

**EL FORTALECIMIENTO DE LA VISUALIZACIÓN NO ICÓNICA EN LA
SEMEJANZA DE FIGURAS A TRAVÉS DE UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA.**

Jesús Alberto Camacho

200934156-3469

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2018

**EL FORTALECIMIENTO DE LA VISUALIZACIÓN NO ICÓNICA EN LA
SEMEJANZA DE FIGURAS A TRAVÉS DE UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA.**

Jesús Alberto Camacho – 0934156

Trabajo de Grado para optar el título de
LICENCIADO EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Director

MG. JORGE ENRIQUE GALEANO CANO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI

2018

Agradecimientos

Agradezco fundamentalmente a las personas que cada día ofrecían su voz de aliento para sacar este proyecto adelante, un esfuerzo de años que se materializa en el deseo por culminar esta etapa. A mi familia, por acompañarme y motivarme cada día, a mi madre, la luchadora incansable que es ejemplo y faro fundamental para esta obra, al Sol de mi vida, porque sin sus palabras este trabajo no existiría. A los compañeros y amigos que me ayudaron y empujaron a culminar, con su disposición, revisión y tiempo para acompañar. Finalmente agradecer al Profe Jorge Enrique Galeano Cano por su paciencia, y por su “vamos a graduarnos”, infinita gratitud, porque esta etapa final fue verdadera escuela.

RESUMEN

El presente trabajo de grado tiene como fin presentar los resultados de la experiencia realizada en la I.E.T.I Veinte de Julio, del municipio de Santiago de Cali, Valle del Cauca, en la que se diseñaron e implementaron un conjunto de actividades a la luz de la metodología de los Experimentos de Enseñanza, con lo que se buscó fortalecer las actividades cognitivas de visualización y razonamiento, usando como proceso de validación, la explicación a través de la semejanza de figuras en el grado séptimo.

Los resultados y análisis de la aplicación del Experimento de Enseñanza, representan un acercamiento y un esfuerzo por conjugar esta metodología y esta teoría, de tal manera que se pueda abonar el terreno para establecer los alcances dentro de este amplio campo investigativo de la educación matemática

Palabras clave:

Visualización Icónica, Visualización No Icónica, Razonamiento, Validación, Prueba, Explicación, Experimentos de Enseñanza, Elementos Cognitivo

CONTENIDO

Resumen	4
CONTENIDO	1
CAPÍTULO I.....	7
PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA	7
1.1 Planteamiento del problema y contexto.....	7
1.2 Justificación.....	14
1.2.1 El Papel del docente	15
1.2.2 La geometría desde los Lineamientos curriculares y los Estándares Básicos de Competencias.....	18
1.2.3 La semejanza desde el pensamiento numérico.....	20
1.2.4 La semejanza desde el pensamiento espacial.....	21
La Semejanza en los Estándares Básicos de Competencia.	23
1.2.5 La geometría desde los registros de representación semiótica.....	26
La propuesta metodológica.	28
1.3 Antecedentes	30
1.4 OBJETIVOS	35
1.4.1 Objetivo general	35
1.4.2 Objetivos Específicos.....	35

CAPÍTULO 2	36
2.1 Lo cognitivo en la enseñanza de la geometría: La semejanza de figuras.....	36
2.1.1 La visualización en geometría.....	36
2.1.2 El razonamiento y la validación.....	42
2.2 Metodología	49
CAPÍTULO III	57
3.1 Experimentos de enseñanza: Un modelo para la aplicación de una actividad en la clase de matemáticas del grado Séptimo	57
3.1.1 Actividades propuestas para la implementación del Experimento de Enseñanza...	58
3.1.2 Elementos curriculares que intervienen en las actividades.....	68
3.1.3 Contenido de las actividades.....	69
3.2 Análisis de las situaciones propuestas en el aula.	71
3.2.1 Breve reseña de cada de las actividades.....	72
3.2.2 Descripción de los datos obtenidos.	74
3.3 Análisis de las Actividades.	90
3.3.1 La visualización.....	90
3.3.2 Razonamiento:.....	95
3.3.3 La Validación.	100
CONCLUSIONES	104
Bibliografía	109

TABLA DE FIGURAS

Ilustración 1 Intervención inicial en el salón de clases.....	75
Ilustración 2 Actividad 1. Explicación del trabajo a realizar por parte de un estudiante.....	76
Ilustración 3 Actividad 1. Explicación del trabajo realizado por un estudiante.....	77
Ilustración 4 Actividad 1. Explicación del trabajo realizado por un estudiante.....	78
Ilustración 5 Actividad 2. Explicación del trabajo a realizar por parte de un estudiante.....	80
Ilustración 6 Actividad 2. Explicación del trabajo realizado por un estudiante.....	81
Ilustración 7 Actividad 2. Explicación del trabajo realizado por parte de un estudiante en el tablero.	83
Ilustración 8 Actividad 3. Explicación del trabajo realizado por un estudiante.....	85
Ilustración 9 Actividad 3. Explicación de un estudiante del trabajo realizado.	86
Ilustración 10 Actividad 1. Evidencias del trabajo realizado por parte de un estudiante.	91
Ilustración 11 Actividad 2. Evidencia del trabajo realizado por parte de un estudiante	93
Ilustración 12 Evidencias del trabajo realizado por un estudiante.	94
Ilustración 14 Estudiantes establecen relación entre las áreas y los lados	98
Ilustración 15 Actividad 1. Evidencias de los argumentos de un estudiante.	100
Ilustración 16 Actividad 2. Evidencias de los argumentos de un estudiante	102

TABLA DE GRÁFICAS

Gráfica 1 Resultados de las pruebas saber 2017 en la I.E.T.I. Veinte de Julio de Cali	13
Gráfica 2 Familia de Triángulos rectángulos	60
Gráfica 3 Actividad 2. Familia de imágenes homotéticas.....	61
Gráfica 4 Actividad 1 Consigna 2	61
Gráfica 5 Actividad 1. Consigna 3	62
Gráfica 6 Actividad 2. Introducción.....	63
Gráfica 7 Actividad 2 Consigna 1	64
Gráfica 8 Actividad 2 Consigna 2.....	65
Gráfica 9 Actividad 3. Consigna 1	66
Gráfica 10 Actividad 3. Consigna 2	67

INTRODUCCIÓN

Este trabajo presenta los esfuerzos por poner en práctica aspectos de la teoría cognitiva de Duval, quien en sus estudios de la semiosis y el pensamiento humano ha generado importantes aportes a la enseñanza de las matemáticas y en particular la enseñanza de la geometría, con sus especificidades y el conjunto de aproximaciones que deben tenerse en cuenta para fortalecer el aprendizaje de estas áreas.

Este trabajo ofrece resultados obtenidos por medio de un Experimento de Enseñanza que se ha diseñado con elementos de la teoría cognitiva propuesta por Duval, este Experimento de Enseñanza recoge elementos que se deben tener en cuenta en el momento de un diseño para una actividad en geometría, sus alcances, limitaciones y recomendaciones sobre el mismo.

En consecuencia, el presente trabajo enmarcado en los Experimentos de Enseñanza y la teoría semiótico – cognitiva de Duval, establece un nuevo referente en la búsqueda de soluciones que ayuden a los estudiantes a potenciar las actividades cognitivas de visualización y razonamiento en el aprendizaje y desempeño en matemáticas.

Los resultados y análisis de la aplicación del Experimento de Enseñanza, representan un acercamiento y un esfuerzo por conjugar esta metodología y esta teoría, de tal manera que se pueda abonar el terreno para establecer los alcances dentro de este amplio campo investigativo de la educación matemática.

Este trabajo presenta 3 capítulos en los que se describen los antecedentes, justificaciones, diseño y puesta en práctica de la conjunción. En el capítulo 1 se presenta la problemática del aprendizaje de la geometría y en particular de la semejanza de figuras, proponiendo estudiar las actividades cognitivas de visualización y razonamiento, así como los métodos de demostración

que permiten su posterior visualización, con el fin de explorar la posibilidad de mejorar el desempeño de los estudiantes del grado séptimo de la I.E.T.I. Veinte de Julio del municipio de Santiago de Cali, en el Valle del Cauca.

En el capítulo 2 se encuentran consignados aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría desde un punto de vista cognitivo, en el que se busca unir elementos que cimienten una propuesta de intervención en el aula con los estudiantes del grado séptimo de la I.E.T.I. Veinte de Julio, que permita potenciar las actividades cognitivas de visualización y razonamiento. En este capítulo también se presenta la metodología que se adoptará en la intervención señalando cada una de las fases de la propuesta.

En el capítulo 3 se presenta la propuesta, sus resultados y el análisis de la misma, dando cuenta de los elementos que se tuvo en cuenta que intervienen en las situaciones planteadas y desarrolladas por los estudiantes en la intervención en el grado 7° – 4 de la I.E.T.I. Veinte de Julio de Cali.

Finalmente se presentan las Conclusiones a las que se llegó con el desarrollo de este trabajo.

CAPÍTULO I

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

En este capítulo se presenta la problemática del aprendizaje de la geometría y en particular de la semejanza de figuras, proponiendo estudiar las actividades cognitivas de visualización y razonamiento, así como algunas acepciones de la demostración en el contexto escolar, como la prueba o la explicación, a través de los cuáles se valida su posterior visualización, con el fin de explorar la posibilidad de mejorar el desempeño de los estudiantes del grado séptimo de la I.E.T.I. Veinte de Julio del municipio de Santiago de Cali, en el Valle del Cauca. De igual manera, se encuentran los elementos curriculares que apoyan el planteamiento de esta propuesta.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y CONTEXTO.

Corresponde al Estado, a la sociedad y a la familia velar por la calidad de la educación y promover el acceso al servicio público educativo, y es responsabilidad de la nación y de las entidades territoriales, garantizar su cubrimiento (Artículo Ley 115)

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) se ha venido preocupando por la formación de los estudiantes, tanto en lo académico como en la relación con la sociedad, orientaciones que los docentes en formación y los maestros en ejercicio deben impulsar para estar a la vanguardia de los avances y las necesidades que la sociedad y los estudiantes del S. XXI demandan.

Desde hace tres décadas, la comunidad colombiana de educadores matemáticos viene investigando, reflexionando y debatiendo sobre la formación matemática de los niños, niñas y jóvenes y sobre la manera como ésta puede contribuir más eficazmente a las grandes metas y propósitos de la educación actual. (Ministerio de Educación Nacional, 2006, pág. 46)

La escuela juega un papel trascendental en los procesos de enseñanza y aprendizaje al que se exponen los estudiantes, como señala Bourdieu al ser citado (Rodríguez, 2010, pág. 115) sobre la

escuela, es “una instancia de reproducción de las relaciones sociales de dominación y, por lo tanto, de las formas de conciencia y representación ideológica que le dan legitimidad”, es decir, la escuela es un reflejo del entorno social y cultural que rodea al estudiante, lo cual hace necesaria una valoración de la situación que estos viven para lograr de forma efectiva una relación entre el entorno, el docente, el estudiante y los conocimientos que se enseñan, para lograr que dichos conocimientos puedan ser comprendidos y aplicados en los diferentes escenarios con los que el estudiante se pueda encontrar.

El docente tiene el deber de estar consciente de los retos que la sociedad le impone e intentar hacer una “recontextualización y una re-personalización de los conocimientos”, proceso que debe ir de la mano con el conocimiento del entorno y de las formas de relación que tienen los estudiantes. Un factor que ayudaría en este proceso sería incluir, por ejemplo, problemas con situaciones en contexto, uso de herramientas tecnológicas o material manipulativo, buscando que el ambiente de aprendizaje de la escuela sea más significativo para el estudiante, de tal forma que puedan hacer una “redescontextualización” y una “redespertonalización” de las situaciones planteadas, a fin de identificar el conocimiento presentado por el docente en cada una de las situaciones planteadas. (Ministerio de Educación Nacional, 1998, pág. 14)

La escuela en ocasiones ha delegado en los estudiantes la responsabilidad del aprendizaje de las diferentes áreas, sabiendo que no es solo un asunto de quién aprende sino de quién enseña, y se considera que los estudiantes pueden aprender de forma independiente solamente si entran en contacto con el objeto que se pretende enseñar (Mora, 2003). Sin embargo, la tarea de traducir ese lenguaje científico y hacerlo accesible a los estudiantes deberá recaer en alguien que oriente el aprendizaje del estudiante, aquí la importancia del papel del maestro y del proceso de redescontextualización en beneficio de quien aprende.

La enseñanza de las matemáticas particularmente ha carecido de este proceso de redescontextualización, es decir, el proceso de adaptación de un conocimiento a condiciones particulares que permitan al estudiante encontrar el sentido de ese conocimiento, lo que ha ocasionado el surgimiento de nuevas estrategias de enseñanza que buscan plantear alternativas de solución a las problemáticas de comprensión que presentan los estudiantes (Rodríguez, 2010), las matemáticas críticas como tendencia en educación matemática y en términos metodológicos los Experimentos de Diseño y en particular los Experimentos de Enseñanza, son ejemplos de esta búsqueda de soluciones que “tienen potencial para hacer progresar las teorías del aprendizaje y enseñanza en situaciones complejas, y conduce a conocimiento empíricamente fundamentado que es útil en la toma de decisiones instructivas dirigidas a promover y mejorar el aprendizaje de los estudiantes.” (Molina, Castro, Molina, & Castro, 2011, pág. 76)

La comunidad matemática del país y el MEN a través de los Estándares Básicos De Competencia han planteado una ruptura con la enseñanza de la llamada “educación tradicional”, que consiste en el aprendizaje memorístico de una serie de axiomas, teoremas, definiciones y propiedades, señalando que el desarrollo de pensamiento lógico, la preparación para la ciencia y la tecnología no es exclusivo de la matemática sino de todas las áreas de la educación básica, pues esta debe servir a la formación en valores democráticos y debe ser universal, lo cual implica formar en matemáticas a todo tipo de alumnos independientemente de su preparación adecuada o deficiente en primaria y su interés por las mismas (Ministerio de Educación Nacional, 2006, pág. 47)

La comunicación de ideas en la actualidad frecuentemente se basa en la comparación de números y cantidades, y las matemáticas deben servir al desarrollo de la cotidianidad de las personas dándole sentido a las situaciones que se presentan; por ejemplo cuando el ministerio de

Hacienda informa a la ciudadanía que el mayor rubro del presupuesto para el 2018 es 22% para el servicio de la deuda pública nacional, debería saberse que 22 de cada 100 pesos se gastan en ese propósito; o que cuando una persona señala que un artículo es caro, se está refiriendo al costo de este artículo comparado con el de otros artículos semejantes o diferentes; una ama de casa está comparando cuando mide las cantidades de los ingredientes para hacer un pastel. El arquitecto con sus escalas y el dibujante de máquinas con sus diseños, están comparando longitudes de rectas en los dibujos con las longitudes reales correspondientes en el producto terminado (Hemmerling & Ralston, 1971).

En ese sentido uno de los aspectos fundamentales para precisar la percepción y la comparación a través de la visualización es la semejanza, pues con ella se comparan objetos de la misma forma, pero de distinto tamaño, de manera que uno es la imagen de otro, reducida o aumentada.

Los Estándares Básicos De Competencias matemáticas señalan de forma complementaria y progresiva la idea de semejanza, así al finalizar el grado 3º se espera que el estudiante reconozca la congruencia y semejanza entre figuras, al finalizar los grado 5º se espera que los estudiantes identifiquen y justifiquen las relaciones de congruencia y semejanza, al finalizar grado 7º se espera que el estudiante resuelva y formule problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales “al terminar grado séptimo el estudiante deberá resolver y formular problemas cuya solución requiera el análisis de representaciones visuales, por último al finalizar grado 9º se espera que los estudiantes apliquen y justifiquen criterios de semejanza de triángulos en la resolución y formulación de problemas (Ministerio de Educación Nacional, 2006)

Por otra parte en los Derechos Básicos de aprendizaje no se aprecia esta tendencia, pues la idea de semejanza es propuesta para el trabajo a desarrollar en el grado 1º y de allí se da un salto al grado 6º donde se espera que los estudiantes describan la congruencia y semejanza de figuras bidimensionales y tridimensionales así como identificar e interpretar la semejanza de figuras al realizar rotaciones, ampliaciones y reducciones, en grado 7º se espera que los estudiantes resuelvan problemas que impliquen la aplicación de los criterios de semejanza y finaliza en el grado 9º donde se espera que los estudiantes conjeturen a partir de los criterios de semejanzas (Ministerio de Educación Nacional, 2016).

De esta manera se puede apreciar que la enseñanza de la semejanza se encuentra presente en las diferentes etapas del proceso educativo y que deberían tener acogida en las diferentes regiones del país. En el Valle del Cauca, hay evidencias del interés por generar proyectos que aporten significativamente al fortalecimiento del aprendizaje en general de la geometría y en particular de la semejanza y congruencia de figuras. No obstante, hay municipios y seguramente en otras regiones se podrán documentar situaciones que evidencien lo contrario, es el caso de Buenaventura donde se dice que la enseñanza de la geometría transformacional se ha dejado de lado, como es el caso del reconocimiento de un plano cartesiano y la ubicación de puntos en el mismo, así como el caso de la homotecia la cual no se enseña por la forma en que es presentada en los libros de texto (lápiz y papel) y de la cual no tiene siquiera idea de su existencia (Ortíz & Angulo, 2016).

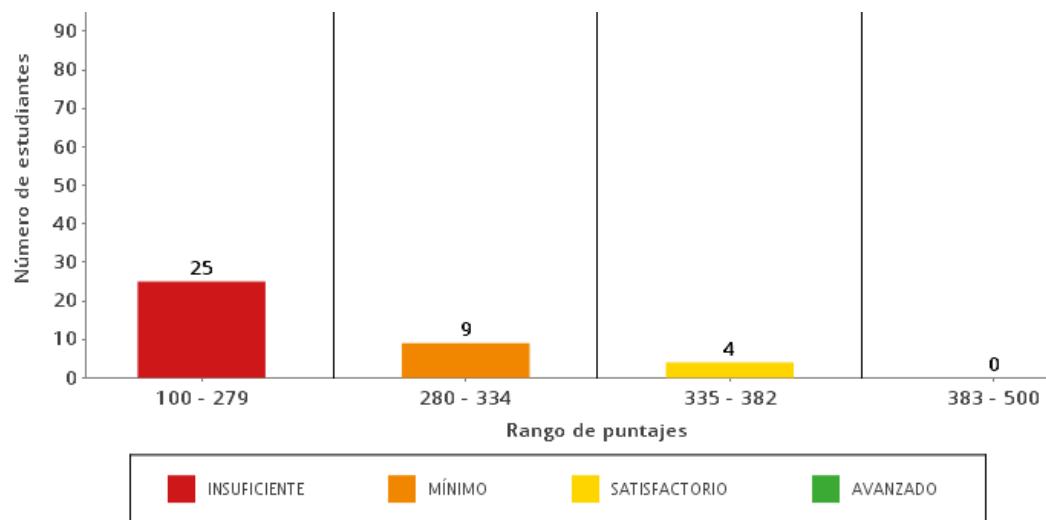
Sin embargo, la generalidad muestra que hay un interés creciente por profundizar, explorar y afianzar la enseñanza de la geometría en la escuela, es el caso del presente trabajo, así como el trabajo de bahamón & bonelo (2015), “los procesos de construcción, visualización y razonamiento en el desarrollo del pensamiento geométrico: un experimento de enseñanza”

dirigido a estudiantes del grado Sexto de una institución en el municipio de Yumbo, a través del cual se pretender fortalecer la construcción de pensamiento geométrico o el trabajo de Iquinás (2017) “Diseño de una situación de aprendizaje de la congruencia de triángulos para desarrollar las actividades cognitivas de visualización y razonamiento en los estudiantes de grado noveno del Colegio San Gabriel Fundesia” de la ciudad de Cali. Estas son algunas muestras del creciente interés por fomentar el desarrollo de pensamiento geométrico a través de la enseñanza de la semejanza.

Según lo propuesto por los Estándares Básicos de Competencias, la idea de ampliación o reducción es un concepto fundamental para explicar los procesos mentales usados para entender fenómenos naturales y la actividad cotidiana de la humanidad, por lo cual este trabajo propondrá un Experimento de Enseñanza que modele una situación en la que se aborde el concepto de semejanza de figuras, como herramienta para mejorar la visualización y el razonamiento sobre situaciones con las que los estudiantes se puedan enfrentar en diferentes contextos.

En el caso del colegio I.E.T.I. Veinte de Julio, existe la necesidad de fortalecer el desarrollo de pensamiento geométrico, cumpliendo así con las orientaciones impulsadas por el Ministerio de Educación Nacional y evitando que casos como el del municipio de Buenaventura sean una constante, un indicador de la importancia de trabajar este concepto y fortalecer los aspectos cognitivos se puede apreciar en las pruebas saber, cuyos resultados para grado 5º pueden ser mejores, y pueden mejorar en cada uno de los componentes de la prueba, pues según los resultados en el año 2017 en el grado quinto de esta institución solo 4 de 36 estudiantes alcanzaron un nivel satisfactorio en el área de matemáticas mientras que en el mismo ítem, del grado noveno solo 2 de 36 estudiantes alcanzaron este nivel, los demás estudiantes se encuentran muy por debajo de la media con puntajes mínimos o insuficientes (ICFES, 2018).

Gráfica 1 Resultados de las pruebas saber 2017 en la I.E.T.I. Veinte de Julio de Cali



Particularmente existe una transformación en el plano que nos permite trabajar este concepto, la homotecia, una figura homotética conserva su forma, pero cambia su tamaño, idea que se relaciona con las ampliaciones y reducciones.

Teniendo en cuenta el análisis de situaciones de clases son indispensables para proponer actividades que desarrollen el razonamiento de los estudiantes y su relación con el entorno, se tendrá como referente las consideraciones propuestas por Duval (2006) en cuanto a la operación de tratamiento en las actividades fundamentales de la representación ligadas a la semiosis, para proponer una actividad que permita movilizar los conocimientos y la comprensión de propiedades y resolución de problemas que involucren la semejanza entre figuras, particularmente a partir de las homotecias. Así mismo, por el estilo de trabajo basado en la investigación de diseño se basa en la metodología de la investigación cualitativa para hacer el análisis de las situaciones propuestas pues según lo propuesto por Monje (2011), la investigación cualitativa es inductiva, en tanto parte de datos para desarrollar la comprensión de conceptos y teorías, holística pues se centra en la interacción con grupos de personas, descriptiva porque

observa las situaciones que se presentan en el ambiente natural de las personas con las que se interactúa, por lo cual los registros se obtienen a partir de entrevistas, grabaciones, etc.

Para abordar esta problemática intentaremos dar respuesta al siguiente interrogante: ¿Cómo, a través de un Experimento de Enseñanza, planteado a partir de la teoría de investigación de diseño, se fortalece la comprensión y la visualización no icónica en la semejanza de figuras?

1.2 JUSTIFICACIÓN.

El Ministerio de Educación Nacional -MEN- ha trazado una política a través de los lineamientos curriculares que dan unas breves recomendaciones sobre la intencionalidad de la educación básica y media, mientras que los Estándares Básicos de Competencias intentan dar unas pautas de los mínimos conocimientos que un estudiante debe tener al terminar cada grado cursado. En matemáticas, los conceptos que conciernen a las transformaciones en el plano se encuentran enmarcados en el pensamiento espacial, particularmente la semejanza de figuras, y puntualmente la homotecia se encuentra en este pensamiento.

Partiendo del hecho de que las transformaciones hacen parte de diferentes procesos, modelos y que tienen una importante aplicación en la vida cotidiana, las homotecias son una transformación fundamental en la formación de los estudiantes, pues tiene una aplicación a través de la semejanza de figuras que se aplica con frecuencia en la vida cotidiana, es importante señalar las razones que sustentan dicha afirmación, para ello se considerará en este trabajo el rol del docente así como esta transformación desde la postura curricular, y como desde la perspectiva de los registros de representación semiótica.

1.2.1 El Papel del docente

Los profesores deben aceptar que la sociedad está en continuo cambio y que los retos que ella nos impone van más allá de la adaptación a nuevos reglamentos, decretos o reformas educativas, este será un factor básico para obtener éxito en la labor docente y en consecuencia la formación docente deberá tener un énfasis crítico de tal manera que pueda enseñárseles la capacidad de analizar el cambio social, en la habilidad para volver a orientar estrategias y metodologías de enseñanza y, sobre todo, en la capacidad de adaptación a un entorno cambiante resultan hoy elementos esenciales para orientar la formación docente (Esteve, 2009, pág. 21).

Hay un proceso histórico de aumento de las exigencias que se hacen al profesor, pidiéndole asumir cada vez mayor número de responsabilidades. En el momento actual un profesor no puede afirmar que su tarea se reduce simplemente a dar sus clases. Además de saber su materia, hoy se le pide al profesor que sea un facilitador del aprendizaje, pedagogo eficaz, organizador del trabajo del grupo y que, además de atender la enseñanza, cuide el equilibrio psicológico y afectivo de sus alumnos, la integración social, su formación sexual, etc. (Esteve, 2009, pág. 22)

Es decir, la enseñanza no se limita a trasladar conocimientos, también busca que el educando cree vínculos afectivos con sus pares, relaciones enmarcadas en el respeto por la diferencia, la idea de organización y trabajo en grupo, de tal manera que existan condiciones suficientes que estimulen la motivación, el interés por aprender, por formarse, en ese sentido el rol del docente es el de formar personas reflexivas que sean capaces de discutir y de pensar en lo conveniente y lo inconveniente para su entorno y que además sean capaces de llevar sus aprendizajes a eventos de la vida cotidiana (Rodríguez, 2010).

En los procesos de redescontextualización y redespertonalización a los que hace referencia el Ministerio de Educación Nacional, la labor del docente es buscar aterrizar conceptos y explicarlos a partir de situaciones con las que los estudiantes puedan estar familiarizados, desde esta perspectiva es conveniente pensar en la labor del docente como un proceso previo que incluye el análisis del concepto, una estrategia que permita fundamentarlo en la clase y un

análisis de lo propuesto con el objetivo que los estudiantes puedan identificar y contrastar sus resultados y aprendizajes con lo que propone la comunidad científica, es decir, es un proceso en doble vía, redescontextualización para que el estudiante comprenda el concepto y redespersionalización para que el estudiante sea capaz de llevar ese concepto a un nivel abstracto (Ministerio de Educación Nacional, 1998, pág. 99).

Según el MEN, los docentes deben garantizar un modelo de micro sociedad científica en donde los estudiantes tengan la posibilidad de debatir y razonar sobre los problemas que se plantean, así mismo se plantea que la educación matemática “propicie aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales, que no sólo haga énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos sino en procesos de pensamiento ampliamente aplicables y útiles para aprender cómo aprender” (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

Como señala (Vélaz de Medrano & Vaillant, 2009, pág. 11) “los docentes importan para influir en el aprendizaje de los estudiantes y para mejorar la calidad de la educación. Importan, en definitiva, como un recurso necesario e imprescindible para la sociedad del conocimiento”. Es decir, los docentes tienen un papel fundamental en el proceso de formación integral del estudiante, no solo de forma académica sino como sujeto crítico y reflexivo, este acercamiento mejorará el desarrollo de las capacidades del estudiante lo cual implicará un avance en términos sociales y culturales de su país y de la sociedad en general.

En particular, Rodríguez (2010) hace una crítica a la forma como se enseña la matemática en la escuela y el papel del docente en la misma, sustentando que la forma mecanicista y repetitiva de enseñar matemáticas ha alejado al estudiante del desarrollo de pensamiento lógico y ha castrado el pensamiento crítico, puesto que no se devuelven a revisar la aprehensión del conocimiento sino que se da por hecho que se sabe o no se sabe y es menester del docente lograr

que el educando reflexione sobre las diferencias y los estilos de aprendizajes que tienen llevando el conocimiento a su entorno, a su contexto.

Las matemáticas son una herramienta que van más allá de la memorización de reglas y algoritmos, estas potencian la capacidad de pensar y razonar, procesos que son fundamentales en la vida de toda persona. Pero esta actividad depende del nivel de madurez que tengan las personas, es por eso que enseñar de forma adecuada matemáticas desde los primeros años brindará una mejor capacidad de razonamiento.

En consecuencia, uno de los roles fundamentales del docente en el proceso de enseñanza de las matemáticas es el de interactuar con el estudiante con el fin de construir y validar conocimiento, para ejercer la iniciativa y la crítica y para aplicar ese conocimiento en diversas situaciones y en su contexto. (Ministerio de Educación Nacional, 2006, pág. 48)

La investigación basada en diseño ofrece una alternativa para romper con este paradigma y permitir que el docente – investigador tome una actitud participativa y deliberante en el proceso de aprendizaje, en particular los Experimentos de Enseñanza buscan a través de los análisis locales encontrar la mejor manera de presentar una actividad con el ánimo de que el estudiante obtenga un mejor acercamiento al concepto propuesto, por lo cual el docente deberá estar atento a los planteamientos e hipótesis que los estudiantes tengan sobre la temática en cuestión, de esta manera el objetivo no es que el docente obtenga una serie de calificaciones o dar respuesta a una problemática sino obtener un conjunto de herramientas que le permitan rediseñar en caso de ser necesario la actividad propuesta, dicho de otra forma, también se espera que el docente construya conocimiento durante el experimento. (Molina, Castro, Molina, & Castro, 2011)

1.2.2 La geometría desde los Lineamientos curriculares y los Estándares Básicos de Competencias.

Los Lineamientos Curriculares surgen de la necesidad de organizar el área de matemáticas en el país y como una herramienta que permite promover y orientar los procesos curriculares del área de matemáticas en las instituciones educativas arrojando por último una reflexión sobre la profesión docente. En cuanto a los estudiantes busca “el desarrollo de competencias que permitan afrontar los retos actuales como la complejidad de la vida y del trabajo” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, pág. 7). Todos estos aspectos se tienen en cuenta con el fin de que la comunidad educativa pueda tener acceso a una propuesta que permite enriquecer el currículo, sin determinar los contenidos ni la manera como se enseña, es decir, sin violar la autonomía escolar alcanzada y plasmada en la Ley 115 de 1994.

Así mismo los Estándares Básicos de Competencias sugieren incluir en los docentes una “visión de las matemáticas como creación humana culturalmente mediada y de incidencia en la vida social, cultural y política de los ciudadanos.” (Ministerio de Educación Nacional, 2006, pág. 48) lo cual permitirá fomentar en los estudiantes pensamiento crítico, con herramientas necesarias para desarrollar sus vidas en una sociedad que busca cada vez más ciudadanos competentes cívica y académicamente.

Además, busca estar a la vanguardia de los avances en término de la enseñanza de las matemáticas a nivel mundial por lo cual cobra importancia la participación del país en las pruebas internacionales como son las FIMS, SIMS y TIMSS¹, por sus siglas en inglés, en consecuencia, también se recoge para la organización de estos lineamientos lo planteado en los

¹ Las siglas mencionadas, hacen referencia a pruebas internacionales que evalúan el rendimiento educativo de los países participantes, entre ellos Colombia.

documentos del TIMSS en lo relacionado al currículo y con los factores que favorecen o dificultan los logros de los estudiantes.

También, se tienen en cuenta los resultados de las pruebas nacionales para realizar el diagnóstico que derivó en el contenido de los lineamientos, las evaluaciones realizadas por el ICFES también serán tenidas en cuenta para el desarrollo de este trabajo como referente importante para la aplicación del Experimento de Enseñanza.

Los lineamientos curriculares ubican el origen histórico, filosófico y epistemológico dentro del intuicionismo, es decir, son una construcción mental de lo que se percibe a través de los sentidos, considerando fundamentalmente que las matemáticas se pueden construir. Igualmente, la geometría por su carácter para interpretar, entender y apreciar el mundo, permite desarrollar el pensamiento espacial, que comprende entre otras, el uso de propiedades de las figuras, así como la representación intuitiva sobre figuras bidimensionales y tridimensionales, así como los efectos que ejercen sobre ellas las diferentes transformaciones a las que pueden ser sometidos (Ministerio de Educación Nacional, 1998, pág. 17).

Las discusiones amplias y democráticas planteadas por la comunidad matemática del país y condensadas en estos documentos que direccionan la enseñanza de las matemáticas en el país se condensan en una estructura curricular que los docentes tienen como herramienta para orientar su qué hacer diario. Los lineamientos curriculares con el argumento de contribuir al estudiante a asumir los retos del siglo XXI proponen una estructura curricular organizada en tres aspectos fundamentales:

1. *Los procesos generales*, los cuales tienen que ver con los procesos de aprendizaje en matemáticas de los estudiantes, estos son: el razonamiento, la modelación, la resolución de problemas, la comunicación, la ejercitación de procedimientos.
2. *Los conocimientos básicos*, que hacen referencia a los procesos específicos de la matemática y que se resumen en el desarrollo de los pensamientos matemáticos: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional.
3. *El contexto*, el cual hace referencia al ambiente en el que se rodea el estudiante y que da sentido a lo que él aprende, es decir, el reconocimiento de que el estudiante también hace parte de una sociedad, por lo cual su proceso de aprendizaje tendrá mayor sentido si se hace desde situaciones de la vida cotidiana y la relación de las matemáticas con otras áreas. (Ministerio de Educación Nacional, 1998, págs. 18-19)

Para tratar la temática propuesta en este trabajo, se abordará desde estos tres aspectos la homotecia, cómo aparece en contexto, qué conocimientos básicos deben tener en cuenta para abordarla y como desde allí se modela y se formulan problemas.

1.2.3 La semejanza desde el pensamiento numérico.

Teniendo en cuenta que “El pensamiento numérico incluye el sentido operacional, las habilidades y destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, las ordenes de magnitud etc.” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, pág. 26). Es preciso tener en cuenta la parte operacional o perceptiva de la semejanza, donde obtendremos el doble, el triple, o la mitad de una figura con respecto de otra, es decir, el trabajo previo en cuanto lo operacional es importante para el desarrollo como tal del concepto.

En tal sentido el pensamiento numérico hace referencia a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones que con ellos se pueden realizar, lo cual incluye

la interpretación que se da de un planteamiento para generar juicios y conclusiones sobre el mismo, es decir, se puede hablar de desarrollo de pensamiento numérico cuando el estudiante logra llevar lo aprendido a un contexto significativo (Ministerio de Educación Nacional, 1998, pág. 26).

Es preciso resaltar que si bien no se habla del componente geométrico o de transformaciones de figuras y en particular las semejanzas si se habla de conceptos que se deben tener en cuenta en el momento de realizar dicha transformación, es el caso por ejemplo al realizar una homotecia de un paralelogramo ABCD con un factor de conversión $f = 3$ se pide en la práctica multiplicar cada una de los puntos del paralelogramo por 3, de tal manera que se aterriza este concepto a uno semejante y que debe saberse en el momento de aplicarlo.

Lo importante, desde el punto de vista numérico, es reconocer que existe un resultado al aplicar una multiplicación que sirve al propósito de este trabajo, además se pretende que el estudiante logre dar un sentido al valor encontrado, una interpretación sobre si hay un aumento en el caso de la multiplicación por un número entero mayor que cero, una reducción en el caso de una multiplicación por un número entre 0 y 1, o de una imagen homotética inversa cuando la multiplicación por el factor de conversión es un numero negativo, el objetivo dentro de lo numérico es interpretar y saber utilizar las operaciones que me permiten alcanzar una conclusión acorde al problema planteado.

1.2.4 La semejanza desde el pensamiento espacial.

Enmarcada en el pensamiento espacial, la semejanza de figuras y en particular la homotecia como transformación de una figura hace parte de un conjunto de conceptos que se aprenden en la educación básica cuyo objetivo es acceder a un dominio progresivo de teorías que aportan al proceso de razonamiento de los estudiantes, apropiarse de las transformaciones y en particular de

la homotecia será clave para cumplir las orientaciones emanadas por el MEN y que brindará a los estudiantes herramientas para enfrentar los retos de la vida.

Como sostiene Howard Gardner sobre el pensamiento espacial (citado en Ministerio de Educación Nacional, 1998), “es esencial para el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, pág. 37). Este es un aspecto fundamental, enseñar a imaginar, buscar una estrategia que posibilite que los estudiantes se motiven por el acceso al conocimiento y que adquieran las competencias suficientes para poder enfrentar problemas de la vida cotidiana que requieran su uso, es decir, como se mencionó previamente, problemas de comparación y semejanza, pero también problemas de ubicación y distribución del espacio, que sean capaces de orientarse, incluso que sirvan de base para tener un buen desempeño en la mayoría de profesiones científicas y técnicas, en las cuales el desarrollo del pensamiento espacial es de gran impacto.

Teniendo en cuenta que el pensamiento espacial es considerado como el conjunto de procesos cognitivos que construyen y manipulan representaciones mentales de objetos del espacio, sus relaciones y las transformaciones que pueden aplicarse, la semejanza encaja perfectamente en este criterio, pues esta es considerada una transformación de la figura en la cual se crea una imagen semejante bien sea más amplia o algo reducida a la original, por tanto su aprendizaje aportará significativamente al desarrollo del pensamiento espacial, el cual en la práctica también debe servir a la interacción con mundo, con el entorno físico, social y cultural del estudiante (Ministerio de Educación Nacional, 1998)

La Semejanza en los Estándares Básicos de Competencia.

Los Estándares Básicos de Competencias (2006) establecen las competencias que en teoría todos los niños y niñas egresados de básica secundaria en Colombia debería saber, y saber hacer, por tanto, la escuela como la encargada de la formación de los jóvenes deberá velar por garantizar la adquisición de estas con calidad.

Particularmente la semejanza aporta a la adquisición de estas competencias en tanto es un elemento fundamental para la apropiación del espacio físico y geométrico a través de las relaciones espaciales de los objetos bidimensionales y tridimensionales. En este sentido es importante hacer una revisión de los Estándares Básicos de Competencias referentes a la semejanza.

- Estándares Básicos de Competencia (EBC) en el pensamiento espacial y los sistemas geométricos:
 - EBC – De primero a tercero. Reconozco congruencia y semejanza entre figuras (ampliar, reducir) (Ministerio de Educación Nacional, 2006, pág. 80)
 - EBC – De cuarto a quinto. Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras (Ministerio de Educación Nacional, 2006, pág. 82)
 - EBC - De cuarto a quinto. Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños (Ministerio de Educación Nacional, 2006, pág. 82)
 - EBC – De sexto a séptimo. Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales (Ministerio de Educación Nacional, 2006, pág. 84).

- EBC - De sexto a Séptimo. Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte (Ministerio de Educación Nacional, 2006, pág. 84).
- EBC – De octavo a Noveno. Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas (Ministerio de Educación Nacional, 2006, pág. 86)
- EBC – De Octavo a Noveno. Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas (Ministerio de Educación Nacional, 2006, pág. 86)
- EBC - De cuarto a quinto, Pensamiento numérico y Sistemas numéricos: Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.

En la organización de los Estándares Básicos de Competencias, desde el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, se da una significativa importancia al trabajo de la semejanza y la congruencia de figuras, como estrategia para incentivar el razonamiento en los estudiantes, esto teniendo en cuenta la intencionalidad de aplicar, de justificar, de validar en el contexto de la resolución de problemas, además, se ha elegido el concepto de razones y proporciones que interviene de manera directa en el desarrollo de las transformaciones de figuras que generan un aumento o una reducción, aunque no sea explícita la relación que existe entre estos conceptos tal como son presentados por los estándares y por los lineamientos, pues se encuentran en ubicaciones de grados diferentes y corresponden a pensamientos distintos. Esta vinculación entre los conceptos puede aportar al desarrollo integral de los pensamientos, pues los docentes tienen

la posibilidad de con diferente rigurosidad y en diferentes contextos para fortalecer la relación entre lo abstracto y su explicación.

Los Estándares Básicos de Competencias sugieren una serie de procesos generales que deben ser adquirido por los estudiantes y que por tanto se pueden integrar para permitir su aprehensión, en tal sentido se tomará esta sugerencia para abordar el trabajo en torno a la semejanza. El desarrollo de esta propuesta apunta a la consolidación de uno de los objetivos planteados por el Ministerio de Educación Nacional, el cual como se mencionó antes consiste en estar a la altura de los avances que los estudiantes y la sociedad demandan, si bien la homotecia se contempla solo en el grado séptimo también es claro que esta permite relacionar la geometría con el arte y la decoración, así como la ingeniería e incluso con representaciones de la naturaleza, como la reproducción de patrones en plantas y animales, es decir, en la presentación y modelación a escala de situaciones presentes en la vida cotidiana.

Siendo coherente con la propuesta de los Estándares Básicos de Competencias y entendiendo que los objetivos que intervienen en la homotecia apuntan a analizar situaciones es importante el aporte realizado por Ferrer (2015) quien considera los buenos resultados que tienen los estudiantes cuando se realizan discusiones con todos los miembros del curso como una oportunidad para el aprendizaje de las matemáticas. El trabajo al que se hace referencia propone un Experimento de Enseñanza mediante el cual se alcance el aprendizaje de la semejanza de figuras a través de las homotecias, las actividades se enmarcan en situaciones de la vida cotidiana como el aumento o la reducción de una fotocopia o de las hojas de los árboles y otras que son estrictamente del contexto matemático como lo es establecer la semejanza entre figuras poligonales o el uso del teorema de Tales, la organización de estas actividades en un ciclo

permite combinar el trabajo en parejas, una discusión en grupo y la reflexión individual, esta es la importancia del trabajo que servirá como referente para el presente proyecto.

1.2.5 La geometría desde los registros de representación semiótica

El primer elemento que se tiene en cuenta cuando se habla de conocimiento, incluida la geometría, es la representación, formalmente se ha tenido en cuenta en las diferentes áreas de estudio, la psicología, la educación, las ciencias, etc. No obstante, esta noción no es intrínseca al ser humano y ha tenido sus apariciones en tres momentos diferentes. La primera vez entre 1924 y 1926, presentada por Piaget en el estudio sobre la representación del mundo en el niño, como representación mental y se refería a las creencias y explicaciones de los niños pequeños sobre los fenómenos naturales y físicos. La segunda vez entre 1955 y 1960 como representación interna o computacional, en donde se describe como la forma bajo la cual una información puede tomarse en cuenta en un sistema de tratamiento. La tercera vez mas o menos desde 1985, presentada como representación semiótica, que ubican la representación en un sistema específico de signos. (Duval, 2004, págs. 25-27)

Para el propósito de este trabajo, es fundamental ubicar a la geometría en uno de estos tres registros de representación, la representación semiótica ofrece una estructura en la que es posible ubicar los gráficos cartesianos, la escritura algebraica o las figuras geométricas, pues es en estos sistemas donde el sujeto, en este caso un estudiante, puede generar una imagen mental, aunque sea confusa de la información que tiene y que pretende expresar; es decir, el aprendizaje de la geometría requiere necesariamente una estructura mediante la cual se puedan analizar los procesos cognitivos de visualización, construcción y razonamiento y que es distinto del lenguaje natural o de las imágenes, pues es necesario conseguir que una representación y el objeto que se

representa tengan una estrecha relación, dándole el significado que requiere para comprender conscientemente el objeto representado.

La visualización y la representación son procesos cognitivos que deben tener en cuenta para el planteamiento de cualquier actividad de clase que tenga una intencionalidad establecida, si es un proceso de construcción, o si es preciso el análisis de una determinada imagen para arrojar una conclusión sobre la misma, qué ver, cómo verlo, cómo tratarlo, qué decir del objeto, de tal manera que como señala Duval (2001), se logren habilidades de razonamiento y representación visual que favorezcan la sinergia necesaria en la enseñanza de la geometría entre estos dos procesos cognitivos.

Como procesos cognitivos fundamentales la visualización es muy importante para el proceso de la enseñanza de la geometría, en tanto permite desde el pensamiento espacial, ilustrar proposiciones, o generar heurísticas que permitan explorar situaciones que puedan ser complejas, para generar una posición o interpretación sobre aquello que se ve. Duval (2004) distingue dos tipos diferentes de visualización, la icónica y la no icónica, una hace referencia a cómo los estudiantes observan desde su percepción, desde los sentidos, mientras la segunda implica un acercamiento más directo con el objeto matemático de estudio, considerando como fundamental para la aprehensión de “lo que se ve” recurrir a propiedades, teoremas o hipótesis que sustenten el trabajo a realizar.

Por otra parte, el razonamiento, es entendido por Duval (2001) como un medio a través del cual se llega por medio del desarrollo de un proceso discursivo a la extensión del conocimiento por medio de la explicación o de la demostración. Desde esta perspectiva, la importancia del razonamiento en este trabajo tiene que ver con los procesos de validación que en él se encontrarán, particularmente los señalados por Samper, Camargo & Leguizamón (2003) en torno

a la explicación y la prueba, estos dos procesos sirven para ofrecer un acercamiento a la demostración y permiten que los estudiantes socialicen sus postulados sobre una determinada situación.

Fortalecer la visualización, el razonamiento y los procesos de validación que permitan la discusión democrática en el salón de clases es una de las expectativas que tiene el presente trabajo, como juntar estos tres diferentes procesos en pro de la formación, para abordar el análisis y la solución de problemas como problemas que incentiven la curiosidad y el espíritu indagador de los jóvenes.

La propuesta metodológica.

En términos metodológicos, el trabajo se enmarca por sus condiciones en la teoría cualitativa de investigación, pues establece una relación con los estudiantes, y un acercamiento a través del registro del desarrollo de las actividades que van a ser analizadas a través de la observación y la interacción con los estudiantes. La investigación cualitativa se nutre epistemológicamente de la interpretación de textos, interpretación de gestos, los fenómenos que inciden en el desarrollo de una situación y la interacción con el sujeto (Monje, 2011, pág. 12).

En esta metodología de Investigación se encuentra la Investigación Basada en Diseño, que establece un método para intervenir en el aula de clases y hacer análisis de las situaciones presentadas, este paradigma ha probado ser de utilidad particularmente en el campo de la enseñanza de las ciencias, específicamente en las matemáticas, los Experimentos de Enseñanza son definidos por Shavelson y Towne (2002, según cita Confrey, 2006) en “enfoques analíticos para examinar mecanismos que comienzan con ideas teóricas que son testadas a lo largo del diseño, implementación y estudio sistemático de herramientas educativas (currículo, métodos de enseñanza, applets informáticos) que dan cuerpo al mecanismo conjeturado inicialmente”

(Molina, Castro, Molina, & Castro, 2011). Según esta definición, el interés de este texto y la posibilidad de interacción que generan los Experimentos de Enseñanza, será esta la herramienta que se utilizará para el análisis de las actividades que se plantearán para el estudio de la enseñanza y el aprendizaje de la semejanza en la I.E.T.I Veinte de Julio de Cali, dado que se propondrá un diseño que será aplicado, analizado, retroalimentado y fortalecido para aplicar otras actividades con las correcciones que se generen a partir de las experiencias vividas, de tal manera que el análisis global de la situación posibilite la prueba y la explicación del concepto de semejanza de figuras por parte de los estudiantes a través de la visualización y el razonamiento.

1.3 ANTECEDENTES

En el presente apartado se presentarán los antecedentes nacionales e internacionales a partir de los cuales se sustenta este trabajo, recoge elementos que aportarán a los aspectos metodológicos y teóricos importantes para el diseño, aplicación, y resultados en un Experimento de Enseñanza.

En primer lugar, se encuentra el trabajo de Maestría “Diseño de situaciones para el trabajo con figuras geométricas basado en las operaciones cognitivas de construcción, visualización y razonamiento” de Galeano (2015), que propone, a partir de una perspectiva semiótica y cognitiva, un trabajo para el desarrollo del pensamiento espacial y, en particular, un acercamiento a las figuras geométricas como un modo de ilustrar las posibilidades de esta propuesta para la enseñanza de la geometría. Este trabajo concluye que en la enseñanza de la geometría es necesario precisar elementos teóricos que incluyan aspectos cognitivos para el diseño de situaciones de clase, para lo cual es clave una propuesta metodológica que apoye el vínculo teoría – práctica en un contexto de aula, específicamente en la clase de geometría.

En segundo lugar, se ubica al Trabajo de Doctorado, titulado “Estudio sobre la actuación docente y la interacción en la creación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje en el aula de matemáticas” de Miquel Ferrer (2015) el cual presenta un estudio sobre la actuación docente y la interacción en la creación de oportunidades para el aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje en el aula de matemáticas, trabajo enmarcado en una metodología al igual que en el anterior sobre los Experimentos Basados en Diseño y en particular los Experimentos de Enseñanza. Este trabajo concluye que preparar de forma metódica las discusiones en grupo originan un contexto favorable para crear oportunidades de aprendizaje matemático en los alumnos.

En tercer lugar, tenemos el trabajo de pregrado “Los procesos de construcción, visualización y razonamiento en el desarrollo del pensamiento geométrico. Un Experimento de Enseñanza” de Bahamón & Bonelo (2015) el cual recoge lo propuesto en el trabajo de Galeano desde una perspectiva semiótica y cognitiva y pone en práctica los tres procesos fundamentales que rescata (Duval, 2001) para el acercamiento a la geometría, construcción, visualización y razonamiento a través de una propuesta de Experimento de Enseñanza a través del cual se pretende validar estas teorías. Este trabajo concluye entre otras cosas que en la tarea de promover el razonamiento y la visualización el uso del lenguaje tiene un papel relevante, pues se espera que el estudiante ofrezca explicaciones espontáneas de lo que hace a partir de situaciones guiadas en clases.

Diseño de situaciones para el trabajo con figuras geométricas basado en las operaciones cognitivas de construcción, visualización y razonamiento.

Este trabajo propone en primer lugar un acercamiento a las figuras geométricas como un modo de plantear una propuesta para la enseñanza de la geometría a través del reconocimiento de tres procesos cognitivos fundamentales para el desarrollo de la actividad geométrica: la visualización, el razonamiento y la construcción, esta propuesta se sintetiza en una propuesta metodológica de Experimento de Enseñanza la cual busca ubicar en el centro de las reflexiones elementos cognitivos y no solo criterios matemáticos.

Este trabajo tiene un impacto importante en la aplicación del Experimento de Enseñanza pues recoge conceptos y características a tener en cuenta para la aplicación de una actividad de geometría en el salón de clases desde una perspectiva semiótica, por ejemplo afrontar que la geometría es la actividad cognitiva más compleja, pues exige construir, razonar y ver el objeto que se está trabajando, esto invita a caracterizar los diversos procesos de visualización que la

actividad impone lo cual permitirá a partir de esto generar una organización de las actividades de clases.

Este trabajo se propone desde una perspectiva semiótica y cognitiva con el fin de desarrollar en los estudiantes el pensamiento espacial, en particular, un acercamiento a las figuras geométricas a través del reconocimiento de los tres procesos cognitivos para el desarrollo de la actividad geométrica, la visualización, el razonamiento y la construcción. Para el desarrollo de este trabajo la propuesta metodológica utilizada es la cualitativa a través de un diseño experimental de enseñanza, enmarcado en la teoría de investigación de diseño, mediante el cual se pretende determinar las características particulares que se deben tener en cuenta para el diseño de situaciones de aprendizaje que favorezca el desarrollo del pensamiento espacial mediante actividades cognitivas.

Por otra parte la transición del aprendizaje a través de técnicas y procedimientos básicos al análisis y resolución de problemas es un hecho que se configura como un actor fundamental en el momento de realizar esta propuesta, pues la invitación a fortalecer las habilidades de los estudiantes a través de la creación de caminos alternativos que permitan la rastrear elementos que anteriormente no se tenían en cuenta sirvan de base a la construcción de conocimiento y pensamiento geométrico tanto para el maestro como para el estudiante, entendiendo la geometría no como otro tópico de las matemáticas sino que se entiende que su naturaleza y su papel, como disciplina, le dan una posición única.

Estudio sobre la actuación docente y la interacción en la creación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje en el aula de matemáticas

De este trabajo se rescatan los planteamientos en cuanto al marco teórico, dado que recoge elementos sobre el trabajo grupal que se articulan perfectamente a la propuesta metodológica del presente trabajo. El trabajo propone la inclusión de las oportunidades de aprendizaje situado en un contexto de discusión de gran grupo, analizando el comportamiento y la interacción que pueden tener los estudiantes al discutir una determinada temática en un escenario de trabajo colectivo, posteriormente establece los conceptos y preconceptos que deben tener tanto estudiantes como maestros para la movilización del concepto, la selección de actividades y los recursos necesarios para el aprendizaje de la homotecia en el aula de clases y por último se centra en la construcción social del concepto a través de las acciones discursivas y el análisis de los instrumentos empleados durante el desarrollo del experimento.

Este trabajo destaca el papel que adopta el profesor en las discusiones que se generan en escenario de gran grupo, reconociendo que si se hace de forma guiada esta puede aportar enormes avances en el aprendizaje de los estudiantes, de la misma manera enfatiza y diferencia en las oportunidades que tienen los estudiantes en un escenario de discusión de este tipo, manifestando la problemática que supone identificar cómo los estudiantes son capaces de aprovechar estos escenarios, concluyendo entre otras que la caracterización de oportunidades de aprendizaje matemático como relaciones entre contenidos de conocimiento matemático y acciones discursivas permite identificar oportunidades conceptuales, procedimentales y argumentativas. Estos elementos se tendrán en cuenta para establecer cuestionamientos en torno a las oportunidades que el escenario de gran grupo y las deliberaciones entre estudiantes generan durante el proceso de aprendizaje.

Los procesos de construcción, visualización y razonamiento en el desarrollo del pensamiento geométrico: un Experimento de Enseñanza.

Este trabajo recoge los elementos expuestos en el trabajo descrito anteriormente, de este trabajo es oportuno el acercamiento metodológico que ofrece, dicha investigación realiza una descripción de situaciones en función de las actividades cognitivas de visualización y razonamiento con el propósito de que los estudiantes, a partir de situación dirigidas logren potenciar su desempeño escolar. Este trabajo propone un Experimento de Enseñanza con que permita observar y comprender a partir de los errores y alcances que puedan tener los estudiantes, usando la investigación cualitativa como hoja de ruta para el análisis y acompañamiento eficaz de las situaciones propuestas, estas están sujetas a modificación según el contexto, el análisis individual y la actividad colectiva de los estudiantes lo vaya sugiriendo.

La hoja de ruta que sigue este experimento consta de tres momentos, el primero surge de la fase de indagación o “micro nivel” en donde se discute y reflexiona alrededor de ideas, se plantean y planean los ejercicios y se hace un plan de trabajo para ejecutar en las actividades, un segundo momento en donde se plantean otras actividades dirigidas. El segundo momento llamado “fase de desarrollo” es llevada a cabo las situaciones propuestas por el equipo de trabajo y un tercer momento en donde se realiza el análisis retrospectivo de la información acumulada a lo largo del estudio.

De esta manera se rescatará de este trabajo fundamentalmente la relación que establece entre investigación enmarcada en los Experimentos de Enseñanza y la teoría semiótico – cognitiva de Duval, como referente en la búsqueda de situaciones que ayuden a los estudiantes a potenciar las actividades cognitivas de visualización y razonamiento, para mejorar su desempeño en matemáticas, y en particular en el aprendizaje de la geometría.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 Objetivo general

- Ejecutar un Experimento de Enseñanza, basado en la investigación de diseño, que fortalezca, los procesos cognitivos de visualización y razonamiento, a través de la semejanza de figuras en los grados 7º del I.E.T.I. Veinte de Julio, de Cali.

1.4.2 Objetivos Específicos.

- Fortalecer la visualización no icónica en la enseñanza para lograr una aproximación y incentivar el razonamiento en la semejanza de figuras de los estudiantes del grado séptimo del I.E.T.I 20 de Julio de Cali.
- Formular actividades de aprendizaje enmarcada en la teoría semiótica – cognitiva, como una oportunidad para analizar las condiciones necesarias para la enseñanza de la semejanza entre figuras.
- Interpretar la información obtenida durante la aplicación del Experimento de Enseñanza a la luz de los procesos cognitivos de visualización y razonamiento y de las actividades de validación.

CAPÍTULO 2

En este capítulo encontraremos los aspectos cognitivos que intervienen en la enseñanza de las matemáticas y particularmente en la geometría, mismos elementos que servirán de base para desarrollar el análisis de las situaciones vividas en el Experimento de Enseñanza que se realizó con el grado 7 – 4 de la I.E.T.I Veinte de Julio.

Se desarrollarán las tres operaciones básicas de la cognición propuestas por Duval (2001) visualización, construcción y razonamiento, así como los procesos de validación que tiene en cuenta Samper, Camargo, & Leguizamón, (2003), y por último el concepto que se abordará en este trabajo de grado, la semejanza de las figuras, elementos teóricos que servirán de base para la aplicación del Experimento de Enseñanza propuesto en este trabajo.

2.1 LO COGNITIVO EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA: LA SEMEJANZA DE FIGURAS

2.1.1 La visualización en geometría

La utilización de figuras es uno de los elementos centrales en el acercamiento de los estudiantes a la geometría, sin embargo, desde la primaria se ha dado prioridad a las rectas y sus propiedades sin tener en cuenta que estas son necesarias para la construcción de figuras 2D, es decir, el trabajo con las figuras 2D no se reconoce como una construcción a partir de formas 1D, individualizando y dando prioridad a las construcciones 2D. El no reconocer esta diferenciación ha ocasionado un problema difícil en la enseñanza de la geometría: ¿Cómo hacer para que los estudiantes relacionen las figuras 2D y las formas 1D? Tal dificultad requiere por tanto un cambio en la mirada de los estudiantes sobre las figuras y una adaptación de parte de los docentes en las actividades que conciernen a la construcción o reproducción de figuras.

Es así como se tienen en cuenta tres caminos diferentes para ver y analizar una figura, el primero es el evidente, el de la percepción, que consiste en analizar a partir de las formas que se reconocen. Los otros dos son los que la enseñanza de la geometría intenta desarrollar, por una parte, el reconocimiento de las propiedades geométricas que deben tenerse en cuenta a partir de una hipótesis planteada para analizar una figura y por otra parte los instrumentos que pueden utilizarse para reproducir o construir figuras (Duval, 2010, págs. 109-110).

Para lograr que las propiedades geométricas prevalezcan y se diferencien de las evidencias visuales es necesaria una condición cognitiva, hay que ser capaz de reorganizar las figuras para poder apreciarlas como un todo, separando las formas 1D cuando sea necesario o incluso reorganizar la forma como se aprecian las figuras 2D para apreciar sus características, esto implica necesariamente la inclusión de las propiedades geométricas para analizar las figuras (Duval, 2010, pág. 113)

Establecida la necesidad de aprender a ver una figura se puede avanzar en la consideración de los tres procesos cognitivos que cumplen funciones epistemológicas específicas y que son claves para la enseñanza de la geometría, estos son la visualización, la construcción y el razonamiento. Estos procesos pueden considerar de forma independiente pues ningún proceso depende del otro, pero si es preciso señalar que relacionar los tres es cognitivamente necesario para considerarse competente en términos geométricos (Duval, 2001)

Esta necesidad de establecer esta sinergia en la escuela ha llevado a que los investigadores realicen diversas consideraciones y experimentaciones que consoliden los procesos cognitivos al servicio de las ciencias, particularmente en matemáticas en donde la teoría semiótico – cognitiva ha permitido encontrar elementos útiles y ha planteado propuestas en la dirección de solucionar el problema de la enseñanza de la geometría.

Si bien las actividades, procesos, metodologías e investigaciones propuestas son diferentes, están relacionadas unas con otras, cada estudio parte de un antecedente, se adapta a las circunstancias del entorno y se toman en cuenta para trabajar en el contexto de la clase, partiendo siempre desde los procesos cognitivos.

Para Duval, visualizar consiste en apreciar el objeto, la figura, para ilustrar proposiciones, explorar heurísticas de una situación compleja o para realizar una verificación subjetiva. Esto no es más que establecer un camino perceptivo que permita establecer una conjectura sobre una determinada hipótesis, incluso señala que hay casos en los que no es necesario un conocimiento explícito (definiciones, teoremas, propiedades) para ver una figura y encontrar las características relevantes de la misma. Es decir, considera tres tipos de aprehensiones en la visualización, la perceptiva, discursiva y operativa y cada una de ellas puede considerarse como etapas de la visualización en la que se tiene un acercamiento intuitivo a la figura, la discursiva, que recurre a una serie de afirmaciones y procesos, heurísticos o de demostración que permiten apreciar las particularidades de las figuras y por último se tiene la operativa que consiste en deconstruir una figura para identificar todas sub-configuraciones que intervienen en su construcción. (Duval, 2001).

De esta manera, se puede considerar una figura como la representación de un objeto matemático apreciada a través de una ilustración gráfica que está referenciada por las propiedades matemáticas que la respaldan o una construcción a partir de otras figuras preestablecidas. Esta acotación es importante para establecer un puente entre lo cognitivo (la idea matemática) y la representación gráfica de esta idea para poder a partir de la experiencia pueda el estudiante tener la posibilidad de entender en los distintos niveles “lo que ve” y confrontarlo con

lo que se le ha enseñado para entrar en el proceso de razonamiento. (Bahamón & Bonelo, 2015, pág. 22).

No es fácil enseñar en geometría, si bien existe una tendencia a la exploración de soluciones los resultados en las aulas siguen siendo decepcionantes, basta con observar los resultados nacionales en las pruebas de estado para darse cuenta de que en la escuela o bien no se han dado los cambios necesarios para avanzar en las competencias geométricas o aún son insuficientes los esfuerzos por mejorar en la observación y el razonamiento, más allá de las dificultades propias de la demostración, que pasan por considerar el conjunto de axiomas que permiten validar una hipótesis.

Duval considera la distinción de las “propiedades puramente cualitativas” como el primer y más crítico umbral en la enseñanza de la geometría, pero también es el más decisivo para hacer comprender al estudiante las distintas maneras de trabajar en geometría. Esto tiene que ver con las representaciones mentales que hace el estudiante haciendo desaparecer las propiedades métricas o proyectivas de las figuras.

Va más allá y señala que la percepción es la causante de los problemas del aprendizaje de las matemáticas porque impone una manera común de ver que va en contra de las formas de ver en geometría, tanto las que dependen de la construcción como aquellas que recurren a la heurística para hacer ver aquello que no es tan evidente y que aportan a una tercera forma de ver, la deconstrucción de las figuras.

Como una estrategia para diferenciar las maneras en que puede ser presentada una actividad geométrica a los estudiantes, Duval (2016, pág. 16) presenta una clasificación de lo que considera son las propuestas realizadas a los estudiantes, para esta clasificación tiene en cuenta

una serie de actividades llamadas entradas y que divergen según el objetivo de la tarea encomendada, así propone una diversidad de tareas donde tiene presente si se va a reproducir una figura según un modelo, o si se va a construir, o si se medirá o si por el contrario será un trabajo en grupo en el que un participante describe para que otro construya y además sugiera una quinta entrada que requiere el uso de un material manipulable a partir del cual se construyan nuevas figuras. Cada una de estas entradas sugiere una forma distinta de lo que se considera ver en geometría, pues cada objetivo de la actividad lleva al estudiante a ver un aspecto específico del objeto matemático.

Estas cinco actividades están enmarcadas en las dos formas de “ver” que tiene el ser humano. La primera es la icónica, en donde lo fundamental es la percepción, donde el reconocimiento de las formas se hace por el parecido con la imagen mental del objeto, o por la asociación que se pueda hacer con un modelo o tipo de forma, esta forma de visualización obstaculiza la forma cómo ve el estudiante la figura, descartando incluso sus propiedades por lo aparentemente evidente del objeto, los estudiantes arrojan sus conclusiones a partir de lo que pueden apreciar, y se quedan con esto, con lo que los sentidos, las imágenes mentales y la experiencia le ofrecen, pues identifican la figura solo como un ícono que no tiene alteraciones y que existe y se explica por su evidente forma.

Duval (2016, págs. 22-23) sin embargo, reconoce algunos obstáculos de la visualización icónica para el aprendizaje de la geometría que tiene que ver con la forma reconocida del objeto que se va a identificar, es decir, de las imágenes mentales y de los referentes a partir de la experiencia que tenga.

- La comprensión de la situación es diferente según la idea del objeto, es decir, si es un objeto que está en movimiento, que tiene una posición relativa según el observador ó su

relación con una imagen mental, esta última desconoce la idea por ejemplo de un rectángulo cuya diferencia entre el alto y el ancho es abismal, pues la comparación entre este fenómeno y su imagen mental no corresponde.

- El reconocimiento está centrado en el contorno, despreciando así todas las propiedades que se encuentran al interior de la figura, es el caso de las diagonales de un cuadrado, al estar en el interior del perímetro no se asocian con las propiedades propias de la figura, y también en el sentido contrario, un cuadrado al cual pueda prolongar sus rectas causa distorsión en del estudiante sobre el objeto observado.
- La percepción de ser figuras estables niega la posibilidad de transformar esas figuras, ampliarlas, reducirlas, y menos encontrarlas en una representación que incluya otras figuras.

Debido a que la visualización icónica genera estas resistencias, es necesario proponer ejercicios en los que se cuestione lo evidente es una herramienta valiosa para el propósito de este trabajo, dado que se busca establecer la necesidad de ir más allá, explorar, identificar que puede ser validada la información que está más allá de la visión.

La segunda es la no icónica, cuya validación de las formas requiere la manipulación de las propiedades de la figura, o de una argumentación que sustente la observación que se hará sobre el objeto. Esta forma de visualización “reconoce las formas en virtud de las limitaciones internas de organización que hacen imposible ciertas deformaciones o ciertas aproximaciones, o por las deducciones efectuadas discursivamente en función de las propiedades, definiciones o teoremas que la sustentan” (Duval, 2004). Esta forma de ver, permite razonar a partir de las propiedades de la figura, es mirar profundamente el objeto, más allá de la percepción, es decir, reconocer la

figura no como una creación abstracta sino como un todo que aporta al desarrollo de estrategias para la resolución y justificación de los problemas.

Las primeras dos actividades son presentadas por Duval como “botánico” y “agrimensor (geómetra)”, asociadas a las formas de ver icónicamente, mientras que la tercera y cuarta entrada “constructor” e “inventor (artesano)” están asociadas a la forma no icónica de ver en geometría. En conclusión, las actividades apuntarán a un objetivo, y este incide necesariamente en el desarrollo de la forma de “ver”, que no se limita exclusivamente a expresar lo que se puede apreciar por los sentidos. Dado que la intencionalidad de este trabajo es establecer una relación entre la visualización y el razonamiento no se considerará la deconstrucción dimensional de las formas, propuesta por Duval como la quinta entrada para abordar la forma de visualización.

La forma de visualizar y de enseñar a ver no icónicamente implica ver más allá de la forma del objeto, pero en términos de la formación también es necesario razonar a partir de lo evidente, desde aquí que cobre relevancia el reconocimiento de las formas a partir de cualidades visuales de un contorno. Así, ver icónicamente requiere diferentes estrategias y debe apoyarse de las teorías, situaciones, actividades que potencien en el estudiante la observación para explorar formas de justificación en un determinado contexto. El aspecto que Duval identifica y que compete a los alcances de este trabajo es el que establece relación entre la visualización icónica y la necesidad de razonar y validar a partir las formas más simples de geometría, como condición implícita para desarrollar una visualización profunda, no icónica.

2.1.2 El razonamiento y la validación

El razonamiento es entendido por Duval como la relación entre los procesos discursivos para la extensión del conocimiento, para la demostración o para la explicación; en este proceso intervienen dos condiciones si se tiene en cuenta la demostración como elemento necesario para

el razonamiento, un camino es el uso de las proposiciones, es decir, los axiomas, las propiedades, los teoremas, definiciones, conjeturas, etc., o solo utilizar los teoremas, axiomas o definiciones para proponer una conclusión.

Dicho de otra forma, el proceso de razonamiento está sometido a las características propias de cada objeto matemático, sus propiedades, que son necesarias para avanzar en el proceso discursivo que permite validar la hipótesis inicial, no obstante, no basta con utilizar definiciones o teoremas para demostrar una verdad, pues solo se obtienen nuevas producciones cuando se concluye a través de una estructura lógica, pues este proceso se puede realizar sin crear conciencia de la necesidad de razonar, solo cuando se relaciona el mecanismo discursivo como antecedente para generar una conclusión se podrá establecer un verdadero proceso de razonamiento.

Aquí Duval (2016) distingue los razonamientos argumentativos que apoyan la conjetura o hipótesis inicial de los razonamientos válidos que permiten establecer la estructura lógica que permite demostrar, entre otras razones porque los objetivos de dichos razonamientos son distintos y el aprendizaje de estos es sesgado, dedicando más espacio en la enseñanza de los primeros que de los segundos. Aún más, establece una distinción didáctica entre razonamiento y prueba, pues para descalificar un enunciado, basta con mostrar un contraejemplo y estos no tienen la misma estructura discursiva que el proceso de validación y complementa entendiendo el razonamiento como un procedimiento explícito y necesario para afirmar la conjetura como una conclusión a partir de las proposiciones aceptadas.

Para este trabajo es fundamental la relación que exista entre la visualización y el razonamiento pues considerarlas es un avance necesario en la adquisición de competencias geométricas,

motivando al estudiante a ver más allá de la percepción y tomar las herramientas dadas para razonar sobre lo que ve.

Después de visualizar y razonar es preciso validar, para lo cual es necesario tener en cuenta los diferentes tipos de razonamientos que se tienen en cuenta al momento de tomar decisiones y sobre todo se abordarán las maneras de validar en geometría como una forma de demostración valida en el aula de clases.

Una de las metas de las matemáticas escolares es el desarrollo del pensamiento deductivo a través del razonamiento que permita a los estudiantes interpretar fenómenos de la vida cotidiana, de las ciencias, resolver problemas, justificar, generar la cultura de la argumentación y eventualmente demostrar. El currículo de los sesenta impulsó en el país esta tarea, pero los maestros se quedaron cortos y limitaron la enseñanza del razonamiento deductivo a la demostración, generando las dificultades que se tienen hoy, considerando validas solo aquellas justificaciones que se apoyan en formas y procesos que requieren un importante trabajo memorístico y que dejan por fuera las consideraciones y procesos mentales que desarrolla un estudiante al momento de argumentar.

Al darse cuenta de esta dificultad en el aprendizaje de la demostración, la actividad geométrica se fue reduciendo al reconocimiento de objetos geométricos, la clasificación de estos y la aplicación de teoremas para efectuar cálculos, como consecuencia de esto, la escuela se enfrentó a un momento en el que se despoja al estudiante de la posibilidad de realizar procesos de validación que permiten además desarrollar razonamiento.

Ante esta dificultad varios investigadores llamaron la atención sobre la necesidad de buscar estrategias que permitan activar en los estudiantes la racionalidad, para lo cual se espera que los

estudiantes desarrollen el estímulo de cuestionar la verdad de una proposición y asegurar de la misma, dicho de otra manera, se están preocupando por desarrollar a través de la enseñanza de la geometría pensamiento crítico en los estudiantes.

Por tanto, el objetivo de la validación es propiciar condiciones para que los estudiantes usen sus conocimientos para que, a partir de ellos se construyan nuevos y mejores, y desde esta perspectiva se ha ampliado la noción de demostración en el contexto escolar a otros procesos de validación como la prueba y la explicación. Se entenderá la Explicación como el “discurso construido según reglas propias de decisión de la verdad, mediante el cual se intenta que los demás entiendan la veracidad de una afirmación. La explicación se da usando el lenguaje cotidiano” (Samper, Camargo, & Leguizamón, 2003). Y la prueba como:

discurso, reconocido y aceptado por el grupo escolar, mediante el cual se explica una proposición. El paso de explicación a prueba es un proceso social. Esto hace que la prueba no sea algo acabado, pues puede cambiar con la evolución de los saberes en el tiempo (Samper, Camargo, & Leguizamón, 2003).

Si bien la prueba y la explicación no son equivalentes a los procesos de demostración si son fundamentales en el desarrollo de razonamiento y permiten además que los estudiantes experimenten la actividad matemática de producir conjeturas y validar el proceso que han realizado.

Este sentido amplio de la demostración es importante para atacar algunos obstáculos que se presentan en el momento de enseñar la demostración en el aula de clases, esto además invita a pensar en escenarios y ambientes propicios para el desarrollo de la demostración como camino necesario para alcanzar el razonamiento.

Algunos de los obstáculos identificados en la enseñanza de la demostración corresponden a que los alumnos:

1. Consideran suficiente la representación gráfica de la situación para validar la hipótesis dada.

2. No relacionan la información que se obtiene de una figura con las propiedades geométricas que se tienen de ella.

3. No distinguen cuando un tratamiento espontaneo sobre una figura es válido o no.

4. La forma en que se presenta la demostración no es natural para ellos.

Por tanto, emprender la tarea de enseñar a demostrar en geometría requiere un cambio en el enfoque planteado por la escuela, de tal manera que en el momento de incluirla en los currículos se tenga en cuenta que se deben atender las dificultades cognitivas que tienen los alumnos cuando trabajan en el área, así como hacer explícito el hecho de que esta actividad aporta al desarrollo del razonamiento y que no se trata solo de demostrar por demostrar. (Samper, Camargo, & Leguizamón, 2003, págs. 40 - 43).

Duval (1998) como se cita en (Samper, Camargo, & Leguizamón, 2003) distingue tres tipos de razonamiento según el nivel cognitivo del estudiante y de su concepción sobre la geometría, estos son el visual, el informal y el formal, que a pesar de sus diferencias tienen estrecha ligazón entre ellas y son necesarias para alcanzar la competencia y el dominio en el campo de la geometría, en tanto un tipo de razonamiento se nutre del otro, por ejemplo, el razonamiento visual se realiza a través de procesos inferenciales a través de los cuales se construyen pruebas formales.

“El razonamiento visual integra procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones, a partir de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones” (Samper, Camargo, & Leguizamón, 2003, pág. 45) cuya función principal es la verificación

subjetiva o heurística de las propiedades geométricas, condición necesaria para el proceso de demostración. Este hecho permite que los estudiantes distingan entre una simple representación o una figura geométrica que contiene información necesaria para validar la hipótesis que se plantea, esto buscando fortalecer el desarrollo de las actividades por una parte y por otra que los estudiantes utilicen estas propiedades para no cometer errores a pesar del primer acercamiento perceptual que tienen con las figuras.

En tal sentido, para aprovechar acertadamente el razonamiento visual es necesario establecer una relación entre la percepción visual y las características, propiedades o relaciones propias de las figuras geométricas para hacer un proceso analítico que permita elegir la información relevante de lo que se está viendo, en consecuencia, el razonamiento visual es un gran estimulador de la creatividad en la actividad matemática (Samper, Camargo, & Leguizamón, 2003, págs. 46-49).

El razonamiento informal por su parte “involucra ideas espontáneas que se emiten en lenguaje natural, a través de la descripción, la explicación y la formulación de argumentos, producto del establecimiento de asociaciones u oposiciones con un fuerte apoyo en la visualización” (Samper, Camargo, & Leguizamón, 2003, pág. 49). Este tipo de razonamiento tiene su principal característica en el uso de la experiencia a través de las cuales se puede recurrir a conjeturas previamente establecidas para proponer una argumentación que permita explicar o convencer a otro de lo que está haciendo.

Además, este tiene una estrecha relación con la argumentación informal que permite sustentar una afirmación a partir de juicios elaborados espontáneamente, y tiene una particular utilidad en geometría cuando permite identificar propiedades geométricas relevantes, es decir, este tipo de razonamiento permite expresar una hipótesis apoyándose en la figura, privilegiando el uso de las

propiedades o relaciones sobre las consideraciones visuales (Samper, Camargo, & Leguizamón, 2003, págs. 49-51).

Por último, se tiene el razonamiento formal que “integra procesos inductivos, abductivos y deductivos y consiste en la elaboración de discursos formales encaminados a la construcción de demostraciones para probar la validez de una afirmación” (Samper, Camargo, & Leguizamón, 2003, pág. 51). Este tipo de demostración es el que permite construir sistemas axiomáticos formales, es riguroso en su esquema, no permite exclamaciones sin sustento y se fundamenta exclusivamente en el uso de proposiciones, teoremas, definiciones, axiomas mediante el cual se establece una conclusión.

Estos tres tipos de razonamientos buscan no perder el enfoque riguroso en la enseñanza de la geometría sin negar los cambios de los currículos de geometría y adaptándose a las condiciones que la sociedad ha establecido en torno a las competencias, es decir, ofrecen un panorama amplio que llama la atención sobre la necesidad de preservar la demostración en el aula de clases con el objetivo de que los estudiantes aprendan a demostrar, para lo cual se hace necesario aceptar el sentido amplio que se esbozó a través de las explicaciones, las pruebas y demás procesos de validación o los procesos formales. Para esto, es necesario generar ambientes de aprendizaje propicios y diferentes en donde los estudiantes sientan la seguridad y tranquilidad de expresar y explicar sus ideas, defenderlas a través de la argumentación en un proceso donde no se invalide ninguna afirmación, sino que poco a poco se llegue a un consenso, esto no solo para su estadía en la academia sino para su vida. (Samper, Camargo, & Leguizamón, 2003, pág. 56)

2.2 METODOLOGÍA

La humanidad tiene el propósito de avanzar y descubrir nuevas formas de entender el mundo, para lo cual cada vez más se ha ido especializando y especificando, de tal manera que cada ciencia estudia un objeto en particular que aporta al propósito inicial, adquiriendo nuevo conocimiento. La elección por tanto del método adecuado que permita entender y conocer la realidad es fundamental, lo cual necesariamente requiere la diferenciación y elección entre dos tipos de investigación, la cuantitativa, a la cual están ligados los métodos deductivos y que consiste en la recolección de los datos cuantitativos para su posterior análisis. Por otro lado, está la investigación cualitativa a la que generalmente se le asignan métodos inductivos de investigación.

La investigación cualitativa evita la cuantificación y hace registros narrativos de fenómenos que son estudiados mediante técnicas como la observación participante, las entrevistas, entre otras, con el fin de identificar la naturaleza profunda de las realidades y de las distintas dinámicas que en la observación del mundo social puedan producir las experiencias de los demás. (Monje, 2011, pág. 32)

En la línea investigación cualitativa se encuentra la investigación educativa, la cual analiza los aspectos que conciernen a la enseñanza y el aprendizaje. Enmarcados en estos se encuentran los experimentos de Diseño, el cual ha probado tener utilidad en el campo de la Didáctica de las matemáticas y las ciencias, ha sido desarrollado dentro de las ciencias del aprendizaje y es fundamentalmente interdisciplinar, recogiendo aportes de diferentes áreas como la sociología, la antropología o la psicología.

Los Experimentos Basados en Diseño son “enfoques analíticos para examinar mecanismos que comienzan con ideas teóricas que son testeadas a lo largo del diseño, implementación y estudios sistemático de herramientas educativas que dan cuerpo al mecanismo conjeturado inicialmente” (Molina, Castro, Molina, & Castro, 2011, pág. 1). Según esto, se puede decir que los Experimentos de Diseño representan la validación de una conjetura propuesta a través de una actividad que requiere la observación de una situación para realizar un análisis y posteriormente contrastar con lo propuesto inicialmente.

Entre las características fundamentales de este tipo de métodos cualitativos se puede destacar:

1. Abarca completamente toda la situación, distinguiendo los elementos que serán objeto de estudio y aquellos que aparecen por las condiciones particulares del entorno.
2. Involucran una serie de variables que no pueden ser controladas, el ruido, la disposición a la clase, etc.
3. Ocurre en contextos de la vida real en donde habitualmente ocurre un aprendizaje.
4. Participan diferentes actores, diseñador, aplicador, investigador, docente de la clase y los estudiantes.
5. Las teorías que se desarrollan son específicas del área de aprendizaje y hacen parte del diseño a trabajar.
6. Estos estudios están en constante revisión y mejora. Estas son las seis fortalezas que consideran los autores para destacar esta metodología. Particularmente los Experimentos de Enseñanza que se encuentran inmersos en esta metodología recogen estas características y hacen eficaz su puesta en práctica en el aula de clases.

Los Experimentos De Enseñanza por su parte son un tipo de metodología inmersa en los Experimentos de diseño que tiene como característica fundamental el rompimiento de la

diferenciación entre profesor e investigador, motivada por el interés de los investigadores de beber de la propia fuente de la información, el estudiantado. (Molina, Castro, Molina, & Castro, 2011). Pues las experiencias de ser profesor o ser observador en un episodio de enseñanza son muy distintas, por lo cual es útil que el investigador y el maestro intercambien roles en un intento por mejorar su comunicación, así mismo sugiere que ambos participen en la planificación de los episodios de enseñanza.

Conscientes de esta ruptura, en los Experimentos de Enseñanza el profesor – investigador, formula una imagen de las operaciones mentales de los estudiantes y una hoja de ruta o secuencia de didáctica de lo que podrían aprender y cómo lo podrían aprender. Inicialmente esta secuencia se articula libremente o no se articuló en absoluto. Sin embargo, el profesor- investigador tiene un sentido de dirección y un sentido de posibilidades de dónde intenta llevar a los estudiantes. El profesor-investigador tiene ahora objetivos iniciales, junto con un sentido de las posibilidades de cómo se podrían alcanzar los objetivos en futuros episodios de enseñanza. A medida que el profesor-investigador involucra a los niños en otros episodios de enseñanza, esta estructura de metas se amplía y articula. La característica más importante de la extensión y articulación es que el profesor-investigador modifica la estructura de metas constantemente mientras la desarrolla para adaptarse a la actividad matemática de los estudiantes. Extender y modificar la estructura de la meta dura hasta que los esquemas de los estudiantes parecen estar bien establecidos y los estudiantes parecen haber alcanzado una meta. En este punto, donde los profesores-investigadores podrían tratar de llevar a los estudiantes y cómo podrían llevarlos de nuevo, se convierten en problemas importantes (Traducción libre).

Esta es la hoja de ruta que se seguirá para el planteamiento del Experimento de Enseñanza.

Este trabajo se enmarca en la línea de lenguaje y razonamiento del área de educación matemática de la Universidad del Valle, en el cual se pretende analizar el aspecto cognitivo del aprendizaje de las semejanzas en geometría por parte de los estudiantes.

Este trabajo propone un acercamiento al concepto de semejanza de figuras a través de una serie de actividades cognitivas, en su mayoría de visualización y razonamiento, propuestas, elaboradas y discutidas por el autor y el director de este trabajo con el fin de que los estudiantes logren potenciar su conocimiento sobre la relación de ampliación o reducción entre figuras.

Los Experimentos de Enseñanza tienen por objeto analizar a través de la observación y la intervención, la comprensión de un aprendizaje por parte de los estudiantes a partir de los errores y dificultades que se generen en las situaciones de aprendizajes propuestas.

La investigación cualitativa permite la observación necesaria para una buena exploración a través del Experimento de Enseñanza, pues como se mencionará anteriormente, este análisis es continuo, día a día, diseño, aplicación en el aula y la evaluación por parte del equipo de trabajo, permite las indagaciones e interrogantes que validan el rediseño de las tareas del experimento, que por darse en un salón de clases genera tareas puntuales que inciden en el desarrollo de la misma.

A la luz de lo planteado por Ferrer (2015) se genera una reflexión que permite establecer la pertinencia de la actividad, razón por la cual después de establecer el diseño de la misma se hace una revisión en la precisión de consignas para posteriormente ser aplicada.

El proceso de aplicación por darse en un aula de clases debe generarse en dos sentidos, uno social, que recoge los elementos que conciernen al comportamiento, disposición a la clase, relaciones con los otros, interacción con el compañero, actitudes grupales. Por otro lado está el proceso que desarrolla individualmente el estudiante, donde se tiene en cuenta los materiales que utiliza, las dudas que plantea, las objeciones, dificultades, errores y logros, estas dos condiciones configuran los elementos centrales del análisis local que se va a generar, para ambas características se tendrán en cuenta dos herramientas, para las características sociales, los registros fílmicos, en donde se evidenciará el comportamiento durante la actividad y las interacciones entre los estudiantes, por el otro lado estarán las hojas de trabajo, en donde individualmente los estudiantes consignarán sus resultados, interpretaciones de la actividad y conclusiones de la misma.

Los análisis individuales y sociales de los estudiantes en el aula de clases, tienen el objetivo de aportar evidencias para evaluar y comparar con lo esperado del trabajo, de esta manera los nuevos diseños que se planteen para continuar con el experimento deben favorecer el alcance los objetivos propuestos, es decir, la relación con los estudiantes en su contexto generará nuevas actividades para poder alcanzar las metas locales inicialmente planteadas.

Al contemplar los aspectos descritos anteriormente se puede establecer una ruta de aprendizaje que incluya los alcances que deseamos tener, así mismo motivar el interés por crear situaciones que faciliten la interacción social y favorezcan el ambiente de aprendizaje, de tal manera que a partir de lo experimentado se logre establecer una serie de caminos por los cuales se pueda alcanzar el aprendizaje propuesto.

En particular el grupo de trabajo planteará un Experimento de Enseñanza con el propósito de afianzar los conocimientos matemáticos de los estudiantes en torno a la geometría plana y en particular la ampliación y reducción de figuras. Así, este experimento propone una actividad enmarcada inicialmente en los aspectos geométricos para ir incluyendo los aspectos sociales e individuales y terminar en una discusión constructiva en ambiente de gran grupo que valide el conjunto de actividades planteadas inicialmente.

La presente propuesta de Experimento de Enseñanza está compuesta por dos momentos, el primero, a través del cual se describen las actividades a realizar y un segundo momento donde se hace el análisis de la situación. Un primer momento es la fase de exploratoria en la cual se va a definir el problema, se hará una revisión bibliográfica para encontrar y diseñar la mejor actividad que encamine la ruta de aprendizaje, se realizará una rejilla de análisis que permita consolidar los datos que se recogen para su posterior análisis. Esta discusión finalizará en una planeación de

una situación que reúna los elementos introductorios que para una aproximación a la semejanza de figuras.

La segunda actividad corresponde a lo que llamaremos fase de adaptación, en el cual se hará la evaluación del modelo de actividad propuesto, con el apoyo de un observador externo se evaluarán las consignas, las intervenciones, las instrucciones y los ejercicios planteados en la actividad, se tendrá en cuenta su pertinencia y claridad, después de hacer este trabajo bajo la dirección del director de esta tesis, se presentará un nuevo modelo de actividad la cual va a retomar el trabajo de la primera con el ánimo de despejar las dudas e ir generando claridad en el aprendizaje.

La última fase del primer momento la llamaremos validación, en la cual se hará el mismo procedimiento de evaluación y verificación para generar ajustes a esta actividad, es una fase de validación, ya que se espera que los estudiantes trabajen de manera autónoma y generen conclusiones alrededor de lo trabajado en las tres actividades.

Los elementos teóricos que sustentan la planeación del diseño son los propuestos por (Ferrer, 2015) en torno a la construcción de figuras semejantes a través de la homotecia, y los aportes de (Duval & Sáenz - Ludlow, Comprensión y Aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas, 2016) en cuanto a los aspectos semióticos – cognitivos y del pensamiento humano en la enseñanza de la geometría. Posterior al diseño de las actividades y la delimitación de los elementos a tener en cuenta en la rejilla de análisis se procederá a realizar la aplicación de este experimento en el grado 7 – 4 de la I.E.T.I. 20 de Julio.

Es fundamental que en proceso de diseño y evaluación se trabaje de la mano con el tutor, pues requiere una mirada externa que aporte significativamente al trabajo propuesto de tal manera

que, en el momento de presentarla al maestro de la clase de matemáticas, pues es él quien conoce de primera mano las fortalezas, debilidades cognitivas y el contexto social en el cual se desarrolla el ambiente de la clase de geometría.

El segundo momento es el que concierne a la fase de ejecución y análisis retrospectivo, aquí se tomará el registro fílmico, las evidencias fotográficas y las hojas de trabajo para convertir esta información en datos que serán contrastados en la rejilla de análisis.

Se programarán tres visitas para realizar trabajo con el grado 7 – 4 de la I.E.T.I. Veinte de Julio, en las cuales se hará una presentación de la actividad, explicación del por qué nos encontramos en la institución, expresar la importancia de realizar un registro fílmico y fotográfico y hacer entregas de las hojas de trabajo para el desarrollo de la actividad, además de ello durante el desarrollo de la actividad se informará a los estudiantes de la realización de algunas entrevistas en las que se dé cuenta del Experimento de Enseñanza.

Esta segunda fase tiene un momento intermedio que consiste en la sistematización de la información, es decir, la transcripción de entrevistas y momentos en la clase, escaneo de hojas de trabajo y la socialización de lo visto por parte de los miembros del grupo de investigación, esto con el fin de analizar críticamente cada una de las sesiones para realizar los ajustes pertinentes y el diseño de la siguiente actividad.

Utilizando la metodología cualitativa se contribuye con información que permite avanzar en la investigación del aprendizaje de las matemáticas, particularmente en la geometría, buscando genera opciones para mejorar cada vez más el aprendizaje de los estudiantes.

Por último, se tendrán en cuenta tres elementos fundamentales para desarrollar el análisis retrospectivo de la situación presentada. La visualización según lo propone Duval & Sáenz-

Ludlow (2016) bien en sea icónica o no icónica, por otra parte, se tendrá el razonamiento, en donde se pretende mirar si los estudiantes justifican o no justifican la actividad según lo propone (Duval, 2001) por último, se observará el proceso de validación según lo propone (Samper, Camargo, & Leguizamón, 2003) en cuanto a la prueba y la explicación.

Estos elementos son los que se consignarán en la rejilla de análisis y que servirán de hoja de ruta para argumentar si la conjetura propuesta, reconocer la importancia de las propiedades de las figuras para validar si estas son semejantes, fue aprehendida o no lo fue.

CAPÍTULO III

En el siguiente capítulo se encuentran consignados los elementos que se tuvo en cuenta para la aplicación del Experimento de Enseñanza, es decir, su diseño y aplicación, los cambios en los modelos, sugerencias según cada actividad y las experiencias significativas que se obtuvieron. De la misma manera se hará énfasis en los elementos cognitivos que se tuvo en cuenta desde la teoría de Duval (2001) que permiten hacer un análisis de las actividades aplicadas identificando la visualización, el razonamiento y la construcción por parte de los estudiantes.

En consecuencia, en este capítulo se presentará el análisis del proceso de investigación en el que se verán reflejados los elementos teóricos y metodológicos, que, desde un Experimento de Enseñanza como herramienta para generar una serie de actividades de clase, permiten potenciar en los estudiantes el aprendizaje en matemáticas y en particular de la semejanza de figuras.

3.1 EXPERIMENTOS DE ENSEÑANZA: UN MODELO PARA LA APLICACIÓN DE UNA ACTIVIDAD EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS DEL GRADO SÉPTIMO

Este trabajo es una propuesta que se realiza a partir de la teoría propuesta por Cobb (2000), la interpretación y modelo de trabajo que utiliza (Molina, Castro, Molina, & Castro, 2011) y algunas de las actividades experimentales desarrolladas por (Ferrer, 2015) sobre lo que se considera un Experimento de Enseñanza; los aportes prácticos y discusiones que se tuvieron con el grupo de investigación fueron un aporte fundamental para interiorizar la definición y los elementos que inciden en el desarrollo de un Experimento de Enseñanza.

La propuesta de Experimento de Enseñanza se diseñó y aplicó durante tres sesiones de clases (cada sesión era de dos horas de clases equivalentes a 75 minutos), en el espacio existente entre

cada sesión de clases se tuvo la oportunidad de analizar el diseño de la actividad, su pertinencia, se hicieron ajustes y se establecieron las nuevas actividades acorde con las recomendaciones que se formularon teniendo en cuenta el objetivo general y los objetivos específicos de este trabajo.

La secuencia cronológica que se siguió para el diseño de las actividades de clase corresponde a una exhaustiva búsqueda bibliográfica en la que se pretendía encontrar una actividad que ya hubiese sido trabajada en otro contexto, de tal manera que su aplicación también sirviera de validación de dicho experimento. Como filtro principal se tuvo en cuenta que las propuestas encontradas tuvieran una relación con las actividades cognitivas de visualización, razonamiento y construcción propuestas por (Duval, La Geometría desde un punto de vista cognitivo, 2001).

Como segundo filtro para la adaptación de las actividades se tuvo en cuenta los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencia propuestos por el MEN para la Educación Básica Secundaria, ya que el contenido de las actividades debe tener sentido y coherencia con las temáticas correspondientes al grado en el que se aplicaron.

Lo anterior buscó que los conceptos previos de los estudiantes contribuyan para establecer un vínculo entre el trabajo de aumento y reducción de figuras geométricas y las actividades cognitivas señaladas. Este vínculo está determinado por los instrumentos empleados en la construcción de las actividades y que deben servir a la exploración heurística de una situación.

3.1.1 Actividades propuestas para la implementación del Experimento de Enseñanza.

Las actividades propuestas en este Experimento de Enseñanza fueron aplicadas a estudiantes del grado séptimo del Colegio IETI 20 de Julio, son fruto de la discusión con el equipo de investigación que participó en el desarrollo de este trabajo, a la luz de los trabajos de (Samper, Camargo, & Leguizamón, 2003), Duval (2005) y (Ferrer, 2015), los cuales le dieron

mayor relevancia al trabajo con figuras geométricas y permitieron caracterizar en las tareas propuestas del Experimento de Enseñanza las actividades cognitivas.

Las tareas fueron propuestas como actividades que invitan al estudiante a leer, analizar y resolver la situación propuesta; en las primeras actividades se profundiza el proceso de visualización y razonamiento mientras que en la tercera el estudiante debe construir siguiendo las instrucciones presentadas. En las tres actividades se busca que los estudiantes evalúen el mejor camino para aceptar la transformación que sufre una figura y que la validen a partir de la utilización de objetos matemáticos.

Al final de las 3 actividades se espera que, al reconocer las semejanzas entre las figuras, el estudiante sea capaz de establecer la relación que existe entre la razón de las áreas de las figuras y la razón entre los lados correspondientes de las mismas, es decir, comunique que la razón entre las áreas de las figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón entre los lados correspondientes de las figuras.

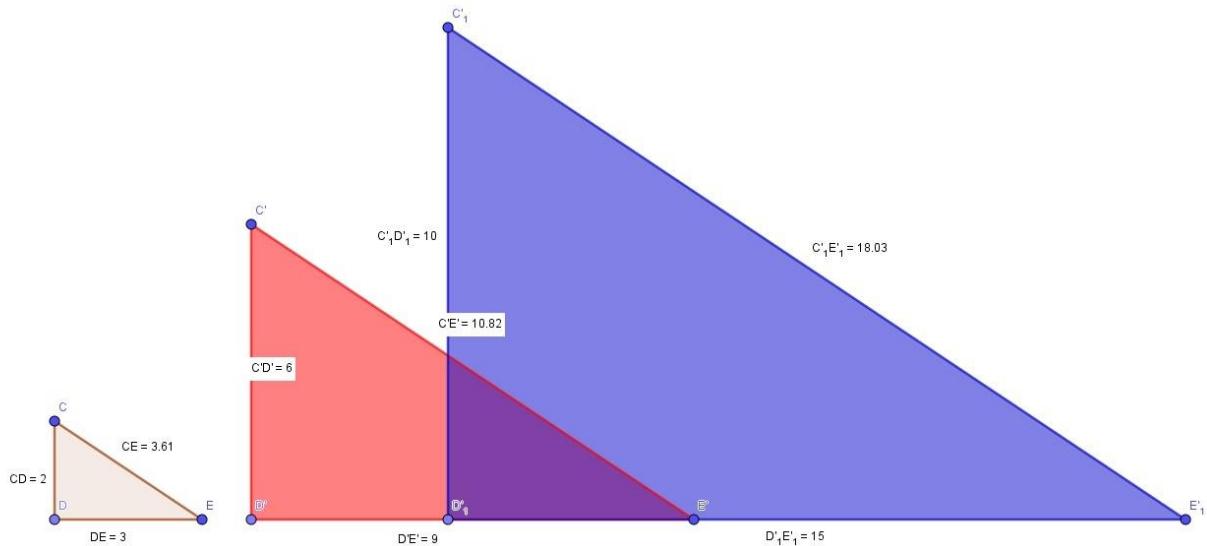
Actividad 1.

La primera actividad propuesta corresponde a la presentación de 3 familias homotéticas de imágenes que se encontraban superpuestas: un cuadrado, un triángulo equilátero y un hexágono no regular en forma de “L”, en esta se pedía validar el enunciado de la misma, el cual corresponde a la descripción de figuras homotéticas si se cumplen dos condiciones, con lo cual se pretende analizar las figuras a partir de las propiedades de la misma y no por las formas visualmente reconocidas (Duval, 2005. p. 3); es decir, se invitaba a ir más allá de la percepción y validar las hipótesis propuestas a partir de la instrucción consignada en el enunciado de la actividad, decir, si las imágenes formaban una familia de figuras homotéticas.

Para esta las tres actividades se tuvo en cuenta la tarea “Doblar figuras” que favorece el estudio de la proporcionalidad entre figuras poligonales, teniendo en cuenta que la semejanza de figuras se basa en la proporcionalidad de los lados homólogos o correspondientes. Dado que con la actividad 1 se tuvo el primer acercamiento con los estudiantes, la profesora del curso los organiza y presenta a los Docentes- Investigadores como estudiantes de últimos semestres de la Universidad del Valle, los cuales aplicarán una serie de actividades, la profesora recomienda claridad en las consignas de las actividades para que los resultados sean mejores.

Se realizó la presentación, explicando nuestra presencia en la institución y las reglas de convivencia que se tendrán en cuenta para el desarrollo del trabajo. Se expone a los estudiantes que durante cada presentación será entregada una actividad – taller con las consignas claras y espacio suficiente para el desarrollo de la actividad, en las ilustraciones 1, 2 y 3 se muestra la hoja empleada para el trabajo con la primera familia de imágenes homotéticas trabajadas, este mismo modelo se reproduce para el caso de los otros dos puntos a trabajar.

Gráfica 2 Familia de Triángulos rectángulos



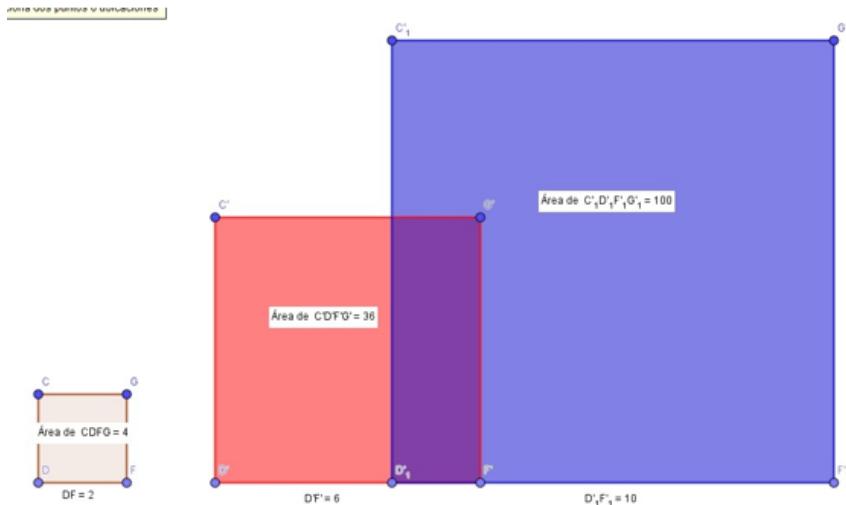
Fuente: Actividad 1.

Gráfica 3 Actividad 2. Familia de imágenes homotéticas.

- Visualice las siguientes figuras e identifique si son o no son semejantes teniendo en cuenta que la razón entre los lados correspondientes de las figuras debe ser igual en todos los lados y que la razón entre las áreas de los polígonos debe ser el cuadrado de la razón entre sus lados, es decir:

En el caso de los lados: $\frac{l'}{l} = r$

En el caso de las áreas: $\frac{A'}{A} = r^2$



Fuente: Actividad 1

En esta primera parte de la hoja de trabajo se encuentran consignadas las instrucciones a tener en cuenta para el desarrollo general de la actividad, las propiedades de la semejanza de figuras, así mismo se encuentra el primer punto de la actividad sobre el cual se deben aplicar las propiedades que se encuentran planteadas en las instrucciones, lo mismo se realizará con los otros dos puntos.

Gráfica 4 Actividad 1 Consigna 2

- Identifica las parejas de lados correspondientes entre la original (en este caso la figura más pequeña) y las que dibujaste, encuentra la razón entre cada una de estas parejas. Con base a los resultados de las razones del ejercicio anterior indica:
¿Qué relación existe entre los perímetros de las figuras?

Razón entre los lados de la Figura 1 y mi primer dibujo:

Razón entre los lados de la Figura 1 y mi segundo dibujo:

La segunda consigna pretende orientar la actividad respecto a la relación que pudiera existir entre los perímetros de las figuras en cada uno de las construcciones propuestas para este ejercicio, dejando la claridad de que se establecerá la razón entre el perímetro de la figura con mayor perímetro y la que tiene menor.

Gráfica 5 Actividad 1. Consigna 3

Relación:

1. ¿Qué relación existe entre las áreas de las figuras?

Relación entre las áreas de las figuras semejantes a la figura 1:

Fuente: Actividad 1

Esta consigna se establece bajo el mismo criterio de la anterior, encontrar el área de las figuras que se van a relacionar para establecer la relación entre ellas.

Actividad 2.

La segunda actividad es producto de la reflexión con base a lo trabajado en la actividad 1, para la cual se presentan mejoras en términos de forma al diseño, por ejemplo, las imágenes ya no se presentan de manera superpuesta, las consignas son precisas y se espera que los estudiantes hagan énfasis en la validación de la semejanza a partir del uso de las propiedades de la misma, es así como para esta segunda actividad se conserva la consigna instruccional sobre las condiciones proporcionales sobre las cuales dos figuras se consideran homotéticamente semejantes, mientras que las familias de figuras son presentadas de manera separadas y se reduce de tres familias a de

imágenes a dos, se mantiene el espacio suficiente para el desarrollo de la actividad y las hojas de trabajo.

Se mantiene como base para el desarrollo de la actividad la tarea “Doblar papel” y se puede apreciar en las ilustraciones 4, 5 y 6 la hoja empleada para el desarrollo de la actividad.

Gráfica 6 Actividad 2. Introducción

Nombres: _____	Cali, 28 de junio de 2018
----------------	---------------------------

Dos figuras son semejantes cuando cumplen dos condiciones:

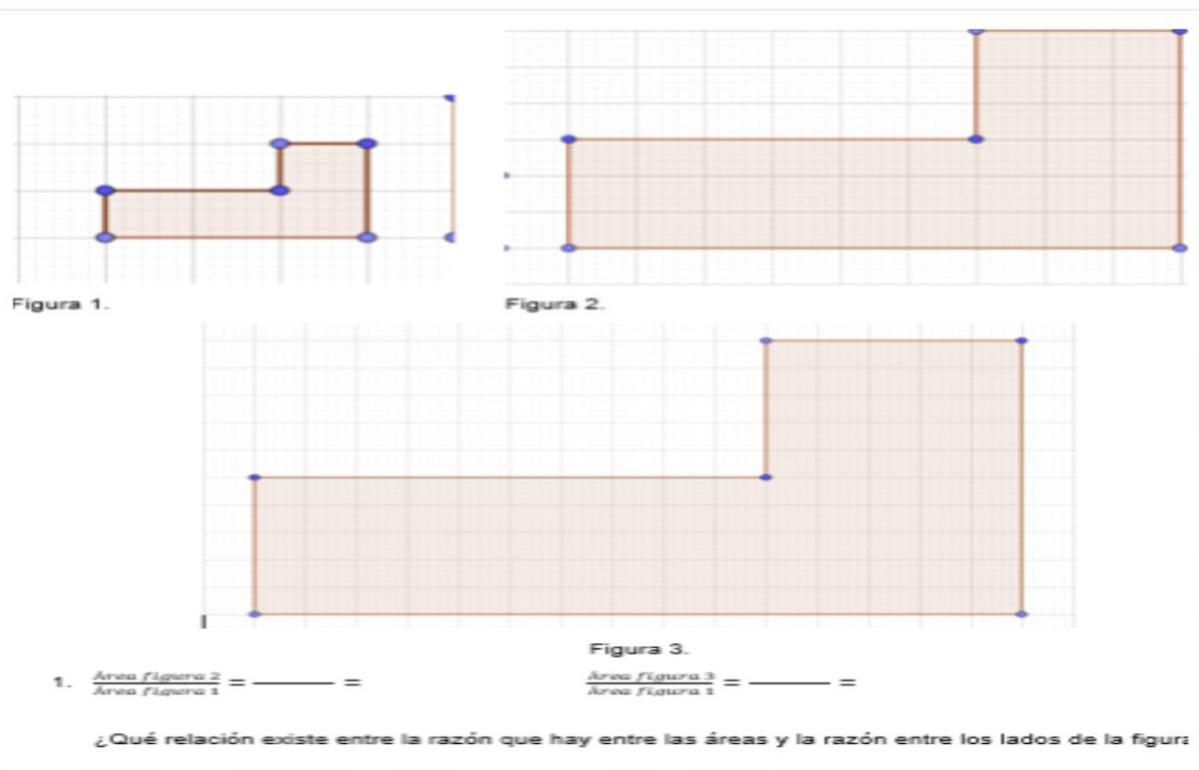
1. La razón (la división) entre todos los lados correspondientes de las figuras debe ser igual, es decir, el resultado de todas las divisiones al comparar dos figuras debe ser igual en todos los lados.
En el caso de los lados: $\frac{l'}{l} = r$
 La razón entre las áreas de los polígonos debe ser el cuadrado de la razón entre sus lados, es decir:
En el caso de las áreas: $\frac{A'}{A} = r^2$

En cada una de las siguientes figuras indica si son semejantes o no son semejantes teniendo en cuenta el criterio de las áreas.

Fuente: Actividad 2.

En esta segunda actividad se establece de manera más organizada las condiciones que deben cumplir dos figuras para determinar si son semejantes o no, dejando claridad en cómo se establecerán las razones.

Gráfica 7 Actividad 2 Consigna 1



Fuente: Actividad 2.

En la primera parte de esta actividad se encuentran 3 hexágonos irregulares los cuales deben ser observados para determinar si son o no son semejantes, se establecen claramente las relaciones que se piden, esto como acción de mejora ante las dificultades presentadas por no comprender la pretensión de la actividad.

Gráfica 8 Actividad 2 Consigna 2

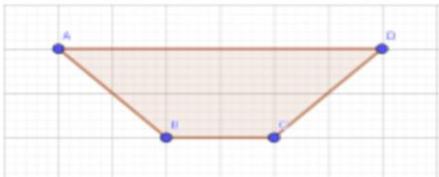


Figura 4.



Figura 5.



Figura 6.

1. $\frac{\text{Área figura 5}}{\text{Área figura 4}} = \underline{\hspace{2cm}} =$

$\frac{\text{Área figura 6}}{\text{Área figura 4}} = \underline{\hspace{2cm}} =$

¿Qué relación existe entre la razón que hay entre las áreas y la razón entre los lados de la figura?

R/

Fuente: Actividad 2.

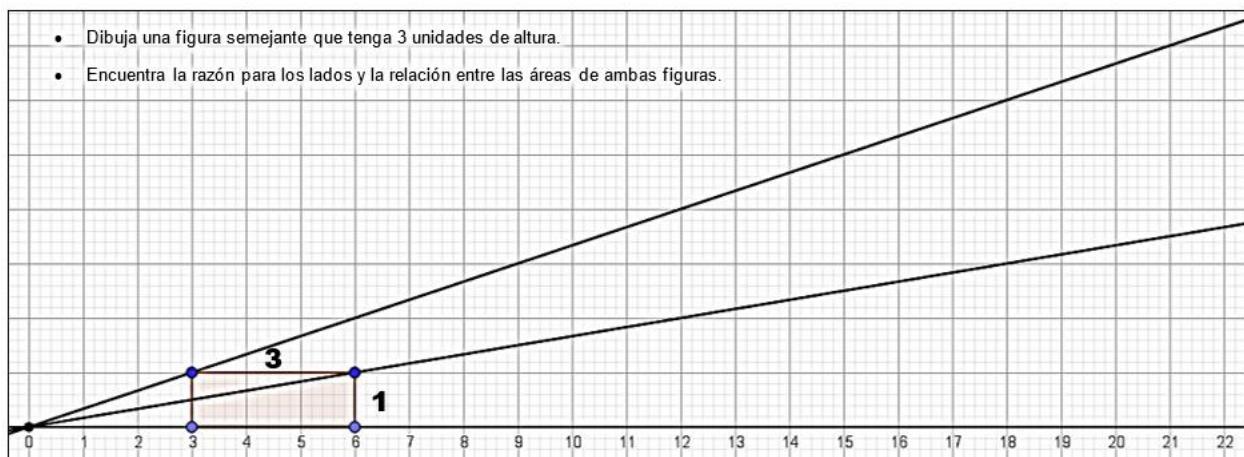
El respaldo de la hoja de trabajo contiene elementos similares a los planteados en la ilustración anterior, es decir, se establecen las relaciones a encontrar para establecer las razones entre ellas, así como una pregunta para reflexionar en torno a la relación que hay entre dos figuras que son semejantes.

Actividad 3.

La actividad 3 agrega un nuevo elemento de trabajo, la construcción de una figura homotéticamente semejante a la dada, para lo cual los estudiantes deben seguir las instrucciones que se presentan. Esta actividad consta de 2 enunciados, uno adjudicado a un rectángulo y el otro a un cuadrado, ambos se encuentran inscritos en 3 rectas que permiten organizar una familia de figuras homotéticas.

A cada una de las figuras se le dan una serie de instrucciones precisas de las condiciones que debe tener la construcción de la figura homotéticamente semejante, así mismo se deja explícito que en ambos se debe encontrar la razón sobre los lados correspondientes y también sobre las áreas, estas son las mejoras con respecto a los diseños de las actividades 1 y 2, la exactitud que se pide y la construcción. Además, la participación de los estudiantes aumentó con la propuesta de que por cada acierto que se tuviera se daría un incentivo.

Gráfica 9 Actividad 3. Consigna 1

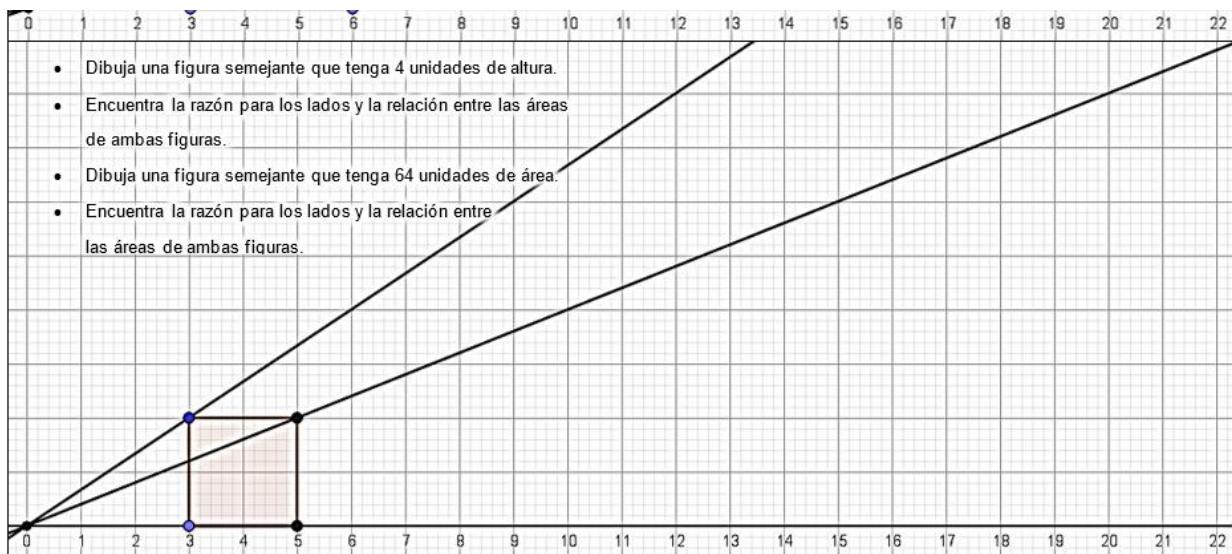


Fuente: Actividad 3.

En la primera pregunta se pide dibujar una figura semejante con 3 unidades de altura para luego encontrar la razón entre los lados y las áreas, en la segunda pregunta se conserva el enunciado de la primera y se agrega un tercero que propone una construcción a partir de un área sugerida.

La base de la actividad sigue siendo “doblar papel”, es decir la búsqueda de la apropiación del concepto semejanza entre figuras a partir de la proporcionalidad entre los lados correspondientes. Las ilustraciones 7 y 8 muestran la hoja empleada para el desarrollo de la actividad.

Gráfica 10 Actividad 3. Consigna 2



Fuente: Actividad 3

Este segundo punto recoge todos los elementos que se trabajaron en las actividades anteriores e incluye la construcción de una figura a partir de unos planteamientos dados, se invita a validar y razonar sobre la prueba.

3.1.2 Elementos curriculares que intervienen en las actividades.

Las actividades presentadas hicieron parte de la clase de matemáticas del grado Séptimo del Colegio I.E.T.I. 20 de Julio y fueron diseñadas sobre la base de la pertinencia y coherencia establecida por el MEN en los Estándares Básicos de Competencias de sexto a séptimo.

En el pensamiento espacial y sistemas geométricos señala

Al terminar grado séptimo “Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones y reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte” Implícitamente se puede tener en cuenta también el estándar del pensamiento numérico y sistemas numéricos. “Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.” (Ministerio de Educación Nacional, 2006, pág. 84)

Estos Estándares Básicos de Competencias hacen parte de los insumos curriculares que permitieron el desarrollo de esta propuesta para el grado séptimo del colegio I.E.T.I 20 de Julio, que con la ayuda el equipo investigador y a la luz de los objetivos propuestos permitió hacer una planificación acorde a los contenidos que trabajaría la maestra encargada del curso.

Además de esto se tendrá en cuenta la condición que me permita aumentar o disminuir figuras, “la homotecia que es la transformación que sufre una figura, conservando su forma y modificando o no su tamaño. La homotecia guarda la proporción entre las parejas de segmentos correspondiente en la figura” (Oicatá Ojeda, y otros, 2012, pág. 224)., dicho de otra forma las proporciones entre los lados de las figuras serán siempre iguales, lo mismo ocurre con la razón entre las áreas de las figuras, en cuyo caso la razón entre estas es igual al cuadrado de la razón entre los lados.

Estas relaciones descritas a partir de la homotecia se pueden complementar con el concepto de proporciones, entendida como la igualdad entre dos razones (Oicatá Ojeda, y otros, 2012, pág.

157), es finalmente lo que se buscará, que los estudiantes comparen las razones para determinar si las figuras son semejantes o no.

Si bien la presentación de las mismas se hizo bajo el formato (actividad - taller) la idea en la clase de que fueran personas diferentes presentando la clase captó la atención de los estudiantes, potenciando el aprendizaje en un importante número de alumnos que estaban en disposición del desarrollo de las actividades.

Estos elementos permitieron el desarrollo de la actividad investigativa y facilitaron las interacciones e indagaciones por parte del grupo investigador con los estudiantes sobre los elementos que debían tenerse en cuenta para la planificación de la siguiente actividad de tal manera que cada etapa del Experimento de Enseñanza tuviera los ajustes y mejoras pertinentes para su diseño.

3.1.3 Contenido de las actividades.

Las actividades presentadas tuvieron una serie de características que las hacen significativas para este trabajo y para el proceso de aprendizaje de los estudiantes, en términos del contenido se buscaba alcanzar la aprehensión por parte de los estudiantes de la semejanza de figuras a partir de una serie de propiedades, cada actividad tuvo un diseño dirigido, pensado y discutido para este fin, la familiarización con el formato de las actividades fue otra característica de las actividades.

En términos cognitivos la secuencia de la actividad desde la visualización y el razonamiento hasta incluir la construcción permite al estudiante indagar sobre los elementos teóricos necesarios para el desarrollo de las actividades, una vez se indaga sobre estos elementos se busca su afianzamiento a través de la explicación de la actividad, la interacción uno a uno entre

investigador y estudiante pero también con la socialización entre pares, esto permitió la descripción de los resultados por parte de algunos de ellos, apreciando que entendían en términos generales cuando se hablaba de figuras semejantes, así a pesar de encontrarse en un mismo registro de representación interiorizan que si se cumplen algunas condiciones las figuras guardan alguna relación.

La actividad 1 propone un acercamiento al concepto de semejanza entre figuras a partir de la lectura de las consignas, la visualización que le permite prever de manera subjetiva un resultado y que le lleva a desarrollar un proceso discursivo que le permita explicar o validar la conjetura inicial, estas validaciones se hacen a través del desarrollo de las consignas propuestas en la actividad.

La actividad 2 propone la familiarización del concepto con instrucciones precisas que llevan a pensar en una característica de la semejanza de figuras y reforzando los objetos movilizados en la actividad 1, en esta actividad es de resaltar la pretensión no solo de validar el concepto sino promover elementos discursivos que le permitan hacer análisis y explicitar el razonamiento que hicieron para explicar la situación. Se pudo evidenciar que este proceso fue mucho más claro entre aquellos estudiantes que tuvieron la disposición y que visualizaron previamente lo que ocurriría, es decir, establecieron un vínculo entre el proceso de visualización y el proceso de razonamiento que le permitía validar la conjetura propuesta a través de una estrategia de solución que evidenciara el trabajo realizado.

En la actividad 3 se pretendía retomar el trabajo realizado en las dos actividades y agregar una consigna de construcción que genera un proceso de reflexión sobre el qué hacer en la actividad, esto fue clave pues permitió establecer un puente entre las tres actividades cognitivas, es decir, quien era capaz de visualizar razonaba para proponer un resultado y a su vez si cumplía con estos

dos requisitos se arriesgaba a construir un objeto, por supuesto siguiendo las instrucciones que validara lo que había propuesto, esta es la característica fundamental de la actividad, establecer el vínculo entre las tres actividades cognitivas de tal manera que incluso se atreviera a comunicar a sus compañeros cómo iniciar el desarrollo de dicha actividad.

3.2 ANÁLISIS DE LAS SITUACIONES PROPUESTAS EN EL AULA.

El conjunto de actividades de aula se propuso como un ejercicio para ser desarrollado en la clase de matemáticas del grado séptimo del I.E.T.I 20 de Julio. Teniendo como marco de referencia para el diseño y análisis de las actividades los Experimentos de Enseñanza, se presentan las actividades sujetas a cambios y ajustes según lo requiera el desarrollo de las mismas. El conjunto de actividades contó con tres elementos tenían por objetivo aportar al desarrollo en los estudiantes de las tres actividades cognitivas, visualización, razonamiento y construcción a través del trabajo con geometría y en particular la semejanza de figuras reconociese la relación que existe entre la razón de los lados de una figura y la razón de sus áreas cuando estas son semejantes de tal manera que los estudiantes tuvieran un aprendizaje significativo y un acercamiento semiótico cognitivo a través del razonamiento y la visualización.

Para el análisis de la actividad se tendrán en cuenta los siguientes referentes: La validación, como herramienta eficaz para el desarrollo de razonamiento para que los estudiantes apliquen sus conocimientos y a partir de estos logren construir nuevos y mejores conceptos e identifiquen los elementos que intervienen en la construcción de la matemática, dicho de otra forma, se tendrá en cuenta el análisis visual de las figuras a partir de la validación a través de la prueba y la explicación. (Samper, Camargo, & Leguizamón, 2003)

Por otra parte, se tendrá en cuenta el análisis de las figuras en función de las formas que se reconocen y de las propiedades visuales de dichas formas, así como el conocimiento de las propiedades propias de las figuras que deben tenerse en cuenta al comparar una y otra, es decir, la validación a partir del análisis de la forma de la figura complementada con la aplicación de las propiedades que permiten comprobar la información presentada, visualización no icónica. (Duval, Los cambios de mirada necesarios sobre las figuras, 2010) En este caso en particular, a pesar de no utilizar las formas propuestas en el trabajo, la teoría y el análisis presentados son precisos para el interés de este trabajo.

Por último, tendremos en cuenta la independencia de las actividades cognitivas, de tal forma que se puedan tener en cuenta las competencias de los estudiantes en torno a la construcción, visualización o razonamiento, e incluso determinar cuántos de ellos logran sinergia entre estos tres conceptos requerida para alcanzar la competencia en geometría. (Duval, La Geometría desde un punto de vista cognitivo, 2001)

Es muy importante tener en cuenta que este capítulo se tendrá en cuenta algunos momentos significativos del desarrollo de las actividades, aspectos positivos, dificultades, pero también coincidencias, discusiones y explicaciones presentadas por los estudiantes en sus hojas de trabajo y en el registro fílmico.

3.2.1 Breve reseña de cada de las actividades

La actividad 1 está compuesta de 3 ejercicios de la cual se hará una descripción y luego un análisis. Para el desarrollo de esta actividad se programó una visita al I.E.T.I 20 de Julio con el grado 7-4, en dicha jornada participaron 23 estudiantes, se filmaron 32 videos y se tomaron 2 fotografías sobre el desarrollo de la actividad.

La actividad 2 está compuesta de 2 ejercicios de la cual se hará una descripción y luego un análisis. Para el desarrollo de esta actividad se programó una visita al I.E.T.I 20 de Julio con el grado 7-4, en dicha jornada participaron 18 estudiantes, se filmaron 8 videos y se tomaron 11 fotografías sobre el desarrollo de la actividad.

Es importante tener en consideración que esta segunda actividad contiene ajustes y precisiones sobre la primera actividad, las cuales hacen explícitas las razones que deben ser encontradas para establecer una relación de semejanza entre dos figuras.

La actividad 3 por su parte, está compuesta de 2 ejercicios que involucran un rectángulo y un cuadrado, a los cuales se les deben hacer construcciones, descripciones y análisis. Para el desarrollo de esta actividad se programó una tercera visita al mismo curso del colegio en cuestión, en este caso participaron 14 estudiantes y se registraron 12 videos. Siendo esta la actividad de cierre, se realizó motivó la participación de los estudiantes con dulces a aquellos que respondieran explicar acertadamente el propósito de la actividad que habían realizado.

Esta actividad las consignas son más explícitas en tanto recogen lo planteado en las actividades anteriores pero se pide a los estudiantes que hagan una construcción según unas condiciones planteadas, la primera de ellas, consiste en triplicar el lado de una de las figuras y la otra ampliar la figura original según las áreas solicitadas, este asunto requiere un proceso de construcción acertada que permita visualizar la consigna, razonar sobre ella justificando el uso de las propiedades dadas y validando lo encontrado usando prueba o explicación.

La información obtenida fue compilada en un archivo del cual se obtuvieron los datos y fueron analizados, para este propósito, se desarrolló una rejilla de análisis en la que se tuvieron en cuenta criterios cognitivos y de semejanza de figuras, teniendo en cuenta las propiedades de la

semejanza de figuras y la relación entre ellas, las actividades cognitivas de visualización, razonamiento y los procesos de validación, prueba y explicación, es decir, se tuvieron en cuenta estos elementos para dar paso al análisis a partir de la visualización no icónica.

3.2.2 Descripción de los datos obtenidos.

La descripción del trabajo a realizar en la primera actividad por parte del docente – investigador consistió en presentar la semejanza con un ejemplo de la vida cotidiana: las fotografías, que muestran una imagen de la vida real a escala, bien sea más grande o más pequeña.

Se define en él la semejanza, como figuras con la misma forma pero que pueden ser más pequeñas o más grandes y se agrega que una de las formas de trabajar semejanzas es a través de la homotecia, la cual genera una familia de figuras semejantes. Numéricamente el video presenta la semejanza entre dos figuras cuando sus lados correspondientes son proporcionales y si la razón entre las áreas de la misma es igual al cuadrado de la razón entre los lados, es decir, se cumple que:

$$\text{En el caso de los lados: } r = \frac{f_2}{f_1} \quad \text{En el caso de las áreas: } \frac{A_2}{A_1} = r^2$$

El ejemplo es presentado con una familia de rectángulos en el cual el primero tiene base 1 y altura 2. El video finaliza con la explicación a los estudiantes de lo que deben hacer durante la actividad, esto es, que pueda establecer las razones entre los lados correspondientes y la razón entre las áreas de cada una de las figuras propuestas en la actividad.

Ilustración 1 Intervención inicial en el salón de clases.



Fuente: Actividad 1, video: A1Ex1

La imagen que se presenta se tomó de uno de los videos grabados, en este se registra la conversación entre el docente – investigador y un estudiante del curso. Para efectos de la transcripción de la conversación y en adelante designaremos con la letra (D) para referirnos al Docente – Investigador y con la letra (E) para referirnos al estudiante del curso.

D: Cuéntame, ¿Qué estás haciendo?

E: Por lo menos aquí es dividir 2 entre 6, o sea, 2 por 6,
¿no?

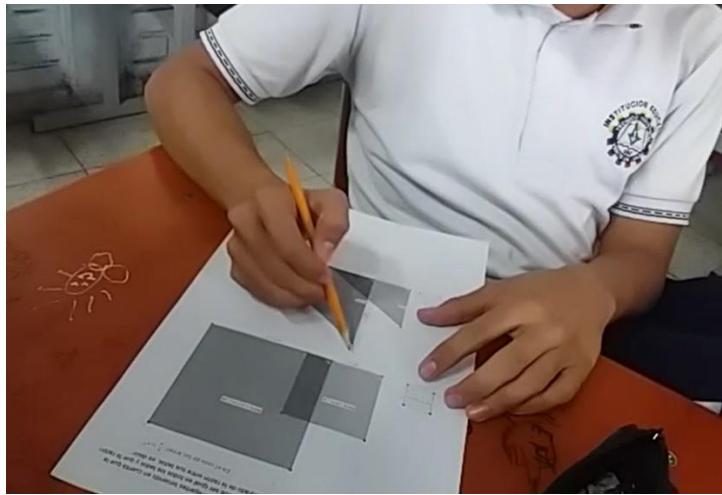
D: ¿Dividir? Pero generalmente vamos a dividir el mayor
Entre el menor.

E: Ahh sí, entonces sería...

D: Pero bueno, ¿cómo lo entendiste vos? ¿Qué es lo que
habría que hacer?

E: Dividir estos dos y después dividir el área y después hacer
lo mismo con las otras figuras. (Video A1Ex1).

Ilustración 2 Actividad 1. Explicación del trabajo a realizar por parte de un estudiante



Fuente: A1Int3

El estudiante asume la relación que se sugiere, aunque invierte el orden al establecer la razón, pero luego aclara con vehemencia que hay que dividir los lados de las figuras y luego dividir las áreas, luego señala que es preciso hacer lo mismo con cada uno de los ejercicios de la actividad.

Mientras se desarrolla el experimento se registra la interacción con otros estudiantes, los cuales plantean dudas sobre el quehacer, en otros se registra como una estudiante replica a su compañera lo que debe hacer, en particular se entrevista a uno que ya ha avanzado en el desarrollo del trabajo y se le pide autorización para que sea grabado lo que ha realizado mientras lo explica.

E: Bueno, lo que yo entendí es que toca dividir los lados de la figura 1 y el primer dibujo, luego los lados de la figura 1 y la figura 2 que sería 6 y 10, que sería... 10 entre 2 igual a 5.

Ahora dice entre los lados de la figura 2 y el primer dibujo.

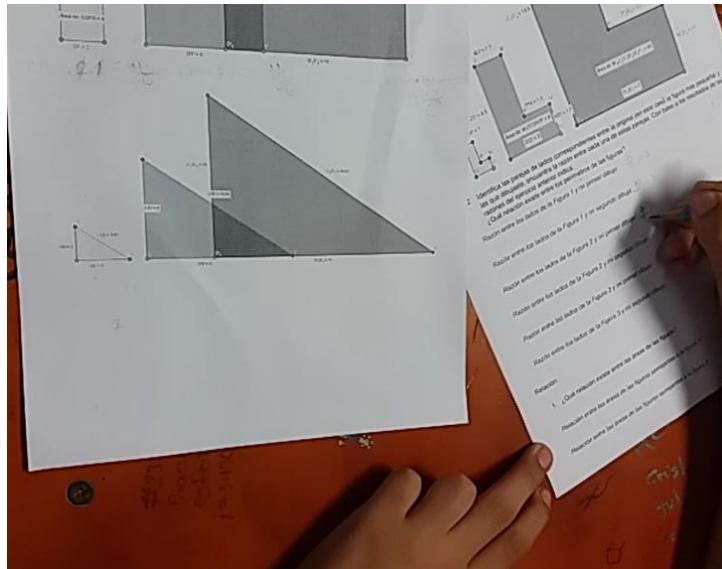
D: Es esta, ya pasamos a esta.

E: Ahhh es esta, entonces es esta y esta, 9 a 3, igual 3

veces. La relación entre los lados de la figura dos y mi segundo dibujo, seria este y este, 15 y 3, igual 5 veces.

Razón entre los lados de la figura 3 y mi primer dibujo... (Video A1Int3)

Ilustración 3 Actividad 1. Explicación del trabajo realizado por un estudiante



Fuente A1Int13

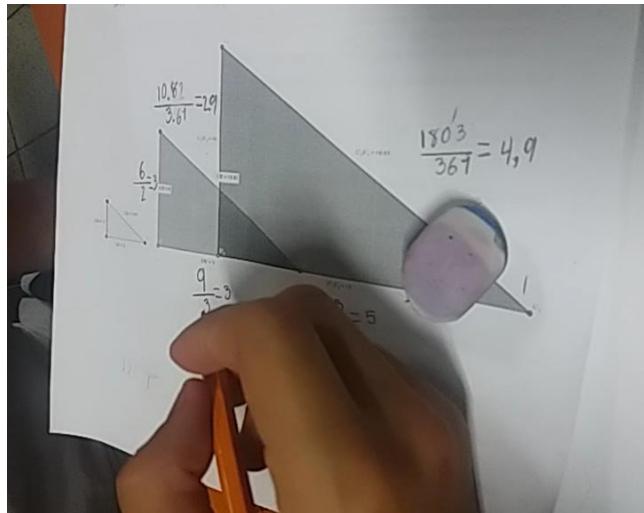
En este video se aprecia como el estudiante acertadamente explica lo que va haciendo en la actividad, hace un paso a paso y desarrolla fluidamente los puntos ante las cámaras siguiendo las instrucciones que se registran en los enunciados, es decir, el estudiante establece las relaciones entre los lados de las figuras y realiza las divisiones necesarias para llegar al acuerdo de que todas las razones entre los lados de dos figuras son iguales.

Se continua con el desarrollo del experimento y de las entrevistas se elige a un último estudiante el cual realiza una explicación de cómo realizó el proceso de relación entre los lados de las figuras. A continuación, se transcribe la entrevista.

E: Toca es encontrar la razón, entonces vamos a hacer primero

este lado, después este y después este. Entonces aquí es 9 dividido tres, es tres, luego 15 dividido 5 es 5 y luego 18,03 dividido 3,61 es 4,9. Ahora toca este lado 6 dividido 2 es 3 y 10 dividido 2 es 5. (A1Int3)

Ilustración 4 Actividad 1. Explicación del trabajo realizado por un estudiante.



Fuente: A1Int 18, 19, 20 y 21

En este video el estudiante muestra las diferentes razones que se presentan entre los lados de la segunda figura, el triángulo rectángulo, para poder establecer que la familia de figuras es semejante. El estudiante muestra confianza y dominio del trabajo realizado mostrando las razones existentes entre los lados de las figuras.

Se aprecia en los videos que la mayoría de los estudiantes utilizan la explicación para validar el enunciado propuesto a través de la explicación argumentada de la proposición dada, es decir, a través de una prueba, lo cual permite reconociendo las propiedades establecidas en las consignas que el estudiante aplique las propiedades necesarias que dan cuenta de la hipótesis planteada (Duval 2005).

En el caso de la segunda actividad se tuvo en cuenta la descripción del trabajo a realizar por parte del docente – investigador, el cual consistió en presentar nuevamente la semejanza, como figuras con la misma forma pero que pueden ser más pequeñas o más grandes. Numéricamente el video presenta la semejanza entre dos figuras cuando sus lados correspondientes son proporcionales y si la razón entre las áreas de la misma es igual al cuadrado de la razón entre los lados, es decir, se cumple las mismas condiciones planteadas al inicio de este apartado.

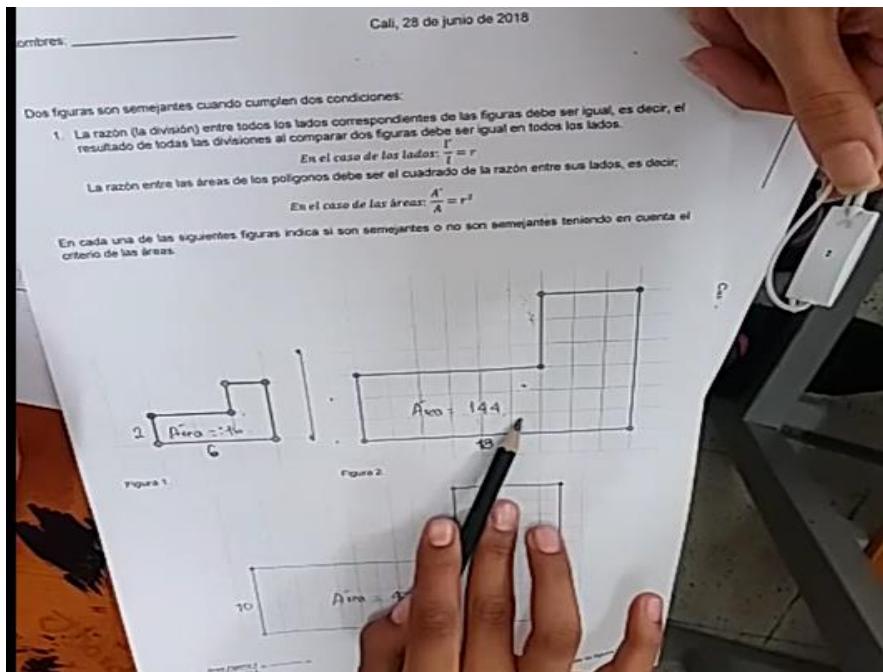
Después de dar las instrucciones iniciales se inicia con el trabajo, de tal manera que el tiempo para el desarrollo del mismo sea mayor y no se quede incompleta la actividad, la actividad consta de dos ejercicios en los cuales los estudiantes deberán establecer las razones entre los lados y las áreas de las figuras, una es una figura de 6 lados en forma de “L”, y un paralelogramo en forma de trapecio, se pide al final de cada uno de los ejercicios que los estudiantes arrojen una conclusión referente al ejercicio planteado.

Al finalizar estas recomendaciones se invita a los estudiantes a desarrollar completamente la actividad, que se trata de entender el concepto y no solo resolver operaciones, que se requiere disposición para el desarrollo del mismo, también se hace explícito que no es una obligación hacerla y que el objetivo es aportar a este trabajo y comprender la idea que se quiere compartir.

A continuación, se presentará una selección de imágenes que corresponden al trabajo realizado durante la segunda actividad. La siguiente imagen corresponde a la participación de una estudiante en la cual plantea el proceso a seguir para realizar lo que se pide en el trabajo y es tomada de uno de los videos grabados, en este se registra la conversación entre el docente – investigador y un estudiante del curso. Se mantendrán las convenciones D: docente, E: estudiante.

E: Entonces el área 16 se divide por 144, y el resultado que le dé allí ya queda entre estos dos, y después 16 por 400, que es el área de este grande, que es la razón, y este que es el triángulo original tiene que dividirse con todos.

Ilustración 5 Actividad 2. Explicación del trabajo a realizar por parte de un estudiante.



Fuente, A2Int1

La ilustración tomada de uno de los videos realizados durante la actividad muestra la explicación de una estudiante, sobre el trabajo que debe realizar para desarrollar la actividad, en ella se aprecia mayor fluidez en torno a la descripción del trabajo que se debe hacer, si bien, la estudiante comenta con algunas imprecisiones se muestra mucho más segura y con claridad con respecto a la clase anterior. Vale la pena mencionar que esta explicación también fue hecha de manera muy visual por parte de otro estudiante quién sin hablar señaló en su hoja lo que se debía hacer (ver anexo A1Int2).

Continúa el desarrollo de la actividad dedicando un espacio de interacción a los estudiantes, aclarando dudas, pero invitándoles a que den su opinión sobre lo que deben hacer, es así como

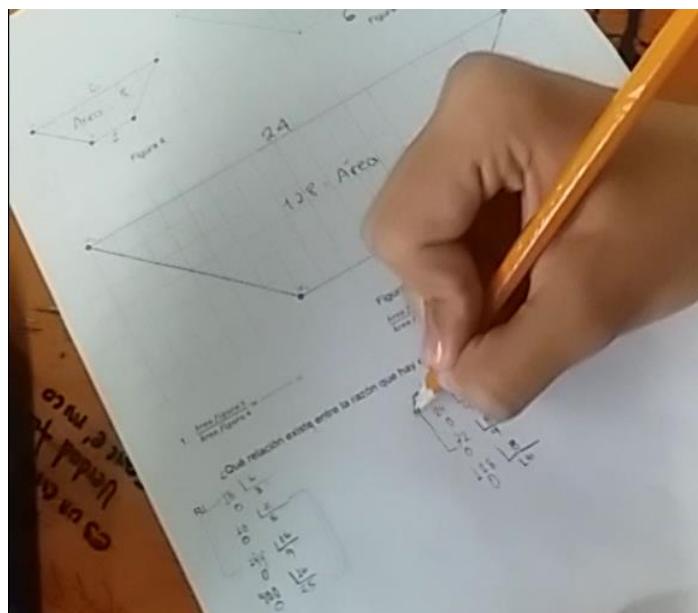
una de esas interacciones llama la atención pues en ella se ve a un estudiante resolviendo de manera muy particular lo propuesto y explicando la relación que existe entre las figuras.

E: Pues porque este es los lados, estos son los lados y esta esta es el área, y después los lados igual del área, pero del otros.

D: ¿Del otro? ¿Del más grande o del más pequeño?

E: Del más grande. (A2Int1)

Ilustración 6 Actividad 2. Explicación del trabajo realizado por un estudiante.



Fuente, A2Int5

Es muy importante señalar que el estudiante ya tenía todo el trabajo realizado, lo hizo siguiendo las instrucciones, pero con su estilo, usando los algoritmos como los trabaja cotidianamente, en este punto el estudiante describe el objetivo de la actividad, estableciendo la relación que existe entre las razones de los lados de las figuras con las razones entre sus áreas, aunque lo haya dicho de manera imprecisa se aprecia un avance positivo con respecto de la comprensión de estas propiedades comparado con la actividad 1.

Para finalizar la actividad se pide a los estudiantes que presente atención a un compañero que hará una presentación al salón respecto el trabajo que realizó.

D: Pongámosle cuidado al compañero.

E1: ¿Si ven esta figura que está acá?

E2: No

D: Cada quien remítase a su hoja.

E1: La primera figura se le comparan los lados con la segunda figura y después compara el área de la primera figura con el área de la segunda figura.

E2: Pero hágalo ahí (haciendo referencia al tablero).

E1: Dibuja las figuras en el tablero.

E1: Ahora van a dividir esta con esta (señalando el tablero). Eso da 3, y después esta con esta (señalando los lados correspondientes entre las figuras) y después se divide el área que es igual a 9. La primera es la razón, por lo menos 3^2 da 9.

E4: Falta una división.

E1: Entonces mire (el estudiante señala el tablero donde escribió lo que hizo)

D: ¿Quién complementa? ¿Qué relación existe entre este 5 y este 25?

E2: Porque el 5 es 5^2 y eso da 25.

D: ¡Muy bien! Entonces, ¿Qué pueden decir en general de esas tres figuras? ¿Cómo son?

E1: Pues que la relación de los lados es 3 y en el área es 5.E5: Desde el público otro estudiante dice: "No es 5 es 9".

D: Ya lo dijeron, ¿Cuál es la relación que existe entre las dos figuras?

E6: Ehhhh, que casi todos son múltiplos.

D: Alguien lo dijo ahorita en palabras, la relación entre las tres figuras.

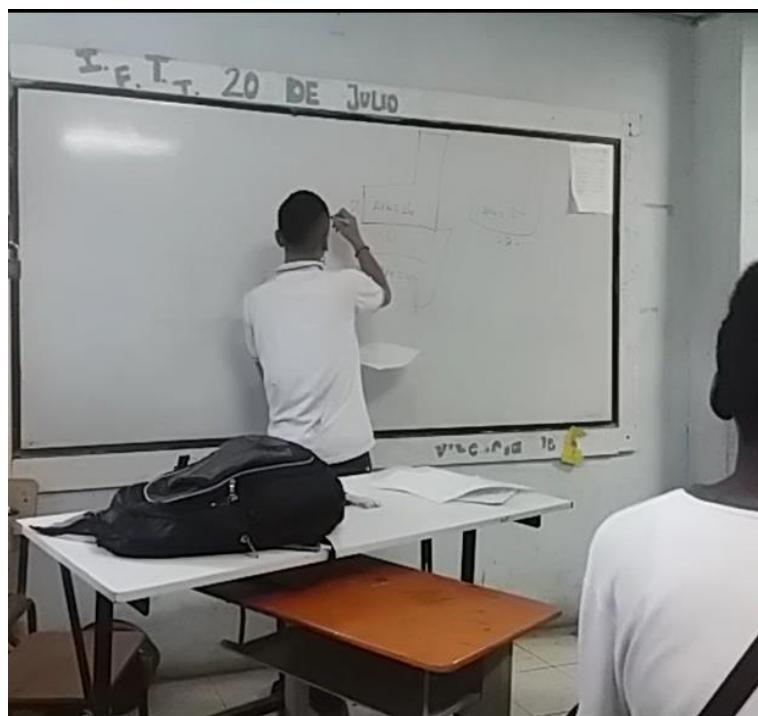
E7: Semejantes.

D: ¿Qué son cómo?

E7: ¡Semejantes!

D: Muy bien, un voluntario para hacer la segunda. (A2Int5)

Ilustración 7 Actividad 2. Explicación del trabajo realiado por parte de un estudiante en el tablero.



Fuente: A2Int7

Es interesante la actitud del grupo cuando es un compañero quien está en frente liderando la discusión, algunos de una forma un poco jocosa hablan, otros hacen apuntes, pero en general los comentarios versan a construir el concepto al cual se quiere llegar, este video es significativo en ese sentido, pues evidencia la interiorización, dudas y conjeturas que establecen los estudiantes a partir de las consignas planteadas en la actividad propuesta, es decir, se presentan nuevas oportunidades de aprendizaje que son aprovechadas por los estudiantes cuando la discusión se genera en un contexto de discusiones grupales (Ferrer, 2015)

Así mismo se evidencia que algunos estudiantes igual que en la actividad 1 utilizan la explicación para argumentar lo que exponen en el desarrollo del trabajo.

La actividad 3 por otra parte fue muy fructífera a pesar de no contar con la presencia de todos los estudiantes, dado que a este momento ya existe una relación entre los maestros investigadores y los estudiantes, esto facilitó la explicación de la actividad del día, la cual consistió en la construcción de un conjunto de familias semejantes a partir de una serie de instrucciones dadas las cuales debían ser validadas justificando el uso de las propiedades que habían sido trabajadas en las actividades anteriores.

El primer video es una breve explicación del trabajo que deben realizar en esta actividad, para este caso, se contó con un proyector que permitió observar mejor las figuras y el propósito de la misma, así mismo con una participación activa de la maestra investigadora y un estímulo a la participación, estos tres elementos externos a la labor vincularon participativamente a la mayoría de los estudiantes. En el video *A₃Exp₁* se aprecia como la maestra docente hace un repaso de lo trabajado en las actividades anteriores, a través de preguntas que invitaban a los estudiantes a pensar en lo realizado anteriormente para dar su aporte (Ver anexo *A₃Exp₁*)

Las siguientes imágenes y transcripciones corresponden al trabajo realizado durante la tercera actividad. La siguiente imagen corresponde a la participación de una estudiante en la cual plantea el proceso a seguir para realizar lo que se pide en el trabajo y es tomada de uno de los videos grabados, es pertinente señalar que se mantienen las convenciones establecidas para las actividades anteriores.

D: ¿Cuéntame qué hiciste en esta actividad?

E1: Ummm, como la primera decía que eran 3 de altura, si la base era de 3, entonces yo dije que eran 3 veces más, porque la altura aumenta también 3 veces más.

D: Ok, ¿y en la segunda? ¿Qué hiciste para obtener ese cuadrado?

E2: Ahhh, entonces si le quedó bien.

D: ¿Qué decía la primera instrucción? ¿Por qué dibujaste ese cuadrado?

E1: Como decía que dibujara 4 unidades de altura entonces yo la dibujé y para que quedara igual a este entonces también le dibuje 4 de base y ya.

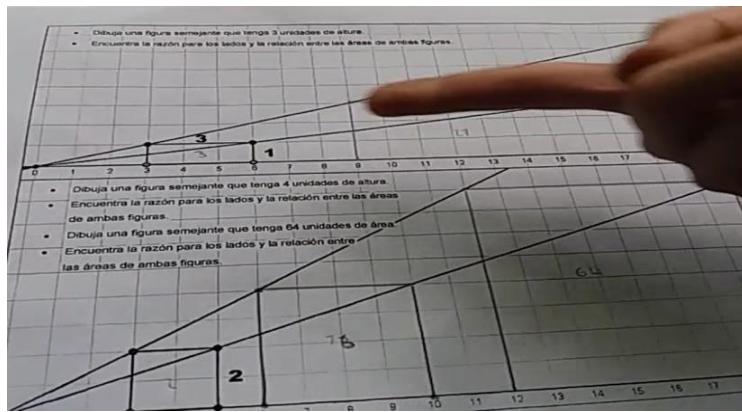
D: ¿Y en este? ¿En este qué hiciste?

E: Como decía que dibujáramos un cuadrado con 64 unidades de área entonces yo vi que había que hacerlo la altura, dos veces más que la segunda figura.

D: ¿Dos veces más? O sea, el doble de la segunda figura. Ok.

E: Ujum, si para poderlo hacer. (A_3Int_2)

Ilustración 8 Actividad 3. Explicación del trabajo realizado por un estudiante



Fuente: A_3Int_2

La ilustración tomada de uno de los videos realizados durante la actividad muestra la explicación de una estudiante, sobre el trabajo realizado, en ella se coherencia y seguridad en el discurso en torno a la descripción de lo que hizo. Vale la pena mencionar que esta explicación

también fue hecha de manera muy visual, explicando lo que para el estudiante parecía evidente sin necesidad de recurrir a justificar el uso de las propiedades de la semejanza de las figuras.

Continua la actividad y mientras los estudiantes trabajaban se pidió a otro estudiante que apoyara la actividad con un registro del trabajo que realizaba, a continuación, se describe este proceso.

D: ¿Cuéntame qué hiciste?

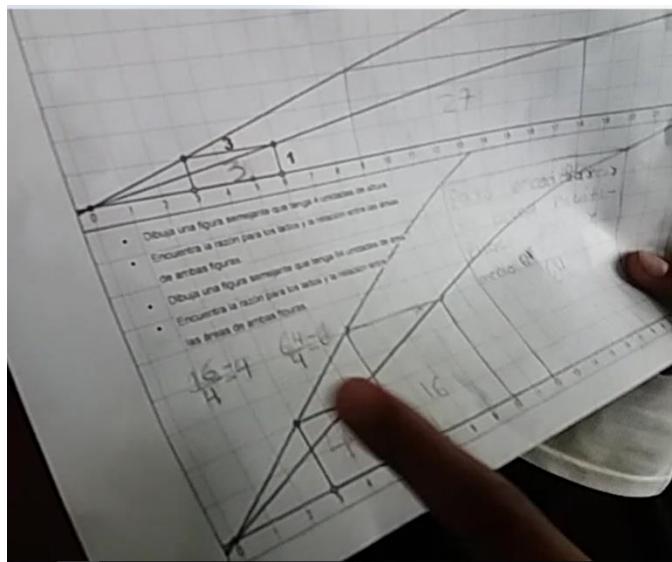
E: Dividir 16 dividido 4, 16 dividido 4 es 4, ¿sí o no?

D: ¿Y el otro cuadrado?

E: Es Dividir 64 dividido 4... Es 16.

D: Bien. (A_3Int_6)

Ilustración 9 Actividad 3. Explicación de un estudiante del trabajo realizado.



Fuente: A_3Int_6

En este video se aprecia como la estudiante comenta claramente lo que hizo en la actividad, desarrolla fluidamente sus ideas, es decir, la estudiante establece las relaciones entre las áreas de

las figuras y realiza las divisiones necesarias para llegar a la conclusión de que las figuras son semejantes. A pesar de faltarle algunos aspectos, y solo establecer la relación entre los lados, consigna su explicación en la hoja de trabajo.

Al finalizar la actividad individual se invita a dos estudiantes a que socialicen el trabajo realizado ante el resto del grupo, para ello utilizarán la ayuda audiovisual. En la siguiente imagen se aprecia uno de estos momentos, a continuación, se transcribe la conversación

E1: Entonces acá... Tiene que... ¿Está diciendo que 3 no? Entonces usted llega y cuenta 1, 2, 3, por tres de largo. (El estudiante dibuja un cuadrado).

(Interviene otro compañero con el ánimo de corregir al compañero).

E3: Como se necesita que sean semejantes entonces le tiene que colocar... Como le aumenta tres veces la altura, también le tiene que aumentar tres veces lo largo, para que le quede semejante.

E1: Ahhh si... nueve, nueve, nueve. (El estudiante corrige su representación)

E1: Entonces ahí es 3, que es largo y los lados es (el estudiante plantea las operaciones)

E1: No espere, ¿Cómo así?, ¿me enredé?

D: No, ahí vas bien, ahí vas bien... Ajá, ¿y la otra? Falta la de la otra área, la que acabaste de dibujar. ¿Cuánto mide la altura de esa?

E1: ¿Ah?

D: ¿Cuánto mide la altura?

E1: Tres

D: ¿Y el largo?

E1: Nueve

D: Falta eso, falta hacer eso.

E2: Nueve por tres, veintisiete. Veintisiete.

D: E3 complemente.

E2: Siempre empiece por el mayor.

E3: (Inicia nuevamente el proceso) Entonces, como piden que aumente en tres el valor de la altura, pues prácticamente se aumenta también tres veces más la base.

D: ¿Cuánto tiene de área ese rectángulo?

E3: ¿De área? Veintisiete. Que es base multiplicado por altura.

D: ¿Ahora qué hay que hacer?

E3: Para hallar la razón de los lados se hace. El area del grande entre el area del pequeño.

E2: Veintisiete dividido tres.

E3: Es nueve. Es difícil, estar parado acá es difícil.

D: ¿Y qué relación hay entre esas dos cantidades? ¿Qué significa ese tres y ese nueve?

E1: La relación es Tres a la dos. Tres a la dos 9 y tres a la dos da... ¿Si me entiende? ¿Cómo fue que le explique ahorita?

D: Falta una razón, ya hiciste la razón entre las áreas, ahora establezca la relación entre los lados.

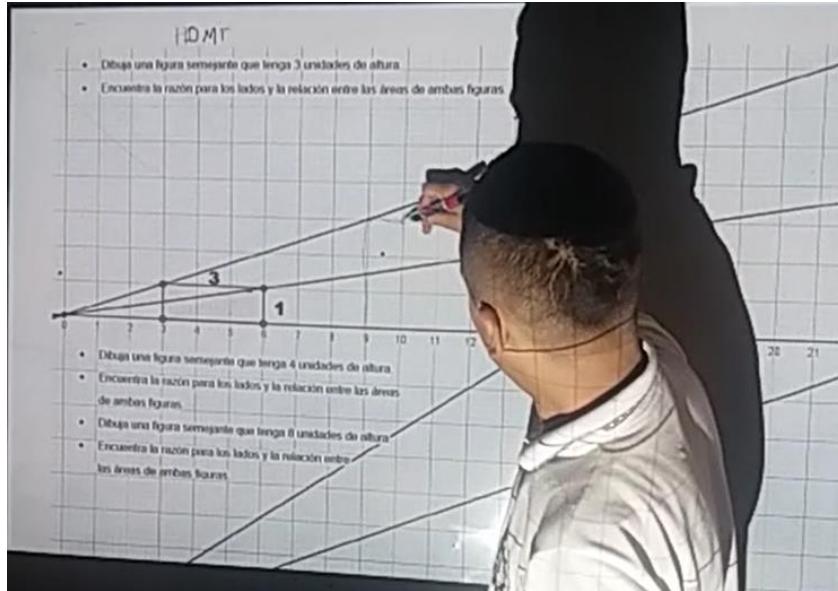
E2: Al cuadrado, área del cuadrado.

D: Ahora falta la razón entre los lados.

E1: ¿Entre los lados? ¿Ehh, como es que era?

E2: Entocnes seria nueve dividido tres, ¿nueve dividido tres? Tres. Porque vea, la razón de los lados es tres y la razón de las áreas es nueve, entonces la relación entre ambos seria tres al cuadrado es igual a nueve.

D: Bien. (A_3Exf)



Fuente: *A₃Exf*

En esta ilustración tomada de uno de los videos registrados en la actividad se pueden apreciar los tres procesos cognitivos, tanto la construcción a la hora de seguir la consigna propuesta en la hoja de trabajo, como la visualización en términos del uso de las propiedades establecidas para justificar y explicar (razonamiento) lo realizado. Esta última actividad permitió recopilar el trabajo realizado durante la aplicación del experimento, buscando que los estudiantes elaboraran un guion que les permitiera explicar el trabajo realizado, esto se puede apreciar a partir de la construcción colectiva que hacen los estudiantes, increpando, colaborando a sus compañeros para presentar correcta y formalmente lo solicitado.

A continuación, se presentarán los análisis correspondientes a los aspectos cognitivos de visualización, razonamiento y validación que se pudieron evidenciar a lo largo de las tres actividades descritas anteriormente.

3.3 ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES.

Utilizando las escenas descritas anteriormente que hacen parte de la selección de videos que se realizó para evidenciar el trabajo realizado y la implementación de la actividad, se elabora el análisis de la misma, que pretende mostrar la relación entre lo que ocurrió en durante el desarrollo del experimento y lo que se esperaba según la trayectoria de aprendizaje propuesta y las discusiones que se dieron con el grupo de investigación para el diseño aplicado.

Como consecuencia del trabajo realizado se pueden identificar en esta primera actividad tres grandes elementos cognitivos que intervinieron en el desarrollo del Experimento de Enseñanza por parte de los estudiantes, por un lado encontraremos los procesos cognitivos de visualización y razonamiento propuesto por Duval (2001) y por el otro las acepciones sobre la demostración en el aula de clases, según lo propuesto por Samper, Camargo & Leguizamón (2003), en cuanta a la explicación y a la prueba como procesos de validación.

La visualización

Con base en la propuesta de Duval y los resultados que se acaban de presentar, en este apartado se encontrarán las producciones de los estudiantes que atanen a la visualización, las cuales tienen que ver con los aspectos icónicos y no icónicos a partir del reconocimiento de las figuras y de la utilización o no de las propiedades de la misma como medio para avanzar hacia el razonamiento y la validación.

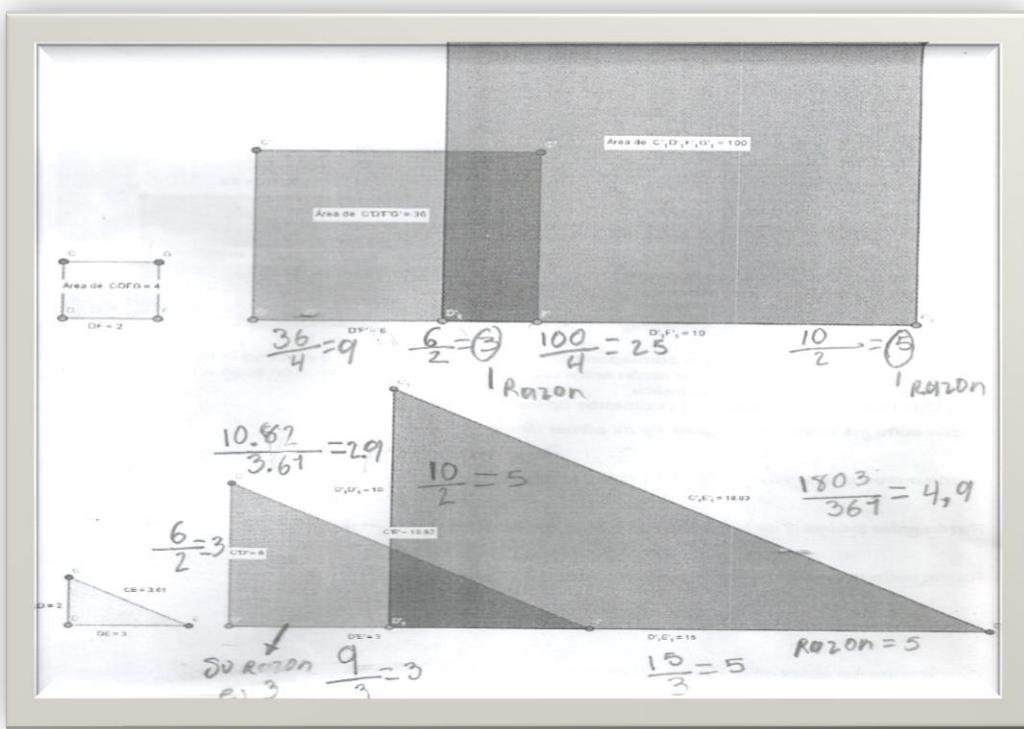
La manera como se tiene un primer acercamiento a la figura es generalmente intuitiva, es normal que se hagan representaciones mentales de todo lo que se observa, pero al percibir una consigna anclada al propósito de una imagen entonces inicia el proceso que permite reconocer y visualizar el objeto indicado; para lo cual se deben tener en cuenta no solo su forma o lo que de

ella se percibe, sino también sus propiedades o su relación con otras figuras, particularmente en geometría puede ser visualizada una información a partir de sus propiedades matemáticas.

Las imágenes registradas a partir de los videos de la actividad 1 dan cuenta de que los estudiantes entrevistados realizan procesos similares en cuanto al seguimiento de las instrucciones para mostrar que los lados correspondientes son proporcionales, es decir, recurren al algoritmo de la división para justificar la consigna propuesta; en consecuencia se puede concluir que la gran mayoría de los estudiantes niega o afirma el reconocimiento de las figuras a partir del parecido con el objeto dado o por su comparación con un modelo, excepto solo uno quien -como se muestra en el video del anexos *A1Int₁₁* - dice “de mi parte diría que todas las figuras son semejantes”, a lo que el investigador responde “puede ser, pero es preciso que se muestre la relación entre los lados correspondientes”.

A continuación, se muestra una la hoja de trabajo de un estudiante, en la que se evidencia la utilización de las propiedades sugeridas.

Ilustración 10 Actividad 1. Evidencias del trabajo realizado por parte de un estudiante.



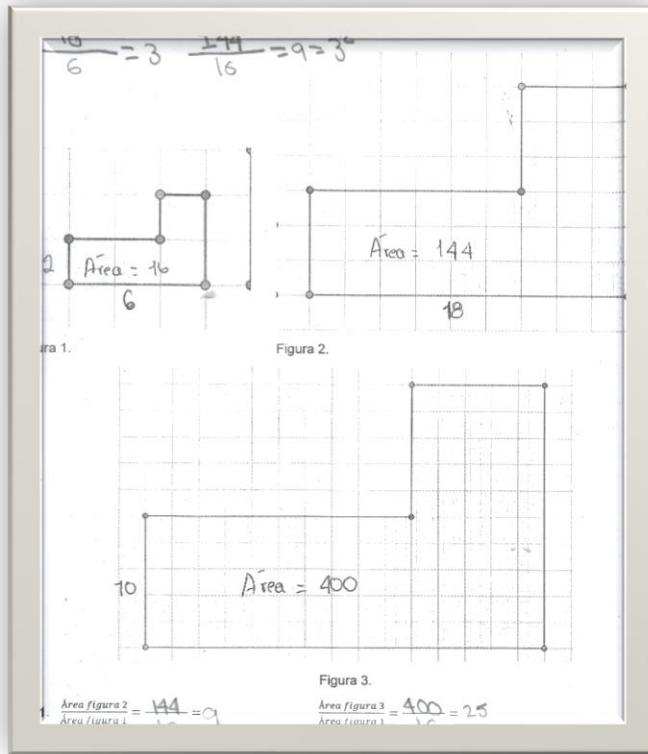
Fuente: Hoja de Trabajo₁

Por otra parte es necesario tener en cuenta que en el desarrollo de esta actividad pocos estudiantes reconocieron la existencia y la necesidad de aplicar las propiedades que conciernen a determinadas figuras para declarar la semejanza entre ellas, en consecuencia la mayoría de los estudiantes no usan la información dada sobre las propiedades de la figura para concluir que sean o no semejantes; es decir, la mayoría aplicó algoritmos matemáticos para explicar lo que habían entendido en la actividad.

En el caso de la Actividad 2 los videos tomados y las hojas analizadas evidencian que ningún estudiante siquiera intenta decir que las figuras son semejantes a simple vista, en esta ocasión los estudiantes entraron en el proceso de argumentar lo que realizaban a partir de una serie de operaciones; esto se explica por dos razones: los cambios que se hicieron con respecto de la

actividad 1, en este caso la consigna de las actividades era más clara, pues la presentación de la misma sugería lo que debían hacer en el trabajo, como con el caso de la ilustración 11, en donde se aprecia el trabajo realizado por un estudiante en su taller. Por otra parte, la familiaridad con el trabajo, pues los objetivos en las dos actividades se conservan.

Ilustración 11Actividad 2. Evidencia del trabajo realizado por parte de un estudiante



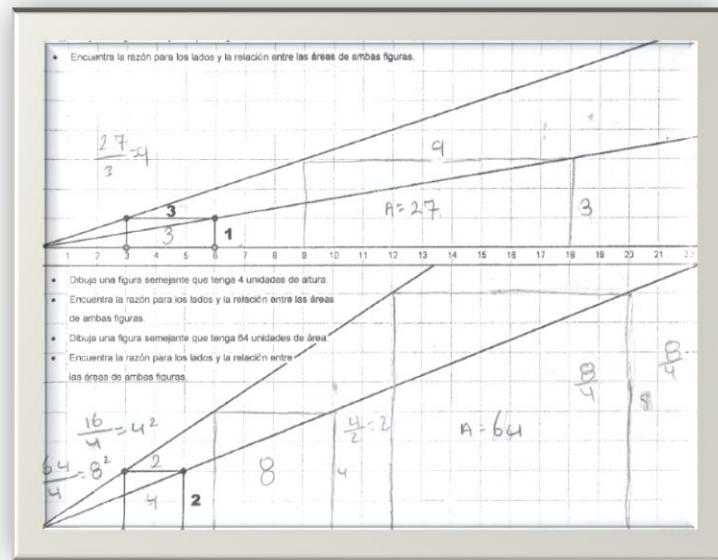
Fuente: *A₂Hoja de Trabajo₄*

Los videos y las imágenes seleccionadas dan cuenta del hecho señalado demostrando que los estudiantes en esta ocasión recurrieron al algoritmo de la división para establecer la razón entre los lados correspondientes de las figuras, así como entre las áreas de cada una de ellas y concluir que la relación entre estas dos razones es del cuadrado de una con respecto a la otra.

Específicamente, se puede afirmar que en el desarrollo de la actividad la visualización icónica, entendida en este caso como lo evidente no fue lo más relevante en tanto se apreció que la visualización no icónica se hizo presente a lo largo del proceso, pues la mayoría de estudiantes reconocieron la existencia y la necesidad de aplicar las propiedades de razón entre las figuras para declarar la semejanza entre ellos.

Esto se puede apreciar en las ilustraciones 11, así como en los videos anexos se puede evidenciar que los estudiantes explican claramente lo que hay que hacer en la actividad. Así en los anexos A_2Int_6 , A_2Int_7 y A_1Int_8 se aprecia un discurso y una discusión en torno a las relaciones que deben establecerse para concretar la relación entre las figuras.

Ilustración 12 Evidencias del trabajo realizado por un estudiante.



Fuente: $A_3Hoja de Trabajo_2$

En la actividad 3 por su parte se puede apreciar una fuerte carga de visualización icónica, pues la gran mayoría de los estudiantes utilizó el proceso de construcción como forma de validar las

consignas dadas. Es el caso de la ilustración 12 los anexos A_3Int_1, A_3Int_2 donde las imágenes describen la recreación mental del proceso que utilizó el estudiante para plasmar sus ideas en la hoja de trabajo, cuando él manifiesta “como la primera decía que eran 3 de altura, si la base era de 3, entonces yo dije que eran 3 veces más, porque la altura aumenta también 3 veces más”, siendo muy particular y significativo que el estudiante trata de explicar algo que parece evidente, incluso intentando convencer al docente de esto, pues combina su dibujo con las instrucciones dadas.

De esta manera se rompe la tendencia del uso de las propiedades como forma de visualizar para comparar las figuras, en este caso, por lo menos, se da un reconocimiento de la semejanza de las figuras por su parecido con el objeto inicial, por su evidente forma, o por la comparación entre ellas, este hecho, si bien no hace que los estudiantes utilicen las propiedades de la semejanza para visualizar el objeto si les genera la impresión de ser un ejercicio complementario a la construcción realizada.

3.3.2 Razonamiento:

Otro de los procesos cognitivos que interviene en el estudio de la geometría es el razonamiento, el cual establece una relación con los procesos discursivos con el objetivo de aportar al proceso de validación. En particular, uno de los procesos cognitivos para el análisis de la geometría es el proceso puramente configural, también conocido como aprehensión operativa, el cual consiste en la reorganización o cambio figural que pueda darse en una figura, la cual puede ser determinada a partir de las relaciones entre las propiedades que nos permiten concluir en el análisis de un problema.

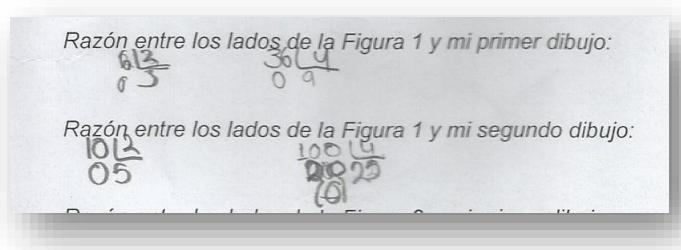
Para analizar la situación a partir de este enfoque se tendrán en cuenta si el estudiante tiene conocimiento o no de las propiedades geométricas de las figuras para analizarla más allá de la

forma que pueda ser percibida visualmente. Dicho de otra forma, se observará si los estudiantes reconocen no que existe una relación entre las razones de los lados y las razones entre las áreas de dos o más figuras al ser comparadas.

Las imágenes seleccionadas muestran cómo los estudiantes utilizan las propiedades indicadas de las semejanzas de figuras para argumentar si estas son semejantes o no, es el caso de las ilustraciones 11 y 12, donde se describe la interacción con los estudiantes y se muestra cómo ellos aplican las propiedades para dar una respuesta al problema planteado.

Desde esta perspectiva, los estudiantes para el trabajo tenían 3 opciones: la primera que sólo notaran la relación entre los lados de las figuras, la segunda que los tuvieran en cuenta la razón entre las áreas de las figuras y la tercera que los estudiantes tuvieran en cuenta que entre las dos figuras había una relación, que la razón entre los lados de las figuras correspondía al cuadrado de la razón entre las áreas., además de esto, también se tuvo en cuenta si los estudiantes justificaron o no el uso de las propiedades para dar una conclusión sobre el problema.

Ilustración Actividad 3. Evidencias del trabajo realizado por un estudiante.



Al hacer el análisis de las hojas trabajadas con los estudiantes se puede concluir que en la actividad 1 la mayoría de los estudiantes utilizaron en el desarrollo de la misma solo una de las propiedades, a su vez, la propiedad más utilizada fue la relación entre los lados de la figura, lo cual se considera teniendo en cuenta las explicaciones hechas por el profesor, el tiempo de

trabajo y las consignas en las hojas; se considera necesario hacer ajustes a la primera actividad, teniendo en cuenta que 4 de las tomas realizadas durante esta actividad eran requerimientos por parte de los estudiantes para explicar lo que debían hacer, otros estudiantes explícitamente lo hicieron por repetición, replicando lo realizado por el profesor durante la explicación.

Poco menos de la mitad de los estudiantes, usaron ambas propiedades en el desarrollo de la actividad, además lo hicieron de manera fluida, además, dentro de estos estudiantes se encuentra el grupo reducido de estudiantes que encontraron importancia para aplicar estas propiedades, es decir, tuvieron una aceptable visualización no icónica, aunque, solo la mitad de estos estudiantes lograron justificar el uso de las propiedades para argumentar la relación existente entre las dos razones utilizadas, esto se puede evidenciar a partir de las conversaciones e imágenes transcritas.

El razonamiento en esta etapa es algo intuitivo y requería que los estudiantes leyieran muy bien las consignas para poder resolver el problema propuesto.

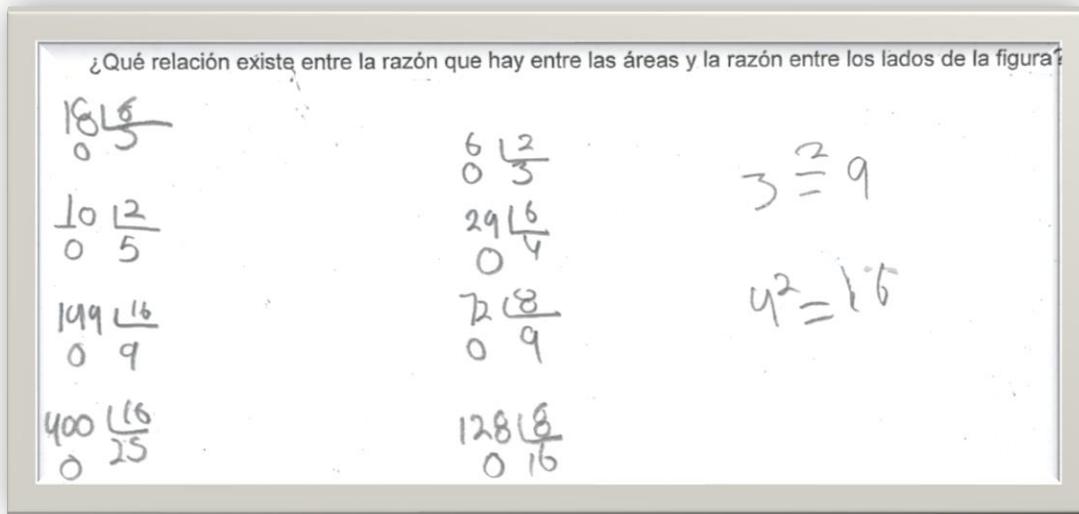
En el caso de la actividad 2, en las hojas analizadas y en los videos registrados, se puede evidenciar que la mayoría de los estudiantes trabajan sobre la base de encontrar una relación entre las dos razones; solo 6 de los 18 estudiantes realizan la relación entre las áreas y ningún estudiante estableció únicamente la relación entre las razones de los lados de las figuras, lo cual es importante en tanto que los estudiantes utilizan las propiedades consignadas en las hojas de trabajo, además de que con ello justifican el uso de las mismas, para encontrar a través de la explicación la validación de su uso.

En el caso de la actividad 3 el razonamiento fue el proceso que más se utilizó, aunque la inclusión del proceso cognitivo de construcción en la actividad llevó a que los estudiantes, quizás, no contemplaron la necesidad de utilizar las propiedades de la semejanza para validar la

información; para corregir esta situación se intervino ante el curso, recordando la importancia de esta actividad pues el propósito de la misma es incentivar la visualización tanto icónica como no icónica, lo cual implica el uso de las propiedades como medio para validar la información.

Desde este punto de vista, y con la claridad establecida a los estudiantes, mejoró la recepción de la actividad, no obstante en el momento de analizar las hojas de trabajo, se pudo determinar que menos de la mitad de los estudiantes establecieron las relaciones solicitadas, es decir, la razón entre los lados de las figuras, así como la razón entre las áreas. En la mayoría de los casos solo establecieron la relación entre las áreas, este factor se puede explicar a partir de lo mencionado antes y por el registro fílmico, dado que los estudiantes consideraron que la construcción de una nueva figura a partir de la consigna dada era suficiente para no utilizar las propiedades y justificar la semejanza entre las figuras.

Ilustración 13 Estudiantes establecen relación entre las áreas y los lados



Fuente: A₃Hoja de Trabajo₄

Por otra parte, el análisis de las hojas de trabajo también permitió evidenciar que solo la mitad de los estudiantes justificó el uso de las propiedades, algunos por el hábito adquirido desde las actividades anteriores y otros por el reconocimiento de este elemento para mostrar la semejanza. Este aspecto se puede evidenciar en la transcripción de la intervención consignada a partir de la ilustración 18 en donde los estudiantes se ayudaban para alcanzar el objetivo de la actividad, en este momento, fue evidente que la mayoría de los estudiantes que intervinieron reconocían la importancia de utilizar las propiedades para generar un juicio en torno a la semejanza o no de las figuras, más evidente cuando al inicio de la transcripción el estudiante (E3) cuestiona al estudiante (E1) sobre la necesidad de construir una figura que fuera semejante a la dada.

Este tipo de situaciones muestran el interés por parte de los estudiantes, lo positivo y lo constructivo del trabajo en gran grupo, tal como lo sugiere (Ellis, 2011) citado en (Ferrer, 2015) al considerar “el aprendizaje como un proceso social que se produce gracias a la interacción de todos los agentes que participan en una clase de matemáticas, y en particular en una discusión de gran grupo”. (Ferrer, 2015, pág. 7)

En general, las modificaciones utilizadas desde la actividad 1 aportaron significativamente al objeto y la autonomía de la actividad 2, es decir, la gran mayoría de los estudiantes trabajaron completamente el trabajo, y la gran mayoría estableció las relaciones entre las dos razones como medio necesario para alcanzar una aproximación a la idea de semejanza de figuras.

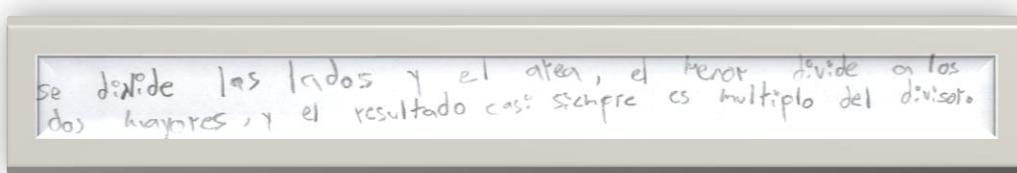
Así mismo la actividad 3 puede ser entendida como un proceso de construcción y trabajo autónomo por parte de los estudiantes con base a lo trabajado en las actividades 1 y 2, evidenciando que el razonamiento en estas actividades fue completamente justificado, requiriendo el uso de propiedades para validar la información de las consignas en las hojas de trabajo.

3.3.3 La Validación.

La validación en geometría corresponde al proceso mediante el cual un alumno socializa sus explicaciones acerca de una afirmación, y esto es solo un paso en el camino que conduce a la demostración, los cuales exigen un proceso de prueba a partir de la toma de decisiones y la construcción de una conjetura explícita, es decir, una serie de procedimientos que llevan a concluir sobre un problema.

Entre los procesos de validación que se abordan en el contexto escolar se tienen algunas acepciones de la demostración, para el propósito del análisis de esta se tendrá en cuenta la explicación y la prueba como dos procedimientos para validar el trabajo realizado por los estudiantes. (Samper, Camargo, & Leguizamón, 2003)

Ilustración 14 Actividad 1. Evidencias de los argumentos de un estudiante.



Este trabajo analiza la actividad planteada desde la validación a partir de la argumentación que dan los estudiantes para decir qué hicieron o los algoritmos matemáticas usados para justificar el uso de las propiedades en la consideración de dos figuras semejantes.

En el análisis de esta primera actividad se puede decir, a partir de la información consignadas en los videos y el registro de las hojas de trabajo, que la mayoría de los estudiantes que lograron terminar la actividad realizaron un proceso de validación a partir de la explicación; es decir, después de terminar la actividad utilizaban un lenguaje común para decir qué hicieron y para qué lo hicieron, en el registro fílmico señalan la relación que existe entre las dos razones encontradas,

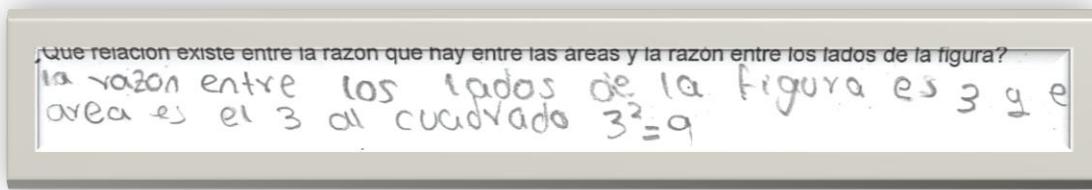
mientras que la mitad de los estudiantes que terminan completamente la actividad validan su actividad haciendo explícita la relación entre las dos razones de forma matemática considerando esto como suficiente para terminar la actividad.

En la actividad 2 se aprecia una tendencia en estudiantes que explican el proceso realizado en las hojas de trabajo, razón por la cual muchos recurrían a la explicación para validar desde su posición lo trabajado, es así como a través de esta forma de validación intentan argumentar la relación existente entre las dos razones encontradas, es el caso que se puede ver en las ilustraciones 14 y 15, donde se muestra como los estudiantes no encuentran la estructura lingüística pertinente para expresar la idea de la relación entre las razones de las dos figuras y sin embargo usando sus palabras, usando sus intenciones la muestran, de esta manera se hace clave la interpretación del discurso que los estudiantes intentan construir para validar la información de las consignas, para expresar cuando dos figuras son semejantes.

Así la explicación es usada por la mayoría de los estudiantes como una herramienta que les permitió validar y socializar la información obtenida, con un lenguaje cotidiano intentando convencer a sus compañeros y a los investigadores. De la misma manera solo unos pocos estudiantes acuden a la prueba, como mecanismo suficiente para validar la información obtenida, estos estudiantes, en los videos se refieren a esta señalando lo realizado, o en su defecto diciendo “profe, ahí está, no me grabe” para ellos esta minoría basta con eso para validar la actividad.

Lo importante es que contrastando esta prueba con la anterior todos los estudiantes que participaron de ella utilizaron al menos un método de validación para argumentar lo realizado en la actividad.

Ilustración 15 Actividad 2. Evidencias de los argumentos de un estudiante



En el caso de la actividad 3 la validación fue consecuencia del correcto proceso de visualización, construcción y razonamiento, ya que al hacer natural estos procesos cognitivos, la validación a través de la prueba o de la explicación se hizo necesaria, razón por la cual al analizar las hojas de trabajo se pudo determinar que todos los estudiantes que desarrollaron la actividad utilizaron al menos uno de los dos métodos, siendo la explicación con más de la mitad de las hojas analizadas la tendencia, mientras que la prueba fue utilizada por menos de la mitad de los estudiantes, y más de la mitad de los estudiantes además de hacer la validación por medio de la prueba también explicaron ante las cámaras o sus compañeros el proceso realizado.

En el caso de las ilustraciones 15 y 16 los estudiantes recurren a la explicación para argumentar que después de utilizar las propiedades sugeridas y de construir otras figuras siguiendo las consignas propuestas entonces se podía concluir que las figuras eran semejantes, su reto era validar la información más allá de la construcción que les hacía parecer evidentemente que las figuras eran semejantes.

Lo propio ocurrió en el anexo *A₃Exf* cuya transcripción permite evidenciar que los estudiantes apelaron a la explicación para lograr que sus compañeros reflexionaran sobre los errores cometidos o para argumentar por qué debía hacerse el trabajo como lo sugirieron, en esta medida a lo largo del video se aprecia el uso del lenguaje cotidiano para intentar que los demás estudiantes entiendan la veracidad de lo que están explicando.

En términos generales se puede determinar que la mayoría de estudiantes en el desarrollo de la primera actividad, no visualizan de forma icónica o no icónica, en tanto que siguen las instrucciones propuestas y aclaran dudas sobre el qué hacer, tampoco comprenden a simple vista lo que se consideran figuras semejantes; no utilizan las propiedades de la semejanza para justificar la relación entre las figuras y la mayoría explican lo que hay que hacer informalmente, usando un lenguaje cotidiano, replicando en la mayoría de las ocasiones lo realizado por el profesor. mientras que en la segunda actividad se fortalecen tanto la visión no icónica, como el uso de propiedades para argumentar lo sucedido y la explicación como herramienta para validar lo obtenido en la última actividad los estudiantes son capaces de recoger los tres elementos, tanto la visualización no icónica que les permite justificar el uso de propiedades para posteriormente validar a través de la explicación o de la prueba lo que ocurrió.

Para finalizar, la evidencia y el análisis del trabajo permite establecer que aun los estudiantes no llegan a la prueba como método de validación, por lo cual se deben establecer condiciones e instrucciones en las actividades que se propongan para fomentar la prueba como acercamiento a la demostración en las actividades geométricas.

CONCLUSIONES

Diseñar actividades con un direccionamiento y objetivos claros que establezcan una relación entre los procesos cognitivos de visualización y racionalización es una actividad que se debe promover en las aulas de clases para dar cuenta del aprendizaje de los estudiantes, estas actividades no son estáticas y están en constante observación, evaluación y rediseño. Es en las situaciones de clase donde se puede exigir, proponer y explicar a través de la interacción entre el maestro y el estudiante y también entre los estudiantes, de tal manera que esta articulación genere reflexiones conscientes sobre la actividad que se realiza, razonamientos que se validan a partir de la observación de un objeto y la aplicación de propiedades sobre el mismo.

Por otra parte, es indispensable reconocer las diferentes formas de validación y demostración que pueden darse en el salón de clases, aquellas que permiten validar la información presentada a través de procesos de prueba o explicación con el fin de que permita formar estudiantes competentes en matemáticas y particularmente en geometría.

Avanzar en estas formas de validación y aplicar actividades en el salón de clases que fortalezcan la visualización no icónica es un primer paso en la dirección correcta, para incluir el proceso cognitivo de construcción, sin este elemento, cualquier trabajo será una validación de la percepción e interpretación de lo que entienden los estudiantes, y esta insipiecia se contrarresta con la inclusión de los tres procesos cognitivos en el diseño de las actividades de clase, de tal manera que la formación la enseñanza de la geometría no sea un proceso tedioso que se limite al reconocimiento de figuras sino que se comprenda la esencia de la misma.

En este sentido la elección de una correcta metodología es fundamental para conseguir este propósito, así los experimentos de enseñanza se proyectan como una herramienta potente para el diseño de actividades que, como lo plantea su intencionalidad, puedan ser revisadas, evaluadas y rediseñadas, con el fin de obtener mejores resultados en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Si bien la enseñanza de la geometría tiene la dificultad de enseñarse en torno al reconocimiento de figuras, tal como lo plantean los estándares básicos de competencias, si es preciso avanzar en la inclusión de diseños que permitan desarrollar estrategias que permitan al estudiante construir y manipular las representaciones mentales de los objetos del espacio y que sean capaces de establecer relaciones entre ellos, no solo de transformaciones rígidas, sino relaciones que extiendan el espectro de la consolidación del pensamiento espacial.

En ese sentido la elaboración de las actividades dirigidas como las diseñadas en este trabajo de grado, generan unos resultados que pueden interpretarse como conclusiones, pero que también serán hipótesis que se invitan a cuestionar y/o validar:

- Lo primero que se debe tener en cuenta es que el docente – investigador debe tener un papel activo en la clase, su papel como investigador debe estar en constante revisión, diseñando y evaluando las prácticas pedagógicas que lleva al aula, proceso constante que permitirá mejores resultados en la enseñanza a los estudiantes.
- Los experimentos de enseñanza son una herramienta potente como metodología de diseño y evaluación de las actividades preparadas para el salón de clases, pues permiten hacer análisis específicos de las situaciones presentadas para hacer un análisis retrospectivo del comportamiento de los estudiantes y de las competencias alcanzadas en el conjunto de actividades propuestas.

- El fortalecimiento de las discusiones en el salón de clases, la necesidad de ofrecer condiciones para que el ambiente de aprendizaje sea el adecuado es una tarea que los docentes deben emprender para fortalecer la interacción entre estudiantes y la producción que estos puedan generar a partir de la deliberación entre pares y en escenario de gran grupo.

Durante la aplicación del Experimento de Enseñanza y su posterior análisis se pudo determinar que en general los estudiantes, carecen de coherencia discursiva que les permita sustentar una idea con la fuerza que le ofrecen los argumentos, tienen dificultades para traducir eso que visualizan y que pueden saber hacer a un lenguaje que les permita comunicar estas ideas; esta dificultad por parte de los estudiantes es también un escenario importante para generar oportunidades de aprendizaje que involucre seguridad y la elaboración de un correcto discurso argumentativo en situaciones de clases en las que la visualización y el razonamiento intervengan en el desarrollo de la actividad geométrica. En consecuencia, se recomienda empezar por definir claramente las consignas en cada pregunta del conjunto de actividades de tal manera que el objetivo de la misma sea explícito para el estudiante.

Se puede afirmar que este tipo de experimentos son un proceso que permite aprender de forma cíclica un concepto, pues como se evidenció en la primera actividad los estudiantes no alcanzaron a reconocer más allá de las instrucciones propuestas, es decir, privilegian el hacer a partir de lo explicado por el docente como un proceso de reproducción con el ánimo de saber si lo hecho está bien o está mal, en consecuencia, las opiniones registradas buscaban proclamar lo que los estudiantes consideraban que el profesor quería escuchar y no su interpretación de los sucesos.

En el caso de la actividad dos, esta percepción cambió, se dejaron las consignas más explícitas, de tal manera que los estudiantes debieran remitirse a la definición e incluso interpretar la información dada para establecer un juicio, es en este momento en donde se puede afirmar tal como sugiere la ilustración 11 en donde se reconoce la razón de las áreas entre las figuras como el cuadrado de la razón entre sus lados.

En el caso de la actividad tres el acumulado permitió diseñar una actividad que tuviera instrucciones precisas, incluyera un aspecto de construcción y propusiera condiciones necesarias para generar una discusión en clases. Los estudiantes reciben el trabajo y resuelven la actividad en grupo para luego generar una explicación de lo realizado en un escenario colectivo donde se construyera el concepto de semejanza que era el que se trabajaba. Esta última actividad permitió evidenciar la adquisición de las competencias en torno a la semejanza entre figuras.

En particular este trabajo ofrece las siguientes consideraciones:

- La mayoría de los estudiantes se adapta con facilidad a las circunstancias propuestas, en un proceso transitorio que permite pasar del reconocimiento a la visualización en los términos descritos, que implica un reconocimiento de la necesidad de aplicar propiedades y justifica el uso de estas para validar la información bien sea a través de una prueba o de una explicación.
- En el acercamiento a los procesos de razonamiento y visualización tiene una aproximación a través de la explicación, es decir, la mayoría de los estudiantes utilizan el proceso de explicación, tratando de convencer al docente y a persuadiendo a sus compañeros sobre las razones que le motivaron a generar una determinada hipótesis.
- El planteamiento de las situaciones de forma clara permitió que fueran pocos los estudiantes que tuvieran un reconocimiento evidente de las figuras a partir del parecido, es

decir, si bien, el primer acercamiento es a partir de la percepción, esto no es suficiente para enunciar un juicio que validara la hipótesis planteada.

La mayoría de los estudiantes justifican y utilizan las propiedades para validar la información, es decir, la mayoría de los estudiantes estableció la relación entre los lados de las figuras y entre las áreas de las mismas.

BIBLIOGRAFÍA

- Ansedo, M. (27 de Agosto de 2018). El 60% de los profesores no investiga: da clases y ya está. *EL PAÍS.*
- Bahamón, L., & Bonelo, Y. (2015). *Los procesos de construcción, visualización y razonamiento en el desarrollo del pensamiento geométrico. Un experimento de enseñanza.* Cali.
- Duval, R. (2001). La Geometría desde un punto de vista cognitivo. *Boletín de la Red de Educación Matemática*, 1 - 7.
- Duval, R. (2004). Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y... una quinta. En M. d. Plaza, *Números, Formas y volúmenes en el entorno del niño* (págs. 159-188). Madrid: Secretaría General Técnica.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano.* Santiago de Cali: Merlín I.D.
- Duval, R. (2006). *Semiosis y Pensamiento Humano.* Cali: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2010). Los cambios de mirada necesarios sobre las figuras. Traducción de Martín Edudardo Acosta . *Tecné, Episteme & Didaxis.* , 108 - 129.
- Duval, R. (2010). Los cambios de mirada necesarios sobre las figuras. *Tecné, Epistemé y Didaxis*, 108-129.
- Duval, R., & Sáenz - Ludlow, A. (2016). *Comprensión y Aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

- Esteve, J. (2009). La formación de profesores. Bases teóricas para el desarrollo de programas de formación inicial. *Revista de Educación*, 350, 15-29.
- Ferrer, M. (2015). *Estudio sobre la actuación docente y la interacción en la creación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje en el aula de matemáticas*. Barcelona.
- Galeano, J. E. (2015). *Diseño de situaciones para el trabajo con figuras geométricas basado en las operaciones cognitivas de construcción, visualización y razonamiento*. Cali.
- Hemmerling, E. M., & Ralston, A. (1971). *Geometría Elemental*. Limusa.
- Ministerio de Educación Nacional . (1994). Ley 115.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares*. Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos De Aprendizaje, Versión II*. Bogotá.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la Investigación de Diseño a través de los Experimentos de Enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 75-88.
- Monje, C. A. (2011). *Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa. Guía didáctica*. Neiva.
- Mora, C. D. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Pedagogía* , 181 - 272.

Oicatá Ojeda, L. A., Díaz Montes, A., Díaz Dueñas, R. A., Gómez Bello, M., Romero Rey, J. H., González Barbosa, M. R., & Ávila Barón, G. M. (2012). *ZOOM a las matemáticas 7.* Bogotá: Libros & Libros S.A.

Ortíz, J. A., & Angulo, J. J. (2016). La homotecia, Un tema casi olvidado en la enseñanza de la Educación Matemática en Buenaventura: Una propuesta desde el punto de Vista Algebraico.

Rodríguez, M. E. (2010). El papel de la escuela y el docente en el contexto de los cambios devenidos de la praxis del binomio matemática - cotidianidad. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 113 - 125.

Rodríguez, M. E. (2010). El papel de la escuela y el docente en el contexto de los cambios devenidos de la praxis matemática - cotidianidad. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 113 - 125.

Samper, C., Camargo, L., & Leguizamón, C. (2003). *Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría.* Bogotá: Gaia.

Vélaz de Medrano, C., & Vaillant, D. (2009). *Aprendizaje y desarrollo profesional docente.* España.

ANEXOS

En este apartado se encontrarán los anexos que sirven de apoyo para sustentar el desarrollo de las actividades, se encuentran en dos categorías, la transcripción de los videos utilizados. En general, denominaremos al Docente Investigador con la letra “D” y con la letra a los estudiantes con la letra “E”.

Anexo A1Int7: Explicación de una estudiante sobre lo que debe hacer.

E: Se haría nueve por tres, y como son tres lados, el 6 se multiplicaría por el dos porque supuestamente es el mismo lado y el 10 se multiplicaría por este, porque supuestamente es el mismo lado de acá.

D: ¿y con la otra figura qué harías?

E: Con la otra figura también haría lo mismo, el 15 con el 3, este con el de aquí y este con este.

Anexo A1Int11: En este anexo se encuentra una apreciación de un estudiante en torno

E: Bueno, pues yo de mi parte diría que casi todas las tres figuras son semejantes.

D: Ok si, en general podríamos decirlo, uno lo puede decir, pero también tocaría demostrarlo, la pregunta es ¿cómo?

E: Pues...Dividiendo.

D: Dividiendo, ajá. Este lado, entre este, pero este lado de aquí, ¿con quién lo compararías en esta figura, este lado de la recta de acá, con cuál lo compararías de esta figura?

E: Con este ladito de acá.

D: Listo eso es lo que hay que hacer.

En los siguientes anexos se sustenta la explicación de los estudiantes en torno a la razón entre los lados.

A2Int6:

E: Tres a las 2 da nueve y cuatro a la 2 es dieciséis, y eso es el igual.

D: ¿Es la razón?

E: Es la razón.

D: ¿Y tres es la razón de qué?

E: De los lados. Y dieciséis es la razón del área.

D: ¿Dieciséis o cuatro?

E: ¡Ahh! no sí cuatro. Porque cuatro está elevado a las dos.

A1Int7: Un estudiante sale al tablero a explicar lo realizado.

E: Primero, ¿Si ven esta figura que está acá? La primera figura se le comparan los lados con la segunda figura, y después compara el área de la segunda figura.

Otra estudiante interviene y le sugiere a su compañero.

E2: Pero hágalo ahí, haga el dibujo también y todo.

E: El estudiante realiza un dibujo de lo que va a explicar y procede. Bueno, entonces van a dividir esta con esta.

E2: Haga de una vez la división porque no entendemos.

E3: Hay que dividir dieciséis entre cuatro.

E: Eso da, igual tres. Y después esta con esta. Entonces sería...

D: Dieciséis dividido ciento cuarenta y cuatro.

E: Y después se divide el área, que es igual a nueve. (los espacios entre los videos, es lo que el estudiante va escribiendo en el trabajo.)

E: La primera es la razón, por ejemplo, tres elevado a la dos da nueve. Entonces mire...

D: ¿Quién complementa? ¿Qué relación hay entre este cinco y este veinticinco? ¿Qué relación hay entre estas dos razones? Entre esta y esta.

E2: Porque el cinco es cinco al cuadrado, pues cinco al cuadrado es veinticinco.

D: ¿Qué pueden decir en general de estas tres figuras? ¿Cómo son?

E: Pues que la relación entre los lados es tres, y en el área es cinco.

D: Ya lo dijeron ¿Qué relación existe entre estas figuras?

E4: Nueve.

D: No. Alguien lo dijo, en palabras.

E: Que casi todos son múltiplos.

D: Alguien lo dijo ahorita, por ahí va, son múltiplos.

Estudiantes: Similares.

E5: Semejantes.

D: ¿Qué son cómo?

E5: Semejantes.

Anexo A3Exp1:

D: ¿Cuál es la razón entre esta y esta?

E1: Los lados, la división entre los lados.

D: ¿Cuánto miden estos lados?

E2: Dos veces.

D: ¿Ustedes recuerdan que este lado de aquí es correspondiente con este lado de acá no?

E: Sí. 2, 4, 6, 8.

D: ¿Ciento?, ¿Todos de acuerdo?

E: Sí.

D: ¿Entonces este cuánto mide?

E: 4... Y el otro 8.

A3Int1: Un estudiante explica lo que deben hacer.

E: Como dice que tenga cuatro unidades, pues yo conté cuatro cuadritos y listo.

A3Int2:

D: Ahora sí, cuéntame qué pasó aquí.

E: Como la primera decía que eran tres de altura, entonces si la base era de tres, entonces sería tres veces más porque la altura también aumenta tres veces más.

Ok. ¿Y en la segunda? ¿Qué hiciste para obtener ese cuadrado?... ¿Qué decía la primera instrucción? ¿Por qué dibujaste este cuadrado?

E: Como decía que dibujáramos cuatro unidades de altura y para que quedara igual a este entonces también le dibuje cuatro a este.

D: ¿Y en este?

E: Como decía que dibujara un cuadrado con sesenta y cuatro unidades de area, yo ví que había que hacer la altura dos veces más que la segunda figura.

D: ¿Dos veces más? El doble de la segunda figura.

E: El doble de la segunda figura para poderlo hacer.

Anexo A3Exf: Ver página 84.