



**DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA DESDE LA PERSPECTIVA DE LA  
ORQUESTACIÓN INSTRUMENTAL: LA TRANSFORMACIÓN DE ROTACIÓN EN  
EL ESPACIO EN GRADO NOVENO DE EDUCACIÓN BÁSICA.**

**MARÍA JIMENA PECHENÉ LOBOA (201157705)  
LAURA YELA LARRAHONDO (201157736)**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE  
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA  
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICA  
SANTANDER DE QUILICHAO  
2016**



**DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA DESDE LA PERSPECTIVA DE LA  
ORQUESTACIÓN INSTRUMENTAL: LA TRANSFORMACIÓN DE ROTACIÓN EN  
EL ESPACIO EN GRADO NOVENO DE EDUCACIÓN BÁSICA.**

**MARÍA JIMENA PECHENÉ LOBOA (201157705)**

**LAURA YELA LARRAHONDO (201157736)**

**Proyecto de trabajo de grado como requisito parcial para optar por el título de Licenciada  
en Educación Básica con énfasis en Matemáticas**

**Directora**

**DIANA XIMENA ORTIZ COLLAZOS**

**Magister en Educación**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE  
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA  
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICA  
SANTANDER DE QUILICHAO  
2016**

**Nota de Aceptación**

---

---

---

---

---

**Director**

---

**Diana Ximena Ortiz Collazos****Jurado**

---

**Daniel Andrés Fernández****Jurado**

---

**Luis Fernando Espinosa**

## **DEDICATORIA**

Agradezco a mis padres, Gerardo Yela y Ceneida Larrahondo, a mis hermanas Luisa, Jenifer y Estefanía, por su amor, amistad, sabiduría e incondicional apoyo durante toda mi vida. A Diego Vergara, por su paciencia, comprensión y motivación en esta etapa de mi vida.

A ellos dedico este trabajo que es producto de la dedicación, interés y constancia en mi carrera.

*Laura Yela L.*

## **DEDICATORIA**

Inicialmente me gustaría agradecer a Dios porque en él he puesto todos mis proyectos y esta es una de las tantas metas que me había propuesto y he logrado alcanzar; también agradecer a mi hijo Jhohan por la paciencia que tuvo en esto largos años de estudio, por su comprensión por el tiempo que no pude estar con él y por ser mi mayor motivación. A mi familia que ha sido un pilar fundamental en mi vida, especialmente a mi madre y mi padre que me dieron el regalo de la vida, a Celimo Arrechea y Ricardina Loboa quienes fundamentaron en mi las bases de la responsabilidad y el deseo de superación, a mis primas Aura y Liliana que han sido mi mejor ejemplo y un apoyo incondicional, a mis primos Edgar, José, Celimo y Daniel, a Fernando Balanta quien ha compartido conmigo estos años de empeño y lucha. A mis amigos, maestros y compañeros que me apoyaron para lograr mi sueño.

A todos ustedes dedico este trabajo, gracias y que Dios los bendiga.

*María Jimena Pechené L.*

## AGRADECIMIENTOS

Expresamos nuestros más sinceros agradecimientos a todas las personas que contribuyeron de una u otra forma a la elaboración de este trabajo.

Sinceros agradecimientos a la Magister Diana Ximena Ortiz, por su labor de directora en este trabajo, por su acompañamiento, disponibilidad, recomendaciones y continuas enseñanzas en este proceso.

Al Licenciado Daniel Andrés Fernández y al Magister Luis Fernando Espinosa por sus sugerencias, correcciones y comentarios que aportaron a la realización de este trabajo.

A nuestros compañeros, colegas y profesores por sus aportes y comentarios que contribuyeron a la culminación de este trabajo.

A la Universidad del Valle Sede Norte del Cauca por brindarnos una formación integral.

Agradecimiento a los estudiantes, profesores y directivos de la Institución Educativa Instituto Técnico, del municipio de Santander de Quilichao, por la colaboración, disponibilidad del espacio y el tiempo y por la logística de artefactos necesarios para la realización de la SD.

Finalmente, expresamos los más sinceros agradecimientos a nuestras familias, por sus grandes esfuerzos y apoyo para que todo fuera posible.

*Muchas gracias*

## TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN .....	14
INTRODUCCIÓN .....	15
CAPÍTULO I .....	18
1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA DE INDAGACIÓN .....	18
1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	18
1.2. JUSTIFICACIÓN.....	25
1.3. OBJETIVOS.....	27
1.3.1. Objetivo General.....	27
1.3.2. Objetivos Específicos .....	27
1.4. ANTECEDENTES.....	28
1.4.1. Estado del Arte .....	28
CAPÍTULO II .....	35
2. MARCO TEÓRICO .....	35
2.1. DIMENSIÓN EPISTEMOLÓGICA.....	36
2.1.1. La Geometría en la Historia del Hombre.....	36
2.1.2. El Espacio en los Elementos de Euclides .....	37
2.1.3. Configuración Histórica de la Transformación. ....	39
2.1.4. Transformación de Rotación .....	41

2.1.5. El Dinamismo en la Geometría .....	45
2.1.6. La Geometría en el Arte .....	46
2.2. DIMENSIÓN COGNITIVA .....	49
2.2.1. La Mediación Instrumental.....	49
2.2.2. La Orquestación Instrumental .....	54
2.3. DIMENSIÓN DIDÁCTICA .....	55
2.3.1. La Teoría de Situaciones Didácticas .....	55
2.4. REFERENTE CURRICULAR .....	60
2.4.1. Lineamientos Curriculares.....	60
2.4.2. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.....	61
2.4.3. Los Derechos Básicos de Aprendizaje .....	65
2.5. POSIBLES ARTICULACIONES TEÓRICAS .....	67
CAPÍTULO III.....	70
3. METODOLOGÍA.....	70
CAPÍTULO IV.....	74
4. ANÁLISIS A PRIORI: Diseño y Planificación de la Secuencia Didáctica .....	74
4.1. Dispositivo experimental.....	74
4.1.1. Conjunto de Objetivos (Relacionados con el comportamiento del tipo de tareas o el acomodamiento de un trabajo- en el ambiente).....	74
4.1.2. Conjunto de Individuos (Aquellos que participan en el desarrollo de la SD) .....	75

4.1.3. Configuración Didáctica (Estructura general o plan de acción).....	75
4.1.4. Conjunto de Explotación de la Configuración. ....	77
4.1.4.1. Organización particular de la clase.....	77
4.1.4.2. Análisis a-priori de las situaciones .....	80
4.1.4.3. Descripción de la situación # 1 .....	82
4.1.4.4. Descripción de la situación # 2.....	91
4.1.4.5. Descripción de la situación # 3.....	98
CAPÍTULO V .....	107
5. ANÁLISIS A POSTERIORI.....	107
5.1. DESCRIPCION DE LA EXPERIMENTACION .....	107
5.2. ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN # 1 .....	110
5.3. ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN #2.....	123
5.4. ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN #3. ....	131
5.5. CONSIDERACIONES FINALES DEL ANÁLISIS A POSTERIORI.....	139
CAPÍTULO VI.....	141
6. CONCLUSIONES .....	141
7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	148
8. ANEXOS .....	151
8.1. Fotografías de la implementación de la SD .....	151
8.2. Producciones de los estudiantes .....	152

8.3. PROTOCOLO DE CONSTRUCCIÓN DEL APPLET 2 .....	159
---	-----

## ÍNDICE DE IMÁGENES

Imagen 1: Transformación Isométrica .....	42
Imagen 2: Transformación de Rotación.....	43
Imagen 3: Propiedades de la Rotación.....	44
Imagen 4: Retrato de Luca Pacioli, Jacopo de Barbali 1498 .....	47
Imagen 5: Proporción aurea en la naturaleza .....	48
Imagen 6: Sucesión de Fibonacci en la geometría.....	48
Imagen 7: “La última Cena” por Leonardo da Vinci .....	48
Imagen 8: “La Gioconda” por Leonardo da Vinci 1503-1519 .....	48
Imagen 9: Teselado semi-regular.....	49
Imagen 10: Teselado tridimensional.....	49
Imagen 11: “Metamorphosis III excerpt 6” por Maurits Cornelis Escher .....	49
Imagen 12: Situación didáctica y situación a-didáctica (Perrin- Glorian, 2009).....	57
Imagen 13: Organización de la clase para el desarrollo de la SD.....	78
Imagen 14: Casilla con el calificativo correcto e incorrecto.....	81
Imagen 15: Vistas de un objeto en el espacio .....	81
Imagen 16: Applet 1.....	82
Imagen 17: Fichas con la trayectoria que recorren alrededor del eje .....	85
Imagen 18: Rotación de las fichas sobre el eje ubicado en un punto de la ficha.....	85

Imagen 19: Consignas de la situación 1 .....	87
Imagen 20: Applet 2.....	91
Imagen 21. Fichas con su respectivo eje de rotación.....	93
Imagen 22: Consignas de la situación 2.....	95
Imagen 23: Las tres fichas giran respecto al eje Z.....	98
Imagen 24: Applet 3.....	98
Imagen 25: Consignas de la situación 3.....	102
Imagen 26: Sala de sistemas 1 de La Institución Educativa Instituto Técnico .....	108
Imagen 27: Situación de Acción .....	110
Imagen 28: Retroacciones del Medio .....	111
Imagen 29: Respuesta 1 de la consigna 1 .....	112
Imagen 30: Respuesta 2 de la consigna 1 .....	113
Imagen 31: Estrategia para medir los grados de rotación de las fichas .....	114
Imagen 32: Vista superior o planta, como estrategia para identificar los grados de rotación de las figuras .....	114
Imagen 33: Respuesta de la primera sección de la consigna 3 .....	116
Imagen 34: Respuesta 1 de la segunda sección de la consigna 3.....	116
Imagen 35: Respuesta 2 de la segunda sección de la consigna 3.....	116
Imagen 36: Estudiante E2 exponiendo su respuesta en el tablero .....	117
Imagen 37: Estudiante E3 exponiendo su respuesta en el tablero .....	118
Imagen 38: Estudiante E <sub>4</sub> exponiendo su respuesta en el tablero .....	118
Imagen 39: Estudiante explica sus argumentos .....	120
Imagen 40: Estudiante E6 expone sus argumentos.....	120

Imagen 41: Incorporación de otros artefactos para lograr procesos de razonamiento.....	121
Imagen 42: Situación de validación a partir de las retroacciones que proporciona el medio .....	123
Imagen 43: Situación de acción .....	124
Imagen 44: Situación de Formulación .....	125
Imagen 45: Respuesta de la consigna 5 .....	128
Imagen 46: Respuesta de la consigna 6 .....	129
Imagen 47: Situación de Institucionalización .....	130
Imagen 48: Situación de validación a partir de las retroacciones que proporciona el medio .....	131
Imagen 49: Identificación de congruencia a partir de devoluciones.....	132
Imagen 50: Respuesta de la consigna # 7 .....	133
Imagen 51: Respuesta de la consigna 8 .....	134
Imagen 52: Respuesta 2 de la consigna 10 .....	135
Imagen 53: Respuesta 1 de la consigna 10 .....	135
Imagen 54: Situación 1 de validación.....	137
Imagen 55: Situación 2 de validación.....	137

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Estándares de los grados Primero - Tercero .....	62
Tabla 2: Estándares de los grados Sexto- Séptimo .....	63
Tabla 3: Estándares de los grados Octavo - Noveno .....	65
Tabla 4: Derechos Básicos de Aprendizaje, grados Sexto - Séptimo - Octavo .....	66

## ÍNDICE DE DIÁLOGOS

Dialogo 1: Devoluciones del profesor .....	111
Dialogo 2: Situación de formulación del E2.....	117
Dialogo 3: Situación de formulación del E3.....	118
Dialogo 4: Situación de formulación del E4.....	118
Dialogo 5: Sustentación de las formulaciones de E3 y E4 .....	119
Dialogo 6: Argumentos de estudiantes .....	119
Diálogo 7: Argumentos del estudiante E <sub>4</sub> .....	120
Dialogo 8: Argumentos de E3.....	121
Dialogo 9: Dialogo entre pares .....	126
Dialogo 10: Devoluciones del profesor .....	127
Dialogo 11: Identificación de la congruencia a partir de Devoluciones .....	131
Dialogo 12: Argumentos que dan cuenta de los grados de rotación.....	133
Dialogo 13: Situación de formulación .....	137
Dialogo 14: Validación de la consigna 11 .....	138

## RESUMEN

Este trabajo se centra en caracterizar el diseño de una Secuencia Didáctica (SD) mediada por un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) como Geogebra 3D, desde la perspectiva de la Orquestación Instrumental (OI) la cual se encarga de proveer y acompañar las Génesis Instrumentales de los estudiantes, con la finalidad de propiciar la necesidad de integrar instrumentos que medien la actividad matemática. Para tal fin, se incorpora la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) como propuesta teórica fundamental en el diseño de la secuencia.

Desde este enfoque, se retoman algunos aspectos de la Micro-Ingeniería didáctica como referente metodológico que posibilita la concepción, el diseño, realización, observación y análisis de la Secuencia Didáctica (SD).

**Palabras Claves:** Orquestación Instrumental, Secuencia Didáctica, Transformación de Rotación, Geometría Espacial, Geogebra 3D.

## INTRODUCCIÓN

Este trabajo se realiza en el programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, en el contexto de la línea de formación de Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, sede Norte del Cauca.

Se plantea una problemática, donde interesa dar cuenta de la caracterización del diseño de una Secuencia Didáctica (en adelante SD) desde la perspectiva de la Orquestación Instrumental (en adelante OI), que aborde la mediación de instrumentos, en el aprendizaje de la transformación de rotación en el espacio.

De este modo, se opta por una estrategia metodológica que toma como referencia la Micro-Ingeniería didáctica, con el fin de abordar la noción matemática que se pretende movilizar, alrededor de una propuesta que contempla la Teoría de Situaciones Didácticas (en adelante TSD), de donde se toman algunos aspectos que se tienen en consideración en la SD como lo son; el contrato didáctico, el medio y la situación didáctica.

A continuación se presentará una breve descripción de los seis capítulos que conforman este trabajo:

En el **primer capítulo** se presenta el problema de investigación, que contextualiza y sustenta su pertinencia, la justificación, los objetivos y los antecedentes, en donde a partir del estado del arte se analizar la viabilidad del trabajo.

El **segundo capítulo**, centra la atención en los referentes teóricos que sustentan el problema de investigación desde las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica, abordando una mirada instrumental del aprendizaje de las matemáticas, enfatizando en la orquestación instrumental como eje central, y presentando la TSD como una propuesta en la cual se pueda concebir el diseño de la SD, ligado a los referentes curriculares.

En el **tercer capítulo**, se desarrolla la metodología de investigación, específicamente la Micro – Ingeniería didáctica, debido a que tiene en cuenta la complejidad de los fenómenos de la clase de manera local y para lograr los objetivos propuestos en este trabajo se realizará el estudio de una noción específica de la matemática, a partir de la complejidad de los fenómenos que se presentan en el aula. Entendiendo como fenómenos del aula las decisiones didácticas, estrategias usadas por el estudiante y las devoluciones que realice el profesor.

El **cuarto capítulo**, presenta el análisis a priori de la SD desde la teoría de la OI que permite articular la concepción, diseño, realización, observación y análisis de la SD desde una mirada instrumental, para movilizar la noción de transformación de rotación en el espacio, con lo que se anticipan las posibles acciones que el estudiante llevará a cabo durante el desarrollo de la SD.

En el **quinto capítulo**, se expone el análisis a posteriori de la SD. En este análisis se estudian los datos o evidencia recogida a lo largo de la realización de la SD, identificando los fenómenos relevantes y las producciones de los estudiantes, que serán confrontados con el análisis a priori para determinar los aciertos y desaciertos de las hipótesis planteadas.

Finalmente el **sexto capítulo**, presenta las conclusiones generales, las cuales contemplan aquellos aspectos relacionados con el problema, la metodología y el marco teórico, los objetivos y su pertinencia para el desarrollo del trabajo.

De manera general, este trabajo de investigación pretende hacer una contribución a la labor de los profesores de matemáticas, dado que la SD estará a disposición del público en general a través de los siguientes enlaces: <https://www.geogebra.org/m/qaj6vdT2>, <https://www.geogebra.org/m/wp9RPg3X>, <https://www.geogebra.org/m/DpYA2uDx>, ya que se interesan por el papel que tienen las tecnologías computacionales en el aprendizaje de las matemáticas, particularmente en el aprendizaje de la transformación de rotación en el espacio.

## CAPÍTULO I

### 1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA DE INDAGACIÓN

En este capítulo inicialmente se encuentra el planteamiento del problema, donde se desarrolla la problemática y se plantea la pregunta que dirige este trabajo de investigación, ¿Qué caracteriza el diseño de una Secuencia Didáctica (SD), desde la perspectiva de la Orquestación Instrumental (OI), respecto a la transformación de rotación en el espacio en estudiantes de grado noveno de educación básica? Posteriormente se presenta la justificación del trabajo dando respuesta los siguientes interrogantes: ¿Qué se hará? ¿Porque se hará? ¿Para qué se hará? Y ¿Cómo se hará?, luego se exponen los objetivos del trabajo y por último se encuentra el apartado de los antecedentes que permite estudiar la viabilidad de este trabajo a partir de la descripción de algunos documentos relacionado con la enseñanza y aprendizaje de la transformación de rotación en el espacio tridimensional y la integración de tecnología a las aulas de clase.

#### 1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Según los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional (1998), la implementación de la matemática moderna, se enfatizó en la enseñanza de procesos axiomáticos formales, que para un contexto de educación básica resultaron confusos, posiblemente porque el estudiante le encontraba poca aplicabilidad en su contexto real. A partir de este fracaso se realiza la actual reforma curricular, en la que se le da un nuevo enfoque a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, particularmente la geometría es concebida de la siguiente manera:

La geometría, por su mismo carácter de herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico, constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación. Desde esta perspectiva los énfasis en el hacer matemático escolar estarían en aspectos como: el desarrollo de la percepción espacial y de las intuiciones sobre las figuras bi y tridimensionales, la comprensión y uso de las propiedades de las figuras y las interrelaciones entre ellas, así como del efecto que ejercen sobre ellas las diferentes transformaciones, el reconocimiento de propiedades, relaciones e invariantes a partir de la observación de regularidades que conduzca al establecimiento de conjeturas y generalizaciones, el análisis y resolución de situaciones problemas que propicien diferentes miradas desde lo analítico, desde lo sintético y lo transformacional. (MEN, 1998, p. 17)

Esta nueva visión de la geometría refleja el interés de los investigadores por fundamentar la reforma curricular en teorías como la constructivista que le da la oportunidad al estudiante de construir conocimiento desde su propia experiencia con los objetos presentes en su mundo circundante, en este sentido los estándares básicos de competencias plantean que es necesario el desarrollo de los cinco procesos generales (formulación y resolución de problemas; modelación, comunicación y razonamiento; comparación y ejercitación de procedimientos), a partir de los cuales se desarrollan competencias matemáticas.

Sin embargo, la realidad presente en el currículo de matemáticas respecto a la geometría, es que aún no se le da el espacio que requiere en las aulas de clase. En este sentido Sánchez, (2006) menciona que se debe a tendencias de enseñanza marcadas por la repetición de procedimientos mecánicos heredados de la matemática moderna, el carácter deductivo y el poco tiempo que se le designa a las áreas de las matemáticas, particularmente a la geometría y estadística.

Otro aspecto relevante que gira en torno a la geometría, es el interés de docentes e investigadores por contribuir a su enseñanza y aprendizaje como lo demuestran Barrantes y Balletbo (2012) en la investigación que realizaron acerca de las Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria. Como resultado de esta investigación se infiere que el 32% de estos trabajos están enfocados hacia la geometría en general y sólo un 18% se centra en el estudio de la geometría espacial, lo cual demuestra el poco énfasis que hay en aspectos referentes al desarrollo del pensamiento espacial.

Estas tendencias se evidencian en el estado del arte realizado en este trabajo, en el que se percibe un interés por el estudio de los conceptos geométricos, sin embargo la mayoría de documentos encontrados abordan el plano bidimensional, lo que refleja la escasez de trabajos orientados al desarrollo de habilidades espaciales, las cuales se consideran importantes para la interacción del individuo con el mundo que lo rodea, como lo menciona Howard Gardner (citado por MEN, 1998):

El pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. El manejo de información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios es peculiar a esas personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial. Se estima que la mayoría de las profesiones científicas y técnicas, tales como el dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, la aviación, y muchas disciplinas científicas como química, física, matemáticas, requieren personas que tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial.

De este modo, se resalta la necesidad respecto al desarrollo del pensamiento espacial en el individuo, que le permite alcanzar habilidades para percibir la realidad, identificar propiedades de los objetos que lo rodean, sus relaciones, formas y demás características constitutivas. Sin embargo, las formas de enseñanza y aprendizaje del pensamiento espacial en las aulas de clase

está condicionado al uso de representaciones bidimensionales, como se puede observar en los libros de texto que son las herramientas más usada por los profesores para guiar sus clases en el aula. En este sentido, Lappan y Winter afirman:

“A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que proporcionamos a nuestros niños son bidimensionales. Nos valemos de libros bidimensionales para presentar las matemáticas a los niños, libros que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales. A no dudar, tal uso de dibujos de objetos le supone al niño una dificultad adicional en el proceso de comprensión. Es empero, necesario que los niños aprendan a habérselas con las representaciones bidimensionales de su mundo. En nuestro mundo moderno, la información seguirá estando diseminada por libros y figuras, posiblemente en figuras en movimiento, como en la televisión, pero que seguirán siendo representaciones bidimensionales del mundo real”. (Citado por MEN, 1998 p. 39).

La enseñanza de la geometría desde el plano bidimensional, representa una dificultad para el desarrollo del pensamiento espacial en el estudiante, pues debe de buscar estrategias que le permitan la comprensión de representaciones del plano bidimensional y relacionarlas con los objetos presentes en el espacio tridimensional. Por lo tanto es importante que el estudiante reconozca y conceptualice el plano bidimensional, pero también es importante que perciba y visualice los objetos geométricos presentes en el espacio, pues como se mencionó anteriormente los individuos interactúan en un mundo de tres dimensiones.

Según el Ministerio de Educación Nacional (2006), uno de los procesos cognitivos que caracteriza el pensamiento espacial es la “construcción y manipulación de representaciones mentales de los objetos del espacio y su transformación” (p.61), sin embargo, los estudiantes Colombianos han presentado falencias en el desarrollo de estos procesos, particularmente en la transformación de

rotación, como se evidencia en el informe de resultados de las pruebas TIMSS 1995, “En cuanto a Transformaciones, es posible reseñar que los estudiantes colombianos revelan un deficiente nivel de manejo de las rotaciones...” (MEN, 1997, p.83).

Estos resultados revelan la dificultad que presentan los estudiantes respecto a la transformación de rotación, que por lo regular se trabaja en ambientes de lápiz y papel, por lo tanto es necesario proporcionar al estudiante estrategias didácticas que aporten al desarrollo de habilidades necesarias para la aprehensión de los elementos conceptuales (sentido, ángulo y eje de rotación) característicos de la noción de rotación en el espacio tridimensional.

Por otro lado, entre las herramientas de apoyo que el Ministerio de Educación Nacional propone a los docentes para el mejoramiento de la calidad educativa, se encuentran los Derechos Básicos de Aprendizaje (en adelante DBA), documento que ha sido estructurado y desarrollado en coherencia con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias, en los que se pone de manifiesto la necesidad de desarrollar el pensamiento espacial en los individuos. A pesar de esto los DBA, que se enfocan en mostrar los conocimientos básicos que deben adquirir los estudiantes en cada uno de los grados de la educación escolar, hasta el momento no han tenido en cuenta contenidos referentes a la geometría transformacional y geometría espacial, centrándose la atención en el reconocimiento de figuras geométricas en el plano y en hallar áreas y perímetros de distintas figuras.

De acuerdo a los argumentos anteriores, se considera importante realizar un trabajo que contribuya a la enseñanza de la geometría en las aulas de clase, particularizando en el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos mediante una propuesta didáctica enfocada a

recuperar el estatus práctico de la geometría, que favorezca la formación de seres humanos con habilidades espaciales necesarias para el desarrollo de su vida profesional, social y cultural debido a que las matemáticas se encuentran presentes en estos aspectos.

De este modo, los AGD son estrategias didácticas trascendentales que proporcionan ventajas en la enseñanza de la geometría, pues este software cuenta con herramientas como el arrastre, que le permiten al estudiante explorar y verificar propiedades de figuras y de construcciones geométricas.

Respecto a lo anterior el Ministerio de Educación Nacional, (2004) menciona:

La diferencia fundamental entre un entorno de papel y lápiz y un entorno de geometría dinámica es precisamente el dinamismo. Como las construcciones son dinámicas, las figuras en la pantalla adquieren una temporalidad: ya no son estáticas, sino móviles, y por lo tanto sus propiedades deberán estar presentes en todas las posibles posiciones que tomen en la pantalla. (p. 19)

En este sentido, la propuesta didáctica se pretende diseñar utilizando un Ambientes de Geometría Dinámica como Geogebra 3D, que privilegia el estudio de la geometría en el espacio, ya que posibilita la interacción con escenarios que recrean los objetos geométricos en el espacio tridimensional, lo que permite al estudiante visualizar el espacio y los objetos geométricos presentes en él, como lo plantean Gonzato, Fernández y Díaz (2011):

De forma general consideramos la visualización y la orientación espacial como un conjunto de habilidades relacionadas con el razonamiento espacial. Visualizar y orientar un objeto, un sujeto o un espacio, no incluye únicamente la habilidad de “ver” los objetos y los espacios, sino también la habilidad de reflexionar sobre ellos y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes, su estructura, y de examinar sus posibles transformaciones (rotación, sección, desarrollos,...). Observamos que la interpretación y la comunicación de la información de manera figural (con descripciones gráficas y modelos de hechos y relaciones espaciales) o verbal

(vocabulario específico utilizado en geometría, expresiones y términos deícticos) son importantes habilidades relacionadas con la visualización y la orientación espacial. (p.100)

Otra ventaja de Geogebra 3D, es que cuenta con una Licencia Pública General (GPL), lo que garantiza su fácil adquisición para las instituciones educativas que cuentan con equipos tecnológicos. Además este software tiene una plataforma virtual (Geogebra Tube) donde se encuentra una variedad de construcciones geométricas bidimensionales y tridimensionales a las que puede acceder cualquier usuario y trabajar sobre ellas o incluso proponer sus propias construcciones.

Para efectos de este trabajo se pretende diseñar una SD, la cual contemplará una mirada instrumental del aprendizaje de las matemáticas, enfatizando en la OI, como eje central y presentando la TSD como una perspectiva que sustenta el diseño de la SD, con la finalidad de lograr el proceso de construcción cognitiva de la noción de transformación de rotación en el espacio en grado noveno, ya que es en este grado que los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) proponen trabajar las transformaciones geométricas desde el espacio.

Por lo tanto la TSD de Brousseau, permite concebir el aprendizaje en la interacción entre el sujeto y el medio<sup>1</sup>, como lo plantea Brousseau (1986) “el estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios un poco como lo ha hecho la sociedad humana, este saber es fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje” (p.13). Referente a lo anterior, el medio tiene unas

---

<sup>1</sup> El medio es concebido y diseñado con la intención de enseñar un saber matemático determinado, con unas especificaciones particulares tanto para el profesor como para el estudiante.

características particulares, una de ellas es la capacidad de generar retroalimentaciones (o retroacciones) lo cual permite que el estudiante interprete esa información y cimiente una estrategia que le permite llegar donde se desea.

Por otra parte la OI, permite articular la concepción, el diseño, realización, observación y análisis, de la Secuencia didáctica concebida desde una mirada instrumental, para la movilización de conocimientos matemáticos Trouche (2003). Por esta razón la OI es fundamental para los propósitos de este trabajo, pues los AGD por sí solos no garantizan aprendizaje, por lo tanto es necesario el diseño particular de los instrumentos artefactuales.

En este sentido la pregunta que da cuenta de este trabajo de investigación es ¿Qué caracteriza el diseño de una secuencia didáctica, desde la perspectiva de la orquestación instrumental, respecto a la transformación de rotación en el espacio en estudiantes de grado noveno de educación básica?

## **1.2. JUSTIFICACIÓN**

Con el presente trabajo se pretende caracterizar el diseño de una SD pensada desde la perspectiva de la OI, en torno a la enseñanza de la transformación de rotación a estudiantes de grado noveno de educación básica, para fundamentar el diseño de la secuencia se tendrá en cuenta como referente teórico la TSD.

Ahora bien, en la actualidad se han identificado investigaciones en el campo de la didáctica de las matemáticas que reconocen la necesidad de implementar en el aula de clase la mediación de objetos tangibles para conceptualizar las nociones abstractas de las matemáticas, es por ello que el

diseño de la Secuencia Didáctica (SD) contemplará la implementación de un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) como Geogebra 3D. De este modo, se contrasta la propuesta de la Secuencia Didáctica con uno de los desafíos definidos en el plan decenal 2006-2016 en el que se plantea la necesidad de fortalecer la pedagogía y el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en la educación, con estrategias didácticas de implementación en el aula y el equipamiento artefactual en las instituciones. Este es un elemento importante para nuestro trabajo, dado que en la actualidad, con el desarrollo del plan decenal, las instituciones educativas del sector público están siendo dotadas de elementos artefactuales como tabletas, portátiles, video beam, que cuentan con la instalación del software Geogebra.

Razón por la cual se considera que con el diseño de una Secuencia Didáctica, pensada desde la perspectiva de la Orquestación Instrumental(OI), se podrá proveer al docente de elementos teóricos y prácticos para garantizar una construcción significativa del conocimiento en los estudiantes y el reconocimiento de las potencialidades de un software que fue diseñado con finalidades didácticas.

Para tal fin, se implementará como referente metodológico la Ingeniería Didáctica, dado que este trabajo gira en torno al análisis de la concepción, diseño, realización, observación y análisis de secuencias didácticas.

### **1.3. OBJETIVOS**

#### **1.3.1. Objetivo General**

- Caracterizar el diseño de una Secuencia Didáctica (SD) desde la perspectiva de la Orquestación Instrumental (OI) en torno a la transformación de rotación en el espacio con estudiantes de grado noveno de educación básica.

#### **1.3.2. Objetivos Específicos**

- Definir los criterios que orientan la caracterización del diseño de una Secuencia Didáctica (SD) desde la perspectiva de la Orquestación Instrumental (OI).
- Fundamentar la concepción, diseño, realización, observación y análisis de una Secuencia Didáctica desde la perspectiva de la Orquestación Instrumental (OI).
- Dar cuenta de los procesos de Mediación Instrumental, en el contexto de una Secuencia Didáctica, a partir de los conocimientos matemáticos e instrumentos que se ponen a disposición.

## 1.4. ANTECEDENTES

### 1.4.1. Estado del Arte

En el marco del desarrollo de este trabajo, se realizó un bosquejo de escritos relacionado con la enseñanza y aprendizaje de la transformación de rotación en el espacio tridimensional.

La búsqueda fue realizada utilizando bases de datos como; Eric, TCO, Dialnet, Redinet, Biblioteca virtual de la Universidad Javeriana, y utilizando descriptores como Cabri 3D, Rotación, secuencias didácticas, con los cuales obtuvimos publicaciones de conferencias, tesis de pregrado posgrado y doctorales, publicaciones de grupos de educación matemática etc. Estos documentos fueron clasificados en categorías, teniendo en cuenta el énfasis que los relaciona con los propósitos de este trabajo, de la siguiente manera.

En primer lugar se identificaron documentos a nivel Internacional que abordan el conjunto de las transformaciones isométricas, mediado por artefactos.

✓ **Documentos relacionados con el uso de artefactos tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje de las transformaciones isométricas.**

- Morera, L, (2011) Uso de Geogebra en el aprendizaje de las transformaciones, Universidad autónoma de Barcelona.

Este documento se basa en el análisis de las actuaciones de los estudiantes, frente a un diseño elaborado en el programa Geogebra, abordando las transformaciones geométricas en el espacio

bidimensional, con el ánimo de aportar en el desarrollo del proceso de investigar, conjeturar y validar, las características de un concepto matemático con el uso de un AGD.

- Díaz, D. Sánchez, J. Mayorga, A. (2014) Cabri II Plus como herramienta para la enseñanza de las isometrías. Chile

En este artículo se resalta la importancia de la geometría en el desarrollo cotidiano de las personas y la incidencia de las nuevas tecnologías en el aprendizaje significativo de los estudiantes del siglo XXI. Con esta referencia se presenta una secuencia de actividades en el programa Cabri II plus con el propósito de desarrollar procesos matemáticos – geométricos abstractos, abordando las transformaciones isométricas en el plano bidimensional.

- Morera, L. (2010) Momentos clave en el aprendizaje matemático en un contexto de trabajo de las isometrías usando un entorno tecnológico. Universidad Autónoma de Barcelona.

En este documento se retoman las isometrías en el espacio bidimensional en el contexto de un ambiente de geometría dinámica (Geogebra), con el fin de identificar las influencias y características más relevantes en el aprendizaje de los estudiantes al interactuar con el artefacto.

*En este mismo grupo también se ubican algunos trabajos encontrado a nivel local, considerando como local los realizados en la universidad del Valle.*

- Quebrada, J. (2012). Análisis de secuencias de situaciones difundidas en el portal INTERGEO desde la perspectiva de los recursos para la enseñanza de la geometría, universidad del Valle, Santiago de Cali.

En este trabajo se pretende caracterizar las situaciones didácticas que se han puesto a disposición de docentes y estudiantes en el portal INTERGEO, el cual contiene una gran variedad de recursos

didácticos. Se ha tenido en cuenta sólo las situaciones diseñadas en el programa Geogebra, debido a que este software cuenta con una licencia gratuita, lo que facilita a todas las instituciones educativas su uso y además permite que el estudiante explore de forma dinámica en el ámbito de la geometría, álgebra y cálculo. El objetivo es identificar los enfoques metodológicos y didácticos con que fueron diseñadas dichas situaciones, las limitaciones, alcances de los diseños propuestos y describir la orquestación instrumental propuesta.

- Arcila, J. Bonilla, J. Cardona G. (2012). Caracterización del uso de las transformaciones de isometría mediante el diseño de una secuencia de problemas abiertos de construcción geométrica con CABRI 3D. Univalle, Cali.

En este trabajo se busca identificar las características de trabajar con las transformaciones de isometría mediante una secuencia de problemas abiertos, en el que el estudiante debe realizar construcciones en el programa lo que indica que el estudiante debe poseer conocimientos previos de este. Es relevante mencionar que uno de los objetivos es generar conocimientos geométricos en el espacio tridimensional a partir de los conocimientos previos del estudiante en el plano bidimensional, con la noción de transformaciones isométricas mediado por el programa de geometría dinámica Cabri 3D.

- Ibarguen, Y. Realpe, J. (2012). La enseñanza de la simetría axial a partir de la complementariedad de artefactos. Univalle, Cali.

El objetivo de este trabajo es determinar algunos aspectos del desarrollo histórico – epistemológico de la simetría axial y algunos de los errores, obstáculos y dificultades implicados en su enseñanza y aprendizaje en grado quinto. El artefacto utilizado es el programa de geometría dinámica Cabri Geometry II Plus, un simetrizador, regla, lápiz y papel que al complementarse pueden llevar a la conceptualización de las propiedades de dicha transformación isométrica. El diseño de la situación

fue fundamentado en la Teoría de Situaciones Didácticas la cual se pone en práctica con la metodología de la Micro- Ingeniería didáctica.

Además lograron identificar que el sistematizador presenta limitaciones que impiden identificar la congruencia entre las figuras, lo que si permite el Cabri Geometry II Plus, y es aquí donde se habla de una complementariedad de artefactos.

✓ **Documentos relacionados con la importancia de la implementación de Ambientes de Geometría Dinámica en la enseñanza de geometría en general.**

- Flores, J. (2010). Exploración del impacto de un software dinámico en el aprendizaje de Geometría. Tegucigalpa

Este trabajo se centra principalmente en la importancia del uso de un AGD en el aprendizaje de la geometría en general. El estudio muestra que el contexto del AGD proporciona al estudiante la necesidad de asumir un papel activo, lo que genera en él un interés que estimula una mejor comprensión de las características de los objetos geométricos.

- Sánchez, M. (2006) Geometría interactiva aplicada al estudio de los movimientos en el plano, España.

Este trabajo enfatiza en el importante cambio que ha tenido la enseñanza y aprendizaje de la geometría, por lo tanto plantea una guía diseñada para que el profesor realice un trabajo de aula de forma dinámica, con el que el estudiante logre desarrollar procesos de argumentación, justificación y descubra las propiedades de los objetos al aplicarles movimientos en el plano.

- Hoyos, V, (2006), Funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria. Universidad Pedagógica, México.

Esta es una investigación didáctica de exploración, en la que se resalta la manipulación de Cabri II y algunos pantógrafos con aplicaciones geométricas, que pueden dar paso a una función complementaria que dé lugar a procesos de intuición y objetivación en torno a nociones matemáticas como la proporcionalidad y la comparación entre longitud y área. El trabajo fue realizado con estudiantes de grado noveno de una institución pública de México.

*En este grupo se identifican documentos que enfatizan en la importancia de la formación de los docentes que enseñan las transformaciones geométricas en el contexto internacional.*

- ✓ **Documentos relacionados con la formación de profesores para la enseñanza de la geometría transformacional.**

Este documento resalta la importancia de desarrollar el pensamiento espacial de profesores y su papel fundamental en la enseñanza, por lo tanto la problemática es el desarrollo de conceptos y procedimientos matemáticos en futuros docentes de primaria, particularmente en las transformaciones geométricas.

Finalmente a nivel Local se encuentran los documentos que involucran el uso de artefactos, particularmente en la noción de transformación en el espacio.

- ✓ **Documentos relacionados con el uso de artefactos tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje de la transformación de rotación.**

- Santacruz M.(sf). Explorar la transformación de rotación en educación básica integrando Cabri, Yumbo Valle.

Es el diseño de una secuencia didáctica para el aprendizaje de la transformación de rotación en grado quinto, con el propósito de considerar la mediación de la tecnología y la aplicación de una secuencia didáctica inspirada en el enfoque de resolución de problemas. En este caso se ha diseñado sobre un plano bidimensional con el software de geometría dinámica Cabri, el cual se puede trabajar en las instituciones públicas o privadas ya que cuenta con una licencia pública general para su funcionamiento, este programa posibilita la manipulación de los objetos geométricos lo cual permite la exploración.

- Álvarez, Z & Fernández D. La transformación de rotación en el espacio: (recurso electrónico) una propuesta de aula que integra el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D (2009).

Este trabajo de grado está enfocado hacia el aprendizaje de la noción de rotación en el espacio, mediado por el software de geometría dinámica Cabri 3D, la situación fue diseñada con el referente teórico de la Teoría de Situaciones Didácticas y puesta en acto bajo la metodología de la Micro-Ingeniería didáctica. Pensada para estudiantes de grado noveno con la intencionalidad de identificar los elementos presentes en la enseñanza de la noción de transformación de rotación en el espacio, mediada por el software de geometría dinámica Cabri 3D, en complementariedad con el juego Tetrix disponible en la red. Con esta secuencia se vió la necesidad de realizar la implementación en una institución pública que cuenta con la licencia de funcionamiento del software.

De forma general, se puede mencionar que el conocimiento geométrico es una preocupación común no solo a nivel nacional sino también a nivel internacional y aunque la geometría aún no

se ha integrado totalmente en las aulas de clase, sigue siendo un tema que preocupa a investigadores y educadores matemáticos.

Del mismo modo las investigaciones y trabajos experimentales como los que se han mencionado anteriormente, reiteran el potencial didáctico que pueden brindar los artefactos tecnológicos en los procesos cognitivos de los estudiantes, tanto en primaria como en secundaria, ya que estos proporcionan un escenario en el que el estudiante toma parte activa del trabajo de aula, en este sentido, la mayoría de los trabajos encontrados abordan las transformaciones isométricas en general, desde el plano bidimensional.

Los problemas que se han investigado giran en torno a desarrollar el pensamiento geométrico y espacial en el estudiante, mediante el uso de artefactos como mediadores entre el individuo y el conocimiento, en algunos casos buscando analizar y caracterizar los procesos que se presentan en la interacción del estudiante con el medio, ya que favorece la exploración que da lugar a la formulación y justificación de conjjeturas, que serán validadas mediante procesos de visualización.

## CAPÍTULO II

### 2. MARCO TEÓRICO

En el capítulo II, se desarrolla el marco teórico que sustenta el problema de indagación de este trabajo, el cual consta de tres dimensiones teóricas: la dimensión epistemológica que está asociada a la noción matemática, en este caso la transformación de rotación en el espacio; la dimensión cognitiva en donde se retoman aspectos de la aproximación ergonómica y se reconoce que todo aprendizaje de una noción matemática se encuentra mediado por instrumentos, de allí se evidencia la relación entre las génesis instrumentales de los estudiantes, con el uso de un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) como Geogebra, además la Orquestación Instrumental (OI) se articula como el eje que apoya las génesis instrumentales. La dimensión didáctica que se desarrolla a partir de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) que permite fundamentar el diseño de la SD. Finalmente se presenta el referente curricular que permiten orientar la propuesta de manera objetiva, como son; los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje elaborados por el MEN.

## 2.1. DIMENSIÓN EPISTEMOLÓGICA

### 2.1.1. La Geometría en la Historia del Hombre

En los escritos referentes a la historia del hombre y su organización como sociedad, siempre están presentes las áreas de las matemáticas, principalmente la Geometría como lo menciona Méndez (2003)

Las matemáticas son la ciencia más antigua. Habría que remontarse a los albores de la humanidad para encontrar ya los primeros vestigios del número y de las formas geométricas. Ante las necesidades de la vida cotidiana, por ejemplo saber cuántas cabezas de ganado formaban su rebaño... Las figuras, las formas geométricas, aparecen claramente en los productos que elaboraban en alfarería, cestería y tejidos. (p, 1)

Al respecto, Sánchez (2012) menciona que las primeras civilizaciones que se asentaron en las laderas de los ríos Nilo, Tigris y Éufrates vieron la necesidad de medir y calcular áreas, debido a que las crecientes de los ríos borraban los límites de sus propiedades y cultivos. Estos indicios geométricos en el hombre fueron meramente empíricos, el hombre encontró en la geometría la solución a las necesidades que surgían en su vida cotidiana, de forma práctica iban adquiriendo conocimientos matemáticos que aunque no eran precisos funcionaban para su quehacer diario.

En este sentido la geometría ha marcado un precedente importante en las actividades del hombre y en la conformación de su cultura, la historia demuestra la presencia de indicios geométricos aun antes de tener conocimiento científico acerca de ellos. Poco a poco y respondiendo a nuevas necesidades de las diferentes civilizaciones, la geometría se fue estandarizando de acuerdo a los aportes que realizaron sus diferentes autores.

## 2.1.2. El Espacio en los Elementos de Euclides

Uno de los más importantes personajes de la Geometría fue Euclides, quien recopiló en su libro “los Elementos”, nociones comunes, axiomas y proposiciones que constituyen las bases de las matemáticas. Según Ruiz (sf)

Los Elementos contiene trece libros o capítulos (aunque se le añadieron 2 libros más escritos por autores posteriores). Los primeros 6 son sobre geometría plana, los tres siguientes sobre teoría de números, el décimo, sobre incommensurables y los tres últimos sobre geometría de sólidos. (p, 73)

En este apartado se centrará la atención en el espacio, por lo tanto se tendrá en cuenta los tres últimos libros de los elementos en los cuales se aborda la Geometría de sólidos, es decir que se abordan las bases para el estudio del espacio y de los sólidos que lo ocupan, como lo menciona Navarro (2002):

Los tres libros restantes, XI, XII y XIII, de los Elementos están dedicados a la geometría del espacio. Sus definiciones van agrupadas al comienzo del libro XI. Son 28 en total y en ellas se precisan objetos y relaciones habituales de la geometría del espacio, como rectas y planos; paralelismo y perpendicularidad; ángulos diedros y poliedros; pirámide, prisma, esfera, cono, cilindro, cubo, octaedro, icosaedro y dodecaedro. (p, 75)

Es importante resaltar que en la primera definición se establece una de las características más importantes en la geometría espacial, la cual consiste en mostrar que los sólidos o cuerpos geométricos están compuestos por tres dimensiones lo que da lugar al concepto de volumen.

Con respecto a las proposiciones del libro XI, Navarro (2002) interpreta:

En las primeras proposiciones se demuestra que una recta no puede tener segmentos en dos planos paralelos y que dos rectas que se cortan determinan un plano. En la tercera se afirma que dos planos que se cortan definen una recta. A continuación van varias proposiciones dedicadas a estudiar el paralelismo y la perpendicularidad entre rectas, entre rectas y planos, y entre planos. Desde la proposición 20 hasta la 26 se estudian los ‘ángulos sólidos’ y desde la proposición 27 hasta la última los paralelepípedos y los prismas. La proposición 34, por ejemplo, afirma que si dos paralelepípedos son iguales, es decir tienen el mismo volumen, sus bases son inversamente proporcionales a sus alturas. De estas últimas proposiciones varias sirven para preparar los lemas que aparecen en el Libro XII. (p, 75).

En general el libro XI caracteriza las propiedades que tienen que ver con ángulos, la perpendicularidad y paralelismo entre planos y rectas, que serán punto de partida para los siguientes dos libros. En el libro XII, Euclides enfatiza en hallar áreas y volúmenes de los sólidos a partir de la proporcionalidad entre sus partes constitutivas como bases o alturas. De este libro se resalta el método de Exhausión, que es un método largo de demostración para el área y volumen de sólidos como el cono, el cilindro, pirámides y esferas. Con respecto al libro XIII Navarro (2002) menciona:

El objetivo del libro XIII es la construcción de los cinco sólidos regulares. Consta de 18 proposiciones. Se comienza con seis proposiciones que estudian cuestiones sobre líneas cortadas en media y extrema razón. En la séptima se examinan los pentágonos equiángulos. En la proposición octava se afirma que las diagonales de un pentágono se cortan en la razón aurea. Desde la proposición novena hasta a la duodécima se halla la razón entre los lados de los pentágonos, hexágonos y decágonos regulares inscritos en una misma circunferencia y también la razón entre el diámetro de esa circunferencia y dichos lados. Los problemas planos que se resuelven en estas primeras proposiciones sirven de base a las construcciones posteriores. Finalmente, en la proposición 13 se muestra cómo inscribir un tetraedro en una esfera, en la siguiente un octaedro, en la 15 un cubo, en la 16 un icosaedro, y en la 17 un dodecaedro. La última proposición está dedicada a comparar entre si los lados de las cinco figuras regulares y en ella se demuestra que no hay más sólidos regulares que esos cinco. (p, 77)

Se entiende que Euclides incluyó en su libro la construcción de los cinco sólidos que se atribuyen a Platón, además Aunque los libros XI, XII, XIII son tratados acerca del espacio las construcciones realizadas son planas. También es pertinente resaltar que Euclides no incluye ningún tipo de movimiento en los objetos a pesar que caracterizó parte importante del estudio del espacio geométrico.

### **2.1.3. Configuración Histórica de la Transformación.**

Según Moriena (sf), la transformación tuvo un largo camino de evolución en la historia para poder llegar a conceptualizarse dentro de la geometría que se conoce en la actualidad. Los primeros aportes importantes los mencionó Euclides quien mediante el método de superposición de figuras identifica la correspondencia entre sus elementos constitutivos, dejando percibir el concepto de congruencia entre figuras, al respecto Moriena (sf) menciona:

El uso del método de superposición de las figuras, ha dado lugar al debate alrededor del recurso de aplicación de un movimiento o de la idea de desplazamiento natural para superponer las figuras. Estos desplazamientos que intervienen, son desplazamiento de figuras y no transformaciones que operan sobre el espacio como conjuntos de puntos.... Estas diferencias entre la geometría de la observación y la geometría de la deducción, nacida en Grecia, continuará jugando un rol importante en la historia de las matemáticas. (p, 4).

En la época del renacimiento los artistas se inclinaron hacia la representación de la realidad en sus pinturas, por lo que se encontraron con la dificultad que tenía realizar sombras o poder representar un objeto tridimensional en un lienzo bidimensional. El artista más influyente fue el matemático Albert Durero que instauró la perspectiva como objeto de estudio de la geometría, aportó a los

artistas un libro de Geometría acerca de la perspectiva. Luego aparecen otros autores que realizaron sus teorías usando la perspectiva como fundamento, entre ellos Moriena menciona a Gerard Desargues (1591-1661) y Pascal (1623- 1662).

Como resumen de esta época Moriena (sf) y citando a Jahn, plantea lo siguiente:

Resumiendo, “En este período histórico las transformaciones geométricas aparecen como instrumentos implícitos de transferencia de propiedades. Las únicas transformaciones utilizadas son las proyecciones, pero quedan en el contexto de las cónicas, y no son consideradas como objetos de estudio en sí mismas, sino como simples relaciones entre dos figuras donde prima la noción de invariante”. (p, 5)

Como se puede observar el concepto de transformación aún no se establece formalmente, ya en el siglo XVII aparece la geometría analítica con los trabajos de Fermat y Descartes con respecto a la noción de ecuación asociada a las curvas, en la que Fermat resalta la correspondencia biyectiva entre los puntos del plano y sus coordenadas. Al respecto Moriena (sf), citando a Jahn, menciona, “Según Jahn (Jahn, pág. 45), los autores Piaget y García en su obra “Psicogénesis e historia de las ciencias” (1983) concluyen que “la noción de transformación tiene su origen innegable en la Geometría Analítica””. (p, 6)

Se revela que ya en la segunda mitad del siglo XIX, los matemáticos de la época realizaban estudios con las transformaciones, especialmente las de la geometría proyectiva. Aunque anteriormente con Pascal y Desargues se habían dado los orígenes, solo en esta época autores como Poncelet (1788- 1867) y Jacob Steiner (1796-1863) lograron su desarrollo sistemático. Concluyendo este periodo Moriena (sf) menciona lo siguiente:

Como conclusión, podemos decir entonces que la obra de Poncelet desarrolla y difunde el método de las transformaciones. Sus trabajos suscitaron investigaciones en Francia, Alemania, etc., e inspiraron obras tan diversas como las de Möbius, Steiner, Plücker, Gergonne, Chasles. Las investigaciones de Chasles se refieren en gran parte a la teoría de las transformaciones. (p, 6)

Al finalizar el siglo XIX se establece un vínculo entre las transformaciones y la teoría de grupos que Klein profundizó, quien según Moriena (sf) “considera que las propiedades geométricas se clasifican y se caracterizan por las transformaciones que las dejan invariantes, a cada tipo de transformaciones corresponde una geometría” (p, 7). De esta forma las transformaciones llegan a hacer parte de los conceptos fundamentales de la geometría que hoy se conoce.

#### **2.1.4. Transformación de Rotación**

Para efectos del presente trabajo se centrará la atención en la definición de la transformación de rotación. En primer lugar se entenderá el concepto de transformación según Fernández et (sf) de la siguiente forma:

Se llama transformación geométrica en el plano (espacio) a toda aplicación biyectiva  $t$  del plano (espacio) en sí mismo. El punto  $P' = t(P)$  se denomina transformado, homólogo o imagen del punto  $P$ . (p, 3)

Es decir, Sea  $\mathbf{P}$  un punto en el plano (espacio) y  $\mathbf{t}$  una transformación, entonces la transformación aplicada a  $\mathbf{P}$  dará como resultado la imagen  $\mathbf{P}'$ .

$$\mathbf{t}(\mathbf{P})=\mathbf{P}' \text{ siendo } \mathbf{P}' \text{ la imagen de } \mathbf{P}.$$

La transformación de Rotación pertenece al grupo de las Isometrías, por lo tanto se entenderá la Isometría como aquellas transformaciones en las que conservan las distancias como lo menciona Fernández et (sf).

Se llama isometría o movimiento a toda transformación geométrica que conserva las distancias. Diremos que una transformación geométrica  $M$  es un movimiento si para cualesquier puntos del plano o del espacio  $P$  y  $Q$  se verifica que  $d(M(P), M(Q)) = d(P, Q)$ .

Es decir que para que una transformación sea caracterizada como isometría (considerando la transformación de rotación) se debe cumplir que la distancia entre  $P$  y  $Q$  debe ser la misma distancia entre  $P'$  y  $Q'$ .

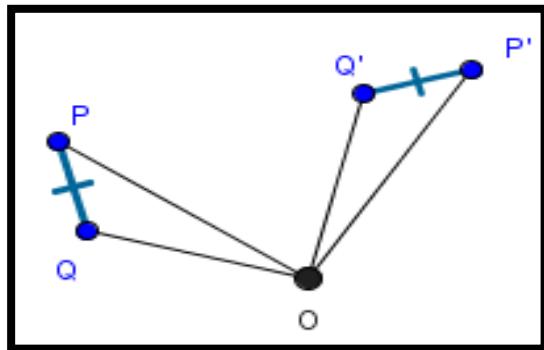


Imagen 1: Transformación Isométrica

Además según Fernández et (sf) las isometrías deben cumplir las siguientes Propiedades:

- Toda isometría transforma rectas en rectas.
- Toda isometría directa conserva el valor y la orientación de los ángulos.
- Toda isometría inversa conserva el valor de los ángulos pero cambia su orientación. (p, 4)

En el grupo de las transformaciones isométricas se encuentran simetrías axial y central, la traslación y la rotación. A continuación se hará un acercamiento a la definición de transformación de Rotación según Fernández et (sf).

Dado un punto  $C$  del plano y un ángulo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se llama giro de centro  $C$  y amplitud  $\alpha$ , y se denota por  $G(C,\alpha)$ , a la transformación que asocia a cada punto  $P$  del plano otro punto  $P' = G(C,\alpha)(P)$  de forma que se verifiquen las dos condiciones siguientes:

- $d(C,P) = d(C,P')$
- $\widehat{PCP'} = \alpha$  (p, 10).

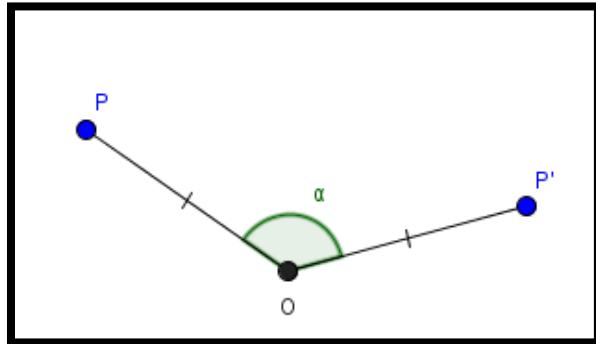


Imagen 2: Transformación de Rotación

Es decir que un movimiento en el plano es caracterizado como rotación si se cumple que para un punto  $P$ , se obtiene su imagen  $P'$  mediante un movimiento con centro  $C$  y un Ángulo  $\alpha$  de rotación, para ello se debe tener en cuenta que:

- La distancia del punto  $P$  al centro  $C$  es la misma del punto  $P'$  al centro  $C$ ,
- El ángulo formado por los puntos  $P$ ,  $C$  y  $P'$  es igual a  $\alpha$ .

La transformación de rotación debe cumplir también con unas propiedades, las cuales Fernández et, a enunciado de la siguiente manera:

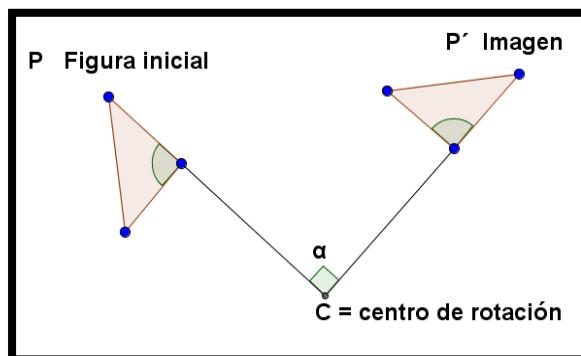
Propiedades del giro:

- Todo giro es una isometría directa.
- El único punto doble de un giro es su centro.
- Un giro queda determinado si conocemos el centro, un punto y su homólogo o bien dos puntos y sus respectivos homólogos. (p,10)

De la primera propiedad se entiende que toda rotación debe cumplir la característica de ser una isometría directa, es decir, que la transformación debe conservar la orientación de los ángulos.

Cuando se habla de puntos dobles se hace alusión a punto o puntos que permanecen invariantes en una transformación, en el caso de la rotación el único punto que cumple dicha propiedad debe ser el centro de rotación.

La tercera propiedad hace referencia a que en una rotación es necesario tener un centro de rotación, un punto o una figura inicial y su imagen después de aplicar la transformación.



*Imagen 3: Propiedades de la Rotación*

### 2.1.5. El Dinamismo en la Geometría

Los Elementos de Euclides es uno de los libros más importantes para la configuración no solo de la geometría sino de las matemáticas en general, es una obra que formalizó la geometría mediante métodos deductivos con un rigor lógico que proporcionó a los matemáticos de la época fundamentos muy importantes, sin embargo en el ámbito educativo, la naturaleza abstracta de las matemáticas exige la implementación de nuevos métodos que ayuden al estudiante a construir conocimientos significativos, en este sentido Angulo (sf) menciona:

Dado que comúnmente en la educación secundaria al abordar la demostración de ciertos teoremas de la geometría euclidiana (en el ambiente tradicional de lápiz y papel) se le niega al alumno la oportunidad de explorar y conjeturar, presentándole un conocimiento ya elaborado y requiriéndole que construya la demostración de tipo hipotético-deductiva, se presentan muchas dificultades por parte de la mayoría de los estudiantes y de ahí que los resultados satisfactorios sean tan escasos. (p, 1)

Por lo tanto, los métodos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han sido una preocupación constante en el sistema educativo, con respecto a la geometría los Lineamientos Curriculares proponen la construcción de conocimientos mediante una geometría activa que enfatiza en la manipulación de los objetos abstractos, en las palabras de Angulo (sf)

Una condición necesaria para lograr enseñar a demostrar en contextos escolares es conseguir un ambiente activo de trabajo, con muchas oportunidades de explorar y conjeturar, puesto que si un estudiante descubre cierta propiedad por sí mismo, estará más motivado hacia su comprensión y hacia la búsqueda de una demostración convincente.(p, 1)

Estas afirmaciones dejan ver la importancia de la geometría dinámica en la educación matemática. Según Acosta (2005) la matemática requiere de indagar en nuevas técnicas y tecnologías que permitan al estudiante manipular la representación de los objetos matemáticos, lo que constituye una nueva forma de experimentar diferente al trabajo con lápiz y papel que tradicionalmente se aborda en las aulas de clase, lo que favorece el uso del computador integrando software de Geometría Dinámica que permiten la manipulación y arrastre de las representaciones de los objetos geométricos. La opción de arrastre permite que el estudiante visualice en la pantalla del computador el comportamiento de las representaciones al ser sometidas a un movimiento, identificar sus características constitutivas y reconocer cuales de esas características se mantienen invariantes y cuáles no.

En este sentido el MEN (2004) menciona que: “La visualización integra los procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones, a partir de las representaciones de los objetos bidimensionales y tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones” (p. 10). Estos procesos proporcionan elementos importantes al desarrollo cognitivo del estudiantes.

### **2.1.6. La Geometría en el Arte**

La geometría hace parte de la vida de las personas, es necesaria para el desarrollo e implementación de ciencias, ingenierías y tareas o actividades que lleva a cabo el hombre, está presente en objetos con los que interactúa a diario, también es fundamental para elaborar obras de arte que hacen parte de las riquezas artísticas de la sociedad.

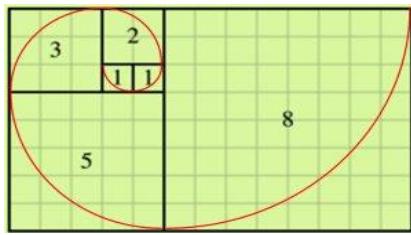
Muchos autores han utilizado elementos de la geometría en sus creaciones artísticas, particularmente en obras contemporáneas que fueron creadas a partir de dichos elementos que proporciona la geometría, como es el caso de la perspectiva que se utiliza en pinturas para darle profundidad, proporción y espacio a una superficie plana lo que permite dar un estilo particular. Por otra parte la sucesión de Fibonacci que en el plano de la geometría es conocida como proporción aurea consta de proporciones sucesivas que conforman un espiral, esta proporción es usada por muchos artistas para estructurar sus obras, pues la finalidad de su uso es encontrar una explicación matemática a la belleza. También se encuentran obras como las Teselaciones en el plano y el espacio y la construcción de mosaicos que son creadas a partir de polígonos.

El uso de la geometría es reconocido incluso en las construcciones que se realizaban en las civilizaciones antiguas como muros, fuertes, pirámides etc., de igual manera en diferentes obras de arte se puede reconocer que fue y sigue siendo un recurso importante y bastante empleado por los artistas, como se puede identificar en obras como las siguientes:



*Imagen 4: Retrato de Luca Pacioli, Jacopo de' Barbari 1498*

La obra de Barbali está construida según los principios de la perspectiva como también la geometría proyectiva, lo que permite la representación del espacio en una superficie de modo convincente.

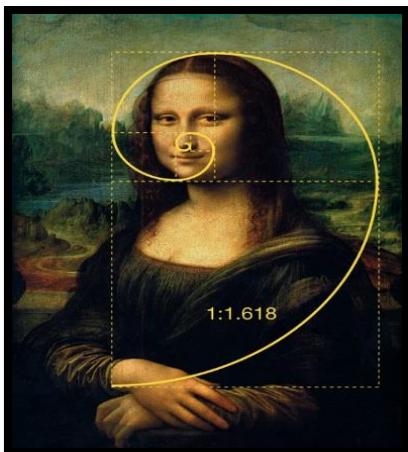


*Imagen 6: Sucesión de Fibonacci en la geometría*

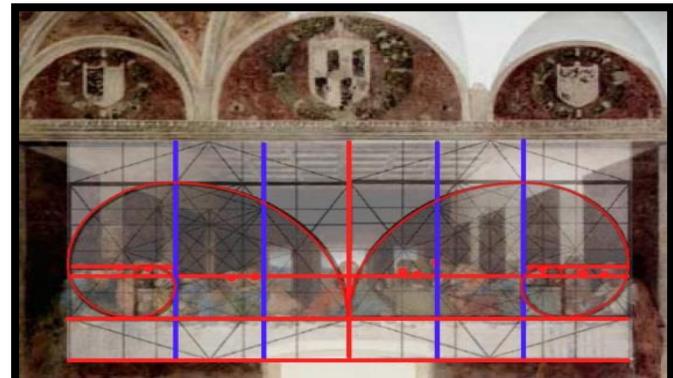


*Imagen 5: Proporción aurea en la naturaleza*

La proporción aurea además de encontrarse en el arte y el diseño también se aprecia en distintas configuraciones del mundo natural.

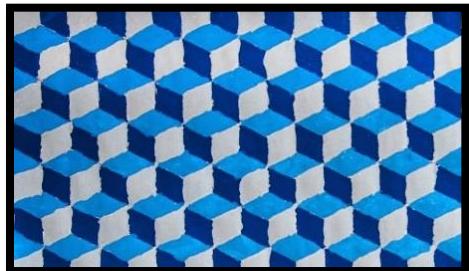


*Imagen 8: "La Gioconda" por Leonardo da Vinci 1503-1519*

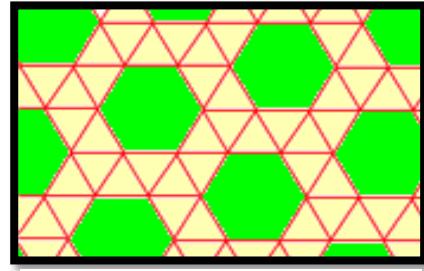


*Imagen 7: "La última Cena" por Leonardo da Vinci*

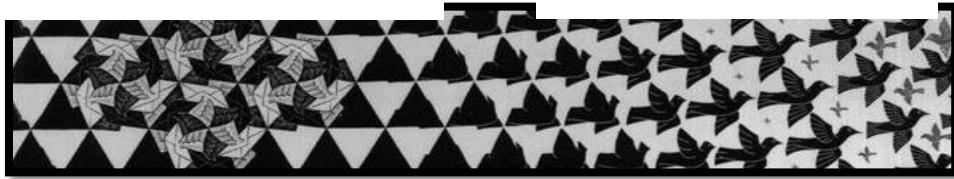
Se aprecia que la proporción aurea es coincidente en obras como “La Gioconda” y “La última Cena”



*Imagen 10: Teselado tridimensional*



*Imagen 9: Teselado semi-regular*



*Imagen 11: "Metamorphosis III excerpt 6" por Maurits Cornelis Escher*

Para la creación de teselados se usan polígonos o figuras que al aplicar transformaciones isométricas sobre ellas, se busca cubrir una superficie, sin dejar espacios y sin superponer las figuras. Escher es un famoso dibujante y pintor que en sus obras transforma figuras geométricas en dibujos concretos aplicando las transformaciones isométricas.

## 2.2. DIMENSIÓN COGNITIVA

### 2.2.1. La Mediación Instrumental

Para efectos de este trabajo nos enfocaremos en una propuesta denominada Aproximación Ergonómica de Rabardel (1995) en donde se retoma el principio de mediación instrumental.

Ahora bien, para entender de una manera objetiva este enfoque, es necesario mostrar algunos problemas en los campos sociales, en especial aquellos que postulan una tendencia a la eliminación de los “componentes humanos” de los sistemas de producción. En este sentido la ergonomía pierde sentido cuando no se tiene en cuenta al hombre en la actividad.

De este modo, es preciso ahondar sobre dos enfoques; por un lado el enfoque **Tecnocéntrico** el cual se centra en limitar y reducir la intervención del hombre en distintos procedimientos, específicamente en los de carácter productivo como tareas y actividades que serán desarrolladas y controladas por máquinas, por lo tanto el hombre tiene una posición residual que cada vez es más reducida, no tiene un papel central, su actividad no es fundamental en relación con los objetos y sistemas, es decir los productos de la tecnología son solo técnicos, no incorporan ninguna acción humana para su funcionamiento.

En la actualidad es difícil poner en funcionamiento lo mencionado en este enfoque debido a que no se pueden controlar todas las tareas desarrolladas por el hombre con la incorporación de máquinas únicamente, lo que hace necesario el enfoque **Antropocéntrico** que se fundamenta centrando la atención en el sujeto en la relación con los objetos, es decir, el hombre es central en dicha relación, es quien usa, coopera y controla el funcionamiento de los objetos. En este sentido los objetos desde su origen son **Antropotécnicos**, debido a que la concepción del diseño es pensada desde el entorno humano, en otras palabras el objeto se concibe desde el desarrollo tecnológico de la cultura del hombre, que se vincula con su funcionamiento y utilización, por lo que es necesario entender sus características y propiedades que son organizadas, garantizando su utilidad en la sociedad.

En este sentido, Rabardel (1995) plantea un enfoque teórico donde se pretende mostrar la complejidad del instrumento, la génesis del instrumento en el sujeto enfatizando en la relación de este con la actividad humana, pues se plantea que los instrumentos por ser desarrollos de la historia social y cultural, presentan una fuerte influencia en el sujeto, por tanto, constituyen estructuras cognitivas que median la construcción del conocimiento.

Por lo tanto, la mediación instrumental se interesa en el análisis de las relaciones que surgen cuando se incorporan e integran instrumentos a las actividades de carácter educativo, dichas relaciones que influyen en la construcción del conocimiento particularmente del matemático, son representadas a partir del Sistema Didáctico que se entiende como el sistema de relaciones entre estudiante, profesor y saber que se dan en la actividad instrumentada.

El presente trabajo se interesa en el enfoque Antropocéntrico, pues es en este enfoque donde el sujeto juega un papel principal en la relación con los instrumentos, además no es ideal aprender sobre los instrumentos y sistemas de instrumentos desde el plano tecnológico que los han creado, sino que es necesario tener en cuenta los aspectos socioculturales en los que han sido concebidos, diseñados, modificados y abandonados, pues lo ideal es que estos instrumentos ayuden a resolver problemas y situaciones que se presentan en la vida del hombre.

Por otra parte en la actividad instrumentada es necesario conceptualizar las Génesis Instrumentales que realizan los estudiantes cuando interactuar con diferentes artefactos, pero; ¿Qué se entiende por artefacto? En la Génesis Instrumental el **Artefacto** es un término adoptado por Rabardel (1991) para definir los objetos materiales y simbólicos que están presentes en toda actividad humana.

Uno de los aspectos centrales en este referente es el paso del artefacto al instrumento y antes de hacer explícito este proceso, se requiere delimitar como se concibe el instrumento, definido por Rabardel (2007) de la siguiente manera: “Utilizaremos el término “**Instrumento**” (p.92), para designar el artefacto en situación, inscrito en un uso, en una relación instrumental con la acción del sujeto, como medio de esta acción”. En otras palabras el instrumento es concebido desde la actividad del sujeto.

De este modo Rabardel (1999) parte de considerar que los instrumentos no están dados, por esta razón el constructo de **Génesis Instrumental** se encarga básicamente del proceso de construcción de un instrumento por parte del sujeto a partir de un artefacto, es decir, el paso de artefacto a instrumento, en dicho proceso de construcción se deben de establecer y tener en cuenta unas condiciones que dependen o se determinan en la medida en que se articulan con los conocimientos del sujeto y que varían según la actividad, este proceso de construcción se desarrolla a partir de dos fases, una de ellas es la de **Instrumentalización**, ligada al artefacto, donde el sujeto conoce las potencialidades, atributos y características para construir nuevas funciones del artefacto dirigidas hacia usos específicos. Para el desarrollo de esta fase Largo et (2008) menciona que se deben contemplar las siguientes etapas:

Una etapa de descubrimiento y selección de los comandos pertinentes, una etapa de personalización (tomar el artefacto en la mano) y una etapa de transformación del artefacto (ej. Modificar la barra de menú); y es ese sentido, conducir a un enriquecimiento del artefacto o a un empobrecimiento del mismo. (p, 3).

La segunda fase es la de **Instrumentación** que está asociada al sujeto, consiste en la elaboración y evolución de Esquemas de uso.

Cabe resaltar que los instrumentos no son entes aislados, sino que constituyen un sistema de instrumentos, es decir, que dicho sistema es la unión intencional de instrumentos definidos en torno a una actividad. En la apropiación que realiza el sujeto de estos sistemas de instrumentos para la construcción del conocimiento, se desarrollan los **Esquemas de Uso (en adelante EU)** que permiten estructurar y regular la acción del sujeto y que se entienden como aquellas operaciones que se relacionan directamente con las diferentes situaciones que se dan en el desarrollo de la actividad con instrumentos, es decir durante la acción instrumentada del sujeto.

Los EU contempla una perspectiva individual y del mismo modo una perspectiva social o colectiva, que se conoce como **Esquemas Sociales de uso (ESU)**, es aquí donde el sujeto se relaciona con diferentes artefactos e interactúa con otros sujetos (estudiantes, profesor) dando paso a la difusión social de los EU, es decir, a las construcciones de las representaciones del instrumento que le permite elaborar estructuras o esquemas que organizan la acción del sujeto en distintas situaciones de la actividad con instrumentos y que pasa a ser objeto de enseñanza y aprendizaje en un contexto social.

Es precisamente en los aspectos sociales que emergen de la génesis instrumental, que se interesa Trouche (2002) para introducir y desarrollar la teoría de la OI, debido a que los instrumentos y los sistemas de instrumentos son concebidos teniendo en cuenta las sociedades o comunidades como el aula de clase, alrededor de una actividad en particular.

## 2.2.2. La Orquestación Instrumental

La teoría de la OI, permite la organización particular de la clase, en este caso una situación matemática que tiene como finalidad movilizar la noción de la transformación de rotación en el espacio, donde se integren sistemas de instrumentos que se organizan de acuerdo a la actividad que realiza el sujeto según el contexto y que en este caso deben estar articulados a la SD, lo que requiere una gestión didáctica a cargo del profesor, es decir, el profesor participa como orquestador de la clase logrando el equilibrio de estos sistemas de instrumentos, que contribuyan al logro de procesos de razonamientos en el estudiante. Desde la perspectiva de Trouche la OI contempla aspectos fundamentales que permiten caracterizar la actividad del sujeto en interacción con los instrumentos, tales aspectos son:

- Conjunto de individuos (caracterización de la población que participa en el desarrollo de la SD)
- Conjunto de objetivos (relacionados con los propósitos de la clase)
- Configuración didáctica (estructura general del dispositivo que previamente se ha diseñado para el estudiante)
- Modos de aprovechamiento de la configuración (relacionado con el logro de las expectativas a partir del diseño)

En otras palabras la OI además de mostrar la funcionalidad de los artefactos en la clase, funciona como un sistema de aprovechamiento didáctico que pretende orientar la actividad matemática a partir de la acción instrumentada que realiza el sujeto, lo que permite la toma de decisiones frente a los mejores artefactos a integrar a la clase que en funcionamiento paralelo con el medio logran una construcción significativa del conocimiento por parte del estudiante.

## 2.3. DIMENSIÓN DIDÁCTICA

### 2.3.1. La Teoría de Situaciones Didácticas

La TSD es el referente que guiará el diseño de la SD, esta teoría fue desarrollada por Guy Brousseau matemático francés que hizo parte de la llamada escuela didáctica francesa de las matemáticas, en la que se desarrollaron investigaciones enfocadas a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Según Acosta (2010), la TSD está concebida desde un enfoque constructivista y gira en torno a lo que Piaget llamó aprendizaje por adaptación, término que Brousseau adoptó en su teoría para señalar que el aprendizaje se produce en la interacción entre el sujeto y el medio en una situación diseñada con una intencionalidad de enseñanza.

Brousseau (2007) define la situación como un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado, en este sentido la SD es concebida como toda situación en la que hay una intención de enseñanza e intervienen tres elementos principales, el **profesor** que es quien tiene la intención de enseñar algo a alguien, un **saber** transpuesto que se pretende enseñar y los **estudiantes** que desea aprender ese saber, es decir, una situación de aula de clases en la que se producen relaciones

importantes entre las que se resalta el **Contrato Didáctico** que ha sido interpretado por García (2014) de la siguiente manera:

“Es un sistema de obligaciones recíprocas entre profesor y alumno referentes al conocimiento matemático que se busca enseñar. Comprende un conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y comportamientos que el alumno espera del profesor (Figura 1-8), que regula el funcionamiento de la clase definiendo los roles y la repartición de tarea” (p, 25)

Se entiende que entre el profesor y el alumno existe una relación en la que cada uno sabe cuál es su rol y asume sus responsabilidades, los acuerdos están implícitos en la actividad que cada uno ejecuta, según Montiel (2012), en una SD el docente tiene la responsabilidad de realizar las actividades de **Organización, Devolución e Institucionalización** con características especiales que tienen que ver con el contexto y el saber a enseñar, con el fin de generar en el estudiante las actividades de **Acción, Formulación y Validación** que dan paso a la construcción de conocimientos.

Por lo tanto uno de los conceptos importantes en esta teoría es el “medio” que es concebido y diseñado con la intención de enseñar un saber matemático determinado, con unas especificaciones particulares tanto para el profesor como para el estudiante, por lo tanto hace posible el surgimiento del contrato didáctico en una situación didáctica.

El concepto de aprendizaje por adaptación en la TSD permite la concepción de una Situación didáctica que en la interpretación de Acosta (2010) se entiende como la situación en la que el sujeto al interactuar con el medio construye su conocimiento haciendo uso de sus conocimientos previos y sin la intervención directa del docente, esta situación está incluida dentro de la SD. Perrin y

Glorian (2009) presentan el siguiente esquema en el que se relacionan la Situación Didáctica y la Situación a-didáctica, donde se integran los elementos principales que surgen en el sistema didáctico producto de las interacciones.

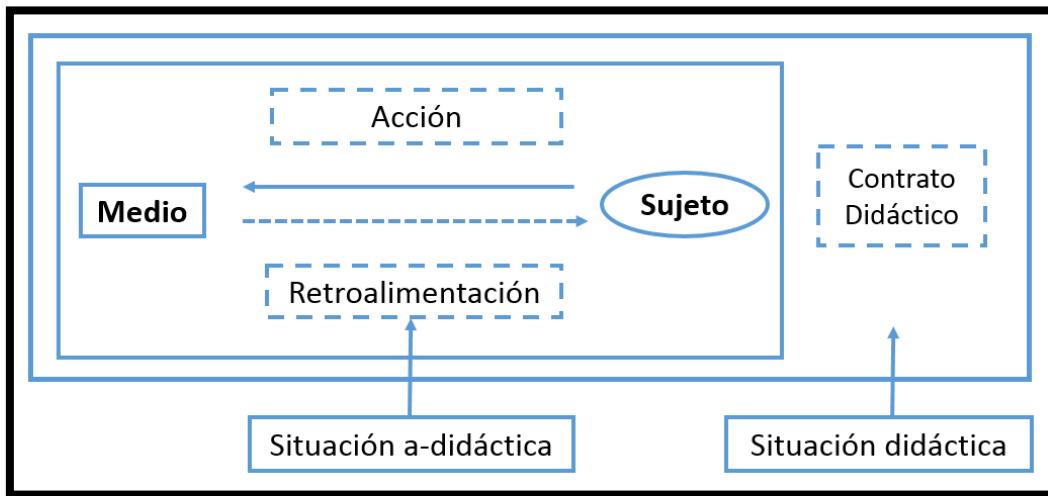


Imagen 12: Situación didáctica y situación a-didáctica (Perrin- Glorian, 2009)

En este sentido, la Situación a-didáctica permite que el estudiante asuma la responsabilidad de enfrentarse a un problema, este problema deberá ser planteado de tal forma que el estudiante en la interacción con el medio halle respuestas dando paso al aprendizaje por adaptación.

En la situación a-didáctica Brousseau (2007) identifica tres tipos de situaciones que surgen en dicha interacción; la situación de acción, situación de formulación y situación de validación.

Con respecto a la **Situación de Acción** Brousseau (2007) menciona:

“Para un sujeto “actuar” consiste en elegir directamente los estados del *medio* antagonista en función de sus propias motivaciones. Si el medio reacciona con cierta regularidad, el sujeto puede

llegar a relacionar algunas informaciones con sus decisiones (retroalimentación), a anticipar sus reacciones y a tenerlo en cuenta en sus propias acciones futuras”. (P, 24)

Por lo tanto la Situación de acción corresponde a la etapa inicial del aprendizaje por adaptación, en la cual el estudiante realiza determinada acción sobre el medio, este reacciona y le devuelve una retroacción que el estudiante interpreta para validar su acción, según Acosta (2010), cuando el estudiante cambia su acción o la refuerza se está dando un aprendizaje.

Por otra parte la **Situación de Formulación** es definida por Brousseau (2007) de la siguiente forma: “La formulación de un conocimiento corresponde a una capacidad del sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo, y reconstruirlo en un sistema lingüístico)” (p, 25). Es decir, que habrá un momento en que el estudiante deberá tener la habilidad de enunciar en un discurso, el conocimiento que adquirió en la interacción con el medio, en otras palabras, aquel conocimiento que ha adquirido el estudiante deberá ser representado mediante un discurso en un lenguaje natural. Por lo tanto la SD deberá propiciar momentos en los que el estudiante comparta sus conjeturas con sus pares.

Refiriéndose a **La Situación de Validación** Brousseau (2007), menciona:

“Los esquemas de la acción y la formulación conllevan procesos de corrección, ya sea empírica o apoyada en aspectos culturales, para asegurar la pertinencia, adecuación, adaptación o conveniencia de los conocimientos movilizados. Pero la modelización en términos de situación permite distinguir un nuevo tipo de formulación: el emisor ya no es un informante, sino un proponente, y el receptor, un oponente... Cooperan en la búsqueda de la verdad, es decir, en vincular de forma segura un conocimiento a un campo de saberes ya establecidos, pero se enfrentan cuando hay dudas”. (p, 26).

Como toda actividad matemática debe ser verificada, se deviene la necesidad de buscar la verdad de los razonamientos individuales mediante una discusión grupal en la que cada uno expone y justifica sus argumentos.

Estas tres situaciones hacen parte de la situación a - didáctica que surge en la interacción del estudiante con el medio. Ahora bien, como se ilustra en la imagen 12, la diferencia entre la situación didáctica y a- didáctica está constituida por el contrato didáctico y sus relaciones. En el caso de la situación didáctica el contrato didáctico tiene un papel preponderante, en donde uno de sus actores “El profesor” debe movilizar la situación de institucionalización que Rousseau describe de la siguiente manera:

“En primer lugar, esos hechos y luego los razonamientos – el hecho de asegurar la consistencia del conjunto de las modelizaciones eliminando las que son contradictorias exige un trabajo teórico, mostraron la necesidad de tener en cuenta fases de institucionalización que dieran a determinados conocimientos el estado cultural indispensable de saberes”. (p, 28).

En este sentido los conocimientos que han sido adquiridos mediante una situación a-didáctica son aprovechados por el docente para ser convertido en un saber. De esta forma, la TSD brinda elementos fundamentales que permiten estructurar el diseño de una SD en la que se pretende movilizar el concepto de rotación en el espacio en estudiante de grado noveno, identificando algunas unidades de análisis que permiten la caracterización de la SD.

En este apartado se integran algunos fundamentos teóricos que orientarán la concepción, diseño, realización, observación y análisis de la SD, que proporcionarán elementos fundamentales para

definir los criterios que caracterizarán dicha secuencia desde un enfoque instrumental, para la construcción cognitiva de la noción de rotación en el espacio.

## **2.4.REFERENTE CURRICULAR**

El diseño de la SD, consideró en un primer momento todos los referentes curriculares que permiten orientar una propuesta de manera objetiva, como lo son; los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje elaborados por el MEN. Esta lectura nos mostró la objetividad de la propuesta desde los planteamientos normativos que plantea el MEN.

### **2.4.1. Lineamientos Curriculares**

A partir de los lineamientos curriculares se consideran aspectos importantes como los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto, los cuales deben ser definidos y articulados en cualquier propuesta de intervención en el aula, dado que permiten el desarrollo de habilidades y conocimientos en matemática.

En este sentido la SD se ubica en un contexto de resolución de problemas a través de una situación matemática, apuntando al desarrollo del pensamiento espacial como conocimiento básico, en el que los procesos que se abordarán serán el razonamiento, la resolución de problemas y la comunicación, dado que la SD permite que el estudiante rzone a través de la resolución de problemas y aborde aspectos de comunicación.

Se presenta un diseño que permite al estudiante construir sus conocimientos desde un enfoque experimental, en el cual podrá conceptualizar una noción abstracta de la geometría como lo es la transformación de rotación en el espacio, de forma dinámica tal como se plantea desde el enfoque de la geometría activa que resalta la potencialidad de aprender mediante la manipulación de las representaciones de los objetos matemáticos.

#### **2.4.2. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas**

La estructura de la SD tiene en cuenta la coherencia vertical que se plantea en los estándares básicos de competencias en matemáticas, es decir, que el estudiante necesitará poner en juego aquellos conocimientos adquiridos en años anteriores, de esta forma se ha realizado una revisión en los estándares correspondientes al pensamiento espacial desde los primeros grados de la educación básica hasta el conjunto de grados octavo a noveno, como se observa en la siguiente tabla.

<b>PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS</b>	
<b>CONJUNTO DE GRADOS</b>	<b>ESTÁNDARES</b>
Primero a	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Diferencio atributos y propiedades de objetos tridimensionales.</li> <li>• Dibujo y describo cuerpos o figuras tridimensionales en distintas posiciones y tamaños.</li> </ul>
Tercero	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Represento el espacio circundante para establecer relaciones espaciales.</li> <li>• Reconozco y aplico traslaciones y giros sobre una figura.</li> <li>• Reconozco congruencia y semejanza entre figuras (ampliar, reducir).</li> </ul>
Cuarto a Quinto	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades.</li> <li>• Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.</li> <li>• Identifico, represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas.</li> <li>• Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras</li> <li>• Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.</li> </ul>

Tabla 1: Estándares de los grados Primero - Tercero

Desde el primer conjunto de grados se puede identificar que hay un trabajo inicial con respecto a la aplicación de transformaciones a figuras en el plano bidimensional, además se hace un

acercamiento al espacio mediante los objetos tridimensionales, identificando características y propiedades de los mismos.

<b>PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS</b>	
<b>CONJUNTO DE GRADOS</b>	<b>ESTÁNDAR</b>
Sexto Séptimo <b>a</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.</li> <li>• Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.</li> <li>• Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.</li> </ul>

Tabla 2: Estándares de los grados Sexto- Séptimo

Desde los estándares mencionados, se puede observar que hasta el conjunto de grados sexto a séptimo se ha dado continuidad en el trabajo con los objetos tridimensionales, que ha iniciado en grado primero y se continua abordado la noción de transformación desde un plano bidimensional, por lo que se espera que el estudiante tenga conocimiento de las variables didácticas que conciernen a la noción de rotación, tales como grados, sentido y centro de rotación en figuras

planas. En este sentido se piensa que el estudiante puede estar más familiarizado con el reconocimiento de los grados que van de 90 en 90 ( $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  y  $360^\circ$ ) ya que son los grados que más se trabajan cuando el contexto es en lápiz y papel.

Es posible también que para hablar del sentido de rotación haga relación con el sentido de las manecillas del reloj e identifique el centro de rotación como un punto en el plano que equidista con los puntos de la figura inicial y su imagen.

En el estándar; resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales, se evidencia que el estudiante ha tenido un acercamiento a situaciones en contexto de resolución de problemas en donde identifica la propiedad de congruencia en los objetos geométricos, por lo que se espera que logre enfrentarse a las distintas situaciones que se le plantean en el diseño.

Para finalizar se presentan los estándares encontrados en el conjunto de grados de octavo y noveno en relación con la noción de trasformación de rotación en el espacio.

<b>PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS</b>	
<b>CONJUNTO DE GRADOS</b>	<b>ESTÁNDARES</b>
<b>Octavo a Noveno</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.</li> <li>● Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.</li> </ul>

*Tabla 3: Estándares de los grados Octavo - Noveno*

En este análisis se ha podido evidenciar que los estudiantes en grado noveno ya poseen conocimientos con respecto a la noción matemática tomada en consideración. De este modo, el diseño tiene la intención de hacer que el estudiante active y articule los conocimientos previos respecto a los elementos conceptuales de la noción de rotación y las propiedades de los objetos tridimensionales cuando sufren una transformación en el espacio.

#### **2.4.3. Los Derechos Básicos de Aprendizaje**

Los Derechos Básicos de Aprendizaje han sido elaborados guardando concordancia con los Estándares Básicos y los Lineamientos Curriculares, además son considerados como una herramienta que se ha dirigido a la comunidad educativa para identificar los saberes básicos que los estudiantes deben adquirir en cada grado, por lo que se hizo una revisión en algunos ítems

relacionados con la noción y serán tenidos en cuenta para seguir la ruta de aprendizaje que se ha propuesto el MEN.

En la siguiente tabla se presentan los ítems relacionados;

<b>DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE (DBA)</b>	
<b>GRADO</b>	<b>ITEM</b>
<b>Sexto</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Construye moldes para cubos, cajas, prismas o pirámides dadas sus dimensiones y justifica cuando cierto molde no resulta en ningún objeto.</li> </ul>
<b>Séptimo</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Predice el resultado de rotar, reflejar, trasladar, ampliar o reducir una figura</li> </ul>
<b>Octavo</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utiliza transformaciones rígidas para justificar que dos figuras son congruentes.</li> </ul>

*Tabla 4: Derechos Básicos de Aprendizaje, grados Sexto - Séptimo - Octavo*

De este modo, se puede evidenciar que hay una estrecha relación entre los estándares planteados en los ciclos de escolaridad mencionados en apartados anteriores y los DBA. Este fue un insumo considerado para pensar en una SD, que diera cuenta de la transformación de rotación en el espacio, evidenciando a través de estos referentes, que el grado donde se podía contemplar tal secuencia era grado noveno.

## 2.5. POSIBLES ARTICULACIONES TEÓRICAS

En este sentido, es necesario que entre las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica, que estructuran este apartado, se establezca una articulación de la relación existente entre ellas, que apoyen de manera coherente el desarrollo de la caracterización.

La dimensión epistemológica contempla algunos hechos y personajes de diferentes épocas, que han hecho aportes desde perspectivas permeadas por contextos y culturas diferentes, que fueron importantes para la consolidación de la geometría, particularmente la geometría transformacional sufrió una ardua evolución que permitió la configuración formal que se conoce en la actualidad, se logró categorizar grupos de transformaciones como la transformación de rotación que se destaca para efectos del presente trabajo, lo cual permite identificar que los conocimientos matemáticos que se conocen actualmente son el resultado de una construcción constante.

Por lo tanto, la epistemología permite indagar acerca de aspectos relevantes del conocimiento matemático que han evolucionado a lo largo de la historia, entre ellos la construcción formal, la aplicabilidad en distintos campos de las ciencias y los métodos y estrategias para la enseñanza y aprendizaje.

Los lineamientos curriculares evidencian que la historia ha sido un referente importante para la concepción de los nuevos modelos didácticos, al respecto el MEN (1991) menciona:

El conocimiento de la historia proporciona además una visión dinámica de las matemáticas y permite apreciar cómo sus desarrollos han estado relacionados con las circunstancias sociales y

culturales e interconectados con los avances de otras disciplinas, lo que trae consigo importantes implicaciones didácticas: posibilidad de conjeturar acerca de desarrollos futuros, reflexión sobre limitaciones y alcances en el pasado, apreciación de las dificultades para la construcción de nuevo conocimiento.(p,15)

En este sentido, la reforma educativa contempla que para la enseñanza y aprendizaje de la geometría se deben construir e implementar estrategias didácticas, desde una perspectiva constructivista que concede al sujeto una participación activa que le permite la construcción de conocimientos significativos. Una concepción importante es la geometría activa que admite la implementación de instrumentos en las aulas de clases, lo que permite crear escenarios donde el estudiante pueda manipular las representaciones de los objetos matemáticos logrando una experimentación diferente a la que se logra con el trabajo en lápiz y papel. La implementación de este tipo de escenarios favorece la construcción de conocimiento en un contexto social, mediante la interacción con distintos instrumentos que desde la dimensión cognitiva se sustenta a partir de las Génesis Instrumentales que propone Rabardel, quien plantea que la Mediación Instrumental, vista desde un enfoque antropocéntrico, permite génesis artificiales de conocimiento en el estudiante. Trouche aceptando el planteamiento de Rabardel menciona que los instrumentos por sí solos no generan conocimiento, por lo tanto propone la OI que hace parte de la dimensión cognitiva.

Desde la perspectiva de la OI el estudiante realiza actividades que involucran EU, lo cual requiere de una organización particular de la clase, donde se integren sistemas de instrumentos que se organizan de acuerdo a la actividad del sujeto y que en este caso debe estar ligada a la SD, lo que quiere decir que el profesor como orquestador de la clase debe prever cuales son los instrumentos que integrará a la clase, las posibles acciones del estudiante, el espacio adecuado para el desarrollo

de las actividades y demás aspectos relevantes para que se produzca de forma adecuada la mediación instrumental, en este sentido la OI permite la articulación de la concepción, diseño, realización, observación y análisis de la SD desde un enfoque instrumental.

Para lograr una buena gestión de los sistemas de instrumentos, por parte del profesor, es necesario considerar la planeación y diseño del dispositivo experimental, es decir, de la SD. En este caso el diseño de la SD se sustenta a partir de la TSD, teoría que se enfoca en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que en la interacción con un medio, propone al estudiante diferentes situaciones como acción, formulación y validación

Para que el diseño de la SD sea objetivo, como soporte legal, se consideran los referentes curriculares propuestos por el MEN, en los que se establecen los conocimientos básicos que deben adquirir los estudiantes colombianos, en su proceso escolar.

## CAPÍTULO III

En este capítulo se desarrolla la metodología del trabajo, la cual se centra en la Micro-Ingeniería didáctica que se desarrolla a partir de cuatro fases: Análisis Preliminares; Concepción y análisis a priori; Experimentación; Análisis a posteriori.

### 3. METODOLOGÍA

Para el presente trabajo se ha tomado como referente metodológico la Ingeniería Didáctica que desde la perspectiva de Artigue (1995), se fundamenta de acuerdo a dos características, la primera consiste en un enfoque experimental desarrollado desde la concepción, diseño, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza, lo que se conoce como realizaciones didácticas.

En este enfoque se reconocen dos niveles de ingeniería, el primero es la Macro-Ingeniería que aunque es muy importante, tiene una complejidad metodológica debido a que el desarrollo de los trabajos que se abordan desde este nivel, se realizan teniendo en cuenta investigaciones de Micro-Ingeniería, que permite unir la complejidad esencial de los fenómenos asociados a las relaciones entre enseñanza y aprendizaje, lo cual no se da en el segundo nivel, conocido como Micro-Ingeniería, debido a que solo se tiene en cuenta la complejidad de los fenómenos de la clase de manera local, por lo tanto se centrará la atención en este último nivel, ya que para lograr los objetivos propuestos en este proyecto, se realizará el estudio de una noción específica de las matemáticas a partir de la complejidad de los fenómenos en el aula.

La segunda característica de esta metodología consiste en la validación interna de los resultados, dicha validación se da al contrastar los análisis a priori y a posteriori. Además el registro en el cual se ubica es un estudio de casos.

El proceso experimental de la Ingeniería Didáctica se estructura mediante cuatro fases:

### **Fase 1: Análisis Preliminares**

En esta primera fase se tendrán en cuenta las siguientes dimensiones.

- *Dimensión Epistemológica:* vinculado a la noción matemática que se pretende que el estudiante conciba desde las matemáticas experimentales, en este caso la noción de rotación en el espacio desde un AGD
- *Dimensión Cognitiva:* asociado a las potencialidades de desarrollar actividades integrando instrumentos en la clase, en este caso Geogebra 3D como instrumento principal y actividades con los Esquemas sociales de uso que pueden ser individuales o colectivos desde la transformación de rotación en el espacio, para lo que es indispensable la OI y gestión didáctica de sistemas de instrumentos, es decir, el profesor es el gestor de dichos sistemas que se proponen en la clase y se articula con una intención alrededor de una actividad específica.
- *Dimensión Didáctica:* ligada a la TSD que sustenta el diseño de la SD, ya que propone al estudiante diferentes situaciones como: acción, formulación, y validación a partir de la

interacción con el medio. Teniendo como soporte legal los referentes curriculares propuestos por el MEN.

### **Fase 2: Concepción y análisis a priori**

Se concebirá el diseño de la SD fundamentada en la teoría de la OI la cual permite articular la concepción, diseño, realización, observación y análisis concebido desde una mirada instrumental para la movilización de la noción de la transformación de rotación en el espacio, ligada a la TSD que estructura el diseño. Además se tendrán en cuenta referentes teóricos como los lineamientos curriculares y estándares básicos de competencias en matemática, que proporcionan elementos importantes para analizar los conocimientos previos, las estructuras de aprehensión de los conocimientos y competencias matemáticas en el estudiante, además de las posibles acciones que el estudiante llevará a cabo.

### **Fase 3: Experimentación**

En esta fase se pone en acto la SD identificando todos aquellos elementos relevantes, tales como las características del grupo experimental, los artefactos necesarios para el desarrollo de la secuencia, la observación y toma de evidencia de las actuaciones tanto del estudiante como del profesor durante la clase.

**Fase 4: Análisis a posteriori**

En el análisis a posteriori se organizan los datos recogidos a lo largo de la experimentación, identificando los fenómenos relevantes de la SD, y las producciones de los estudiantes en la clase relacionados con la noción de rotación en el espacio, posteriormente se hará una confrontación con el análisis a priori para determinar los aciertos y desaciertos de las hipótesis planteadas inicialmente, dando paso a las conclusiones.

## CAPÍTULO IV

### 4. ANÁLISIS A PRIORI: Diseño y Planificación de la Secuencia Didáctica

En este capítulo se desarrolla el análisis a priori que es la segunda fase que propone la metodología del trabajo, en este apartado se da cuenta de la concepción del diseño y la planificación de la SD a partir de los cuatro componentes que propone la teoría de la OI, los cuales son: Conjunto de Objetivos, Conjunto de Individuos, Configuración Didáctica, Conjunto de Explotación de la Configuración. A partir de estos componentes se hacen una serie de supuestos de lo que va a suceder en la realización de la SD.

#### 4.1. DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

Para dar cuenta del diseño y la planificación de la SD, se tomaron en consideración cuatro componentes de la OI que darán cuenta de las acciones instrumentadas y de la noción de transformación de rotación en el espacio, estos son:

##### **4.1.1. Conjunto de Objetivos (Relacionados con el comportamiento del tipo de tareas o el acomodamiento de un trabajo- en el ambiente)**

###### **Objetivo general:**

Explorar las propiedades y características de la transformación de rotación en el espacio, a través del desarrollo de tres situaciones didácticas que integran el uso de AGD.

- **Objetivo de la situación 1.**

Identificar en una trayectoria el sentido y el ángulo de giro de una figura cuando se desplaza en el espacio.

- **Objetivo de la situación 2.**

Identificar y describir el eje de giro de cada ficha teniendo en cuenta los ejes de referencia X, Y, Z y reconocer los diferentes giros que puede realizar un sólido según los ejes.

- **Objetivo de la situación 3.**

Reconocer los elementos constitutivos de la transformación de rotación en el espacio, como el sentido, ángulo y eje de rotación y determine las propiedades de dicha transformación.

#### **4.1.2. Conjunto de Individuos (Aquellos que participan en el desarrollo de la SD)**

El grupo experimental está constituido por el profesor que será la persona encargada de acompañar y orientar la clase y un grupo de estudiantes que se encuentren cursando el grado noveno de educación básica.

#### **4.1.3. Configuración Didáctica (Estructura general o plan de acción)**

La TSD permite estructurar el diseño de la SD, en este sentido se dará cuenta de una situación didáctica la cual es entendida, desde la perspectiva de Rousseau, como una situación que está

constituida con la intención de que el estudiante aprenda un saber y está contemplada en las siguientes situaciones:

- **Situación de acción:** El estudiante interactúa con el medio, el cual le genera retroacciones que le proporciona información, es decir, que mediante la exploración que el estudiante hace, pueden surgir aciertos y desaciertos de sus acciones, las cuales serán interpretadas y validadas por él, lo que le aportara para tomar decisiones futuras.
- **Situación de formulación:** una vez el estudiante haya interactuado con el medio e identifique las regularidades, estará en capacidad de intercambiar informaciones con uno o varios de sus compañeros, en este caso las informaciones pueden o no ser contradictorias.
- **Momento de la situación de validación:** En este momento el estudiante justifica el uso del modelo que utilizó en la situación, verificando si sus razonamientos han sido suficientes para dar respuesta al problema que se le ha planteado.
- **Momento de la situación de institucionalización,** En esta situación el profesor interviene directamente retomando los argumentos construidos por los estudiantes en cada situación propuesta anteriormente, con el propósito de una institucionalización de los conocimientos que surgieron como respuesta al medio.

#### **4.1.4. Conjunto de Explotación de la Configuración.**

Para la explotación de la configuración didáctica se tiene en cuenta la noción de variables didácticas como elemento de la situación que pueden ser modificados por el profesor y que afecta las estrategias de solución por parte de los estudiantes, las variables particulares a la situación en el presente caso son los elementos conceptuales de la noción de transformación de rotación en el espacio, es decir, sentido, eje y grados.

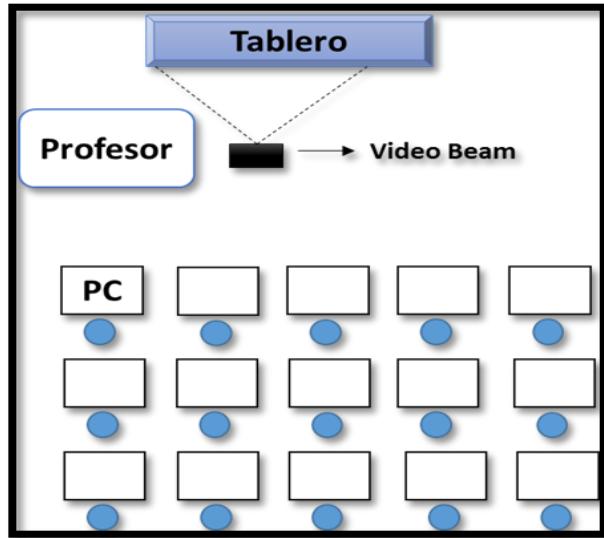
Por tanto la modificación de las variables didácticas permite generar, a partir de una situación, un campo de problemas a los que corresponden diferentes estrategias de solución. En este sentido se integrarán a la clase algunos artefactos como:

- Hardware: computadores personales, video beam,
- Software: el diseño de la SD con el AGD Geogebra 3D.

La explotación de la configuración debe estar enfocada a permitir la integración entre hardware y software para dar paso a la mediación de los instrumentos entre el estudiante y el saber que se desea que conciba.

##### **4.1.4.1. Organización particular de la clase**

A continuación se presenta el esquema que se ha pensado para la organización particular que deberá tener el aula de clase en el desarrollo de la SD.



*Imagen 13: Organización de la clase para el desarrollo de la SD*

Los artefactos necesarios para el desarrollo de la SD son:

- 3 Applets que son diseñados en el software Geogebra 3D, dicho software debe estar instalado en cada uno de los computadores, por lo que previamente se realizará la instalación. Los computadores estarán organizados de manera estratégica al igual que el video beam para lograr una buena configuración de la clase, como se muestra en el esquema de la imagen 13.
- Video beam, es un artefacto que utilizará el profesor para hacer el acompañamiento a los estudiantes, permitiéndole guiar los distintos momentos de la clase.
- Material impreso en el que se le presentaran los enunciados de la situación al estudiante y en el que podrá escribir sus respuestas.

Un aspecto importante para el desarrollo de la SD, es la manipulación de las figuras mediante el arrastre, lo cual permite identificar las características y propiedades invariantes que hacen posible la aprehensión conceptual del objeto matemático, en este sentido se ha tenido en cuenta un ítem de la clasificación general que Olivero (2003) ha propuesto con respecto a las funciones de arrastre, entre los cuales se encuentra, el arrastre como retroalimentación de las acciones que realiza el usuario, permitiéndole tener el control sobre la construcción.

El estudiante a través del arrastre recibe retroacciones del medio, en las que recoge información de sus acciones. El arrastre se complementa de la visualización permitiéndole al estudiante verificar si las acciones que ejecuta sobre el diseño, mediante el arrastre de las fichas, son coherentes o no.

De este modo, autores como; Arzarello, Olivero, Paola y Robutti (2002) han realizado un análisis sobre las modalidades cognitivas del arrastre, clasificándolas en siete tipos, de los cuales para efectos de este trabajo serán contemplados dos, estos son;

- Arrastre Errante: Mover los puntos básicos en la pantalla de manera aleatoria, sin un plan, a fin de descubrir configuraciones o regularidades interesantes.
- Arrastre de Lieu Muet: Mover un punto básico, de tal manera que la figura mantenga una propiedad descubierta; esto significa que sigue una trayectoria oculta (Lieu Muet), incluso sin ser consciente de esto.

De estos tipos de arrastre se hablará en los próximos apartados, dando cuenta de ellos en los diferentes momentos que contempla la SD.

#### **4.1.4.2. Análisis a-priori de las situaciones.**

El análisis a priori de las situaciones se construye creando una serie de anticipaciones de lo que se especula puede suceder en la realización de la SD, dicha secuencia está constituida por tres situaciones, en las que se contemplan las fases de acción, formulación y validación. Cada situación está conformada por un Applet que ha sido diseñado en el AGD Geogebra 3D y una serie de consignas que se entregarán al estudiante en material impreso.

En la SD se ha integrado un juego que ha sido llamado “Juguemos a encontrar la clave” dicho juego se evidencia de forma secuencial en los tres Applets. En la parte izquierda de Cada Applet se aprecia la vista gráfica 2D, en la cual se ha diseñado la guía que permite seguir el paso a paso del juego que tiene como propósito hacer parte del proceso de validación de las situaciones. El juego contempla una serie de retroalimentaciones que se interpretaran como acciones validas o invalidas, permitiéndole la significación de los elementos conceptuales correspondientes a la transformación de rotación. En este sentido, al finalizar cada situación el estudiante debe escribir la clave que ha encontrado en una casilla que dará el calificativo “**X**” si es incorrecta y “**✓**” si es correcto (imagen 14), dichos calificativos son retroacciones que proporciona el medio y que implícitamente pone al estudiante en una situación de validación de los conocimientos. Otro aspecto importante inmerso en el juego es que el estudiante lo asuma como un desafío personal que le permita desarrollar las situaciones con mayor interés.



Imagen 14: Casilla con el calificativo correcto e incorrecto

Cada Applet cuenta también con una vista grafica 3D que se encuentra en la parte derecha de la pantalla, en donde el estudiante va a explorar sobre las construcciones propuestas. Esta vista cuenta con la opción de rotación de la vista, que se puede realizar con clic derecho sostenido, lo que permite visualizar un objeto en el espacio desde diferentes vistas, en Geogebra 3D se denominan vista de alzado, vista planta, vista lateral derecha, vista lateral izquierda, vista inferior, vista posterior, como se evidencia en la imagen 15.

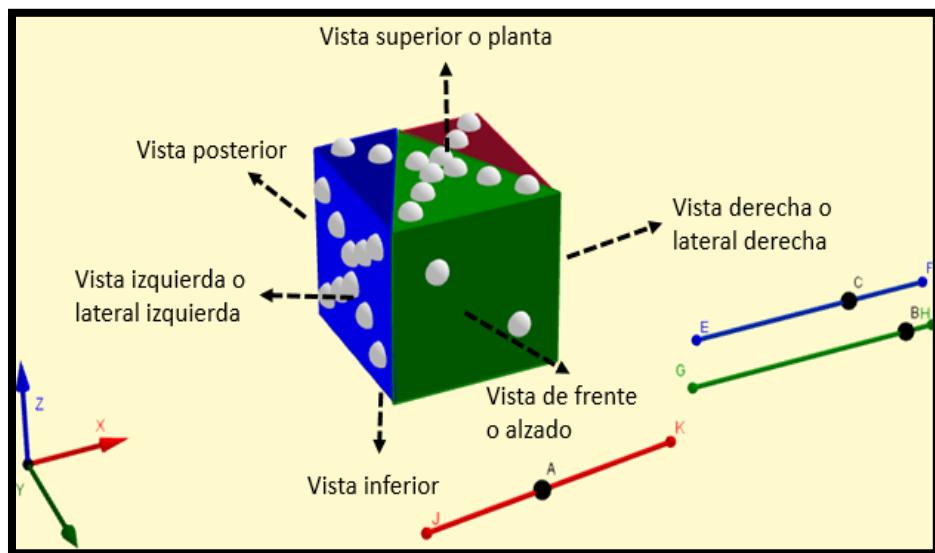


Imagen 15: Vistas de un objeto en el espacio

A continuación se hará una descripción puntual de la secuencia, en el orden que será presentada a los estudiantes.

#### 4.1.4.3. Descripción de la situación # 1

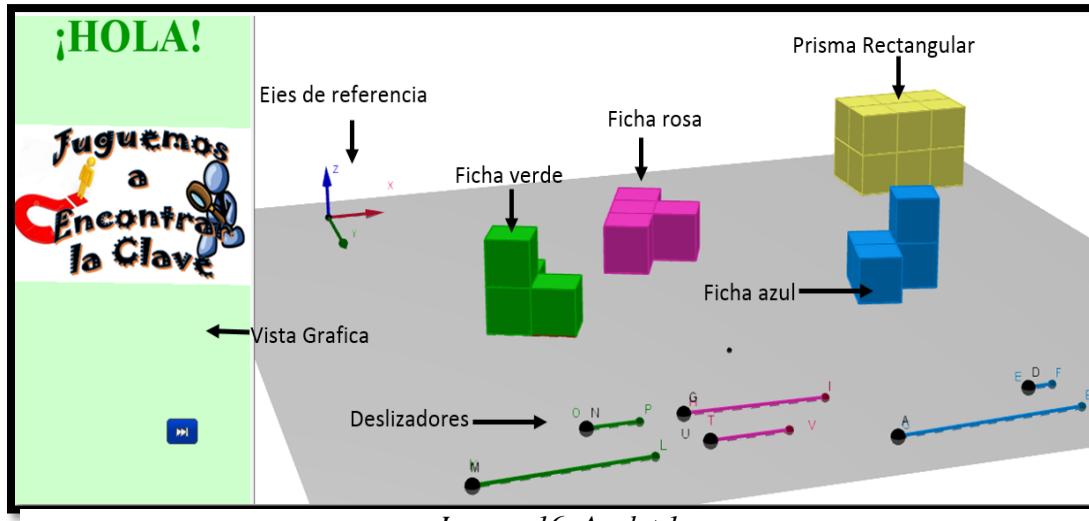


Imagen 16: Applet 1

El propósito de la situación 1 es activar los conocimientos matemáticos previos que posee el estudiante, que mediante el arrastre y la visualización le permitirán identificar el tipo de movimiento que realizan las fichas, es decir rotaciones, reconociendo elementos conceptuales como el sentido y grados de rotación. Lo que se hará evidente cuando el estudiante arrastre las fichas haciendo uso de los deslizadores que se le indican.

## Applet #1

En el Applet # 1 el juego ha sido titulado “Clave con grados”, el reto que se le propone al estudiante es usar las fichas de color verde, azul y rosa para armar una figura que es congruente con un prisma rectangular amarillo que se le presenta en la vista posterior del Applet (Ver imagen 16).

Para abordar la situación el estudiante deberá seguir las instrucciones que se le dan en la vista gráfica, es decir, que primero debe explorar el Applet, luego desarrollar las consignas que correspondiente al Applet y posteriormente descifrar la clave que se le pide en el juego.

La clave a descifrar, consiste en determinar los grados de rotación de cada ficha en forma ascendente cuando se mueven los deslizadores N, U y D, es decir  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  y  $270^\circ$  grados, lo que el medio aprobará si es correcto con “ $\checkmark$ ” o por el contrario rechazará con una “ $\times$ ” si es incorrecto.(ver imagen 14).

De esta manera, el medio le proporciona retroacciones al estudiante que le permitirán verificar si los grados de rotación que identificó en los movimientos de cada ficha son correctos, e implícitamente validará las hipótesis que se han formulado en el desarrollo de las consignas, respecto a los grados de rotación de las fichas. En este sentido el juego “Clave con grados”, se emplea como una estrategia de retroalimentación para generar procesos de razonamiento que ayudaran al estudiante a recordar sus conocimientos previos con respecto a la noción matemática concebida en el diseño de la SD, lo cual está enmarcado dentro del propósitos de esta situación,

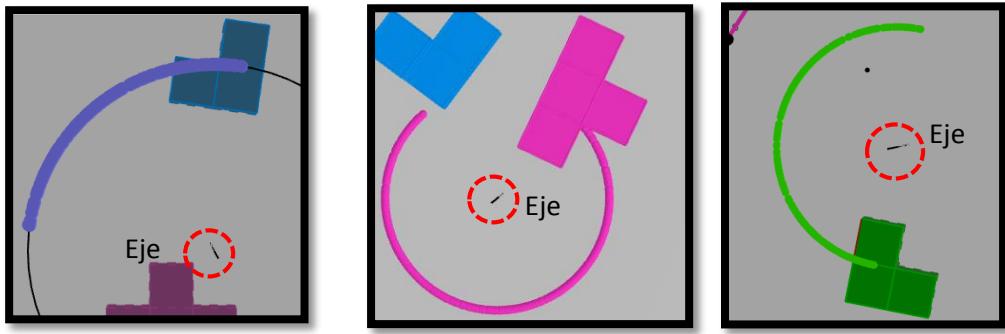
que intenta que el estudiante logre identificar en una trayectoria el sentido y el ángulo de giro de una figura cuando se desplaza en el espacio.

Por otra parte, la vista grafica 3D del Applet está constituida por un prisma rectangular (solido amarillo), tres fichas que son conocidas como Policubos (son cuerpos geométricos formados por cubos de igual tamaño pegados por las caras) y seis deslizadores N, M, U, G, D y A, que al manipularse, someten al arrastre cada una de las fichas, permitiendo el control de los movimientos de cada una, dichos movimientos son rotaciones (ver imagen 16).

A cada ficha le corresponden dos deslizadores que permiten ejecutar dos movimientos de rotación, el color de los deslizadores corresponde al color de la ficha que controlan sus movimientos.

Se espera que el estudiante, en un primer momento realice un proceso de exploración mediante el arrastre de las fichas haciendo uso de los deslizadores, estas acciones conseguirán que el medio le devuelva retroacciones, que le proporcionaran información acerca de la pertinencia de sus acciones, proceso en el que se evidencia la modalidad cognitiva del arrastre conocida como Arrastre errante.

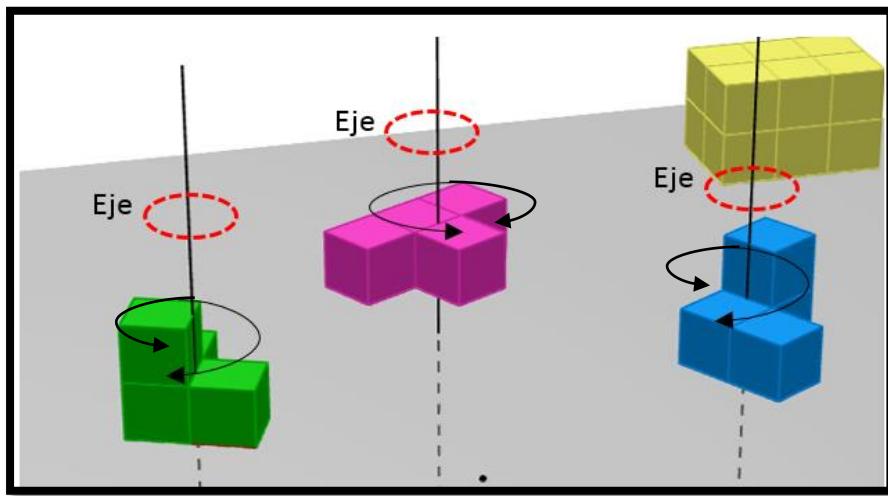
Los deslizadores N, U y D controlan el movimiento de rotación de las fichas verde, rosa y azul respectivamente alrededor de un eje, es decir, que el eje de rotación es externo a las fichas (ver imagen 17).



*Imagen 17: Fichas con la trayectoria que recorren alrededor del eje*

Estos tres deslizadores permiten que cada ficha sea arrastrada con ángulos de rotación de  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  y  $270^\circ$  respectivamente, se espera que el estudiante esté familiarizado con ellos y le sea posible identificarlos visualmente cuando esté realizando la exploración.

Los deslizadores M, G y A también controlan movimientos de rotación de las fichas verde, rosa y azul respectivamente, con la diferencia que el movimiento ya no se realiza alrededor de un eje externo a ella, sino sobre un eje que se encuentra al interior de la ficha (ver imagen 18). Las dos rotaciones que realiza cada ficha son respecto al eje Z.



*Imagen 18: Rotación de las fichas sobre el eje ubicado en un punto de la ficha*

Se espera que después de su primera exploración, el estudiante haya interpretado la información que le han generado las retroacciones del medio y al tratar de formar la figura que se le ha pedido, controle los movimientos de las fichas que son trayectorias ocultas que previamente han sido consideradas en el diseño, donde se evidencia la modalidad cognitiva de arrastre Lieu Muet, que le permite determinar si sus acciones son o no las correctas.

### **Consignas de la situación #1**

Las consignas de la situación serán presentadas al estudiante en material impreso, estas consignas serán analizadas a continuación.

En la parte inferior de la hoja impresa que contiene estas consignas, se encuentra una casilla, donde el estudiante deberá registrar la clave que ha ingresado en el Applet, la casilla está acompañada de un discurso que involucra el juego, en el que se menciona que el estudiante ha ganado dos puntos, por realizar bien la actividad.

1. Describe qué movimientos realizan las fichas cuando son arrastradas por los deslizadores para armar la figura dada.
- 

2. ¿Cuántos grados se desplazan las fichas correspondientes a los deslizadores N, U y D?
- 

3. ¿Cómo es el movimiento que realiza cada una de las fichas?:

-Cuando arrastras el deslizador A desde C hasta B. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ Y cuando arrastras el deslizador A desde B hasta C. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ Compara estos movimientos y determina sus diferencias, si las hay \_\_\_\_\_

-Cuando arrastras el deslizador U desde T hasta V. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ Y Cuando arrastras el deslizador M desde K hasta L. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ Compara estos movimientos y determina sus diferencias, si las hay \_\_\_\_\_

Si la clave que ingresaste en el Applet es correcta, escríbela en la siguiente casilla.

Clave

¡Si lograste terminar esta situación has ganado **2 puntos!**

*Imagen 19: Consignas de la situación 1*

### Descripción de las consignas

#### Situación de acción

1. Describe qué movimientos realizan las fichas cuando son arrastradas por los deslizadores para armar la figura.

Con esta consigna se espera que el estudiante traiga a colación los conocimientos previos y conjeture que los movimientos que realiza cada ficha son rotaciones, pues dicha consigna está ligada a lo que se propone en el juego, ya que se está dando una instrucción al estudiante para que realice una acción exploratoria sobre el medio a través del arrastre Errante, que le permitan identificar algunas regularidades. En un primer momento el estudiante habrá construido la figura propuesta mediante el arrastre de las fichas con los deslizadores correspondientes, a estas acciones el medio le proporcionará algunas retroacciones que al interpretarlas, le brindarán información que le permita identificar cual es el tipo de movimiento que realiza cada ficha al ser sometida al arrastre.

### **Situación de Formulación**

#### **2. ¿Cuántos grados se desplazan las fichas correspondientes a los deslizadores N, U y D?**

Después de realizar la exploración sobre el Applet, la pregunta 2 llevará al estudiante a elaborar formulaciones acerca de la amplitud de los grados correspondientes a la rotación que realiza cada ficha, en este sentido la pregunta se ubica en una fase de formulación en la que se espera que el estudiante al arrastrar las fichas con los deslizadores N, U y D, realice un proceso de visualización que le permita identificar que dichos deslizadores fueron diseñados para dirigir la trayectoria de las fichas con ángulos de rotación de 90°, 180° y 270° grados respectivamente, pues desde lo que se consideró en los Estándares Básicos de Competencias en matemática, se espera que el estudiante previamente haya realizado un trabajo respecto a este tipo de grados, lo que le permitirá identificar y enunciar los grados de rotación de cada figura.

Se espera que el estudiante conjeture que el deslizador N controla el movimiento de la ficha verde y le permite girar  $180^\circ$ , el deslizador U controla en movimiento de la ficha rosa y le permite girar  $270^\circ$  y el deslizador D controla en movimiento de la ficha azul y le permite girar  $90^\circ$ .

**3. ¿Cómo es el movimiento que realiza cada una de las fichas:**

- Cuando mueves el deslizador A desde C hasta B y cuando mueves el deslizador A desde B hasta C? Compara estos movimientos y determina sus diferencias, si las hay.**
- Cuando mueves el deslizador U desde T hasta V y Cuando mueves el deslizador M desde K hasta L? Compara estos movimientos y determina sus diferencias, si las hay.**

La pregunta tres también está enmarcada en una situación de formulación, dado que la fase de acción permitirá al estudiante formular conjeturas acerca del sentido de rotación de cada una de las fichas.

En la primera parte de la pregunta se espera que el estudiante al accionar sobre el deslizador A, realice un proceso de visualización sobre la ficha que corresponde a este deslizador, comparando como es el movimiento cuando el deslizador A arrastra la ficha desde el punto C hasta el punto B y luego desde el punto B hasta el punto C, para que logre conjeturar que la diferencia en estos movimientos es el sentido de giro, es decir, cuando A se mueve desde C hasta B el sentido es positivo, y cuando A se mueve desde B hasta C el sentido es negativo. En la segunda parte de esta misma pregunta, se espera que el estudiante conjeture acerca de la diferencia entre el movimiento de rotación que realiza la ficha correspondiente al deslizador U cuando se arrastra desde T hasta V y la ficha que corresponde al deslizador M cuando se arrastra desde K hasta L, que también está

enfocado a identificar el sentido de rotación, dado que el deslizador U cuando se arrastra desde T hasta V controla el movimiento de rotación de la ficha rosa en sentido negativo y el deslizador M cuando se arrastra desde K hasta L controla el movimiento rotación de la ficha verde en sentido positivo.

Es importante mencionar que el deslizador U, en comparación con los deslizadores A y M realiza una rotación alrededor del eje, con lo que el estudiante debe conceptualizar que todas las rotaciones que se realicen a cualquier figura en el espacio estarán asociadas a un sentido de rotación.

Se espera, que si el estudiante ha concebido un conocimiento en la interacción con el medio, esté en capacidad de expresarlo a sus compañeros, por lo tanto el profesor propiciará un momento de interacción entre pares, donde los estudiantes compartan información con uno o varios de sus compañeros, usando un lenguaje matemático o al menos acercándose a él, es decir, que deberá hacer cambios en su discurso. En esta interacción la información puede ser contradictoria o no, lo que quiere decir que se estará favoreciendo de manera acertada una situación de formulación, en la que además el profesor podrá intervenir a través de devoluciones.

#### 4.1.4.4. Descripción de la situación # 2

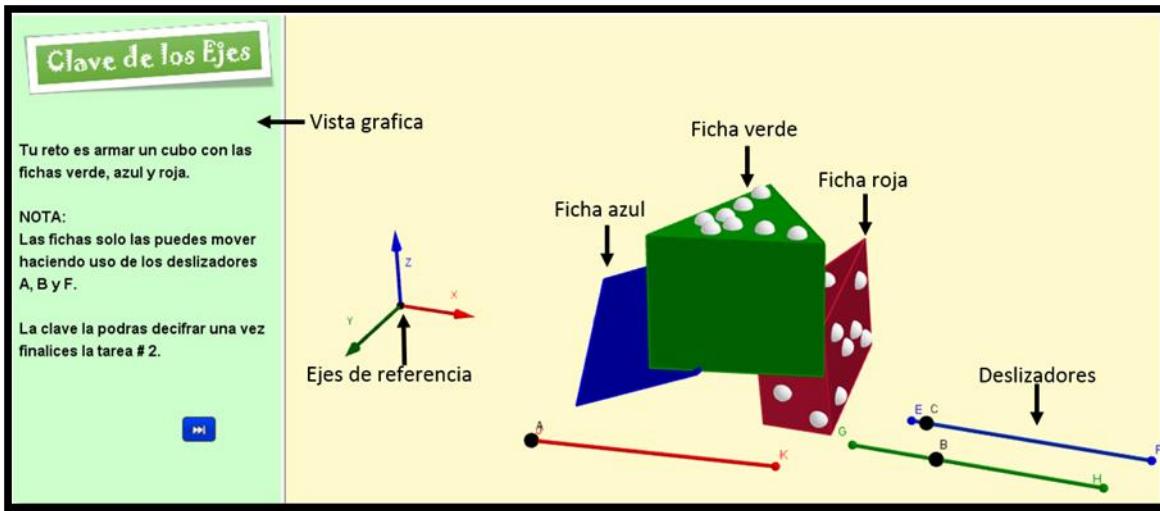


Imagen 20: Applet 2

El propósito de esta situación es lograr que el estudiante identifique, que a diferencia de la rotación en el plano, los ejes (X, Y, Z) son un elemento conceptual fundamental en el movimiento de rotación de un objeto en el espacio, es decir que ya no se habla de un punto de rotación sino de un eje de rotación.

Que reconozca también los diferentes giros que pueden realizar los sólidos según el eje que determine el movimiento, mediante procesos de visualización que surgen en la interacción con el medio. Esta situación da cuenta de las fases de acción y de formulación, dado que el estudiante deberá accionar sobre el medio y elaborar conjeturas a partir de las retroacciones que le ofrece el medio.

## Applet #2

En la vista gráfica 2D del applet, el estudiante encontrará la segunda parte del juego, que en esta parte ha sido titulado “La Clave de los Ejes”.

En el juego se encuentra el reto que se propone, el cual consiste en armar un cubo usando las fichas roja, verde, y azul. Después de armar el cubo y realizar la exploración que le permite desarrollar la tarea 2, el estudiante debe descifrar la clave que consiste en identificar el eje de rotación de cada una de las fichas y organizarlos en un orden, primero el eje de la ficha verde, luego el eje de la ficha roja y por último el de la ficha azul.

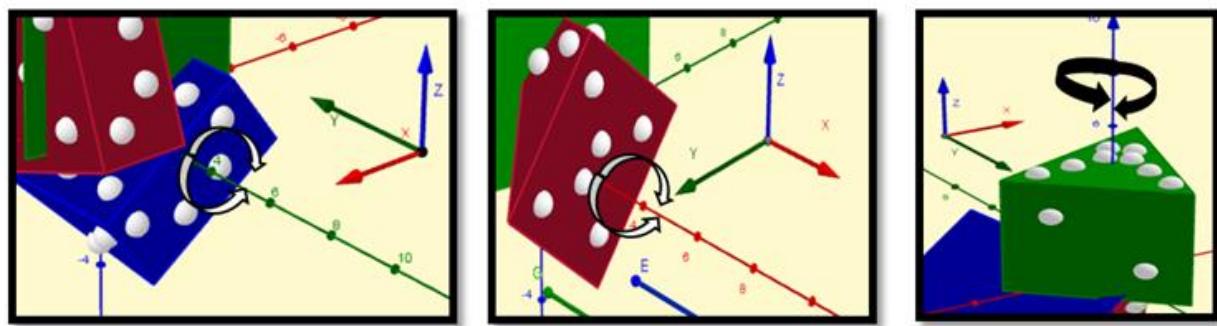
El juego propuesto está ligado al objetivo de la situación, dado que el medio genera retroacciones, con las cuales se espera que el estudiante conciba que los ejes de rotación son otro elemento necesario de la transformación de rotación en el espacio, lo que podrá determinar mediante la situación de acción que favorece el enunciado del juego.

Con la casilla de entrada el estudiante podrá validar las conjeturas que se han formulado acerca de los ejes de referencia X, Y, Z, en relación con las rotaciones que realizan las fichas.

La vista grafica 3D de este Applet, está constituida por tres fichas de color rojo, verde, y azul con las que se debe forman un cubo y tres deslizadores A, B y C que coinciden con el color de la ficha que controla su movimiento. La exploración en el Applet debe permitir al estudiante visualizar

regularidades que le permitan identificar los ejes de referencia X, Y, Z que son indispensables para el desarrollo de las consignas que presenta esta situación.

Los movimientos que realizan las fichas al ser sometidas al arrastre, son rotaciones controladas por los deslizadores. Particularmente el deslizador A controla el movimiento de rotación de la ficha roja, alrededor del eje X, el deslizador B controla el movimiento de rotación de la ficha verde, alrededor del eje Z y el deslizador C controla el movimiento de rotación de la ficha azul, alrededor del eje Y (ver imagen 21).



*Imagen 21. Fichas con su respectivo eje de rotación.*

Se espera, que el medio genere retroacciones que le permitan al estudiante armar el cubo correctamente, es decir, sin dejar espacios entre las fichas. Dichas retroacciones le proporcionan información al estudiante que le permitirán verificar sus acciones y tomar decisiones acerca de la de las estrategias utilizadas, ya sea que las afiance o las replanteé.

En este Applet, la acción que realice el estudiante sobre el medio es indispensable para llevar a cabo procesos de razonamiento que permitirán la construcción de conocimientos, debido a que uno de los elementos necesarios para realizar una rotación en el plano es el centro de rotación que es

tomado como un punto, este centro de rotación en el sistema espacial se conoce como eje de rotación, lo cual es nuevo para el estudiante, debido a que su conocimiento ha sido construido en el plano.

El tiempo que se estima para el desarrollo de esta situación es de 45 minutos.

### **Consignas de la situación #2**

Las consignas de esta situación también serán presentada al estudiante en forma impresa, están constituida por 3 preguntas que van del punto 4 al 6. Dando continuación al juego propuesto, en la parte inferior de la hoja se ha ubicado la casilla donde el estudiante debe ingresar la clave correspondiente al reto de la situación 2, que está relacionado con los ejes de rotación.

4. Ubica la vista frente a la cara de la ficha roja que tienen 6 puntos y describe ¿Cuál es el sentido de giro que realiza cuando arrastras el deslizador A desde J hasta K.

Ahora ubica la vista frente a la cara de la ficha verde que tiene 8 puntos y describe cual es el sentido de giro cuando arrastras el deslizador B desde G hasta H.

\_\_\_\_\_ Compara el sentido de giro  
de estas dos fichas \_\_\_\_\_

Teniendo en cuenta los ejes X, Y y Z contesta las siguientes preguntas:

5. ¿Qué relación encuentras entre el movimiento que realiza la ficha que corresponde a:  
Deslizador A y el eje X? \_\_\_\_\_

Deslizador B y el eje Z? \_\_\_\_\_

Deslizador C y el eje Y? \_\_\_\_\_

6. Se requiere que el movimiento de las fichas roja y azul sea igual al movimiento de la ficha verde, ¿qué se debe cambiar? \_\_\_\_\_

Si la clave que ingresaste en el Applet es correcta, escríbela en la siguiente casilla.

Clave

¡Si lograste terminar esta situación has ganado **2** puntos!

*Imagen 22: Consignas de la situación 2*

### Descripción de las consignas

#### Fase de acción y formulación.

4. Ubica la vista frente a la cara de la ficha roja que tienen 6 puntos y describe el sentido del giro que realiza cuando arrastras el deslizador A desde J hasta K. Ahora ubica la vista frente a la cara de la ficha verde que tiene 8 puntos y describe el sentido de giro

**cuando arrastras el deslizador B desde G hasta H. Compara el sentido de giro de estas dos fichas.**

La pregunta número 4 está enmarcada en una situación de acción y de formulación, dado que el estudiante debe accionar sobre el Applet propuesto a modo de exploración, para lograr procesos de visualización que le permitan formular conjeturas que den cuenta de lo que se le ha pedido. En la primera parte de la pregunta se espera que el estudiante a partir del desarrollo de la situación 1 y de la exploración en el Applet 2, de cuenta del sentido de giro de las fichas, teniendo en cuenta la vista que se le sugiere en el enunciado.

El sentido de giro de las dos fichas sobre las cuales se realiza la pregunta es diferente, ya que la ficha roja al ser arrastrada rota en sentido negativo y la ficha verde rota en sentido positivo. Por lo tanto esta parte de la pregunta es un complemento de la situación uno.

### **Fase de Formulación**

**5. ¿Qué relación encuentra entre el movimiento que realiza la ficha que corresponde a:**

**Deslizador A y el eje X?**

**Deslizador B y el eje Z?**

**Deslizador C y el eje Y?**

La pregunta 5 es caracterizada como situación de formulación, dado que la interacción previa con el medio le ha proporcionado al estudiante información con la que se espera que conjeture acerca de la relación entre el movimiento de rotación de las fichas y los ejes de referencia, es decir, que

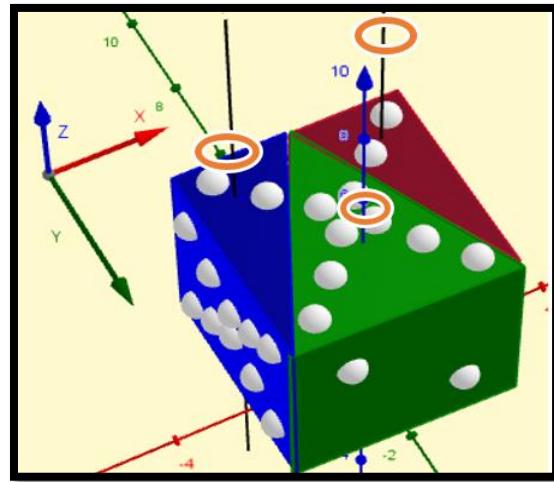
logre identificar que los objetos en el espacio necesitan un eje para realizar un movimiento de rotación, e interiorizarlo como un nuevo conocimiento. En esta pregunta, se espera que el estudiante asocie los movimientos de rotación de las fichas que son controladas con los deslizadores A, B y C, a los ejes de referencia X, Y, Z, como el centro de rotación.

Se espera, que el estudiante conjeture que la ficha roja que es controlada por el deslizador A, realiza una rotación con el eje X como centro de rotación, que la ficha verde que es controlada por el deslizador B, realiza una rotación con el eje Z como centro de rotación y que la ficha azul que es controlada por el deslizador C, realiza una rotación con el eje Y como centro de rotación.

**6. Se requiere que el movimiento de las fichas roja y azul sea igual al movimiento de la ficha verde, ¿qué se debe cambiar?**

La pregunta 6 pertenece a la situación de formulación, ya que se presenta como una situación problemática en la que se requiere de un razonamiento asociado a la exploración que el estudiante ha realizado sobre el medio y una conjetura que en este caso debe visualizar para dar la posible respuesta, es decir que en su mente debe hacer visible un posible procedimiento, que en el Applet no es evidente.

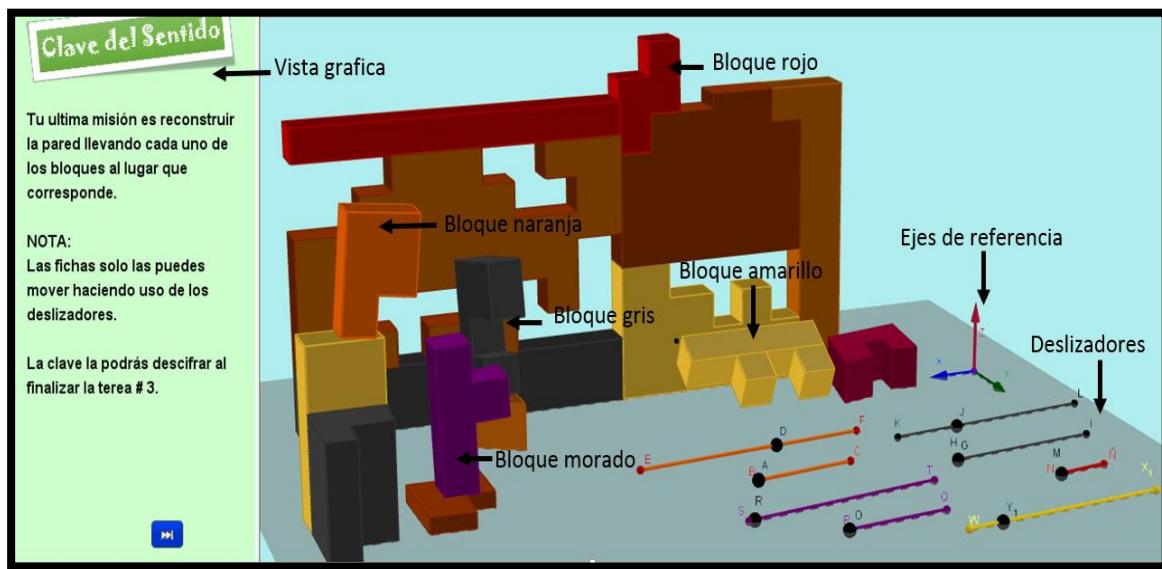
Se espera, que el estudiante mediante el arrastre y la visualización, descubra y enuncie que lo que se debe cambiar para que el movimiento de rotación de la ficha roja y de la ficha azul sea igual al movimiento de rotación de la ficha verde, es el eje de rotación (ver imagen 23).



*Imagen 23: las tres fichas giran respecto al eje Z*

En la anterior imagen se ilustra que la ficha roja que gira respecto al eje X y la ficha azul que gira respecto al eje Y, deben girar respecto al eje Z para obtener un movimiento igual al de la ficha verde.

#### 4.1.4.5. Descripción de la situación # 3



*Imagen 24: Applet 3*

El propósito de esta situación es que el estudiante identifique el sentido, ángulo y eje de rotación X, Y, Z, articulando los conocimientos adquiridos a partir de la exploración y las conjeturas formuladas en las anteriores actividades. Se espera que implícita o explícitamente se identifiquen propiedades como la congruencia, dado que el Applet deja ver que el espacio que le corresponde a las fichas en la pared debe tener la misma forma y las mismas dimensiones, por lo tanto la ficha es congruente con el espacio que le corresponde en la pared

La situación está enmarcada como una fase de validación, ya que el estudiante podrá verificar que las conjeturas que se han formulado durante el desarrollo de la secuencia son acertadas, además dará inicio a la fase de institucionalización que está a cargo del profesor.

### **Applet 3**

En el Applet # 3 el juego ha sido titulado “Clave del Sentido”, en la vista gráfica el estudiante encontrará el último reto que propone el juego, que consiste en reconstruir una pared llevando cada uno de los bloques al lugar que le corresponde, haciendo uso de los deslizadores para someter al arrastre las fichas.

Luego, el estudiante debe descubrir una clave, para ello deberá tener en cuenta la consigan 8, con la que se pretende que visualice el sentido de rotación de los bloques que corresponden a los deslizadores, R, D y J.

Es importante resaltar que para escribir la clave, el estudiante debe tener en cuenta que a cada sentido de rotación se le ha asignado un valor numérico (Sentido Positivo = 1 Sentido Negativo =0) el cual deberá ingresarse en la casilla de entrada, ya que el software solo recibe el ingreso de valores numéricos. La clave debe ser escrita considerando el orden de los deslizadores D, R, J.

Esta parte del juego, permite validar el sentido de rotación como característica de la transformación de rotación, el cual es parte del objetivo que se ha propuesto en la situación, dado que al ingresar la clave en la casilla, el medio aceptará o rechazará la información, esta retroacción le dará información al estudiante sobre la pertinencia de sus conjeturas con respecto al sentido de rotación de las fichas.

La vista gráfica 3D de este Applet, está constituida por diez bloques, de los cuales solo cinco pueden ser sometidos al arrastre, recorriendo una trayectoria controlada por los deslizadores D, A, R, O, J, G, M, Y<sub>1</sub>, definidos como movimientos de rotación. Los otros cinco bloques se utilizan como distractores para que el estudiante visualice cual es el deslizador que controla el movimiento de las fichas que si pueden ser arrastradas , también se encuentra la simulación de una pared donde se deben incrustar los bloques y se evidencian los ejes de referencia X, Y, Z.

La ficha naranja es controlada por los deslizadores D y A, el deslizador A controla el movimiento de rotación de 180° respecto al eje X. El deslizador D permite rotar el bloque respecto a los ejes Y o Z, dependiendo de la posición en la que se encuentre el bloque con respecto al movimiento que le da el deslizador A.

Los movimientos del bloque morado son controlados por los deslizadores R y O, el deslizador O dirige una rotación de  $180^\circ$  respecto al eje Z y el deslizador R dirige una rotación respecto a los ejes X o Y, dependiendo de la posición en la que se encuentre el bloque con respecto al deslizador O.

El bloque rojo es controlado por el deslizador M, el movimiento que realiza es una rotación con un ángulo de  $90^\circ$  respecto al eje Y. Los deslizadores J y G controlan el movimiento del bloque gris, específicamente el deslizador G dirige una rotación con ángulo de  $270^\circ$  respecto al eje Z y el deslizador J permite rotar el bloque respecto a los ejes X o Y, dependiendo la posición en que se encuentre el bloque, la cual depende de la manipulación del deslizador G. El deslizador  $Y_1$  permite rotar al bloque amarillo  $360^\circ$  respecto al eje X. El tiempo que se estima para el desarrollo de esta última situación es de una hora de clase.

### Consignas de la situación 3

7. ¿Cuantos grados deben girar las fichas que corresponden a los deslizadores A, O, M y G para ocupar el lugar que les pertenece en la pared?

---

8. ¿Cuál es el sentido de giro de las fichas (las fichas deben estar sobre la pared) que corresponden a los siguientes deslizadores?

-Deslizador D, cuando lo arrastras desde E hasta F. \_\_\_\_\_

-Deslizador R, cuando lo arrastras desde S hasta T \_\_\_\_\_

-Deslizador J, cuando lo arrastras desde K hasta L \_\_\_\_\_

9. Describe, ¿cuántos grados le es posible girar a la ficha que corresponde al deslizador Y?

---

10. ¿Cuál es el eje de giro de las fichas que corresponden a los deslizadores A, O y M? \_\_\_\_\_

---

11. De acuerdo a la exploración que realizaste en las situaciones 1, 2 y 3 describe, ¿cuáles son los elementos que se deben tener en cuenta para girar un objeto en el espacio?

---

Si la clave que ingresaste en el applet es correcta, esribela en la siguiente casilla

Clave:

**¡Si lograste terminar esta situación has ganado 2 puntos!**

Suma los puntos que has obtenido en las 3 situaciones, si lograste completar 6 puntos  
**¡Felicitaciones has ganado el juego!**

*Imagen 25: Consignas de la situación 3*

Las consignas de esta situación son cinco y están enumeradas de 7 a 11. En esta parte se da finalización al juego, por lo tanto en la parte inferior de la hoja se ha ubicado la casilla donde el estudiante debe ingresar la última clave, que tiene que ver con el sentido de rotación de los

bloques, además se anexa un discurso en el que se informa al estudiante que ha sumado un total de 6 puntos que corresponden a las valoraciones obtenidas al desarrollar satisfactoriamente las tres situaciones. Esta información valida el trabajo que el estudiante ha realizado.

### **Descripción de las consignas**

#### **Situación de validación**

- 7. Cuantos grados deben girar los bloques que corresponden a los deslizadores A, O, M y G para ocupar el lugar que les pertenece en la pared?**

La pregunta 7 se ubica en una fase de validación, ya que se espera que el estudiante logre validar las conjeturas que se ha formulado en las actividades anteriores con respecto a los grados de rotación, dado que al finalizar la situación 2 se ha dado un espacio en el que los estudiantes se comunican sus conjeturas, lo que les permitirá usar un lenguaje común.

Se espera que el estudiante al manipular los deslizadores A, O, M y G y mediante un proceso de visualización, reconozca los bloques que corresponden a esos deslizadores e identifique los grados de rotación necesarios para que cada bloque ocupe el lugar que le corresponde en la pared. El deslizador A, que controla el movimiento del bloque naranja, le permite rotar  $180^\circ$ , el deslizador O controla el movimiento del bloque morado y le permite rotar  $180^\circ$ , el deslizador M que corresponde al bloque rojo, le permite girar  $90^\circ$  y el deslizador G le permite girar  $270^\circ$  a la ficha gris.

**8. ¿Cuál es el sentido de giro de los bloques que corresponden a los deslizadores:**

**-Deslizador D, cuando lo mueves desde E hasta F.**

**-Deslizador R, cuando lo mueves desde S hasta T**

**-Deslizador J, cuando lo mueves desde K hasta L**

Esta pregunta pertenece a la situación de validación, ya que el estudiante mediante un proceso de visualización que logra de la acción exploratoria, puede reconocer los bloques que corresponden a los deslizadores D, R, J y dar cuenta del sentido de giro de cada uno de los bloques.

Se espera, que el estudiante enuncie sus respuestas en un lenguaje más formal, dado que el espacio de comunicación desarrollado después de la situación #2, le proporcionará elementos para ello. En este sentido, se espera que el estudiante verbalice que cuando se move el deslizador D desde E hasta F, el bloque naranja gira en sentido negativo, cuando se move el deslizador R, desde S hasta T, el bloque morado gira en sentido positivo y cuando move el deslizador J desde K hasta L, gira el bloque gris en sentido negativo. Esta pregunta permite validar las hipótesis que el estudiante ha planteado respecto al sentido del giro en las dos situaciones anteriores.

**9. Describe cuántos grados le es posible girar al bloque que corresponde al deslizador Y<sub>1</sub>**

La pregunta se centra en el movimiento de la ficha amarilla, con la que el estudiante podrá validar el grado que el deslizador le permite girar, dado que es la única ficha que puede recorrer una trayectoria de 360° grados, por lo tanto se espera que el estudiante después de la exploración y

con las devoluciones que le proporciona el medio, mencione que el deslizador Y<sub>1</sub> permite girar a la ficha amarilla 360°.

**10. ¿Cuál es el eje de giro de los bloques que corresponden a los deslizadores A, O y M?**

La pregunta 10 también se caracteriza dentro de una fase de validación, ya que se espera que el estudiante al igual que en las preguntas 7 y 8, valide las formulaciones de los razonamientos que ha planteado en las situaciones anteriores.

Los ejes de rotación son concebidos como el centro de rotación de los bloques y de los que se pueden dar cuenta a partir de los ejes de referencia X, Y, Z, en este sentido, la ficha naranja cuando es controlada por el deslizador A realiza un movimiento de rotación respecto al eje X, la ficha morada cuando es controlada por el deslizador O realiza un movimiento de rotación respecto al eje de referencia Z y la ficha roja que es controlada por el deslizador M, realiza una rotación respecto al eje de referencia Y.

**11. De acuerdo a la exploración realizada en las actividades 1, 2 y 3 describa cuales son los elementos que se deben tener en cuenta para girar un objeto en el espacio.**

Esta última pregunta da lugar a una situación de validación, en la que se espera que el profesor gestione una interacción entre los estudiantes, con el fin que cada uno de cuenta de los conocimientos que ha adquirido en el desarrollo de la SD y proponga argumentos que le permitan justificar sus afirmaciones, respecto a las características particulares de la rotación de un objeto en el espacio (eje, sentido, ángulo). Se espera que los estudiantes opinen a favor o en contra de

lo propuesto, mediante un discurso matemático que valide o invalide el conocimiento puesto en juego.

En este momento, el profesor debe hacer devoluciones que lleven a los estudiantes a buscar argumentos para defender sus conjeturas o por el contrario a darse cuenta que se está incurriendo en afirmaciones invalidas. Buscando que todos lleguen a concebir la misma noción, es decir la construcción de EU.

### **Situación de Institucionalización**

Al finalizar la secuencia, el profesor hará una intervención directa con el grupo en general, en la que mediante un discurso, buscará formalizar el conocimiento que los estudiantes han adquirido en el proceso de adaptación con el medio, es decir, que dichos conocimientos que han sido construidos a partir de razonamientos se transformarán en saberes matemáticos. En lo concerniente a la noción de transformación de rotación en el espacio, el profesor deberá aclarar que cuando se habla de sentido de rotación, se debe enunciar en términos de sentido positivo o negativo, que cuando se hace referencia al centro de rotación se tendrá en cuenta los ejes de referencia X, Y y Z, y que se debe tener en cuenta un ángulo de referencia

## CAPÍTULO V

### 5. ANÁLISIS A POSTERIORI

En este apartado, se presenta el análisis a posteriori de los resultados obtenidos a partir de la aplicación de la SD, tomando en consideración las evidencias (producciones de los estudiantes, fotografías, filmaciones) de las actuaciones de los estudiantes y del profesor, obtenidas en la fase de experimentación, intentando caracterizar el diseño de la SD desde la perspectiva de la OI.

#### 5.1. DESCRIPCION DE LA EXPERIMENTACION

La realización de la SD se llevó a cabo en la sede principal de la Institución Educativa Instituto Técnico, la cual cuenta con 3 sedes que atienden estudiantes desde grado primero hasta quinto de educación básica. La sede principal se encuentra ubicada en la zona urbana del municipio de Santander de Quilichao, en la que se atienden estudiantes desde grado sexto hasta once, pertenecientes a la zona urbana y rural del municipio, donde residen comunidades afrodescendientes, indígenas y mestizas.

El grupo experimental con el que se desarrolló la SD, fue de 28 estudiantes pertenecientes al grado noveno (9A), quienes se encuentran en edades que oscilan entre 13 y 15 años. El aula dispuesta para la experimentación fue una de las dos salas de sistemas con las que cuenta la institución, que está dotada de 32 computadores de mesa y un video beam, los cuales favorecieron el desarrollo de la clase. El aula se encuentra organizada como se observa en la siguiente imagen:



*Imagen 26: Sala de sistemas 1 de La Institución Educativa Instituto Técnico*

La SD, fue orientada por una de las integrantes del grupo que está llevando a cabo el presente trabajo, con la intención de realizar un trabajo objetivo. En este sentido, a pesar que fue una profesora quien orientó la clase, en adelante se enunciará en términos del profesor, para darle un carácter general y objetivo.

La SD se desarrolló en dos secciones de dos horas de clase (1 hora de clase equivale a 55 minutos) cada una. En la primera sección se desarrolló la situación 1 y 2, en la segunda sección se desarrolló la situación 3 y se dio paso a la institucionalización. Aunque la SD se implementó en el tiempo que se había previsto, es importante mencionar que el tiempo fue un factor de desequilibrio para la implementación, ya que fue necesario realizar la instalación del software Geogebra 3D y los Applets al inicio de cada sección. Dado que los computadores no permitían guardar los archivos de forma permanente.

En reunión previa con el docente que orienta la clase de geometría, se logró identificar que a pesar que los estudiantes cuentan con dos salas de sistemas en la institución y reciben clase de geometría, el trabajo que se realiza está más enfocado hacia el uso de lápiz y papel, es decir, que la enseñanza y aprendizaje de la geometría gira en torno al plano bidimensional, por ende no tenían familiaridad con Geogebra 3D. Sin embargo, esto no representó un obstáculo para que los estudiantes interactuaran con el diseño, pues la herramienta que se usó es el arrastre, por medio de deslizadores que permitieron la visualización de las características de los objetos cuando sufren una transformación de rotación en el espacio.

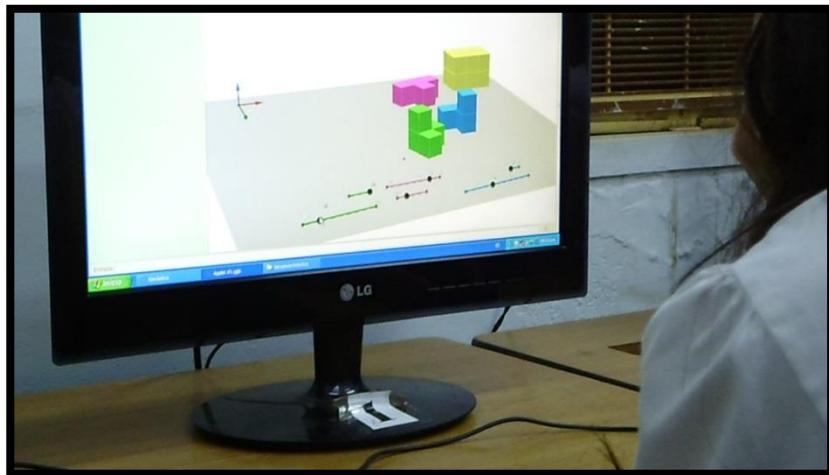
En el acompañamiento que efectúo el profesor, hizo la presentación de las situaciones a los estudiantes y dio la orientación acerca del trabajo a realizar. Con ayuda del video beam se explicó la funcionalidad de los deslizadores en el trabajo, se mencionó también que las figuras se mueven únicamente a través de los deslizadores y que el software permite observar los objetos desde diferentes vistas con clic derecho sostenido. Estas aclaraciones fueron necesarias precisamente porque los estudiantes no han tenido un acercamiento previo con el software.

El profesor, dio instrucciones acerca del juego que está inmerso en cada actividad, aclarando que primero se deben construir las figuras que se pide en cada Applet, luego se debe dar respuesta a las consignas correspondientes a cada situación y por último ingresar la clave que se ha pedido en la casilla del juego.

A continuación se hará la descripción de la realización de cada una de las situaciones de la SD.

## 5.2. ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN # 1.

El objetivo de la situación # 1 es identificar, en la trayectoria, el sentido y el ángulo de giro de una figura cuando se desplaza en el espacio. Como se mencionó en el análisis a priori, esta situación correspondía a una situación de acción y de formulacion. En efecto, los estudiantes iniciaron con una exploración en la que arrastran los deslizadores que controlan el movimiento de las fichas, identificando su trayectoria, buscando regularidades en el movimiento de las fichas. Frente a esto los estudiantes interactúan con el medio en busca de estrategias, como se puede observar en la imagen 27.



*Imagen 27: Situación de Acción*

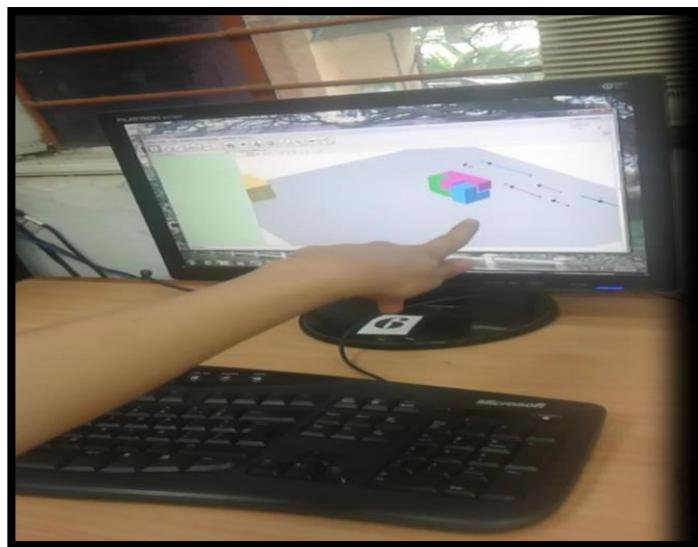
La imagen fue tomada en el momento en que la estudiante está realizando un arrastre Errante sobre el Applet, es decir, que mueve las fichas a través de los deslizadores de manera aleatoria, buscando configuraciones o regularidades que le brinden información relevante.

Las acciones que realizaron los estudiantes sobre el Applet, les permitió visualizar las características de las trayectorias que recorrían las fichas y lograr armar la figura propuesta. En

esta situación, el medio emitió una primera retroacción, en el momento en que los estudiantes trataban de armar la figura y quedaban espacios entre ellas, esto les hacía entender que la figura no estaba bien armada, dado que debía ser congruente con la figura (amarilla) propuesta, lo que se evidencia en el dialogo que se dio entre el profesor y uno de los estudiantes, que se describe a continuación.

P: Lograste armar la figura, dale vuelta miramos desde otra vista,... ¿crees que está bien?  
E: Tengo que encajar bien esa.  
P: Si, entonces la idea es...  
E: Que quede exacta.

*Dialogo 1: Devoluciones del profesor*



*Imagen 28: Retroacciones del Medio*

La imagen 28, indica que el arrastre que efectuaron los estudiantes les permitió visualizar la congruencia que debía existir entre las dos figuras, es decir, que debían tener la misma forma y el mismo tamaño.

A partir de las acciones que los estudiantes efectuaron sobre el artefacto, se favoreció la construcción de una serie de razonamientos, con los cuales los estudiantes realizaron formulaciones que dan cuenta del desarrollo de las consignas propuestas en esta situación.

#### **Análisis de las consignas de la situación #1:**

**1. Describa que movimientos realizan las fichas, cuando son arrastradas por los deslizadores, para armar la figura.**

Después de armar la figura propuesta, los estudiantes deben reflexionar sobre las acciones realizadas y lo que han logrado identificar en los movimientos que realizan las figuras. En las respuestas a esta consigna, el 89% de los estudiantes logró conjeturar que los movimientos realizados por las fichas, son rotaciones, usando términos como giros, movimiento circular y movimiento rotatorio, como se puede observar en la siguiente imagen.

1. Describe qué movimientos realizan las figuras cuando son arrastradas por los deslizadores para armar la figura dada.

*Los movimientos que realizar las figuras son circulares*

*Imagen 29: Respuesta 1 de la consigna 1*

Es pertinente resaltar que algunos estudiantes hacen referencia a que las fichas pueden girar sobre un eje o alrededor de él, con términos como movimiento circular cerrado y movimiento circular abierto, es decir, que para ellos cuando el eje de rotación se encuentra al interior de la ficha, es un movimiento circular cerrado y cuando el eje es externo a la ficha es un movimiento circular abierto.

Además algunos ya mencionan los grados y el sentido, lo que deja ver que los estudiantes están retomando sus conocimientos previos, como se había previsto.

1. Describe qué movimientos realizan las figuras cuando son arrastradas por los deslizadores para armar la figura dada.

*tiene movimientos hacia el lado derecho  
y el lado izquierdo; estos tambien tienen  
movimiento circulares cerrados y abiertos,*

*Imagen 30: Respuesta 2 de la consigna 1*

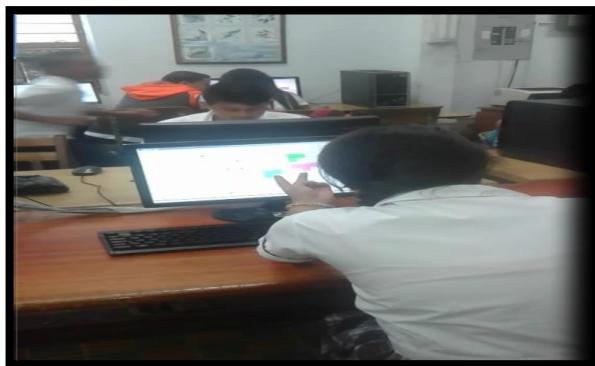
## 2. ¿Cuántos grados se desplazan las fichas correspondientes a los deslizadores N, U y D?

En la segunda consigna, solo el 22% de los estudiantes logró inferir de forma acertada que el deslizador N desplaza la ficha que le corresponde  $180^\circ$ , el deslizador U desplaza la ficha  $270^\circ$  y el deslizador D desplaza la ficha  $90^\circ$ .

A pesar que los estudiantes demuestran tener familiaridad con los grados que son múltiplos de  $90^\circ$ , dado que los incluyen en su discurso, se les dificulta identificarlos en los movimientos. En el caso del deslizador N, que permite rotar la ficha verde  $180^\circ$  grados, el 39% de los estudiantes coinciden en que esta rotación es de  $90^\circ$  grados e incluso algunos mencionaron movimientos de  $360^\circ$  grados con respecto al deslizador D, lo que es un error y demuestra una dificultad en el reconocimiento de los grados de rotación de un objeto en el espacio. El otro 39% identifica el movimiento de  $180^\circ$  grados en la ficha verde que es arrastrada por el deslizador N, sin embargo, las respuestas para los deslizadores U y D no son acertadas, incluso algunos identifican grados de  $300^\circ$  y  $80^\circ$ .

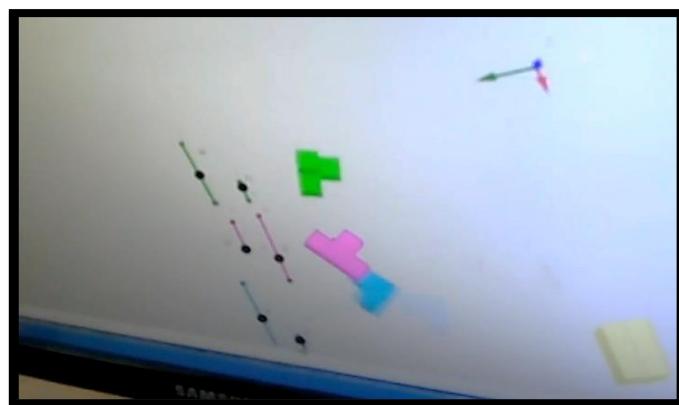
Tal vez, esta dificultad se debe a que los estudiantes han tenido un acercamiento previo con los grados de rotación, desde el plano bidimensional, por lo que puede resultar para ellos un poco difícil hacer la relación entre las características de los objetos en el plano y los del espacio.

Para identificar los grados de rotación, algunos estudiantes hicieron uso de los dedos de la mano ubicándolos sobre la pantalla del computador, tratando de medir el recorrido (ver imagen 31) que realizaban.



*Imagen 31: Estrategia para medir los grados de rotación de las fichas*

Las vistas que ofrece el software, también fueron un elemento usado por los estudiantes para visualizar e identificar los grados en las trayectorias que recorren las figuras (ver imagen 32).



*Imagen 32: Vista superior o planta, como estrategia para identificar los grados de rotación de las figuras*

La imagen 32, ilustra la tendencia al uso de la vista superior, tal vez, debido a que esta vista le ofrece al estudiante una representación de las figuras, similar a las del plano.

En este momento los estudiantes se comunicaban entre sí, sus hallazgos, expresándolos a partir de sus conocimientos previos, dando cuenta de la situación de formulación.

### **3. ¿Cómo es el movimiento que realiza cada una de las fichas:**

**-Cuando mueves el deslizador A desde C hasta B y cuando mueves el deslizador A desde B hasta C? Compara estos movimientos y determina sus diferencias, si las hay.**

**-Cuando mueves el deslizador U desde T hasta V y Cuando mueves el deslizador M desde K hasta L? Compara estos movimientos y determina sus diferencias, si las hay.**

La consigna 3 está dividida en dos secciones, en la primera el 82% de los estudiantes ha enunciado que las fichas giran en diferente dirección según el arrastre de los deslizadores, por lo tanto mencionan que la única diferencia es que primero gira hacia la derecha y luego hacia la izquierda. Estas inferencias se logran gracias al arrastre Lieu Muet, que se evidencia cuando los estudiantes a través de los deslizadores arrastran las fichas y observan la trayectoria de su movimiento, que ha sido trazada previamente y está oculta para ellos.

Lo que reitera, que los estudiantes están retomando sus conocimientos previos respecto a la noción y logran identificar el sentido de giro aunque aún no lo hacen con un lenguaje matemático. Algunos hacen alusión al movimiento con relación al eje, identificando que gira sobre su propio eje.

3. ¿Cómo es el movimiento que realiza cada una de las fichas?:

-Cuando arrastras el deslizador A desde C hasta B. Gira sobre su propio eje hacia la derecha Y cuando arrastras el deslizador A desde B hasta C. Gira sobre su propio eje hacia la izquierda Compara estos movimientos y determina sus diferencias, si las hay sus movimientos son iguales solo quedan el giro en diferentes direcciones

Imagen 33: Respuesta de la primera sección de la consigna 3

El otro 18% de estudiantes no interpretó correctamente la pregunta y describieron el tipo de movimiento, es decir, que mencionaron el movimiento circular, giro e incluso los grados de rotación como  $180^\circ$  y  $360^\circ$ .

En la segunda sección de la consigna 3, el 50% de los estudiantes incluye en su discurso grados de  $270^\circ$ ,  $360^\circ$ , otros el sentido del rotación de las fichas (derecha, izquierda), pero al final se evidencia que los estudiantes identifican que una de las fichas giran sobre un eje y la otra alrededor de él, aunque no los enuncian en los términos adecuados.

-Cuando arrastras el deslizador U desde T hasta V. hace un movimiento circular a su alrededor Y Cuando arrastra el deslizador M desde K hasta L. realiza un movimiento de  $360^\circ$  Compara estos movimientos y determina sus diferencias, si las hay que el primero gira por fuera y el segundo por dentro

Imagen 34: Respuesta 1 de la segunda sección de la consigna 3

-Cuando arrastras el deslizador U desde T hasta V. da una vuelta de  $270^\circ$  o a la izquierda Y Cuando arrastra el deslizador M desde K hasta L. La figura gira en su eje hacia la derecha Compara estos movimientos y determina sus diferencias, si las hay que una gira en su eje y la otra no

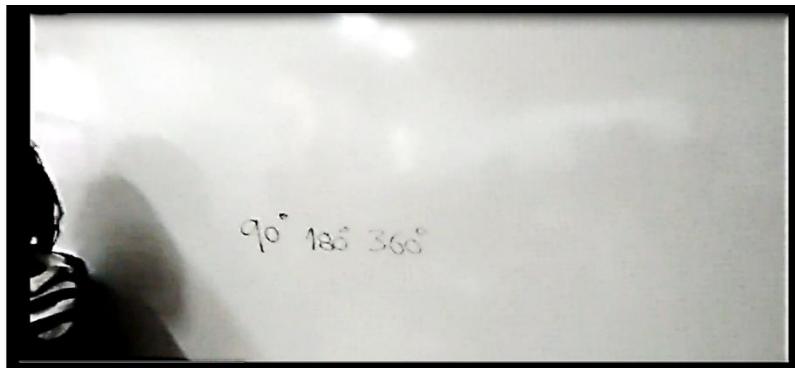
Imagen 35: Respuesta 2 de la segunda sección de la consigna 3

Al finalizar las consignas de la primera situación, el profesor hace las aclaraciones pertinentes sobre cómo se debe ingresar la clave en la casilla del juego. En este momento, los estudiantes discuten entre ellos, acerca de las formulaciones que han planteado respecto a los grados que corresponden al movimiento de cada ficha, razón por la cual, el profesor decide abrir un espacio en el que los estudiantes comuniquen a sus compañeros, los grados que identificaron en el movimiento de las fichas, como se expone en el siguiente diálogo:

P: Un voluntario que venga al tablero y nos diga cuales fueron los grados que encontró.

E<sub>2</sub>: Yo, yo, yo, yo (levanta la mano)

*Dialogo 2: Situación de formulación del E2*



*Imagen 36: Estudiante E2 exponiendo su respuesta en el tablero*

En este momento la estudiante E<sub>2</sub> sale al tablero y comunica su respuesta a sus compañeros, ella argumenta que los grados en que se mueven las fichas son 90°, 180° y 360°.

En ese momento la profesora pregunta a los estudiantes si están de acuerdo con la respuesta de la compañera, a lo que todos dicen que no.

P: ¿Alguien tiene una respuesta diferente?

E<sub>3</sub>: Yo, (sale al tablero y escribe 90, 180, 270)

*Dialogo 3: Situación de formulación del E3*



*Imagen 37: Estudiante E3 exponiendo su respuesta en el tablero*

Después de la intervención de E<sub>3</sub>, el profesor pregunta de nuevo a los estudiantes si están de acuerdo con la respuesta.

P: Todos están de acuerdo con esta respuesta o alguien tiene algo diferente.

E<sub>4</sub>: Yo

Inmediatamente sale al tablero y escribe 90°, 270°, 90°

*Dialogo 4: Situación de formulación del E4*



*Imagen 38: Estudiante E4 exponiendo su respuesta en el tablero*

P: Alguien está de acuerdo con la respuesta del compañero?

E<sub>3</sub>: Yo, no

P: Dile al compañero porque crees que tu respuesta es la correcta.

E<sub>3</sub>: Porque yo creería que era por orden de cada figura, y no había dos de noventa, era una de  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  y una de noventa.

P: ¿Tú que dices?

E<sub>4</sub>: No, pues esos fueron los movimientos que yo observe al mover el deslizador y pues yo hice más o menos el cálculo, y más o menos calcule que uno era de noventa otro de dos setenta y el otro de noventa.

*Dialogo 5: Sustentación de las formulaciones de E3 y E4*

Es importante resaltar, que el cálculo que menciona el estudiante, se ha dado a partir de la visualización, que él ha logrado en la interacción con el Applet. Lo que le brindó elementos para llegar a formular sus propios argumentos.

En ese momento el profesor invita al estudiante a explorar el Applet frente a todos, con la ayuda del video beam y les pide estar atentos. El estudiante E<sub>4</sub> nuevamente arrastra los deslizadores, observando el movimiento de la ficha que corresponde al deslizador N.

P: ¿Cuantos grados rota?

E<sub>5</sub>: Para mí,  $160^\circ$ .

E<sub>6</sub>:  $180^\circ$ , por que gira la mitad.

Se escucha la participación de varios estudiantes, dando respuestas respecto al movimiento.

P: Listo, entre todos analicemos ¿cuantos grados gira la ficha?

En ese momento otros Estudiantes opinan:  $180^\circ$

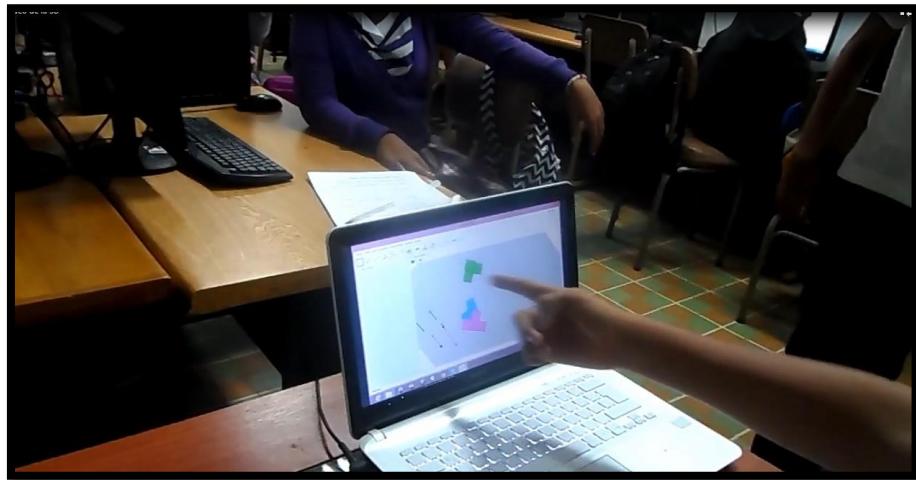
P: ¿ $180$  grados? ¿Quién dice algo diferente?

E<sub>4</sub>: yo decía  $180^\circ$ , pero  $180^\circ$  no exactamente

P: ¿por qué dices que no exactamente?

E<sub>4</sub>: Porque si da  $180$ , debería quedar por lo menos aquí.

*Dialogo 6: Argumentos de estudiantes*

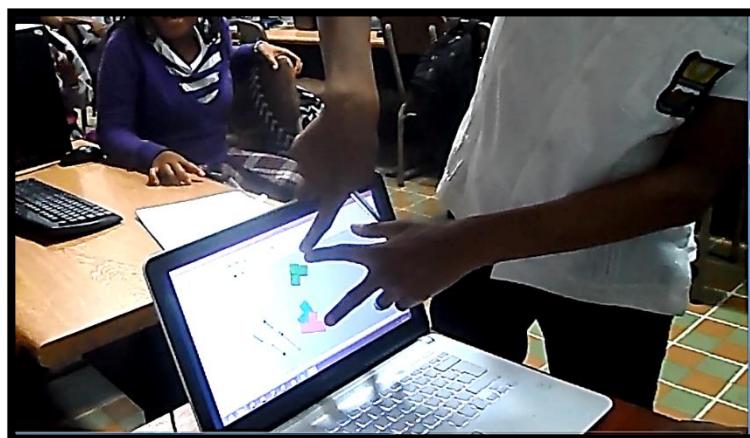


*Imagen 39: Estudiante explica sus argumentos*

El estudiante, efectúa el arrastre de la ficha mediante el deslizador y guarda silencio, visualiza la posición de la ficha al hacer el arrastre, dado que llegó al punto donde él mencionaba que debería llegar si giraba 180°. Uno de sus compañeros se acerca y le argumenta porque a su consideración el resultado es 180°.

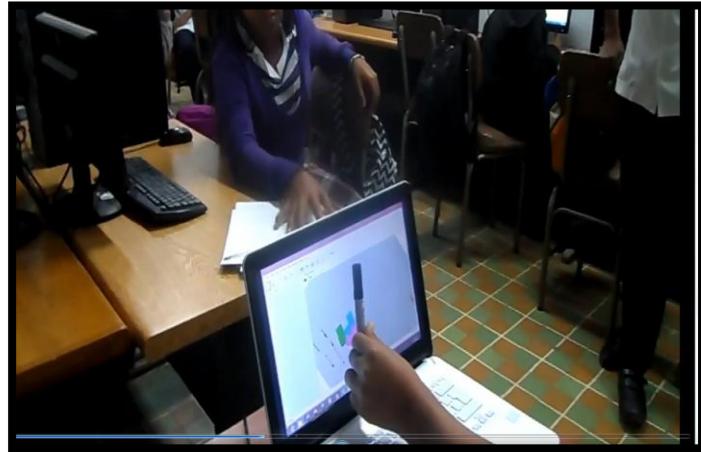
E<sub>6</sub>: Eso da 180° por que mira, aquí podríamos poner el transportador, cero, 180° lo desplazas y llega hasta acá, o sea que lo mueves como 180°. (Colocando sus dedos sobre la pantalla del computador).

*Diálogo 7: Argumentos del estudiante E<sub>4</sub>*



*Imagen 40: Estudiante E<sub>6</sub> expone sus argumentos*

El estudiante E<sub>4</sub> toma el marcador y lo ubica en la pantalla del computador y arrastra la ficha, en este momento asiente con la cabeza, pero aun no dice nada. La estudiante E<sub>3</sub>, nuevamente interviene diciendo.



*Imagen 41: Incorporación de otros artefactos para lograr procesos de razonamiento*

E<sub>3</sub>: Tiene que ser 180° grados porque estamos viendo que la ficha le queda un cuarto adelante y otro atrás, por eso da 180° grados.

P: Alguien sigue pensando que es diferente el grado en que se mueve la ficha?

*Dialogo 8: Argumentos de E3*

Todos los estudiantes contestan que no, por lo tanto todos quedan en el acuerdo de que la ficha verde que es controlada por el deslizador N se desplaza 180° grados.

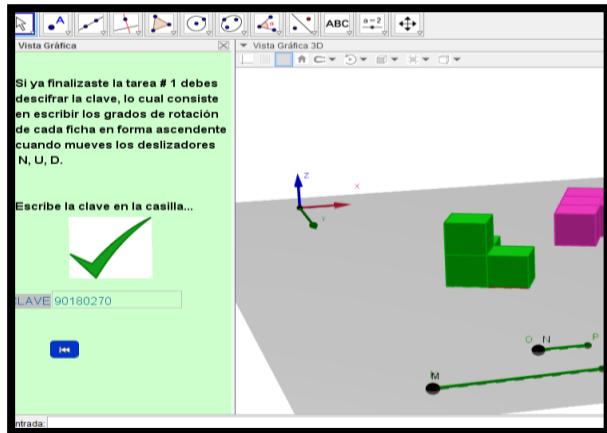
De forma general, se pudo identificar que los estudiantes siempre buscan la representación de los objetos en plano bidimensional, para poder dar cuenta de las características del movimiento de los sólidos, lo que se puede atribuir a que su proceso de aprendizaje está basado en el trabajo con lápiz

y papel en el plano, como lo confirmó el profesor encargado de orientar Geometría en la institución.

Otro aspecto importante es que los estudiantes buscan distintos artefactos, como marcadores, e incluso partes de su cuerpo como los dedos o el brazo, para representar los movimientos de los sólidos, tratando de identificar características, lo que muestra la necesidad de integrar objetos tangibles para la conceptualización de las nociones abstractas de la geometría.

Este espacio fue de vital importancia en la construcción de la noción contemplada, dado que a través de las interacciones entre pares, lograron confrontar la viabilidad de sus argumentos e incluso volver a realizar acciones sobre el artefacto para identificar los hallazgos encontrados por parte de sus compañeros. De este modo la situación #1, permitió que los estudiantes reconocieran, a través de la exploración; el sentido y el ángulo de giro de una figura cuando se desplaza en el espacio.

Para contribuir a los procesos de validación, los estudiantes al finalizar la primera situación tenían la misión de escribir la clave, la cual consistía en escribir los grados de rotación en orden ascendente, esta fue considerada una forma de retroacción, dado que al ingresar la información de manera correcta, el artefacto les generó el siguiente signo: “”, (ver imagen 42). Lo que validó la veracidad de sus, conjeturas.



*Imagen 42: Situación de validación a partir de las retroacciones que proporciona el medio*

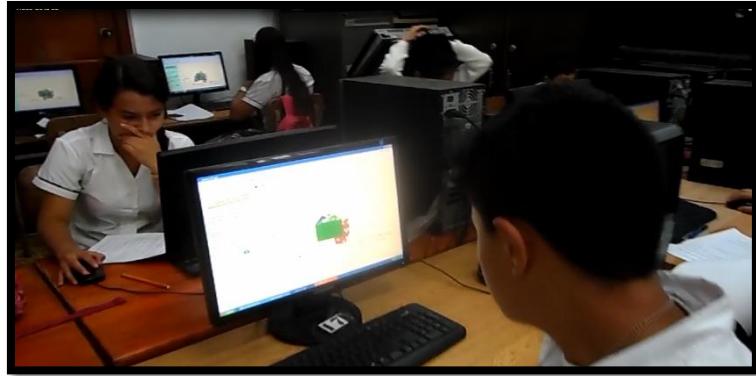
### 5.3. ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN #2.

El objetivo de la situación #2 es identificar y describir el eje de giro de cada ficha teniendo en cuenta los ejes de referencia X, Y, Z y reconocer los diferentes giros que puede realizar un sólido según los ejes.

Al inicio el profesor dio las instrucciones a los estudiantes, aclarando nuevamente que primero se realiza la exploración en el Applet, luego se desarrollan las consignas y finalmente se ingresa la clave solicitada en la casilla del juego, además pide a los estudiantes trabajar en parejas en el desarrollo de las consignas.

Como se había previsto, los estudiantes inician la exploración en el Applet logrando armar el cubo propuesto, lo que se reconoce como una situación de acción (ver imagen 43). La experiencia que han adquirido en la situación anterior con el software, les permitió armar la figura propuesta en

menor tiempo y con más seguridad, es decir que los estudiantes ya reconocen las propiedades del artefacto.



*Imagen 43: Situación de acción*

Una vez indicadas las instrucciones, los estudiantes iniciaron la exploración mediante el arrastre de los deslizadores que controlan el movimiento de las fichas, en este caso a cada ficha le corresponde solo un deslizador. Con estas acciones el artefacto le proporcionó información al estudiante, que le permitió elaborar formulaciones, a partir de los razonamientos que se generaron en los procesos de visualización.

#### **4. Análisis de las consignas de la situación #2:**

**Ubica la vista frente a la cara de la ficha roja que tienen 6 puntos y describe el sentido del giro que realiza cuando arrastras el deslizador A desde J hasta K. Ahora ubica la vista frente a la cara de la ficha verde que tiene 8 puntos y describe el sentido de giro cuando arrastras el deslizador B desde G hasta H. Compara el sentido de giro de estas dos fichas.**

En la pregunta 4, el 93% de los estudiantes acertó, en cuanto a las formulaciones que realizaron, respecto al sentido de giro de las fichas que son controladas por los deslizadores A y B, utilizando términos como se mueven hacia la derecha y hacia la izquierda respectivamente. Otro 7% observó el movimiento en sentido contrario, es decir que la ficha que corresponde al deslizador A, se mueve hacia la izquierda y la ficha que corresponde al deslizador B, se mueve hacia la derecha. Esta confusión se puede atribuir a que los estudiantes percibieron el movimiento desde una vista diferente a la sugerida. De este porcentaje de estudiantes, 2 hicieron alusión al sentido con relación a las manecillas del reloj, aunque de forma incorrecta, evidenciando que tenían familiaridad con esos términos, como se había previsto.

Por otra parte, en la imagen 44 se puede observar a dos estudiantes discutiendo razonamientos, a partir de la interacción con el medio, con el fin de concertar una respuesta correcta, lo que da cuenta de una situación de formulación, como se puede apreciar en el diálogo 9.

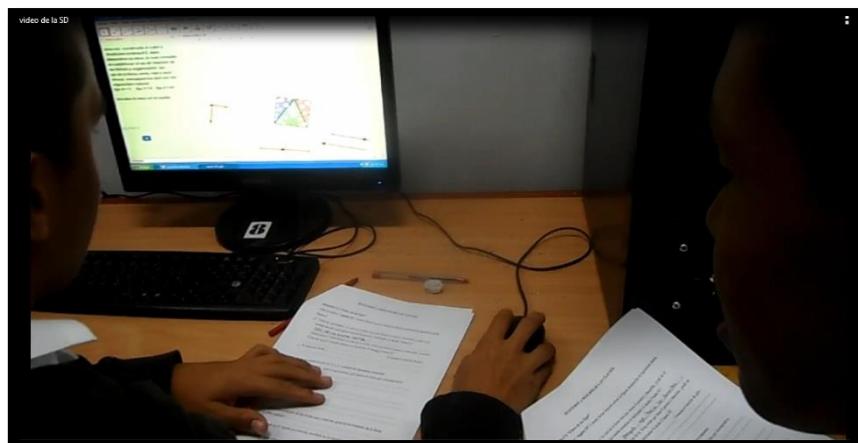


Imagen 44: Situación de Formulación

E<sub>4</sub>: supongamos esta que está aquí, entonces con esta ...entonces para ir a..

E<sub>6</sub>: hacia la izquierda

E<sub>4</sub>: para ir hacia allá va para la izquierda y cuando va para acá va para la derecha.  
(Accionando sobre el medio)

E<sub>6</sub>: ajá, ósea que además que gira en su propio eje, también gira hacia la izquierda.

E<sub>4</sub>: Entonces es circular.

E<sub>6</sub>: si por eso, es circular pero también hay que decir en que horizonte va. Mire que es también el horizonte, hay que ver si gira a la derecha o si gira a la izquierda.

*Dialogo 9: Dialogo entre pares*

En el dialogo se aprecia que los estudiantes están buscando un esquema que les permita llegar a una solución o respuesta correcta, comparando sus razonamientos y en interacción con el medio, aunque usan un lenguaje natural, entienden que se les está preguntando por el sentido.

**5. ¿Qué relación encuentra entre el movimiento que realiza la ficha que corresponde a:**

**Deslizador A y el eje X?**

**Deslizador B y el eje Z?**

**Deslizador C y el eje Y?**

La consigna 5 introduce el concepto de ejes, el cual se ha considerado como el elemento nuevo para los estudiantes de grado 9º.

En este momento surgen dudas en los estudiantes, los cuales buscan respuestas en la profesora, quien interviene a partir de devoluciones, es decir que responde a los estudiantes atreves de preguntas, para que ellos lleguen a la respuesta. Como se exhibe en el siguiente diálogo.

E7: Es que no sé cómo es.

P: Entonces ¿cuál te están pidiendo primero?

E7: El deslizador A, con el eje X.

P: Listo, manipula la ficha con el deslizador A. ¿Cuál es el eje X, ya lo identificaste?

E7: (señala el eje X en el Applet)

P: Listo, ubica la vista en la posición que tú mejor puedas ver el movimiento y puedes ver también el eje, a ver qué sucede.

E7:(Arrastra la ficha con el deslizador)

P: ¿Que ves ahí?

P: Ahora manipula la ficha azul. ¿Qué relación encuentras en esa ficha con el eje Y?

E7: ¿Gira alrededor de este eje?

P: ¿Si ves que hay una relación? Ahora mira nuevamente con el deslizador A, ¿Qué ves?

E7: Que gira alrededor del eje

P: ¿De cuál eje?

E7: Del X. aaaa todos giran alrededor...

P: Entonces ¿hay una relación?

E7: Si ya vi.

*Dialogo 10: Devoluciones del profesor*

Mediante su accionar en el Applet y respondiendo a las intervenciones que hace el profesor a modo de devoluciones, el estudiante admite que hay una relación entre la ficha y el eje mencionado, logrando plantear sus propias conjeturas, permitiendo continuar con el desarrollo de la situación, es decir, que el profesor no dio las respuestas a los estudiantes, sino que sus intervenciones se enfocaron en orientarlos para que siguieran asumiendo la responsabilidad de hallar solución a las situaciones que se les ha propuesto, recordándoles algunas herramientas con las que pueden contar.

Así, el 57% de los estudiantes logró visualizar acertadamente, que los ejes de referencia corresponden al eje de rotación de las fichas mencionadas, aunque algunos usan un discurso en lenguaje natural, se logra entender la idea expresada. El otro 43%, no logró identificar la relación existente entre el eje y la ficha, usando términos como, la ficha gira hacia arriba, gira hacia adelante, gira hacia atrás.

5. Teniendo en cuenta los ejes X, Y y Z contesta las siguientes preguntas:

¿Qué relación encuentras entre el movimiento que realiza la ficha que corresponde a:

Deslizador A y el eje X? que La Ficha A Siempre va a rotar sobre su eje que es x

Deslizador B y el eje Z? que la Ficha B siempre da a girar en el mismo sitio y sobre su eje que es z

Deslizador C y el eje Y? que la Ficha C siempre va a girar a la izquierda y a la derecha sobre su eje y

Imagen 45: Respuesta de la consigna 5

**6. Se requiere que el movimiento de las fichas roja y azul sea igual al movimiento de la ficha verde, ¿qué se debe cambiar?**

Del 57% de los estudiantes que visualizaron acertadamente la pregunta 5, con respecto a la relación de las fichas y el eje, que se mencionó anteriormente, solo 6 estudiantes lograron identificar que el movimiento de las fichas depende del eje sobre el cual está realizando el giro, dado que mencionan claramente que lo que debe cambiarse es el eje. (Ver imagen 46)

6. Se requiere que el movimiento de las fichas roja y azul sea igual al movimiento de la ficha verde, ¿qué se debe cambiar? Se deben cambiar sus ejes  
Para así cambiar su movimiento

Imagen 46: Respuesta de la consigna 6

En esta situación, los estudiantes aun cuando identifican los ejes y los usan en su vocabulario, no logran visualizarlos como característica particular al movimiento de rotación en el espacio, dado que la gran mayoría no logró identificar que la diferencia en el movimiento de las fichas está dado por el eje sobre el cual gira. Tal vez, debido a que sus conocimientos previos se han construido en el plano, dificultándoles alcanzar razonamientos que permitan la construcción de conocimientos respecto a la transformación de rotación el espacio.

Dado que la situación #2, es el foco para introducir el concepto de ejes y está previa a la situación #3 donde se propone la situación de validación, se abre un espacio para socializar las respuestas que los estudiantes han consignado en el material impreso. Los estudiantes pasan al frente uno a la vez y con ayuda del video beam exponen sus argumentos, el profesor interviene para que sus compañeros expresen sus acuerdos o desacuerdos.

En la situación interviene el profesor, refiriéndose a la consigna 4, para hacer referencia al sentido de giro, dado que en la primera situación ya se hizo un acercamiento al concepto y se identificó que los estudiantes usan términos como derecha, izquierda y unos pocos lo mencionan en términos de las manecillas del reloj. Este tipo de términos aún se usan en la situación 2, por lo tanto el profesor gestiona una situación de validación e institucionalización del concepto de sentido de giro.

En este momento, el profesor expone que cuando la ficha gira hacia la derecha se habla de sentido negativo y cuando gira hacia la izquierda el sentido es positivo, análogamente hace referencia a las manecillas del reloj. Cuando gira a favor de las manecillas del reloj el sentido es negativo y cuando gira en contra de las manecillas del reloj el sentido es positivo (ver imagen 47).

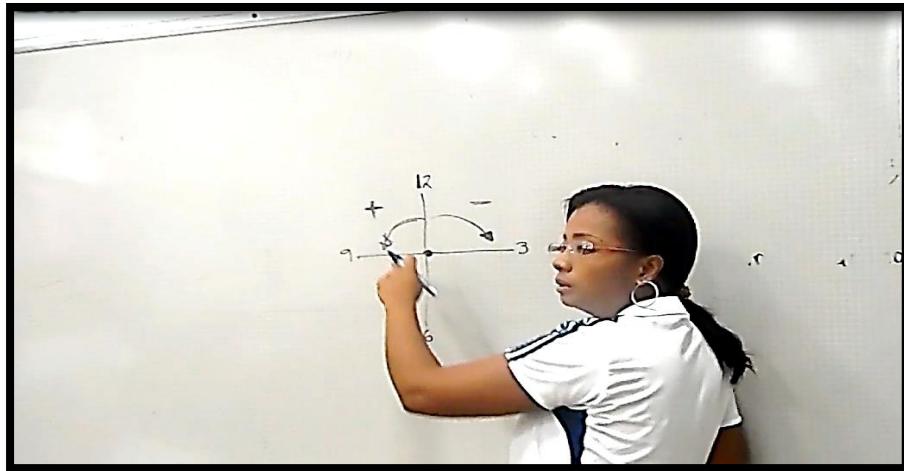
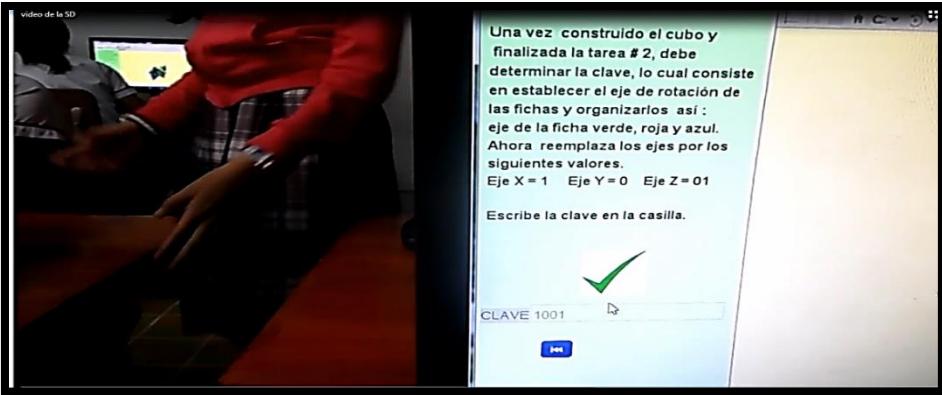


Imagen 47: Situación de Institucionalización

En esta situación, el profesor parte del conocimiento que han adquirido los estudiantes durante la situación y lo relaciona con el saber que se quiere que conciban, argumentando que cuando se habla de sentido de giro se debe expresar en términos de positivo o negativo, lo cual hace parte de la situación de institucionalizado

A partir de las acciones que los estudiantes realizaron sobre el medio, desarrollaron procesos de razonamiento que permitieron formular conjeturas en lo concerniente al sentido y a los ejes de rotación. Dichas formulaciones, referentes a los ejes de rotación, fueron validadas al ingresar la clave en la casilla de entrada del juego.



*Imagen 48: Situación de validación a partir de las retroacciones que proporciona el medio*

#### 5.4. ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN #3.

El objetivo de la situación 3 es que el estudiante reconozca y determine los elementos constitutivos de la transformación de rotación en el espacio, como el sentido, ángulo y eje.

Tal como se especuló, las fichas que quedaban por fuera de la pared fueron un distractor para los estudiantes, quienes focalizaron su atención en averiguar porque no se podían ubicar en la pared, lo que la profesora aprovechó para que identificaran la propiedad de congruencia de forma implícita, como se evidencia en el siguiente dialogo.

E8: ya acomodamos la pared con todos los deslizadores que estaban aquí, pero falta una ficha y sobran 5.

P: hay una ficha que puedes arrastrar hasta ese espacio?

E8: (mira el Applet) No ninguna.

P: ¿Por qué?

E8: porque ninguna se parece.

*Dialogo 11: Identificación de la congruencia a partir de Devoluciones*

En esta situación el profesor no da una respuesta concreta, sino que le genera preguntas al estudiante que lo dirigen a la exploración, para que visualice lo que sucede (ver imagen 49). Se puede decir que el profesor gestionó una devolución que permitió al estudiante identificar de forma implícita la propiedad de congruencia, lo que fue posible haciendo uso del arrastre (Lieu Muet) que permitió visualizar, concebir y argumentar al estudiante que las otras fichas no hacen parte de la pared, porque no tienen la misma forma.



*Imagen 49: Identificación de congruencia a partir de devoluciones*

### Análisis de las consignas

#### 7. Cuantos grados deben girar los bloques que corresponden a los deslizadores A, O, M y G para ocupar el lugar que les pertenece en la pared?

El 90% de los estudiantes logró visualizar que los grados de rotación de las fichas son 180°, 180°, 90° y 270° respectivamente (ver imagen 50), dado que aunque algunos usan términos como una vuelta o un cuarto de vuelta haciendo alusión a los grados, todos llegan a la misma respuesta en relación a los grados (ver diálogo 12).

E7: Son noventa grados, por que mire, (señalando el Applet) esto es un cuarto de vuelta, aquí sería otro cuarto, acá otro y aquí otro cuarto.(refiriéndose a los grados de 90° que hay en un giro de 360°).

*Dialogo 12: Argumentos que dan cuenta de los grados de rotación*

Con base en la exploración que realizaste, contesta las siguientes preguntas.

7. ¿Cuantos grados deben girar las fichas que corresponden a los deslizadores A, O, M y G para ocupar el lugar que les pertenece en la pared?

la ficha del deslizador A debe girar 180°

la ficha del deslizador O debe girar 180°

la ficha del deslizador M debe girar 90°

la ficha del deslizador G debe girar 270°

*Imagen 50: Respuesta de la consigna # 7*

El 10% restante presenta confusión en la ficha que corresponde al deslizador G, en el que mencionan grados de 360°, tal vez la percepción de un giro mayor a los 180° les generó confusión. Esta dificultad se puede atribuir, como ya se ha mencionado, a que los estudiantes han construido sus conocimientos previos desde el plano.

**8. ¿Cuál es el sentido de giro de los bloques que corresponden a los deslizadores:**

**-Deslizador D, cuando lo mueves desde E hasta F.**

**-Deslizador R, cuando lo mueves desde S hasta T**

**-Deslizador J, cuando lo mueves desde K hasta L**

Esta consigna valida el conocimiento adquirido por los estudiantes en las situaciones anteriores con respecto al sentido, en ella también se evidencia que los estudiantes han construido esquemas, dado que enuncian razonamientos de tipo personal a los que han llegado a través de la adaptación al medio, como se evidencia en la siguiente respuesta;

8. Contesta, ¿cuál es el sentido de giro? de las fichas cuando se arrastran con los deslizadores y puntos indicados a continuación:

- Deslizador D, cuando lo arrastras desde E hasta F. El sentido del giro es hacia la izquierda (positivo)
- Deslizador R, cuando lo arrastras desde S hasta T el sentido del giro es hacia la derecha (negativo)
- Deslizador J, cuando lo arrastras desde K hasta L el sentido del giro es hacia la derecha (negativo)

*Imagen 51: Respuesta de la consigna 8*

El estudiante usa los términos izquierda y derecha para hacer alusión al sentido, como esquema personal que ha construido, lo que le permite significar que hacen referencia a un sentido positivo y un sentido negativo. El 95% de los estudiantes respondió acertadamente que las fichas giran en sentido positivo, negativo y negativo, respectivamente.

#### **9. Describe cuántos grados le es posible girar al bloque que corresponde al deslizador Y1.**

El 100% de los estudiantes contesta acertadamente que la ficha gira 360°, este resultado permite afirmar que con el desarrollo de las situaciones anteriores, los estudiantes han adquirido información que el medio les ha ofrecido, a partir de retroacciones, es decir que la acción instrumentada, les permitió visualizar los grados de rotación de las fichas en el espacio. Lo que se

dificultó en la consigna 2 de la situación #1, en la que los estudiantes presentaron dificultad en la percepción de los grados de rotación de las fichas, especialmente en la que gira  $270^\circ$ .

De los aciertos en la respuesta a la consigna 9, se puede decir que el artefacto ha pasado a ser un instrumento en manos del estudiante, dado que en la interacción con el medio, se ha evidenciado una nueva respuesta (gira  $360^\circ$ ), lo que se refleja en la construcción de un nuevo conocimiento. Así, se percibe que el estudiante ha logrado cambiar sus representaciones mentales, dando paso a la construcción de nuevos EU.

#### **10. Cuál es el eje de giro de los bloques que corresponden a los deslizadores A, O y M?**

En este caso el 100% de los estudiantes, logró identificar los ejes de rotación de cada una de las fichas mencionadas. Como se evidencia en las siguientes imágenes:

10. ¿Cuál es el eje de giro de las fichas que corresponden a los deslizadores A, O y M? eje de giro de estas fichas (A, O, M) es

A = eje X    O = eje Z    M = eje Y

Imagen 53: Respuesta 1 de la consigna 10

10. ¿Cuál es el eje de giro de las fichas que corresponden a los deslizadores A, O y M? A = eje X    O = eje Z    M = eje Y

Imagen 52: Respuesta 2 de la consigna 10

Lo que constata que en la situación 2, el estudiante al accionar sobre el medio, logró procesos de razonamiento que le permitieron la construcción de conocimientos, particularmente el

reconocimiento del eje de rotación, como elemento constitutivo de la transformación de rotación en el espacio, lo cual es nuevo para el estudiante, ya que la transformación de rotación en el plano se hace alrededor de un punto.

**11. De acuerdo a la exploración que se realizó en las actividades 1, 2 y 3 describa cuales son los elementos que se deben tener en cuenta para girar un objeto en el espacio.**

Como situación de validación permitió que los estudiantes llegaran al objetivo general de la SD, es decir que lograron exploraran las propiedades y características de la transformación de rotación en el espacio, a través del desarrollo de tres situaciones didácticas que integran el uso de un AGD. Dado que el 100% de los estudiantes logro verbalizar que los elementos constitutivos para efectuar una rotación en el espacio son, los grados, eje y sentido de rotación.

La mayoría de los estudiantes han logrado a través de los Applet, visualizar objetos abstractos de las matemáticas, en este caso características y propiedades de la transformación de rotación en el espacio.

A pesar que la situación 3 estaba prevista como una situación de validación, también se hicieron presentes las situaciones de acción y de formulación, dado que, por un lado el arrastre Lieu Muet, les permitió identificar las características de los movimientos efectuados por las fichas, y por otro lado se presentaron interacciones entre pares buscando argumentos que serían validados en el desarrollo de la clase, lo que se puede evidenciar en la siguiente situación.

E8: 90°?

E9: son 90° por que mire, esto es un cuarto de vuelta, aquí seria otro cuarto, acá otro cuarto y aquí otro cuarto. (Usa sus dedos para Señala el applet)

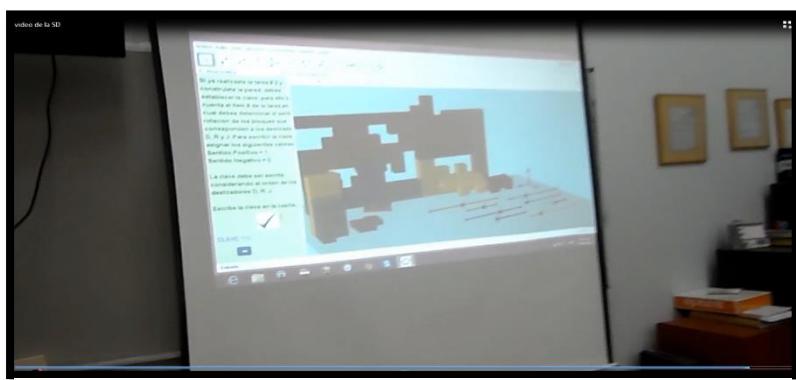
E8: a ver yo miro (arrastre Lieu muet)

*Dialogo 13: Situación de formulación.*



*Imagen 54: Situación 1 de validación*

Al finalizar las consignas de la situación #3, la profesora gestiona un espacio de interacción en el que a partir de la validación se efectúa la institucionalización del conocimiento adquirido. En ese momento revisan la clave, uno de los estudiantes pasa al frente e ingresa la clave frente a todos.



*Imagen 55: Situación 2 de validación*

En este momento la profesora interviene preguntando a los estudiantes si a todos les quedó igual.

La situación ha validado el sentido de giro de las fichas y se institucionaliza que el sentido de giro

puede ser positivo o negativo. De esta forma se realiza la validación para cada una de las consignas, como se puede evidenciar en la siguiente situación.

- La profesora lee la consigna 11

E: Pues yo puse que hay que tener en cuenta con el eje en que gira y al lado en que gira.

P: ¿Quién está de acuerdo?

E: Falta unita.

P: ¿Que más falta?.

E: Se deben tener en cuenta los grados, el eje y el sentido.

P: ¿Están de acuerdo todos?

Todos: siiii

P: Entonces ¿cuándo vamos a rotar un objeto en el espacio debemos tener en cuenta que?

E: Los grados. ¿Qué más necesitamos?

E: Un eje

P: ¿Cuáles son los ejes?

E: X, Y, Z.

P: ¿Que más necesitamos?

E: El sentido

*Dialogo 14: Validación de la consigna 11*

A partir de los conocimientos que el estudiante ha adquirido durante la situación a didáctica, el profesor realiza la institucionalización, es decir, que se tiene en cuenta todo el proceso de aprendizaje construido hasta el momento a través de la mediación de los artefactos que se integraron al aula y las diferentes intervenciones que efectuó el profesor.

## 5.5. CONSIDERACIONES FINALES DEL ANÁLISIS A POSTERIORI

De acuerdo al análisis a posteriori, se considera que la SD favoreció los criterios que se tuvieron en cuenta desde el enfoque de la OI, es decir un conjunto de individuos, un conjunto de objetivos, una configuración didáctica que fue fundamentada desde la TSD y los modos de aprovechamiento de dicha configuración.

La SD se desarrolló en un escenario real de clase, con un grupo de estudiantes, un profesor como orquestador de la clase, en donde se dispusieron previamente los artefactos a usar.

Los objetivos propuestos para la SD se cumplieron, dado que los estudiantes lograron reconocer los elementos constitutivos de la transformación de rotación en el espacio. Lo que fue posible a partir de la configuración didáctica que se estructuró desde la TSD, que favorece la implementación de situaciones de acción, situaciones de formulación, situaciones de validación e institucionalización.

Dichas situaciones fueron evidentes desde el momento en que se inicia el contrato didáctico, ya que los estudiantes asumieron la responsabilidad de buscar estrategias para desarrollar el trabajo propuesto, al igual que la profesora asumió la responsabilidad de gestionar situaciones de organización, devolución e institucionalización, generando en los estudiantes procesos de razonamiento que les permitieron visualizar las características de los objetos cuando sufren una transformación de rotación en el espacio.

La visualización de dichas características se apoyó en el uso de herramienta como el arrastre, que ofrece Geogebra 3D, con la que los estudiantes logran percibir la trayectoria que recorren las fichas.

Los resultados evidencian que el medio y la gestión didáctica del profesor permitieron que los estudiantes, desarrollaran las situaciones mencionadas, lo que generó la construcción de un conocimiento abstracto de la matemática, dado que ellos reconocieron las propiedades del artefacto y su uso en un proceso de instrumentalización, además fueron dando cuenta de los EU con que contaban para ir desarrollando lo que la situación les planteaba, por lo que se puede mencionar que el artefacto llegó a convertirse en instrumento para los estudiantes a partir de la SD y la intervención del profesor, en un proceso de aprendizaje mediado por artefactos.

## CAPÍTULO VI

### 6. CONCLUSIONES

En el presente apartado se presentarán las conclusiones generales del trabajo teniendo en cuenta en primer lugar los argumentos expuestos en el planteamiento del problema, la metodología y el marco teórico, en segundo lugar enfocado hacia el cumplimiento de los objetivos propuestos a nivel general y a nivel de la SD.

Respecto del primer punto, cabe señalar que con el planteamiento del problema se corroboró que efectivamente es importante preguntarse sobre ¿Qué caracteriza el diseño de una secuencia didáctica, desde la perspectiva de la orquestación instrumental, respecto a la transformación de rotación en el espacio tridimensional en estudiantes de grado noveno de educación básica? Dado que se puede configurar como un aporte teórico y práctico para la comunidad educativa, ya que parte del reconocimiento de una problemática en relación con el pensamiento espacial y sistema geométrico, de este modo se creó una SD que contemplará el uso de un AGD, que permite al estudiante construir conocimiento de forma activa interactuando con los objetos matemáticos, representados en un escenario real de tres dimensiones, lo cual le permite procesos de razonamiento que se establecen como conocimientos nuevos.

La metodología de investigación inspirada en la perspectiva de la Micro-Ingeniería didáctica, fue propicia para el desarrollo de la secuencia didáctica, pues a partir de las diferentes fases, se pudo diseñar, experimentar y evaluar satisfactoriamente la secuencia didáctica. Lo que permitió observar los fenómenos presentes en una situación real de aula de clase, para tomar de ellos los

más relevantes, analizarlos y así poder caracterizar y determinar la pertinencia de llevar al aula de clases una secuencia didáctica que se pensó desde la perspectiva de la OI y se estructuró con base en la TSD, mediada por un AGD.

Teniendo en cuenta que la Micro-Ingeniería se enfoca en la experimentación con grupos reales de clase, los análisis proporcionaron elementos importantes para identificar y prevé los conocimientos previos y las posibles actuaciones de los estudiantes, lo que favoreció la validación interna de los resultados.

En este sentido es posible admitir que la metodología implementada, permitió identificar criterios relevantes para caracterizar la SD, que se espera pueda ser considerada por aquellos docentes en formación y en ejercicio que deseen integrar a sus prácticas pedagógicas elementos artefactuales como los AGD.

Con respecto al marco teórico, se considera que será significativo para futuros docentes en formación en la sede Norte del Cauca de la universidad del Valle, dado que es el primer trabajo en la línea de las Tecnologías de la Información y la Comunicación a nivel de dicha sede, además es un marco teórico construido a partir de bibliografías relevantes que aún tienen vigencia dentro de la didáctica de las matemáticas.

Se debe indicar que este trabajo se puede complementar con otro tipo de estudios, donde se sigan implementando AGD, pero enfocados hacia el análisis de los procesos de enseñanza, donde

se analice el papel del profesor cuando interactúa con el artefacto identificando la gestión y las decisiones didácticas que se contemplan en dicha interacción.

Los referentes teóricos contemplados permitieron el logro de los objetivos propuestos, dado que el primer objetivo propuesto fue definir los criterios que orientan la caracterización del diseño de una SD desde la perspectiva de la OI, a continuación se enunciarán en una rejilla aquellos aspectos que fueron definidos como criterios para caracterizar la SD desde la perspectiva de la OI, fundamentada a partir de la TSD y de los cuales se dio cuenta en el los análisis a priori y a posteriori.

<b>CRITERIOS QUE ORIENTAN LA CARACTERIZACIÓN DEL DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA DESDE LA PERSPECTIVA DE LA ORQUESTACIÓN INSTRUMENTAL.</b>		
<b>MODO DE EXPLOTACIÓN DE LA CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA</b>	<b>CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA</b>	<b>ACTUACIONES DIDÁCTICAS</b>
Carácter curricular Carácter matemático Variable didácticas Visualización y arrastre Retroacción del medio.	Situación propuesta al estudiante	Contrato didáctico  Decisiones didácticas  Devolución Gestión de la clase.

Desde esta perspectiva los criterios que orientaron el diseño de la SD, se organizaron en tres grupos de criterios generales que dan cuenta de criterios específicos, es decir que con respecto a los modos de explotación de la configuración didáctica se dio cuenta de un carácter curricular, un

carácter matemático, unas variables didácticas, de los procesos de visualización y arrastre y las retroacciones del medio.

La configuración didáctica da cuenta de la situación propuesta al estudiante, por lo tanto desde la OI se definió un conjunto de objetivos relacionados con el tipo de actividad y los conocimientos que se esperaba que el estudiante adquiera en cada una de ellas.

Se definió un conjunto de individuos, una organización particular de la clase y los artefactos a integrar. Se pensó la planificación y diseño del dispositivo experimental desde la TSD en el AGD Geogebra 3D (cuenta con una Licencia Pública General GPL) en la que se dio cuenta de situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización, que privilegia el estudio de la geometría en el espacio y que puede ser implementada en cualquier institución educativa pública o privada, que cuente con elementos artefactuales como los computadores.

En las actuaciones didácticas se dio cuenta del Contrato didáctico establecido entre el profesor y los estudiantes, la gestión didáctica del profesor asociada a la organización, las decisiones y devoluciones didácticas del profesor, frente a las diferentes situaciones que surgen en el desarrollo de la clase cuando se integra un AGD para movilizar una noción matemática, particularmente la noción de transformación de rotación en el espacio.

El segundo objetivo es Fundamentar la concepción, diseño, realización, observación y análisis de una SD desde la perspectiva de la OI, en este sentido, la OI fundamentó la SD dado que permitió la articulación entre la concepción, diseño, realización y análisis de la SD, por lo tanto la

organización particular de la clase dio cuenta de la funcionalidad de los artefactos que se integraron. La OI funcionó como un sistema de aprovechamiento didáctico para orientar una actividad matemática que integra un AGD.

Con respecto al tercer objetivo, dar cuenta de los procesos de mediación instrumental, en el contexto de una SD, a partir de los conocimientos matemáticos e instrumentos que se ponen a disposición. Se logró dar cuenta de los procesos de mediación instrumental dado que con el AGD Geogebra 3D, los estudiantes en interacción con los instrumentos que se pusieron a disposición, y a través de la herramienta de arrastre manipularon los objetos propuestos en la construcción de los Applets, alcanzando procesos de razonamientos a partir de la visualización que les permitió interpretar, analizar, identificar, describir y explicar aspectos visuales, como son los elementos constitutivos de la trasformación de rotación en el espacio, eje, sentido y ángulo.

Los estudiantes lograron este tipo de razonamientos a partir de los conocimientos previos, con los que plantearon conjeturas sobre el tipo de movimiento que realizan las fichas, es decir, las diferentes rotaciones y reconocieron características de esta transformación como el eje, sentido y ángulo de cada ficha. Para lograr dichas conjeturas en los estudiantes, la SD dio cuenta de situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización y propició la gestión didáctica del profesor. Estos procesos permitieron que se cumplieran los objetivos propuestos para cada una de las situaciones.

El objetivo de la situación 1 es activar los conocimientos matemáticos previos que posee el estudiante, que mediante el arrastre y la visualización le permitan identificar el tipo de movimiento

que realizan la fichas, es decir rotaciones, reconociendo elementos conceptuales como el sentido y grados de rotación.

Lo que se pudo observar cuando el estudiante mediante los deslizadores efectuó el arrastre de las fichas, buscando regularidades que le permitieron recordar sus conocimientos previos, para dar cuenta del tipo de movimiento y sus características constitutivas. Todo enmarcado dentro de una situación de acción que permitió a su vez una situación de formulación.

El propósito de la situación 2, lograr que el estudiante identifique, que a diferencia de la rotación en el plano, los ejes (X, Y, Z) son un elemento conceptual fundamental en el movimiento de rotación de un objeto en el espacio, es decir que ya no se habla de un punto de rotación sino de un eje de rotación.

Se reconocieron también los diferentes giros que pueden realizar los sólidos según el eje que determine el movimiento, mediante procesos de visualización que surgieron en la interacción con el medio. Esta situación da cuenta de las fases de acción y de formulación, dado que el estudiante acciono sobre el medio y elaboró conjeturas a partir de las retroacciones que este le ofreció.

Con respecto a los aportes del presente trabajo, es pertinente mencionar que es un trabajo que aportó elementos teóricos y prácticos para los autores, en su formación como futuros profesores de educación matemáticas, abriendo un panorama bastante amplio con respecto a la potencialidad de integrar Tecnologías de la Información y la Comunicación para el aprendizaje de las matemáticas.

Es un aporte también para aquellos profesores que tengan interés en indagar y reflexionar acerca de sus prácticas pedagógicas, ya que el trabajo puede aportar elementos de análisis relevantes acerca de la pertinencia de integrar AGD en sus prácticas de aula.

## 7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

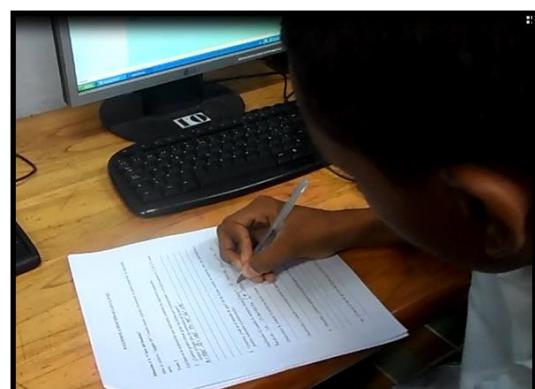
- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. P. Gómez. (ed.), Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. (pp. 33-59). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf>
- Barrantes, M. Balletbo, I. (2012). Tendencias actuales de la enseñanza – aprendizaje de la geometría en educación secundaria. Rev. Int. Investig. Cienc. Soc, 8(1), 25-42. Recuperado de:[http://www.uaa.edu.py/investigacion/download/riicsvol7.22012/3\\_Jul.2012\\_pag.25\\_Tendencias\\_geometria\\_Barrantes.pdf](http://www.uaa.edu.py/investigacion/download/riicsvol7.22012/3_Jul.2012_pag.25_Tendencias_geometria_Barrantes.pdf)
- Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires. Libros del Zorzal.
- Díaz, C. Álvarez, J. Torres, A. & Guacaneme, E. (1997). Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas -TIMSS- Colombia. Santafé de Bogotá: MEN.
- Gonzato, M. Fernández, T. Díaz, J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. NUMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas. 77, 99-117. Recuperado de: [http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Articulos\\_05.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Articulos_05.pdf)

- Largo, D. Martínez, E. Amaya, G. Barrientos, L. Rodríguez, E y Márquez, V. (2008). Los esquemas de uso y acciones instrumentadas del software RVC, en estudiantes de séptimo grado. Grupo de investigación: Grupo de Educación en Ciencias Experimentales y Matemáticas-GECEM. Universidad de Antioquia.
- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Santafé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de: [http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975\\_matematicas.pdf](http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf)
- MEN. (2004). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Santafé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional Recuperado de: [http://www.colombiaaprende.edu.co/html/productos/1685/articles113753\\_archivo.pdf](http://www.colombiaaprende.edu.co/html/productos/1685/articles113753_archivo.pdf)
- MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas y Ciencias Ciudadanas. Santafé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de: [http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021\\_recurso\\_1.pdf](http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf)
- MEN. (2015). Derechos Básicos de Aprendizaje. Santafé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de: [http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles349446\\_genera\\_dba.pdf](http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles349446_genera_dba.pdf)

- Rabardel, P. (2007). Los hombres y las tecnologías, visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos. Ediciones Universidad industrial Santander.
  
  
  
  
  
  
- Sánchez, M. (2006). Geometría Interactiva Aplicada al Estudio de Los Movimientos en el Plano. Recuperado de: [http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material105/guia\\_profesor.pdf](http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material105/guia_profesor.pdf)
  
  
  
  
  
  
- Trouche, L. (2002) Genèses instrumentales, aspects individuels et collectifs. En: GUIN, D. y Trouche, L. (Ed) Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail informatique: un problème didactique. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.
  
  
  
  
  
  
- García V. (2014) Una secuencia didáctica que integra GeoGebra para la enseñanza de ecuaciones lineales en grado octavo. (Tesis de maestría) Universidad Nacional de Colombia, Palmira – valle. Recuperado de: <http://www.bdigital.unal.edu.co/47084/1/34318975-Victoria.pdf>
  
  
  
  
  
  
- Montiel G, (2002) Una caracterización del contrato didáctico en un escenario virtual. (Tesis de maestría) Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Unidad Distrito Federal, Departamento de Matemática Educativa, México DF. Recuperado de: [http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/\(Montiel2002\)-Tesis-.pdf](http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/(Montiel2002)-Tesis-.pdf)
  
  
  
  
  
  
- Perrin- Glorian, M.J. (2009). Utilidad de la teoría de las situaciones didácticas para incluir los fenómenos vinculados a la enseñanza de las matemáticas en las clases normales. Revista Internacional Magisterio. 39.

## 8. ANEXOS

### 8.1. FOTOGRAFÍAS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA SD



## 8.2. PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES

### JUGUEMOS A DESCIFRAR LAS CLAVES

Nombre Julián Cardona Fulvio Fecha 07/06/16

#### Situación #1 "Clave de los Grados"

Abre el archivo "Applet # 1" Cuando hayas logrado armar la figura desarrolla la siguiente tarea.

1. Describe qué movimientos realizan las figuras cuando son arrastradas por los deslizadores para armar la figura dada.

Dan giros entre ellas mismas, cambiando sus posiciones para obtener la figura dada.

2. ¿Cuantos grados se desplazan las fichas correspondientes a los deslizadores N, U y D?

X para la N se desplaza  $90^\circ$ , para la U se desplaza  $180^\circ$  X  
X para la D se desplaza  $90^\circ$  X

$$N = 180^\circ \quad U = 270^\circ \quad D = 90^\circ$$

3. ¿Cómo es el movimiento que realiza cada una de las fichas?:

-Cuando arrastras el deslizador A desde C hasta B. gira sobre su propio eje

Y cuando arrastras el deslizador A desde B hasta C. hace el mismo movimiento Compara estos movimientos y determina sus diferencias, si las hay aunque los 2 giran sobre su eje, lo hacen en diferentes direcciones

-Cuando arrastras el deslizador U desde T hasta V. da un giro de  $180^\circ$  alrededor del tablero Y Cuando arrasta el deslizador M desde K hasta L. este gira sobre si mismo Compara estos movimientos y determina sus diferencias, si las hay mientras una gira alrededor del tablero el otro gira sobre si mismo.

Si la clave que ingresaste en el Applet es correcta, esribela en la siguiente casilla.

Clave 90180270

Si lograste terminar esta situación has ganado 2 puntos!

## JUGUEMOS A DESCIFRAR LAS CLAVES

### Situación # 2: "Clave de los Ejes"

Abre el archivo "Applet #2" Cuando hayas logrado armar la figura desarrolla la siguiente tarea.

4. Ubica la vista frente a la cara de la ficha roja que tienen 6 puntos y describe, ¿cuál es el sentido del giro que realiza cuando arrastras el deslizador A desde J hasta K?

giran hacia la derecha

Ahora ubica la vista frente a la cara de la ficha verde que tiene 8 puntos y describe ¿cuál es el sentido de giro cuando arrastras el deslizador B desde G hasta H?

gira hacia la izquierda

Compara el sentido de giro de estas dos fichas aunque las 2 giran sobre su propio eje estas giran en sentidos contrarios.

5. Teniendo en cuenta los ejes X, Y y Z contesta las siguientes preguntas:

¿Qué relación encuentras entre el movimiento que realiza la ficha que corresponde a:

Deslizador A y el eje X? La ficha del deslizador A gira alrededor del eje X.

Deslizador B y el eje Z? La ficha del deslizador B gira alrededor del eje Z.

Deslizador C y el eje Y? La ficha del deslizador C gira alrededor del eje Y

6. Se requiere que el movimiento de las fichas roja y azul sea igual al movimiento de la ficha verde, ¿qué se debe cambiar? se deben cambiar sus ejes para así cambiar su movimiento.

Si la clave que ingresaste en el Applet es correcta, escríbela en la siguiente casilla.

Clave 1007

¡Si lograste terminar esta situación has ganado 2 puntos!

### JUGUEMOS A DESCIFRAR LAS CLAVES

#### Situación # 3: "Clave del Sentido"

Abre el archivo "Applet #3". Cuando hayas logrado reconstruir la pared desarrolla la siguiente tarea.

Con base en la exploración que realizaste, contesta las siguientes preguntas.

7. ¿Cuántos grados deben girar las fichas que corresponden a los deslizadores A, O, M y G para ocupar el lugar que les pertenece en la pared?

El deslizador A gira  $180^\circ$  hacia un sentido negativo = ficha naranja  
 El deslizador B gira  $180^\circ$  hacia un sentido negativo = ficha morada  
 (1) " " M gira  $90^\circ$  hacia " " " positivo = ficha roja  
 " " " G "  $270^\circ$  hacia " " " negativo = ficha negra

8. Contesta, ¿cuál es el sentido de giro? de las fichas cuando se arrastran con los deslizadores y puntos indicados a continuación:

-Deslizador D, cuando lo arrastras desde E hasta F. el sentido de giro es positivo

-Deslizador R, cuando lo arrastras desde S hasta T el sentido de giro es negativo

-Deslizador J, cuando lo arrastras desde K hasta L el sentido de giro es negativo

9. Describe, ¿cuántos grados le es posible girar a la ficha que corresponde al deslizador Y?

A la ficha amarilla que le corresponde al deslizador Y, gira  $360^\circ$ .

10. ¿Cuál es el eje de giro de las fichas que corresponden a los deslizadores A, O y M?

A: eje X O: eje Z M: eje Y

11. . De acuerdo a la exploración que realizaste en las actividades 1, 2 y 3 describe, ¿cuáles son los elementos que se deben tener en cuenta para girar un objeto en el espacio?

Se deben tener en cuenta los grados, el eje y el sentido.

Si la clave que ingresaste en el applet es correcta, escríbela en la siguiente casilla

Clave: 100

¡Si lograste terminar esta situación has ganado 2 puntos!

Suma los puntos que has obtenido en las 3 situaciones, si lograste completar 6 puntos ¡Felicitaciones has ganado el juego!

## JUGUEMOS A DESCIFRAR LAS CLAVES

Nombre Deynes David Alegría C. Fecha 07 - junio - 16

Situación #1 "Clave de los Grados"

Abre el archivo "Applet # 1" Cuando hayas logrado armar la figura desarrolla la siguiente tarea.

1. Describe qué movimientos realizan las figuras cuando son arrastradas por los deslizadores para armar la figura dada.

todo movimiento que se da en las figuras es circular de 360°

2. ¿Cuantos grados se desplazan las fichas correspondientes a los deslizadores N, U y D?

N = 90°    U = 180°    D = 360°

3. ¿Cómo es el movimiento que realiza cada una de las fichas?:

-Cuando arrastras el deslizador A desde C hasta B. hace un movimiento circular en su mismo eje Y cuando arrastras el deslizador A desde B hasta C. hace el mismo movimiento en diferente dirección Compara estos movimientos y determina sus diferencias, si las hay la diferencia es que uno gira hacia la derecha y la otra hacia la izquierda

-Cuando arrastras el deslizador U desde T hasta V. hace un movimiento completo co de un todo el circulo Y Cuando arrastra el deslizador M desde K hasta L. hace el mismo movimiento pero de mancha incompleta Compara estos movimientos y determina sus diferencias, si las hay la diferencia es que desde t hasta v el movimiento es completo y desde k hasta l es incompleto

Si la clave que ingresaste en el Applet es correcta, escríbela en la siguiente casilla.

Clave

90180 360

## JUGUEMOS A DESCIFRAR LAS CLAVES

### Situación # 2: "Clave de los Ejes"

Abre el archivo "Applet #2" Cuando hayas logrado armar la figura desarrolla la siguiente tarea.

4. Ubica la vista frente a la cara de la ficha roja que tienen 6 puntos y describe, ¿cuál es el sentido del giro que realiza cuando arrastras el deslizador A desde J hasta K?

giran hacia la derecha

Ahora ubica la vista frente a la cara de la ficha verde que tiene 8 puntos y describe ¿cuál es el sentido de giro cuando arrastras el deslizador B desde G hasta H?

giran hacia la izquierda Compara el sentido de giro de estas dos fichas aunque los dos giran en su propio eje estos giran en sentidos contrarios

5. Teniendo en cuenta los ejes X, Y y Z contesta las siguientes preguntas:

¿Qué relación encuentras entre el movimiento que realiza la ficha que corresponde a:

Deslizador A y el eje X? la ficha del deslizador A gira alrededor del eje x

Deslizador B y el eje Z? la ficha del deslizador B gira alrededor del eje z

Deslizador C y el eje Y? la ficha del deslizador C gira alrededor del eje y

6. Se requiere que el movimiento de las fichas roja y azul sea igual al movimiento de la ficha verde, ¿qué se debe cambiar? se deben cambiar sus ejes para así cambiar su movimiento

Si la clave que ingresaste en el Applet es correcta, escríbela en la siguiente casilla.

Clave

1001

## JUGUEMOS A DESCIFRAR LAS CLAVES

### Situación # 3: "Clave del Sentido"

Abre el archivo "Applet #3" Cuando hayas logrado reconstruir la pared desarrolla la siguiente tarea.

Con base en la exploración que realizaste, contesta las siguientes preguntas.

7. ¿Cuantos grados deben girar las fichas que corresponden a los deslizadores A, O, M y G para ocupar el lugar que les pertenece en la pared?

A: gira  $180^\circ$  hacia un sentido negativo  
 el deslizador O: gira  $180^\circ$  hacia un sentido negativo  
 M: gira  $90^\circ$  hacia un sentido positivo  
 G: gira  $270^\circ$  hacia un sentido negativo

---

8. Contesta, ¿cuál es el sentido de giro? de las fichas cuando se arrastran con los deslizadores y puntos indicados a continuación:

-Deslizador D, cuando lo arrastras desde E hasta F. el sentido del giro es positivo

---

-Deslizador R, cuando lo arrastras desde S hasta T el sentido del giro es negativo

---

-Deslizador J, cuando lo arrastras desde K hasta L el sentido del giro es negativo

---

9. Describe, ¿cuántos grados le es posible girar a la ficha que corresponde al deslizador Y?

le es posible girar a  $360^\circ$

---

10. ¿Cuál es el eje de giro de las fichas que corresponden a los deslizadores A, O y M?

A = eje X      O = eje Z      M = eje Y

---

11. De acuerdo a la exploración que realizaste en las actividades 1, 2 y 3 describe, ¿cuáles son los elementos que se deben tener en cuenta para girar un objeto en el espacio?

eje , sentido, grados

---



---



---

Si la clave que ingresaste en el applet es correcta, escríbela en la siguiente casilla

Clave:

¡Si lograste terminar está situación has ganado 2 puntos!

Suma los puntos que has obtenido en las 3 situaciones, si lograste completar 6 puntos ¡Felicitaciones has ganado el juego!

### 8.3. PROTOCOLO DE CONSTRUCCIÓN DEL APPLET 2

Este applet es fundamental en la secuencia didáctica, ya que se pretende que el estudiante identifique, que a diferencia de la rotación en el plano, los ejes (X, Y, Z) son un elemento conceptual y fundamental en la transformación de rotación en el espacio, es decir que ya no se habla de un punto de rotación como centro, sino de un eje de rotación. En este sentido, este applet ha sido diseñado para que cada ficha gire en un eje diferente.

- 1) Traza los segmentos GH, EF, Jk sobre el plano XoY
- 2) Traza un punto sobre GH y nómbralo B

- 3) Traza el punto G1 sobre el plano (punto de origen de los ejes XYZ), con centro en este punto, radio 3 y paralelo al eje Z traza una circunferencia y nómbrala d (con la opción, circunferencia (centro radio y dirección))
- 4) Traza el punto K3 y L (puntos de intersección de la circunferencia d con el eje X)
- 5) Traza dos rectas paralelas al eje Y, una por el punto K3 y otra por el punto L
- 6) Trazar un punto en la intersección de la circunferencia d y el eje Y, nómbralo M
- 7) Trazar una recta paralela al eje X por M
- 8) Trazar el punto l sobre la circunferencia d
- 9) Rotar l con un ángulo de distancia GB alrededor del eje Z nómbralo l'
- 10) Traza el punto de intersección de la recta h y la resta e, nómbralo H1
- 11) Traza el punto de intersección de la recta g y la resta e, nómbralo J1
- 12) Rotar l'  $127.5^\circ$  alrededor del eje Z, nómbralo l''
- 13) Rotar l'  $-127.5^\circ$  alrededor del eje Z, nómbralo l'''1
- 14) Con la opción polígono trazar el triángulo l', l'', l'''1 y nómbralo triangulo 1. (coloréalo de verde)
- 15) Al segmento l', l'' nómbralo i'''1. Al segmento l'', l'''1 nómbralo i'. Al segmento l', l'''1 nómbralo i''
- 16) Traza una recta paralela al segmento i' por el punto l'
- 17) Traza el punto medio entre l'' y l'''1, llámalo N. Traza el segmento l' N, nómbralo i
- 18) Traza la recta j paralela a i por el punto l'''1
- 19) Traza la recta k paralela a i por el punto l''
- 20) Traza el punto de intersección de las rectas f y k, nómbralo O
- 21) Traza el punto de intersección de las rectas f y j, nómbralo P

- 22) Con la opción polígono traza el triángulo  $l'$ ,  $O$ ,  $l''$ , nómbralo triangulo 2.
- 23) Al segmento  $l'$ ,  $O$  nómbralo  $i''2$ . Al segmento  $l''$ ,  $O$  nómbralo  $i''2$ . Al segmento  $l'$ ,  $l''$  nómbralo o.
- 24) Con la opción polígono traza el triángulo  $P$ ,  $l''1$ ,  $l'$ , nómbralo triangulo 3.
- 25) Al segmento  $P$ ,  $l''1$  nómbralo  $i''2$ . Al segmento  $l''1$ ,  $l'$  nómbralo p. Al segmento  $l'$ ,  $p$  nómbralo  $i''3$ .
- 26) Traza el punto Q sobre el plano. Traza la recta l, perpendicular al plano que pase por el punto Q
- 27) Traza el plano  $m2$  por el punto Q perpendicular a la recta e.
- 28) Traza el punto R sobre la recta l
- 29) Traza la recta n que pasa por el punto R perpendicular al plano  $M2$  y traza una circunferencia q, con centro en R, radio 0.5 y paralela a la recta n
- 30) Traza un punto S sobre la circunferencia q
- 31) Traza el punto A sobre el segmento JK
- 32) Rotar el punto S con un ángulo de distancia JA, alrededor de la recta n. (resulta el punto  $s'$ )
- 33) Traza la recta r que pasa por el punto  $S'$  perpendicular al plano  $m2$
- 34) Traza la recta s que pasa por los puntos R y  $S'$
- 35) Traza el plano t, que pasa por el punto  $S'$ , perpendicular a la recta s
- 36) Traza el incentro de los triangulo 2 y 3.
- 37) Construye el triángulo 4 con las mismas dimensiones del triángulo 3 sobre el plano t, el incentro del triángulo 4 debe ser el punto  $S'$ . (Coloréalo de rojo)
- 38) Traza el punto C sobre el segmento EF

- 39) Traza el punto A1 sobre el plano XOY
- 40) Traza la recta e1 por el punto A1, perpendicular al plano XOY
- 41) Traza el plano u por el punto A1, perpendicular a la recta g
- 42) Traza el punto B1 sobre la recta e1
- 43) Traza la recta f1 por el punto perpendicular al plano u.
- 44) Traza la circunferencia h1 con centro en B1 y radio 0.5. Traza el punto C1 sobre la circunferencia h1. Rota el punto C1 sobre la circunferencia h1, con un angulo de rotación de distancia EC, alrededor de la recta f1
- 45) Traza la recta i1 por los puntos D1 y B1
- 46) Traza el plano j1 por el punto D1, perpendicular a la recta i1
- 47) Traza una recta que pasa por el punto D1, perpendicular al plano u
- 48) Rotar la recta k1 90°, alrededor de i1 (nómbrala l1)
- 49) Traza el punto F1 y l1 sobre la recta k1 (distancia entre f1 y l1 = distancia entre P y l'1)
- 50) Trazar la recta m1 por el punto F1 y traza la recta n1 por el punto l1 paralela a la recta l1
- 51) Trazar el punto E1 y K1 sobre la recta n1 (distancia entre E1 y K1= distancia entre l' y P)
- 52) Traza el punto L1 sobre la recta m1 y con la opción polígono traza el triángulo 5 sobre los puntos E1, L1, K1 y coloréalo de azul (el incentro del triángulo 5 debe ser el punto D1 y tener las mismas dimensiones del triángulo 2)
- 53) Haz que los triángulos 4 y 5 coincidan con los triángulos 2 y 3.
- 54) Los triángulos 1, 2 y 3 forman un cuadrado mide uno de sus lados
- 55) Con la opción “prisma o cilindro desde su base”, construye tres prismas que tengan como base el triángulo 1, 4 y 5, con alturas igual a la medida de los lados del cuadrado.

- 56) Oculta rectas puntos, triángulos, etc. Y solo deja los deslizadores A, B, C y los tres prismas de color verde, azul y rojo.
- 57) Los tres prismas forman un cubo, ahora traza 2, 4, 6, 8, 10, y 12 puntos en las distintas caras del cubo.
- 58) Para evitar la deformación de los prismas para cada una de sus caras selecciona la opción objeto fijo.