal, el marco teórico y metodológico de Filloy (ibídem), denominado Modelos Teóricos Locales (MTL). El objetivo de dicha propuesta era potencializar, a través de situaciones de covariación, el desarrollo del pensamiento variacional, específicamente sobre el concepto de función a través de sus diferentes registros de representación.

Luego de haber aplicado dicha propuesta de aula, los autores caracterizaron y analizaron las respuestas de los estudiantes, de acuerdo a los niveles de Razonamiento Covariacional (Carlson et al, 2003), los sistemas matemáticos de signos y los aspectos matemáticos involucrados. Dentro de este estudio, se pudo corroborar que es posible estudiar el concepto de función, desde una perspectiva de cambio y dependencia, sin abordar directamente fórmulas o definiciones. De las conclusiones que exponen Grueso y González (2016), destacan las siguientes:

❑ Desde el modelo de enseñanza, es fundamental que el acercamiento al concepto de función, se haga desde una perspectiva dinámica, donde la dependencia de variables prime sobre la correspondencia y asignación entre variables.

❑ Los textos escolares continúan presentando el concepto de función desde una perspectiva estática y conjuntista.

❑ El Razonamiento Covariacional propuesto por Carlson et al (2003) se considera como un referente importante tanto para el diseño de tareas, como para la clasificación de los estudiantes, de acuerdo a sus respuestas.

❑ En la puesta en escena de la propuesta, se logró que los estudiantes tuvieran acercamientos importantes a la comparación de los cambios. Los estudiantes evidenciaron, de forma progresiva, la utilización y dominio de las diferentes representaciones del concepto de función, manipulando o realizando tratamientos en ellas.

Un referente nacional importante, en relación con el Razonamiento Covariacional, son las investigaciones realizadas por Jhony Villa-Ochoa. En Posada y Villa-Ochoa (2006), por ejemplo, se considera el concepto de función lineal, como base para el entendimiento de la función cuadrática, desde una perspectiva variacional. En Villa-Ochoa (2008) explicita algunos aspectos que se deben tener en cuenta para alcanzar un buen desarrollo del concepto de función cuadrática, desde una perspectiva variacional. Finalmente, en Henao, Franco, Bosco, Montoya, Restrepo y Villa-Ochoa (2013), se muestra que el Razonamiento Covariacional se puede trabajar en los estudiantes, desde la básica primaria, aun cuando no tengan conocimientos de cálculo matemático.

En el horizonte sobre el cual se propone este Trabajo de Grado, también merece especial atención el marco de la Graficación Covariacional, pues esta perspectiva aporta a la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, en tanto propone el estudio de la gráfica de la función, a partir de los cambios que se visualizan u observan en ella misma.

Los pioneros de este término, a saber, Dolores y Salgado (2009), presentan una serie de elementos o características a los que llaman el método de Graficación Covariacional de funciones. Dicho método se enfoca en tres elementos fundamentales: *la graficación de los cambios que sufren las variables en el cálculo de las diferencias*, *la relación de covariación entre las variables* (tomando en consideración los cambios entre sí) y *la noción de curva a través del ensamble de segmentos de recta poligonales*. Su objetivo central era proponer y explicar el método de Graficación Covariacional para comprender los fenómenos de variación y cambio de una función, buscando responder, principalmente, cuestiones cómo: *¿qué cambia?*, *¿cuánto cambia?*, *¿cómo cambia?*, *¿a razón de qué cambia?* y *¿cómo se comporta globalmente eso que cambia?*

Para responder y evaluar estos interrogantes, Dolores y Salgado (2009) toman en consideración el marco conceptual del Razonamiento Covariacional. De las consideraciones finales que ofrecen los autores, se resaltan: 1) El método de Graficación Covariacional puede complementar a otros métodos de graficación, y así, preparar condiciones óptimas para introducir a los estudiantes al estudio del cálculo diferencial e integral; 2) Este método permite a los estudiantes tanto construir la gráfica de una función, como analizar su comportamiento, a través de los cambios que sufren las variables entre sí.

Sin duda, son muchas las dificultades que se derivan de los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de función. Empero, y tal como se ha manifestado en este apartado, muchas de ellas (sino todas) están relacionadas con la poca comprensión que tienen los estudiantes sobre los diferentes registros de representación que conjugan en la construcción y significación de dicho concepto. En ese sentido, las investigaciones de las primeras categorías de antecedentes, sugieren que es necesaria una propuesta de estudio sobre el concepto de función, que además de considerarla como un objeto dinámico, permita que los estudiantes se enfrenten a las diferentes representaciones semióticas de la función y puedan comprender (en términos de dominio) los elementos que constituyen cada registro[18]. Además, se requiere que las actividades de enseñanza, efectivamente promuevan la articulación entre los distintos registros de representación, puesto que ello es una de las habilidades básicas para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.

De manera especial, las investigaciones rastreadas que conformaron las dos primeras categorías de antecedentes, también revelan la necesidad de plantear actividades dirigidas a estudiantes de secundaria, que además de promover lo anterior, se constituyan en un escenario para enfatizar sobre el registro gráfico de la función, debido a que esta representación, o bien poco se privilegia en el aula o bien se asume como la ubicación de un conjunto discreto de puntos.

Por otro lado, los marcos conceptuales y estudios (desarrollados alrededor de estos) que se exponen en la última categoría de antecedentes, insisten en que el Razonamiento Covariacional y la Graficación Covariacional son instrumentos fundamentales para que los estudiantes lleguen a comprender conceptos principales del Cálculo, cuando se enfrentan al estudio del concepto de función, mediante tareas de covariación. En ese sentido, dicho rastreo también evidencia la necesidad de proponer tareas de covariación, que consideren los elementos para la Graficación Covariacional y estén dirigidas a estudiantes de secundaria más que a estudiantes universitarios, pues es en el nivel escolar sobre el cual distintos investigadores reportan que se manifiestan este tipo de dificultades, cuando la función es objeto de estudio.

[18] En el registro gráfico, esto sería, por ejemplo, la comprensión de ciertos puntos relevantes de la gráfica, graduación de los ejes, dominio y rango, entre otros.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Caracterizar el tipo de tareas, que en el marco de una Propuesta de Aula les permita a los estudiantes de grado 10º del Colegio Comercial Nueva Era Vallegrande construir e interpretar la gráfica de una función, a través de la Graficación Covariacional.

1.4.2 Objetivos específicos

- Documentar la problemática desde algunos elementos teóricos y metodológicos en torno a situaciones de covariación, desde las dimensiones matemática, didáctica y curricular, que posibiliten la consolidación de tareas relacionadas con la Graficación Covariacional.

- Desarrollar el proceso de experimentación a través del diseño e implementación de una Propuesta de Aula que considere los marcos del Razonamiento Covariacional y la Graficación Covariacional.

- Aportar reflexiones teóricas y metodológicas en torno a la pertinencia de las tareas de la Propuesta de Aula en relación con la Graficación Covariacional y sus posibles implicaciones en el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional en la educación secundaria.

1.5 Marco contextual

En los inicios de 1997, se reunieron los señores Benjamín Victoria y Cesar Trujillo, y la señora Martha Deisy López, con el propósito de crear un establecimiento educativo que cumpliera con las expectativas y necesidades de los habitantes de la comuna 21 de Santiago de Cali. Es así como en junio de 1997, se abren, por primera vez, las puertas del Colegio Comercial Nueva Era, ubicado en la Carrera 26M2 No. 122-24, en el barrio Calimio Desepaz; este colegio da inicio con oferta escolar desde Jardín hasta el grado 9º; cada año, el colegio fue abriendo un nuevo nivel escolar, hasta llegar al grado 11º.

En el año 2004, se le da inicio a un proyecto de ampliación sobre la construcción de una sede, y es así como surge una nueva proyección para el Colegio Comercial Nueva Era. En la búsqueda del terreno necesario para tal fin, se determina que la sede estará en el barrio Vallegrande (localizado en la misma comuna), como el sitio más adecuado para empezar dicho proyecto. De esta forma, en el mes de marzo inició el proceso de inscripción y matrículas hasta el grado 7º, en el Colegio Comercial Nueva Era Vallegrande. En la actualidad, el Colegio Comercial Nueva Era Calimio, no funciona con este nombre, debido a que la sociedad mencionada en el primer párrafo, decidió vender el plantel educativo a una fundación. Por su parte, la sede Vallegrande sigue en funcionamiento, ubicada exactamente en la Calle 84C No. 20-30.

El Colegio Comercial Nueva Era, llevaba 18 años en funcionamiento, tiempo durante el cual logró 12 promociones de graduandos en la sede Calimio, y otras 8 promociones de graduandos que hasta el momento corren en la sede Vallegrande[19]. En el año 2013, este plantel educativo obtuvo su última acreditación como Colegio Comercial, según la Resolución 41430214994, con código DANE 376001040650, de Santiago de Cali.

Vallegrande es una ciudadela que limita con el Jarillón del río Cauca y, por ende, con la mayor invasión de Cali y sus alrededores; esta localidad presenta problemas sociales como: drogadicción, pandillas, sicarios y prostitución.

Para la formación de sus estudiantes, el Colegio se apoya en seis principios: pedagogía bíblica, democracia participativa, libertad responsable, desarrollo de habilidades de pensamiento, espíritu investigativo y convivencia pacífica. Además, fomenta en sus estudiantes, valores institucionales de familia, respeto, equidad, tolerancia y creatividad. En cuanto a su visión, el Colegio busca ser reconocido como uno de los mejores 50 planteles educativos privados de Cali, destacando por la calidad integral de sus estudiantes, el profesionalismo de su equipo de trabajo y el fortalecimiento del desarrollo comunitario.

En cuanto a los profesores de matemáticas, el Colegio cuenta con dos profesores: para primaria, un profesor con título de Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas; y para secundaria, un estudiante de octavo semestre de Administración de Empresas, de la Universidad del Valle.

[19] En lo que sigue, no se vuelve a hacer referencia a esta *sede* bajo dicho término, sino que se alude a ella como si fuese el único y original plantel educativo, es decir, como Colegio Comercial Nueva Era Vallegrande.

CAPÍTULO 2: MARCO REFERENCIAL

En este apartado se presentan los elementos teóricos que sustentan este trabajo y que permiten tener los insumos para el diseño, aplicación y análisis de la Propuesta de Aula. Tales elementos se han organizado en tres dimensiones: matemática, didáctica y curricular.

En la dimensión matemática se alude a algunas definiciones del concepto de función, encontradas en textos matemáticos utilizados para la educación universitaria, en particular los que se usan para la formación de matemáticos, con el propósito de rastrear las distintas definiciones y usos de este concepto y así puntualizar sobre aquellas que ya han sido aceptadas por la comunidad matemática. Además, se hará especial énfasis en la representación gráfica y cómo esta se concibe.

En la segunda dimensión, se pretende plasmar los distintos elementos teóricos que han surgido alrededor de la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, ya sea en términos de las dificultades y errores reportados por estos investigadores o actividades, particularizando aquellas que han contemplado el marco conceptual propuesto por Carlson et al (2003). Lo anterior, contempla aspectos como la visualización, la importancia de los registros de representación semiótica, el concepto de imagen y la Graficación Covariacional.

En la última dimensión, se discuten elementos curriculares que permean el modelo de enseñanza matemática en Colombia; particularmente se tomará en consideración los Lineamientos Curriculares en Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas, los cuales influyen notablemente en el modelo enseñanza de los contenidos matemáticos en Colombia. Esto, con el fin de identificar aquellos elementos que tengan relación con la covariación y las representaciones gráficas asociadas al concepto de función. La identificación de estos elementos es fundamental para el desarrollo de este trabajo por dos razones: primero, puesto que contribuye a fijar la coherencia vertical y horizontal necesaria para el diseño de la propuesta de aula y segundo, el contraste con lo hallado en la dimensión didáctica permitirá concluir sobre las posibles correspondencias encontradas.

2.1 Dimensión matemática

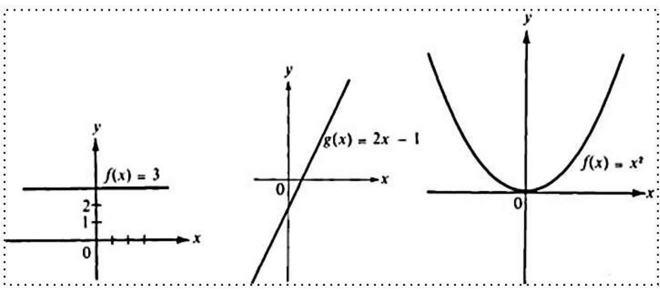
En este apartado se hace un análisis del concepto de función y su representación gráfica, utilizando como referencia el punto de vista teórico presentado por Apóstol (1984) y Edwards y Penney (1996).

Apóstol (1984) define el concepto de función así:

> Dados dos conjuntos de objetos, el conjunto X y el conjunto Y, una función es una ley que asocia a cada objeto de X uno y sólo un objeto en Y. El conjunto X se denomina el dominio de la función. Los objetos de Y, asociados con los objetos en X forman otro conjunto denominado el recorrido de la función (este puede ser todo el conjunto Y, pero no es necesario" (p. 62).

Según esto, el autor considera el concepto de función como la correspondencia de dos conjuntos que asocian sus elementos. Además, describe lo que significa dominio y recorrido dentro de una función: dominio son todos los posibles valores que puede tomar X, y recorrido es el resultado de la correspondencia entre Y y X. También explica que el conjunto dominio viene sujeto a una restricción que impide que existan elementos duplicados en este conjunto, mientras que el recorrido no posee restricción alguna.

El concepto de función se representa a través de diferentes registros, tales como: simbólico, tabular, gráfico, analítico, verbal, conjuntista entre otros. Apóstol (1984) explica las distintas representaciones del concepto de función, privilegiando tres de ellas: analítica, gráfica y tabular (ver Figura 3[20]).



n	$n!$	n	$n!$
1	1	6	720
2	2	7	5 040
3	6	8	40 320
4	24	9	362 880
5	120	10	3 628 800

Figura 3. Ejemplo representaciones del concepto función, en Apóstol (1984)

Edwards y Penney (1996) definen el concepto de función real *f* como *"...una regla que asigna a cada número x en D exactamente un número real, denotado con f(x)*" (p. 5). Es claro que, en esta definición, ellos establecen las relaciones entre las diversas variables; de esta forma, quedan explícitas las propiedades específicas del concepto de función a partir de la utilización de los números reales.

[20] La representación tabular que aquí se muestra, no fue tomada de la misma sección de donde provienen las otras representaciones.

Estos autores utilizan diferentes registros para explicar el concepto de función; es así como se puede notar el uso de los registros analítico, gráfico, tabular, verbal, entre otros (ver Figura 4).

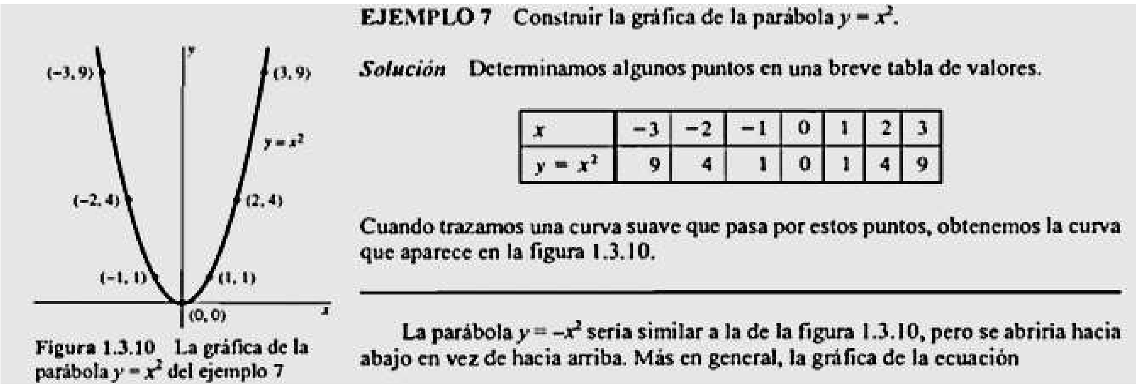


Figura 1.3.10 La gráfica de la parábola $y = x^2$ del ejemplo 7

EJEMPLO 7 Construir la gráfica de la parábola $y = x^2$.

Solución Determinamos algunos puntos en una breve tabla de valores.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Cuando trazamos una curva suave que pasa por estos puntos, obtenemos la curva que aparece en la figura 1.3.10.

La parábola $y = -x^2$ sería similar a la de la figura 1.3.10, pero se abriría hacia abajo en vez de hacia arriba. Más en general, la gráfica de la ecuación

Figura 4. Ejemplos representaciones del concepto función, en Edwards y Penney (1996)

Aunque Apóstol (1984) no define de manera explícita el conjunto *f* que mencionan Edwards y Penney (1996), estos autores llegan a un leve acuerdo denotando al conjunto X el cual denominan dominio; sin embargo, el conjunto de valores que toma Y, para Apóstol se denominó recorrido, mientras que para Edwards y Penney se denominó rango. Además, al definir el concepto de función, los autores concuerdan en que esta es una ley de correspondencia entre variables.

Para Apóstol y Edwards y Penney, el tratamiento de los distintos registros de representación suele hacerse de forma aislada, y particularmente como consecuencia uno de otro. Un ejemplo de ello, son los registros gráfico y tabular, pues generalmente, se asume primero la elaboración de una tabla de valores y luego se ubican puntos coordenados en el plano cartesiano. Debido a esto, es común encontrar dos situaciones: la primera, tiene que ver con la predominancia del registro algebraico en los ejercicios que se proponen a los lectores, y la segunda, está relacionada con el hecho de que en aquellos ejercicios sobre representación gráfica de una función, lo solicitado se queda en el plano de hallar dominio, rango, vértices, etc., y no la alusión directa de cómo poder trabajar con estos registros de manera simultánea y complementaria (ver figuras 5 y 6).

Sea f la función definida como sigue: $f(x) = 1$ para $0 \leq x \leq 1$; $f(x) = 2$ para $1 < x \leq 2$. La función no está definida si $x < 0$ o si $x > 2$.
(a) Trazar la gráfica de f.
(b) Poner $g(x) = f(2x)$. Describir el dominio de g y dibujar su gráfica.
(c) Poner $h(x) = f(x - 2)$. Describir el dominio de h y dibujar su gráfica.
(d) Poner $k(x) = f(2x) + f(x - 2)$. Describir el dominio de k y dibujar su gráfica.

Figura 5. Muestra del trabajo con representación gráfica propuesta en Apóstol (1984)

En los problemas 9 a 13, determine la pendiente (m) y la ordenada al origen (b) de la recta con la ecuación dada. Grafique después dicha recta.

9. $2x = 3y$ **10.** $x + y = 1$
11. $2x - y + 3 = 0$ **12.** $3x + 4y = 6$
13. $2x = 3 - 5y$

Figura 6. Muestra del trabajo con representación gráfica propuesta en Edwards y Penney (1996)

Respecto a lo que atañe con este rastreo, es importante mencionar que Apóstol (1984) no define el concepto de gráfica de una función, mientras que Edwards y Penney la definen como: "*la gráfica de la ecuación* $Y = f(x)$*; a la vez, la gráfica de una ecuación en dos variables X e Y es el conjunto de todos los puntos (X, Y) del plano que satisfacen la ecuación*".

Otro de los conceptos que interesa para esta investigación, es el de covariación y su uso, el cual no se evidenció en ninguno de los dos textos; esto da a entender que el uso de la graficación covariacional es un tema actual, razón por la que ha sido poco profundizado en la enseñanza.

2.2 Dimensión didáctica

Antes de iniciar este apartado, es importante detallar qué se entiende por representación gráfica o registro gráfico; además, se explicitan las partes de la representación gráfica. Por último, se resaltan las bondades o fortalezas de trabajar este tipo de representación semiótica con los estudiantes, en tanto es el interés de este Trabajo de Grado.

De manera general, se puede afirmar que la representación gráfica de una función permite expresar la dependencia entre dos variables, es decir, a través de su lectura e interpretación, se puede conocer cómo el cambio de una de las variables hace que la otra variable también cambie. Además de ello, se puede estudiar en qué cantidad cambia cada variable y qué hechos están expresando dichos cambios en el evento dinámico en estudio (Azcárate y Deulofeu, 1999).

De este modo, un conocimiento amplio del registro gráfico, particularmente de la función, se constituye en un instrumento a través del cual los estudiantes pueden establecer nuevos conceptos, como, por ejemplo, la noción de variación de una función (variación media en un intervalo, intervalos de crecimiento y decrecimiento, variación instantánea, etc.).

Cabe resaltar que la lectura, interpretación y construcción de gráficas de funciones, puede ser un tema bastante propicio para trabajar con estudiantes de secundaria (incluso desde un nivel introductorio), pues esto permite el estudio del concepto de función a partir de situaciones reales, externas a las matemáticas, que propicien la construcción de dicho concepto por parte de los estudiantes.

Así pues, el estudio de la representación gráfica de la función exige un mayor pensamiento por parte de los estudiantes, pues se requiere de un amplio dominio de algunos elementos del pensamiento variacional, como, por ejemplo, comprender qué es una variable, el tipo de variables (magnitudes) que existen, coordenadas, graduación de ejes, intervalos de una gráfica cartesiana, entre otros (Hitt, 1998b).

En las recomendaciones didácticas reportadas por Azcárate y Deulofeu (1999) sobre el uso de las gráficas cartesianas como introducción al concepto de función, se enfatiza en tres grandes aspectos: los números y la recta, ejes cartesianos y coordenadas de los puntos del plano y gráficas cartesianas. El último de estos aspectos es de interés en este Trabajo de Grado, pues recalca la diferencia entre *lectura* e *interpretación* de una gráfica (que se diferencian entre sí), como procesos cognitivos necesarios para estudiar eventos dinámicos hacia y desde una gráfica cartesiana.

Leer una gráfica cartesiana podría definirse como tratar de obtener información de la misma, identificando, por ejemplo, las variables representadas en los respectivos ejes, significado del origen, unidad y graduación de los ejes, para así llegar a identificar los puntos de la gráfica (es decir, dado un valor de una variable, hallar el valor correspondiente de la otra variable). Por otra parte, y como se explicita en la problemática, interpretar la gráfica es una actividad más compleja, en tanto implica el ser capaz de describir la función representada en forma global, prestando atención a sus características generales, es decir, a las variaciones que presenta.

Con lo anterior, no se está diciendo que la lectura de una gráfica cartesiana sea una actividad más fácil que interpretarla, sino que no es suficiente para llegar a comprender la función representada, pues en la actividad de interpretación, es necesario considerar los intervalos en los que varían, de cierta forma, las variables implicadas (variación de la función).

Además de fortalecer la construcción del concepto de función, el dominio de la representación gráfica de la función requiere acceder a un pensamiento y lenguaje variacional determinado, lo cual también implica el manejo de un extenso conjunto de formas gráficas y significados propios de esta forma de pensamiento por parte de los estudiantes.

En numerosas investigaciones enmarcadas en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, se ha identificado que la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función es una problemática que persiste en todos los niveles académicos, debido a que requiere diferentes niveles de abstracción, comprensión de significados, coordinación entre registros de representación semiótica, entre otras cuestiones (Gatica et al, s.f). Esta problemática radica en que los estudiantes no comprenden el significado del concepto de función, debido a que, entre otras razones, algunos profesores han optado por enseñarlo como una secuencia algorítmica, dejando de lado aspectos como: la conversión entre registros de representación semiótica, la visualización, la resolución de problemas, entre otros (Hitt, 1998b).

A continuación, se explicará el papel de algunos de estos aspectos, de acuerdo a los fines de este Trabajo de Grado.

2.2.1. Visualización matemática

Según Duval (2004), los objetos matemáticos, por naturaleza, no son accesibles mediante la percepción; por ello, existe la necesidad de representarlos para posibilitar su mediación. El papel que juegan los registros de representación en la comunicación de las ideas matemáticas es vital, debido a que su distinción y dominio permiten la comprensión y significación de un objeto en matemáticas. Sin embargo, la utilización de éstos no es tarea fácil, pues requiere de ciertas actividades cognitivas del estudiante para la formación[21], tratamiento[22] y conversión[23] de las representaciones de un objeto matemático.

[21] Se entiende por *formación*, desde este referente, a toda actividad cognitiva de los estudiantes que permita expresar, mediante representaciones mentales o reales, un objeto.
[22] Se encarga de la transformación del objeto matemático en un mismo registro de representación.
[23] Es la actividad cognitiva que alude a la transformación que sufre una representación, a un registro distinto al inicial, preservando su significado.

Si bien, el reconocimiento de un registro de representación semiótica contribuye notablemente en la aprehensión de un objeto en matemáticas, esto no es suficiente. Es necesario que el estudiante establezca una coordinación y tratamiento simultáneos entre distintos registros de representación semiótica (Duval, 2004). Claro, la conversión entre registros de representación no se realiza de forma espontánea: se requiere principalmente que el estudiante establezca una congruencia entre las representaciones del objeto, lo cual, según diversas investigaciones como Hitt (1998b), Gatica et al (s.f) y Guzmán (1998), es la principal dificultad en los estudiantes.

El papel de los registros de representación semiótica en el aprendizaje del concepto de función es fundamental, debido a que estos pueden ser utilizados en la aprehensión de este concepto, en la resolución de problemas matemáticos y en su vida diaria. Pese a ello, en investigaciones como González y Martín (2004), Dolores (2004), Hitt (1998b) y Gatica et al (s.f), se ha identificado que los estudiantes, por lo general, utilizan un solo registro de representación semiótica[24] o siguen una secuencia algorítmica de pasos para representar este concepto en otros registros, lo cual provoca una comprensión errónea del concepto de función por parte de los estudiantes.

Por esta razón, se reconoce la complejidad en el aprendizaje y enseñanza del concepto de función, debido a que comprender la relación entre las múltiples representaciones semióticas de este concepto (algebraica, tabular, analítica, verbal, entre otras) implica reconocer y traducir de una representación a otra, los códigos que se generan en cada una.

Durante el abordaje de esta complejidad, en investigaciones como las de Hitt, F. (1998a) y García, Vásquez e Hinojosa (2004), se ha encontrado que los estudiantes de educación básica, media y pregrado, presentan dificultades recurrentes en el tratamiento y conversión de las diferentes representaciones semióticas ligadas al concepto de función, debido a que su conceptualización en el aula, se suele enfocar en una utilización operativa de dicho concepto.

El pasaje entre las múltiples representaciones del concepto de función es fundamental para la construcción de dicho concepto, debido a que permite que los estudiantes verifiquen y analicen la validez de las afirmaciones relacionadas con las funciones, para la solución de un

[24] Esta dificultad por parte de los estudiantes, ha sido nombrada en algunas investigaciones como *mono-registro* (Gatica et al, s.f); Guzmán, 1998)

problema determinado, permitiendo así, visualizar de forma general y sin errores conceptuales, tales afirmaciones.

Cabe aclarar que, en esas mismas investigaciones, se ha constatado la hipótesis de que el pasaje entre los registros de representación semiótica del concepto de función, se suele enfocar en un método algorítmico carente de significado para los estudiantes, particularmente, en lo que tiene que ver con el pasaje unidireccional entre los registros de representación algebraico-tabular-gráfico. Por ello, estos investigadores plantean que es necesario enfatizar en la enseñanza de este concepto, desde sus distintos registros de representación, principalmente, en el pasaje del registro gráfico al algebraico, siendo este último, aquel que poco se trabaja en la escuela (Guzmán, 1998).

Como se ha dicho, la actividad cognitiva de representar un objeto matemático de distintas formas no es tarea sencilla, pues, el hecho de que los estudiantes reconozcan que existen los registros gráfico, tabular, algebraico, entre otros, no garantiza que dominan cada uno de ellos, o más aún, que han logrado consolidar determinado concepto matemático. Para abordar esta dificultad, se requiere una actividad que involucre el reconocimiento de la importancia de cada registro de representación; a este proceso se le denomina *visualización matemática* (Hitt, 1998b).

A continuación, se referencian algunos aspectos que sustentan la importancia de esta última idea, como elemento fundamental en la aprehensión de un objeto matemático desde sus diferentes registros de representación, en particular, del concepto de función.

Desde mediados de los 80, la comunidad matemática ha intentado crear un modelo mixto que tome en consideración tanto aspectos formales de las matemáticas, como la importancia de las representaciones para la creación de imágenes mentales. Al respecto, investigaciones como las de Vinner y Dreyfus y Eisenberg (citados en Hitt, 1998b), han constatado la hipótesis de que los profesores enfatizan el estudio de las matemáticas en el aula, sobre los procesos algebraicos, restándole importancia a los procesos visuales y gráficos, lo cual repercute directamente en la adquisición de conocimientos matemáticos por parte de los estudiantes.

Así pues, para Hitt (1998b) la *visualización matemática* requiere la habilidad de convertir un problema dado en cierto registro de representación semiótica, a otro registro. Pese a esta afirmación, es común encontrar en diversos grados de escolaridad (básica, media y superior), que los estudiantes y profesores manifiestan un rechazo constante sobre la utilización de representaciones visuales de situaciones problema, debido a que “pensar visualmente” exige demandas cognitivas superiores a las que exige “pensar algorítmicamente” (Vinner, citado en Hitt, 1998b).

En el caso de este Trabajo de Grado, se toma como referencia la definición de visualización expuesta por Hitt (1998b): “la visualización matemática es el proceso de formación de imágenes (mentales, físicas o computarizadas) y el uso de tales en forma efectiva para el descubrimiento matemático y el entendimiento” (p. 3). Además, agrega que la visualización está fuertemente entrelazada con los sistemas semióticos de representación, debido a que el fortalecimiento de las habilidades visuales de los estudiantes, requiere que ellos sean capaces de efectuar las tres actividades cognitivas (*formación, tratamiento* y *comprensión)* expuestas por Duval (2004). Así pues, una reflexión constante sobre el papel de los registros de representación, es fundamental para comprender la manera en que los estudiantes construyen los conceptos matemáticos en el aula de clase.

De manera particular, la *función* es uno de los conceptos matemáticos que permite la consideración de diferentes registros de representación (algebraico, gráfico, sagital, tabular, entre otros). Luego, para su estudio en el aula, se requiere entonces el uso constante del proceso de visualización durante la resolución de problemas relacionados con dicho concepto. Ahora bien, es comprensible que cuando los estudiantes se enfrentan al estudio del concepto de función, acudan a aquellas representaciones sobre las cuales poseen un mayor dominio, o se centren en aquella (representación) que ‘más trabaja’ o presenta el profesor. Es en este punto pues, al que deben apuntar las actividades o tareas que se propongan en torno al concepto de función, pues el planteamiento de problemas que involucren el manejo y conversión de más de dos registros de representación, va a permitir una verdadera comprensión de fenómenos de variación por parte de los estudiantes (Betancur, 2013; Gatica et al, s.f).

A pesar de lo anterior, es común que los estudiantes de distintos niveles de escolaridad, presenten una resistencia considerable en el uso de la representación gráfica del concepto de función, debido a dos razones. La primera es que los profesores poseen un mayor dominio en los procesos algorítmicos que en los visuales; y segundo, es el hecho de que ‘pensar visualmente una función’ exige actividades cognitivas mayores a ‘pensarla algorítmicamente’, dado que implica reconocer las singularidades que se presentan en la gráfica de dicha función, como, por ejemplo, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos de inflexión, cambios de concavidad, etc. (Hitt, 1998b); Dolores (2004).

Hasta el momento, se ha expuesto la manera en que los estudiantes pueden llegar a comprender un concepto matemático de forma efectiva (ampliamente), en particular, el concepto de función. Ahora se requiere indagar sobre los procesos cognitivos que subyacen a esta actividad.

Para las investigaciones en Educación Matemática, resulta importante centrar la atención en los procesos cognitivos que sobrellevan los estudiantes, cuando se enfrentan a los procesos de enseñanza. En lo que respecta al interés de este Trabajo de Grado, es necesario explicitar las nociones de *definición de concepto* e *imagen de un concepto,* expuestas por Tall y Vinner (1981), las cuales contribuyen notablemente a la construcción y significación de los objetos matemáticos.

Para Tall y Vinner (1981), el concepto de *imagen* es uno de los más implicados durante el acercamiento a un objeto matemático, debido a que la formación de imágenes mentales, representaciones visuales, experiencias e impresiones evocadas, es la primera acción, de carácter no verbal, que el hombre realiza al oír referenciar un objeto en particular. Cabe resaltar que, en algunos casos, las imágenes de un objeto matemático no necesariamente corresponden a su definición, debido a que los métodos utilizados para construir dicho objeto, están enfocados en la búsqueda y creación de ejemplos, lo cual conlleva a no considerar sus propiedades, características y estructuras algebraicas, como aspectos importantes para una adecuada comprensión (Thompson, citado en Carlson et al (2003)).

De esta manera, Tall y Vinner (1981) definen el concepto de imagen *como una estructura cognitiva total que se asocia con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales y procesos asociados.* Al respecto, estos investigadores hacen la aclaración de que las definiciones, en muchos casos, han generado serios problemas en el aprendizaje de las matemáticas, debido a que el estudiante tiende a confundir el objeto, con su definición; luego, las imágenes que se generan no son correctamente direccionadas a su definición (Grueso y González, 2016).

2.2.2 Razonamiento Covariacional

Uno de los referentes utilizados para realizar este Trabajo de Grado, es el marco conceptual propuesto por Carlson et al (2003). Ellos desarrollaron una propuesta para describir el Razonamiento Covariacional y señalan que, a partir de éste, se puede realizar una observación directa, un análisis detallado y una clasificación de las actuaciones de los estudiantes, cuando se enfrentan a actividades de covariación. Desde esta perspectiva, el Razonamiento Covariacional está definido como: "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atienden a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a otra" (p.3).

El Razonamiento Covariacional está relacionado con fenómenos o situaciones dinámicas de cambio, que no necesariamente deben estar representados en Ambientes de Geometría Dinámica como lo son Cabri, Geogebra, entre otros. El estudio de fenómenos dinámicos requiere que el estudiante construya imágenes mentales de dos variables que dependen y cambian simultáneamente entre sí, como, por ejemplo, la altura del agua con respecto al volumen, en un recipiente no uniforme.

Carlson et al (2003) proponen estudiar la forma en que los estudiantes comprenden el concepto de covariación. Aplicaron un cuestionario de 5 preguntas que involucran aspectos covariantes de eventos dinámicos, a 20 estudiantes de segundo semestre que habían terminado un curso de Cálculo con notas sobresalientes; después de analizar las respuestas, estos investigadores seleccionaron a 6 estudiantes para hacer una entrevista, la cual tenía como fin contrastar las respuestas de la prueba escrita, con sus argumentos verbales (más detallados), para así caracterizar cuáles Acciones Mentales (AM) evidencia cada estudiante, y lograr saber qué Nivel de Razonamiento Covariacional (N) había alcanzado cada uno de ellos.

En este marco conceptual se hace referencia a la palabra *covariación*, como el estudio de los cambios de una magnitud, atendiendo a los cambios de la otra, cuando hay una relación de dependencia entre dos magnitudes. Esta involucra la coordinación de dos cantidades, es decir, hacer seguimiento al valor de cada cantidad y darse cuenta que la otra también tiene un valor en cada instante (Carlson et al, 2003).

Es importante resaltar que, en este marco conceptual, se toma en consideración las reflexiones realizadas por Tall y Vinner (1981) y Thompson (citado en Carlson et al (2003)), sobre la noción de *imagen de un concepto*. Carlson et al (2003) utilizan estos aportes, para definir la noción de *imagen de covariación* como: "Aquello que se desarrolla y tal desarrollo pasa de la coordinación de dos cantidades a las imágenes de coordinación continua de ambas cantidades para un lapso determinado" (p. 123).

Para poder entender los comportamientos que tienen los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de covariación, se puede acudir a las Acciones Mentales (AM) propuestas por Carlson et al (2003), las cuales permiten clasificar a los alumnos en un determinado nivel de Razonamiento Covariacional. En la tabla que sigue, se aprecian dichas AM con los respectivos comportamientos que han de manifestar los estudiantes, para vincularlos con las mismas (AM).

Tabla 1. Acciones mentales del marco conceptual para la covariación

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamiento
AM1	**Coordinación** del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables.
AM2	Coordinación de la **dirección** del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la **cantidad** de cambios de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de **cambio promedio** de la función con los incrementos uniformes de los cambios en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de **cambio instantánea** de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos de la razón de cambio instantáneo en la razón de cambio para todo el dominio de la función.

Tomada de Carlson et al, 2003, p.128

Es importante aclarar que las Acciones Mentales están clasificadas en orden ascendente, desde la más sencilla (AM1) hasta la más compleja (AM5). La primera Acción Mental (AM1) corresponde a la identificación de las variables que están cambiando, utilizando un lenguaje verbal para comunicar los cambios. La segunda Acción Mental (AM2) corresponde al reconocimiento de la dirección del cambio de las variables, es decir, manifestar por medio del lenguaje verbal si lo que cambia aumenta o disminuye. La tercera Acción Mental (AM3) corresponde a la concientización de la cantidad de los cambios entre las variables; en esta AM lo primordial es cuantificar numéricamente los cambios que sufren las variables (magnitudes) a medida que varían.

La cuarta Acción Mental (AM4) corresponde, específicamente, a la capacidad de construcción de los esbozos de la gráfica que representa la función (la cual modela el evento dinámico en cuestión); aquí es necesario que el estudiante coordine y encuentre la razón de cambio promedio a medida que se incrementa la variable independiente. Por último, en la quinta Acción Mental (AM5) se espera que el estudiante sea capaz de construir una imagen madura de los cambios que sufre una variable con respecto a la otra (de forma instantánea), tomando en consideración elementos como: concavidad, puntos de inflexión, máximos y mínimos, razón de cambio, entre otros.

Así pues, se puede clasificar a un estudiante en un determinado nivel de Razonamiento Covariacional, según la imagen global que parece manifestar a las distintas acciones mentales que dicho alumno demuestra en el contexto de un problema o tarea referente a un evento dinámico de covariación. En Tabla 2 se presentan los respectivos niveles de Razonamiento Covariacional propuestos por Carlson et al (2003).

Tabla 2. Marco conceptual para los niveles de la covariación

NIVELES DE RAZONAMIENTO COVARIACIONAL	ACCIONES MENTALES SUSTENTADAS POR CADA IMAGEN
Nivel 1 (N1) Coordinación	Las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable. (AM1).
Nivel 2 (N2) Dirección	Las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. (AM1 y AM2).
Nivel 3 (N3) Razón Cuantitativa	Las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. (AM1, AM2 y AM3).
Nivel 4 (N4) Razón Promedio	Las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. (AM1, AM2, AM3 y AM4).
Nivel 5 (N5) Razón Instantánea	Las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamiento más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de los puntos de inflexión. (AM1 hasta AM5).

Adaptado de Carlson et al, 2003, p. 129

Carlson et al (2003) señalan que cada nivel de Razonamiento Covariacional se alcanza a medida que el estudiante evidencia o completa las acciones mentales que corresponden a dicho nivel, es decir, se espera que los comportamientos de un estudiante ubicado en N3, por ejemplo, sean tales, que el alumno esté en capacidad de manifestar y cumplir satisfactoriamente tanto la Acción Mental relacionada con su nivel como las anteriores (AM2 y AM1).

Es importante aclarar que un estudiante que esté ubicado en N5, debe ser capaz de manifestar la AM5 en acciones mentales que van desde la AM1 hasta la AM4, para así llegar a comprender la razón de cambio instantánea de una variable con respecto a otra. También se espera que reconozca elementos importantes durante su recorrido por estos niveles, como lo son puntos de inflexión, criterios de concavidad y puntos críticos, esbozo de la gráfica de una función, entre otros.

Una de las características que se debe de tener en cuenta para hablar del Razonamiento Covariacional, son los procesos de pensamiento y comportamiento pseudo analíticos, los cuales se pueden describir como aquellos que ocurren sin una adecuada comprensión del concepto (de forma intuitiva, por ejemplo) u objeto en cuestión. Específicamente, los pensamientos pseudo-analiticos están caracterizados por un comportamiento aparentemente conceptual, pero que en definitiva no es más que un pensamiento producido por la influencia de procesos mentales (ideas espontáneas, sin base teórica), sin una caracterización conceptual verdadera (Vinner, 1997).

Desde el punto de vista de Carlson et al (2003), el desarrollo del Razonamiento Covariacional permite que el estudiante aborde situaciones dinámicas, en las cuales las variables sean dependientes entre sí; el abordaje de este tipo de actividades permite que los estudiantes manifiesten ciertos comportamientos, los cuales están clasificados en las acciones mentales de covariación. Es importante aclarar que para que los estudiantes se ubiquen en determinada Acción Mental, se debe de formar una imagen mental acorde a la tarea específica y que permita razonar los comportamientos que sufren las variables; sin embargo, tomando como referencia las reflexiones expuestas por Vinner (1997), las imágenes de covariación están relacionadas directamente con los sistemas de representación. Lo anterior se puede evidenciar en la siguiente cita:

> El uso de representación física pareció proporcionar una herramienta representacional poderosa que ayudó a estos estudiantes en el razonamiento sobre el cambio en una variable mientras atendían concurrentemente al cambio en la otra variable (Carlson et al, 2003, p. 147).

El papel de las representaciones gráficas de las situaciones de covariación, contribuyeron notablemente al diseño de las actividades propuestas por Carlson et al, debido a que permiten tener una mejor comprensión de la relación que existe entre las variables que intervienen en un fenómeno de variación o situación dinámica. De este modo, se resalta la importancia de la relación entre los distintos registros de representación de una función, con los procesos de visualización matemática, debido a que reconocer esta relación, permite que los estudiantes analicen de manera detallada, los elementos de la gráfica de una función, para así comprender de forma efectiva, los comportamientos de las variables que dependen entre sí.

2.2.3 Graficación Covariacional

Otro de los referentes claves que orienta el presente Trabajo de Grado, el cual tiene la intención de diseñar e implementar con estudiantes situaciones de covariación con énfasis en lo gráfico, es el Método de Graficación Covariacional de funciones, propuesto por Dolores y Salgado (2009). Dicho método se enfoca en tres aspectos:

- *Pensamiento y lenguaje variacional.* Se toma en cuenta la caracterización realizada por Cantoral y Farfán (2000), quienes lo definen como el campo en el cual se estudian los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios en el estudio de la variación y el cambio, desarrollados en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida.

- *Razonamiento covariacional.* Se define como las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variables, atendiendo las formas en que cambian una con respecto de la otra; estas actividades cognitivas implican acciones mentales propias de la covariación, que se involucran en tareas de covariación.

- *Definición leibniziana de curva.* Se define como el ensamblaje de una infinidad de segmentos de recta o como una poligonal de un número de infinito de lados.

Dolores y Salgado (2009) definen el método de Graficación Covariacional como las actividades de representación gráfica en las que se involucra la coordinación de dos cantidades variables, atendiendo las formas en que cambia una con respecto la otra (p. 66). Este método centra su atención en la representación gráfica de los cambios entre las variables que intervienen en determinado fenómeno de covariación y no sólo en la ubicación de puntos coordenados en el plano, como se suele hacer tradicionalmente. En ese sentido, mediante este método de Graficación Covariacional, se busca que el estudiante realice acciones que lo lleven a abordar preguntas como: ¿Qué cambia?, ¿Cómo cambia?, ¿Cuánto cambia?, ¿A razón de que cambia? y ¿Cómo se comporta globalmente la gráfica?

Tal como se mencionó en la problemática, graficar por tabulación y por covariación son procesos distintos, aunque apuntan al mismo objetivo de conseguir la gráfica de cierta situación de covariación[25]. Luego, para los fines de este Trabajo de Grado, es necesario diferenciar esas dos formas de graficación, pues ello permite profundizar y puntualizar, entre otras cosas, el sentido y estructura de la Propuesta de Aula que se plantea. Para ello, a continuación, se muestra la tabla elaborada por dichos autores para tal diferenciación:

Tabla 3. Diferencia entre la graficación por tabulación y la graficación covariacional

GRAFICACIÓN POR TABULACIÓN	GRAFICACIÓN COVARIACIONAL
Relega a un segundo plano la correlación causal entre variables.	En todo el proceso predominan la conciencia de la correlación causal entre eso que cambia.
Se considera que los estudiantes tienen ya formada una idea de curva no necesariamente como poligonal.	Se considera que una curva está como determinada por "segmentos" de recta. Cuanto más pequeño sean esos segmentos mayor fineza ganará la aproximación a la "curva".
No se enfatiza sobre la naturaleza de lo que cambia o de lo que se quiere representar, simplemente se representa las *x* y las *y* o las funciones.	Se parte de identificar qué cambia y la correlación entre eso que cambia.
Se representa las *x* y las *y* como entes abstractos y los valores que adquieren depende del arbitrio del profesor. Se dice, "asignemos los valores: -2, -2, 0, 1, 2 a x"," si *x* vale tanto *y* vale tanto".	Se hace explícito el proceso de cambio que le confiere razón de ser o eso que cambia, privilegiando a las variables concretas. "Si el tiempo *t* cambia de 1 a 1.5 averigüemos qué sucede con la distancia *s*".
Se usa fundamentalmente la fórmula de f(x) para calcular las coordenadas de los puntos.	Se usan esencialmente Δx, Δy para calcular los cambios, estableciendo la relación causal entre los cambios de *x* y los cambios de *y*; la fórmula de f(x) se utiliza para calcula Δy.
Los cambios no interesan y no se presentan gráficamente estos cambios, sólo se unen puntos consecutivos sin cuestionarse sobre su significado variacional.	Se representan gráficamente los cambios y no solo los puntos. Importan esencialmente lo que sucede "entre" los puntos. Interesa obtener una poligonal como "aproximación" a la curva.
Se pasa de un punto a otro sin cuestionarse lo que pasa en el intermedio, tampoco se cuestiona sobre el cuánto cambian las variables.	Para graficar interesa cuánto y cómo cambia la variable independiente y este cambio qué efectos tiene sobre los cambios de la variable dependiente. "Si el tiempo *t* cambia de 1 a 2 la distancia *s* aumenta 4 unidades".
No es motivo de análisis la rapidez de la variación ni su representación gráfica. La pendiente se asocia con la derivada hasta cuando este es motivo de estudio y no cuando se grafica una función.	Se enfatiza sobre la "rapidez" de los cambios mediante la razón de cambio promedio. Esta se asocia con la inclinación de los segmentos de recta que forma la "curva". Recuerde que esta es una poligonal.
No es motivo de discusión la fineza o precisión de la curva.	La poligonal, o sea la gráfica buscada, será más precisa si se reduce suficientemente los cambios de la variable independiente.

Tomada de Dolores y Salgado (2009)

Así pues, esta propuesta sobre Graficación Covariacional resulta interesante para este Trabajo de Grado, en tanto centra su atención en la construcción de la gráfica de una función, a partir de analizar su comportamiento. De este modo, la Graficación Covariacional es integradora, puesto que permite *construir* la gráfica de la función y *analizar* su comportamiento variacional, al mismo tiempo (a la par).

[25] Es importante aclarar que no se trata de que la graficación covariacional excluya las tablas (lo tabular), sino que, ésta última se ha habituado en ubicar coordenadas en el plano cartesiano, sin analizar el comportamiento de los cambios.

2.3 Dimensión curricular

Para el reconocimiento de los elementos curriculares que aportan al diseño de la Propuesta de Aula, se toman en consideración los documentos legales proporcionados el MEN, tales como Lineamientos Curriculares de Matemáticas (en adelante LCM) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (en adelante EBCM).

Dichas orientaciones curriculares no surgieron de forma espontánea: se necesitó de un gran trabajo profesional para llegar a ellas; en Valoyes y Malagón (2006) se observa un breve recorrido histórico sobre cómo se llegó a la consolidación de estos dos importantes referentes curriculares en Colombia (LCM y EBCM). De manera particular, dejan ver que dichos esfuerzos surgieron debido a la Renovación Curricular que enfrentaba el país, a partir del año 1985.

Específicamente, en los LCM se propone una fundamentación teórico-epistemológica de cada elemento cognitivo, didáctico y matemático utilizado para la elaboración del currículo en matemáticas, lo cual les permite establecer una visión global de las matemáticas que contribuya al desarrollo integral de los estudiantes. En este sentido, los LCM proponen:

- Cinco tipos de pensamiento: numérico y sistemas numéricos; espacial y sistemas geométricos; métrico y sistemas de medidas; aleatorio y sistemas de datos; variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Para este trabajo, se toma como referencia, principalmente, el pensamiento variacional.

- Cinco procesos generales de aprendizaje en matemáticas, los cuales son: formulación y resolución de problemas; modelación y fenómenos de la realidad; comunicación; razonamiento; formulación, comparación y ejercitación de procedimientos. En este Trabajo de Grado, se hace énfasis en *la modelación y resolución de problemas*, en tanto favorece que los estudiantes desarrollen habilidades, como, por ejemplo, buscar y/o formular otros problemas de variación y cambio (a partir de las situaciones planteadas); además, este proceso general está relacionado directamente con el razonamiento covariacional.

En el año 2006, se especifican en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBCM). En este último documento, se proponen, para cada tipo de pensamiento, una serie de estándares básicos asociados a ciertos ciclos de grados (primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a undécimo).

Los EBCM (MEN, 2006) establecen, hipotéticamente, unas metas básicas que se deberían lograr en el aula de clases, con las cuales se busca privilegiar el desarrollo de competencias, en lugar del desarrollo de contenidos fragmentados y sin sentido; de este modo, se comienza a hablar de estudiantes matemáticamente competentes, como un objetivo de la educación colombiana. Al respecto, el MEN (2006) define la competencia matemática como:

> … conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio-afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores (p. 49).

Lo anterior se traduce en que los estudiantes no alcanzan las competencias matemáticas de manera espontánea (en parte, por la naturaleza abstracta de los objetos matemáticos), pues se requieren ambientes de aprendizaje específicos en los cuales se involucre a los estudiantes en situaciones problema, pero particularmente que sea real la necesidad de resolver dichos problemas, para que de este modo ellos logren avanzar a niveles de competencia más complejos.

De acuerdo con el MEN (2006), el pensamiento variacional se entiende como las actividades de reconocimiento, percepción, identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.

Antes de continuar sobre qué parte y cómo orienta el pensamiento variacional a este Trabajo de Grado, se hace necesario dedicar algunos párrafos para precisar ciertas cuestiones.

En este Trabajo de Grado se asume la definición de pensamiento variacional ofrecida por Vasco (2003), quien lo define como una manera de pensar dinámica que intenta producir, mentalmente, sistemas que relacionen sus variables internas, de tal manera que covaríen en forma semejante a variables de la misma o de distinta naturaleza, las cuales forman parte o las cuales permiten estudiar fenómenos o modelar fenómenos (extraídos) de la realidad.

Como el lector habrá notado, la base de este Trabajo de Grado está en el Razonamiento

Covariacional y en la Graficación Covariacional[26] . Sin embargo, pudiera quedar lugar a la duda sobre qué es pensamiento covariacional, la relación de estos términos entre sí y el por qué trabajar este tema que no se menciona directamente en los EBCM. A continuación, se intenta explicar esto.

Por ***variación*** se entiende aquello en lo que intervienen variables o magnitudes que varían de cierta forma. Una manera de desarrollar ***pensamiento variacional*** en los estudiantes, es a través del estudio de fenómenos de variación y cambio. El ***razonamiento algebraico***, esencialmente, consiste en comunicar un argumento matemático a través de un lenguaje especial, que lo hace más riguroso y general, haciendo uso de variables algebraicas y operaciones definidas entre sí. A medida que se desarrolla este *razonamiento*, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para potenciar y comunicar el pensamiento variacional del estudiante.

Por ***covariación*** se entiende el estudio de los cambios de una variable atendiendo a los cambios de la otra (nótese que necesariamente debe haber una relación de dependencia entre dichas variables). Por su parte, el ***Razonamiento Covariacional*** se refiere a las actividades cognitivas que se derivan o están implicadas en el estudio de la coordinación de dichas variables (cuantitativamente) mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra.

Sumado a la propuesta teórica de Carlson et al (2003) con sus Niveles de Razonamiento Covariacional (y sus respectivas Acciones Mentales), se tiene la Graficación Covariacional (Dolores y Salgado, 2009), como un método para centrar la atención en la representación gráfica de los cambios entre las variables que intervienen en determinado fenómeno de covariación que se desee estudiar en el aula (a través de Tareas para estudiantes), cuando interesa estudiar el concepto de función en la escuela.

Pese a que, en los documentos legales curriculares mencionados hasta ahora, no se hace alusión explícita a la *covariación*, la referencia que el MEN hace de *variación* no determina o señala que se trata de un proceso distinto o ajeno al primero (variación). Es decir, por ***variación*** se debe entender aquello en lo que intervienen variables o magnitudes en general, mientras que la ***covariación*** especifica en que se trata de atender los cambios, simultáneamente, de las magnitudes involucradas. Luego, el ***Razonamiento Covariacional*** es un marco conceptual que

[26] En otros apartados ya se ha detallado qué se entiende por cada una de esas expresiones.

permite estudiar y/o analizar los comportamientos de estudiantes que se enfrentan a tareas de covariación.[27]

Así pues, se puede afirmar que el interés de este Trabajo de Grado no está en contradicción con las orientaciones curriculares del MEN, ni tampoco es ‘el nuevo camino’ al que se le pudiera apostar, como la solución definitiva a las problemáticas asociadas a la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, que pudiera suplir las propuestas curriculares del MEN ya existentes.

La función, como concepto esencial para el desarrollo del pensamiento variacional por parte de los estudiantes, requiere de un proceso largo en el tiempo para su enseñanza y aprendizaje, pues el campo semántico de este objeto matemático es muy rico, y no suele ser construido fácilmente por los estudiantes. Al respecto, cabe resaltar que la Renovación Curricular dejó ver la modificación en la interpretación de la función, al asumir, finalmente, las funciones como transformaciones u operaciones activas (Valoyes y Malagón, 2006)

Una manera de promover situaciones de variación y cambio en estudiantes de secundaria, puede ser a partir del estudio y reconocimiento de las características de la representación gráfica de la función. Luego, como se espera estudiar fenómenos de variación y cambio a través de diversas situaciones de la vida cotidiana, estos pueden ser abordados desde distintas metodologías, tales como el bosquejo de gráficas de funciones simples y posteriormente, la interpretación y construcción detallada de gráficas de funciones más complejas Azcárate y Deulofeu (1999).

Dado que el diseño de la Propuesta de Aula está pensado para estudiantes de décimo grado de la Educación Media, y ésta se relaciona con el estudio del Razonamiento Covariacional, y particularmente, con los elementos gráficos que se pueden estudiar en la representación gráfica de una función, a continuación se explicitan los estándares ubicados en el ciclo décimo a undécimo, en relación con el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, que se han de considerar para el diseño de la propuesta:

[27] En cuanto a ***pensamiento covariacional***, se señala que la búsqueda bibliográfica al respecto, no arrojó información suficiente para afirmar si se trata de un término diferente al que se puede derivar de lo expuesto hasta ahora (ligado al Razonamiento Covariacional) o algo propio que pudiese haber definido algún investigador.

- Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.

- Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.

Nótese que estos estándares no hacen alusión directa a la covariación ni a las gráficas de funciones, pues se cree que para el momento en que se elaboró este documento oficial, no se conocía el trabajo que estaban realizando distintos investigadores de Estados Unidos. No obstante, el Razonamiento Covariacional y la Graficación Covariacional, como propuestas para abordar el estudio del concepto de función en el aula, han sido bastante renombrados en el campo de la enseñanza y aprendizaje del álgebra, y los resultados encontrados ratifican la necesidad de abordar de manera distinta, el estudio de este concepto matemático, como lo es a partir del análisis de las características gráficas que se pueden extraer de las representaciones gráficas de la función, mediante el estudio de situaciones de variación y cambio.

Particularmente, en el segundo estándar se explicita el vínculo entre los registros gráfico y algebraico, que, aunque tal como se ha aclarado no es la intención directa de la Propuesta de Aula (ni del Trabajo de Grado), los estudiantes podrían llegar a resultados interesantes sobre la expresión algebraica que está detrás de los fenómenos de variación y cambio que se pretenden modelar.

A razón de la estructura de los EBCM, se reconoce el esfuerzo del MEN por explicitar las distintas relaciones que se desprenden al trabajar alguno de los tipos de pensamiento matemático, tanto en relación con los otros pensamientos, como con estándares de otros ciclos de grados. A esta complejidad conceptual y gradualidad del aprendizaje de las matemáticas, el MEN la llama coherencia vertical y horizontal. La primera tiene que ver con las relaciones que se establecen (a veces de manera implícita), entre uno o más estándares de un pensamiento y un ciclo escolar, con estándares de otros ciclos (del mismo pensamiento); y la segunda está relacionada con los vínculos que se forman con otros pensamientos, cuando se aborda un tipo de pensamiento matemático específico.

De acuerdo a lo anterior, en el Anexo 1 se exhiben los estándares que guardan coherencia tanto vertical como horizontal con los ya mencionados, los cuales orientan el diseño de la Propuesta de Aula.

A continuación, se intenta desglosar cómo se entienden dichas coherencias verticales y horizontales, con respecto a los estándares seleccionados para el diseño de la Propuesta de Aula.

- En Carlson et al (2003) se señala que los estudiantes, en un principio, deben expresar con sus propias palabras, cuáles o cómo son los cambios que sufren las variables involucradas en cada fenómeno de variación y cambio por estudiar.

- Se espera que los estudiantes no se queden sólo con la interpretación de los cambios vistos a partir de los instrumentos[28] que se han de utilizar en las distintas situaciones de la Propuesta de Aula, sino que puedan identificar (y hasta generalizar esos mismos) tanto en la representación gráfica (por ejemplo, a partir de la indicación/ejercicio de analizar una gráfica cartesiana) o de expresar los cambios entre dichas magnitudes/variables, mediante una escritura algebraica que se acerque a la formalidad que se espera y manifiesta en los EBCM, con respecto al pensamiento variacional.

- En los últimos estándares de los ciclos referidos, se aprecia el énfasis en el trabajo con las distintas representaciones de la función, particularmente en el registro gráfico, que tal como se expone en la dimensión didáctica, es de gran riqueza para trabajar en el aula.

Cabe resaltar que, en la coherencia horizontal presentada en el esquema anterior, se evidencia la relación del pensamiento variacional con el pensamiento numérico, con el fin de considerar la forma (en cantidades numéricas) en que cambia una variable con respecto a la otra, dentro de los fenómenos de variación y cambio que han de abordar/explorar los estudiantes. Es decir, parte de los cambios/o diferencias que se espera encuentren entre las variables involucradas en dichos fenómenos, se van a solicitar numéricamente, es decir, que los estudiantes lleguen a expresar cuantitativamente, la cantidad (o forma) de esos cambios.

Todos los elementos curriculares expuestos, permiten afirmar que el MEN es consciente de la necesidad de construir el concepto de función, a partir del abordaje de fenómenos de variación y cambio, examinando la covariación entre las distintas variables involucradas en los mismos. En ese sentido, se hace evidente la importancia de incentivar en el aula de clase, la

[28] En el apartado sobre la Propuesta de Aula y desarrollo de la misma, se expresa cómo se asume este término y cuáles son los instrumentos a utilizar

consideración de los aspectos que se puedan extraer del registro gráfico de la función, para así analizar e identificar las propiedades de covariación entre variables, lo cual puede llegar a favorecer, en un grado escolar más avanzado e incluso en un curso de Cálculo I (Universidad), el desarrollo intuitivo del concepto de derivada por parte de los estudiantes.

CAPÍTULO 3: DISEÑO Y ANÁLISIS DE LA APLICACIÓN DE UNA PROPUESTA DE AULA

En el presente capítulo se hace alusión a la metodología empleada en este Trabajo de Grado, explicitando tanto las distintas fases desarrolladas como los resultados encontrados. En ese orden de ideas, se presenta el diseño de la experimentación, mostrando la articulación entre la intención de la Propuesta de Aula y el desarrollo de la experimentación realizada, de acuerdo con la problemática y marco teórico que sustentan este estudio. Igualmente, se describe de forma breve, la secuencia de situaciones y tareas que componen la Propuesta de Aula, con sus respectivos propósitos. Seguidamente, se exponen los aspectos relacionados con la implementación, para continuar con los resultados de las respuestas (escritas y verbales) que se obtuvieron por parte de los estudiantes. Por último, se evidencia el análisis de estos resultados, de acuerdo con las variables y criterios de análisis establecidos en los capítulos anteriores, como lo son el Razonamiento Covariacional y la Graficación Covariacional.

3.1 SOBRE EL DISEÑO DE LA PROPUESTA DE AULA

A continuación, se explicita de qué manera influyen, tanto los antecedentes expuestos como los referentes del marco teórico, en la determinación del contexto y aspectos que caractericen la Graficación Covariacional, el diseño de las tareas (actividades) y organización de estas de acuerdo con los propósitos trazados.

Los antecedentes ya reportados, dejan ver la necesidad de pensar y proponer actividades de covariación que privilegien el estudio de la representación gráfica de la función. Por ello, la Propuesta de Aula debe responder a la consideración de tareas que inviten y permitan al estudiante de grado décimo, a enfrentarse a un contexto de covariación para el estudio del concepto de función, el cual, además de atender a distintos registros de representación, enfatice en algunos aspectos gráficos de la función, que no suelen considerarse en la escuela.

De acuerdo con lo anterior, aunque se privilegia el registro algebraico sobre el gráfico, no se puede desconocer la importancia y avances cognitivos que posibilitan las demás representaciones del concepto de función, tales como verbal, tabular y el mismo gráfico. En esa misma línea, también prima la poca atención que se presta en el aula, a la efectiva articulación entre los distintos registros de representación del concepto de función, es decir, a la actividad de conversión que propone Duval. Por lo tanto, en la Propuesta de Aula debe predominar el manejo de distintas (más de 3) representaciones de la función, por supuesto, con mayor énfasis en el registro gráfico; además, se prevé un acercamiento importante a la articulación de dichos registros.

Los referentes citados en el marco teórico, dejan ver, ampliamente, todos los aspectos que confluyen en el diseño de una Propuesta de Aula que pretende enfatizar en el análisis e interpretación de la gráfica de una función, resultante de determinado fenómeno de variación. Así mismo, dichos referentes marcan una pauta para organizar y analizar las respuestas (escritas y no verbales) de los estudiantes en cuestión, frente a las tareas que se proponen.

En lo que respecta a la dimensión matemática, por ejemplo, la revisión de algunos textos escolares universitarios de Cálculo I, principalmente, mostró que el estudio y profundización de la representación gráfica del concepto de función, se centra en la familiarización de la *forma*[29] que tienen las gráficas de las funciones; así mismo, se concede un breve espacio a los posibles desplazamientos de dichas gráficas sobre el plano cartesiano (en relación con su expresión algebraica), pero sin considerar lo que ello representa en un contexto concreto. Debido a tales precedentes, en la Propuesta de Aula debe predominar la graficación covariacional sobre la graficación por tabulación, pues la primera de éstas es la que permite involucrar aspectos más profundos y/o avanzados de la representación gráfica del concepto de función, de tal manera que los estudiantes logren acercarse al bosquejo de la gráfica que representa el fenómeno en estudio y su correspondiente análisis.

En cuanto a la dimensión didáctica, la lectura de distintas investigaciones internacionales y Trabajos de Grado en el nivel de Maestría sobre enseñanza del concepto de función, visualización y utilización del registro gráfico, deja ver que el enfoque analítico de dichos estudios empieza a tornarse, levemente, hacia lo que en este Trabajo de Grado interesa, es decir, un análisis gráfico profundo de aquella gráfica que represente el fenómeno en cuestión. De acuerdo con lo anterior, se acogen (debidamente desglosados) los aportes del Razonamiento Covariacional y la Graficación Covariacional, en tanto permiten plasmar, en la Propuesta de Aula, tanto rutas de trabajo para enfatizar y guiar a los estudiantes hacia la consideración mayoritaria del registro gráfico de la función en cuestión (en relación con la Visualización

[29] Esto se refiere, por ejemplo, a la parábola asociada a la función cuadrática, la línea recta asociada a la función lineal, etc.

Matemática), así como preguntas específicas sobre los cambios y forma de los bosquejos de las gráficas que ellos han de analizar e interpretar.

Finalmente, la dimensión curricular expuesta, deja ver que la modelación (de fenómenos físicos o eventos del mundo), como uno de los procesos generales de la actividad matemática con mayor presencia en la enseñanza y aprendizaje del concepto de función en la escuela, se convierte en una herramienta o en un escenario ideal para que los estudiantes logren comprender la función como algo dinámico, y así puedan desenvolverse con mayor facilidad, en el estudio de las variables o magnitudes que están involucradas en dichos fenómenos. Luego, con el fin de atender a las orientaciones curriculares del MEN, en la Propuesta de Aula debe prevalecer, por un lado, la modelación del fenómeno a estudiar (en los distintos momentos que se propongan) y la utilización de términos propios del álgebra, como, por ejemplo: magnitud, cambio, cambio constante, Δx y Δy, razón de cambio, entre otros.

3.2 DESCRIPCIÓN Y PRESENTACIÓN DE LA PROPUESTA DE AULA

A continuación (ver Tabla 4) se presenta la estructura general que subyace a las tareas de graficación covariacional enmarcadas dentro de una Propuesta de Aula. En esta estructura, para cada Tarea se detalla la cantidad de preguntas, los propósitos y los elementos matemáticos que se trabajan (asociados al concepto de función). Adicionalmente, en la última columna se muestra la Acción Mental (Carlson et al, 2003) asociada a cada Tarea, según los comportamientos esperados de las actuaciones de los estudiantes

Tabla 4. Estructura general de la Propuesta de Aula

Situación	Tarea	Propósito	No. de preguntas	Elementos matemáticos asociados al concepto de función	Acciones Mentales
Situación 1: Analizando el recipiente de la Casa de Fragancias Luchy	**Tarea 1**	Comprender la situación. Reconocer dependencia entre magnitudes AL y volumen.	7	Dominio de variación. Reconocimiento de magnitudes involucradas. Relación de dependencia (cualitativa) y reconocimiento de magnitudes constantes (invariantes)	AM1 Acercamiento a AM2
	Tarea 2	Cuantificar los cambios de la magnitud AL y relacionar el volumen con la AL.	4	Relación de dependencia (cuantitativa). Patrones de variación y rango de variación. Regla de asignación.	AM2
	Tarea 3	Reconocer continuidad de la gráfica que representa el llenado del r. cilíndrico, su relación con RT y puntos notables en la misma.	6	Dominio y rango de variación. Formas de representación y relaciones entre ellas. Continuidad de la gráfica en términos del contexto. Puntos máximos y mínimos. Relación uno a uno.	AM3
	Tarea 4	Reconocer el cociente entre la cantidad que cambia en cada magnitud (volumen y AL), como acercamiento a la razón de cambio.	5	Plano cartesiano. Diferencia entre abscisas y ordenadas. Razón de cambio. Crecimiento o decrecimiento lineal.	AM4 Acercamiento a AM5
Situación 2: El caso del recipiente de la Compañía Senses	**Tarea 1**	Reconocer los cambios de la magnitud AL y encontrar la relación entre ésta y el diámetro del r. esférico.	5	Reconocimiento de otras magnitudes. Relación de dependencia (cualitativa). Magnitudes constantes o invariantes. Variable dependiente y variable independiente.	AM1 – AM2
	Tarea 2	Cuantificar y analizar la cantidad de los cambios de la AL y la característica de esta magnitud en determinados intervalos (radios/diámetros).	9	Dominio de variación y rango de variación. Relación de dependencia (cuantitativa). Regla de relación (aproximación decimal). Forma de representación gráfica, continuidad de la gráfica en términos del contexto. Puntos máximos y mínimos de la gráfica.	AM3
	Tarea 3	Cuantificar los cambios del volumen cuando se agrega cierta cantidad de líquido en contraste con los cambios en AL, como razón de cambio.	9	Diferencia entre abscisas y ordenadas, razón de cambio. Reflejo de los cambios (cuantitativos) o incrementos en la gráfica. Representación gráfica curva.	AM4 - AM5
Situación 3: Análisis del nuevo recipiente de la empresa Ariza	**Tarea 1**	Mayor énfasis en la relación entre la AL y el volumen. Se precisan las dependencias entre las variables AL y diámetro, de acuerdo con las distintas formas presentes en el r. mixto o combinado.	5	Dominio de variación, rango de variación. Relación de dependencia e independencia entre magnitudes, con énfasis en lo cualitativo.	AM1 - AM2
	Tarea 2	Énfasis en la cuantificación y análisis de la cantidad de los cambios en volumen y AL, en un recipiente mixto o combinado.	8	Cuantificación de los cambios de una variable, en relación con los cambios de otra. Sistema de representación de una función (tabular y gráfico). Continuidad de la gráfica en términos del contexto, puntos máximos y mínimos. Monotonía (creciente o decreciente)	AM3
	Tarea 3	Reconocer la razón de cambio que corresponde al llenado del r. mixto, identificando que ésta es similar, pero menor que las anteriores.	6	Razón de cambio para todo el dominio de la función. Puntos de inflexión, concavidad y dirección de concavidad.	AM4 - AM5

En el Anexo 2 se detalla tanto el escrito preliminar (inicio y contextualización general de la secuencia) presentado a los estudiantes, así como el contenido de cada una de las situaciones y tareas que componen la Propuesta de Aula.

Atendiendo a todos los requerimientos descritos desde cada uno de los elementos referenciados en los capítulos 1 y 2, se procedió a plantear una situación problema cuyo contexto sirviera como base para el diseño de todas las posibles *tareas* (organizadas en distintos momentos llamados *situaciones*). Para ello, se tomaron como referentes los trabajos de Grueso y González (2016) y Carlson et al (2003), siendo este último la fuente principal para el contexto seleccionado. El aporte de Carlson et al (2003) radica en que los autores proponen una serie de contextos (no dinámicos), con el fin de indagar, en estudiantes universitarios, el razonamiento covariacional en un contexto gráfico, lo cual se acercaba al interés de este Trabajo de Grado. De esos, llamó la atención el "problema de la botella", pues es el que permitía la modelación del fenómeno 'llenado de un recipiente', acercándose a la esperado para una Propuesta de Aula interesada en abordar los elementos de la Graficación Covariacional.

De ese modo, se definió un contexto a través de una situación problema sobre la cantidad de loción (líquido) que cabe en tres frascos (recipientes) con formas distintas, a saber, cilíndrico, esférico y mixto (combinación de las dos anteriores), desde el interés por saber cuál de esos tres frascos es más conveniente, según la mirada de empresas que fabrican dichos perfumes. Luego de desarrollar tareas que irán aumentando su grado de complejidad, se espera que el estudiante logre responder la siguiente pregunta:

> Como foco de su investigación, el equipo de expertos se traza la pregunta: *¿La forma del recipiente puede incidir en la selección de un perfume sobre otro? ¿Cómo?*

3.3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

3.3.1 Enfoque y tipo de estudio

Para la realización de este Trabajo de Grado, se tuvo en consideración los enfoques cuantitativo y cualitativo que proponen Sampieri, Fernández y Baptista (2006), para realizar investigaciones.

Para estos investigadores, el enfoque cualitativo es aquel que emplea la recolección de información en bruto, o al menos sin filtros estadísticos, con el fin de interpretarlos a la luz del marco conceptual establecido en la investigación.

Al respecto, el presente trabajo se sirve del enfoque cualitativo, en tanto se pretende analizar las respuestas (de los estudiantes) que surgen al poner en marcha una Propuesta de Aula sobre actividades de covariación, la cual se construye a partir, tanto del análisis del pensamiento variacional presente en las Pruebas Saber 9º (de la población estudiantil del Colegio Comercial Nueva Era Vallegrande), así como de la documentación expuesta en el marco teórico, con el fin de que los estudiantes logren realizar el bosquejo de la gráfica de una función (la cual represente el comportamiento de lo observado en la experimentación) y posteriormente, ser capaces de analizar los cambios que se relacionan en una gráfica dada.

Por su parte, desde el enfoque cuantitativo se buscan establecer patrones de comportamiento y verificación de teorías, a través de la recolección de información obtenida numérica y estadísticamente de una gran población (Sampieri, Fernández y Baptista, 2006). De acuerdo con esto, también nos serviremos de las bondades de este enfoque de investigación, pues como un primer filtro de análisis de lo ocurrido en el aula de clase, se realizará una organización estadística de los datos, con el fin de obtener un primer acercamiento a los resultados.

Dado que este estudio pone especial atención a las formas como el estudiante razona, reconociendo los elementos asociados a la variación en la exploración de situaciones en torno a la Graficación Covariacional, se adoptó como método de investigación el *estudio de caso*, el cual se asume como el "método empleado para estudiar a un individuo o una institución [en este caso un fenómeno educativo] en un entorno o situación única y de una forma lo más intensa o detallada posible" (Salkind, 1999, p. 211).

Yin (2009) establece que un estudio de caso es una indagación empírica que investiga un fenómeno contemporáneo al interior de su contexto real de existencia, cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente evidentes.

El estudio de caso, asumido aquí como metodología de investigación[30], está conformado por varias etapas o fases, las cuales varían según el tipo de estudio de caso que se utilice; para el caso, interesa la preparación de un *estudio de caso mixto*, en tanto fortalece la amplitud y profundidad del estudio. En ese sentido, las etapas contempladas para este estudio de caso mixto son las siguientes:

- *Contextualización del caso:* Se indaga por los intereses de los estudiantes de grado décimo del Colegio Comercial Nueva Era Vallegrande.

- *Selección de la población:* Se delimita a ciertas parejas de estudiantes de grado décimo del Colegio Comercial Nueva Era Vallegrande, cuya participación en el área de Matemáticas sea destacable. Además, esta selección se refina según el interés que muestran las parejas de estudiantes, en la primera parte de la implementación de la Propuesta de Aula, correspondiente a la explicación del contexto y explicitación de las condiciones de este trabajo. Respecto a esto último, el caso surgió y/o se definió de esta manera (sólo con 8 estudiantes) pues era necesario que para los otros momentos (situaciones) de la Propuesta de Aula, los alumnos asistieran en contra jornada[31] y de manera constante a todas las sesiones programadas.

- *Análisis de toda la información:* Esto se refiere a la lectura inicial tanto de respuestas escritas como videos de las plenarias, que se recolectan a lo largo de la implementación de la Propuesta de Aula. Después se realiza la tipificación de estos datos y las primeras inferencias, siendo estas más de orden cuantitativo.

Dada la estructura mixta que orienta este Trabajo de Grado, también se contempla la etapa *Ampliación de información*, la cual se sustenta en entrevistas. Se aclara que este instrumento no es obligatorio, pero se connota como presupuestado con ciertos elementos, bajo la figura de

[30] Se hace este comentario o aclaración, debido a que en documentos como el de Sampieri, Fernández y Baptista (2006), se plantea que el estudio de caso, más que una metodología, se constituye en una estrategia de diseño de la investigación que permite seleccionar el objeto del estudio (el "ente" particular).

[31] Inicialmente, se esperaba aplicar dicha Propuesta de Aula dentro de la jornada regular, con todos los estudiantes de ese curso; sin embargo, tras aplicar Inicio, Contextualización general y S1T1, nos dimos cuenta que la cantidad de sesiones presupuestadas y permitidas por el colegio no serían suficientes. Por esa razón se citó a los estudiantes en contra jornada, frente a lo cual sólo mostraron interés 8 de ellos.

entrevistas semi estructuradas. Es decir, no es la intención de este estudio tomar o abordar la *entrevista* como variable de análisis, sino como método de recolección de información.

<u>*Interpretación de datos y reporte de resultados:*</u> Este último momento consiste en la interpretación de las primeras inferencias, a través de las variables de análisis que se tomaron del marco teórico. Así mismo, se presentan los alcances y limitaciones de la elaboración, desarrollo y análisis de la Propuesta de Aula desde la perspectiva de estudio de caso.

En cada uno de los momentos presupuestados, el papel de las estudiantes que realizan este Trabajo de Grado, y principalmente en la implementación de la Propuesta de Aula, es el de observadoras activas (observadoras-participantes). Desde este enfoque, se acuña el término *observador activo*; para el caso y según lo comprendido al respecto, en esta instancia se prefiere utilizar observador(a)-participante, entendiendo que es quien debe 1) ir tomando apuntes, grabando o tomando fotos de los estudiantes (mientras desarrollan las Tareas); 2) intervienen en la implementación de la Propuesta de Aula para aclarar palabras o expresiones confusas para los estudiantes, así como conceptos matemáticos previos (presupuestados) que no tengan afianzados.

Este trabajo se desarrolló en cuatro fases, las cuales se describen a continuación:

<u>***Fase 1:** Documentación de la problemática de estudio*</u>. En esta fase se documenta la problemática de estudio, con el fin de acotarla desde los elementos teóricos que se han propuesto en distintas investigaciones. Así, se plantean entonces el problema de investigación, la pregunta problema que se pretende responder, los objetivos (tanto general como específicos) que orientan este estudio y el marco teórico que será insumo para diseñar la Propuesta de Aula.

Estos componentes se organizan en los capítulos 1 y 2, siendo el primero, el correspondiente a la problemática, justificación, antecedentes y objetivos, y el segundo, en el cual se elabora el marco teórico. De este modo, el marco teórico establecido debe ser un puente bien definido entre la documentación utilizada y los objetivos propuestos inicialmente.

<u>***Fase 2:** Diseño e implementación de la propuesta de aula*</u>. Una vez establecido el marco teórico y retomado los aspectos del marco contextual del Colegio Comercial Nueva Era Vallegrande, se inicia la búsqueda de actividades relacionadas con el bosquejo e interpretación de la gráfica de una función, a través del Razonamiento Covariacional, con el fin de reformularse o diseñar otras. A

partir de esto, se diseñan entonces las actividades que conforman la Propuesta de Aula. Así mismo, se define la población objeto de estudio (estudiantes de grado décimo de la jornada de la mañana). La intervención se realiza de acuerdo con unos protocolos que se definirán en el siguiente apartado.

Fase 3: *Tipificación, análisis y resultados*. En esta fase, se toman las respuestas escritas de los estudiantes y se agrupan de acuerdo con tres variables de análisis: elementos matemáticos, Razonamiento Covariacional y Graficación Covariacional; a su vez, cada pregunta se clasifica en una subcategoría o criterio, los cuales se detallan más adelante.

Una vez se tiene esto, se toman los grupos de respuestas y se tipifican, teniendo en cuenta si la respuesta fue acertada (ya sea completa o parcialmente), errónea o inválida, e incluso, si las respuestas varían en cantidades numéricas (solicitadas a lo largo de la Propuesta de Aula); dicha información se organizó en tablas como las que aparecen en el apartado *Resultados y análisis de resultados*. Luego, se describe brevemente qué resultados parciales arroja cada tabla, para así dar paso al análisis general de cada situación. En este momento, se explicita qué sucedió respecto a cada variable o categoría de análisis, de aquellas planteadas en el Capítulo 2. Finalmente, se exponen las conclusiones y recomendaciones, las cuales responden a qué sucedió tanto con la Propuesta de Aula como con los objetivos del presente Trabajo de Grado.

3.3.2 Protocolo de aplicación

En este apartado se explicita la forma en que se realiza la implementación de la Propuesta de Aula a los estudiantes en mención, es decir, en cómo consiste el desarrollo de la misma. Así pues, por *protocolo* se entiende a todas aquellas consideraciones que han sido objeto de discusión durante la elaboración de este Trabajo de Grado, en lo referente a la actuación que se espera tener y obtener (por parte de los estudiantes) frente a cada una de las situaciones y momentos presupuestados, a saber: trabajo en parejas, plenaria, validación e institucionalización.

En ese orden de ideas, a continuación, se describe la intención y organización de los cuatro momentos referenciados arriba.

- **Trabajo en parejas**. Dadas las condiciones[32] con las cuales se trabaja en la Propuesta de Aula, para explorar y responder a las preguntas que se plantean, es necesario que haya un par (que el estudiante tenga un compañero), ayudando en ese manejo de los instrumentos (materiales involucrados), pues puede resultar muy complejo para una sola persona, manipularlos y estar escribiendo lo que va obteniendo. Claro está, aunque se trata de trabajo en pareja, en caso que alguno de los estudiantes (que la conforman) llegue a diferir o considerar una respuesta distinta a la de su compañero, se les indica que lo pongan por escrito, explicitando la respuesta de cada uno.

- **Plenaria.** Este momento se considera después de cada trabajo en parejas (específicamente, al final de cada Tarea, o en medio, según corresponda), y consiste en la socialización -por parte de cada pareja- de sus respectivas respuestas frente a cada pregunta, buscando que entre ellos mismos lleguen a un acuerdo (comprensión bastante cercana de lo que realmente se está preguntando). Por supuesto, también puede ocurrir que las parejas de trabajo difieran en la comprensión y/o respuesta de las preguntas, por lo que, en dichas instancias, las observadoras-participantes deben intervenir para guiar la discusión de las preguntas, de tal forma que las parejas de estudiantes puedan comprender y elaborar otra respuesta (más cercana a los propósitos de las respectivas preguntas), a partir de su propio lenguaje.

- **Validación.** Entendiendo que se trata de la implementación de una Propuesta de Aula (frente a la cual se esperan obtener respuestas por parte de los estudiantes, para posteriormente analizarlas a la luz del marco teórico), lo que se busca, principalmente, es que los estudiantes comprendan las actividades de covariación que se proponen, y así, desarrollen un razonamiento covariacional, de la mano, por supuesto, de elementos que indiquen un acercamiento al bosquejo y análisis de gráficas de funciones (Graficación Covariacional).

  Este momento se lleva a cabo al final de cada plenaria y consiste en la retroalimentación del proceso desarrollado con las actividades propuestas, haciendo explícitos los conceptos

[32] Estas consisten en: Recipientes de distintas formas que deben ser llenados con agua y posteriormente, marcarse; medición de algunas magnitudes y vaciado de líquido en varias ocasiones, al tiempo que se deben registrar dichas apreciaciones, en las hojas de respuestas.

matemáticos que se abordaron y el propósito general de la Propuesta de Aula, desglosando el énfasis que tenía cada tarea (en relación con el tipo de recipiente utilizado).

3.3.3 Instrumentos de recolección de datos

En cuanto a los instrumentos o técnicas para la recolección de datos, se tuvo en cuenta:

- *Material escrito en físico*. Se refiere a las fotocopias de cada situación de la Propuesta de Aula entregadas a los estudiantes, y las respuestas que ellos aporten por escrito ahí mismo y en hojas alternas (de block). Este se constituye en el principal instrumento para la recolección de datos, pues es donde se encuentran las preguntas (enunciados e ítems) y directrices para los estudiantes.

- *Registros audiovisuales*. Se refiere a los videos que se tomen durante la socialización de respuestas por parte de las parejas de estudiantes (a lo largo de las tres situaciones propuestas), es decir, grabación de plenarias y validaciones. Es importante señalar que, como principiantes en intervención en el aula mediante una secuencia de Tareas, las autoras prefieren utilizar el video de forma continua en los momentos ya mencionados, en lugar de decidir durante el proceso de observación/aplicación, cuáles interacciones y/o discusiones (entre parejas de estudiantes) grabar y cuáles no, con el propósito de evitar pasar por alto algún registro o intervención interesante o llamativa que pueda surgir.

3.3.4 Criterios de análisis

En este apartado se mencionan y describen los criterios (variables) con los cuales se analizan e interpretan las respuestas de los estudiantes (tanto escritas como verbales) con el fin de identificar sus actuaciones. Dichos criterios fueron seleccionados de tal manera, que corresponden a aspectos asociados con los elementos teóricos referenciados en el capítulo 2, es decir, la revisión de la literatura que se hace en cada una de las dimensiones (matemática, didáctica y curricular). Así pues, tales criterios se organizaron en las siguientes categorías: aspectos matemáticos involucrados, Niveles de Razonamiento Covariacional (según la propuesta de Carlson et al, 2003) junto con elementos para la Graficación Covariacional de Dolores y Salgado (2009) y lo curricular.

En la tabla que sigue, se explicitan las categorías y criterios de análisis que sirvieron para orientar o guiar, la clasificación de los resultados y actuaciones de los estudiantes.

Tabla 5. Categorías y criterios de análisis

No.	Categoría de análisis	Criterios
I	Aspectos matemáticos involucrados	1. Tipos de representación usados 2. Elementos o nociones asociados al concepto de función (Dominio, Rango, Continuidad, etc.). 3. Formas de acceder a la función (asignación, correspondencia o dependencia).
II	Razonamiento Covariacional (Carlson et al, 2003)	1. Comportamientos asociados a una Acción Mental 2. Acciones Mentales 3. Niveles de Razonamiento Covariacional 4. Existencia comportamientos pseudo-analiticos
III	Graficación Covariacional	1. Actividades de representación gráfica 2. Acciones que contestan o manifiestan las 5 preguntas de base: ¿Qué cambia?, ¿Cuánto cambia?, ¿Cómo cambia?, ¿A qué razón cambia? y ¿Cómo se comporta globalmente la gráfica?
IV	Propósitos de las Tareas	De acuerdo con las respuestas de los estudiantes, analizar el acercamiento a los propósitos preestablecidos en cada Tarea.

3.4 RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este apartado se explicitan los resultados e interpretación de los mismos, con base en los criterios de análisis establecidos anteriormente. Para cada pregunta o grupo de preguntas (agrupadas en tres categorías de análisis), se detallan los tipos de respuestas ofrecidas por los estudiantes y su respectiva interpretación.

La diferenciación del tipo de respuestas obtenidas por parte de los estudiantes, recibe el nombre de *Tipificación*. Este proceso consiste en considerar, una por una, cada respuesta de las parejas de estudiantes, con el fin de analizar cuáles de ellas son similares en su forma (y, por tanto, candidatas para ser agrupadas) y cuáles de ellas contienen elementos interesantes (por ejemplo, palabras inesperadas) que merecen ser comentadas y analizadas por separado. A cada tipo de respuesta se le asignó R1, R2,…, Rn, según el caso, para indicar el número de tipo de respuestas encontradas frente a esa pregunta o grupo de preguntas. A cada tipo de respuesta (R1, R2, etc.) le corresponde un porcentaje (de estudiantes), el cual se calcula considerando, que en total, se tomaron 4 parejas de alumnos. Es decir, si, por ejemplo, la respuesta a una determinada pregunta, por parte de 2 parejas, se asocia con R1, entonces este tipo de respuesta corresponde a un 50% de los alumnos.

Por último, se infirieron aspectos de estas tipificaciones para contrastarlos y analizarlos a luz de lo expuesto en el marco referencial (capítulo 2).

Tipificación de respuestas

A continuación, se expone la organización y tipos de respuestas dadas por los estudiantes a cada una de las tareas y situaciones que conforman la Propuesta de Aula. Se explicitan y describen en cada una de las tablas, los tipos de respuestas y la frecuencia, en el marco de las variables de análisis presupuestadas para este proceso, a saber, Elementos Matemáticos, Razonamiento Covariacional (Acciones Mentales) y Graficación Covariacional (preguntas base) Es pertinente mencionar que las otras dos variables de análisis, se tienen en cuenta al final del análisis general de cada situación, pues denotan aspectos más concluyentes. En el Anexo 3, se muestran las preguntas que corresponden o se asocian a cada variable de análisis. Esta clasificación es la que se tuvo en cuenta para tipificar respuestas por grupos de preguntas.

Para los apartados que siguen, relacionados con los resultados y análisis de las situaciones 1, 2 y 3; se definen las siguientes convenciones para efectos de evitar la repetición de palabras o frases y de ese modo facilitar la lectura.

RT: Registro tabular
r. gráfica: Representación gráfica
r. cilíndrico: Recipiente cilíndrico
r. esférico: Recipiente esférico
- **r. mixto**: Recipiente mixto (combinado)
AL: Altura del líquido
número de UL: Número de unidades de líquido
n. jeringas: Número de jeringas
altura del r.: Altura del recipiente
altura. máx. del r.: Altura máxima del recipiente
V: que varía (magnitud)
C: que es constante (magnitud)

3.4.1 RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN 1

Tabla 6. Tipos de respuestas Elementos Matemáticos de la S1T1, T2, T3, T4

ELEMENTOS MATEMÁTICOS	TIPO DE RESPUESTA	DESCRIPCIÓN	%
REPRESENTACIONES USADAS	**R1**	Estudiantes que completan adecuadamente el RT relacionado con el llenado del r. cilíndrico, y así mismo, la r. gráfica mediante ubicación de pares ordenados [(0,0) hasta (13,13)] y trazo de una línea recta. No hacen uso de la representación gráfica para dar respuesta a cómo obtener Δx y Δy.	**50%**
	R2	Estudiantes que completan adecuadamente el RT relacionado con el llenado del r. cilíndrico. En cuando a la r. gráfica mediante ubicación de pares ordenados [(0,0) hasta (13,13)] no trazan una línea recta. No hacen uso de la representación gráfica para dar respuesta a cómo obtener Δx y Δy.	**25%**
	R3	Estudiantes que completan adecuadamente el RT relacionado con el llenado del r. cilíndrico. En cuando a la r. gráfica, no ubican pares ordenados, pero sí trazan una línea recta [hasta (12,12)]. No hacen uso de la representación gráfica para dar respuesta a cómo obtener Δx y Δy.	**25%**
DOMINIO Y RANGO	**R1**	Estudiantes que indican que la AL no puede alcanzar 20 cm, pues la altura máx. del r. es 15 cm y el líquido se regaría (si se pasa de esa medida). Indican que el punto máximo que puede tener la gráfica es (13,13), justificando que es el punto que marca el límite de llegar a la rosca del r. cilíndrico. El par ordenado (16,16) no pertenece a la gráfica, justificando que no es posible, por la altura máx. del r. y el número permitido de copas (volumen). La línea (recta) no se puede extender indefinidamente, haciendo alusión tanto al número de UL utilizadas (copas) como a la altura del r.	**50%**
	R2	Estudiantes que indican que la AL no puede alcanzar 20 cm, pues la altura máx. del r. es $12\frac{1}{2}$ cm. Indican que el punto máximo que puede tener la gráfica es (13,13), pero no argumentan su respuesta. El par ordenado (16,16) no pertenece a la gráfica justificando que en la actividad sólo se proponen los pares (1,1) hasta (13,13). La línea (recta) no se puede extender indefinidamente, pero hacen alusión a que se debe al número definido de coordenadas (omitiendo el contexto de la situación).	**25%**
	R3	Estudiantes que indican que la AL no puede alcanzar 20 cm, pues la altura máxima del recipiente es 15 cm y el líquido se regaría (si se pasa de esa medida). Indican que el punto máximo que puede tener la gráfica es (13,13), pero no argumentan su respuesta. El par ordenado (16,16) no pertenece a la gráfica justificando que en la actividad sólo se proponen los pares (1,1) hasta (13,13). La línea (recta) no se puede extender indefinidamente, pero hacen alusión a que se debe al número definido de coordenadas (omitiendo el contexto de la situación).	**25%**
CONTINUIDAD	**R1**	Estudiantes que escriben entre dos y cuatro pares ordenados de valores no enteros. La mayoría comprende lo solicitado, pero presentan dificultades en la escritura de coordenadas cartesianas con números no enteros.	**50%**
	R2	Estudiantes que señalan varios pares ordenados de valores no enteros, pero sólo consideran datos intermedios (número entero más 0,5). Además de presentar dificultades en la escritura de	**25%**

		coordenadas cartesianas con números no enteros, su justificación no es acertada.	
	R3	Estudiantes que señalan que no es posible responder lo solicitado, pues la medida (de la copa) es exacta, no permite porciones.	25%
MONOTONÍA DE LA CURVA	R1	La línea (recta) no se puede extender indefinidamente, haciendo alusión tanto al número de UL utilizadas (copas) como a la altura del r. El par ordenado (16,16) no pertenece a la gráfica, justificando que no es posible, por la altura máx. del r. y el número permitido de copas (volumen). Indican que el punto máximo que puede tener la gráfica es (13,13), justificando que es el punto que marca el límite de llegar a la rosca del r. cilíndrico.	50%
	R2	La línea (recta) no se puede extender indefinidamente, pero hacen alusión a que se debe al número definido de coordenadas (omitiendo el contexto de la situación). El par ordenado (16,16) no pertenece a la gráfica justificando que en la actividad sólo se proponen los pares (1,1) hasta (13,13). Indican que el punto máximo que puede tener la gráfica es (13,13), pero no argumentan su respuesta.	50%

Tabla 7. Tipos de respuestas Razonamiento Covariacional de S1T1, T2, T3, T4

RAZONAMIENTO COVARIACIONAL	TIPO DE RESPUESTA	DESCRIPCIÓN	%
	R1	Estudiantes que se refieren a algunas magnitudes, como, por ejemplo: la altura, el volumen y el ancho, sin especificar si se trata del recipiente o del líquido. Indican que: Volumen (V) y ancho y altura del recipiente (C).	25%
ACCIÓN MENTAL 1 (AM1)	R2	Estudiantes que se refieren a algunas magnitudes, como, por ejemplo: la altura, el volumen y el ancho, sin especificar si se trata del recipiente o del líquido. Indican que: Volumen (V) y ancho y altura del recipiente (C).	25%
	R3	Estudiantes que se refieren a casi todas las magnitudes posibles esperadas, como lo son: altura del recipiente y del líquido; y ancho, diámetro y volumen. Indican que: AL (V) y altura del r. (C – es aquella que permanece en su misma medida).	25%
	R4	Estudiantes que se refieren a las magnitudes altura, volumen y peso, sin especificar si se trata del recipiente o del líquido. Indican que todas las magnitudes mencionadas varían constantemente y que la única medida constante (magnitud) es la de la copa.	25%
	R1	Indican que, si el volumen contenido en el recipiente aumenta y/o disminuye, la AL también aumenta y/o disminuye según corresponda. Señalan que sí existe una relación entre dichas magnitudes, en términos de que AL depende del volumen (del líquido).	25%
ACCIÓN MENTAL 2 (AM2)	R2	Indican que, si el volumen contenido en el recipiente disminuye, la AL también (disminuye), debido a que (ambas magnitudes) son directamente proporcionales (DP). Luego, si el volumen aumenta, la AL también lo hace (‘aumentaría’). Señalan que, por la forma del recipiente, la altura es dependiente del volumen. Señalan que sí existe una relación entre dichas magnitudes, en términos de que la AL depende del volumen (del líquido).	25%

	R3	Indican que, si el volumen contenido en el recipiente disminuye, la AL también (disminuye), debido a que (ambas magnitudes) son directamente proporcionales (DP). Luego, si el volumen aumenta, la AL también lo hace ('aumentaría'). Señalan que sí existe una relación entre dichas magnitudes, en términos de que la AL depende del volumen (del líquido).	**25%**
	R4	Cambian el sentido de las preguntas sobre qué ocurre con la AL, si el volumen de este aumenta y/o disminuye (interpretación incorrecta de estas). Señalan que sí existe una relación entre dichas magnitudes, en términos de que si uno (magnitud) aumenta o disminuye, el otro hará lo mismo, sin señalar cuál magnitud es la dependiente.	**25%**
ACCIÓN MENTAL 3 (AM3)	**R1**	Indican que al añadir o quitar una UL, la altura de este (líquido) aumenta o disminuye 1 cm según corresponda. La línea (recta) no se puede extender indefinidamente, haciendo alusión tanto al número de UL utilizadas (copas) como a la altura del r.	**25%**
	R2	Indican que al añadir o quitar una UL, la altura de este (líquido) aumenta o disminuye 1 cm según corresponda. La línea (recta) no se puede extender indefinidamente, haciendo alusión tanto al número de UL utilizadas (copas) como a la altura del r.	**25%**
	R3	Indican que al añadir o quitar una UL, la altura de este (líquido) aumenta o disminuye 1 cm según corresponda. La línea (recta) no se puede extender indefinidamente, pero hacen alusión a que se debe al número definido de coordenadas (omitiendo el contexto de la situación).	**25%**
	R4	No responden qué sucede cuando se añade o quita una UL, pues señalan que si se afecta una (magnitud) la otra también, sin especificar cuál de ellas es la magnitud independiente. La línea (recta) no se puede extender indefinidamente, pero hacen alusión a que se debe al número definido de coordenadas (omitiendo el contexto de la situación).	**25%**
ACCIÓN MENTAL 4 (AM4)	**R1**	Respecto a P2, sobre cuál es la razón de cambio entre AL y volumen, no responden numéricamente, pero justifican que a medida que aumenta el volumen, así mismo aumenta la AL, pues estas (magnitudes) son directamente proporcionales.	**25%**
	R2	Respecto a P2, sobre cuál es la razón de cambio entre AL y volumen, no responden numéricamente, pero justifican que a medida que aumente la AL, también lo hará el volumen, pues 'esto' es directamente proporcional (Esta respuesta es errónea).	**25%**
	R3	Respecto a P2, sobre cuál es la razón de cambio entre AL y volumen, no responden numéricamente, y su respuesta no es válida.	**25%**
	R4	Respecto a P2, sobre cuál es la razón de cambio entre AL y volumen, no ofrecen ninguna respuesta.	**25%**

Tabla 8. Tipos de respuestas Graficación Covariacional de la S1T1, T2, T3, T4

GRAFICACIÓN COVARIACIONAL	TIPO DE RESPUESTA	DESCRIPCIÓN	%
ACCIONES QUE MANIFIESTAN LA PREGUNTA BASE *¿QUÉ CAMBIA?*	**R1**	Estudiantes que indican que el volumen es la magnitud que varía.	**25%**
	R2	Estudiantes que indican que el volumen es la magnitud que varía.	**25%**
	R3	Estudiantes que indican que la AL es la magnitud que varía.	**25%**
	R4	Estudiantes que indican que altura, volumen y peso son las magnitudes que varían 'constantemente'.	**25%**
ACCIONES QUE MANIFIESTAN LA PREGUNTA BASE *¿CÓMO CAMBIA?*	**R1**	Señalan que, si el volumen contenido en el recipiente aumenta y/o disminuye, la AL también aumenta y/o disminuye según corresponda.	**25%**
	R2	Señalan que, si el volumen contenido en el recipiente aumenta y/o disminuye, la AL también 'aumentaría' y/o disminuiría, debido a que son (dichas magnitudes) directamente proporcionales.	**25%**
	R3	Señalan que, si el volumen contenido en el recipiente aumenta y/o disminuye, la AL también 'aumentaría' y/o disminuiría, debido a que son (dichas magnitudes) directamente proporcionales.	**25%**
	R4	Cambian el sentido de las preguntas sobre qué ocurre con la AL, si el volumen de este aumenta y/o disminuye (interpretación incorrecta de estas).	**25%**
ACCIONES QUE MANIFIESTAN LA PREGUNTA BASE *¿CUÁNTO CAMBIA?*	**R1**	Indican que al añadir o quitar una UL, la AL aumenta o disminuye 1 cm según corresponda.	**25%**
	R2	Indican que al añadir o quitar una UL, la AL aumenta o disminuye 1 cm según corresponda.	**25%**
	R3	Indican que al añadir o quitar una UL, la AL aumenta o disminuye 1 cm según corresponda.	**25%**
	R4	No responden qué sucede cuando se añade o quita una UL, pues señalan que si se afecta una (magnitud) la otra también, sin especificar cuál de ellas es la magnitud independiente.	**25%**
	R1	Estudiantes que completaron acertadamente la Tabla solicitada, y dejaron expresado como cociente $\frac{\Delta h}{\Delta x}$. Algunos, escriben el resultado de dicho cociente. Seleccionan y escriben parejas de puntos aleatoriamente (en desorden), pero omiten la escritura de los paréntesis. Algunos siguen el orden del abecedario (tal como se etiquetaron las parejas ordenadas). Respecto a P2, sobre cuál es la razón de cambio entre AL y volumen, no responden numéricamente, pero justifican que a medida que aumenta el volumen, así mismo aumenta la AL, pues estas (magnitudes) son directamente proporcionales. Señalan que el comportamiento de Δh respecto al de Δx, es constante, pero no explicitan que es el mismo para ambos cambios (de a una unidad).	**25%**
ACCIONES QUE MANIFIESTAN LA PREGUNTA BASE	**R2**	Estudiantes que completaron acertadamente la Tabla solicitada, y dejaron expresado como cociente $\frac{\Delta h}{\Delta x}$. Algunos, escriben el resultado de dicho cociente. Seleccionan y escriben parejas de puntos aleatoriamente (en desorden), pero omiten la escritura de los paréntesis. Algunos siguen el orden del abecedario (tal como se etiquetaron las parejas ordenadas). Respecto a P2, sobre cuál es la	**25%**

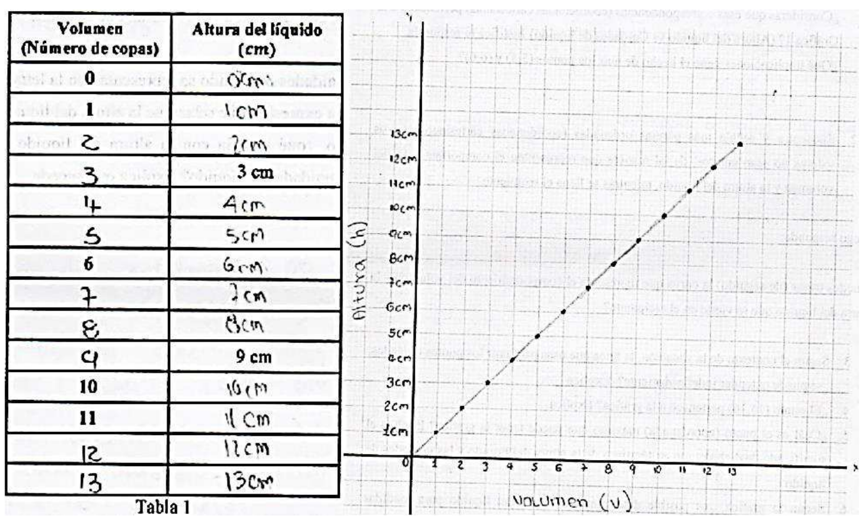
¿A QUÉ RAZÓN CAMBIA?		razón de cambio entre AL y volumen, no responden numéricamente, pero justifican que a medida que aumente la AL, también lo hará el volumen, pues ‘esto’ es directamente proporcional (Esta respuesta es errónea). Señalan que el comportamiento de Δh respecto al de Δx, es igual, aunque justifican que cada unidad (cambio de las magnitudes volumen y AL) aumenta 1 cm.	
	R3	Estudiantes que completaron acertadamente la Tabla solicitada, y dejaron expresado como cociente $\frac{\Delta h}{\Delta x}$. Algunos, escriben el resultado de dicho cociente. Seleccionan y escriben parejas de puntos aleatoriamente (en desorden), pero omiten la escritura de los paréntesis. Algunos siguen el orden del abecedario (tal como se etiquetaron las parejas ordenadas). Respecto a P2, sobre cuál es la razón de cambio entre AL y volumen, no responden numéricamente, y su respuesta no es válida. Señalan que el comportamiento de Δh respecto al de Δx, es igual, aunque justifican que cada unidad (cambio de las magnitudes volumen y AL) aumenta 1 cm.	**25%**
	R4	Estudiantes que completaron acertadamente la Tabla solicitada, pero no dejaron expresado como cociente Δh y Δx. Seleccionan y escriben parejas de puntos aleatoriamente (en desorden). Respecto a P2, sobre cuál es la razón de cambio entre AL y volumen, no ofrecen ninguna respuesta. Frente a cómo es el comportamiento de Δh respecto al de Δx, no ofrecen ninguna respuesta.	**25%**
ACCIONES QUE MANIFIESTAN LA PREGUNTA BASE *¿CÓMO SE COMPORTA GLOBALMENTE LA GRÁFICA?*	**R1**	Indican que para realizar la gráfica (Volumen vs AL), deben acomodarlos en un orden constante. Señalan que la r. gráfica es una línea recta, justificando que es una constante, pues va aumentando y proporcionalmente.	**25%**
	R2	Indican que para realizar la gráfica (Volumen vs AL), deben acomodarlos en un orden constante. Señalan que la r. gráfica es una línea recta, justificando que este (llenado del recipiente) aumenta en un orden constante.	**25%**
	R3	Indican que la gráfica (Volumen vs AL) se puede realizar midiendo el ‘frasco’ (recipiente), por un orden constante. Respecto a por qué la r. gráfica de esta situación es una línea recta, responden erróneamente, pues señalan que la empresa Luchy puede llenar el frasco porque tiene las medidas.	**25%**
	R4	No responden la pregunta sobre cómo realizar la gráfica (Volumen vs AL). Respecto a por qué la r. gráfica de esta situación es una línea recta, no ofrecen ninguna respuesta.	**25%**

Análisis general de la Situación 1

Elementos Matemáticos

Se puede afirmar que la mayoría (75%) de los estudiantes logró lo esperado, en tanto dieron cuenta de las *representaciones usadas*, las nociones de *dominio* y *rango* presentes, acercamiento a comprender la *monotonía de la curva* y ciertas ideas de *continuidad.*

Teniendo en cuenta lo expuesto en la Tabla 6, se puede observar que la mitad de los estudiantes manejó acertadamente el RT propuesto en cuanto al llenado del r. cilíndrico, escribiendo, por ejemplo, medidas unificadas, y considerando que para el $volumen = 0$, se escribe $altura = 0\ cm$. Por otro lado, en cuanto a la r. gráfica, este mismo porcentaje de estudiantes trazó una línea recta desde el origen (0,0) hasta (13,13), sin pasarse o extenderse de este último par ordenado, dando cuenta con ello, que comprendían la cantidad mínima y máxima de líquido que podía tener el r. cilíndrico, y que, a partir, por ejemplo, del volumen 13 (13 copas) el líquido se empezaría a regar. La figura que sigue muestra ejemplos de este tipo de respuestas:



Volumen (Número de copas)	Altura del líquido (cm)
0	0cm
1	1cm
2	2cm
3	3 cm
4	4cm
5	5cm
6	6cm
7	7cm
8	8cm
9	9 cm
10	10cm
11	11 Cm
12	12cm
13	13cm

Tabla 1

Figura 7. Respuestas frente a S1T2P1, T3P1

Un 25% del grupo total, también manejó acertadamente el RT propuesto, pero en su r. gráfica, aunque también ubican pares ordenados desde (0,0) hasta (13,13), no trazan o no los unen mediante una línea (recta); empero, tras discusiones posteriores, argumentaron se podía trazar la línea que uniera dichos puntos, pues en todo momento se estuvo echando líquido en el r., así fuese en cantidades menores a la copa. El 25% restante se comportó de manera similar al primer grupo (mencionado), con la diferencia de que llegan hasta el par ordenado (12,12).

La mayoría de estudiantes logró reconocer la noción *rango* en la situación sobre el llenado del r. cilíndrico, en tanto expresan que la AL no podía alcanzar 20 cm, pues la altura máx. del r. era inferior a ese valor (medida) y el líquido se regaría. Este mismo porcentaje de alumnos reconoce que el par ordenado (13,13) es el punto máximo que puede alcanzar la gráfica, debido a que éste marca el límite con la rosca del r. cilíndrico, como se observa en la siguiente figura:

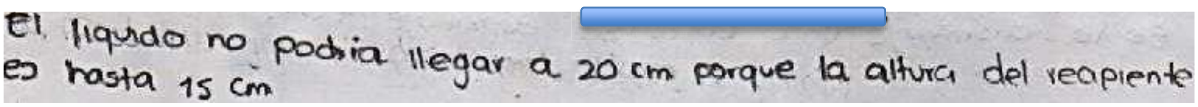
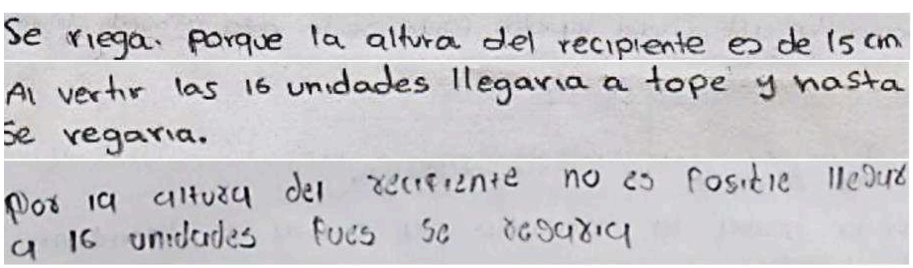

El liqudo no podia llegar a 20 cm porque la altura del recipiente es hasta 15 cm

Figura 8. Respuesta frente a S1T1P4

Aunque el resto de estudiantes, inicialmente, se comportó de manera similar al grupo anterior mencionado (respondiendo que la altura máxima del r. era $12\frac{1}{2}$ cm), en la plenaria pidieron la oportunidad de volver a medir la altura del r., y se dan cuenta que habían medido mal.

En cuanto a la noción de *dominio*, todos los estudiantes reconocieron que el par ordenado (16,16) no pertenecía a la gráfica, debido a que la altura máx. del r. y el número permitido de copas (volumen), no coinciden con el valor 16 (referente al volumen). Empro, cabe resaltar que algunos de ellos, inicialmente, escribieron que esto se debía a que en el RT sólo se proponía hasta (13,13), en las primeras discusiones se buscó que los estudiantes relacionaran (16,16) con la acción de llenar el r. en cuestión. La siguiente figura se presenta como soporte de lo anterior:


Se riega. porque la altura del recipiente es de 15 cm

Al vertir las 16 unidades llegaria a tope y hasta se regaria.

Por la altura del recipiente no es posible llegar a 16 unidades pues se regaria

Figura 9. Respuestas frente a S1T3P4

Por otro lado, es notorio que la mayoría de estudiantes logró formar pares ordenados de valores no enteros, aunque cabe resaltar que presentaron dificultades en la escritura de este tipo de coordenadas cartesianas. Por ejemplo, algunos estudiantes sólo escribieron pares ordenados intermedios como (5.5, 5.5), razón por la cual, en la plenaria se aprovechó para explicarles, por ejemplo, ‘el uso de los paréntesis en estos casos’, y que un grupo de estudiantes expusiera sus pares ordenados, como (5.3, 5.3), y logrando explicar que cualquier valor (arbitrario) para el volumen es posible, aunque sea más complejo de calcula (ver Figura 10).

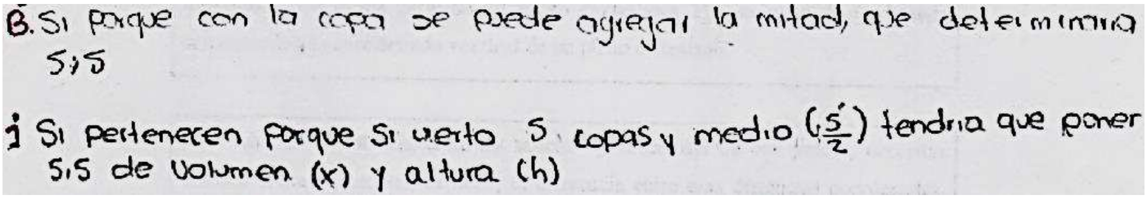


Figura 10. Respuestas frente a S1T3P1B

El 25% restante de alumnos, no escribió pares ordenados de valores no enteros, justificando que no era posible, pues la medida (de la copa) es exacta, es decir, no permite porciones. Pese a ello, al escuchar la explicación de sus compañeros (mencionada anteriormente), se dieron cuenta, por un lado, que en ningún momento de la situación se restringe a una copa llena (entera), y por otro, que tiene sentido (lógica), observar y/o analizar qué sucede con la AL, cuando se modifica el volumen establecido.

En lo que tiene que ver con la monotonía de la curva, se puede afirmar que la mayoría (75%) de estudiantes logró lo esperado, pues durante ciertas discusiones en los momentos de plenaria y validación, dieron cuenta de que la línea recta que obtuvieron, era creciente pues ‘se echaba líquido todo el tiempo y, por tanto, la AL iba aumentando; no hay interrupciones’.

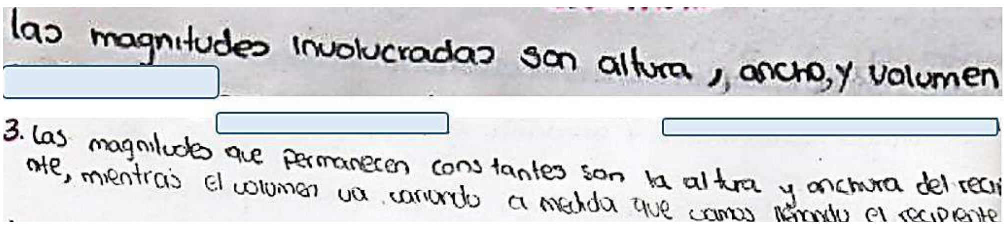
Razonamiento Covariacional

De acuerdo con la Tabla 9, el 100% de los estudiantes se puede asociar con la Acción Mental 1 (AM1), debido a que lograron reconocer las magnitudes involucradas, a saber, volumen, AL, altura del r. y diámetro del mismo. Respecto a esto, es importante resaltar que inicialmente, algunos estudiantes escribían “altura”, sin distinguir o especificar si se trataba de AL o altura del r. Aunque tal acotación se realizó individualmente y en plenaria (aprovechando otras preguntas de la Tarea 1), fue hasta el final de la siguiente Tarea que los estudiantes se familiarizaron con la referencia *altura del líquido*.

En cuanto a comportamiento de magnitudes, todos los estudiantes lograron reconocer que AL es la magnitud que varía y altura del r. es la magnitud constante; frente a esto último, la indagación en momentos de pareja, permitió encontrar el siguiente tipo de explicación:

> ***Profesor:*** *[…] ¿Por qué consideras que la altura del recipiente es una magnitud constante?*
>
> ***Estudiante:*** *Profe, porque es que el frasco no crece. Eso no es como una plantita que uno le echa agua y crece. Eso nunca va a cambiar.*

Respuestas como las que siguen, evidencian la AM1 por parte de los estudiantes:

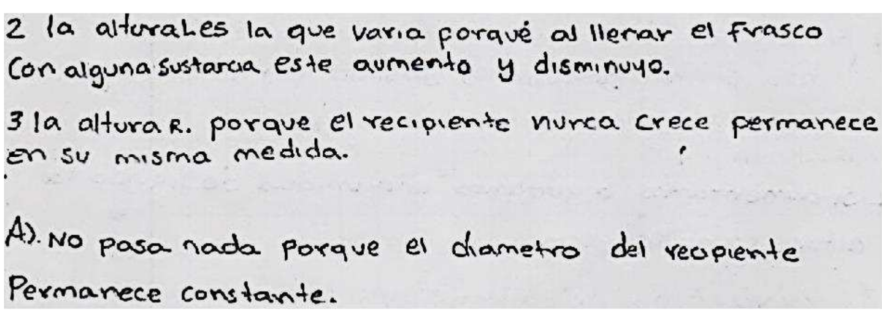


las magnitudes involucradas son altura , ancho, y volumen

3. Las magnitudes que permanecen constantes son la altura y anchura del reci-
ente, mientras el volumen va cambiando a medida que vamos llenando el recipiente

Figura 11. Respuestas frente a S1T1P1, P3

En lo que respecta a comportamientos asociados a AM2, el 100% de los estudiantes se puede asociar con esta Acción Mental, debido a que lograron reconocer que si el líquido contenido en el recipiente aumentaba y/o disminuía la AL también se comportaba de esta manera (aumentando y/o disminuyendo, según fuese el caso). Respuestas como las que siguen, evidencian la AM2 por parte de los estudiantes:



2 la alturaL es la que varia porqué al llenar el frasco
Con alguna sustarcia este aumento y disminuyo.

3 la altura R. porque el recipiente nurca crece permanece
en su misma medida.

A). No pasa nada porque el diametro del reopiente
Permanece constante.

Figura 12. Respuestas frente a S1T1P2, P3

Por otro lado, este grupo logró identificar y manifestar que la relación que existe entre dichas magnitudes es que la AL depende del volumen, pues cuando este cambia, la AL también lo hace. Respecto a esto, cabe resaltar que algunos de estos estudiantes (25%), insistió en argumentar que la dependencia entre dichas magnitudes, se debía a que eran *directamente proporcionales*, término que cuando se les preguntó cómo lo entendían, no lograron explicar.

Respecto a la cantidad de cambio de las magnitudes en cuestión, la mayoría de estudiantes (75%) se puede asociar con la Acción Mental 3 (AM3), debido a que lograron dar cuenta que al añadir o quitar una UL, la AL cambiaba en 1 cm, ya fuese aumentando o disminuyendo.

Respecto a la cantidad de cambio de las magnitudes en cuestión (AM3), la mayoría (75%) de los estudiantes logró reconocer que al añadir o quitar una UL, la AL aumenta o disminuye 1 cm, según corresponda. La figura que sigue evidencia la AM3 por parte de los estudiantes:

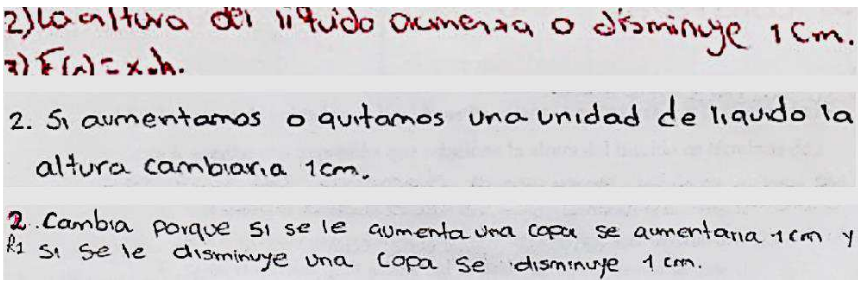

2) La altura del liquido aumenta o disminuye 1 Cm.
3) F(x) = x.h.
2. Si aumentamos o quitamos una unidad de liquido la altura cambiaria 1cm.
2. Cambia porque si se le aumenta una copa se aumentaria 1cm y si se le disminuye una copa se disminuye 1 cm.

Figura 13. Respuestas frente a S1T2P2

Cabe resaltar que, en el trabajo entre parejas, algunos estudiantes no respondieron qué sucede cuando se añade o quita una UL, y en su lugar, sólo escribieron que "si se afecta una (magnitud) la otra también". Luego, en discusiones posteriores a la plenaria, se hizo énfasis en que aquellos estudiantes leyeran detenidamente S1T2P1, P2, frente a lo cual se dieron cuenta que se estaba preguntando *por cuánto (cantidad) cambiaba la AL, a medida que el volumen variaba en una unidad.*

En lo que respecta a la razón de cambio, se observó que sólo la mitad de estudiantes reportaron comportamientos asociados a AM4, en tanto este grupo logró reconocer y argumentar que la razón de cambio que describía el comportamiento del llenado del r. cilíndrico era 1 a 1, es decir, que, por cada cambio de 1 unidad en el volumen, ocurría un cambio de 1 unidad, en la AL. La figura que sigue es un ejemplo de este tipo de respuesta:

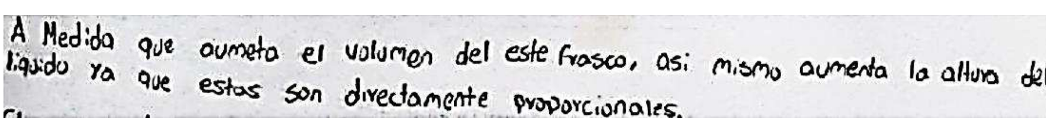

A Medida que aumeta el volumen del este frasco, asi mismo aumenta la altura del liquido ya que estas son directamente proporcionales.

Figura 14. Respuestas frente a S1T4P2A

Es importante resaltar que aún después de las discusiones en plenaria y orientaciones en la validación, a los estudiantes (en general), se les dificultó comprender el término *razón de cambio* y cómo este se asocia con el llenado del r. cilíndrico. Empero, las preguntas guiadas en estos momentos, permitieron que la mitad del grupo dieran cuenta de la razón de cambio; respecto a aquellos que no alcanzaron esta AM4, se tuvieron presentes para hacerles seguimiento en la Situación 2.

Después de todo lo anterior, se puede afirmar que un poco más de la mitad de los estudiantes reportaron comportamientos asociados a los de la Acción Mental 4 (AM4), en tanto evidenciaron comportamientos sobre coordinar el valor de una variable con los cambios en la otra (AM1), dirección del cambio (AM2), coordinación de la cantidad de cambio (AM3) y verbalización de la razón de cambio promedio. Luego, respecto a esta Situación 1 (r. cilíndrico), se puede sostener que los estudiantes, en las preguntas S1T1P2, 3, S1T2P2 y S1T4P2, 3, lograron manifestar comportamientos de las acciones mentales que sustentan el Nivel 4 de Razonamiento Covariacional.

Graficación Covariacional

Para esta variable de análisis, se deben tener en cuenta dos aspectos: cómo dieron cuenta los estudiantes de las *preguntas base* de Dolores y Salgado (2009) con preguntas que no correspondían a la r. gráfica, y con aquellas que sí se relacionaban directamente con este registro o representación (ya fuese en la construcción o en la interpretación de la misma).

Así pues, en cuanto a las cinco *preguntas base* de la Graficación Covariacional (preguntas que no corresponden a la r. gráfica), en la siguiente tabla se aprecia lo encontrado:

Tabla 9. Alcance de las preguntas base (antes de r. gráfica) en S1

PREGUNTAS BASE	CÓMO DIERON CUENTA
¿Qué cambia?	Todos los estudiantes lograron dar cuenta que las magnitudes involucradas eran volumen (V), AL (V), altura del recipiente (C) y diámetro del mismo (C).
¿Cómo cambia?	Todos los estudiantes lograron reconocer que si el volumen contenido en el r. cilíndrico aumentaba y/o disminuía, la AL también se comportaba de esa manera (aumentando o disminuyendo, según corresponda).
¿Cuánto cambia?	La mayoría de estudiantes logró reconocer que al añadir o quitar una UL, la AL aumentaba o disminuía 1 cm, según corresponda.
¿A qué razón cambia?	La mitad de los estudiantes logró reconocer que la razón de cambio en el llenado del r. cilíndrico era 1 a 1 (cuando hay un cambio en el volumen, también ocurría un cambio en la AL).
¿Cómo se comporta globalmente la gráfica?	Todos los estudiantes dieron cuenta que la r. gráfica para el llenado del r. cilíndrico era una línea recta desde (0,0) hasta (13,13), porque el comportamiento del llenado de este r. fue uniforme en todo momento.

Finalmente, respecto a cómo los estudiantes dieron cuenta de las *cinco preguntas base*, frente a preguntas relacionadas (directamente) con la r. gráfica, se puede afirmar que la mayoría (75%) de estudiantes dieron cuenta de 4 de ellas (Qué, Cómo, Cuánto y Cómo se comporta), de la siguiente manera:

- *¿Qué cambia?*, cuando en sus r. gráficas, consideraban y/o escribían en los respectivos ejes coordenados (x e y), los términos “volumen o cantidad de copas” y “altura del líquido”, como se aprecia en la siguiente figura:

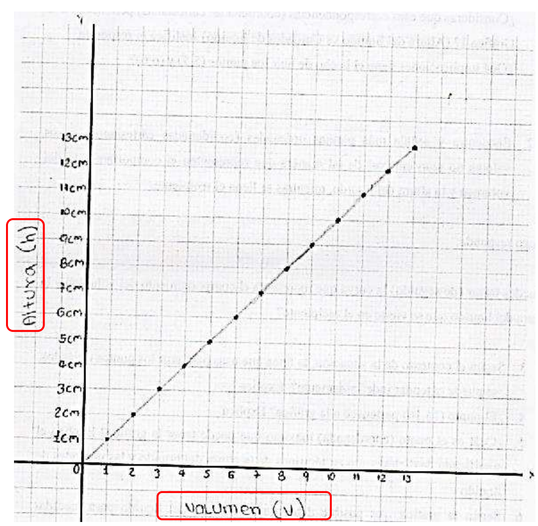


Figura 15. Respuesta frente a ¿Qué cambia? en S1

- *¿Cómo cambia?*, al reconocer que, así como crece (aumenta) el volumen (y, por tanto, debían desplazarse hacia la derecha sobre el eje x), también lo hace la AL (y, por tanto, debían desplazarse hacia arriba sobre el eje y).

- *¿Cuánto cambia?*, cuando bosquejaron o construyeron su r. gráfica, considerando que, al avanzar, por ejemplo, dos unidades sobre el eje x (volumen), también debían avanzar dos unidades sobre el eje y (altura del líquido), lo cual se evidencia en la siguiente figura:

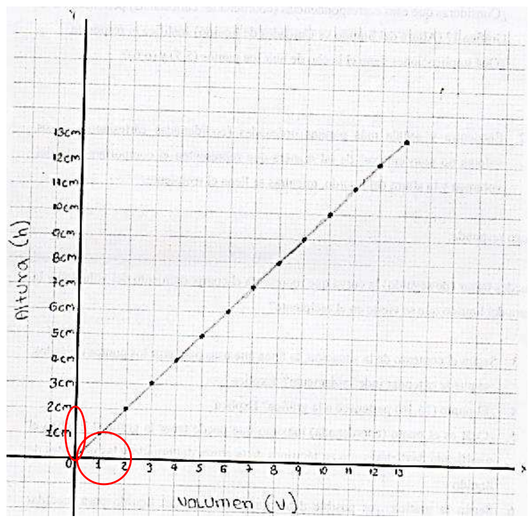


Figura 16. Respuesta frente a ¿Cuánto cambia? en S1

- *¿Cómo se comporta globalmente la gráfica?,* dieron cuenta de ello al trazar una línea recta desde (0,0) hasta (13,13), e interpretando que esto se debía, por un lado, a que "si no se echa líquido, no puede haber AL", y por otro, que la gráfica no podía pasar del último punto coordenado (13,13), porque a partir de este "el líquido se empezaría a regar". La comprensión sobre la acotación de la r. gráfica, por parte de los estudiantes, se puede observar en la siguiente figura:

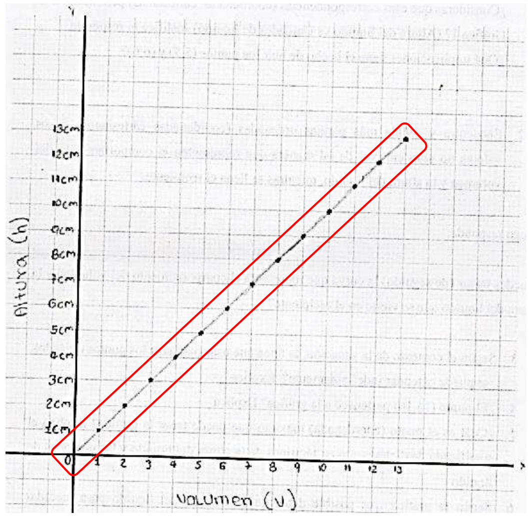


Figura 17. Respuesta frente a ¿Cómo se comporta globalmente la gráfica? en S1

Respecto a *¿A qué razón cambia?*, se debe afirmar que ninguno de los estudiantes logró reconocer, a partir de la r. gráfica, que la razón de cambio era 1 a 1 (por cada cambio de una unidad en el volumen, ocurría un cambio de una unidad en la AL).

Propósitos de las Tareas y de la Situación 1

La *Tarea 1* tenía como propósito que los estudiantes comprendieran la situación planteada, principalmente, en lo que tiene que ver con el manejo de los distintos recipientes que se mencionan en la *Contextualización de las situaciones*, pues en ella radica la complejidad y objetivo de la Propuesta de Aula que se presenta a los estudiantes. La *Tarea 1* implicaba, por parte del estudiante, poder observar, identificar y explicar distintos hechos que ocurrían en el llenado del r. cilíndrico, en relación con las magnitudes involucradas.

De acuerdo con lo anterior, se puede afirmar que el propósito de la *Tarea 1* se cumplió, puesto que los estudiantes lograron manifestar que el volumen, AL, altura del r. y diámetro del mismo, eran las magnitudes involucradas en el llenado de este r. cilíndrico. Este cumplimiento también se ve reflejado en el hecho de que los estudiantes lograron reconocer que el *volumen* y *AL* eran las magnitudes que cambiaban, mientras que la *altura* y *diámetro* del recipiente, eran aquellas que permanecían constantes.

Se puede decir que el propósito de la *Tarea 2* (cuantificar los cambios del volumen y la AL) también se cumplió, puesto que los estudiantes lograron manifestar que cuando el volumen aumentaba y/o disminuía en una unidad, la AL también se comportaba de esta manera, aumentando y/o disminuyendo de 1 en 1 (cm). La confirmación de este acercamiento queda evidenciada con respuestas a preguntas como P2 y P3, de las cuales los estudiantes lograron inferir que, s*i se aumenta y/o disminuye 1 copa, la altura del líquido aumenta y/o disminuye 1 cm*".

Empero a este alcance, es importante resaltar que los estudiantes, en general, presentaron dificultades en reconocer y escribir las AL para los distintos volúmenes arbitrarios (no enteros) que se preguntaron, por ejemplo, al omitir la escritura de los paréntesis para formar pares ordenados como (4.25, 4.25).

Respecto al propósito de la Tarea 3 (graficar el comportamiento de volumen y AL), se puede afirmar que se cumplió parcialmente, debido a que, por un lado, la mayoría de estudiantes tuvieron dificultades para reconocer y escribir, volúmenes y AL distintas a valores intermedios, es decir, preferían quedarse y ubicar (en la r. gráfica) pares ordenados como (5.5, 5.5) que (5.1, 5.1). Y por otro, un porcentaje similar de estudiantes tuvo dificultades para comprender y argumentar, ampliamente, sus nociones sobre la continuidad de la línea recta que trazaron, a través de las preguntas de S1 y las orientadas en la plenaria y validación.

En cuanto al propósito de la Tarea 4, se puede afirmar que se cumplió parcialmente, puesto que sólo la mitad de estudiantes logró dar cuenta que la razón de cambio que describía el comportamiento del llenado del r. cilíndrico, era un cambio 1 a 1.

Con base en todo lo anterior, se puede afirmar que el propósito de la Situación 1 se cumplió casi en su totalidad, debido a que los propósitos de las dos últimas tareas tuvieron bajo alcance (cumplimiento). Es decir, para este momento de la Propuesta de Aula, la mayoría de los estudiantes sólo logró comprender *Qué cambiaba*, *Cómo cambiaba* y *Cuánto cambiaba*, pero tuvieron dificultades para dar cuenta de lo relacionado con continuidad y razón de cambio (*A qué razón cambiaba*).

3.4.2 RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN 2

Tabla 10. Tipos de respuestas Elementos Matemáticos de la S2T1, T2, T3

ELEMENTOS MATEMÁTICOS	TIPO DE RESPUESTA	DESCRIPCIÓN	%
	R1	Estudiantes que construyen la Tabla iniciando desde 1 en el volumen (*número de vasos*) y 2 cm de AL. Manejan un patrón de cambio en la AL de 1 cm, 0.5 cm, 1 cm, 1 cm, 0.5 cm, 1 cm, 1 cm, 0.5 cm. Describen que la r. gráfica del llenado del r. esférico no es lineal, es continua y su dominio es [0,10].	**25%**
	R2	Estudiantes que construyen la Tabla iniciando desde 1 en el volumen (*número de vasos*) y 2 cm de AL. Manejan un patrón de cambio en la AL de 1 cm, 0.5 cm, 1 cm, 1 cm, 0.5 cm, 1 cm, 1 cm, 0.5 cm. Describen que el comportamiento de la r. gráfica del llenado del r. esférico no es constante; añaden que hay diversos momentos en que la variación de la AL con respecto al volumen, cambiaba de rapidez. Consideran el dominio, continuo, en el intervalo [0,10].	**25%**
REPRESENTACIONES USADAS	**R3**	Estudiantes que construyen la Tabla iniciando desde 0 en el volumen y en la AL. Manejan un patrón de cambio en la AL de 2 cm. Describen el comportamiento de la r. gráfica del llenado del r. esférico, como una relación directamente proporcional, que es continua en el dominio [0,10].	**25%**
	R4	Estudiantes que construyen la Tabla iniciando desde 1 en el volumen (*número de vasos*) y 2 cm de AL. Manejan un patrón de cambio en la AL de 0.5 cm, 1 cm, 1 cm, 0.5 cm, 0.5 cm, 1 cm, 0.5 cm, 0.5, 1 cm, 1 cm. Describen el comportamiento de la r. gráfica del llenado del r. esférico, como una relación directamente proporcional, que es continua en el dominio [0,10].	**25%**
	R1	Estudiantes que responden, acertadamente, que no era posible que el r. esférico se pudiera llenar hasta 11cm, debido a que éste sólo llega a 10,5 cm. Expresan que la AL, a la mitad del r. esférico, fue 5 cm, con un volumen de 7 vasos. Señalan que a medida que se agrega líquido al r. esférico, el volumen y la AL aumentan. Los cambios que sufre la AL, al llenar el recipiente, son constantes. Describen que la r. gráfica del llenado del r. esférico no es lineal, es continua y su dominio es [0,10].	**25%**
DOMINIO Y RANGO	**R2**	Estudiantes que responden, acertadamente, que no era posible que el r. esférico se pudiera llenar hasta 11cm, debido a que éste sólo llega a 10,5 cm. Expresan que la AL, a la mitad del r. esférico, fue 5 cm, con un volumen de 7 vasos. Señalan que a medida que se agrega líquido al r. esférico, el volumen y la AL aumentan. Los cambios que sufre la AL, al llenar el recipiente, son constantes. Describen que el comportamiento de la r. gráfica del llenado del r. esférico no es constante; añaden que hay diversos momentos en que la variación de la AL con respecto al volumen, cambiaba de rapidez. Consideran el dominio, continuo, en el intervalo [0,10].	**25%**
	R3	Estudiantes que responden que no era posible que el r. esférico se pudiera llenar hasta 11 cm, debido a que éste sólo llega a 10 cm. Expresan que la AL, a la mitad del r. esférico, fue 5.5 cm, con un volumen de 7 vasos. Señalan que a medida que se agrega líquido al r. esférico, el volumen y la AL aumentan. Los cambios que sufre la AL, al llenar el recipiente, son constantes. Describen	**25%**

		el comportamiento de la r. gráfica del llenado del r. esférico, como una relación directamente proporcional, que es continua en el dominio [0,10].	
	R4	Estudiantes que responden que no era posible que el r. esférico se pudiera llenar hasta 11 cm, debido a que éste sólo llega a 10 cm. Expresan que la AL, a la mitad del r. esférico, fue 2.5 copas, con un volumen de 5 cm. Señalan que los cambios que sufre la AL, al llenar el r. esférico, no son constantes, sin justificar su respuesta. Describen el comportamiento de la r. gráfica del llenado del r. esférico, como una relación directamente proporcional, que es continua en el dominio [0,10].	**25%**
CONTINUIDAD	**R1**	Estudiantes que describen que la r. gráfica del llenado del r. esférico no es lineal, es continua y su dominio es [0,10].	**25%**
	R2	Estudiantes que describen que el comportamiento de la r. gráfica del llenado del r. esférico no es constante; añaden que hay diversos momentos en que la variación de la AL con respecto al volumen, cambiaba de rapidez. Consideran el dominio, continuo, en el intervalo [0,10].	**25%**
	R3	Estudiantes que describen el comportamiento de la r. gráfica del llenado del r. esférico, como una relación directamente proporcional, que es continua en el dominio [0,10].	**50%**
MONOTONÍA DE LA CURVA	**R1**	La gráfica (curva) se debe hacer desde (0,0) hasta (10,10), haciendo alusión tanto al número de UL utilizadas (vasos) como a la altura del r.	**50%**
	R2	La gráfica (curva) se debe hacer desde (0,0) hasta (10.5, 10.5), haciendo alusión tanto al número de UL utilizadas (vasos) como a la altura del r.	**25%**
	R3	Frente a desde y hasta dónde se puede trazar la gráfica (curva) que representa el llenado del r. esférico, no ofrecen ninguna respuesta.	**25%**

Tabla 11. Tipos de respuestas Razonamiento Covariacional de la S2T1, T2, T3

RAZONAMIENTO COVARIACIONAL	TIPO DE RESPUESTA	DESCRIPCIÓN	%
ACCIÓN MENTAL 1 (AM1)	**R1**	Estudiantes que mencionan las magnitudes esperadas (AL y del recipiente; volumen y diámetro), indicando el comportamiento de cada una de ellas. Expresan que el diámetro del recipiente no es constante, debido a la forma de éste (esférico).	**50%**
	R2	Estudiantes que mencionan algunas de las magnitudes esperadas, indicando el comportamiento de cada una. Inicialmente expresan que el volumen y diámetro son magnitudes constantes; luego, rectifican en cuanto al diámetro, indicando que éste varía debido a que el recipiente es esférico y tiene niveles circulares.	**50%**
ACCIÓN MENTAL 2 (AM2)	**R1**	Indican que, si el volumen aumenta y/o disminuye, la AL se comporta de la misma manera (según corresponda), pues son directamente proporcionales. Señalan que a medida que se agrega líquido, el volumen y la AL, aumentan.	**50%**
	R2	Indican que, si el volumen aumenta y/o disminuye, la AL se comporta de la misma manera, pues la AL depende del volumen. Añaden que el cambio de la AL también depende del diámetro. Señalan que a medida	**25%**

		que se agrega líquido, el volumen y la AL, aumentan.	
	R3	Indican que, si el volumen aumenta y/o disminuye, la AL se comporta de la misma manera, pues la AL depende del volumen. Añaden que el cambio de la AL también depende del diámetro.	**25%**
ACCIÓN MENTAL 3 (AM3)	**R1**	Indican la AL en diferentes momentos, pero no hacen alusión a la comparación que se les pide utilizando la regla. Para 1.5 unidades de líquido, consideran 2.1 cm de AL; para 5.25 unidades de líquido, consideran 4.5 cm de AL. Expresan que después de iniciar con dos vasos de líquido y agregar uno más, la AL aumenta 0.6 cm; en el caso de iniciar con cuatro vasos, aumenta 0.7 cm. Concluyen que el aumento de la AL no fue mucho. Indican que cuando se sobrepasa la primera mitad del recipiente, la AL y el volumen, aumentan, pero no constantemente. Agregan que, en esa parte, el recipiente se llena más rápido, debido a la forma de éste (diámetro). Añaden que los cambios que sufre la AL, al llenar el recipiente, son constantes.	**50%**
	R2	Indican la AL en diferentes momentos, pero no hacen alusión a la comparación que se les pide utilizando la regla. Para 1.5 unidades de líquido, consideran 2.1 cm de AL; para 5.25 unidades de líquido, consideran 2.2 cm de AL. Expresan que después de iniciar con dos vasos de líquido y agregar uno más, la AL aumenta 6 cm; en el caso de iniciar con cuatro vasos, aumenta 8 cm. Concluyen que la AL aumenta en 2 cm. Añaden que los cambios que sufre la AL, al llenar el recipiente, son constantes.	**25%**
	R3	Indican la AL en los diferentes momentos solicitados, explicitando, correctamente, cómo realizan el procedimiento (cálculo, aproximación); añaden que sería más preciso/exacto con la regla. Respecto a calcular AL para los valores solicitados, no ofrecen ninguna respuesta. Indican que cuando se sobrepasa la primera mitad del recipiente, la AL aumenta y el volumen disminuye (respuesta incorrecta). Agregan que 'cuando el recipiente es ancho, la AL aumenta más rápido'. Respecto a que sucede cuando se sobrepasa la primera mitad del recipiente, no ofrecen ninguna respuesta. Señalan que los cambios que sufre la AL, al llenar el recipiente, no son constantes.	**25%**
ACCIÓN MENTAL 4 AM4	**R1**	Respecto a P2, sobre cuál es la razón de cambio entre AL y volumen, no responden numéricamente, pero justifican que cuando se agrega líquido en el r. esférico, la AL va aumentando, y a medida que va llegando al medio (del r.) se retrasa (el aumento de AL).	**25%**
	R2	Respecto a P2, sobre cuál es la razón de cambio entre AL y volumen, no responden numéricamente, pero justifican que la AL aumenta porque el volumen también lo hace; añaden que se retrasa llegando a la zona media (del r.).	**25%**
	R3	Respecto a P2, sobre cuál es la razón de cambio entre AL y volumen, no responden numéricamente, pero justifican que la razón de cambio (en esta situación) es variable.	**25%**
	R4	Respecto a P2, sobre cuál es la razón de cambio entre AL y volumen, no responden a lo solicitado. Pese a ello, señalan que en la primera y segunda mitad (del r.), la AL aumenta más que en la mitad (exacta del r.).	**25%**

Tabla 12. Tipos de respuestas Graficación Covariacional de la S2T1, T2, T3

GRAFICACIÓN COVARIACIONAL	TIPO DE RESPUESTA	DESCRIPCIÓN	%
ACCIONES QUE MANIFIESTAN LA PREGUNTA BASE *¿QUÉ CAMBIA?*	**R1**	Estudiantes que mencionan las magnitudes esperadas (AL y del recipiente; volumen y diámetro), indicando el comportamiento de cada una de ellas. Expresan que el diámetro del recipiente no es constante, debido a la forma de éste (esférico).	**50%**
	R2	Estudiantes que mencionan algunas de las magnitudes esperadas, indicando el comportamiento de cada una. Inicialmente expresan que el volumen y diámetro son magnitudes constantes; luego, rectifican en cuanto al diámetro, indicando que éste varía debido a que el recipiente es esférico y tiene niveles circulares.	**25%**
ACCIONES QUE MANIFIESTAN LA PREGUNTA BASE *¿CÓMO CAMBIA?*	**R1**	Señalan que a medida que se agrega líquido, el volumen y la AL, aumentan. Indican que, si el volumen aumenta y/o disminuye, la AL se comporta de la misma manera (según corresponda), pues son directamente proporcionales.	**25%**
	R2	Señalan que a medida que se agrega líquido, el volumen y la AL, aumentan. Indican que, si el volumen aumenta y/o disminuye, la AL se comporta de la misma manera (según corresponda), pues son directamente proporcionales.	**25%**
	R3	Señalan que a medida que se agrega líquido, el volumen y la AL, aumentan. Indican que, si el volumen aumenta y/o disminuye, la AL se comporta de la misma manera, pues la AL depende del volumen. Añaden que el cambio de la AL también depende del diámetro.	**25%**
	R4	Indican que, si el volumen aumenta y/o disminuye, la AL se comporta de la misma manera, pues la AL depende del volumen. Añaden que el cambio de la AL también depende del diámetro.	**25%**
ACCIONES QUE MANIFIESTAN LA PREGUNTA BASE *¿CUÁNTO CAMBIA?*	**R1**	Indican la AL en diferentes momentos, pero no hacen alusión a la comparación que se les pide utilizando la regla. Para 1.5 unidades de líquido, consideran 2.1 cm de AL; para 5.25 unidades de líquido, consideran 4.5 cm de AL. Expresan que después de iniciar con dos vasos de líquido y agregar uno más, la AL aumenta 0.6 cm; en el caso de iniciar con cuatro vasos, aumenta 0.7 cm. Concluyen que el aumento de la AL no fue mucho.	**50%**
	R2	Indican la AL en diferentes momentos, pero no hacen alusión a la comparación que se les pide utilizando la regla. Para 1.5 unidades de líquido, consideran 2.1 cm de AL; para 5.25 unidades de líquido, consideran 2.2 cm de AL. Expresan que después de iniciar con dos vasos de líquido y agregar uno más, la AL aumenta 6 cm; en el caso de iniciar con cuatro vasos, aumenta 8 cm. Concluyen que la AL aumenta en 2 cm.	**25%**
	R3	Indican la AL en los diferentes momentos solicitados, explicitando, correctamente, cómo realizan el procedimiento (cálculo, aproximación); añaden que sería más preciso/exacto con la regla. Respecto a calcular AL para los valores solicitados, no ofrecen ninguna respuesta.	**25%**
ACCIONES QUE MANIFIESTAN LA PREGUNTA BASE *¿A QUÉ RAZÓN CAMBIA?*	**R1**	Añaden que los cambios que sufre la AL, al llenar el recipiente, son constantes.	**50%**
	R2	Añaden que los cambios que sufre la AL, al llenar el recipiente, son constantes.	**25%**

	R3	Señalan que los cambios que sufre la AL, al llenar el recipiente, no son constantes.	**25%**
ACCIONES QUE MANIFIESTAN LA PREGUNTA BASE *¿CÓMO SE COMPORTA GLOBALMENTE LA GRÁFICA?*	**R1**	Estudiantes que describen que la gráfica de la función no es lineal, es continua y su dominio es [0,10].	**25%**
	R2	Estudiantes que describen que el comportamiento de la gráfica no es constante y añaden que hay diversos momentos que la variación de la altura con respecto al volumen cambiaba de rapidez. Además, añaden que el dominio de la función es continuo en el intervalo [0,10].	**25%**
	R3	Estudiantes que describen el comportamiento de la altura con el volumen como una relación directamente proporcional, que es continua en el dominio [0,10].	**25%**
	R4	Estudiantes que describen el comportamiento de la altura con el volumen como una relación directamente proporcional, que es continua en el dominio [0,10].	**25%**

Análisis general de la Situación 2

Elementos Matemáticos

Se puede afirmar que sólo la mitad de estudiantes logró lo esperado, en tanto dieron cuenta de ciertos aspectos de las *representaciones usadas*, las nociones de *dominio* y *rango* presentes, acercamiento a comprenderla *monotonía de la curva* y ciertas ideas de *continuidad.*

Teniendo en cuenta lo expuesto en la Tabla 10, se puede observar, que inicialmente, ninguno de los estudiantes se acercó al trabajo esperado con el RT para el llenado del r. esférico, debido a que o bien no consideraron iniciar desde $volumen = 0$ (*número de vasos*) o bien expresaron las correspondientes AL, de forma constante (un poco lineal). Empero, tras una semi validación del RT que realizaron, en contraste con el RT esperado, la mayoría (75%) de estudiantes logró comprender que 1) también se debía iniciar en $volumen = 0$, 2) debían ser más cuidadosos y/o precisos al medir las distintas AL, pues para este r. esférico, no se daba un comportamiento lineal (cambios uniformes). Este tipo de avances se pudieron evidenciar en el siguiente fragmento (Diálogo. 1):

> ***Profesor:*** *(…) ¿Qué valores deben ir en la columna Altura del líquido?*
> ***Estudiante:*** *Se debe empezar con 0 cm, porque es cuando no se ha echado líquido al recipiente. Luego, se pone 0.2 cm, porque cuando eché una copa y medí otra vez con la regla, me dio eso. Después, se puede poner 0.3cm, porque cuando eché otra copa, y medí*

dónde había quedado el líquido, me dio eso. Y así para el resto profe: es que eso casi no aumenta y es difícil medir exacto.

Profesor: *Tienes razón: en esta ocasión es un poco más complejo hacer la medición con la regla. Pero bueno, ¿entonces en esa columna va 0.2, 0.3, luego 0.4 y así?*

Estudiantes: *No profe*

Estudiante: *Hay que medir cada una, porque en todas da diferente.*

Por otro lado, en cuanto a la r. gráfica y debido a la intervención que se acabó de mencionar, la mayoría de estudiantes logró realizar la gráfica (curva) esperada, considerando el primer trazo o fragmento desde el origen (0,0) y llegando hasta (10,10), tal como se muestra en la siguiente figura:

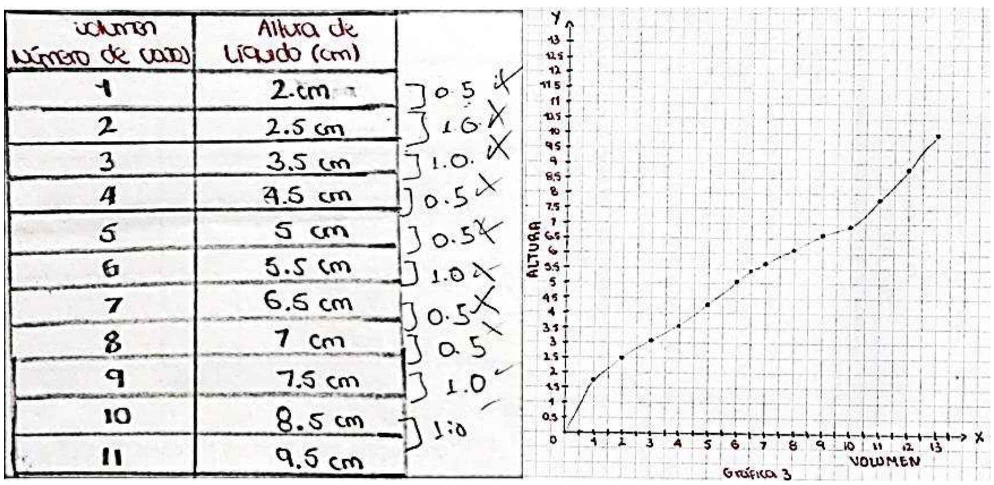


Figura 18. Respuestas frente a S2T2P1, P5

Referente al reconocimiento u apropiación del dominio y rango para el llenado del r. esférico, se obtuvo que:

El 100% de los estudiantes logró reconocer la noción de *rango* en la situación sobre llenado del r. esférico, en tanto expresan que la AL no puede alcanzar 11 cm, pues la altura máxima del r. era inferior a ese valor (el r. media 10 cm) y el líquido se regaría. Así mismo, lograron reconocer que el par ordenado (10, 10) es el punto máximo que puede alcanzar la gráfica, debido a que éste marca el límite con la rosca del r. esférico, como se observa en la siguiente figura:

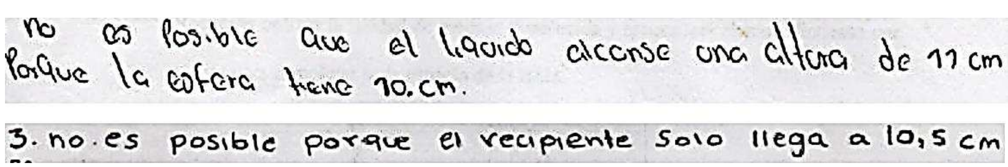


Figura 19. Respuestas frente a S2T1P3

Cabe resaltar que, en la parte escrita de los estudiantes, sus respuestas difieren en cuanto a la altura del r. esférico, pues, inicialmente, para algunos era 10 cm y para otros 10.5 cm.

Se puede afirmar que 100% de estudiantes se acercó al procedimiento y respuesta esperada frente a cuál era la AL en la mitad del r. esférico y qué volumen le correspondía, pues lograron comprender y expresar que en la mitad del r. la AL es 5 cm, y le corresponde un volumen de 7 vasos, tal como se aprecia en la siguiente figura:

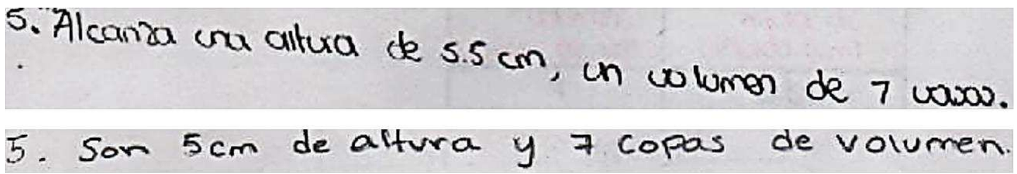


Figura 20. Respuestas frente a S2T1P5

Cabe resaltar que inicialmente, algunos (25%) estudiantes consideraron que la AL en la mitad del r. esférico era 5.5 cm, debido a que, por un lado, el r. no contaba con una base estable o plana, que permitiera que éste se sostuviera por sí mismo (como ocurrió con el r. cilíndrico), y así, fuese más fácil medir con la regla. Y por otro, que midieron la altura del r. incluyendo la rosca. Empero, en la plenaria, tras escuchar los comentarios de sus compañeros, este porcentaje de alumnos se dio cuenta que había medido la rosca del r., cuando no debía ser así, tal como se había mencionado en la Situación 1.

En cuanto a la noción de dominio, todos los estudiantes lograron reconocer y justificar que, un par ordenado superior a (10, 10) no podría pertenecer a la gráfica, debido a que la altura máx. del r. y el número permitido de vasos (volumen), sería inferior a cualquier otra medida.

En cuanto a continuidad se refiere, se puede decir que la mayoría (75%) de estudiantes logró hacer un bosquejo de la gráfica solicitada, con las coordenadas cartesianas arbitrarias que se dieron, tal como se aprecia en la figura que sigue:

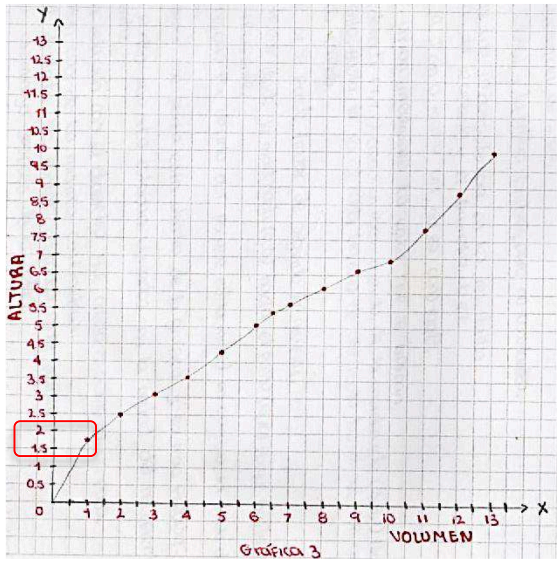


Figura 21. Respuesta frente a S2T2P5

Empero, cabe resaltar que inicialmente, algunos de ellos (25%) presentaron dificultades para ubicar, exactamente y con coherencia, los valores dados (tal como se muestra en la figura que sigue), en tanto, por un lado, no consideraron trazar la curva desde el origen (0,0), y por otro, para los volúmenes 9 y 10, ubicaron dos puntos a la misma altura (7 cm).

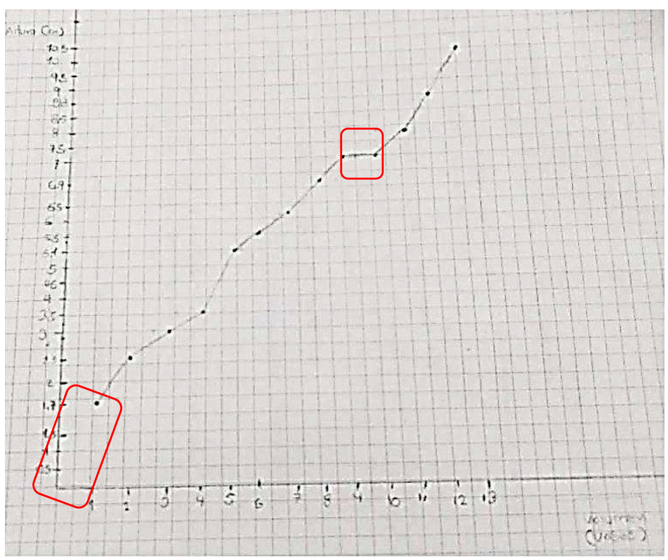


Figura 22. Respuesta frente a S2T2P5

En lo que tiene que ver con la monotonía de la curva, se puede afirmar que la mayoría (75%) de estudiantes logró lo esperado, pues, aunque en sus respuestas escritas no evidencian esto, sí lo hicieron durante la plenaria, expresando que “como todo el tiempo se está echando líquido, la gráfica no para (se detiene) en ningún momento”. Además, cuando se dio el espacio para que alguno de los estudiantes dibujara su gráfica en el tablero, este expresó que esa gráfica era creciente, porque siempre estaba subiendo.

Razonamiento Covariacional

De acuerdo con la Tabla 11, el 100% de los estudiantes se puede asociar con la Acción Mental 1 (AM1), debido a que lograron reconocer las magnitudes involucradas, a saber, volumen, AL, altura del r. y diámetro del mismo. Respecto a esto, es importante resaltar que inicialmente, algunos estudiantes insistían en escribir "altura", sin distinguir o especificar si se traba de AL o altura del r. Aunque tal acotación se realizó (nuevamente) de forma individual y en plenaria, los estudiantes manifestaron que preferían escribir de esa manera (para ser breves) y que sólo harían la distinción para altura del recipiente.

En cuanto a comportamiento de magnitudes, todos los estudiantes lograron reconocer que volumen, AL y diámetro son las magnitudes que varían, y altura del r. es la magnitud constante. Cabe resaltar que inicialmente, los estudiantes tuvieron dificultades para reconocer que el diámetro varía, pues, según ellos, análogamente como con la altura del r. en la situación anterior, en este caso el diámetro del frasco "no se agranda más", a medida que se echa líquido. Frente a aquella idea, en el momento de la plenaria, las observadoras-participantes realizaron algunas demostraciones (acciones) con el material manipulativo, que ayudaron a que los estudiantes comprendieran que el diámetro varía (en todo momento). Este hecho se puede constatar en la siguiente declaración de un estudiante (Diálogo 2):

> **Estudiante:** *Profe, lo que yo entiendo es que el diámetro es constante, o mejor dicho fijo, en el sentido que no se agranda más. Pero lo que se debe mirar, es que, de un pedazo a otro, el frasco cambia de ancho, y por eso se da lo que usted dice, de que el diámetro varía, porque es diferente en cada momento*

Argumentos como el anterior y respuestas como las que siguen, evidencia la AM1 por parte de los estudiantes:

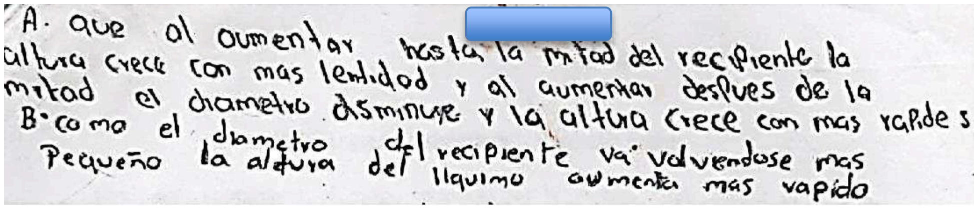
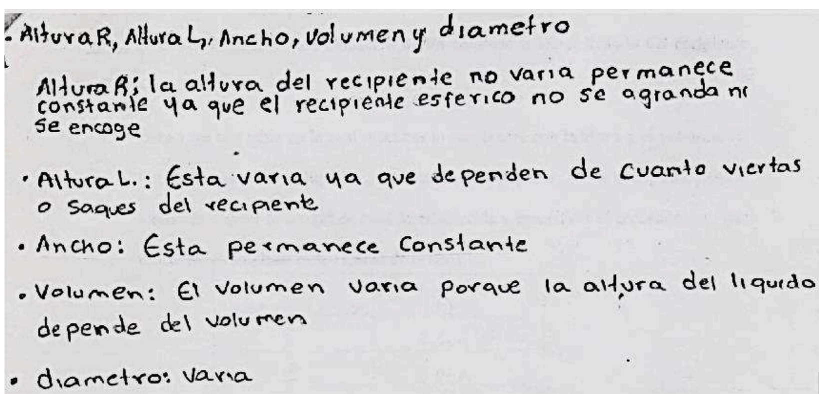

A· que al aumentar hasta la mitad del recipiente la
altura crece con mas lentidad y al aumentar despues de la
mitad el diametro disminuye y la altura crece con mas rapides
B· como el diametro del recipiente va volvendose mas
Pequeño la altura del liquimo aumenta mas vapido

Figura 23. Respuesta frente a S2T2P2

En lo que respecta a comportamientos asociados a AM2, el 100% de los estudiantes se puede asociar con esta Acción Mental, debido a que lograron reconocer que, si el volumen aumenta y/o disminuye, la AL se comporta de la misma manera, según corresponda. Cabe resaltar que inicialmente, el 50% de estudiantes argumentó que la dependencia entre volumen y AL, se debía a que “son directamente proporcionales”. Como se recordará, este mismo término fue utilizado por algunos estudiantes en la situación anterior, y pese a que en la intervención se sugirió no atribuir o utilizar dicha expresión (debido a que seguían sin poder explicarla), este grupo de alumnos persistió en usarla en este momento de la Situación 2. Respuestas como las que siguen, evidencian la AM2 por parte de los estudiantes:


- AlturaR, AlturaL, Ancho, volumen y diametro

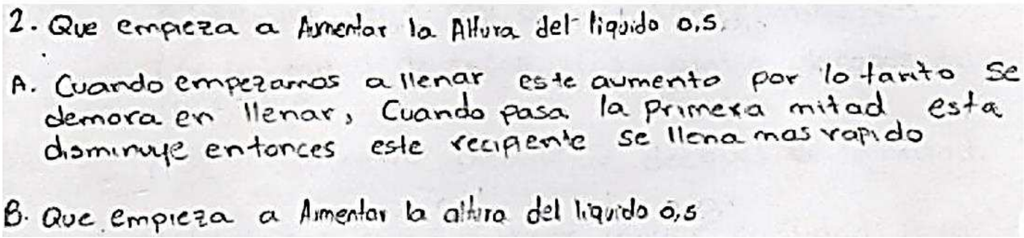
AlturaR: la altura del recipiente no varia permanece constante ya que el recipiente esferico no se agranda ni se encoge

- AlturaL.: Esta varia ya que dependen de cuanto viertas o saques del recipiente
- Ancho: Esta permanece Constante
- Volumen: El volumen varia porque la altura del liquido depende del volumen
- diametro: varia

Figura 24. Respuestas frente a S2T1P1

Es notorio el hecho de que algunos estudiantes (25%), añadieron a su respuesta escrita, que la AL también depende del diámetro; aunque lo anterior no es del todo válido, pues la cantidad de cambio en la AL es aquello que depende del diámetro, revela un acercamiento importante por parte de los estudiantes, a ideas (nociones) que indicarían una posible asociación a AM3, al dar cuenta que el diámetro incide (cuantitativamente) en la AL.

Respecto a la cantidad de cambio de las magnitudes en cuestión, sólo la mitad de estudiantes se puede asociar con la Acción Mental 3 (AM3), debido a que dan cuenta que al añadir o quitar una UL, la AL aumentaba o disminuía en diferentes cantidades, según correspondiera: por ejemplo, para diámetros grandes, la AL cambiaba en 0.2 cm o 0.3 cm, mientras que, para diámetros pequeños, la AL cambiaba en 0.5 cm o 0.6 cm. La figura que sigue evidencia la AM3 por parte de los estudiantes:


2. Que empieza a Aumentar la Altura del liquido 0,5.

A. Cuando empezamos a llenar este aumento por lo tanto se demora en llenar, Cuando pasa la primera mitad esta disminuye entonces este recipiente se llena mas rapido

B. Que empieza a Aumentar la altura del liquido 0,5

Figura 25. Respuestas frente a S2T2P2

Frente a esta Acción Mental 3, es importante considerar dos aspectos frente a las respuestas dadas por los estudiantes: 1) comprensión sobre AL para volúmenes arbitrarios (no enteros) y2) comprensión de diferentes 'patrones de variación' en la AL (ya fuese para la primera o segunda mitad del recipiente). Luego, la evidencia de AM3 por parte de los estudiantes, debía atender a estos dos aspectos, en tanto están relacionados con la *verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio*.

Así, en cuanto lo primero, se puede afirmar que la mitad de los alumnos lo logró, pues reconocen y dan cuenta del procedimiento para hallar la AL en volúmenes arbitrarios, sin regla. Lo anterior se puede apreciar en el siguiente diálogo, que tuvo lugar durante el trabajo de parejas (Diálogo 3):

Profesor: ¿Cómo calculaste la AL para el volumen 1,5?

Estudiante: Profe, como 1.5 significa un vaso y medio, calculé la mitad entre las AL para 1 vaso y 2 vasos, y eso me dio 0.05 cm, porque para 1 vaso me había dado 0.2 cm y para 2 vasos me dio 0.3 cm; entonces, la mitad de eso es 0.05.

Profesor: *¿Y eso ocurre siempre? ¿La mitad entre cualesquiera dos volúmenes es 0,05?*

Estudiante: *No, para eso hay que ver si de una casilla a otra, cambió lo mismo. En este caso, es 0.1 cm, y entonces la mitad es 0,05 cm. Pero luego me fijo en que el frasco se anchó, entonces le bajo un poquito a esa cantidad, así: 1 + 0.03 = 1,03. Aquí le bajé 0.02 porque el diámetro anchó.*

Es importante resaltar que, para llegar a estos resultados, aquellos estudiantes (50%) solicitaron que se les dejara usar calculadora, pues casi no sabían dividir ese tipo de números (decimales). Empero, cuando aquellos estudiantes compartieron este procedimiento con sus compañeros, el grupo casi no comprendió este procedimiento. Argumentos como el anterior, y respuestas como las que siguen, evidencian la AM3 por parte de los estudiantes:

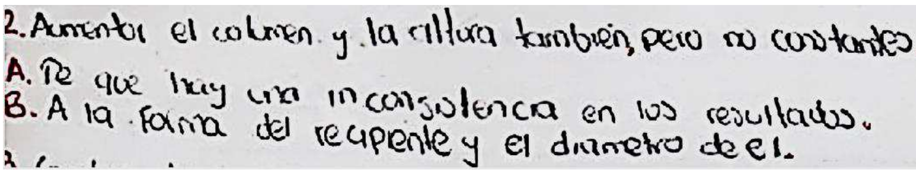

2. Aumenta el volmen y la altura tambien, pero no constantes.
A. De que hay una inconsistencia en los resultados.
B. A la forma del recipente y el diametro de el.

Figura 26. Respuestas frente a S2T2P2

El 50% restante de alumnos, realizó un procedimiento erróneo, pues consideraron que el incremento o cambio en la AL, se asemejaba un poco al lineal (como ocurrió en la situación anterior), pues respondieron, por ejemplo, que para volumen 1.5, la AL "1 cm más la mitad", lo cual es incorrecto. La figura que sigue, es un ejemplo de esta dificultad:

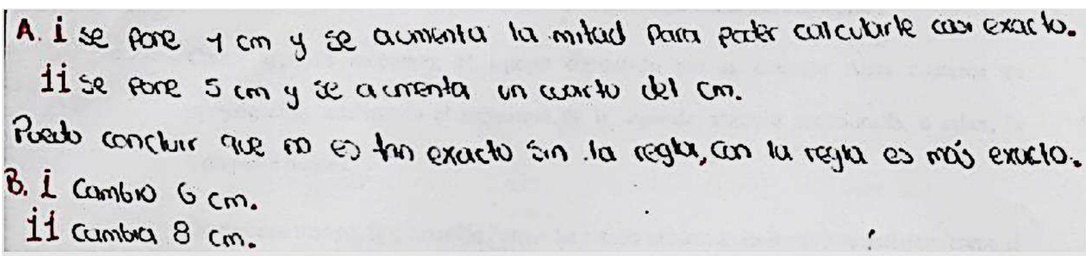
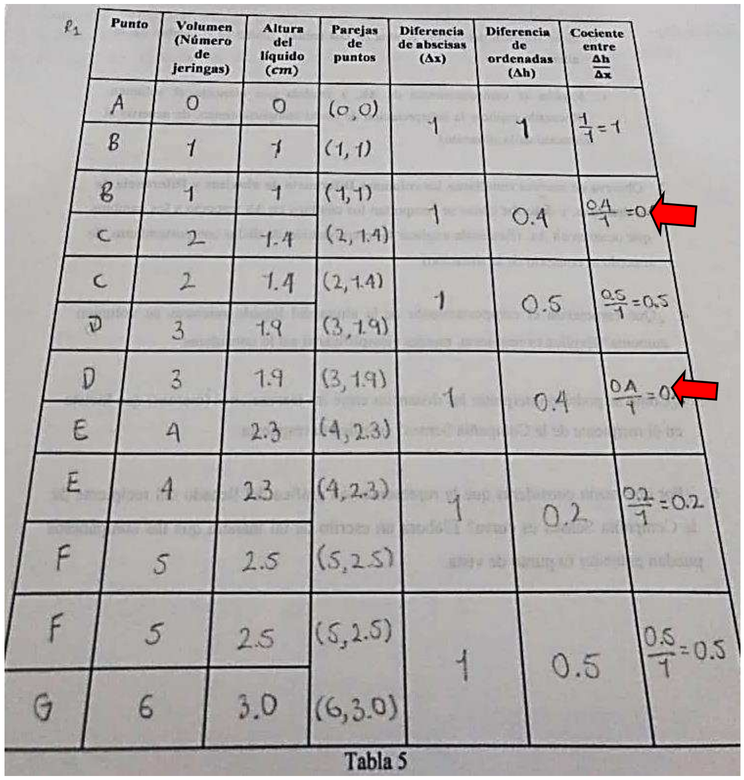

A. i se pone 1 cm y se aumenta la mitad para poder calcularle casi exacto.
ii se pone 5 cm y se aumenta un cuarto del cm.
Puedo concluir que no es tan exacto sin la regla, con la regla es más exacto.
B. i Cambio 6 cm.
ii Cambia 8 cm.

Figura 27. Respuestas frente a S2T2P1A

Por su parte, sobre el segundo aspecto ('patrones de variación'), los estudiantes tuvieron dificultades para comprender que 'los patrones encontrados en la primera mitad del recipiente, eran los mismos (en orden inverso), para la segunda mitad del recipiente. Es decir, no lograron relacionar, por ejemplo, que 'el patrón de variación para el volumen 2, era el mismo que para el volumen 8'. Respuesta como la que sigue, evidencia este tipo de acercamiento:



P1

Punto	Volumen (Número de jeringas)	Altura del líquido (cm)	Parejas de puntos	Diferencia de abscisas (Δx)	Diferencia de ordenadas (Δh)	Cociente entre $\frac{\Delta h}{\Delta x}$
A	0	0	(0,0)	1	1	$\frac{1}{1}=1$
B	1	1	(1,1)			
B	1	1	(1,1)	1	0.4	$\frac{0.4}{1}=0$
C	2	1.4	(2,1.4)			
C	2	1.4	(2,1.4)	1	0.5	$\frac{0.5}{1}=0.5$
D	3	1.9	(3,1.9)			
D	3	1.9	(3,1.9)	1	0.4	$\frac{0.4}{1}=0$
E	4	2.3	(4,2.3)			
E	4	2.3	(4,2.3)	1	0.2	$\frac{0.2}{1}=0.2$
F	5	2.5	(5,2.5)			
F	5	2.5	(5,2.5)	1	0.5	$\frac{0.5}{1}=0.5$
G	6	3.0	(6,3.0)			

Tabla 5

Figura 28. Respuestas frente a S2T3P1

En lo que respecta a la razón de cambio, se observó que sólo algunos (25%) de los estudiantes reportaron comportamientos asociados a AM4, en tanto este grupo logró, parcialmente, reconocer que la razón de cambio que describía el comportamiento del llenado del r. esférico, no era única (constate o uniforme), es decir, esta es diferente en cada momento del llenado (hasta llegar a la mitad del r., pues a partir de ahí, ocurre lo expuesto en el párrafo anterior).

Empero a estas dificultades, el grupo en general, llegó a decir que “la razón de cambio es variable”, expresión que da cuenta del reconocimiento que tuvieron (alcanzaron), sobre que para este r., la razón de cambio no es uniforme (como lo fue en la situación anterior, que era 1 a 1).

Después de todo lo anterior, se puede afirmar que un poco más de la mitad de los estudiantes reportaron comportamientos asociados a los de la Acción Mental 4 (AM4), en tanto evidenciaron comportamientos sobre coordinar el valor de una variable con los cambios en la otra (AM1), dirección del cambio (AM2), coordinación de la cantidad de cambio (AM3) y verbalización de la razón de cambio promedio. Luego, respecto a esta Situación 2 (r. esférico), se puede sostener que los estudiantes, en las preguntas S1T1P1, 2, S1T2P2, 3,4 y S1T3P1, 2, lograron manifestar comportamientos de las acciones mentales que sustentan el Nivel 4 de Razonamiento Covariacional.

Graficación Covariacional

Como ya se dijo, para esta variable de análisis, se deben tener en cuenta dos aspectos: cómo dieron cuenta los estudiantes de las *preguntas base* de Dolores y Salgado (2009), con preguntas que no correspondían a la r. gráfica, y con aquellas que sí se relacionaban directamente con este registro o representación (ya fuese en la construcción o en la interpretación de la misma).

Así pues, en cuanto a las cinco *preguntas base* de la Graficación Covariacional (preguntas que no corresponden a la r. gráfica), en la siguiente tabla se aprecia lo encontrado:

Tabla 13. Alcance de las preguntas base (antes de r. gráfica) en S2

PREGUNTAS BASE	CÓMO DIERON CUENTA
¿Qué cambia?	Todos los estudiantes lograron dar cuenta que las magnitudes involucradas eran volumen (V), AL (V), diámetro del recipiente (V) y altura del mismo (C).
¿Cómo cambia?	Todos los estudiantes lograron reconocer que, si el volumen aumentaba y/o disminuía, la AL también se comportaba de esa manera (aumentando y/o disminuyendo), según corresponda.
¿Cuánto cambia?	La mitad de los estudiantes logró reconocer que al añadir o quitar una UL, la AL aumentaba o disminuía en diferentes cantidades (patrones de variación), según la parte del r. esférico en la que se encuentre (el líquido).
¿A qué razón cambia?	La mitad de los estudiantes logró reconocer que la razón de cambio en el llenado del r. esférico es diferente para cada momento, debido a que el diámetro de este, iba cambiando.
¿Cómo se comporta globalmente la gráfica?	Todos los estudiantes dieron cuenta que la r. gráfica para el llenado del r. esférico era una curva desde (0,0) hasta (10,10), porque el comportamiento del llenado de este r. fue diferente para cada momento, debido al diámetro del r.

Finalmente, respecto a cómo los estudiantes dieron cuenta de las cinco *preguntas base*, frente a preguntas relacionadas (directamente) con la r. gráfica, se puede afirmar que la mayoría (75%) de estudiantes dieron cuenta de 4 de ellas (Qué, Cómo, Cuánto y Cómo se comporta), de la siguiente manera:

- *¿Qué cambia?*, cuando en sus r. gráficas, consideraban y/o escribían en los respectivos ejes coordenados (x e y), los términos “volumen o cantidad de vasos” y “altura del líquido”, como se aprecia en la siguiente figura:

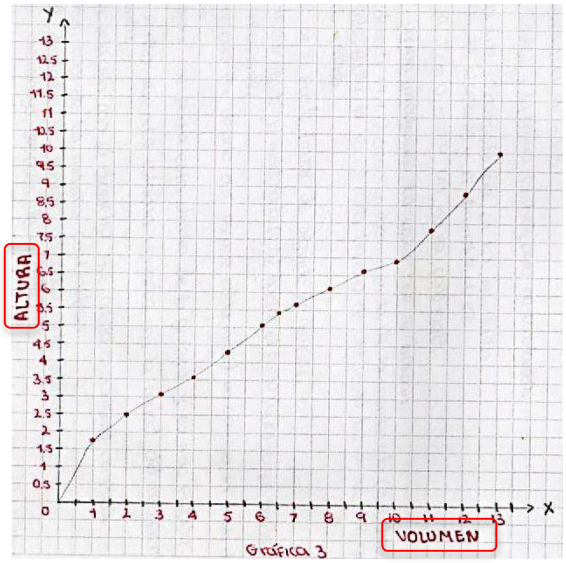


Figura 29. Respuesta frente a ¿Qué cambia? en S2

- *¿Cómo cambia?*, al reconocer que, así como crece (aumenta) el volumen (y, por tanto, debían desplazarse hasta la derecha sobre el eje x), también lo hace la AL (y, por tanto, debían desplazarse hacia arriba sobre el eje y).

- *¿Cuánto cambia?*, cuando bosquejaron o construyeron su r. gráfica, considerando que, al avanzar, por ejemplo, una unidad sobre el eje x (volumen), debían avanzar una pequeña parte (0.2) de unidad sobre el eje y (altura del líquido), lo cual se evidencia en la siguiente figura:

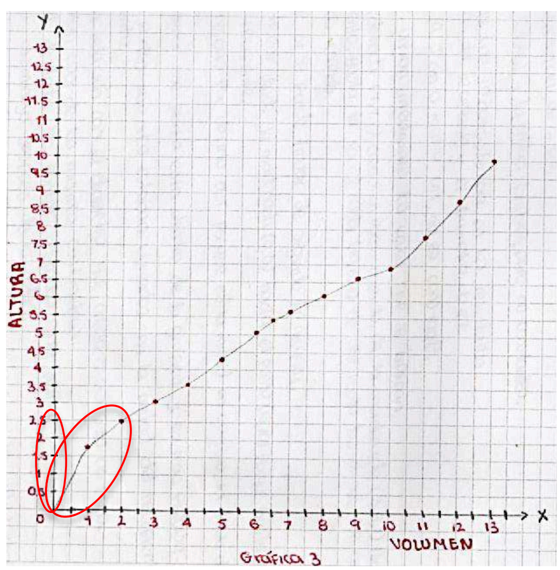


Figura 30. Respuesta frente a ¿Cuánto cambia? en S2

- *¿Cómo se comporta globalmente la gráfica?*, dieron cuenta de ello al trazar una curva desde (0,0) hasta (10,10), e interpretando que esto se debía, por un lado, a que “si no se echa líquido, no puede haber AL”, y por otro, que la gráfica no podía pasar del último punto coordenado (10, 10), porque a partir de este “el líquido se empezaría a regar”. La comprensión sobre la acotación de la r. gráfica, por parte de los estudiantes, se puede observar en la siguiente figura:

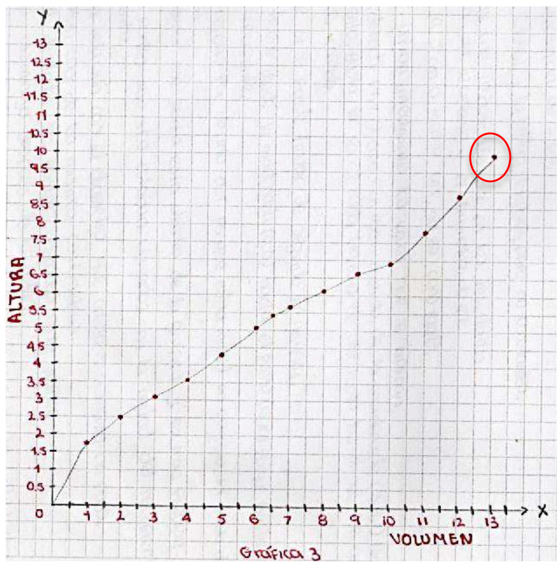


Figura 31. Respuesta frente a ¿Cómo se comporta globalmente la gráfica? en S2

Respecto a *¿A qué razón cambia?*, se debe afirmar que ninguno de los estudiantes logró reconocer, a partir de la gráfica, que la razón de cambio era diferente para cada momento (por cada cambio de una unidad en el volumen, podía ocurrir un cambio de 0.2 cm o.3 cm).

Propósitos de las Tareas y de la Situación 2

La *Tarea 1* tenía como propósito que los estudiantes refuercen las ideas o conocimientos ganados en la Situación 1, sobre el comportamiento de las magnitudes involucradas en el llenado del r. esférico. De acuerdo con lo anterior, se puede afirmar que el propósito de esta tarea se cumplió, puesto que los estudiantes lograron manifestar que el volumen, AL, diámetro y altura del r., eran las magnitudes involucradas en el llenado de este r. esférico. Este cumplimiento también se ve reflejado en el hecho de que los estudiantes lograron reconocer que el volumen, AL y diámetro, eran las magnitudes que cambiaban, mientras que la altura del r. era la única magnitud constante.

Se puede decir que el propósito de la Tarea 2 (cuantificar los cambios del volumen y la AL, y reconocer continuidad) se cumplió, parcialmente, puesto que sólo la mitad de los estudiantes logró manifestar que cuando el volumen aumentaba y/o disminuía en una unidad, la AL se comportaba de distintas maneras (cambios o 'patrones de variación' no uniformes), debido a que el diámetro del r. cambiaba en todo momento. La confirmación de este acercamiento queda evidenciada con respuestas a preguntas como P2, P3 y P4 y diálogos particulares, en los cuales los estudiantes dieron cuenta de su comprensión sobre que *si se aumentaba y/o disminuía el volumen (en 1 vaso), la AL cambiaba en diferentes maneras (cantidades), según la parte del r. en la que se encontrara (el líquido).*

Respecto al propósito de la *Tarea 3* (reconocer la razón de cambio para el r. esférico), se puede afirmar que se cumplió parcialmente, puesto que sólo la mitad de los estudiantes logró dar cuenta que la razón de cambio que describía el comportamiento del llenado del r. esférico, era diferente para cada momento (no uniforme), debido a la forma misma del r. (el diámetro cambiaba en todo momento).

Es notoria la respuesta que ofrecieron algunos estudiantes frente a preguntas específicas sobre razón de cambio, pues expresaron que "por la forma de la primera mitad de la gráfica, se nota quela AL aumentaba poco, y en la segunda mitad, que la AL aumentaba más rápido".

Con base en todo lo anterior, se puede afirmar que el propósito de la Situación 2 se cumplió parcialmente, debido a que los propósitos de las dos últimas tareas tuvieron bajo alcance (cumplimiento). Es decir, para este momento de la Propuesta de Aula, la mayoría de los estudiantes sólo logró comprender *Qué cambiaba*, *Cómo cambiaba*, *Cuánto cambiaba* y *A qué razón cambiaba* (éstas últimas, parcialmente), evidenciando dificultades para dar cuenta de lo relacionado, especialmente, con razón de cambio.

3.4.3 RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN 3

Tabla 14. Tipos de respuestas Elementos Matemáticos de la S3T1, T2, T3

ELEMENTOS MATEMÁTICOS	TIPO DE RESPUESTA	DESCRIPCIÓN	%
REPRESENTACIONES USADAS	**R1**	Estudiantes que completan adecuadamente el RT relacionado con el llenado del r. mixto, ubicando UL (n. jeringas) en la primera columna, y AL, en la segunda. Se requieren 31 UL para llenar todo el recipiente. Su r. gráfica es una curva en la que se evidencia que los cambios en la AL no son constantes; marcan los correspondientes cambios de concavidades.	**25%**
	R2	Estudiantes que completan adecuadamente el RT relacionado con el llenado del r. mixto, ubicando UL (n. jeringas) en la primera columna, y AL, en la segunda. Se requieren 31 UL para llenar todo el recipiente. Su r. gráfica es una curva, pero los pares ordenados que ubican no son tan precisos, razón por la cual no se marcan u observan, los correspondientes cambios de concavidades.	**25%**
	R3	Estudiantes que ubican AL en la primera columna, y UL (n. jeringas) en la segunda. Para algunos, se requieren 32 UL para llenar todo el recipiente, y para otros, sólo 15 UL. Su r. gráfica es incorrecta, pues realizan una gráfica lineal. Además, inician en (1,2.5) y no en (0,0).	**25%**
	R4	Estudiantes que ubican AL en la primera columna, y UL (n. jeringas) en la segunda. Para algunos, se requieren 32 UL para llenar todo el recipiente, y para otros, sólo 15 UL. No realizan la r. gráfica solicitada.	**25%**
DOMINIO Y RANGO	**R1**	Estudiantes que indican que la AL sí puede alcanzar 16 cm, justificando que se debe a que el recipiente mide 20 cm. Señalan que la gráfica se puede trazar desde (0,0) hasta (30,20).	**25%**
	R2	Estudiantes que indican que la AL sí puede alcanzar 16 cm, justificando que al medir el r. mixto con la regla, este alcanza una altura de 20 cm. No explicitan que la altura solicitada, es inferior a la altura del recipiente. Señalan que la gráfica se puede trazar desde (0,0) hasta (30,20).	**25%**
	R3	Estudiantes que indican que la AL sí puede alcanzar 16 cm, justificando que la altura del r. mixto es 21 cm. Tomaron en cuenta (miden) la base del r. (1 cm), lo cual no se debía hacer. Señalan que la gráfica se puede trazar desde (0,0) hasta (30, 20).	**50%**
CONTINUIDAD	**R1**	Estudiantes que indican que para 1.5 UL, la AL es 1 UL más $\frac{1}{2}$ cm; y para 5.25 UL, la AL es 5 UL más $\frac{1}{4}$ cm. Respuesta errónea, pues el comportamiento del llenado del r. mixto no es lineal.	**75%**
	R2	Estudiantes que indican que para 1.5 UL, la AL es 1 UL más 0.5 cm; y para 5.25 UL, la AL es 5 y $\frac{1}{4}$ cm. Respuesta errónea, pues el comportamiento del llenado del r. mixto no es lineal.	**25%**
MONOTONÍA DE LA CURVA	**R1**	Estudiantes que señalan que la gráfica se puede trazar desde (0,0) hasta (30, 20).	**25%**
	R2	Estudiantes que señalan que la gráfica se puede trazar desde (0,0) hasta (30, 20).	**25%**

	R3	Estudiantes que señalan que la gráfica se puede trazar desde (0,0) hasta (30, 20).	**25%**
	R4	Estudiantes que señalan que la gráfica se puede trazar desde (0,0) hasta (30, 20).	**25%**

Tabla 15. Tipos de respuestas Razonamiento Covariacional de la S3T1, T2, T3

RAZONAMIENTO COVARIACIONAL	TIPO DE RESPUESTA	DESCRIPCIÓN	%
ACCIÓN MENTAL 1 (AM1)	**R1**	Estudiantes que se refieren a algunas magnitudes, como, por ejemplo: la altura, el volumen y el ancho, sin especificar si se trata del recipiente o del líquido. Indican que: Volumen (V), y diámetro y altura del r. (C). Además, señalan 'ancho' y 'diámetro del r.', como magnitudes distintas.	**25%**
	R2	Estudiantes que se refieren a algunas magnitudes, como, por ejemplo, volumen y AL. Indican que: Volumen (V) y AL (C). No consideraron o explicitaron, altura y diámetro del recipiente.	**25%**
	R3	Estudiantes que se refieren a todas las magnitudes involucradas, pero no explican cómo es el comportamiento de ellas: V o C.	**25%**
	R4	Estudiantes que sólo se refieren a la magnitud volumen; no consideran la AL ni la altura del r. No explican cómo es el comportamiento del volumen.	**25%**
ACCIÓN MENTAL 2 (AM2)	**R1**	Expresan que cuando el diámetro aumenta, la AL 'aumenta un poquito', mientras que cuando disminuye, la AL 'aumenta mayormente. Señalan que, si el volumen aumenta y/o disminuye, la AL también lo hace (según corresponda), puesto que es directamente proporcional.	**25%**
	R2	Expresan que como la parte de abajo (primera) del r. tiene un 'diámetro mayor' que, en el resto del recipiente, el volumen 'crece lento'. Pese a ello, su justificación no es válida ni del todo clara. Señalan que cuando el volumen aumenta y/o disminuye, la AL también lo hace, y viceversa. Expresan que al inicio del r., 'el volumen aumenta lento', mientras que en el resto del r., 'aumenta de seguido'.	**25%**
	R3	Expresan que como la parte de abajo (primera) del r. tiene un 'diámetro mayor' que, en el resto del recipiente, el volumen 'crece lento'. Pese a ello, su justificación no es válida ni del todo clara. Señalan que cuando el volumen aumenta y/o disminuye, la AL también lo hace, y viceversa. Expresan que al inicio del r., 'el volumen aumenta lento', mientras que en el resto del r., 'aumenta de seguido'. No responden lo solicitado (directamente), empero detallan los cambios en el diámetro del r., señalando que el diámetro no cambia.	**25%**
	R4	No explican cómo es el comportamiento del volumen. Señalan que como el volumen y AL son proporcionales, si una aumenta, la otra también, y viceversa.	**25%**
	R1	Estudiantes que no indicaron cuánto cambió la AL en los momentos solicitados, pero explicitan cuál fue la AL final, para cada momento. Expresan que la particularidad de esos momentos es que 'el recipiente se llena más rápido'; argumentan que dicho comportamiento se debe a que la segunda parte del r. mixto, es más delgado. Indican que a medida que se agregan UL, la AL cambia de dos formas, dependiendo de la parte del r. a la que se refiera. Justifican que se debe a que el diámetro del r. aumenta y disminuye. "La AL cambia variablemente".	**25%**

	R2	Estudiantes que no indicaron cuánto cambió la AL en los momentos solicitados, pero explicitan cuál fue la AL final, para cada momento. Indican que a medida que se agregan UL, la AL cambia de dos formas, dependiendo de la parte del r. a la que se refiera. Justifican que se debe a que el diámetro del r. aumenta y disminuye. "La AL cambia variablemente". Expresan que no encontraron ninguna particularidad entre volumen y AL. Interpretaron lo anterior como una comparación entre dichas magnitudes, cuando debía ser individualmente. Señalan que la AL aumenta más rápido, debido a que el diámetro, en dicha parte del r. disminuye.	**25%**
	R3	Indican que a medida que se agregan UL, la AL cambia de dos formas, dependiendo de la parte del r. a la que se refiera. Justifican que se debe a que el diámetro del r. aumenta y disminuye. "La AL cambia variablemente". Expresan que no encontraron ninguna particularidad entre volumen y AL. Interpretaron lo anterior como una comparación entre dichas magnitudes, cuando debía ser individualmente. Señalan que la AL aumenta más rápido, debido a que el diámetro, en dicha parte del r. disminuye.	**25%**
ACCIÓN MENTAL 3 (AM3)		No indican cuánto cambió la AL para los dos momentos solicitados; responden con las mismas medidas reportadas en la Tabla 5[33].	
	R4	No indican cuánto cambió la AL para los dos momentos solicitados; responden con las mismas medidas reportadas en la Tabla 5 Expresan que no encontraron ninguna particularidad entre volumen y AL. Señalan que cuando el diámetro del r. (en la segunda mitad de este), AL aumenta, pero no explican cómo ocurre esto. Indican que para el primer tercio del r., a medida que se agregan UL, la AL no aumenta constantemente, y que en otra parte del r. (último tercio), sí: aumento constante de la AL.	**25%**
	R1	Respecto a P2, sobre cuál es la razón de cambio entre AL y volumen, no responden numéricamente, pero indican que la razón de cambio varía, debido al diámetro del r. Indican que cuando el volumen cambia en una unidad, la AL cambia en distintas formas (cantidades). En ciertos momentos aumenta 0.4 cm, y en otros, 0.5 cm. Expresan que el comportamiento (cantidad de cambio) de la AL es variable, mientras que el del volumen es constante (cantidad de cambio).	**50%**
	R2	Respecto a P2, sobre cuál es la razón de cambio entre AL y volumen, no responden numéricamente, pero indican que la razón de cambio es variable, y que después del punto DC hay un patrón, sin explicitar cuál es. Indican que cuando el volumen cambia en una unidad, la AL varía (sin explicitar cuánto), dependiendo del diámetro del r. Expresan que el comportamiento (cantidad de cambio) de la AL es variable, sin decir nada sobre el volumen.	**25%**
ACCIÓN MENTAL 4 (AM4)	**R3**	Estudiantes que no responden lo solicitado sobre razón de cambio, pero escriben que el diámetro del r., es quien influye en el llenado del mismo. Indican que cuando el volumen cambia en una unidad, la AL seguiría variable, porque la única (magnitud) constante es el volumen. Expresan que lo que caracteriza el comportamiento de AL, sin importar el volumen, es el diámetro del recipiente.	**25%**

[33] Correspondiente a la Propuesta de Aula.

Tabla 16. Tipos de respuestas Graficación Covariacional de la S3T1, T2, T3

GRAFICACIÓN COVARIACIONAL	TIPO DE RESPUESTA	DESCRIPCIÓN	%
ACCIONES QUE MANIFIESTAN LA PREGUNTA BASE *¿QUÉ CAMBIA?*	**R1**	Estudiantes que se refieren a algunas magnitudes, como, por ejemplo: la altura, el volumen y el ancho, sin especificar si se trata del recipiente o del líquido. Indican que: Volumen (V), y diámetro y altura del r. (C). Además, señalan 'ancho' y 'diámetro del r.', como magnitudes distintas.	**25%**
	R2	Estudiantes que se refieren a algunas magnitudes, como, por ejemplo, volumen y AL. Indican que: Volumen (V) y AL (C). No consideraron o explicitaron, altura y diámetro del recipiente.	**25%**
	R3	Estudiantes que se refieren a todas las magnitudes involucradas, pero no explican cómo es el comportamiento de ellas: V o C.	**25%**
	R4	Estudiantes que sólo se refieren a la magnitud volumen; no consideran la AL ni la altura del r. No explican cómo es el comportamiento del volumen.	**25%**
ACCIONES QUE MANIFIESTAN LA PREGUNTA BASE *¿CÓMO CAMBIA?*	**R1**	Expresan que cuando el diámetro aumenta, la AL 'aumenta un poquito', mientras que cuando disminuye, la AL 'aumenta mayormente'. Señalan que, si el volumen aumenta y/o disminuye, la AL también lo hace (según corresponda), puesto que es directamente proporcional.	**25%**
	R2	Expresan que como la parte de abajo (primera) del r. tiene un 'diámetro mayor' que, en el resto del recipiente, el volumen 'crece lento'. Pese a ello, su justificación no es válida ni del todo clara. Señalan que cuando el volumen aumenta y/o disminuye, la AL también lo hace, y viceversa. Expresan que al inicio del r., 'el volumen aumenta lento', mientras que en el resto del r., 'aumenta de seguido'.	**25%**
	R3	Expresan que como la parte de abajo (primera) del r. tiene un 'diámetro mayor' que, en el resto del recipiente, el volumen 'crece lento'. Pese a ello, su justificación no es válida ni del todo clara. Señalan que cuando el volumen aumenta y/o disminuye, la AL también lo hace, y viceversa. Expresan que al inicio del r., 'el volumen aumenta lento', mientras que en el resto del r., 'aumenta de seguido'. No responden lo solicitado (directamente), empero detallan los cambios en el diámetro del r., señalando que el diámetro no cambia.	**25%**
	R4	No explican cómo es el comportamiento del volumen. Señalan que como el volumen y AL son proporcionales, si una aumenta, la otra también, y viceversa.	**25%**
ACCIONES QUE MANIFIESTAN LA PREGUNTA BASE *¿CUÁNTO CAMBIA?*	**R1**	Indican que a medida que se agregan UL, la AL cambia de dos formas, dependiendo de la parte del r. a la que se refiera. Justifican que se debe a que el diámetro del r. aumenta y disminuye. "La AL cambia variablemente".	**25%**
	R2	Señalan que la AL aumenta más rápido, debido a que el diámetro, en dicha parte del r. disminuye.	**25%**
	R3	No indican cuánto cambió la AL para los dos momentos solicitados; responden con las mismas medidas reportadas en la Tabla 5[34].	**25%**

[34] Correspondiente a la Propuesta de Aula.

	R4	Indican que para el primer tercio del r., a medida que se agregan UL, la AL no aumenta constantemente, y que en otra parte del r. (último tercio), sí: aumento constante de la AL.	**25%**
	R1	Respecto a P2, sobre cuál es la razón de cambio entre AL y volumen, no responden numéricamente, pero indican que la razón de cambio varía, debido al diámetro del r. Expresan que el comportamiento (cantidad de cambio) de la AL es variable, mientras que el volumen es constante (cantidad de cambio).	**25%**
ACCIONES QUE MANIFIESTAN LA PREGUNTA BASE *¿A QUÉ RAZÓN CAMBIA?*	**R2**	Respecto a P2, sobre cuál es la razón de cambio entre AL y volumen, no responden numéricamente, pero indican que la razón de cambio es variable, y que después del punto DC hay un patrón, sin explicitar cuál es.	**25%**
	R3	Respecto a P2, sobre cuál es la razón de cambio entre AL y volumen, no responden numéricamente, pero escriben que el diámetro del r. es quien influye en el llenado del mismo.	**25%**
	R1	Su r. gráfica es una curva en la que se evidencia que los cambios en la AL no son constantes; marcan los correspondientes cambios de concavidades. Indican que los puntos coordenados de la primera mitad de la gráfica son más cercanos, debido al diámetro del r., pues este aumenta (a partir de la mitad del r.) Expresan que los puntos coordenados de la segunda mitad de la gráfica parecen colineales, debido al diámetro del r., porque este disminuye y, por tanto, la AL aumenta rápido.	**25%**
ACCIONES QUE MANIFIESTAN LA PREGUNTA BASE *¿CÓMO SE COMPORTA GLOBALMENTE LA GRÁFICA?*	**R2**	Su r. gráfica es una curva en la que se evidencia que los cambios en la AL no son constantes; marcan los correspondientes cambios de concavidades. Indican que los puntos coordenados de la primera mitad de la gráfica son más cercanos, debido al diámetro del r., pues este aumenta (a partir de la mitad del r.) Expresan que los puntos coordenados de la segunda mitad de la gráfica parecen colineales, debido al diámetro del r., porque este disminuye y, por tanto, la AL aumenta rápido.	**25%**
	R3	Su r. gráfica es incorrecta, pues realizan una gráfica lineal. Además, inician en (1,2.5) y no en (0,0). Indican que los puntos coordenados de la primera mitad de la gráfica son más cercanos, debido al diámetro del r., pues este aumenta (a partir de la mitad del r.) Expresan que los puntos coordenados de la segunda mitad de la gráfica parecen colineales, debido al diámetro del r., porque este disminuye y, por tanto, la AL aumenta rápido.	**25%**
	R4	No realizan la r. gráfica solicitada. Pese a que no presentan ninguna r. gráfica, argumentan que lo solicitado se debe al diámetro del r., pues este aumenta. Respecto a los puntos coordenados de la segunda mitad de la gráfica, argumentan que parecen colineales debido al diámetro, porque este disminuye y, por tanto, 'aumenta repetidamente'.	**25%**

Análisis general de la Situación 3

Elementos Matemáticos

Se puede afirmar que la mayoría (75%) de estudiantes logró, parcialmente, lo esperado, en tanto dieron cuenta de ciertos aspectos de las *representaciones usadas*, las nociones de *dominio* y *rango* presentes, acercamiento a comprender la *monotonía de la curva* y algunas ideas de *continuidad*.

Teniendo en cuenta lo expuesto en la Tabla 14, se puede observar, que inicialmente, sólo la mitad de los estudiantes manejó acertadamente el RT propuesto en cuanto al llenado del r. mixto, escribiendo, por ejemplo, que se requerían 31 UL (jeringas) para llenar todo el recipiente. Empero, tras una semi validación del RT que realizaron, en contraste con el RT esperado, todos los alumnos lograron comprender y rectificar, que se requería ese número (31) de UL, para llenar este r. mixto. Este tipo de avances se pudieron evidenciar en el siguiente diálogo entre estudiantes, ocurrido en la plenaria (Diálogo 4):

> ***Estudiante de Pareja 1:*** *A mí me dio hasta 15 jeringas*
> ***Estudiante de Pareja 2:*** *Uy:: no, ¿por qué? A mí me dio hasta 31 jeringas. 15 son muy poquitas, ¿cierto profe?*
> ***Profesor:*** *Sí, pero bueno, veamos qué es lo que pasa con cada cantidad de jeringas. ¿La jeringa se podía llenar hasta dónde quisieran?*
> ***Estudiante de Pareja 2:*** *No, hicimos dos casos, pero después acordamos que con 2 cm.*
> ***Estudiante de Pareja 1:*** *Ay:: no, nosotros la hicimos de más, a la mitad de la jeringa.*
> ***Estudiante de Pareja 2:*** *De razón, todos teníamos que llenar igual.*
> ***Estudiante de Pareja 1:*** *No::, por eso es que nos dio 15. Entonces nos toca cambiar*

Después de esta intervención, se solicitó a algunos estudiantes que compartieran su respuesta frente a cuántas UL necesitaron para llenar este nuevo r., con el fin de que quiénes habían dicho que se requerían 31 jeringas, se dieran cuenta que no debían incluir lo que medía la base del r. mixto, a saber, 1 cm.

Por otro lado, en cuanto a la r. gráfica, sólo la mitad de los estudiantes la hicieron, el resto no[35].Luego, aquellos que sí la hicieron, lograron realizar la gráfica (curva) esperada, considerando el primer trazo o fragmento desde el origen (0,0) y llegando hasta (30,20), tal como se muestra en la siguiente figura:

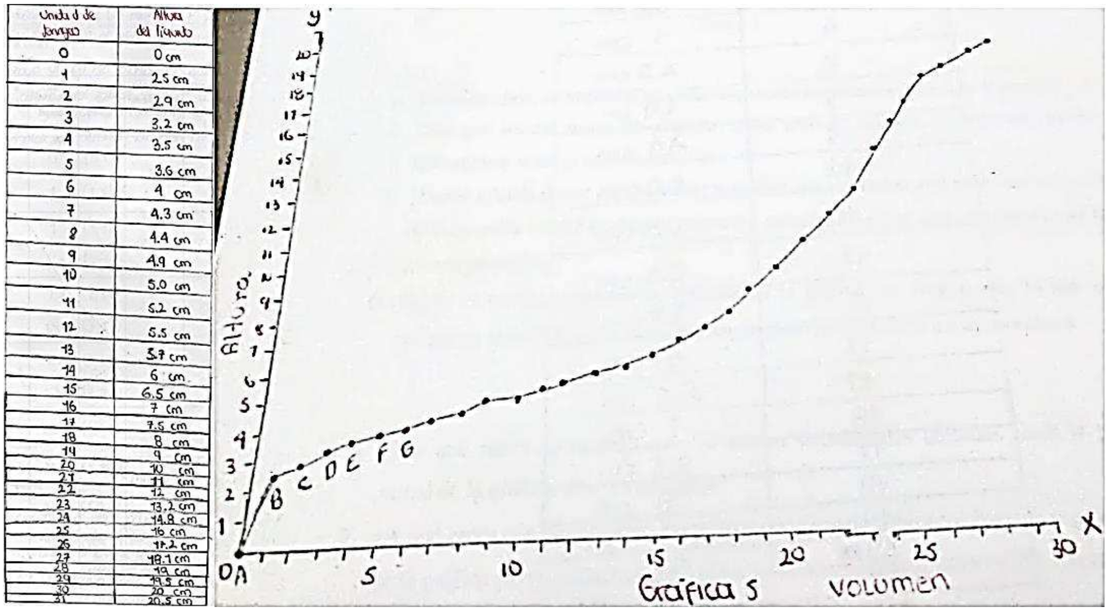


Figura 32. Respuestas frente a S3T2P1, P5

Cabe resaltar que aún después de haber hecho énfasis en lo que significa el par ordenado (0,0) en las dos situaciones anteriores, en sus respuestas escritas, algunos estudiantes (25%) persistieron en iniciar su gráfica en un punto diferente al origen (esperado).Más adelante, en la plenaria, se dieron cuenta de este aspecto y rectificaron su respuesta.

Referente al reconocimiento u apropiación del dominio y rango para el llenado del r. mixto, se obtuvo que:

El 100% de los estudiantes logró reconocer la noción de rango en esta situación sobre el llenado del r. mixto, en tanto expresaron que la AL sí puede alcanzar 16 cm, debido a que la altura del r. es mayor a esa medida (el r. medía 20 cm), tal como se aprecia en la siguiente figura:

[35]Es importante resaltar que, a pesar de esto, ese grupo de estudiantes participó en todas las discusiones posteriores, haciendo uso de la r. gráfica de algunos de sus compañeros y contrastando con la gráfica, que, según ellos, tenían en su mente (imaginación).

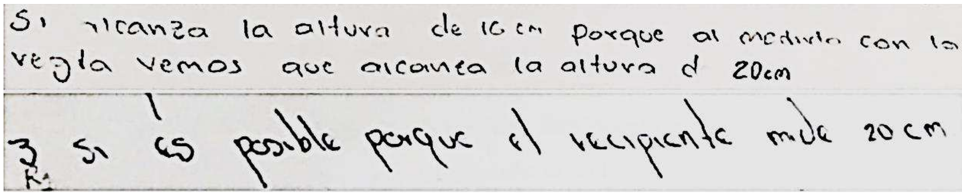


Figura 33. Respuestas frente a S3T1P3

La dificultad para que los estudiantes llegaran a la respuesta exacta y/o correcta respecto a la altura del r., radicó en que este nuevo r. contaba con una base (significativa), que medía 1 cm, pero la cual no debía considerarse al momento de medir la altura del r. mixto, pues en dicha base no entraba el líquido.

En cuanto a la noción de dominio, todos los estudiantes lograron reconocer y justificar que, un par ordenado superior a (30, 20) no podría pertenecer a la gráfica, debido a que la altura máx. del r. y el número permitido de jeringas (volumen), sería inferior a cualquier otra medida.

En cuanto a continuidad se refiere, se puede decir que la mitad de los estudiantes[36] logró hacer un bosquejo de la gráfica solicitada, con las coordenadas cartesianas arbitrarias que habían resultado del RT, tal como se aprecia en la figura que sigue:

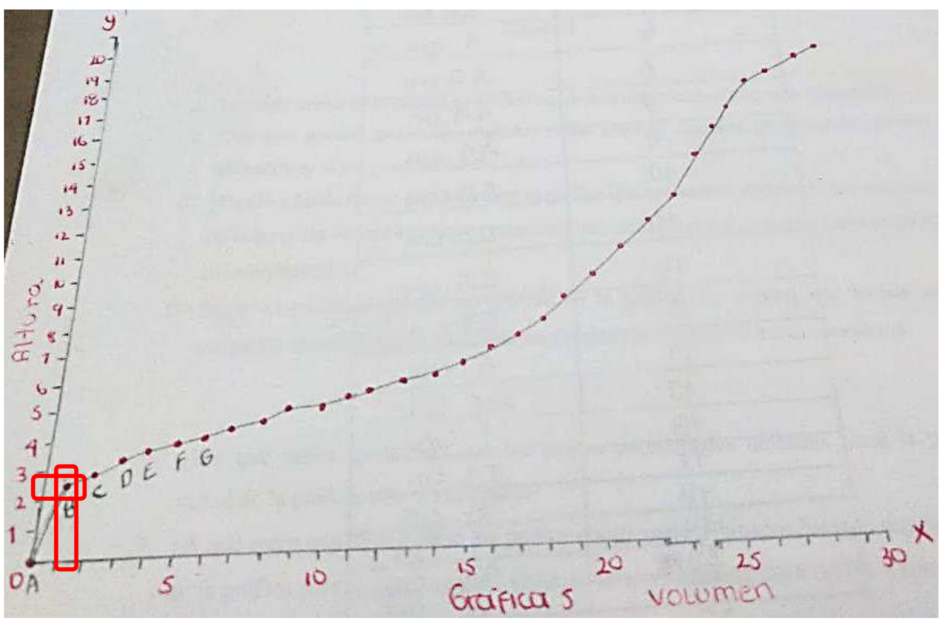


Figura 34. Respuestas frente a S3T2P5

[36] Recuérdese que la mitad del grupo total no hizo ninguna r. gráfica

Empero, cabe resaltar que inicialmente, algunos (25%) de estos alumnos presentaron dificultades para ubicar, exactamente, los puntos coordenados que se requerían, hecho que se aprecia en la siguiente figura:

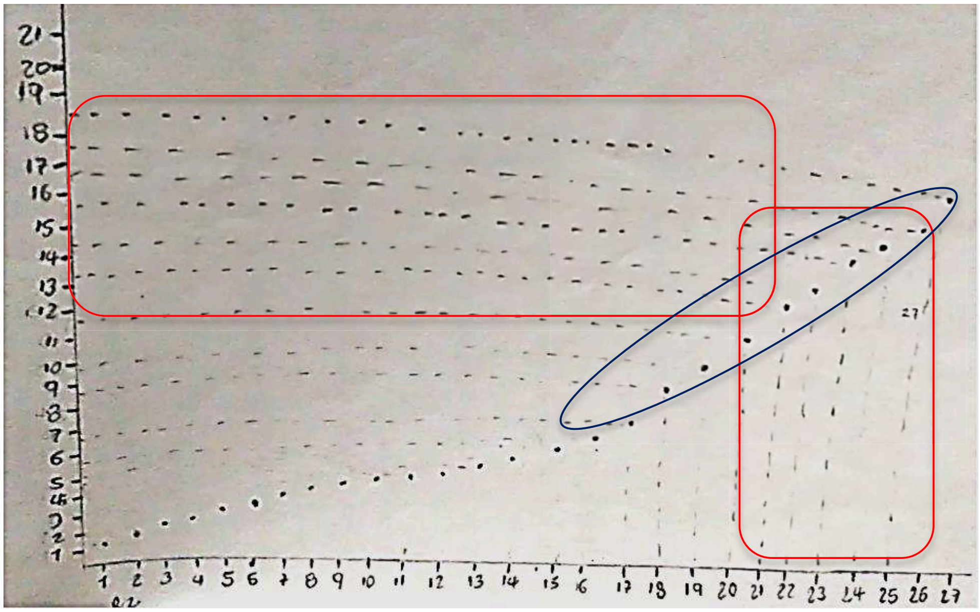


Figura 35. Respuesta frente a S3T2P5

En lo que tiene que ver con la monotonía de la curva, se puede afirmar que sólo el 50% de los estudiantes logró lo esperado, pues, aunque en sus respuestas escritas no evidencian esto, sí lo hicieron durante ciertas discusiones en los momentos de plenaria y validación, danto cuenta:

1) Que la gráfica que obtuvieron, 'era curva' al inicio (lo cual indica que reconocieron la semejanza con la Situación 2) y 'un poco lineal' al final (similitud con la Situación 1).

2) Que dicha curva era creciente, pues 'siempre se le echa líquido, aunque en la primera parte del r., la variación de la AL cambiaba de rapidez (igual como lo ocurrido en la Situación 2), con respecto a la segunda parte del r., y, por tanto, la AL siempre iba aumentando'.

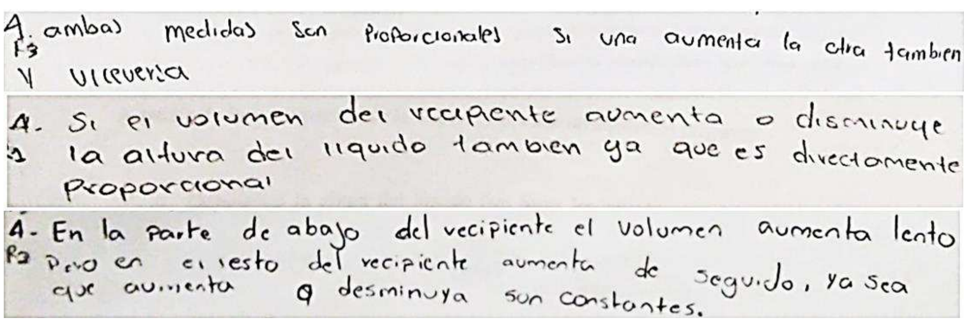
Cuando se dio el espacio para que alguno de los estudiantes dibujara su gráfica en el tablero (o al menos, un bosquejo general de esta, teniendo en cuenta que llegaba hasta el volumen 30), todos los estudiantes lograron evocar que 'esa gráfica era creciente, porque siempre estaba subiendo, aunque a veces no se notara tanto' (refiriéndose a la cantidad de cambio de AL).

Razonamiento Covariacional

De acuerdo con la Tabla 13, el 100% de los estudiantes se puede asociar con la Acción Mental 1 (AM1), debido a que lograron reconocer las magnitudes involucradas, a saber, volumen, AL, altura del r. y diámetro del mismo.

En cuanto a comportamiento de magnitudes, todos los estudiantes lograron reconocer que volumen, AL y diámetro son las magnitudes que varían, y altura del r. es la magnitud constante. Cabe resaltar que, para este momento de la Propuesta de Aula, para todos los estudiantes era claro que el diámetro era una de las magnitudes involucradas en el llenado de este r. mixto (así como lo fue en las otras situaciones), y que, en sus propias palabras, “era la que más importaba”, pues, por ejemplo, en este nuevo recipiente, se combinaba (el diámetro) de muchas formas, refiriéndose a que ‘mezclaba’ los diámetros de los otros recipientes.

En lo que respecta a comportamientos asociados a AM2, el 100% de los estudiantes se puede asociar a esta Acción Mental, debido a que lograron reconocer que, si el volumen aumenta y/o disminuye, la AL se comporta de la misma manera, según corresponda. Respuestas como las que siguen, evidencia la AM2 por parte de los estudiantes:


A. ambas medidas son proporcionales si una aumenta la otra tambien y viceversa

A. Si el volumen del recipiente aumenta o disminuye la altura del liquido tambien ya que es directamente proporcional

A- En la parte de abajo del recipiente el volumen aumenta lento pero en el resto del recipiente aumenta de seguido, ya sea que aumenta o desminuya son constantes.

Figura 36. Respuestas frente a S3T1P4

Cabe resaltar que la mitad de los estudiantes argumentó que la dependencia entre volumen y AL, se debía a que son directamente proporcionales. De nuevo, se cita el hecho de que desde la Situación 1, pasando por la Situación 2, y continuando hasta esta, algunos estudiantes siguieron utilizando este término, pese a que, en intervenciones pasadas, ya se había sugerido no seguirlo mencionando (directamente proporcional), si no lograban explicar lo que significaba para ellos.

Respecto a la cantidad de cambio de las magnitudes en cuestión, sólo la mitad de estudiantes se puede asociar con la Acción Mental 3 (AM3), debido a que dan cuenta que al añadir o quitar una UL, la AL aumentaba o disminuía en diferentes cantidades (según correspondiera); por ejemplo:

1) Que para diámetros de la primera parte del r. mixto, la AL cambiaba, aproximadamente, en cantidades similares como ocurrió en la Situación 2, debido a que esta parte del nuevo r., también era esférica.

2) Que para diámetros de la segunda parte del r. mixto, la AL cambiaba, aproximadamente, en cantidades similares como ocurrió en la Situación 1, debido a que esta parte del nuevo r., era un poco similar a cilíndrica, y por tanto, se puede concluir que la AL también debería comportarse 1 a 1 (como pasó con el r. cilíndrico).

Frente a esta Acción Mental 3, es importante considerar dos aspectos frente a las respuestas dadas por los estudiantes: 1) comprensión sobre la AL para volúmenes arbitrarios (no enteros) y 2) comprensión de diferentes 'patrones de variación' en la AL (ya fuese para la primera o segunda mitad del recipiente). Luego, la evidencia de AM3 por parte de los estudiantes, debía atender a estos dos aspectos, en tanto están relacionados con la *verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio.*

Así, en cuanto a lo primero, se puede afirmar que sólo el 25% estudiantes lo logró, pues dieron cuenta del procedimiento para hallar la AL en volúmenes arbitrarios (sin regla), en tanto expresan que "se deben hacer los mismos procedimientos que se hicieron para los recipientes anteriores; así lo hicimos con las dos partes de este nuevo r.".

Como se recordará, la explicación sobre este tipo de procedimientos (expuesta en el fragmento de diálogo xx), tuvo poca comprensión por parte del resto de estudiantes. Empero, cuando ese 25% de estudiantes (aquellos que sí lograron reconocer las similitudes entre los tres recipientes) explicaron su procedimiento al resto del grupo, esta audiencia comprendió de lo que se trataba, y concluyeron que entonces, 'tal proceso no sería difícil porque ya se hizo algo parecido con los otros recipientes'

Este mismo hecho permite aseverar sobre el aspecto 'patrones de variación', pues al manifestar conclusiones como la anterior, los estudiantes también dieron cuenta de que, por ejemplo, los patrones de variación para la primera parte del r. mixto, se parecen a aquellos del r. esférico, en tanto conservan el orden inverso. Respuestas como las que siguen, evidencian este tipo de acercamiento:

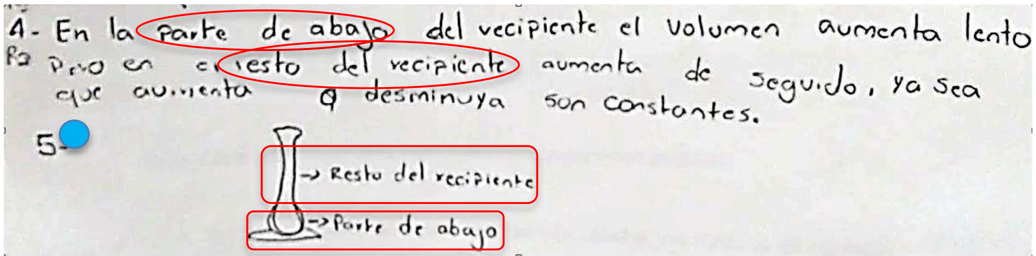


Figura 37. Respuesta frente a S3T1P4

De este modo, hechos y argumentos como los anteriormente mostrados, evidencian la AM3 por parte de los estudiantes.

En lo que respecta a la razón de cambio, se observó que sólo algunos (25%) de los estudiantes reportaron comportamientos asociados a AM4, en tanto este grupo logró, parcialmente, reconocer que la razón de cambio que describía el comportamiento del llenado del r. mixto, no era única (constante o uniforme), es decir, esta es diferente en cada momento del llenado, según si se trata de la primera o segunda mitad de este r. mixto, pues es cuando se observa la similitud con los r. esférico y cilíndrico, respectivamente.

Empero a estas dificultades, el grupo en general, llegó a decir que "la razón de cambio es variable", expresión que da cuenta del reconocimiento que tuvieron (alcanzaron), sobre que para este r., la razón de cambio no es uniforme, y más aún, que en la primera parte r. mixto sucede algo similar a lo ocurrido en el r. esférico, mientras que para la segunda parte, se asemeja a lo que sucedió con el r. cilíndrico.

Después de todo lo anterior, se puede afirmar que un poco más de la mitad de los estudiantes reportaron comportamientos asociados a los de la Acción Mental 4 (AM4), en tanto evidenciaron comportamientos sobre coordinar el valor de una variable con los cambios en la otra (AM1), dirección del cambio (AM2), coordinación de la cantidad de cambio (AM3) y verbalización de la razón de cambio promedio. Luego, respecto a esta Situación 3 (r. mixto, combinación de los otros dos), se puede sostener que los estudiantes, en las preguntas S3T1P1, 2, S3T2P2, 3, 4,5 y S3T3P1, 2, lograron manifestar comportamientos de las acciones mentales que sustentan el Nivel 4 de Razonamiento Covariacional.

Graficación Covariacional

Como ya se dijo, para esta variable de análisis, se deben tener en cuenta dos aspectos: cómo dieron cuenta los estudiantes de las *preguntas base* de Dolores y Salgado (2009), con preguntas que no correspondían a la r. gráfica, y con aquellas que sí se relacionaban directamente con este registro o representación (ya fuese en la construcción o en la interpretación de la misma). Así pues, en cuanto a las cinco *preguntas base* de la Graficación Covariacional (preguntas que no corresponden a la r. gráfica), en la siguiente tabla se aprecia lo encontrado:

Tabla 17. Alcance de las preguntas base (antes de r. gráfica) en S3

PREGUNTAS BASE	CÓMO DIERON CUENTA
¿Qué cambia?	Todos los estudiantes lograron dar cuenta que las magnitudes involucradas eran volumen (V), AL (V), diámetro del recipiente (V) y altura del mismo (C).
¿Cómo cambia?	Todos los estudiantes lograron reconocer que, si el volumen aumentaba y/o disminuía, la AL también se comportaba de esa manera (aumentando y/o disminuyendo), según corresponda.
¿Cuánto cambia?	La mayoría (75%) de estudiantes logró reconocer que al añadir o quitar una UL, la AL aumentaba y/o disminuía en diferentes cantidades (patrones de variación), según la parte del r. esférico en la que se encuentre (el líquido). Si es en la primera parte del r. mixto, se asemeja a lo ocurrido en S2, y si es en la segunda mitad del r. mixto, es similar a lo que sucedió en S1.
¿A qué razón cambia?	Pocos estudiantes (25%) lograron reconocer que la razón de cambio en el llenado del r. mixto es diferente para cada momento, debido a que el diámetro de este, iba cambiando.
¿Cómo se comporta globalmente la gráfica?	La mitad de los estudiantes dieron cuenta que la r. gráfica para el llenado del r. mixto era una curva desde (0,0) hasta (30,20), porque el comportamiento del llenado de este r. fue diferente para cada momento, debido al diámetro del r.

Finalmente, respecto a cómo los estudiantes dieron cuenta de las cinco *preguntas base*, frente a preguntas relacionadas (directamente) con la r. gráfica, se puede afirmar que la mayoría (75%) de estudiantes dieron cuenta de 4 de ellas (Qué, Cómo, Cuánto y Cómo se comporta), de la siguiente manera:

- *¿Qué cambia?*, cuando en sus r. gráficas, consideraban y/o escribían en los respectivos ejes coordenados (x e y), los términos “volumen o cantidad de jeringas” y “altura el líquido”, como se aprecia en la siguiente figura:

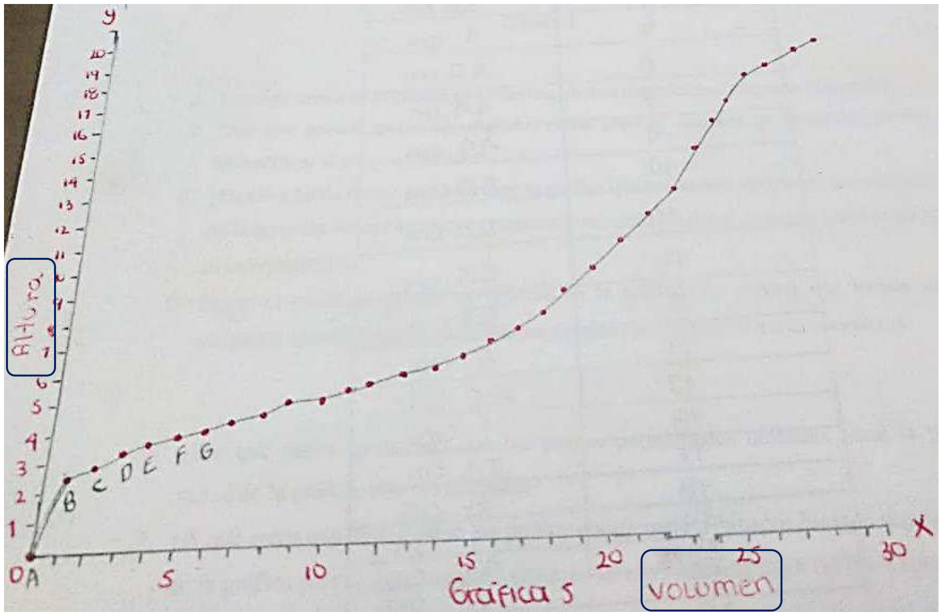


Figura 38. Respuesta frente a ¿Qué cambia? en S3

- *¿Cómo cambia?*, al reconocer que, así como crece (aumenta) el volumen (y, por tanto, debían desplazarse hacia la derecha sobre el eje x), también lo hace la AL (y, por tanto, debían desplazarse hacia arriba sobre el eje y).

- *¿Cuánto cambia?*, cuando bosquejaron o construyeron su r. gráfica, considerando que, al avanzar, por ejemplo, una unidad sobre el eje x (volumen), debían avanzar una parte considerable (1.5) de unidad sobre el eje y (altura del líquido), lo cual se observa en la figura que sigue:

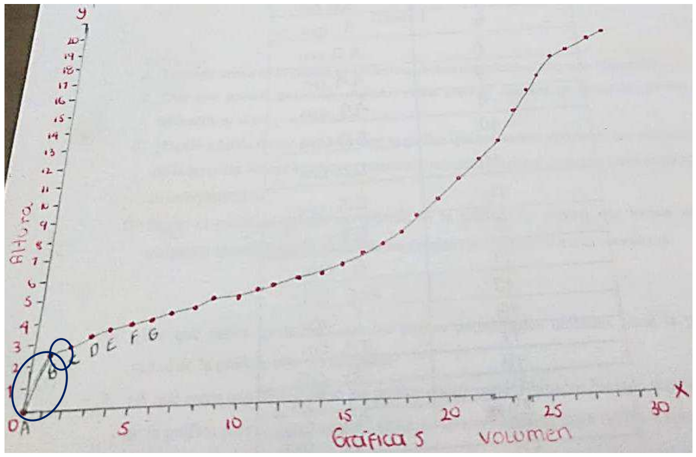


Figura 39. Respuesta frente a ¿Cuánto cambia? en S3

- ¿Cómo se comporta globalmente la gráfica?, dieron cuenta de ello, al trazar una curva desde (0,0) hasta (30,20), e interpretando que esto se debía, por un lado, a que “si no se echa líquido, no puede haber AL”, y por otro, que la gráfica no podía pasar del último punto coordenado (30, 20), porque a partir de este “el líquido se empezaría a regar”. La comprensión sobre la acotación de la r. gráfica, por parte de los estudiantes, se puede observar en la siguiente figura:

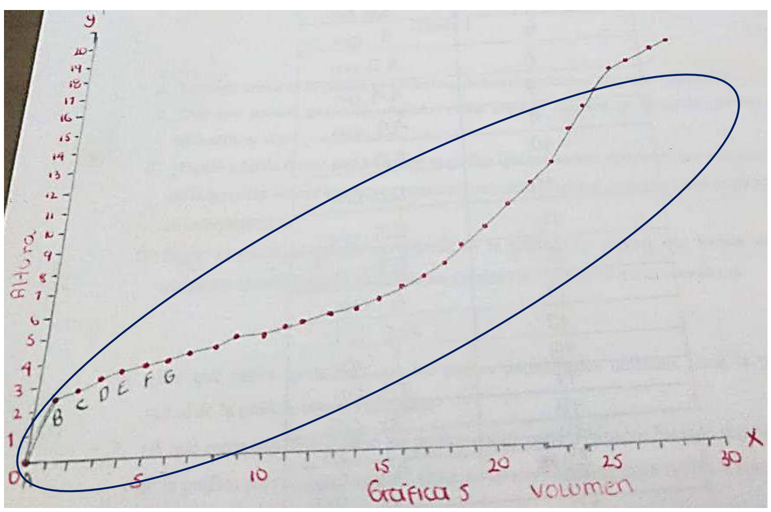


Figura 40. Respuesta frente a ¿Cómo se comporta globalmente la gráfica? en S3

Respecto a *¿A qué razón cambia?*, se debe afirmar que ninguno de los estudiantes logró reconocer, a partir de la gráfica, que la razón de cambio era diferente para cada momento, teniendo en cuenta las dos partes del r. mixto (esférica y similar a cilíndrico).

Propósitos de las Tareas y de la Situación 3

La *Tarea 1* tenía como propósito que los estudiantes profundizaran y concluyeran sobre el comportamiento de las magnitudes involucradas en el llenado del r. mixto, y sobre la relación de dependencia entre las magnitudes involucradas. De acuerdo con lo anterior, se puede afirmar que el propósito de esta tarea se cumplió, puesto que los estudiantes lograron manifestar que el volumen, AL, diámetro y altura del r., eran las magnitudes involucradas en el llenado de este r. mixto. Este cumplimiento también se ve reflejado en el hecho de que los estudiantes lograron reconocer que el volumen, AL y diámetro, eran las magnitudes que cambiaban, mientras que la altura del r. era la única magnitud constante.

Se puede decir que el propósito de la Tarea 2 (cuantificar los cambios del volumen y la AL, y reconocer continuidad) se cumplió, parcialmente, puesto que la mayoría (75%) de estudiantes logró manifestar que cuando el volumen aumentaba y/o disminuía en una unidad, la AL se comportaba de distintas maneras (cambios o ‘patrones de variación’ no uniformes), debido a que el diámetro del r. mixto cambiaba en todo momento. La confirmación de este acercamiento queda evidenciada con respuestas a preguntas como P2, P3 y P4 y diálogos particulares, en los cuales los estudiantes dieron cuenta de su comprensión sobre que *si se aumentaba y/o disminuía el volumen (en 1 jeringa), la AL cambiaba en diferentes maneras (cantidades), según la parte del r. en la que se encontrara (el líquido).*

Respecto al propósito de la *Tarea 3* (reconocer la razón de cambio para el r. esférico), se puede afirmar que se cumplió básicamente, puesto que sólo algunos (25%) estudiantes lograron dar cuenta que la razón de cambio que describía el comportamiento del llenado del r. mixto, era diferente para cada momento (no uniforme), debido a la forma del r. (el diámetro cambiaba en todo momento). Particularmente, reconocieron que para la primera mitad de este r. mixto, sucede algo similar a lo ocurrido en la S2, y para la otra mitad, similar a S1.

Con base en todo lo anterior, se puede afirmar que el propósito de la Situación 3 se cumplió parcialmente, debido a que los propósitos de las dos últimas tareas tuvieron bajo alcance (cumplimiento). Es decir, para este final (cierre) de la Propuesta de Aula, la mayoría de los estudiantes sólo logró comprender Qué cambiaba, Cómo cambiaba, Cuánto cambiaba y A qué razón cambiaba (éstas últimas, parcialmente), evidenciando dificultades para dar cuenta de lo relacionado, especialmente, con razón de cambio.

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES GENERALES Y ALGUNAS REFLEXIONES DIDÁCTICAS

Este capítulo contiene algunas conclusiones relacionadas con el presente Trabajo de Grado, el cual se ha centrado en la observación y el análisis de las actuaciones que los estudiantes de 10° grado manifiestan frente a tareas de covariación, encaminadas hacia el estudio de algunos aspectos de la función a través de la Graficación Covariacional. Estas conclusiones se plantean en términos de los alcances de los objetivos propuestos inicialmente y del grado de avance de los estudiantes, para poder caracterizar las tareas que pueden ser viables o pertinentes para lo anteriormente dicho. De igual manera, se explicitan algunas reflexiones didácticas que surgieron tanto en la revisión de antecedentes y marcos de referencia, así como en el diseño, implementación y análisis de la Propuesta de Aula, las cuales deben tenerse en cuenta para potenciar las habilidades en estudiantes, de algunos aspectos del Pensamiento Algebraico relacionados con la función y sus distintas representaciones (enfatizando en el registro gráfico).

En primer lugar, se planteó *documentar la problemática desde algunos elementos teóricos y metodológicos en torno a situaciones de covariación, desde las dimensiones matemática, didáctica y curricular, que posibiliten la consolidación de tareas relacionadas con la Graficación Covariacional*. En relación a ese primer objetivo específico, se puede decir que se abordó en su totalidad en los capítulos 1 y 2, debido a que con el rastreo hecho mediante los antecedentes, se puede afirmar que en la educación secundaria se pueden llevar procesos en relación con el desarrollo del pensamiento variacional que vayan más allá del manejo superficial de los distintos registros de representación, y específicamente de la r. gráfica.

En otras palabras, los alumnos tienen la capacidad de atender a la covariación de ciertas magnitudes (volumen, AL, diámetro y altura del recipiente), reconociendo las relaciones de dependencia y de la forma como cambia cada una de ellas (cantidad de cambio o cambio de los cambios).

Así pues, desde lo *matemático*, a pesar de que en los dos libros de Cálculo analizados se encontraron algunas definiciones convencionales del concepto función y su r. gráfica, que aluden a un saber sabio (y en las cuales la función está dada en términos de una visión conjuntista), es importante que la enseñanza de ese concepto y de las nociones que abarca, se realice de una manera dinámica, es decir, de un modo en que los estudiantes reconozcan que con la función, se pueden modelar situaciones de variación y cambio.

Ahora bien, desde lo *didáctico* se pudo conocer una herramienta que sirve para clasificar las acciones de los alumnos en términos de sus comportamientos en relación al pensamiento variacional, el cual tiene unos criterios que permiten ubicar a un estudiante en un determinado nivel de Razonamiento Covariacional. Además de ello, se resalta la importancia de poder hacerles un seguimiento a los alumnos, pues tal como lo menciona Carlson et al (2003), una respuesta o indicio que parezca adecuado, no es suficiente para ubicarlo en alguno de los niveles, pues existen razonamientos pseudo analíticos que no necesariamente dan cuenta que un alumno alcanzó dicho nivel.

En cuanto a lo *curricular*, queda claro que se propone analizar, organizar y modelar situaciones problema desde cualquier contexto que de origen a la variación, lo cual implica que un alumno reconozca, perciba, identifique y caracterice la variación desde diversos contextos, pero sin dejar a un lado su descripción, modelación y posibles representaciones.

En relación con el segundo objetivo específico, *desarrollar el proceso de experimentación a través del diseño e implementación de una Propuesta de Aula que considere los marcos del Razonamiento Covariacional y la Graficación Covariacional,* se considera que también se cumplió. En cuanto al primer marco de referencia, se logró abarcar cada Acción Mental, paulatinamente, ya fuese mediante una Tarea a la vez o un grupo de preguntas, de tal modo que los estudiantes ofrecieran respuestas claras y concisas de la AM que se pretendía abordar. En lo que a *Graficación Covariacional* se refiere, se plantearon interrogantes (enunciados) específicos que dieran cuenta sobre lo que los estudiantes responden frente a las *preguntas base: ¿Qué cambia?*, *¿Cómo cambia?*, *¿Cuánto cambia?*, *¿A qué razón cambia?* y *¿Cómo se comporta globalmente la gráfica?* (Dolores y Salgado, 2009).

De otro lado, y en términos del tercer objetivo, *aportar reflexiones teóricas y metodológicas en torno a la pertinencia de las tareas de la Propuesta de Aula en relación con la Graficación Covariacional y sus posibles implicaciones en el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional en la educación secundaria*, los resultados de los estudiantes (en torno a las preguntas de las Tareas) y sus respectivos análisis, pusieron de manifiesto la caracterización de la manera en que estas actividades inciden en el desarrollo del pensamiento variacional y la aproximación a algunos elementos matemáticos que subyacen al concepto de función en el grado décimo. Así pues, a continuación se explicitan algunas conclusiones respecto a ello:

- ➢ La construcción y aplicación de la Propuesta de Aula, llevó a verificar que la forma (tradicional) en como a los estudiantes les suelen enseñar el concepto de función, provoca que los alumnos consideren que la función es únicamente una relación de correspondencia, y no que también la conciban como una relación de dependencia. Respecto a los estudiantes del Colegio Comercial Nueva Era Vallegrande, se indagó y constató, que han trabajado poco sobre la interpretación de una gráfica, y que, además, la representación tabular es la más usada, respecto a los otros registros.

Así pues, tras considerar todos los resultados de S1, S2 y S3, se puede afirmar lo siguiente:

1) Los estudiantes comprendieron con éxito, cuáles eran las magnitudes involucradas en el llenado de los tres recipientes, y el comportamiento de cada una de ellas, a saber, volumen (V), AL (V), diámetro (C en la Situación 1 y V en las situaciones 2 y 3) y altura del r. (C).

   Y en cuanto a la r. gráfica sobre esto (¿Qué cambia?), dieron cuenta de ello al nombrar los ejes x e y, como volumen y altura del líquido, respectivamente.

2) Los estudiantes comprendieron con éxito, la dirección del cambio que se daba entre las magnitudes involucradas, expresando, por ejemplo, que la AL dependía del volumen, pues cuando el volumen aumentaba y/o disminuía, la AL se comportaba de la misma manera, según fuese el caso.

   En cuanto a la r. gráfica sobre esto (¿Cómo cambia?), dieron cuenta de ello al considerar que así como crece el volumen (se desplazaban sobre el eje x) también lo hace la AL (se desplazaban sobre el eje y).

3) Los estudiantes comprendieron con éxito, la cantidad de cambio que se daba entre las magnitudes para cada situación. Por ejemplo, para S1 dieron cuenta que el volumen y AL cambiaban 1 a 1, es decir, que por cada cambio de una unidad en el volumen, la AL

cambiaba en 1 cm. Luego, para S2 y S3, argumentaron que los cambios eran diferentes para cada momento (no uniformes), debido a que el diámetro de los recipientes cambiaba. Es decir, pese a que no establecieron, numéricamente, cuánto cambiaba el volumen y AL, lograron reconocer que el cambio no era el mismo para el llenado de todo el recipiente.

En cuanto a la r. gráfica sobre esto (¿Cuánto cambia?), dieron cuenta de ello al considerar en sus gráficas, por ejemplo de S1, que al desplazarse tres unidades sobre el eje x (volumen), también debían avanzar tres unidades sobre el eje y (altura del líquido).

4) Los estudiantes no lograron reconocer, por completo, la razón de cambio que describía el llenado de cada uno de los recipientes. Por ejemplo, aunque en S1 reconocen que la razón de cambio es constante (uniforme o la misma en todo momento), no pudieron decir que es $\frac{1}{1}$. Luego, en S2 y S3 aunque reconocieron que el cambio era diferente en todo momento, no pudieron establecer ello como cocientes, indicando en qué parte del recipiente se daba cada valor.

   En cuanto a la r. gráfica sobre esto (¿A qué razón cambia?), tampoco dieron cuenta de ello, pues, por ejemplo, en las últimas preguntas de S1T4, S2T3 y S3T3, o bien no respondieron directamente lo solicitado (repetían que el cambio era el mismo en S1, y variable en S2 y S3), o bien no acudían a r. gráfica, como se les pidió en los enunciados de estas preguntas.

5) La mayoría de estudiantes tuvieron éxito en sus r. gráficas, debido a que ubicaban los pares ordenados solicitados, hicieron su trazo desde (0,0) y ubicaron los puntos máximos de sus gráficas (que eran aquellos valores hasta donde se podía echar líquido, pues, a partir de ahí, el líquido se empezaría a regar). El no cumplimiento total de esto, se debe a que algunos estudiantes, pese a las intervenciones realizadas por las observadoras-participantes:

- ✓ No iniciaban su trazo desde (0,0)
- ✓ No realizaron la gráfica solicitada en S3, razón por la cual no puede suponerse que habrían hecho una r. gráfica similar a la de sus compañeros.
- ✓ Presentaron dificultades para ubicar, exactamente, pares ordenados con valores no enteros.

En lo que respecta a ¿Cómo se comporta globalmente la gráfica?, los estudiantes comprendieron con éxito, que para el r. cilíndrico, la gráfica era lineal, mientras que para los recipientes esférico y mixto, la gráfica era curva, debido a sus diámetros constante y variable, respectivamente.

Sin embargo, también se debe decir, que los estudiantes no lograron reconocer la razón de cambio (que describía el llenado de cada recipiente) a partir de la gráfica que habían realizado, por ejemplo, señalando los Δh y Δx, o haciendo alguna acción sobre la gráfica.

Con todo esto, se puede afirmar que los estudiantes tuvieron mayor éxito bosquejando o construyendo la gráfica, que interpretando a partir de ella, al menos en lo que a razón de cambio se refiere.

Así pues, el desarrollo de la Propuesta de Aula con los estudiantes en cuestión, demostró que no fueron capaces de superar el Nivel 4 de Razonamiento Covariacional, en tanto, tras analizar las tres situaciones, se encontró que pocos estudiantes (25%) logran ubicarse en N4. Esto, se debió, por un lado, a que el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, es poco abordado en dicho colegio. Y por otro, que la Propuesta de Aula presentada, abordaba varias nociones y conceptos matemáticos, con los cuales los estudiantes no contaban. Debido a lo anterior, los estudiantes presentaron algunas dificultades al momento de realizar las gráficas solicitadas, y más aún, comprender y responder, a partir de la gráfica, ciertas características del comportamiento que tenían las diferentes magnitudes involucradas en el llenado de los tres recipientes (cilíndrico, esférico y mixto).

- ➢ Se constató que utilizar materiales manipulativos en el desarrollo de una Propuesta de Aula, ayuda a que los estudiantes reconozcan, con mayor facilidad, las magnitudes que se involucran en el fenómeno de variación (enmarcado en un contexto) que se proponga, y así, hacer comprensible las actividades a desarrollar.

- ➢ En la aplicación de la Propuesta de Aula, se notó que el permitir que los estudiantes participen, socializando sus respuestas y procedimientos, se constituye en una herramienta que les ayuda a entender y apropiarse del contexto, la situación, los términos, las preguntas, etc., que se les propongan. Por ejemplo, los espacios de plenaria y validación, permitieron que los alumnos compartieran sus respuestas, y al mismo tiempo, con la guía de las observadoras-participantes, llegaran a conclusiones importantes y/o puntualizar ciertas ideas.

Finalmente, en torno al objetivo general, *caracterizar el tipo de tareas, que en el marco de una Propuesta de Aula les permita a los estudiantes de grado 10° del Colegio Comercial Nueva Era Vallegrande construir e interpretar la gráfica de una función, a través de la Graficación Covariacional*, se considera que las tareas que deberían proponerse son:

- *Escalonadas y paso a paso*, hasta llegar a la tarea o momento más complejo, puesto que cada tarea debe convertirse en una exploración por parte del estudiante, de tal modo que esto le permita afianzar y crear nuevos conocimientos; lo anterior, debido a que los alumnos objeto de estudio, en ocasiones tenían dificultades para responder una Tarea o grupo de preguntas, que a su consideración, eran muy 'avanzadas' o difíciles respecto a los conocimientos que tenían.

  Así mismo, las tareas deben estar suscritas en un contexto llamativo y de interés para los estudiantes, teniendo presente que el docente cumple el papel de acompañante y guía en la comprensión del estudiante; esto se debe a que aunque el contexto de los perfumes les resultó interesante en un principio, los estudiantes manifestaron que no era un asunto de su vida cotidiana, y por tanto, a veces perdían el interés.

- *Hacer uso de material manipulativo y experimental*, pues estos permiten que los estudiantes utilicen sus sentidos para desarrollar y adquirir nuevos conocimientos, de tal modo que no se queden o limiten a un discurso oral, y por el contrario, puedan encontrar estrategias para razonar, argumentar y justificar sus respuestas y resultados encontrados. Lo anterior se reafirma con el hecho de que los alumnos mostraron gran interés por llenar cada uno de los recipientes (frascos), y expresaron curiosidad y/o asombro por la manera cómo estos se llenaban con el líquido (agua), con los instrumentos facilitados para ello (copas, vasos y jeringas).

- *Proponer una antesala a la razón de cambio* (y con ello, a los Δh y Δx), antes de llegar a las preguntas directamente relacionadas con esto, puesto que los estudiantes participantes tuvieron notorias dificultades para comprender tal concepto, lo cual ocasionó o provocó, que no lograran comprender y/o responder (numéricamente) algunas preguntas sobre la *razón de cambio promedio*, ni interpretarla a partir de las gráficas que construían.

- Las tareas deben ser diseñadas teniendo en cuenta tanto los *saberes previos y nociones* de los estudiantes (respecto a los conceptos matemáticos que se aborden en la Propuesta de Aula), como su *nivel de comprensión lectora*. Lo anterior, debido a que durante el desarrollo de la Propuesta de Aula, los estudiantes o bien manifestaban que nunca habían escuchado un determinado término o realizado algún ejercicio como los propuestos (por ejemplo, manejar las representaciones tabular y gráfica), o bien expresaban que no comprendían ciertas preguntas, las cuales no eran más que indicaciones de hacer algo concreto o específico (tomar la regla y medir la AL, por citar un ejemplo).

A modo de reflexión, se puede decir que es importante saber elaborar las preguntas, pues en la Propuesta de Aula, varias de ellas (según los mismos estudiantes) fueron muy repetitivas, lo cual provocó cierto rechazo de parte de ellos. Es decir, lo importante es lograr que las preguntas, debidamente secuenciadas y organizadas en tareas y situaciones, lleven al estudiante a observar y comprender, que la función se puede abordar a partir de distintas representaciones (tabular y especialmente gráfica).

También es de resaltar la importancia de utilizar material manipulativo cuando se desea abordar el estudio de algunos aspectos de la función, y especialmente, a partir de su gráfica, pues estos permiten que el estudiante tenga tanto experiencia visual como manipulativa, de los fenómenos de variación (enmarcados en situaciones) que se propongan, en tanto permiten identificar, con mayor precisión, las magnitudes y su comportamiento.

Las socializaciones finales siempre deben tenerse en cuenta, pues son espacios que ayudan a los estudiantes a conectar ideas o conceptos que no tenían claros al momento de responder por escrito. Es de gran importancia de dinamizar las plenarias, una vez se ha terminado el desarrollo de cada situación, pues esto permite que los estudiantes dominen el tema, se apropien e interpreten lo que se requiere.

En la ejecución de las tareas, se aconseja plantear preguntas muy explícitas, para así, a medida que se avanza en la Propuesta de Aula, se pueda rastrear o evaluar si los estudiantes han sido capaces de apropiarse del proceso (incluyendo términos utilizados), y de ese modo, se pueda analizar su alcance en cuanto a Razonamiento Covariacional.

De manera particular, se recomienda que para abordar el marco de Graficación Covariacional, los profesores inicien con situaciones simples y explícitas, que lleven a complementar la situación compleja que se pudiera proponer.

BIBLIOGRAFÍA

Ávila, M. P. E. (2011). *Razonamiento covariacional a través de software dinámico. El caso de la variación lineal y cuadrática*. Tesis de Maestría. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Azcárate, G. C. y Deulofeu, P. J. (1999). *Funciones y gráfica*. Madrid, España: Síntesis

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. *Desarrollo del Pensamiento Matemático*, 185-203

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *EMA, 8*(2), 121-156.

Dolores F., C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7*(3), 195-218.

Dolores F, C. y Salgado B, G (2009). Elementos para la graficación covariacional. *Números, 72,* 63-74.

Duval, R (2004). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.

Fabra Lasalvia, M., y Deulofeu Piquet, J. (2000). Construcción de gráficos de funciones: Continuidad y prototipos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(2).

García Q. L., Vásquez, R. e Hinojosa, M. (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Ingenierías, 7*(24). México

González A, M. T. y Martín H, E. (2004). Dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobre la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas. En actas de XVI Simposio Iberoamericano de enseñanza Matemática Matemáticas para el Siglo XXI. Recuperado de www.iberomat. Uji.es /carpeta/comunicaciones/77_teresa_gonzalez_2.doc

Guzmán R., I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1(1), pp. 5-21.

Grueso, R. y González, G (2016). El concepto de función como covariación en la escuela. (Tesis Maestría en Educación), Universidad del Valle, Cali. Recuperado de file:///C:/Users/ser/Downloads/7412-0525566%20(8).pdf

Hitt, F. (1996). *Educación matemática y uso de nuevas tecnologías*. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, Departamento de Matemática Educativa.

Hitt, F. (1998a). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 123-134.

Hitt, F (1998b). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Revista Educación Matemática, 10*(2), 23-45. Recuperado de https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/45646720/Latina_Rev_Edu_Mat.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1503160574&Signature=BFk6On9OB6lGGj1mIFSi3zsPi5Q%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DVisualizacion_matematica_representacione.pdf

Hitt, F. y Morasse, C. (2009). Pensamiento numérico-algebraico avanzado: construyendo el concepto de covariación como preludio al concepto de función. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(17), pp. 243-260.

May, N. G. C. C. G., Zambrano, M. B. S. M. G. y Quiroga, J. La necesidad de conversiones entre registros para la comprensión del concepto de función.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas. Lineamientos Curriculares.* Serie Lineamientos Curriculares. Bogotá: MEN

Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En MEN, Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: MEN.

Organization for Economic Cooperation and Development (2017-2018). Competencias en Iberoamérica: Análisis de PISA 2015. *OECD: Better Policies For Better Lives.* Recuperado de https://www.oecd-ilibrary.org/development/perspectivas-economicas-de-america-latina-2018_leo-2018-es

Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P (2006). Metodología de la Investigación. *Editorial McGraw Hill*. Recuperado de http://observatorio.epacartagena.gov.co/wp-content/uploads/2017/08/metodologia-de-la-investigacion-sexta-edicion.compressed.pdf

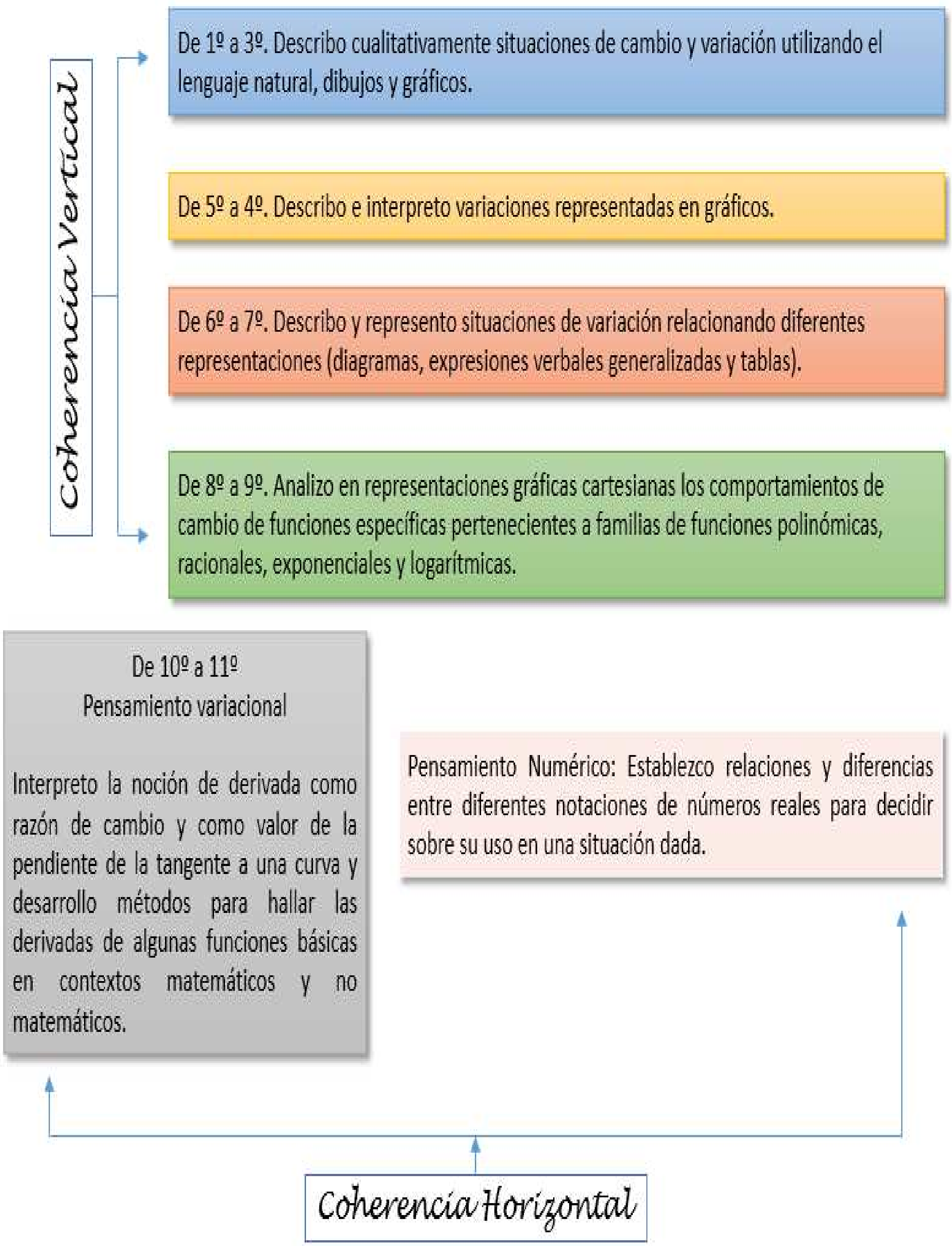
Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics, No 12, pp, 151-169.

Valoyes, L. y Malagón, M. (2006). Formación de pensamiento algebraico en la educación escolar. Cali: Universidad del Valle

Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. Cali, Colombia. Recuperado de http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf

ANEXOS

Anexo 1: Coherencia vertical y horizontal en relación con los estándares seleccionados



Anexo 2. Propuesta de Aula

PROPUESTA DE AULA PARA EL ESTUDIO DE ALGUNOS ASPECTOS DE LA FUNCIÓN A TRAVÉS DE LA GRAFICACIÓN COVARIACIONAL

Colegio: ____

Grado: ______

Docentes: Alejandra Martínez Jiménez y Diana Marcela Vélez Gómez

Estudiantes: ____

____

Por favor responder de forma ordenada y con letra legible (en las hojas de block), a cada una de las preguntas que se presentan en las tres situaciones. De igual manera, justifica todas tus respuestas; puedes ejemplificar si así lo consideras.

Contextualización de las situaciones. En Colombia, un porcentaje considerable del sector comercial se dedica a la cosmética y perfumería. Años atrás, para adquirir una fragancia, las personas debían viajar al exterior, pero hoy en día, su comercialización es creciente y puedes conseguir un perfume cerca de la zona donde vives.

La empresa Ariza, próxima a lanzar su nueva línea de perfumes, quiere fabricar un perfume que les ayude a mantener el buen nivel de ventas que han alcanzado hasta ahora. Para ello, toma como referencia a la Casa de Fragancias Luchy y a la Compañía Senses, debido a que son las empresas cuyos perfumes son los más vendidos. Inicialmente, la empresa Ariza realizó una encuesta a los usuarios de estas dos empresas, sobre el grado de aceptación de los perfumes, la cual arrojó que se ha venido presentando el siguiente comentario en los usuarios: "Los usuarios encuestados consideran que en el recipiente de la Casa de Fragancias Luchy, el cual tiene forma cilíndrica, similar a la Ilustración 1, hay más contenido (sustancia aromática) que en el recipiente de la compañía Senses, cuya forma es esférica, parecida a la Ilustración 2".

Ilustración 1

Ilustración 2

Este comentario general, ha causado que ambas empresas mantengan un debate sobre el tema, y que los respectivos usuarios se inclinen frente a uno u otro perfume, debido a la forma del recipiente.

Con estos elementos y para poder diseñar los recipientes de su nueva línea de perfumes, la empresa Ariza contrató un equipo de expertos, para que les ayude a reflexionar sobre si la cantidad de líquido (sustancia aromática) está asociada a la forma del recipiente que lo contiene. Esto permitirá tomar decisiones sobre el tipo de recipiente a usar. Como foco de su investigación, el equipo de expertos se traza la pregunta: *¿La forma del recipiente puede incidir en la selección de un perfume sobre otro? ¿Cómo?*

Parte de su investigación está relacionada con la manera en que se llenan ambos recipientes con el líquido (sustancia aromática); para ello, según el recipiente, toman como unidades de medida una copa y un vaso (ver *Ilustraciones 3 y 4*), las cuales llenan hasta la marca indicada en cada una.


Ilustración 3


Ilustración 4

Para participar en esta investigación y comprender las preguntas que orientan la misma, en cada situación se te entregarán los implementos necesarios, es decir, el recipiente y la unidad de medida correspondiente. Además, en determinados momentos contarás con una regla convencional, para medir algunas dimensiones de los distintos recipientes. Por otro lado, ten en cuenta que cada uno de los recipientes que se entregarán, corresponden a una escala real de los recipientes originales, es decir, los recipientes que recibes tienen exactamente las mismas dimensiones de aquellos utilizados por la Casa de Fragancias Luchy y la Compañía Senses, respectivamente. Por tratarse de recipientes para perfumes, estos tienen una parte rosca (por la cual se vierte el líquido). Sobre esto, las empresas en cuestión deciden no llenar esa parte, es decir, los recipientes se llenan hasta el nivel en que inicia dicha rosca; por tanto, esta precisión también se debe considerar en los recipientes que vas a usar.

Luego, como vas a utilizar este material tangible, es importante que puedas responder a las preguntas planteadas, en términos de los instrumentos que se ponen a tu disposición. Dicho de otro modo, se espera que puedas plasmar tus ideas y explicaciones, a partir del paso a paso realizado con el material. Por ejemplo, una respuesta cualesquiera podría ser del tipo: "Para determinar………., lo que hice fue llenar el recipiente con dos copas y marcar con unas líneas (sobre el recipiente) el nivel del agua; luego, compararé qué pasaba con………., y noté que al comparar las marcas una estaba más arriba de la otra. Por lo tanto, puedo concluir que………."

Situación 1: Analizando el recipiente de la Casa de Fragancias Luchy

El equipo de expertos de la Empresa Ariza, inicia su investigación con el análisis del recipiente de la primera empresa mencionada. El recipiente que utiliza La Casa de Fragancias Luchy (la cual cuenta con 5 años de experiencia en el mercado), tiene la forma habitual de los frascos en que se envasan los perfumes, es decir, un recipiente con forma cilíndrica, similar al que te pasaron las docentes (*Ilustraciones 1* y *3*).

Ilustración 1

Ilustración 3

Tarea 1: Comprendiendo el llenado del recipiente cilíndrico

1. ¿Cuáles son las magnitudes involucradas en la situación? Explica tu respuesta
2. ¿Algunas de esas magnitudes cambian o varían mientras se está llenando el recipiente? Justifica tu respuesta
3. ¿Cuáles de esas magnitudes permanecen constantes mientras se está llenando el recipiente? Justifica tu respuesta.

A partir de tu respuesta anterior, analiza lo siguiente:

A. Describe qué sucede con el diámetro del recipiente, a medida que aumenta y/o disminuye el volumen del líquido. Explica tu respuesta.

B. Describe qué sucede con la altura del recipiente a medida que aumenta y/o disminuye el volumen del líquido. Explica tu respuesta.

4. ¿El líquido que se vierte en el recipiente de la Casa de Fragancias Luchy puede alcanzar una altura de 20cm? ¿Por qué?
5. ¿Qué sucede con la altura del líquido si el volumen contenido en el recipiente disminuye? Explica tu respuesta, puedes ejemplificar si así lo consideras.
6. Si el volumen del líquido aumenta, ¿qué ocurre con la altura del líquido? Explica.
7. ¿Es posible afirmar que existe una relación entre la altura y el volumen del líquido? Explica tu respuesta.

Tarea 2: Cuantificando los cambios

1. Completa la siguiente tabla (Tabla 1), determinando la altura y el volumen del líquido que se vierte en el recipiente de la Casa de Fragancias Luchy. Recuerda utilizar la unidad de medida establecida y especificar el procedimiento que usaste para completar cada espacio de la tabla.

Volumen (Número de copas)	**Altura del líquido (cm)**
0	
1	
	3 cm

6	
	9 cm
10	
11	

Tabla 1

A partir de los datos que obtuviste, responde las siguientes preguntas:

A. ¿Cómo podrías determinar la altura del líquido (sin hacer los cálculos con regla) en los siguientes momentos:

- 2.5 unidades de líquido
- 4.25 unidades de líquido

¿Qué puedes concluir al comparar con la medición de la regla?

B. Indica cuánto cambió la altura del líquido en los siguientes momentos:

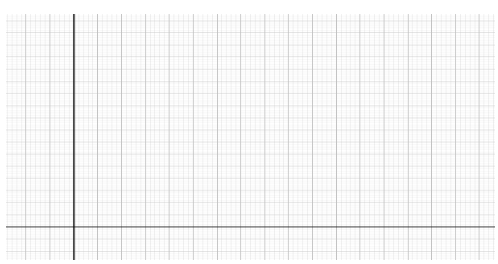
- después de iniciar con 2 copas de líquido, se agrega una más.
- después de iniciar con 5 copas de líquido, se agrega una más.

¿Qué particularidad encuentras en esos momentos?

2. ¿Cuánto cambia la altura del líquido a medida que se añade o quita una unidad de líquido?
3. Si el número de unidades de líquido se representa con la letra x, y la altura con la letra h, escribe una expresión que relacione la altura del líquido en términos de x.
4. Según el contexto, ¿qué pasaría con la altura del líquido cuando se llene el recipiente con 16 unidades de líquido? Explica qué sucede.

Tarea 3: Graficando los cambios

1. Haciendo uso de los resultados de la tabla realizada en la Tarea 2, ubica los puntos en el plano cartesiano (ver Gráfica 1), en relación con la Altura del líquido (h) vs Unidades de líquido (x).



Gráfica 1

A partir de la gráfica que realizaste, responde las siguientes preguntas:

A. ¿Qué interpretación le puedes dar al punto (0,0) ubicado en la gráfica?

B. ¿Es posible determinar la altura del líquido para cualquier volumen entre 5 y 6 unidades? Explica tu respuesta.

A partir de tu respuesta anterior, analiza lo siguiente:

- ¿Consideras que esas correspondencias (coordenadas cartesianas) pertenecen a la Gráfica 1? (Altura del líquido vs Unidades de líquido) Justifica tu respuesta.
- ¿Qué implicaciones tiene el hecho de unir los puntos (5,5) y (6,6)?

2. Encuentra y señala más parejas ordenadas (coordenadas cartesianos) cuyos valores no sean enteros, de tal manera que representen el comportamiento del volumen y la altura del líquido, mientras se llena el recipiente.

Luego responde:

¿Puedes trazar (de seguido) la curva que representa el comportamiento del volumen y la altura del líquido que se vierte en el recipiente?

3. Según el contexto de la situación, la línea que usas para unir los puntos ubicados, ¿se puede extender indefinidamente? Explica.
4. ¿El punto (16,16) pertenece a la gráfica? Explica.
5. ¿Cuál es el punto (coordenada) máximo que puede tener la gráfica? Explica el significado de dicho punto en términos de la altura del líquido y las unidades de líquido
6. Según la gráfica, ¿es posible determinar la altura del líquido para medidas arbitrarias del volumen? Explica tu respuesta.

Tarea 4: Entendiendo el cambio de los cambios en el llenado del recipiente cilíndrico

Para recordar... **Abscisa** es el término que se emplea (en la geometría) para nombrar a la **coordenada horizontal** que forma parte de un **plano cartesiano**. Por su parte, la **Ordenada** corresponde a la **coordenada vertical** de un plano cartesiano.

Para calcular la distancia entre las abscisas y ordenadas de dos puntos, necesitas calcular Delta (distancia), es decir, la diferencia entre esas distancias coordenadas. Dicha diferencia, ya sea horizontal o verticalmente, se simboliza como **Δx** (para cambios en X o entre las abscisas de dos puntos) y como **Δy** (para cambios en Y o entre las ordenadas de dos puntos). La *Ilustración 5* es una representación gráfica general, de los deltas tanto en X como en Y (**Δx** y **Δy).**

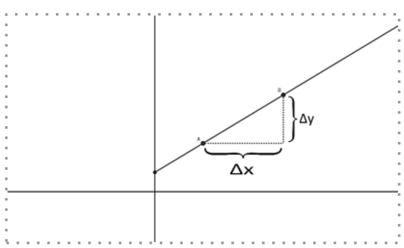
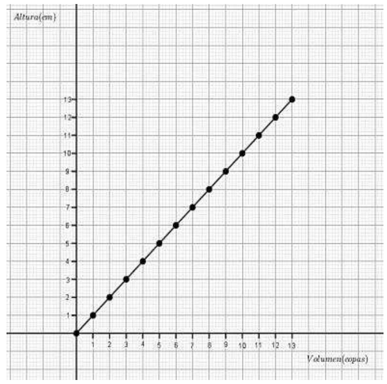


Ilustración 5

Para tener en cuenta... De acuerdo al contexto, el número de unidades de líquido (volumen) se representa con la letra x, y la altura con la letra h. En concordancia con ello, la **diferencia entre las abscisas** de dos puntos se ha de simbolizar como **Δx**, y la **diferencia entre las ordenadas** como **Δh**.

1. Escoge cinco parejas de puntos consecutivos (cualesquiera) de la Gráfica 2.



Gráfica 2

Y a partir de los valores de sus coordenadas, completa la Tabla 2, especificando tus procedimientos para cada dato que pongas en la tabla.

Punto	**Volumen (Número de copas)**	**Altura del líquido (cm)**	**Parejas de puntos**	**Diferencia de abscisas (Δx)**	**Diferencia de ordenadas (Δh)**	**Cociente entre $\frac{\Delta h}{\Delta x}$**

Tabla 2

Ten en cuenta: El cociente entre los cambios o diferencias en *y* y los cambios o diferencias en *x,* se denomina *razón de cambio*, y se puede calcular directamente de la siguiente manera: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$

Por ejemplo, entre los puntos A(1,4) y B(2,6) la razón de cambio es: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-4}{2-1} = \frac{2\uparrow}{1\rightarrow}$

Lo anterior significa que por *cada cambio en una unidad* en el eje de las abscisas, hay un *cambio de dos unidades* en el eje de las ordenadas.

2. Teniendo en cuenta el contexto de la situación y lo estudiado hasta ahora, analiza y responde lo siguiente:

A. Según el comportamiento de la altura del líquido (a medida que aumenta su volumen, ¿cuál es la razón de cambio que describe dicho comportamiento? Explica tu respuesta, con su respectiva interpretación en términos del contexto.

B. Si el volumen del líquido cambia en una unidad, ¿cómo es el cambio de su altura?

C. Entre los puntos A y N, señalados en la Gráfica 2:

   A medida que aumenta el volumen (en cantidades iguales), ¿cómo cambia la altura? Explica

   i. Explica el comportamiento de **Δh**, a medida que aumenta el volumen. (Recuerda explicar la interpretación de dicho comportamiento, de acuerdo al contexto de la situación).

3. Observa de manera simultánea las columnas **Diferencia de abscisas** y **Diferencia de ordenadas**, y describe cómo se comportan los cambios en **Δh** respecto a los cambios que ocurren en **Δx.** (Recuerda explicar la interpretación de dicho comportamiento, de acuerdo al contexto de la situación).

4. Suponiendo que no sabemos la ubicación de cada punto punto en la gráfica, ¿cómo podrías obtenerlos a partir de conocer **Δx** y **Δh**? Puedes apoyarte en un esquema o gráfica, si así lo consideras.

5. ¿Por qué razón consideras que la representación gráfica del llenado del recipiente de la Casa de Fragancias Luchy es una línea (recta)? Elabora un escrito de tal manera que tus compañeros puedan entender tu punto de vista.

Situación 2: El caso del recipiente de la Compañía Senses

Como segundo momento, el equipo contratado por la empresa Ariza continúa su investigación, analizando el recipiente de la segunda empresa mencionada, a saber, la Compañía Senses. Desde hace tiempo, la Compañía Senses ha estado utilizando un recipiente esférico (como el que se mostró en la Ilustración 2) para presentar sus perfumes, de tal modo que los clientes tengan la sensación de que este es parecido a una bola de cristal, de la cual se desprende un agradable aroma.


Ilustración 2


Ilustración 4

Tarea 1: Reconociendo diferencias en el recipiente de la Compañía Senses

1. Durante el llenado del recipiente esférico, hay ciertas magnitudes involucradas, ¿cuáles de esas magnitudes permanecen constantes y cuáles cambian o varían? Justifica tu respuesta.

2. ¿Qué sucede con el diámetro del recipiente a medida que aumenta el volumen del líquido? Explica tu respuesta. ¿Y si el volumen del líquido disminuye?
3. ¿Es posible que el líquido que se vierte en el recipiente de la Compañía Senses alcance una altura de 11cm? ¿Por qué?
4. ¿Qué sucede con la altura del líquido si el volumen contenido en el recipiente aumenta o disminuye? Explica tu respuesta para cada caso, puedes ejemplificar si así lo consideras.
5. ¿Qué altura alcanza el líquido en la mitad del recipiente, y qué volumen le corresponde a ese valor? Describe tu procedimiento.

Tarea 2: Centralizando la cuantificación de los cambios sobre el llenado del recipiente esférico

1. Construye una tabla en la cual muestres lo que ocurre con la altura y el volumen del líquido, cuando este (líquido) se vierte en el recipiente de la Compañía Senses. Recuerda utilizar la unidad de medida establecida y especificar el procedimiento que usaste para completar cada espacio de la tabla.

Validación de Tabla. Tras elaborar por completo tu tabla, busca a un compañero para analizar y discutir las siguientes cuestiones:

1. Explica cómo construiste la tabla que relaciona la altura y el volumen del líquido, a medida que se llena el recipiente de la Compañía Senses.
2. ¿Qué particularidades encuentras en la tabla que elaboró tu compañero?
3. Fíjate en los siguientes momentos del llenado del recipiente esférico, y registra tus valores y los de tu compañero:

Volumen (Número de vasos)	**Altura del líquido (cm) Pareja 1**	**Altura del líquido (cm) Pareja 2**
1		
2		
5		
6		
9		
12		
13		

4. ¿A qué creen que se debe ese comportamiento de las tablas? (La suya y la de tus compañeros). Explica; puedes ejemplificar si así lo consideras.

Finalmente, piensen en lo siguiente:

A. ¿Qué implicaciones puede tener trabajar con tablas de distintos valores?

B. ¿Qué podrían hacer al respecto?

Volumen (Número de vasos)	Altura del líquido (cm)
1	1.7 cm
2	2.5 cm
3	3.1 cm
4	3.6 cm
5	4.3 cm
6	5.1 cm
7	5.7 cm
8	6.2 cm
9	6.7 cm
10	6.9 cm
11	7.8 cm
12	8.8 cm
13	10 cm

Tabla 3

A partir de la información de la Tabla 3, responde las siguientes preguntas:

A. ¿Cómo podrías determinar la altura del líquido (sin hacer los cálculos con regla) en los siguientes momentos:
   - 1.5 unidades de líquido
   - 5.25 unidades de líquido

¿Qué puedes concluir al comparar con la medición de la regla?

B. Indica cuánto cambió la altura del líquido en los siguientes momentos:
   - después de iniciar con 2 vasos de líquido, se agrega uno más.
   - después de iniciar con 4 vasos de líquido, se agrega uno más. .

¿Qué particularidad encuentras en esos momentos?

2. Describe qué ocurre en el volumen y la altura del líquido, cuando este (líquido) sobrepasa la primera mitad del recipiente

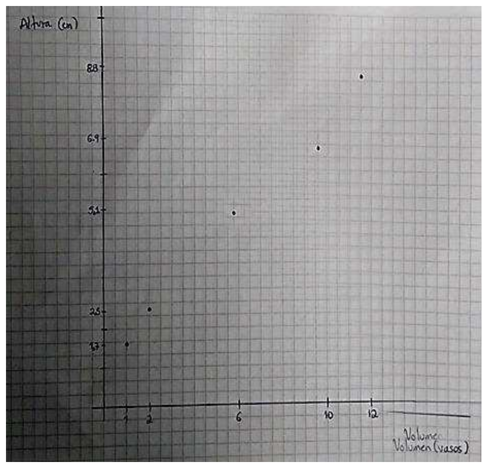
Después responde lo siguiente:

- ¿Qué particularidad encuentras en el comportamiento del volumen y la altura del líquido, en esos momentos del llenado del recipiente?

- ¿A qué crees que se debe ese comportamiento en la altura del líquido, cuando este (líquido) sobrepasa la primera mitad del recipiente? Explica tu respuesta.

3. ¿De qué manera cambia o varía el volumen y la altura del líquido, a medida que se agregan unidades de este (líquido)? Explica.
4. ¿Es posible afirmar que los cambios que sufre la altura del líquido, a medida que se llena el recipiente, son constantes? Explica tu respuesta.

5. Tomando en consideración los puntos (1,1.7); (2,2.5); (6,5.1); (10,6.9) y (12,8.8), los cuales definen parte de la gráfica Altura vs Volumen (Gráfica 3):



Gráfica 3

A. Completa el bosquejo de la gráfica que relaciona el volumen y la altura del líquido, mientras se llena el recipiente de la Compañía Senses. Luego responde:

- Describe cómo es la gráfica (curva) que relaciona dichas magnitudes (Altura vs Volumen).
- ¿Por qué puedes trazar (de seguido) dicha curva? Justifica tu respuesta; puedes ejemplificar si así lo consideras.
- ¿Desde y hasta dónde puedes trazar la gráfica (curva) que representa el llenado del recipiente de la Compañía Senses? Explica tu respuesta; recuerda acudir al contexto (para explicitar tu interpretación).

B. Según el contexto, ¿cómo se reflejan en la gráfica, las marcas que hiciste en el recipiente esférico? Explica tu respuesta; puedes ejemplificar si así lo consideras.
C. ¿El punto (5.5, 4.5) pertenece a la Gráfica 3? Justifica tu respuesta, en términos del contexto.

6. ¿Por qué razón consideras que los puntos coordenados ubicados hacia la primera mitad de la gráfica, son tan cercanos?
7. ¿Existe alguna relación entre la variación de los cambios en la altura del líquido y la forma del recipiente de la Compañía Senses? Explica.
8. ¿Qué particularidad encuentras entre las coordenadas cartesianas de la primera y segunda mitad de la gráfica?

    - Describe qué significa el punto (6.5, 5.4) ubicado en la gráfica.

- ¿Qué interpretación puedes hacer al hecho de que a partir de la mitad de la gráfica, el comportamiento (ubicación de los puntos) parece invertirse, con respecto a la primera parte de la gráfica? Recuerda acudir al contexto.

9. A medida que llenas el recipiente de la Compañía Senses, ¿en qué momento(s) necesitas mayor cantidad de líquido para que la altura (del líquido) aumente significativamente? Explica tu respuesta; puedes ejemplificar si así lo consideras.

Tarea 3: Estudiando el cambio de los cambios en el llenado del recipiente esférico

1. Escoge cinco parejas de puntos consecutivos (cualesquiera) de la primera mitad de la Gráfica 4, y otras cinco parejas de puntos (consecutivos) correspondientes a la otra mitad de esta (gráfica). Gráfica 4. Y a partir de los valores de sus coordenadas, completa la Tabla 4, especificando tus procedimientos para cada dato que pongas en la tabla.

<table>
<tr><th>Punto</th><th>Volumen (Número de copas)</th><th>Altura del líquido (cm)</th><th>Parejas de puntos</th><th>Diferencia de abscisas (Δx)</th><th>Diferencia de ordenadas (Δh)</th><th>Cociente entre $\frac{\Delta h}{\Delta x}$</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabla 4

2. Teniendo en cuenta el contexto de la situación y lo estudiado hasta ahora, analiza y responde lo siguiente:
   A. Según el comportamiento de la altura del líquido (a medida que aumenta su volumen), ¿cuál es la razón de cambio que describe dicho comportamiento? Explica tu respuesta, con su respectiva interpretación en términos del contexto.
   B. Si el volumen del líquido cambia en una unidad, ¿cómo es el cambio de su altura?
   C. Entre los puntos A y O, señalados en la Gráfica 4:

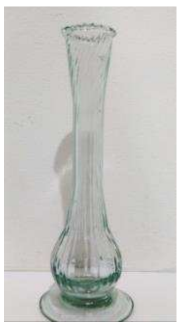
   A medida que aumenta el volumen (en cantidades iguales), ¿cómo cambia la altura? Explica

   i. Explica el comportamiento de **Δh**, a medida que aumenta el volumen. (Recuerda explicar la interpretación de dicho comportamiento, de acuerdo al contexto de la situación).
3. Observa de manera simultánea las columnas **Diferencia de abscisas** y **Diferencia de ordenadas**, y describe cómo se comportan los cambios en **Δh** respecto a los cambios que ocurren en **Δx.** (Recuerda explicar la interpretación de dicho comportamiento, de acuerdo al contexto de la situación).
4. ¿Qué caracteriza el comportamiento de la altura del líquido mientras su volumen aumenta? Explica tu respuesta, puedes ejemplificar si así lo consideras.
5. ¿Cómo se podrían interpretar las distancias entre las marcaciones (marcas) que hiciste en el recipiente de la Compañía Senses? Justifica tu respuesta.
6. ¿Es posible afirmar que existe una relación entre la altura y el volumen del líquido? Explica tu respuesta.
7. ¿Cómo se reflejan en la gráfica los incrementos de la altura del líquido que se vierte en el recipiente de la Compañía Senses? Justifica tu respuesta
8. Suponiendo que no sabemos la ubicación de cada punto en la gráfica, ¿cómo podrías obtenerlos a partir de conocer **Δx** y **Δh**? Puedes apoyarte en un esquema o gráfica, si así lo consideras.
9. ¿Por qué razón consideras que la representación gráfica del llenado del recipiente de la Compañía Senses es curva? Elabora un escrito de tal manera que tus compañeros puedan entender tu punto de vista.

Situación 3: Análisis del nuevo recipiente de la empresa Ariza

Después de analizar los respectivos recipientes de la Casa de Fragancias Luchy y de la Compañía Senses, el equipo de expertos contratado por la empresa Ariza, presenta un informe detallado de su investigación. En dicho informe señalan que ambos recipientes tienen importantes características, las cuales inciden en la escogencia de uno u otro de ellos por parte de los usuarios. Uno de los resultados reportados por el equipo de expertos tiene que ver con la cantidad de líquido (sustancia aromática) que cabe en cada recipiente. Este asunto lo estudiaron mediante el llenado de los recipientes cilíndrico y esférico, y encontraron que con sus respectivas unidades de medida (copa y vaso), la Casa de Fragancias Luchy y la Compañía Senses ofrecen la misma cantidad de sustancia aromática (líquido) a sus usuarios.

A pesar de lo positivo y prometedor del informe presentado por el equipo de expertos, al final de este subrayan una cláusula de la Cámara de Comercio, la cual impide utilizar los recipientes cilíndrico y esférico, a causa de que son 'marcas registradas'. Lo anterior significa que la empresa Ariza no puede utilizar ninguno de estos dos recipientes para lanzar su nueva línea de perfumes. Tras esta eventualidad y para no desaprovechar los hallazgos encontrados por el equipo de expertos, la empresa Ariza decide fabricar un nuevo recipiente. Pasado cierto tiempo, se conoce que el nuevo recipiente involucra algunas características de los ya analizados. El prototipo de este es como el que se muestra en la *Ilustración 6*, acompañado de su respectiva unidad de medida, a saber, una jeringa sin aguja (*Ilustración 7*).

 Ilustración 6	 Ilustración 7

Luego, la empresa Ariza encarga nuevamente al equipo de expertos, una investigación sobre este recipiente, con el objetivo de verificar si cumple con los estándares que se requieren.

Tarea 1: Estableciendo parámetros del recipiente de la empresa Ariza

1. ¿Cuáles de las magnitudes involucradas en el llenado de este nuevo recipiente permanecen constantes y cuáles cambian o varían? Explica tu respuesta.
2. ¿Qué sucede con el diámetro del recipiente a medida que aumenta el volumen del líquido? Explica tu respuesta. ¿Y si el volumen del líquido disminuye?
3. ¿Es posible que el líquido que se vierte en el recipiente de la empresa Ariza alcance una altura de 16 cm? ¿Por qué?
4. ¿Qué sucede con la altura del líquido si el volumen contenido en el recipiente aumenta o disminuye? Explica tu respuesta para cada caso, puedes ejemplificar si así lo consideras.
5. ¿Qué altura alcanza el líquido en la mitad del recipiente, y qué volumen le corresponde a ese valor? Describe tu procedimiento.

Tarea 2: Agrupando la cuantificación de los cambios sobre el llenado del recipiente mixto

1. Construye la tabla que muestra lo que ocurre con la altura y el volumen del líquido, cuando este (líquido) se vierte en el recipiente de la empresa Ariza. Recuerda utilizar la unidad de medida establecida y especificar el procedimiento que usaste para completar cada espacio de la tabla. Tabla 5

Validación de Tabla.

A. Comparen los resultados de su tabla con los de otra pareja de compañeros.
B. ¿Qué particularidades encuentran en esos valores? Explica; puedes ejemplificar si así lo consideras.
C. En relación con el comportamiento de las tablas, ¿se debe hacer algo respecto? Justifica tu respuesta

----

A partir de la información de la Tabla 5, responde las siguientes preguntas:

A. Determina la altura del líquido (sin hacer los cálculos con regla) en los siguientes momentos:
   - 1.5 unidades de líquido
   - 5.25 unidades de líquido

¿Qué puedes concluir al comparar con la medición de la regla?

B. Indica cuánto cambió la altura del líquido en los siguientes momentos:
   - después de iniciar con 3 jeringas de líquido, se agrega una más.
   - después de iniciar con 4 jeringas de líquido, se agrega una más.

¿Qué particularidad encuentras en esos momentos?

2. Describe qué ocurre en el volumen y la altura del líquido, cuando este (líquido) sobrepasa el primer tercio (de la altura) del recipiente.

Después responde lo siguiente:

- ¿Qué particularidad encuentras en el comportamiento del volumen y la altura del líquido, en esos momentos del llenado del recipiente?
- ¿A qué crees que se debe ese comportamiento en la altura del líquido? (Cuando éste sobrepasa el primer tercio del recipiente) Explica tu respuesta.

3. ¿De qué manera cambia o varía el volumen y la altura del líquido, a medida que se agregan unidades de este (líquido)? Explica.
4. ¿Es posible afirmar que los cambios que sufre la altura del líquido, a medida que se llena el recipiente, son constantes? Explica tu respuesta.

5. Realiza el bosquejo de la gráfica (Gráfica 5) que relaciona el volumen y la altura del líquido, mientras se llena el recipiente de la empresa Ariza. Luego responde:

   A. Describe cómo es la gráfica que relaciona dichas magnitudes (Altura vs Volumen).
   B. ¿Por qué puedes trazar (de seguido) dicha gráfica? Justifica tu respuesta; puedes ejemplificar si así lo consideras.
   C. ¿Desde y hasta dónde puedes trazar la gráfica que representa el llenado del recipiente de la empresa Ariza? Explica tu respuesta; recuerda acudir al contexto (para explicitar tu interpretación).
   D. Según el contexto, ¿cómo se reflejan en la gráfica, las marcas que hiciste en el recipiente mixto? Explica tu respuesta; puedes ejemplificar si así lo consideras.

6. ¿Por qué razón consideras que los puntos coordenados ubicados hacia la primera mitad de la gráfica, son tan cercanos?
7. ¿A qué crees que se deba que los puntos coordenados ubicados hacia la segunda mitad de la gráfica parezcan colineales? (Posible unión mediante línea recta). Explica
8. ¿Existe alguna relación entre la variación de los cambios en la altura del líquido y la forma del recipiente de la Compañía Senses? Explica.

Tarea 3: Examinando el cambio de los cambios en el llenado del recipiente mixto

1. A partir de los valores de las coordenadas de seis parejas de puntos (consecutivos) de la Gráfica 5, completa la Tabla 5, especificando tus procedimientos para cada dato que pongas en la tabla.

Punto	Volumen (Número de jeringas)	Altura del líquido (cm)	Parejas de puntos	Diferencia de abscisas (Δx)	Diferencia de ordenadas (Δh)	Cociente entre $\frac{\Delta h}{\Delta x}$

Tabla 5

2. Teniendo en cuenta el contexto de la situación y todo lo estudiado hasta ahora, analiza y responde lo siguiente:
   A. Según el comportamiento de la altura del líquido (a medida que aumenta su volumen), ¿cuál es la razón de cambio que describe dicho comportamiento? Explica tu respuesta, con su respectiva interpretación en términos del contexto.
   B. Si el volumen del líquido cambia en una unidad, ¿cómo es el cambio de su altura?
   C. Explica el comportamiento de **Δh**, a medida que aumenta el volumen. (Recuerda explicar la interpretación de dicho comportamiento, de acuerdo al contexto de la situación).

3. Observa de manera simultánea las columnas **Diferencia de abscisas** y **Diferencia de ordenadas**, y describe cómo se comportan los cambios en **Δh** respecto a los cambios que ocurren en **Δx.** (Recuerda explicar la interpretación de dicho comportamiento, de acuerdo al contexto de la situación).
4. ¿Qué caracteriza el comportamiento de la altura del líquido mientras su volumen aumenta? Explica tu respuesta, puedes ejemplificar si así lo consideras.
5. ¿Cómo se podrían interpretar las distancias entre las marcaciones (marcas) que hiciste en el recipiente de la Compañía Senses? Justifica tu respuesta.
6. ¿Por qué razón consideras que la representación gráfica del llenado del recipiente de la Compañía Senses es curva? Elabora un escrito de tal manera que tus compañeros puedan entender tu punto de vista.

Anexo 3. Estructuración de las tareas de acuerdo con las categorías de análisis

Situación	Tarea	Categoría de Análisis	Preguntas asociadas[37]
1	**Tarea 1**	Elementos Matemáticos	P4
		Razonamiento Covariacional	P1, P2, P5, P6 y P7
		Graficación Covariacional	P2, P5 y P6
	Tarea 2	Elementos Matemáticos	P1, P4
		Razonamiento Covariacional	P2 y P3
		Graficación Covariacional	P2
	Tarea 3	Elementos Matemáticos	P1, P2, P3, P4, P5 y P6
		Razonamiento Covariacional	P1, P2 y P3
		Graficación Covariacional	P6
	Tarea 4	Elementos Matemáticos	P4
		Razonamiento Covariacional	P1, P2, P3, P4 y P5
		Graficación Covariacional	P1, P2, P3, P4 y P5
2	**Tarea 1**	Elementos Matemáticos	P3 y P5
		Razonamiento Covariacional	P1, P2, P4 y P5
		Graficación Covariacional	P1, P2 y P4
	Tarea 2	Elementos Matemáticos	P1, P4 y P5
		Razonamiento Covariacional	P1, P2, P3, P5, P6 y P7
		Graficación Covariacional	P1, P3, P4, P5, P6, P7, P8 y P9
	Tarea 3	Elementos Matemáticos	P1, P5 y P8
		Razonamiento Covariacional	P1, P2, P3, P4, P6, P8 y P9
		Graficación Covariacional	P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8 y P9
3	**Tarea 1**	Elementos Matemáticos	P3 y P5
		Razonamiento Covariacional	P1, P2, P4 y P5
		Graficación Covariacional	P1, P2 y P4
	Tarea 2	Elementos Matemáticos	P1, P4 y P5
		Razonamiento Covariacional	P1, P2, P3, P5, P6, P7 y P8
		Graficación Covariacional	P1, P3, P4, P5, P6, P7 y P8
	Tarea 3	Elementos Matemáticos	P5
		Razonamiento Covariacional	P1, P2, P3, P4 y P6
		Graficación Covariacional	P1, P2, P3, P4, P5 y P6

[37] Las convenciones se relacionan de la siguiente manera:
P=Pregunta / **P1**=Pregunta 1 / **P2**=Pregunta 2, etc.