UNIVERSIDAD DE SUCRE
Facultad de Educación y Ciencias
Programa de Licenciatura en Matemáticas

Aplicación de algunos teoremas fundamentales del análisis matemático en la solución de problemas

T E S I S

Que para obtener el grado de Licenciada en Matemáticas
Presenta:

Danileth Almanza González
danileth1198@gmail.com

Director: Dr. Osmin Ferrer Villar
osmin.ferrer@unisucre.edu.co

Sincelejo, Sucre - 5 de febrero de 2021.

Resumen

En el presente trabajo, se realiza un estudio analítico detallado de los teoremas: Del extremo interior, de Rolle, del valor intermedio de Bolzano y el del valor medio y se aplican en la solución de problemas más elaborados. Para esto se hace necesario repasar y analizar las nociones y propiedades básicas de los números reales, como por ejemplo, la desigualdad de Cauchy y la propiedad de Arquímedes.

Abstract

In the present work, a detailed analytical study of the theorems is carried out: Of the inner end, of Rolle, of the intermediate value of Bolzano and that of the average value and they are applied in the solution of more elaborate problems. For this, it is necessary to review and analyze the notions and basic properties of real numbers, such as the Cauchy inequality and the Archimedean property.

Dedicatoria

A mis padres Ever Almanza y Adriana González; a mis hermanos Daniela Almanza y Jean Carlos Almanza; a familiares y amigos.

Agradecimientos

Le agradezco a Dios por llenarme de salud y bendiciones con su grande amor, así mismo por estar presente no solo en esta etapa importante de mi vida, sino en todo momento buscando lo mejor para mi, además por darme sabiduría, entendimiento y fuerzas para lograr una de mis metas y objetivos.

Un enorme agradecimiento a mi tutor el Dr. Osmin Ferrer Villar, por sus orientaciones, instrucciones, apoyo y motivación durante el proceso de este proyecto de mi vida, de igual manera por brindarme esta oportunidad que me permite crecer de diversas maneras.

Una gratitud hacia el Lcdo. Jesus David Dominguez Acosta por sus orientaciones y correcciones, también por haberme tenido paciencia para guiarme durante todo el desarrollo de la tesis.

A mi amigo y compañero de estudio Jhon Wilmar Ortega Madariaga por su acompañamiento, colaboración y apoyo moral que han aportado mucho en mis ganas de seguir adelante en mi carrera profesional.

A mi Hermana Daniela Almanza González por su apoyo incondicional y esperanzas en cumplir este logro.

Agradeciento a toda mi familia por brindarme su apoyo y compresión en los momentos más difíciles.

Por último, gratitud hacia el personal docente y administrativo de la facultad de educación y ciencias de la universidad de Sucre, por estar presente durante todo mi proceso de formación profesional.

Índice general

Introducción

El primer vestigio que se tiene del Teorema del Valor Medio nos remonta al siglo III A. C., mucho antes de que se formalizara el Cálculo.
Arquímedes de Siracusa demuestra rigurosamente que el área de un segmento parabólico es igual a cuatro tercios del área de un triángulo con misma base y misma altura. Pero su reconocimiento es debido al matemático italo-francés Joseph Louis de Lagrange (1736-1813), dicho teorema es considerado el resultado más importante del cálculo diferencial en una variable, ya permite obtener información sobre el comportamiento de una función (monotonía, extremos relativos) a partir del conocimiento de su función derivada. Es tan grande su importancia, que en los cursos de cálculo es ineludible nombrarlo ya que es un recurso para abordar el estudio del teorema fundamental de cálculo.
Otro teorema de gran importancia para el análisis , se dio en el año 1691, debido Michel Rolle, quien publica el libro Méthode pour résoudre les égalitéz, el cual contiene un teorema de mucha importancia. Este surge de manera incidental mientras Rolle trataba un método para solucionar ecuaciones de manera aproximada.
El estudio de dichos teoremas , es fundamental para cualquier estudiante que tenga que ver con las matemáticas, sobretodo porque sin un estudio analítico de ellos los cursos de cálculo se convierten en una simple manipulación de fórmulas y manejo de truco, el cual no es la verdadera esencia del estudio de las matemáticas.

Capítulo 1

EL CUERPO ORDENADO Y COMPLETO DE LOS NÚMEROS REALES

Supondremos la existencia de un conjunto no vacío, llamado los números reales ($\mathbb{R}$), dotado de dos funciones $(+)$ y $(\cdot)$.

$i)$
$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) &\longrightarrow +(a,b) \\ \text{Notaremos } &+(a,b) \text{ como } a+b \end{aligned}$$

$ii)$
$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) &\longrightarrow \cdot(a,b) \\ \text{Notaremos } &\cdot(a,b) \text{ como } a \cdot b \end{aligned}$$

Tales que se cumplen con los siguientes axiomas:

1. Axiomas de Campo

1.) $\forall x, y \in \mathbb{R}$
$a.)$ $x + y = y + x$
$b.)$ $x \cdot y = y \cdot x$

2.) $\forall x, y \in \mathbb{R}$
$a.)$ $(x+y)+z = x+(y+z)$
$b.)$ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

3.) $\forall x, y \in \mathbb{R}$
$a.)$ $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

4.) Existen elementos distintos cero y uno (0 y 1) tales que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple.
   a.) cero sumado con x es igual a x.
   b.) uno multiplicado con x es igual a x.

5.) Existencia de inversos aditivos y multiplicativos.
   a.) Dado $x \in \mathbb{R}$, existe un elemento $y \in \mathbb{R}$ tales que $x + y = 0$.
   b.) Dado $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, existe un elemento $t \in \mathbb{R}$ tales que $x \cdot t = 1$.

Proposición 1.1. *los módulos aditivos y multiplicativos son únicos.*

Demostración.

i.) Supongamos que a y b son ceros, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$, $x+a = x$ y $x+b = x$. En particular, como $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $b+a = b$ y $a+b = a$ se tiene $a = a+b = b+a = b$. Por lo tanto, el cero es único, el cual notaremos con el símbolo 0.

ii.) Supongamos p, q son módulos multiplicativos, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \cdot p = x$ y $x \cdot q = x$. En particular, como $p, q \in \mathbb{R}$, entonces $q \cdot p = q$ y $p \cdot q = p$ de donde

$p = p \cdot q = q \cdot p = q$. Por lo tanto, el uno es único, el cual notaremos con el símbolo 1.

$\square$

Observación 1.2. Los elementos cero y uno son diferentes $(0 \neq 1)$.

Proposición 1.3. *En los números Reales* $(\mathbb{R})$*, los inversos multiplicativos y aditivos son únicos.*

Demostración.

i.) Dado $x \in \mathbb{R}$, supongamos que a y b son inversos aditivos de x, entonces $x + a = 0$ y $x + b = 0$, luego $a = a + 0 = a + (x + b) = (a + x) + b = (x + a) + b = 0 + b = b$. Por lo tanto x tiene un inverso aditivo único.

ii.) Dado $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, supongamos que p y q son inversos multiplicativos de x, entonces $x \cdot p = 1$ y $x \cdot q = 1$, luego $p = p \cdot 1 = p \cdot (x \cdot q) = (p \cdot x) \cdot q = (x \cdot p) \cdot q = 1 \cdot q = q$. Por lo tanto x tiene un inverso multiplicativo único.

$\square$

Observación 1.4.

i) Dado $x \in \mathbb{R}$ fijo, entonces el número x tiene un inverso aditivo único, el cual notaremos $(-x)$.

ii) Dado un $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ fijo, entonces el número x tiene un inverso multiplicativo único, el cual notaremos x^{-1}.

iii) **Subnotación**: Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, entonces b tiene inverso multiplicativo, el cual ya sabemos que se nota como b^{-1}. Nosotros escribiremos $a \cdot b^{-1} = \dfrac{a}{b}$. En particular, cuando $a = 1$, entonces $1 \cdot b^{-1} = b^{-1} = \dfrac{1}{b}$.

Teorema 1.1. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *fijos, entonces las ecuaciones*

1. $x + a = b$ *tiene una única solución en los* $\mathbb{R}$*.*
2. $a \cdot x = b$ *tiene una única solución en los* $\mathbb{R}$*.*

Demostración.

Para 1. Como $a \in \mathbb{R}$ $(fijo)$, entonces a tiene inverso aditivo $-a \in \mathbb{R}$

i) !**Afirmación**¡ El número Real $(b + (-a))$ es solución de (1). En efecto,

$$x + a = [b + (-a)] + a = b + [(-a) + a] = b + 0 = b.$$

Así, $(b + (-a)) \in \mathbb{R}$ es solución de (1).

ii) Supongamos que x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación (1), luego la satisface, es decir, $x_1 + a = b$ *y* $x_2 + a = b$, en consecuencia,

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + [a + (-a)] = (x_1 + a) + (-a) = b + (-a) = (x_2 + a) + (-a)$$
$$= x_2 + [a + (-a)] = x_2 + 0 = x_2.$$

Por lo tanto, $x_1 = x_2$.

Para 2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ $(fijo)$, $a \neq 0$, entonces a tiene inverso multiplicativo, es decir que existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

i) !**Afirmación**¡ El número Real $(a^{-1}b)$ es solución (2). En efecto,
$ax = a \cdot (a^{-1} \cdot b) = (a \cdot a^{-1}) \cdot b = 1 \cdot b = b$
así, $(a^{-1}b) \in \mathbb{R}$ es solución de (2).

ii) Supongamos que x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación (2), luego la satisface, es decir, $a \cdot x_1 = b$ *y* $a \cdot x_2 = b$ en consecuencia,

$$x_1 = 1 \cdot x_1 = (a^{-1} \cdot a)x_1 = a^{-1} \cdot (a \cdot x_1) = a^{-1}(b)$$
$$= a^{-1}(a \cdot x_2) = (a^{-1} \cdot a)x_2 = 1 \cdot x_2 = x_2.$$

Por lo tanto, $x_1 = x_2$.

□

EJERCICIOS 1.1.

(1) $\forall a \in \mathbb{R},\ -(-a) = a$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $a + (-a) = (-a) + a = 0$, entonces a es el inverso aditivo de $-a$, luego $a = -(-a)$. □

Demostración alternativa. *Consideremos la ecuación* $x + (-a) = 0 \quad (\star)$. *Como* $a + (-a) = 0$, *entonces* a *es solución de* $(\star)$, *además* $-(-a) + (-a) = 0$, *entonces* $-(-a)$ *es soluciíon de* $(\star)$, *luego por el* **Teorema 1.1.1** *se tiene que* $(\star)$ *tiene solución única, entonces* $-(-a) = a$.

(2) $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ (a^{-1})^{-1} = a$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$, entonces a es el inverso multiplicativo de a^{-1} luego $a = (a^{-1})^{-1}$. □

Demostración alternativa. *Consideremos la ecuación* $a^{-1}x = 1 \quad (\diamond)$. *Como* $a^{-1} \cdot a = 1$, *entonces* a *es solución de* $(\diamond)$, *además* $a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1} = 1$, *entonces* $(a^{-1})^{-1}$

es soluciíon de ($\diamond$), *luego por Teorema 1.1 se tiene que* ($\diamond$) *tiene solución única, entonces* $(a^{-1})^{-1} = a$.

(3) $\forall a \in \mathbb{R},\ a \cdot 0 = 0$.

Demostración.

$$0 = a \cdot 0 + [-(a \cdot 0)] = a(0+0) + [-(a \cdot 0)] = a \cdot 0 + a \cdot 0 + [-(a \cdot 0)]$$
$$= a \cdot 0 + [a \cdot 0 + (-(a \cdot 0))] = a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0.$$

Por lo tanto, $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. $\square$

(4) $\forall a \in \mathbb{R},\ -a = (-1)a$.

Demostración. Consideremos la ecuación $x + a = 0 \quad (\circ)$. Como $-a + a = 0$, entonces $-a$ es solución de ($\circ$), además

$$(-1)a + a = (-1)a + 1 \cdot a = a(-1+1) = a \cdot 0 = 0$$

entonces $(-1)a$ es soluciíon de ($\circ$), luego por Teorema 1.1 se tiene que ($\circ$) tiene solución única, entonces $-a = (-1)a$. $\square$

(5) $\forall a \in \mathbb{R},\ (-1)(-a) = a$.

Demostración. *Como* $(-1)(-a) = (-1)b = -b = -(-a) = a$, por lo tanto $(-1)(-a) = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$. $\square$

(6) $\forall a \in \mathbb{R},\ (-a)(-a) = a \cdot a$.

Demostración.

$$(-a)(-a) = [(-1)a] \cdot [(-1)a] = [(-1)(-1)](a \cdot a) = [(-1)b](a \cdot a)$$
$$= (-b)(a \cdot a) = [-(-1)](a \cdot a) = 1 \cdot (a \cdot a) = a \cdot a.$$

Por lo tanto, $(-a)(-a) = a \cdot a$ para todo $a \in \mathbb{R}$. $\square$

Observación 1.5. Para todo $a \in \mathbb{R}$, el número $a \cdot a \in \mathbb{R}$, lo notaremos como $a^2 \in \mathbb{R}$

7. *Si* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $a \cdot b = 0$ *entonces* $a = 0$ *ó* $b = 0$.

Demostración. Si $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\underbrace{a \cdot b = 0}_{p}$ *entonces* $\underbrace{a = 0}_{q}$ ó $\underbrace{b = 0}_{r}$. Utilicemos la proposición lógica conjugada $[p \longrightarrow (q \vee r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge \sim q) \longrightarrow r]$
Sea $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $a \cdot b = 0$ y supongamos que $a \neq 0$ *entonces* $b = 0$ *y* existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a.a^{-1} = 1$, luego $b = 1 \cdot b = (a^{-1} \cdot a)b = (a^{-1}) \cdot (a \cdot b) = (a^{-1}) \cdot 0 = 0$. $\square$

8. *Si* $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *entonces* $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

   Demostración. Como $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces existen sus inversos multiplicativos, luego se tiene que:
   i) $(a \cdot b) \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) = (b \cdot a)(a^{-1} \cdot b^{-1}) = b \cdot (a \cdot a^{-1}) \cdot b^{-1} = b \cdot 1 \cdot b^{-1} = b \cdot b^{-1} = 1$.

   ii) $(a^{-1} \cdot b^{-1})(a \cdot b) = (a^{-1} \cdot b^{-1})(b \cdot a) = a^{-1} \cdot (b^{-1} \cdot b) \cdot a = a^{-1} \cdot 1 \cdot a = a^{-1} \cdot a = 1$.
   Entonces $(a \cdot b)$ es el inverso multiplicativo de $a^{-1} \cdot b^{-1}$, por lo tanto por i) y ii) $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$. □

9. *Si* $a, b \in \mathbb{R}$ *entonces* $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

   Demostración.
   i) $(a + b) + (-a) + (-b) = (b + a) + [(-a) + (-b)] = b + [a + (-a)] + (-b) = b + 0 + (-b) = b + (-b) = 0$.

   ii) $(-a) + (-b) + (a + b) = [(-a) + (-b)] + (b + a) = (-a) + [(-b) + b] + a = (-a) + [b + (-b)] + a = (-a) + 0 + a = a + (-a) = 0$.
   Por lo tanto por i) y ii) el inverso aditivo de $(a + b)$ es $(-a) + (-b)$. □

10. *Si* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *son tales que* $a + c = b + c$ *si y sólo si* $a = b$.

    Demostración. Supongamos que $a + c = b + c$, luego

    $$\begin{aligned} a = a + 0 = \ & a + [c + (-c)] = (a + c) + (-c) = (b + c) + (-c) \\ & = b + [c + (-c)] = b + 0 = b. \end{aligned}$$

    Por otro lado, supongamos que $a = b$, entonces $a + c = b + c$. □

11. *Si* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *donde* $c \neq 0$ *y* $a \cdot c = b \cdot c$ *sí y sólo si* $a = b$.

    Demostración. Supongamos que $a \cdot c = b \cdot c$. Como $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ existe c^{-a}, luego

    $$\begin{aligned} a = a \cdot 1 = \ & a \cdot [c \cdot (c^{-1})] = (a \cdot c) \cdot (c^{-1}) = (b \cdot c) \cdot (c^{-1}) \\ & = b \cdot [c \cdot (c^{-1})] = b \cdot 1 = b. \end{aligned}$$

    Por otro lado, supongamos que $a = b$, luego $a \cdot c = b \cdot c$. □

12. *Si* $a \in \mathbb{R}$ *tal que* $a + a = a$ *entonces* $a = 0$.
    Como $a + a = a = 0 + a$ *por* **Prop 1.3** *se sigue* $a = 0$.

TEOREMA 1.2. *Sea $a, b, c, d \in \mathbb{R},\ c, d \neq 0$ entonces se cumple:*

$$i)\ \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad ii)\ \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$$

DEMOSTRACIÓN.
Para $i)$ $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} =\ a \cdot c^{-1} + b \cdot c^{-1} =\ c^1 \cdot (a+b) = \frac{a+b}{c}$.
Para $ii)$ $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} =\ a \cdot c^{-1} + b \cdot d^{-1} =\ (a \cdot c^{-1}) \cdot 1 + (b \cdot d^{-1}) \cdot 1 =\ (a \cdot c^{-1}) \cdot (d^{-1} \cdot d) + (b \cdot d^{-1}) \cdot (c^{-1} \cdot c)$
$=\ (a \cdot d)(c^{-1} \cdot d^{-1}) + (b \cdot c)(c^{-1} \cdot d^{-1}) =\ (a \cdot d)(c \cdot d)^{-1} + (b \cdot c)(c \cdot d)^{-1} =\ (ad+bc)(cd)^{-1}$
$= \frac{ad+bc}{cd}$.

$\square$

Daremos por cierto la existencia de un subconjunto $\mathbb{R}$, llamado reales positivos, el cual se notará $\mathbb{R}^+$ y es tal que se cumplen los siguientes axiomas:

2. Axiomas de Orden

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow (x+y) \in \mathbb{R}^+$
(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow (x \cdot y) \in \mathbb{R}^+$
(3) Dado $x \in \mathbb{R}$, se verifica una y sólo una de las tres alternativas siguientes:

$$i)\ x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{ó} \quad ii)\ -x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{ó} \quad iii)\ x = 0$$

OBSERVACIÓN 1.6. Indicamos mediante $\mathbb{R}^-$ al conjunto de los números $-x$, donde $x \in \mathbb{R}^+$, el axioma de orden 3. nos dice que $\mathbb{R} := \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ y que los conjuntos $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ y $\{0\}$ son disyuntos dos a dos. Los números $y \in \mathbb{R}^-$ los llamaremos números negativos y los números $x \in \mathbb{R}^+$ los llamaremos números positivos, entonces se definen los conjuntos $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$ y $\mathbb{R}^- := \{-x/x \in \mathbb{R}^+\}$.

DEFINICIÓN 1.7. si $a, b \in \mathbb{R}$, son tales que $((a + (-b)) \in \mathbb{R}^+$, entonces diremos que a es mayor que b.

EJEMPLO 1.8. Sean $5, -3 \in \mathbb{R}$, luego $5 + (-3) = 2 \in \mathbb{R}^+$ por lo tanto 5 es mayor que 3.

OBSERVACIÓN 1.9.

i) si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que a es mayor que b, entonces lo notaremos $a > b$.
ii) si $a > b$ ó $a = b$, entonces resumiremos escribiendo $a \geq b$.
iii) Cuando encontramos $a < b$ indicará que es $b > a$.

Proposición 1.10. **Propiedad de tricotomía en** $\mathbb{R}$. *Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces una y solo una de las siguientes afirmaciones es verdadera. i)* $x > y$ *ó ii)* $y > x$ *ó iii)* $x = y$.

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $(y - x) \in \mathbb{R}$. Por el axioma (3) de orden, se verifica una y solo una de las siguientes alternativas ó $(y - x) \in \mathbb{R}^+$, ó $y - x = 0$ ó $-(y - x) \in \mathbb{R}^+$. Como $-(y - x) = x - y$; se concluye que $x < y$ ó $x = y$ ó $y < x$. $\square$

Ejercicios 2.1.

(1) *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*

(a) *Si $a > b$ entonces $a + c > b + c$.*

Demostración. Sea $a > b$ entonces $[a + (-b)] \in \mathbb{R}^+$ de aquí $[a + (-b) + 0] \in \mathbb{R}^+$, luego $(a + (-b) + [c + (-c)]) \in \mathbb{R}^+$, de donde $(a + [(-b) + c] + (-c)) \in \mathbb{R}^+$, en consecuencia $(a + [c + (-b)] + (-c)) \in \mathbb{R}^+$, por lo que $((a + c) + [(-b) + (-c)]) \in \mathbb{R}^+$, así $((a + c) + [-(b + c)]) \in \mathbb{R}^+$, por lo tanto $a + c > b + c$. $\square$

(b) *Si $a \leq b$ y $b < c$ entonces $a < c$.*

Demostración. Como $b \geq a$ y $c > b$ se tiene $b > a$ ó $b = a$ y $c > b$ por consiguiente $b > a$ y $c > b$ ó $b = a$ y $c > b$ de manera que $b > a$ y $c > b$ ó $c > a$ de donde $\big((b + (-a)) \in \mathbb{R}^+$ y $(c + (-b)) \in \mathbb{R}^+\big)$ ó $c > a$ así $\big([c + (-b)] + [b + (-a)]\big) \in \mathbb{R}^+$ ó $c > a$, luego $\big(c + [(-b) + b] + (-a))\big) \in \mathbb{R}^+$ ó $c > a$ por eso $\big(c + [0] + (-a)\big) \in \mathbb{R}^+$ ó $c > a$ de manera que $\big(c + (-a)\big) \in \mathbb{R}^+$ ó $c > a$ así $c > a$ ó $c > a$, luego $c > a$, por lo tanto $a < c$. $\square$

(c) *Si $a > 0$ entonces $-a < 0$.*

Demostración. $a > 0$ de donde $(a + (-0)) \in \mathbb{R}^+$ en consecuencia $(a + 0) \in \mathbb{R}^+$ por ende $(0 + a) \in \mathbb{R}^+$ así $(0 + (-(-a))) \in \mathbb{R}^+$ por eso $0 > -a$, por lo tanto $-a < 0$. $\square$

(d) *Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$.*

Demostración. Como $(b \geq a$ y $d \geq c)$, luego $(b > a$ ó $b = a)$ y $(d > c$ ó $d = c)$ por eso $[(b > a$ ó $b = a)$ y $d > c]$ ó $[(b > a$ ó $b = a)$ y $d = c]$ así $[(b > a$ y $d > c)$ ó $(b = a$ y $d > c)]$ ó $[(b > a$ y $d = c)$ ó $(b = a$ y $d = c)]$ de donde $[(b > a$ y $d > c)$ ó $(a + c < b + d)]$ ó $[(a + c < b + d)$ ó $(a + c = b + d)]$ de manera que $(a + c < b + d)$ ó $[(b > a$ y $d > c)$ ó $(a + c = b + d)]$ en consecuencia $[(a + c < b + d)$ ó $\big((b + (-a)) \in \mathbb{R}^+$ y $(d + (-c)) \in \mathbb{R}^+\big)]$ ó $(a + c = b + d)$.

Luego $[(a+c<b+d)$ ó $\big((b+(-a))+(d+(-c))\big)\in\mathbb{R}^+]$ ó $(a+c=b+d)$ por esta razón $[(a+c<b+d)$ ó $\big(b+[(-a)+d]+(-c)\big)\in\mathbb{R}^+]$ ó $(a+c=b+d)$ lo que implica $[(a+c<b+d)$ ó $\big(b+[d+(-a)]+(-c)\big)\in\mathbb{R}^+]$ ó $(a+c=b+d)$ por tanto $[(a+c<b+d)$ ó $\big([b+d]+[(-a)]+(-c)]\big)\in\mathbb{R}^+]$ ó $(a+c=b+d)$ así pues$[(a+c<b+d)$ ó $\big([b+d]+[-(a+c)]\big)\in\mathbb{R}^+]$ ó $(a+c=b+d)$ por ello $[(a+c<b+d)$ ó $(b+d>a+c)]$ ó $(a+c=b+d)$ de ahí que $(a+c<b+d)$ ó $(a+c=b+d)$, por lo tanto $(a+c\le b+d)$. □

(e) *Si* $a>0$ *y* $b>0$ *entonces* $a\cdot b>0$.

Demostración. Como $a>0$ y $b>0$ entonces $(a+(-0))\in\mathbb{R}^+$ y $(b+(-0))\in\mathbb{R}^+$ con lo que $(a+0)\in\mathbb{R}^+$ y $(b+0)\in\mathbb{R}^+$ se tiene $(a)\in\mathbb{R}^+$ y $(b)\in\mathbb{R}^+$ por tanto $(a\cdot b)\in\mathbb{R}^+$ así $(a\cdot b+0)\in\mathbb{R}^+$, luego $(a\cdot b+(-0))\in\mathbb{R}^+$ en consecuencia $a\cdot b>0$. □

(f) *Si* $a<0$ *y* $b<0$ *entonces* $a\cdot b>0$.

Demostración. Como $a<0$ y $b<0$ entonces $(0+(-a))\in\mathbb{R}^+$ y $(0+(-b))\in\mathbb{R}^+$, luego $[(0+(-a))\cdot(0+(-b))]\in\mathbb{R}^+$ por lo tanto $[(-a)\cdot(0+(-b))]\in\mathbb{R}^+$ por esta razón $(-a)\cdot 0+(-a)\cdot(-b)]\in\mathbb{R}^+$ así $[-(a\cdot 0)+(a)\cdot(b)]\in\mathbb{R}^+$ de manera que $[-(0)+(a)\cdot(b)]\in\mathbb{R}^+$ de ahí que $[(a)\cdot(b)+(-0)]\in\mathbb{R}^+$ así pues $a\cdot b>0$. □

(g) *Si* $a<0$ *y* $b>0$ *entonces* $a\cdot b<0$.

Demostración. Como $a<0$ y $b>0$ entonces $(0+(-a))\in\mathbb{R}^+$ y $(b+(-0))\in\mathbb{R}^+$ se tiene $[(0+(-a))\cdot(b+(-0))]\in\mathbb{R}^+$ por consiguiente $[(0+(-a))\cdot(b)]\in\mathbb{R}^+$ así $[(0\cdot b)+(-a)\cdot b]\in\mathbb{R}^+$, luego $[0+(-(a\cdot b))]\in\mathbb{R}^+$de ahí que $a\cdot b<0$. □

(h) *Si* $a<b$ *y* $c>0$ *entonces* $a\cdot c>b\cdot c$.

Demostración. $a<b$ y $c>0$ entonces $b>a$ y $c>0$, luego $(b+(-a))\in\mathbb{R}^+$ y $(c+(-0))\in\mathbb{R}^+$ así $(b+(-a))\in\mathbb{R}^+$ y $(c)\in\mathbb{R}^+$ se tiene $[(b+(-a))\cdot(c)]\in\mathbb{R}^+$ de donde $[(b\cdot c)+(-a)\cdot(c)]\in\mathbb{R}^+$ por esta razón $[(b\cdot c)+(-(a\cdot c))]\in\mathbb{R}^+$ en consecuencia $b\cdot c>a\cdot c$. □

(i) *Si* $a<b$ *y* $c<0$ *entonces* $a\cdot c<b\cdot c$.

DEMOSTRACIÓN. $a < b$ y $c < 0$ entonces $b > a$ y $0 > c$ así $(b + (-a)) \in \mathbb{R}^+$ y $(0 + (-c)) \in \mathbb{R}^+$ de manera que $(b + (-a)) \in \mathbb{R}^+$ y $(-c) \in \mathbb{R}^+$ de donde $[(b + (-a)) \cdot (-c)] \in \mathbb{R}^+$ por lo que $[(b \cdot (-c) + (-a) \cdot (-c)] \in \mathbb{R}^+$, luego $[-(b \cdot c) + (a \cdot c))] \in \mathbb{R}^+$ de ahí $[(a \cdot c) + (-(bc))] \in \mathbb{R}^+$ por tanto $a \cdot c > b \cdot c$. □

(j) $a^2 \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Como $a \in \mathbb{R}$ entonces $a \in \mathbb{R}^+$ ó $-a \in \mathbb{R}^+$ ó $a = 0$ con tal de $a \cdot a \in \mathbb{R}^+$ ó $(-a) \cdot (-a) \in \mathbb{R}^+$ ó $a \cdot a = 0 \cdot 0$ por eso $a \cdot a \in \mathbb{R}^+$ ó $a \cdot a \in \mathbb{R}^+$ ó $a \cdot a = 0 \cdot 0$ por tanto $a^2 \in \mathbb{R}^+$ ó $a^2 \in \mathbb{R}^+$ ó $a^2 = 0$ dado que $a^2 \in \mathbb{R}^+$ ó $a^2 = 0$ por ende $(a^2 + 0) \in \mathbb{R}^+$ ó $a^2 = 0$ de modo que $(a^2 + (-0)) \in \mathbb{R}^+$ ó $a^2 = 0$ por esta razón $a^2 > 0$ ó $a^2 = 0$, por lo tanto $a^2 \geq 0$. □

(k) *Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $a \neq 0$ entonces $a \in \mathbb{R}^+$ ó $-a \in \mathbb{R}^+$ de donde $a \cdot a \in \mathbb{R}^+$ ó $(-a) \cdot (-a) \in \mathbb{R}^+$ pues $a \cdot a \in \mathbb{R}^+$ ó $a \cdot a \in \mathbb{R}^+$ puesto que $a^2 \in \mathbb{R}^+$ ó $a^2 \in \mathbb{R}^+$, luego $a^2 \in \mathbb{R}^+$ tanto como $(a^2 + 0) \in \mathbb{R}^+$ se tiene $(a^2 + (-0)) \in \mathbb{R}^+$, por lo tanto $a^2 > 0$. □

(l) $1 > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Teniendo en cuenta la **Prop. 1.2**, entonces $1 = 1$ entonces $1 = 1 \cdot 1$ por consiguiente $1 = 1^2$ dado que $1 \geq 0$ así $1 > 0$ ó $1 = 0$, luego $1 > 0$ ó $falso$ por tanto $1 > 0$. □

(m) *Si $a > 0$ entonces $a^{-1} > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $a \in \mathbb{R}$, entonces existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$, luego como $a > 0$ entonces $a \cdot (a^{-1})^2 > 0 \cdot (a^{-1})^2$ así $a \cdot (a^{-1} \cdot a^{-1}) > 0$ en consecuencia $(a \cdot a^{-1}) \cdot a^{-1} > 0$ de donde $1 \cdot a^{-1} > 0$ por tanto $a^{-1} > 0$. □

(n) *Si $a > b > 0$ entonces $0 < a^{-1} < b^{-1}$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $a > b > 0$ entonces $a > b$ y $a > 0$ y $b > 0$ se tiene $a > b$ y $a^{-1} > 0$ y $b^{-1} > 0$ pues $a > b$ y $a^{-1} \cdot b^{-1} > 0$ por esta razón $(a^{-1} \cdot b^{-1}) \cdot a > (a^{-1} \cdot b^{-1}) \cdot b$ de modo que $b^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot a) > a^{-1} \cdot (b^{-1} \cdot b)$, luego $b^{-1} \cdot 1 > a^{-1} \cdot 1$ así $b^{-1} > a^{-1} > 0$. □

o) $\left[\frac{1}{2}(a + b)\right]^2 \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, *la igualdad se cumple cuando $a = b$.*

Demostración. Consideremos dos casos.

$$i)\ a = b \qquad ii)\ a \neq b$$

Para i)
$a = b$ entonces $a-b = 0$ de manera que $(a-b)^2 = 0$ por tanto $a^2-2ab+b^2 = 0$ se tiene $a^2-2ab+b^2+(a^2+b^2) = 0+(a^2+b^2)$ dado que $2(a^2+b^2)-2ab = a^2+b^2$ con tal de $2(a^2+b^2) = a^2+b^2+2ab$ tanto como $2(a^2+b^2) = (a+b)^2$ por consiguiente $(2^{-1}\cdot 2^{-1})\cdot 2(a^2+b^2) = (2^{-1}\cdot 2^{-1})\cdot(a+b)^2$ por eso $2^{-1}(a^2+b^2) = 4^{-1}(a+b)^2$, luego $\frac{1}{2}(a^2+b^2) = \frac{1}{2^2}(a+b)^2$ de donde $\frac{1}{2}(a^2+b^2) = \left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2$ así que $\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2)$.

Para ii)
$a \neq b$ entonces $a-b \neq 0$ en consecuencia $(a-b)^2 > 0$ por ende $a^2-2ab+b^2 > 0$ de ahí que $a^2-2ab+b^2+(a^2+b^2) > 0+(a^2+b^2)$ tanto como $2(a^2+b^2)-2ab > a^2+b^2$ por ende $2(a^2+b^2) > a^2+b^2+2ab$ se tiene $2(a^2+b^2) > (a+b)^2$ puesto que $(2^{-1}\cdot 2^{-1})\cdot 2(a^2+b^2) > (2^{-1}\cdot 2^{-1})\cdot(a+b)^2$ así $2^{-1}(a^2+b^2) > 4^{-1}(a+b)^2$ de donde $\frac{1}{2}(a^2+b^2) > \frac{1}{2^2}(a+b)^2$ por esta razón $\frac{1}{2}(a^2+b^2) > \left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2$, luego $\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2 < \frac{1}{2}(a^2+b^2)$
Por lo tanto, de $i)$ y $ii)$ se concluye que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2 \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2).$$

□

p) $a^2+b^2 = 0$ *entonces* $a = 0$ *y* $b = 0$.

Demostración. .
(Vía reducción al absurdo: $(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow [(p \wedge \sim q) \longrightarrow f]$)
Supongamos que $a^2+b^2 = 0$, entonces $a \neq 0$ ó $b \neq 0$ se tiene $a^2 > 0$ ó $b^2 > 0$ por ende $a^2+b^2 > a^2 > 0$ ó $a^2+b^2 > b^2 > 0$ de manera que $a^2+b^2 > 0$ ó $a^2+b^2 > 0$ por esta razón $a^2+b^2 > 0$, luego $a^2+b^2 > 0$ y $a^2+b^2 = 0$ así que es una falsedad. □

q) *Si* $a, b \geq 0$ *y* $a^2 < b^2$ *entonces* $a < b$.

Demostración. Como $a, b \geq 0$ y $a^2 < b^2$ entonces $b^2 > a^2$ por consiguiente $(b^2 + (-a^2)) \in \mathbb{R}^+$ de ahí que $(b^2 - a^2) \in \mathbb{R}^+$, luego $(b-a)(b+a) \in \mathbb{R}^+$ por eso $[(b-a) \in \mathbb{R}^+$ y $(b+a) \in \mathbb{R}^+]$ ó $[-(b-a) \in \mathbb{R}^+$ y $-(b+a) \in \mathbb{R}^+]$ de modo que $[(b-a) \in \mathbb{R}^+$ y $((b+a)+(-0)) \in \mathbb{R}^+]$ ó $[(a-b) \in \mathbb{R}^+$ y $(0-(b+a)) \in \mathbb{R}^+]$ por tanto $[b > a$ y $b + a > 0]$ ó $[a > b$ y $0 > b + a]$ se tiene $[b > a$ y $b + a > 0]$ ó f por lo que $b > a$ y $b + a > 0$ puesto que $a < b$. $\square$

(2) *Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ tal que $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a \cdot c \leq b \cdot d$.*

Demostración. Como $b \geq a$ y $d \geq c$ entonces ($b > a$ ó $b = a$) y ($d > c$ ó $d = c$) de modo que (($b > a$ ó $b = a$) y $d > c$) ó (($b > a$ ó $b = a$) y $d = c$) se tiene (($b > a$ y $d > c$) ó ($b = a$ y $d > c$)) ó (($b > a$ y $c = d$) ó ($b = a$ y $d = c$)) por esta razón (($b > a$ y $d > c$) ó $(bd > ac)$) ó ($(bd > ac)$ ó $(bd = ac)$) de aquí se sigue ($b > a$ y $d > c$) ó ($(bd > ac)$ ó $(bd > ac)$) ó $(bd = ac)$ por ende ($b > a$ y $d > c$) ó $(\underbrace{(bd > ac) \text{ o } (bd = ac)}_{p(x)})$.

Luego ($b > a$ y $d > c$ y $(a+b) \in \mathbb{R}^+$ y $(b+d) \in \mathbb{R}^+$) ó $p(x)$ por lo que ($(b-a) \in \mathbb{R}^+$ y $(d-c) \in \mathbb{R}^+$ y $(a+b) \in \mathbb{R}^+$ y $(b+d) \in \mathbb{R}^+$) ó $p(x)$ de donde $[((b-a)\cdot(d+c)) \in \mathbb{R}^+$ y $((a+b)\cdot(d-c)) \in \mathbb{R}^+]$ ó $p(x)$ de ahí que $[(bd-ac+bc-ad) \in \mathbb{R}^+$ y $(ad-bc+bd-ac) \in \mathbb{R}^+]$ ó $p(x)$ por consiguiente $[((bd-ac)+(bc-ad+ad-bc)+(bd-ac)) \in \mathbb{R}^+]$ ó $p(x)$ de manera que $[((bd-ac)+(0)+(bd-ac)) \in \mathbb{R}^+]$ ó $p(x)$ tanto como $[((bd-ac)+(bd-ac)) \in \mathbb{R}^+]$ ó $p(x)$ puesto que $[(2bd + (-2ac)) \in \mathbb{R}^+]$ ó $p(x)$ por esta razón $[2bd > 2ac]$ ó $p(x)$ dado que $[2^{-1}\cdot 2bd > 2^{-1}\cdot 2ac]$ ó $p(x)$ en consecuencia $[1\cdot bd > 1\cdot ac]$ ó $p(x)$ por tanto $[bd > ac]$ ó $[(bd > ac)$ ó $(bd = ac)]$ así que $[bd > ac$ ó $bd > ac]$ ó $(bd = ac)$ una vez que $[bd > ac]$ ó $(bd = ac)$ pues $bd \geq ac$, por lo tanto $ac \leq bd$. $\square$

Teorema 2.1. (**Regla de valores intermedios o regla de medición entre el más y el menos**). *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, donde $b, d \neq 0$ y $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ si, y sólo si*

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Demostración. .
Sea $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ si, y sólo si $\dfrac{c}{d} > \dfrac{a}{b}$ sí $\left(\dfrac{c}{d} + \left(-\dfrac{a}{b}\right)\right) \in \mathbb{R}^+$ aunque $\left(\dfrac{c}{d} - \dfrac{a}{b} + 0\right) \in \mathbb{R}^+$ como $\left[\dfrac{c}{d} - \dfrac{a}{b} + \left(\dfrac{a+c}{b+d} - \dfrac{a+c}{b+d}\right)\right] \in \mathbb{R}^+$ siempre que $\left[\left(\dfrac{a+c}{b+d} + \left(-\dfrac{a}{b}\right)\right) + \left(\dfrac{c}{d} + \left(-\dfrac{a+c}{b+d}\right)\right)\right] \in \mathbb{R}^+$

mientras que $\left[\dfrac{a+c}{b+d}+\left(-\dfrac{a}{b}\right)\right]\in\mathbb{R}^+$ y $\left[\dfrac{c}{d}+\left(-\dfrac{a+c}{b+d}\right)\right]\in\mathbb{R}^+$ sí $\dfrac{a+c}{b+d}>\dfrac{a}{b}$ y $\dfrac{c}{d}>\dfrac{a+c}{b+d}$ con tal de que $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}$ y $\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$, por lo tanto $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$. $\square$

Corolario 1.1.

i) Si $a,b\in\mathbb{R}$ y $a<b$, entonces $a<\dfrac{a+b}{2}<b$.

Demostración. Como $a<b$ entonces $a<b$ y $a<b$ se tiene $a+a<a+b$ y $a+b<b+b$ por lo que $2a<a+b$ y $a+b<2b$ en consecuencia $2a<a+b<2b$ por ende $2^{-1}\cdot 2a<2^{-1}\cdot(a+b)<2^{-1}\cdot 2b$, luego $1\cdot a<2^{-1}\cdot(a+b)<1$ de ahí que $a<2^{-1}\cdot(a+b)<b$ por tanto $a<\dfrac{(a+b)}{2}<b$. $\square$

ii) Si $b\in\mathbb{R}$ y $b>0$, entonces $0<\dfrac{b}{2}<b$.

Demostración. Como $0<b$ entonces $0<b$ por consiguiente $0<b$ y $0<b$ dado que $0<b$ y $0+b<b+b$ de donde $0<b$ y $b<2b$ tanto como $0<b<2b$ así $2^{-1}\cdot 0<2^{-1}\cdot b<2^{-1}\cdot 2b$ por lo que $0<2^{-1}\cdot b<1\cdot b$ con tal de $0<2^{-1}\cdot b<b$, por lo tanto $0<\dfrac{b}{2}<b$. $\square$

Observación 1.11. El corolario anterior nos dice que no puede existir un número real positivo mínimo, es decir que el conjunto de los números reales positivos no es un conjunto inductivo.

Teorema 2.2. *Sean $a,b\in\mathbb{R}$, si para todo $\epsilon>0$, $a<b+\epsilon$, entonces $a\leq b$.*

Demostración. (Vía reducción al absurdo)
Sea $\epsilon>0$ dado. Supongamos que $a>b$, entonces $a-b>0$, por tanto tomemos $\epsilon^*=\dfrac{a-b}{2}>0$, luego por Hipótesis se tiene que $a<b+\epsilon^*$ entonces $a<b+\dfrac{a-b}{2}$, luego $a<\dfrac{2b+a-b}{2}$ con lo que $2\cdot a<2\cdot\dfrac{a+b}{2}$ en consecuencia $a+a<a+b$ así $(-a+a)+a<(-a+a)+b$, por lo tanto $a<b$ por consiguiente $a<b$ de ahí que $a<b$ y $a>b$ y en conclusión es resultado es una falsedad. $\square$

Corolario 1.2. Si $a\in\mathbb{R}$ y es tal que $0\leq a<\epsilon$ para todo número positivo epsilon (ϵ), entonces $a=0$.

Demostración. (**Vía reducción al absurdo**)
Sea $a\in\mathbb{R}$ tal que $0\leq a<\epsilon$, para todo $\epsilon>0$ y supongamos que $a\neq 0$, entonces consideremos dos casos: *i*) $a>0$ o *ii*) $a<0$.

i) Supongamos que $a > 0$ entonces $0 < \frac{a}{2} < a$ de manera que $0 < \frac{a}{2} < a$ y $0 \leq a < \epsilon^*$ por esta razón $0 < \frac{a}{2} < a$ y $0 \leq a < \frac{a}{2}$ se tiene $\frac{a}{2} < a$ y $a < \frac{a}{2}$ por ende $2 \cdot \frac{a}{2} < 2 \cdot a$ y $2 \cdot a < 2 \cdot \frac{a}{2}$ tanto como $1 \cdot a < 2 \cdot a$ y $2 \cdot a < 1 \cdot a$ por lo que $a < 2 \cdot a$ y $2 \cdot a < a$, luego $a < a + a$ y $a + a < a$ dado que $0 < a$ y $a < 0$, por lo tanto es una falsedad.

ii) Supongamos que $a < 0$. Por hipótesis $0 \leq a < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ con lo que $a < 0$ y $0 \leq a$ así en conclusión resulta una falsedad.

Luego de *i)* y *ii)* se concluye que si $a \in \mathbb{R}$ y es tal que $0 \leq a < \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$, entonces $a = 0$. $\square$

Ejercicios 2.2.

(1) *Sea $n \in \mathbb{N}$, demostrar que $n < 2^n$.*

Demostración. (**Inducción matemática**)
Para $n = 1$ entonces $1 < 2$, como es válido para $n = 1$, entonces supongamos que es válido para $n = k$ y miremos si es válido para $n = k + 1$, es decir $k + 1 < 2^{k+1}$. En efecto, como $k \in \mathbb{N}$ entonces $1 \leq k$ con lo que $1 \leq \frac{k+1}{2} \leq k$.
Luego $k < 2^k$ y $\frac{k+1}{2} \leq k$ por esta razón $\frac{k+1}{2} \leq k$ y $k < 2^k$ por ende $\frac{k+1}{2} \leq k < 2^k$ por consiguiente $\frac{k+1}{2} < 2^k$ de manera que $\frac{k+1}{2} \cdot 2 < 2^k \cdot 2$ por tanto $(k+1) \cdot 1 < 2^k \cdot 2$ de ahí que $k + 1 < 2^{k+1}$. Entonces es válido para $n = k + 1$, por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n < 2^n$.

(**Desigualdad de Bernoulli**). Sea $x \in \mathbb{R}$, si $x > -1$, entonces $(1+x)^n \geq 1+nx$ para toda $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Demostración. (**Inducción matemática**)
Para $n = 1$, entonces $(1 + x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$, es decir $1 + x \geq 1 + x$, como se cumple la igualdad, entonces es válida para $n = 1$. Supongamos que es válida para $n = k$ y miremos si se cumple para $n = k + 1$, es decir $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$.En efecto, como $x > -1$, entonces $x + 1 > 0$, luego $(1 + x)^k \geq 1 + kx$ entonces $(1 + x)^k \cdot (1 + x) \geq (1 + kx) \cdot (1 + x)$ por ende $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + kx + x + kx^2$, luego $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x + kx^2$ y $1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x$ así $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$. Entonces es válido para $n = k + 1$, por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{R}$ se cumple que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. $\square$

(2) *Sean a, b, c y d números racionales. Pruebe que, $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ entonces $a = c$ y $b = d$.*

Demostración. Hay que probar dos cosas:

i) $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ entonces $a = c$ y $b = d$.

ii) $a = c$ y $b = d$ entonces $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$.

Para *i)* (**Vía reducción al absurdo**).

Supongamos que $a+b\sqrt{2} = c+d\sqrt{2}$ y ($a \neq c$ ó $b \neq d$) entonces $[(a-c) = (d-b)\sqrt{2}]$ y $[a - c \neq 0$ ó $d - b \neq 0]$, luego ($a - c \neq 0$ y $(a - c) = (d - b)\sqrt{2}$) ó ($d - b \neq 0$ y $(a - c) = (d - b)\sqrt{2}$) con lo que $((a - c)^{-1} \cdot (a - c) = (a - c)^{-1} \cdot (d - b)\sqrt{2})$ ó $((d - b)^{-1} \cdot (a - c) = (d - b)^{-1} \cdot (d - b)\sqrt{2})$ en consecuencia $(1 = (a - c)^{-1} \cdot (d - b)\sqrt{2})$ ó $((d - b)^{-1} \cdot (a - c) = 1 \cdot \sqrt{2})$ de manera que $(1 = \dfrac{a-c}{d-b}\sqrt{2})$ ó $(\dfrac{a-c}{d-b} = \sqrt{2})$ por consiguiente $(1 \cdot (\sqrt{2})^{-1} = \dfrac{a-c}{d-b}\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{-1})$ ó $(\dfrac{a-c}{d-b} = \sqrt{2})$ de ahí que $(\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{a-c}{d-b})$ ó $(\dfrac{a-c}{d-b} = \sqrt{2})$, como ambas son falsas entonces la proposición es falsa.

Observación 1.12. Si $a, b \in \mathbb{Q}$ y $c, d \in \mathbb{I}$, entonces $a \cdot b \in \mathbb{Q}$, $(a + b) \in \mathbb{Q}$, $(a + c) \in \mathbb{I}$ y $(a \cdot c) \in \mathbb{I}$, pero no se sabe que pasa con $(c + d)$, pues $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ y $(1 + \sqrt{2}) \in \mathbb{I}$, luego $\big(\sqrt{2} + (-(1 + \sqrt{2}))\big) = -1 \in \mathbb{Q}$.

Para *ii)* Si $a = c$ y $b = d$ entonces $a - c = 0$ y $d - b = 0$ de modo que $a - c = 0$ y $\sqrt{2} \cdot (d - b) = \sqrt{2} \cdot 0$ se tiene $a - c = 0$ y $\sqrt{2}(d - b) = 0$ por eso $a - c = \sqrt{2}(d - b)$ tanto como $a - c = d\sqrt{2} - b\sqrt{2}$ de donde $a - c + (c + b\sqrt{2}) = d\sqrt{2} - b\sqrt{2} + (c + b\sqrt{2}$ por esta razón $a + 0 + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} + 0$ puesto que $a + b\sqrt{2}) = c + d\sqrt{2}$. □

(3) *Sean $a_1, a_2, \cdots, a_n$ números reales. Demuestre que*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$$

Demostración. (Inducción matemática)

para $n = 1$, $(a_1)^2 \leq 1 \cdot (a_1)^2$ entonces $a_1^2 \leq a_1^2$. Como es válido para $n = 1$, entonces supongamos que es válido para $n = k$ y miremos si se cumple para $n = k + 1$, es decir

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1})^2 \leq (k + 1)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{k+1}^2)$$

.

Observación 1.13. Miremos casos particulares para tratar de generalizar, consideremos dos casos

$i)$ $(a_1+a_2)^2 = \underbrace{a_1^2+a_2^2+2a_1a_2}.$

$ii)$ $(a_1+a_2+a_3)^2 = \underbrace{a_1^2+a_2^2}+a_3^2+\underbrace{2a_1a_2}+2a_1a_3+2a_2a_3.$

Si analizamos los dos casos, podemos observar que para pasar del $i)$ al $ii)$ sumamos el cuadrado del número que queremos agregar (a_3^2) más dos veces el número (a_3^2) por cada uno de los términos que había, es decir $(2a_1a_3+2a_2a_3)$.

Teniendo en cuenta ésta observaciíon podemos generalizar.

Si $(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2 \leq k(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)$ entonces $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)+2a_1(a_2+\cdots+a_k)+2a_2(a_3+\cdots+a_k)+\cdots+2a_{k-1}a_k \leq k(a_1^2+\cdots+a_k^2)$, luego $(a_1^2+\cdots+a_k^2)+2a_1(a_2+\cdots+a_k)+2a_2(a_3+\cdots+a_k)+\cdots+2a_{k-1}a_k+a_{k+1}^2+2a_{k+1}(a_1+\cdots+a_k) \leq k(a_1^2+\cdots+a_k^2)+a_{k+1}^2+2a_{k+1}(a_1+\cdots+a_k)$ de ahí que $(a_1+\cdots+a_k+a_{k+1})^2 \leq k(a_1^2+\cdots+a_k^2)+a_{k+1}^2+2a_{k+1}(a_1+\cdots+a_k)$.

Como $0 \leq a_{k+1}^2 \leq ka_{k+1}^2$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces $0 \leq ka_{k+1}^2$ para todo $k \in \mathbb{N}$ de manera que $0 \leq ka_{k+1}^2$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $0 \leq a_1^2+\cdots a_k^2$ se tiene $0 \leq ka_{k+1}^2+a_1^2+\cdots+a_k^2$ para todo $k \in \mathbb{N}$Así, $(a_1+\cdots+a_{k+1})^2 \leq k(a_1^2+\cdots+a_k^2)+ka_{k+1}^2+(a_1^2+\cdots+a_{k+1}^2)+2a_{k+1}(a_1+\cdots+a_k)$.

Pero como $k(a_1^2+\cdots+a_{k+1}^2)+(a_1^2+\cdots+a_{k+1}^2) \leq k(a_1^2+\cdots+a_{k+1}^2)+(a_1^2+\cdots+a_{k+1}^2)+2a_{k+1}(a_1+\cdots+a_k)$. Luego, $(a_1+\cdots+a_{k+1})^2 \leq k(a_1^2+\cdots+a_{k+1}^2)+(a_1^2+\cdots+a_{k+1}^2)$ entonces $(a_1+\cdots+a_{k+1})^2 \leq (k+1)(a_1^2+\cdots+a_{k+1}^2)$ entonces es válido para $n=k+1$, por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 \leq n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$

.

□

3. Valor Absoluto

Definición 1.14. Sea $x \in \mathbb{R}$, se define la función valor absoluto de x así.

$$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ \textit{tal que} \ \ x \longrightarrow |x| := \begin{cases} x & si \ \ x \geq 0 \\ -x & si \ \ x < 0 \end{cases}$$

Observación 1.15. Notaremos $\sqrt{x^2}$ como $|x|$.

Ejemplo 1.16.

(1) como $-5 \in \mathbb{R}$ y además $-5 < 0$ entonces $|-5| = -(-5) = 5$.

(2) como $3 \in \mathbb{R}$ y además $3 > 0$ entonces $|3| = 3$.

Teorema 3.1. *Sean $x, y \in \mathbb{R}$, entonces*

1. $|x| \geq 0$ **2**. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ **3**. $|-x| = |x|$

4. $\left|\dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{|y|},\ y \neq 0$ **5**. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|},\ y \neq 0$ **6**. $|x| \geq x$

7. $-|x| \leq x$ **8**. *Si* $c > 0$ *y* $|x| \leq c$ *si, y solo si* $-c \leq x \leq c$ **9**. $|x+y| \leq |x| + |y|$ (*Desigualdad triangular*)

10. $||x| - |y|| \leq |x-y|$ **11**. $|x-y| \leq |x| + |y|$ **12**. $|x^2| = x^2$

Demostración.

(1) $|x| \geq 0$ Como $x \in \mathbb{R}$ entonces $x \in \mathbb{R}^+$ ó $-x \in \mathbb{R}^+$ ó $x = 0$ puesto que $x > 0$ ó $-x > 0$ ó $x = 0$ de donde $|x| = x > 0$ ó $|x| = -x > 0$ ó $|x| = 0$ por lo que $|x| > 0$ ó $|x| > 0$ ó $|x| = 0$ como tanto $|x| > 0$ ó $|x| = 0$ así $|x| \geq 0$.

(2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
Consideremos los siguientes casos:

$$i)\ x \geq 0 \ y\ y \geq 0 \qquad ii)\ x \leq 0 \ y\ \ y \leq 0 \qquad iii)\ x \geq 0 \ y\ \ y \leq 0$$

Para i) $x \geq 0$ y $y \geq 0$ entonces $x \cdot y \geq 0$ puesto que $|x \cdot y| = x \cdot y$ se tiene $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Para ii) $x \leq 0$ y $y \leq 0$ entonces $-x \geq 0$ y $-y \geq 0$ de donde $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y \geq 0$ se tiene $|x \cdot y| = x \cdot y = (-x) \cdot (-y)$ por tanto $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Para iii) $x \geq 0$ y $y \leq 0$ entonces $x \cdot y \leq 0$ de modo que $|x \cdot y| = -(x \cdot y) = x \cdot (-y)$ así $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

□

Observación 1.17. $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$.

3. $|-x| = |x|$
Como $|-x| = |(-1) \cdot x| = |-1| \cdot |x| = -(-1) \cdot |x| = 1 \cdot |x| = |x|$.

4. $\left|\dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{|y|}, \quad y \neq 0.$

Como $y \neq 0$ *entonces* $y > 0$ *ó* $y < 0$ *en consecuencia* $y^{-1} > 0$ *ó* $y^{-1} < 0$ *se tiene* $|y^{-1}| = y^{-1}$ *ó* $|y^{-1}| = -y^{-1}$ *por eso* $\left|\dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{y}$ *ó* $\left|\dfrac{1}{y}\right| = -\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{-y} = \dfrac{1}{|y|}$ *tanto como* $\left|\dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{|y|}$ *ó* $\left|\dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{|y|}$ *así que* $\left|\dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{|y|}$.

5. $y \neq 0.$

Como $y \neq 0$, *entonces existe* $y^{-1} \in \mathbb{R}$ *tal que* $y \cdot y^{-1} = y^{-1} \cdot y = 1$, *luego* $\left|\dfrac{x}{y}\right| = |x.y^{-1}| = |x| \cdot |y^{-1}| = |x| \cdot \left|\dfrac{1}{y}\right| = |x| \cdot \dfrac{1}{|y|} = \dfrac{|x|}{|y|}$.

6. $|x| \geq x.$

Como $x \in \mathbb{R}$ *entonces* $x \in \mathbb{R}^+$ *ó* $-x \in \mathbb{R}^+$ *ó* $x = 0$ *de manera que* $x > 0$ *ó* $-x > 0$ *ó* $x = 0$ *se tiene* $|x| = x$ *ó* $|x| = -x > 0 > x$ *ó* $|x| = x$ *por ende* $|x| = x$ *ó* $|x| > x$ *de donde* $|x| = x$ *puesto que* $|x| = x$ *ó* $|x| > x$, *luego* $|x| \geq x$.

7. $-|x| \leq x.$

Como $|x| \geq x \geq -x$ *entonces* $|x| \geq -x$, *luego* $(-1) \cdot |x| \leq (-1) \cdot (-x)$, *por lo tanto* $-|x| \leq x$.

8. *Si* $c > 0$ *y* $|x| \leq c$ *si y sólo si* $-c \leq x \leq c$.

Hay que probar dos cosas

i) *Si* $c > 0$ *y* $|x| \leq c$ *entonces* $-c \leq x \leq c$.

ii) $-c \leq x \leq c$ *entonces* $c > 0$ *y* $|x| \leq c$.

Para i) *Si* $c > 0$ *y* $|x| \leq c$ *entonces* $|x| \leq c$ *y* $|x| \geq x$ *y* $-|x| \leq x$ *en consecuencia* $x \leq |x| \leq c$ *y* $-|x| \geq -c$ *y* $-|x| \leq x$ *se tiene* $x \leq c$ *y* $-c \leq -|x| \leq x$ *tanto como* $x \leq c$ *y* $-c \leq x$ *por lo que* $-c \leq x \leq c$.

Para ii) *Como* $-c \leq x \leq c$ *entonces* $-c \leq x$ *y* $x \leq c$ *por consiguiente* $(-1) \cdot (-c) \geq (-1) \cdot x$ *y* $x \leq c$ *entonces* $-x \leq c$ *y* $x \leq c$ *por esta razón* $|x| \leq c$ *se tiene* $|x| \leq c$ *y* $0 \leq |x| \leq c$, *luego* $|x| \leq c$ *y* $0 \leq c$ *con tal de* $|x| \leq c$ *y* $0 < c$ *ó* $0 = c$ *por ende* $|x| \leq c$ *y* $0 < c$ *ó* $|x| \leq c$ *y* $0 = c$ *así que* $|x| \leq c$ *y* $0 < c$.

9. $|x+y| \leq |x|+|y|$ *Desigualdad Triangular.*
Como $-|x| \leq x$ *y* $x \leq |x|$ *y* $-|y| \leq y$ *y* $y \leq |y|$ *entonces* $-|x| \leq x \leq |x|$ *y* $-|y| \leq y \leq |y|$, *luego* $-|x|+(-|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$ *así* $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq (|x|+|y|)$ *por tanto* $|x+y| \leq |x|+|y|$.

10. $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$.
Como $|y| = |y+0| = |(y-x)+x| \leq |y-x|+|x|$ *entonces* $|y| \leq |y-x|+|x|$ *dado que* $-|y-x| \leq |x|-|y|$, *luego* $-|x-y| \leq |x|-|y|$.

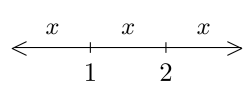
Como $|x| = |x+0| = |(x-y)+y| \leq |x-y|+|y|$ *de manera que* $|x| \leq |x-y|+|y|$ *así que* $|x|-|y| \leq |x-y|$. *Se tiene que* $-|x-y| \leq |x|-|y|$ *y* $|x|-|y| \leq |x-y|$ *entonces* $-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$ *por ende* $\Big||x|-|y|\Big| \leq |x-y|$.

11. $|x-y| \leq |x|+|y|$.
Como $|x-y|$ *entonces* $|x+(-y)|$ *de modo que* $|x+(-y)| \leq |x|+|-y|$ *así* $|x-y| \leq |x|+|y|$.

12. $|x^2| = x^2$
Como $x \in \mathbb{R}$ *y* $0 \leq x^2$ *entonces* $|x^2| = x^2$.

Ejercicios 3.1.

(1) *Pruebe que, para todo* $x \in \mathbb{R}$, *se cumple*
i) $|x-1|+|x-2| \geq 1$
ii) $|x-1|+|x-2|+|x-3| \geq 2$

Demostración. .
i) $|x-1|+|x-2| \geq 1$.
En efecto, como $x \in \mathbb{R}$ y considerando  , entonces x tiene las siguientes opciones:

$$a)\ x \leq 1 \qquad b)\ 1 < x < 2 \qquad c)\ x \geq 2$$

Para *a*) $x \leq 1$.
Como $x \leq 1$ entonces $x+(-1) \leq 1+(-1)$ por tanto $x-1 \leq 0$. Por otro lado, $x \leq 1$, luego $x+(-2) \leq 1+(-2)$ dado que $x-2 \leq -1 < 0$ por eso $x-2 < 0$ se tiene que $|x-1|+|x-2| = -(x-1)+(-(x-2)) = -2x+3 \geq 1$ pues, como $x \leq 1$ entonces $(-2)\cdot x \geq (-2)\cdot 1$ por consiguiente $-2x \geq -2$ tanto que $-2x+3 \geq -2+3$

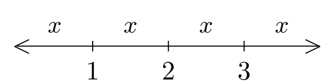
puesto que $-2x+3 \geq 1$, luego $|x-1|+|x-2| \geq 1$.

Para $b)$ $1 < x < 2$.
Como $1 < x < 2$ entonces $1 < x$ y $x < 2$ de ahí que $1+(-1) < x+(-1)$ y $x+(-2) < 2+(-2)$ por ende $x-1 > 0$ y $x-2 < 0$, luego $|x-1|+|x-2| = x-1+(-(x-2)) = 1$, es decir que $|x-1|+|x-2| = 1$ tanto que $|x-1|+|x-2| = 1$ ó f de donde $|x-1|+|x-2| = 1$ ó $|x-1|+|x-2| > 1$ así $|x-1|+|x-2| \geq 1$.

Para $c)$ $x \geq 2$.
Como $x \geq 2$ entonces $x-1 \geq 2-1$ en consecuencia $x-1 \geq 1 > 0$ se tiene $x-1 > 0$.
Por otro lado, como $x \geq 2$ por ende $x-2 \geq 2-2$ tanto como $x-2 \geq 0$ se tiene que $|x-1|+|x-2| = x-1+x-2 = 2x-3 \geq 1$. Pues, como $a \geq 2$ entonces $2 \cdot x \geq 2 \cdot 2$ de aquí $2x \geq 4$ por lo que $2x-3 \geq 4-3$ así $2x-3 \geq 1$.

Por lo tanto de $a)$, $b)$ y $c)$ se concluye que para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple que $|x-1|+|x-2| \geq 1$.

$ii)$ $|x-1|+|x-2|+|x-3| \geq 2$.

En efecto, como $x \in \mathbb{R}$ y considerando 

, entonces x tiene las siguientes opciones:

$a)$ $x \leq 1$ $\quad$ $b)$ $1 < x < 2$ $\quad$ $c)$ $2 \leq x < 3$ $\quad$ $d)$ $x \geq 3$

Para $a)$ $x \leq 1$.
Como $x \leq 1$ entonces $x+(-1) \leq 1+(-1)$ en consecuencia $x-1 \leq 0$ por lo que $x-1+(-1) \leq 0+(-1)$ se tiene $x-2 \leq -1 < 0$ conque $x-2 < 0$ con tal de $x-2+(-1) < 0+(-1)$ por ende $x-3 < -1 < 0$, luego $x-3 < 0$ se tiene que $|x-1|+|x-2|+|x-3| = (-(x-1))+(-(x-2))+(-(x-3)) = -3x+6 > 2$.

Pues, como $x \leq 1$ entonces $(-3) \cdot x \geq (-3) \cdot 1$ por consiguiente $-3x \geq -3$ de donde $-3x+6 \geq -2+6$ tanto como $-3x+6 \geq 3 > 2$ así que $-3x+6 > 2$.

Por lo tanto $|x-1|+|x-2|+|x-3| > 2$ entonces $|x-1|+|x-2|+|x-3| > 2$ ó $|x-1|+|x-2|+|x-3| = 1$ se tiene $|x-1|+|x-2|+|x-3| \geq 2$.

Para $b)$ $1 < x < 2$.
Como $1 < x < 2$ entonces $1 < x$ y $x < 2$ y $x < 2$ con tal de $1+(-1) < x+(-1)$ y $x + (-2) < 2 + (-2)$ y $x + (-3) < 2 + (-3)$ por ende $x - 1 > 0$ y $x - 2 < 0$ y $x - 3 < -1 < 0$ puesto que $x - 1 > 0$ y $x - 2 < 0$ y $x - 3 < 0$.

Luego $|x-1|+|x-2|+|x-3| = x-1+(-(x-2))+(-(x-3)) = x-1-x+2-x+3 = -x + 4 > 2$. Pues, como $1 < x < 2$ luego $1 < x$ y $x < 2$ por esa razón $x < 2$ de manera que $-x > -2$ por lo que sigue $-x + 4 > 2$.

Por lo tanto $|x-1|+|x-2|+|x-3| > 2$ en consecuencia $|x-1|+|x-2|+|x-3| > 2$ ó $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ de donde $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| \geq 2$.

Para $c)$ $2 \leq x < 3$.
Como $2 \leq x < 3$ entonces $2 \leq x$ y $x < 3$ y $2 \leq x$ por ende $2+(-2) \leq x+(-2)$ y $x + (-3) < 3 + (-3)$ y $2 + (-1) \leq x + (-1)$ tanto como $0 \leq x - 2$ y $x - 3 < 0$ y $0 < 1 \leq x - 1$ puesto que $0 \leq x - 2$ y $x - 3 < 0$ y $0 < x - 1$. Luego $|x-1|+|x-2|+|x-3| = (x-1)+(x-2)+(-(x-3)) = x-1+x-2-x+3 = x \geq 2$.

Para $d)$ $x \geq 2$.
Como $x \geq 3$ entonces $x - 1 \geq 2 - 1$ por esa razón $x - 1 \geq 2 > 0$ dado que $x - 1 > 0$ se tiene $x - 1 + (-1) > 0 + (-1) > 0$ puesto que $x - 2 > 0$ tanto como $x - 2 + (-1) > 0 + (-1) > 0$ de donde $x - 3 > 0$ se tiene que $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| = x - 1 + x - 2 + x - 3 = 3x - 6 > 2$.

Pues, como $x \geq 3$ debido que $3 \cdot x \geq 3 \cdot 3$ por ende $3x \geq 9$ de modo que $3x - 6 \geq 9 - 6$ así $3x - 6 \geq 3 > 2$ de ahí que $3x - 6 > 2$.

Por lo tanto $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| > 2$ entonces $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| = 2$ ó F tanto que $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| > 2$ ó $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| = 1$ pues $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| \geq 2$.
Luego de $a)$, $b)$, $c)$ y $d)$ se concluye que para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple que $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| \geq 2$. $\square$

(2) *Sean x, y números reales positivos, pruebe que* $\sqrt{x \cdot y} \leq \dfrac{x + y}{2}$.

Demostración. Como $x, y \in \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ entonces $(x - y) \in \mathbb{R}$ por consiguiente $(x-y)^2 \geq 0$ se tiene $(x-y)(x-y) \geq 0$ dado que $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ por eso $x^2 - 2xy + y^2 + 4xy \geq 0 + 4xy$ tanto como $x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$ por esta razón $(x+y)^2 \geq 4xy$ por lo que sigue $\sqrt{(x+y)^2} \geq \sqrt{4xy}$ una vez que $|x+y| \geq \sqrt{4xy}$ así $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ a fin de que $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. $\square$

Observación 1.18.

i) Como $\sqrt{4} = 2$, entonces $2 = \sqrt[\cancel{2}]{(-2)^{\cancel{2}}} = -2$, por tanto $2 = -2$ $(\rightarrow\leftarrow)$ ¿por que?. Lo que pasa, es que, es un error cancelar el exponente del radicando con el indice de la raiz, lo correcto es $2 = \sqrt{(-2)^2} = |-2| = -(-2) = 2$.

ii) En el ejercicio anterior (**Ejer. 3.1 2.**) dice que la Media Geométrica es menor o igual a la Media Aritmética para dos datos, una generalización del (**Ejer. 3.1 2.**), seria que la Media Armonica es menor o igual a la Media Geométrica que es menor o igual a la Media Aritmética, es decir $M_h \leq M_g \leq M_a$, donde

$$M_h := \frac{n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}, \quad M_g := \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ \ldots \cdot x_n}, \quad y \quad M_a := \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

2. *Si $x, y \in \mathbb{R}^+$ entonces $2\sqrt{x \cdot y} \leq x + y$.*

Demostración. Como $M_g \leq M_a$ entonces $(x \cdot y)^{\frac{1}{2}} \leq \dfrac{x+y}{2}$ en consecuencia $\sqrt{x \cdot y} \leq \dfrac{x+y}{2}$. $\square$

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, *se cumple que* $n! \leq (\dfrac{n+1}{n})^n$.

Demostración. .

Como $M_g \leq M_a$ entonces $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$.

Sea, $x_1 = 1, x_2 = 2, \cdots, x_n = n$ entonces $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n}{n}$ por ende $(n!)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}$ dado que $(n!)^{\frac{1}{n}} \leq (\dfrac{n+1}{2})$ se tiene $n! \leq (\dfrac{n+1}{2})^n$. $\square$

5. *Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces* $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$.

Demostración. Como $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $a^2, b^2 \in \mathbb{R}^+$ y como $M_g \leq M_a$, luego $(a^2 \cdot b^2)^{\frac{1}{2}} \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$ entonces $((a \cdot b)^2)^{\frac{1}{2}} \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$ así $|a \cdot b| \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$ por tanto, $(2a \cdot b \leq a^2+b^2) \cdot \dfrac{1}{a \cdot b}$ de donde $2a \cdot b\dfrac{1}{a \cdot b} \leq (a^2+b^2)\dfrac{1}{a \cdot b}$ pues, $2 \leq \dfrac{a^2}{a \cdot b} + \dfrac{b^2}{a \cdot b}$ de manera que $2 \leq \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$. □

6. *Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $a + b = 2$. Demostrar que* $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + 2\right) \geq 16$.

Demostración. Como $a, b \in \mathbb{R}^+$ con $a + b = 2$ y por la (**Obs. 1.18** pat. ii) se tiene que $M_h \leq M_a$, luego $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \dfrac{a+b}{2}$ entonces $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \dfrac{2}{2}$ de ahí que $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq 1$, luego $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \cdot \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq 1 \cdot \left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ tanto que $2 \leq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ por ende $2+2 \leq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+2$ de manera que $4 \leq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+2$ por tanto, $4^2 \leq \left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+2\right)^2$ se tiene $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+2\right)^2 \geq 16$. □

4. Axioma de densidad o continuidad

Si X, Y son subconjuntos no vacíos de los números reales ($\mathbb{R}$), tales que $\forall x \in X$ y $\forall y \in Y$ se tiene que $x \leq y$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tale que $x \leq c \leq y$.

5. La propiedad de completidad de $\mathbb{R}$

Definición 1.19. (**Acotado superiormente e inferiormente**). Sea A un subconjunto no vacío de los reales ($\mathbb{R}$),

i) Se dice que $s \in \mathbb{R}$ es cota superior de A si, y sólo si $\forall a \in A,\ a \leq s$.
ii) Se dice que $i \in \mathbb{R}$, es cota inferior para A si, y sólo si $\forall a \in A,\ i \leq a$.

Observación 1.20.

i) Si un conjunto de $\mathbb{R}$ tiene cota superior, entonces se le dice acotado superiormente.
ii) Si un conjunto de $\mathbb{R}$ tiene cota inferior, entonces se le dice acotado inferiormente.
iii) Si un conjunto de $\mathbb{R}$ es acotado superior e inferiormente, entonces se le dice acotado.

Ejemplo 1.21.

(1) El conjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ es acotado inferiormente por $0 \in \mathbb{R}$ y el conjunto $\mathbb{R}^- \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente por $0 \in \mathbb{R}$.

(2) Sean $A = [1, 5]$ y $B = [1, 5)$, entonces la cota superior para estos conjuntos es $5 \in \mathbb{R}$ y eso no quiere decir que sea la única cota superior, pues $5,\ 6, \ldots$ son cotas superiores para los conjuntos A y B.

(3) Sean $A = [3, 9)$ y $B = [3, +\infty)$, entonces la cota inferior para estos conjuntos es $3 \in \mathbb{R}$ y eso no quiere decir que sea la única cota inferior, pues $\ldots,\ 2,\ 3$ son cotas inferiores para los conjuntos A y B.

Definición 1.22. (**Mínimo**) Sea A un subconjunto no vacío de los números $\mathbb{R}$ y $m \in A$, se dice que m es el mínimo de A, si $\forall a \in A,\ m \leq a$.

Definición 1.23. (**Máximo**) Sea A un subconjunto no vacío de los números $\mathbb{R}$ y $M \in A$, se dice que m es el máximo de A, si $\forall a \in A,\ a \leq M$.

Proposición 1.24. *Si A es un subconjunto no vacío y acotado de los $\mathbb{R}$, entonces existe un $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $\forall a \in A,\ |a| \leq c$.*

Demostración. Como $A \subset \mathbb{R}$, A acotado, entonces por la **Obs. 1.20**, A es acotado superior e inferiormente y por la Def. 1.19 $\exists s, i \in \mathbb{R}$ tal que $\forall a \in A,\ i \leq a$ y $a \leq s$ entonces $a \in A,\ -|i| \leq i \leq a$ y $a \leq s \leq |s|$ de la manera $a \in A,\ -|i| \leq a \leq |s|$. Luego, existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $k := \text{máx}\{|i|,\ |s|\}$ de ahí que $|i| \leq k$ y $|s| \leq k$ por eso $-k \leq -|i|$ y $|s| \leq k$ de modo que para todo $a \in A,\ -k \leq -|i| \leq a \leq |s| \leq k$ tanto como para todo $a \in A,\ -k \leq a \leq k$ puesto que para todo $a \in A,\ |a| \leq k$. $\square$

Definición 1.25. (**Mínima cota superior**). Sea A un subconjunto no vacío de los números $\mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{R}$, se dice que s es la mínima cota superior para A si, y sólo si cumple

i) s es cota superior para A.

ii) Si h es cota superior para A, entonces s es menor o igual a h.

Observación 1.26. (**Interpretación matemática de la Def. 1.25.**)
Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \phi$ y $s \in \mathbb{R}$. Se dice que s es la mínima cota superior para A si, y sólo si

i) $\forall a \in A,\ a \leq s$.

ii) si $\forall a \in A,\ a \leq h$ entonces $s \leq h$.

Proposición 1.27. *Si un subconjunto A de los $\mathbb{R}$ diferente de vacío tiene mínima cota superior, entonces es única.*

Demostración. sean $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ mínimas cotas superiores para A, entonces s_1 y s_2 satisfacen la Def. 1.25, es decir

$$1) \begin{cases} i) & \forall a \in A,\ a \leq s_1 \\ ii) & si\ \forall a \in A,\ a \leq s_2 \quad \text{entonces} \quad s_1 \leq s_2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} i) & \forall a \in A,\ a \leq s_2 \\ ii) & si\ \forall a \in A,\ a \leq s_1 \quad \text{entonces} \quad s_2 \leq s_1 \end{cases}$$

de 1) y 2) se tiene que $s_1 \leq s_2$ y $s_2 \leq s_1$ de la manera $s_1 = s_2$, por lo tanto, la mínima cota superior es única. □

Notación 1.1. Notaremos la mínima cota superior de un subconjunto A no vacío de los $\mathbb{R}$, como $\sup(A)$ (Supremo de A).

Definición 1.28. (**Máxima cota inferior**). Sea A un subconjunto no vacío de los números $\mathbb{R}$ y $i \in \mathbb{R}$, se dice que i es la máxima cota inferior para A si, y sólo si cumple

i) i es cota inferior para A.

ii) Si w es cota inferior para A, entonces i es mayor o igual a w.

Observación 1.29. (**Interpretación matemática de la Def. 1.28.**)
Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \phi$ y $i \in \mathbb{R}$. Se dice que i es la máxima cota inferior para A si, y sólo si

i) $\forall a \in A,\ i \leq a$.

ii) si $\forall a \in A,\ w \leq a$ entonces $w \leq i$.

Proposición 1.30. *Si un subconjunto A de los $\mathbb{R}$ diferente de vacío tiene máxima cota inferior, entonces es única.*

Demostración. sean $i_1, i_2 \in \mathbb{R}$ máximas cotas inferiores para A, entonces i_1 y i_2 satisfacen la Def. 1.28, es decir

$$1) \begin{cases} i) & \forall a \in A,\ i_1 \leq a \\ ii) & si\ \forall a \in A,\ i_2 \leq a \quad \text{entonces} \quad i_2 \leq i_1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} i) & \forall a \in A,\ i_2 \leq a \\ ii) & si\ \forall a \in A,\ i_1 \leq a \quad \text{entonces} \quad i_1 \leq i_2 \end{cases}$$

de 1) y 2) se tiene que $i_2 \leq i_1$ y $i_1 \leq i_2$ así que $i_1 = i_2$, por lo tanto, la máxima cota inferior es única. □

Notación 1.2. Notaremos la máxima cota inferior de un subconjunto A no vacío de los $\mathbb{R}$, como $\text{ínf}(A)$ (Ínfimo de A).

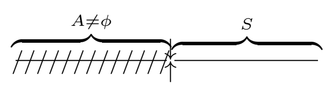
TEOREMA 5.1. (**Existencia de supremo y de ínfimo**).

i) *Todo subconjunto A no vacío y acotado superiormente de los números $\mathbb{R}$, admite un supremo.*

i) *Todo subconjunto A no vacío y acotado inferiormente de los números $\mathbb{R}$, admite un ínfimo.*

DEMOSTRACIÓN.

i) Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \phi$ y A acotado superiormente, es decir existe $h \in \mathbb{R}$ tal que $\forall a \in A,\ a \leq h$. Consideremos el conjunto $S := \{s \in \mathbb{R}/\ \text{ s es cota superior de } A\}$.

Ilustración 

Es claro que $h \in S$, así $S \neq \phi$, luego $A, S \subset \mathbb{R}$, $A \neq \phi$ y $S \neq \phi$, además $\forall a \in A$, $\forall s \in S,\ a \leq s$, entonces por el **Ax.D. 4** existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq c \leq s$.

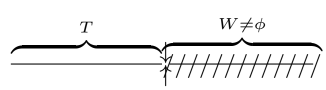
¡**Afirmación**! $c = \sup(A)$. En efecto,

i') Como $\forall a \in A,\ a \leq c$, entonces c es cota superior para A.

ii') Además, si l es cota superior para A, entonces $l \in S$, por consiguiente $c \leq l$.

Así c es la menor cota superior de A, por lo tanto $c = \sup(A)$.

ii) Sea $W \subset \mathbb{R}$, $W \neq \phi$ y W acotado inferiormente, es decir existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $\forall w \in W,\ r \leq w$. Consideremos el conjunto $T := \{t \in \mathbb{R} \text{ tal que } \ \text{t es cota inferior de } W\}$.

Ilustración 

Es claro que $r \in T$, así $T \neq \phi$, luego $W, T \subset \mathbb{R}$, $W \neq \phi$ y $T \neq \phi$, además $\forall w \in W$, $\forall t \in T,\ t \leq w$, entonces por el **Ax.D. 4** existe $i \in \mathbb{R}$ tal que $t \leq i \leq w$.

¡**Afirmación**! $i = \text{ínf}(W)$. En efecto,

i') Como $\forall w \in W,\ i \leq w$, entonces i es cota inferior para W.

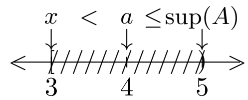
ii') Además, si j es cota inferior para W, entonces $j \in T$, por consiguiente $j \leq i$.

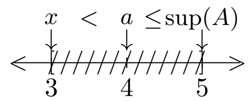
Así i es la mayor cota inferior de W, por lo tanto $i = \text{ínf}(W)$.

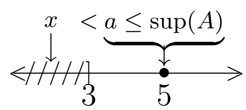
□

TEOREMA 5.2. (**Aproximación al supremo**). *Sea A un subconjunto no vacío de números reales acotado superiormente. Probar que dado $x \in A$, $x < \sup(A)$, entonces existe un $a \in A$ tal que $x < a \leq \sup(A)$.*

Ejemplo 1.31.

(1) sea $A = [3, 5)$ 

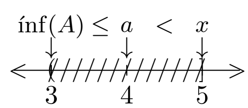
(2) sea $A = [3, 5]$ 

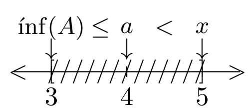
(3) Sea $A = (-\infty, 3] \cup \{5\}$ 

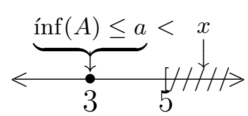
Demostración. (Vía reducción al absurdo).
Razonemos por el absurdo. Dado $x \in A$, $x < \sup(A)$ y supongamos que para todo $a \in A$, $x \geq a > \sup(A)$, entonces dado $x \in A$, $x < \sup(A)$ y $x > \sup(A)$, lo cual es falso. $\square$

Teorema 5.3. (**Aproximación al ínfimo**). *Sea A un subconjunto no vacío de números reales acotado superiormente. Probar que dado $x \in A$, $\inf(A) < x$, entonces existe un $a \in A$ tal que $\inf(A) \leq a < x$.*

Ejemplo 1.32.

(1) sea $A = (3, 5]$ 

(2) sea $A = [3, 5]$ 

(3) Sea $A = \{3\} \cup [5, +\infty)$ 

Demostración. (Vía reducción al absurdo).
Razonemos por el absurdo. Dado $x \in A$, $\inf(A) < x$ y supongamos que para todo $a \in A$, $x \leq a < \inf(A)$, entonces dado $x \in A$, $x > \inf(A)$ y $x < \inf(A)$, lo cual es falso. $\square$

6. Sucesiones

Definición 1.33. Una función $X : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ recibe el nombre de sucesión.

$$n \longrightarrow x(n)$$

Observación 1.34.

i) La imagen $x(n) \in \mathbb{R}$ la notaremos como x_n.

ii) El conjunto $\{x(1), x(2), \ldots, x(n), \ldots\}$ o $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ recibe el nombre de conjunto de imágenes o sucesión el cual notaremos como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición 1.35. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice acotada superiormente, si el conjunto de imágenes $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ es acotado superiormente. e.e. $\exists s \in \mathbb{R}/x_n \leq s \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.36. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice acotada inferiormente, si el conjunto de imágenes $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ es acotado inferiormente. e.e. $\exists i \in \mathbb{R}/i \leq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.37. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice acotada, si el conjunto de imágenes $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ es acotado. e.e. $\exists s, i \in \mathbb{R}/i \leq x_n \leq s \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.38. *La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada si y sólo si $\exists h \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leq h \ \forall n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Hay que probar dos cosas

i) Si la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, entonces existe $h \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leq h \ \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) si $\exists h \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leq h \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

En efecto, como la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, entonces por la Def. 1.37. se tiene que $\exists s, i \in \mathbb{R}$ tal que $i \leq x_n \leq s \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sea $h \in \mathbb{R}^+$ tal que $h := \text{máx}\{|i|, |s|\}$ entonces,

(1) como $s \leq |s|$ y $|s|h$ entonces $x_n \leq h \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(2) como $h \geq |i|$, entonces $-h \leq -|i| \leq i$, así $-h \leq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Luego de 1., 2. y Teorema del valor absoluto. 8. se concluye que existe $h \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leq h$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como existe $h \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leq h$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces por el Teorema del valor absoluto. se tiene que existe $h \in \mathbb{R}^+$ tal que $-h \leq x_n \leq h$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego por la Definición de sucesión acotada. se concluye que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. □

Definición 1.39. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Diremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si $\forall \epsilon > o, \exists k \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq k$ entonces $|x_n - x| < \epsilon$, lo cual notaremos como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ o $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Ejercicios 6.1.

(1) *La sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene como limite 0.*

Sea $\epsilon > 0$ dado, tomemos $\epsilon^* = \dfrac{1}{\epsilon} \in \mathbb{R}^+$, luego por la Propiedad de Arquímedes.

Existe $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\epsilon^* < k$, *entonces existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{k} < \epsilon$. *Sea* $n \geq k$, *entonces* $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k}$, *luego* $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \epsilon$. *Por consiguiente si* $n \geq k$ *por lo que* $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$, *por lo tanto* $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$.
Sea $\epsilon > 0$ *dado, tomemos* $\epsilon^* = \frac{2}{\epsilon} \in \mathbb{R}^+$, *luego por la Propiedad de Arquímedes. Existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\epsilon^* < k$, *entonces existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{2}{k} < \epsilon$. *Sea* $n \geq k$, *entonces* $\frac{2}{n} \leq \frac{2}{k}$, *luego* $\left|\frac{2}{n} - 0\right| = \left|\frac{2}{n}\right| = \frac{2}{n} \leq \frac{2}{k} < \epsilon$. *Por consiguiente si* $n \geq k$ *conque* $\left|\frac{2}{n} - 0\right| < \epsilon$, *por lo tanto* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.
Sea $\epsilon > 0$ *dado, tomemos* $\epsilon^* = \frac{1}{\epsilon} \in \mathbb{R}^+$, *luego por la Propiedad de Arquímedes. Existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\epsilon^* < k$, *entonces existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{k} < \epsilon$. *Si* $n \geq k$, *entonces* $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k}$, *luego* $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n} + 1 - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \epsilon$. *Por lo tanto* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.
Sea $\epsilon > 0$ *dado, tomemos* $\epsilon^* = \frac{1}{\epsilon} \in \mathbb{R}^+$, *luego por la Propiedad de Arquímedes. Existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\epsilon^* < k$, *entonces existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{k} < \epsilon$ *y* $-\epsilon < -\frac{1}{k}$. *Si* $n \geq k$, *implica que* $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k}$ *y* $-\frac{1}{k} \leq -\frac{1}{n}$, *pero como* $-1 < \sin n < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, *entonces* $-\epsilon < -\frac{1}{k} \leq -\frac{1}{n} < \frac{\sin n}{n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \epsilon$, *por consiguiente* $\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| < \epsilon$. *Por lo tanto* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

Observación 1.40. Si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales tiene limite, entonces se dice que converge, en caso tal de que no tenga limite, se dice que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente.

Por ejemplo, consideremos la sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual es divergente, pues si fuera lo contrario, para todo $\epsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que *si* $n \geq k$ entonces $|n - x| < \epsilon$ de modo que

$-\epsilon+x<n<\epsilon+x$ para algún $x\in\mathbb{R}$, es decir que $\epsilon+x$ es una cota superior para el conjunto de todos los $n\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq k$, lo cual es falso por Propiedad de Arquímedes.

TEOREMA 6.1. *Si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales converge, entonces el limite es único.*

DEMOSTRACIÓN. (**Unicidad**)
Supongamos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l_1 y l_2, es decir que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_2$, luego por la Def. 1.39. se tiene que para todo $\epsilon>0$, existe $k_1, k_2\in\mathbb{N}$ tal que *si* $s\geq k_1$ entonces $|x_s-l_1|<\epsilon$ y *si* $t\geq k_2$ por esta razón $|x_t-l_2|<\epsilon$, Luego existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $k:=\max\{k_1,k_2\}$.

Si $n\geq k$ entonces $n\geq k\geq k_1$ y $n\geq k\geq k_2$ 4n consecuencia $|x_n-l_1|<\epsilon$ y $|x_n-l_2|<\epsilon$ de tal manera $|x_n-l_1|+|x_n-l_2|<2\epsilon$ se tiene $|(x_n-l_1)+(x_n-l_2)|\leq|x_n-l_1|+|x_n-l_2|<2\epsilon$ por lo que $2\left|x_n-\left(\dfrac{l_1+l_2}{2}\right)\right|<2\epsilon$ dado que $\left|x_n-\left(\dfrac{l_1+l_2}{2}\right)\right|<\epsilon$.

Así, por la Def. 1.39. se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{l_1+l_2}{2}$, entonces $l_1=\dfrac{l_1+l_2}{2}$ por consiguiente $l_1=l_2$, or lo tanto si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales converge, entonces el limite es único. □

TEOREMA 6.2. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones convergentes de números reales tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y$, además si $x_n\leq y_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, entonces $x\leq y$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\forall n\in\mathbb{N},\ x_n\leq y_n$, entonces $0\leq y_n-x_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Sea $\epsilon>0$ dado, tomemos $\epsilon^*=\dfrac{\epsilon}{2}>0$, luego existe $k_1,k_2\in\mathbb{N}$ tal que *si* $i\geq k_1$ de ahí que $|x_i-x|<\epsilon^*$ y *si* $j\geq k_2$ por consiguiente $|y_j-y|<\epsilon^*$.

Además existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $k:=\max\{k_1,k_2\}$ y si $n\geq k$ tanto como $n\geq k_1$ y $n\geq k_2$ puesto que $|x_n-x|<\epsilon^*$ y $|y_n-y|<\epsilon^*$ de donde $|x-x_n|+|y_n-y|<2\epsilon^*=2\dfrac{\epsilon}{2}=\epsilon$ de manera que $|(x-x_n)+(y_n-y)|\leq|(x-x_n)|+|y_n-y|<\epsilon$ pues, $|(y_n-x_n)+(x-y)|<\epsilon$ por lo que sigue $-\epsilon-(x-y)<y_n-x_n<\epsilon-(x-y)$, luego $0\leq y_n-x_n<\epsilon-(x-y)$ con tal de $0<y-x+\epsilon$ por eso $x<y+\epsilon$ a fin de que $x\leq y$. □

COROLARIO 1.3. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente de números reales y si $x_n\geq 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\geq 0$.

DEMOSTRACIÓN. (**Vía reducción al absurdo**)
Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, entonces supongamos que converge a un $x\in\mathbb{R}$

tal que $x < 0$, es decir que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x < 0$. Sea $\epsilon > 0$ dado, tomemos $\epsilon^* = -x > 0$, luego existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$ entonces $|x_n - x| < \epsilon^* = -x$ con tal de $2x < x_n < 0$, luego $x_n < 0$ y $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por tanto es una falsedad. $\square$

TEOREMA 6.3. *Toda sucesión convergente de números reales es acotada.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a un $x \in \mathbb{R}$, por consiguiente para todo $\epsilon > 0$ dado, tomemos $\epsilon^* = 1 > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$ entonces $|x_n - x| < \epsilon^* = 1$ por eso $-1 + x < x_n < 1 + x$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como en el intervalo $[x - 1, x + 1]$ están todos los términos $(n \geq k)$ de la sucesión salvo un número finito $(n < k)$, es decir el conjunto de imágenes $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$, luego existe $s, i \in \mathbb{R}$ tal que $s := \text{máx}\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, 1 + x\}$ y $i := \min\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x - 1\}$, así $i \leq x_n \leq s$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. $\square$

TEOREMA DE COMPRENSIÓN 6.1. *Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes de números reales tales que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y si el $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = l$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes de números reales tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = l$ y existe el $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, además $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x_n \leq y_n$ y $y_n \leq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego en virtud del Teor. 6.2. se tiene que $l \leq \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \leq l$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$. $\square$

PROPOSICIÓN 1.41. *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales que converge a $x \in \mathbb{R}$, entonces la sucesión $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $|x|$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, entonces por la Def. 1.39. se tiene que para todo $\epsilon > 0$ dado, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$, entonces $|x_n - x| < \epsilon$, luego por el Teorema del valor absoluto, implica que $||x_n| - |x|| < \epsilon$, por lo tanto $|x_n| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} |x|$. $\square$

OBSERVACIÓN 1.42. Miremos que el reciproco de la prop. 1.41. no es cierto, es decir que si $|x_n| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} |x| \not\to x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, pues consideremos la sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y a pesar de $|(-1)^n| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} |1|$, la sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente, pues ella oscila entre -1 y 1. Por lo tanto según la Def. 1.39. no tiene limite.

LEMA 1.43. *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x y $x \neq 0$, entonces existe un número real positivo M y un entero positivo k tales que si $n \geq k$, entonces $|x_n| \geq M$.*

Demostración. Puesto que $x \neq 0$, tomemos $\epsilon^* = \dfrac{|x|}{2} > 0$ y como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, entonces por la Def. 1.39. se tiene que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$, entonces $|x_n - x| < \epsilon^* = \dfrac{|x|}{2}$, por tanto $-\dfrac{|x|}{2} < -|x_n - x|$.

Sea $M := \dfrac{|x|}{2}$, luego $|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x|$ entonces $0 \leq |x_n| \leq |x_n - x| + |x|$ de modo que $-|x_n - x| + 0 \leq |x_n| - |x_n - x| \leq |x_n|$ de donde $-|x_n - x| \leq |x_n|$ tanto como $|x| - |x_n - x| \leq |x| + |x_n|$ con tal de $|x| - |x_n - x| \leq |x_n| \leq |x| + |x_n|$ por ende $|x| - |x_n - x| \leq |x_n|$ de ahí que $|x| - \dfrac{|x|}{2} \leq |x| - |x_n - x| \leq |x_n|$ se tiene $M = \dfrac{|x|}{2} \leq |x_n|$. □

Consideremos la siguiente variación del Lema 1.43.la cual esta expresada en el siguiente corolario.

Corolario 1.4. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \neq 0$ y $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces existe un número real positivo M tal que $|x_n| \geq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Puesto que $x \neq 0$, entonces tomemos $\epsilon^* = \dfrac{|x|}{2} > 0$, luego existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $M := \dfrac{|x|}{2}$ y como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \neq 0$, entonces por la Proposición. 1.41. se tiene que $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $|x| > 0$ con $x_n \neq 0$ para todo n, luego por la Definición. 1.39. existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$ entonces $\big||x_n| - |x|\big| < \epsilon^* = \dfrac{|x|}{2}$ por esa razón $\dfrac{|x|}{2} < |x_n|$ y $|x_n| < \dfrac{3|x|}{2}$ pues, $\dfrac{|x|}{2} < |x_n|$ ó f de tal manera $\dfrac{|x|}{2} < |x_n|$ ó $\dfrac{|x|}{2} = |x_n|$ por tanto $M = \dfrac{|x|}{2} \leq |x_n|$. □

Teorema 6.4. *Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes de números reales y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces se cumplen:*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha) = \alpha$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha \cdot x_n) = \alpha \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n\right)$.

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{y_n}\right) = \left(\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}\right)$*; donde* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ *y* $y_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \left(\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}\right)$*; donde* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ *y* $y_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sean $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$ tales que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ y α una constante. Sea $\epsilon > 0$ dado.

Para $i)$ Ejercicio para el lector.

Para la $ii)$

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha = 0$ ó $\alpha \neq 0$. Para $\alpha = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha \cdot x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(0 \cdot x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(0) = 0 = 0 \cdot x = \alpha \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(x_n)$, por otro lado, como $\alpha \neq 0$, entonces tomemos $\epsilon^* = \dfrac{1}{|\alpha|}\epsilon > 0$, luego existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$ implica que $|x_n - x| < \epsilon^* = \dfrac{1}{|\alpha|}\epsilon$ por consiguiente $|\alpha x_n - \alpha x| < \epsilon$, por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha \cdot x_n) = \alpha \cdot x = \alpha \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Para la $iii)$

Tomemos $\epsilon^* = \dfrac{\epsilon}{2} > 0$, luego existe $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geq k_1$ entonces $|x_i - x| < \epsilon^*$ y *si* $j \geq k_2$ se tiene $|y_j - y| < \epsilon^*$ y como existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $k := \max\{k_1, k_2\}$, luego si $n \geq k$ con tal de $n \geq k_1$ y $n \geq k_2$ de donde $|x_n - x| < \epsilon^*$ y $|y_n - y| < \epsilon^*$, por consiguiente $|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < 2\epsilon^* = 2\dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Puesto que se tomo un $\epsilon > 0$ arbitrario y en virtud de la Def. 1.39. se concluye que $\{x_n + y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x + y$, es decir que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Se deja como ejercicio para el lector demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. $\square$

Observación 1.44. Hay que tener cuidado a la hora de distribuir el limite en una suma o resta si no se esta completamente seguro de que dichos limites existan, es decir que las sucesiones converjan, por ejemplo $\lim\limits_{n\to\infty}(0) = \lim\limits_{n\to\infty}((-1)^n - (-1)^n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n - \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$, en donde el segundo paso de la igualdad no se puede hacer ya que la sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente.

Para la $iv)$

Como $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ con $a \in \mathbb{R}$, entonces $a = 0$ ó $a \neq 0$. Consideremos primero es caso en que $a = 0$, luego como $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, entonces por la Prop. 1.38. existe $h \in \mathbb{R}^+$ tal que $|y_n| \leq h$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tomemos $\epsilon^* = \dfrac{\epsilon}{h} > 0$, luego existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$ implica que $|x_n - 0| < \epsilon^* = \dfrac{\epsilon}{h}$, por consiguiente $|x_n \cdot y_n - 0| < h \cdot \dfrac{\epsilon}{h} = \epsilon$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = 0 = 0 \cdot b = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n\right)$. Por otro lado, como $a \neq 0$, entonces tomemos $\epsilon^* = \dfrac{1}{2h}\epsilon > 0$ y $\epsilon^{**} = \dfrac{1}{2|a|}\epsilon > 0$, por consiguiente existe $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $i \geq k_1$ implica que $|x_i - x| < \epsilon^*$ y si $j \geq k_2$ implica que $|y_j - y| < \epsilon^{**}$. Además existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k := \max\{k_1, k_2\}$, por tanto si $n \geq k$, implica que $n \geq k_1$ y $n \geq k_2$, entonces $|x_n - x| < \dfrac{1}{2h}\epsilon$ y $|y_n - y| < \dfrac{1}{2|a|}\epsilon$. Luego,

$|x_n \cdot y_n - x \cdot y| = |y_n(x_n - x) + x(y_n - y)| \leq |y_n||x_n - x| + |x||y_n - y| < h \cdot \dfrac{1}{2h}\epsilon + |a| \cdot \dfrac{1}{2|a|}\epsilon = \epsilon,$
por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = x \cdot y = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n\right).$

para la $v)$
Como la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $y \neq 0$ y $y_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces por el Corol. 1.4. Existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|y_n| \geq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\dfrac{1}{|y||y_n|} \leq \dfrac{1}{|y|M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomemos $\epsilon^* = M|y|\epsilon > 0$, por consiguiente existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$ implica que $|y_n - y| < \epsilon^* = M|b|\epsilon$, Luego $\left|\dfrac{1}{y_n} - \dfrac{1}{y}\right| = \left|\dfrac{1}{yy_n}\right| |y - y_n| < \dfrac{1}{|y|M} \cdot M|y|\epsilon = \epsilon$, por lo tanto, $\lim\limits_{\to\infty}\left(\dfrac{1}{y_n}\right) = \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$

Para la $vi)$
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \cdot \dfrac{1}{y_n}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{y_n}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}\right) = \left(\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}\right).$
Se deja como ejercicio para el lector demostrar la vi utilizando la Definición 1.39.

Teorema 6.5. *Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ secesiones de números reales y sea $x \in \mathbb{R}$. Si para algún $C > 0$ y algún $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $|x_n - x| < C|y_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m$ y $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n) = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado, tomemos $\epsilon^* = \dfrac{1}{C}\epsilon$ y como el $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n) = 0$, entonces por la Def. 1.39. existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$ implica que $|y_n - 0| < \epsilon^* = \dfrac{1}{C}\epsilon$, entonces $C|y_n| < \epsilon$. Luego, si $n \geq k$ y $n \geq m$, implica que $|x_n - x| \leq C|y_n|$, entonces $|x_n - x| \leq C|y_n| < \epsilon$ por tanto $|x_n - x| < \epsilon$, así $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x$. □

Proposición 1.45. *Si $b \in \mathbb{R}^+$ tal que $0 < b < 1$, entonces la sucesión $\{b^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

Demostración. Como $b = \dfrac{1}{\dfrac{1}{b}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{b} - 1} = \dfrac{1}{1+a}$ donde $a := \dfrac{1}{b} - 1$ y como $0 < b < 1$ entonces $0 < \left(\dfrac{1}{b} - 1\right) = a$, lo que implica que $0 < \dfrac{1}{|a|}$. Por la Desigualdad de Bernoulli 2.2.

2. se tiene que $(1+a)^n \leq 1+na$, por tanto $0 < b^n = \dfrac{1}{(1+a)^n} \leq \dfrac{1}{1+na} < \dfrac{1}{na}$, entonces $|b^n - 0| < \dfrac{1}{|a|} \cdot \left|\dfrac{1}{n}\right|$, luego en virtud del Teor. 6.5. se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty}(b^n) = 0$. $\square$

Teorema 6.6. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos tal que existe $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right) = l$ y Si $l < 1$, entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.*

Demostración. Como por el Corol. 1.3. se sigue que $l \geq 0$, luego $0 \leq l < 1$, por tanto existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $0 \leq l < r < 1$, entonces $0 < r - l$. Sea $\epsilon = r - l > 0$ dado y como $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right) = l$, entonces por la Def. 1.39 existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$ entonces $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n} - l\right| < \epsilon = r - l$ por eso $x_n(2l - r) < x_{n+1} < rx_n$ se tiene $0 < x_{n+1} < rx_n$.

Como $x_{n+1} < rx_n$, entonces$r^{n-1}x_2 < r^n x_1$

$$
\begin{aligned}
&r^{n-2}x_3 < r^{n-1}x_2 < r^n x_1\\
&\qquad\vdots\\
&rx_n < r^2x_{n-1} < r^3x_{n-2} < \cdots < r^{n-k}x_{k+1} < \cdots < r^n x_1\\
&0 < x_{n+1} < rx_n < \cdots < r^{n-k}x_{k+1} < r^{n-k+1}x_k < \cdots < r^n x_1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, si $n > k$ se obtiene que $0 < x_{n+1} < rx_n < r^2x_{n-1} < r^3x_{n-2} < \cdots < r^{n-k+1}x_k$, así $0 < x_{n+1} < r^{n-k+1}x_k$. Sea $C := \dfrac{x_k}{r^k}$, luego $0 < x_{n+1} < r^{n-k+1}r^kC$, entonces $0 < x_{n+1} < Cr^{n+1}$ para todo $n \geq k$. puesto que $0 < r < 1$, entonces por la Prop. 1.45. se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$, y además $|x_{n+1} - 0| < C|r^{n+1}|$, por lo tanto, por el teor. 6.5. se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. $\square$

Teorema 6.7. *Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a y $a_n \geq 0$ para todo n, entonces $\{\sqrt{a_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\sqrt{a}$.*

Demostración. Como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a y $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$, entonces por el Corolario 1.3. se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geq 0$. Consideremos dos casos $i)$ $a = 0$ ó $ii)$ $a > 0$. Sea $\epsilon > 0$ dado.

Para $a = 0$. Tomemos $\epsilon^* = \epsilon^2 > 0$, por consiguiente existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$ implica que $|a_n - 0| < \epsilon^* = \epsilon^2$, entonces $0 \leq a_n < \epsilon^2$, luego $-\epsilon < 0 \leq \sqrt{a_n} < \epsilon$, por tanto $|\sqrt{a_n} - 0| < \epsilon$, así $\{\sqrt{a_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Por otro lado, para $a > 0$, entonces $\sqrt{a} > 0$ y como $0 \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $0 \leq \sqrt{a_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\sqrt{a} \leq \sqrt{a_n} + \sqrt{a}$ por tanto $\dfrac{1}{|\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|} \leq \dfrac{1}{|\sqrt{a}|}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomemos $\epsilon^{**} = \sqrt{a} \cdot \epsilon > 0$, luego existe $k_1 \in \mathbb{N}$

tal que si $n \geq k_1$ implica que $|a_n - a| < \epsilon^{**} = \sqrt{a}\cdot\epsilon$, luego $\dfrac{|a_n - a|}{\left|\sqrt{a_n}+\sqrt{a}\right|} < \dfrac{1}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}\cdot\epsilon = \epsilon$ pero note que $a_n - a = (\sqrt{a_n})^2 - (\sqrt{a})^2 = (\sqrt{a_n}-\sqrt{a})(\sqrt{a_n}+\sqrt{a})$ así $|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}| < \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ lo que completa la demostración. $\square$

EJERCICIOS 6.2.

(1) *Si $a > 0$, entonces el* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+na}\right) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Como $0 < a$ entonces $0 < na$ y $na < 1+na$ en consecuencia $0 < \dfrac{1}{1+na} < \dfrac{1}{na}$ se tiene $0 < \left|\dfrac{1}{1+na} - 0\right| < \left|\dfrac{1}{a}\right|\cdot\left|\dfrac{1}{n}\right|$ además por el Ejer. 6.1. 1. se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$ y haciendo $C = \left|\dfrac{1}{a}\right| > 0$ y $m = 1$ en el teor. 6.5. se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+na}\right) = 0$. $\square$

(2) *Sea* $\left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2^n}\right) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Como $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^n}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot 0 = \dfrac{1}{2} < 1$, luego por el Teor. 6.6. se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2^n}\right) = 0$. $\square$

(3) *Demuestre que* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = 0$ *si y sólo si* $\lim\limits_{n\to\infty}(|x_n|) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\epsilon > 0$ dado. Como $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, por consiguiente existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si
$n \geq k$ implica que $|x_n - 0| < \epsilon$, luego por Teorema del valor absoluto se tiene que $\big||x_n| - |0|\big| \leq |x_n - 0| < \epsilon$ entonces $\big||x_n| - |0|\big| < \epsilon$, por lo tanto $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Por otro lado, como $|x_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$ implica que $\big||x_n| - 0\big| < \epsilon$, luego $|x_n - 0| = |x_n| = \big||x_n| - 0\big| < \epsilon$, así $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. $\square$

(4) *Demostrar que si $x_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y si* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{x_n}) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Como $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $0 \leq \sqrt{x_n} \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por consiguiente $|\sqrt{x_n} - 0| \leq |x_n|$, además como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ y en virtud del Teorema 6.5. con $C = 1 > 0$ se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = 0$. $\square$

(5) *demostrar que si* $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$ *y si* $x > 0$*, entonces existe un número natural* M *tal que* $x_n \geq 0$ *para todo* $n \geq M$.

Demostración. Como $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ y $X > 0$, luego sea $\epsilon > 0$ dado, tomemos $\epsilon^* = x > 0$, entonces por la definición de sucesiones convergentes y la Propoción (propiedad de Arquimedes) existe $K \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq M$ implica que $|x_n - x| < \epsilon^* = x$, entonces $0 < x_n < 2x$, luego por Ejercicio 6, se tiene que $0 < x_n$ ó $0 = x_n$, por lo tanto $0 \geq x_n$. □

(6) *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión tal que existan números* α *y* N *tales que para* $n \geq N$ *y* $a_n = \alpha$*. Demostrar que* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* α.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado, entonces $-\epsilon < 0$. Además por la Proposición (Propiedad de Arquímedes), $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que existe $k\mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$ implica que $a_n = \alpha$ y como $-\epsilon < a_n - \alpha = 0 < \epsilon$, entonces $|a_n - \alpha| < \epsilon$, luego en virtud de la Definición de sucesión convergente, se concluye que $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. □

(7) *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión convergente. ¿es la sucesión* $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente?.*

Demostración. Si, la sucesión $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, y es más $\frac{x_n}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En efecto, sea $\epsilon > 0$ dado. Como $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, véase Ejercicio 6.1 1. además $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, luego,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(x_n \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = x \cdot 0 = 0$$

Por lo tanto $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. □

Observación 1.46. El resultado del Ejercicio 6.2 5, se generaliza con el siguiente teorema.

Teorema 6.8. *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales que converge a un* $x \in \mathbb{R}$ *y si* $x \neq 0$*, entonces existe* $M \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n \neq 0$ *para todo* $n \geq M$.

Demostración. (Vía reducción al absurdo)
Sean $\epsilon > 0$ dado y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a un $x \neq 0$, entonces $x > 0$ ó $x < 0$ y supongamos que existe un $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = 0$ para todo $i \geq k_1$. consideremos primero el caso en que $x > 0$, entonces tomemos $\epsilon^* = x > 0$, por consiguiente existe un $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq k_2$ entonces $|x_j - x| < \epsilon^*$, luego existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k := \max\{k_1, k_2\}$. Si $n \geq k$ implica que $n \geq k_1$ y $n \geq k_2$, entonces $x_n = 0$ y $|x_n - x| < \epsilon^* = x$ por consiguiente $x_n = 0$ y $0 < x_n$

lo cual es una contradicción. Por otro lado, como $x < 0$, entonces tomemos $\epsilon^{**} = -x > 0$, entonces si $n \geq k$ implica que $n \geq k_1$ y $n \geq k_2$, entonces $x_n = 0$ y $|x_n - x| < \epsilon^{**} = -x$ por consiguiente $x_n = 0$ y $x_n < 0$, lo cual es una contradicción. $\square$

Proposición 1.47. *Supongamos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones tales que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $a \neq 0$ y $\{a_nb_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Pruébese que $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Demostración. Como por el Teorema 6.8, se tiene que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \geq k$. Además como $\{a_nb_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces supongamos que converge a ab. Definamos una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_n := a_nb_n$, entonces $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ab, luego $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)$, entonces $\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$, es decir $\dfrac{ab}{a} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_nb_n}{a_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_n}\right)\cdot b_n$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. $\square$

Demostración alternativa. Sea $\epsilon > 0$ dado. Como $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \neq 0$ y en virtud del Teorema 6.8 y el corolário 1.4, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_i \neq 0$ para todo $i \geq k_1$ y existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|a_i| \geq M$ para todo $i \geq k_1$, lo cual implica que $\dfrac{1}{|a_i|} \leq \dfrac{1}{M}$ para todo $i \geq k_1$. Supongamos que $a_nb_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in \mathbb{R}$, entonces $x = 0$ ó $x \neq 0$. primero trataremos el caso en que $x = 0$.

Tomemos $\epsilon^* = M\epsilon > 0$, por consiguiente existen $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $t \geq k_2$ implica que $|a_tb_t - 0| < \epsilon^*$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k := \text{máx}\{k_1, k_2\}$ y si $n \geq k$ implica que $n \geq k_1$ y $n \geq k_2$, entonces $\dfrac{1}{|a_n|} \leq \dfrac{1}{M}$ y $|a_nb_n - 0| < \epsilon^*$. Luego, $|b_n - 0| = \dfrac{1}{|a_n|}\cdot|a_nb_n - 0| < \dfrac{1}{M}\cdot M\epsilon = \epsilon$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Por otro lado, tomemos $\epsilon^{**} = \dfrac{|a|M}{2|x|}\epsilon > 0$ y $\epsilon^{***} = \dfrac{M}{2}\epsilon > 0$, por consiguiente, existe $k_3, k_4 \in \mathbb{N}$ tales que si $p \geq k_3$ implica que $|a_p - a| < \epsilon^{**}$ y si $j \geq k_4$ implica que $|a_jb_j - x| < \epsilon^{***}$ y como existe $k' \in \mathbb{N}$ tal que $k' := \text{máx}\{k_1, k_3, k_4\}$ y si $n \geq k'$ implica que $n \geq k_1$, $n \geq k_3$ y $n \geq k_4$, entonces $\dfrac{1}{|a_n|} \leq \dfrac{1}{M}$, $|a_n - a| < \epsilon^{**}$ y $|a_nb_n - x| < \epsilon^*$.

Luego, $\left|b_n - \dfrac{x}{a}\right| = \dfrac{1}{|a|}\cdot|ab_n - x| = \dfrac{1}{|a||a_n|}\left|a\left(a_nb_n - x\right) + x\left(a - a_n\right)\right| \leq \dfrac{1}{|a_n|}\cdot|a_nb_n - x| + \dfrac{|x|}{|a_n||a|}\cdot|a - a_n| < \dfrac{1}{M}\cdot\dfrac{M}{2}\epsilon + \dfrac{|x|}{M|a|}\cdot\dfrac{|a|M}{2|x|}\epsilon = \epsilon$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{x}{a}$.

Definición 1.48. (Sucesiones monótonas.) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de númeors reales.

i) Se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente (o no decreciente) si satisface las desigualdades $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$

ii) Se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente (o no creciente) si satisface las desigualdades $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots$

iii) Se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona si es creciente o bien decreciente.

Teorema 6.9. (*Convergencia monótona*) *Una sucesión monótona de números reales es convergente si y sólo si esta acotada. Además*

i) *Si* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión creciente y acotada, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) *Si* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión decreciente y acotada, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \inf\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostración. La primera implicación ya se probo véase el Teorema 6.3. Por otro lado, la segunda implicación es tratada en el inciso *i*) y *ii*) del teorema. En efecto,

i) Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y acotada, es decir que el conjunto de imágenes $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ es acotado, por tanto, en virtud del Teorema de la existencia de supremo e ínfimo existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $s := \sup\{x_n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\epsilon > 0$ dado, entonces $s - \epsilon < s$ y en virtud del Teorema de la aproximación del supremo, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $s - \epsilon < x_{k_1} \leq s$. Si $n \geq k_1$ entonces $s - \epsilon < x_{k_1} \leq x_n \leq s < s + \epsilon$, es decir que $-\epsilon < x_n - s < \epsilon$ y así $|x_n - s| < \epsilon$, por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s = \sup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) Como $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente y acotada, es decir que el conjunto de imágenes $\{y_1, y_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ es acotado, por tanto, en virtud del Teorema de la existencias del supremo y el ínfimo existe $i \in \mathbb{R}$ tal que $i := \inf\{y_n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\epsilon > 0$ dado, entonces $i < i + \epsilon$ y en virtud del Teorema del aproximación del ínfimo, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $i \leq y_{k_2} < i + \epsilon$. Si $n \geq k_2$ entonces $i - \epsilon < i \leq y_n \leq y_{k_2} < i + \epsilon$, es decir que $-\epsilon < y_n - i < \epsilon$ y así $|y_n - i| < \epsilon$, por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = i = \inf\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$\square$

Definición 1.49. Si $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales y si m es un número natural dado, entonces la cola$-m$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión $X_m := \{x_{m+n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots\}$

Por ejemplo, la cola-3 de la sucesión $\{2n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ es la sucesión $X_3 = \{x_{3+n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_{3+1}, x_{3+2}, x_{3+3}, \ldots\} = \{8, 10, 12, 14, \ldots\}$

Teorema 6.10. *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales y se* $m \in \mathbb{N}$, *entonces la cola*$-m$ $X_m = \{x_{m+n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge si, y solamente si* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge. En este caso,* $\lim\limits_{n\to\infty}(X_m) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_{m+n}) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Ejemplos 6.1. .

(1) *Consideremos la sucesión* $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de números reales, entonces* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=0.$

Demostración. Vamos a utilizar el Teorema de convergencia monótona 6.9. Como $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{1}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dots\right\}$, además la sucesión es decreciente, pues $x_{n+1}\leq x_n$, entonces $x_{n+1}-x_n\leq 0$.

Luego $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1}}=0$; $\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}<0$, de forma general, $x_{n+1}-x_n\leq 0$, entonces $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}=-\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}\leq 0$, por tanto $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona decreciente, además es evidente que 0 es una cota inferior para el conjunto de imágenes $\left\{1,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dots\right\}$ así $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada inferiormente por 0, es decir que para todo $n\in\mathbb{N}$ $0\leq\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, basta probar que dado $c>0$, no es una cota inferior. En efecto, dado $c>0$, entonces $c^2\in\mathbb{R}^+$ y en virtud de la Corolário de la propiedad de Arquímedes existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $0<\dfrac{1}{n}<c^2$, lo cual implica que $0<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<c$, por consiguiente $\inf\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Además 1 es una cota superior, por lo tanto la sucesión $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente y es acotada, luego en virtud del Teorema 6.9, la sucesión $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un $x\in\mathbb{R}$ y por el Teorema 6.4, se tiene que $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x\cdot x=x^2$, entonces $x^2=0$, es decir que $x=0$. □

(2) *Sea* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *la sucesión definida por* $y_1=1$, $y_{n+1}=\dfrac{1}{4}(2y_n+3)$ *para* $n\geq 1$. *Demostrar que* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n=\frac{3}{2}$.

Demostración. Como $y_1=1$, $y_2=\dfrac{5}{4}$, $y_3=\dfrac{11}{8},\dots$, luego $y_1<y_2<y_3<\dots$. Demostraremos que $y_n<x$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y para algún $x\in\mathbb{R}$ fijo. En efecto, supongamos que para $n=1$, $y_1=1<x$, para $n=2$, $y_2=\dfrac{5}{4}<x$, como es válido para $n=1,2,3,\dots$, entonces supongamos que es válido para $n=k$, $y_k<x$ para algún $x\in\mathbb{R}$ fijo y miremos si se cumple para $n=k+1$, es decir $y_{k+1}<x$. Luego, $y_{k+1}=\dfrac{1}{4}(2y_k+3)<\dfrac{1}{4}(2x+3)<x$. Para que $\dfrac{1}{4}(2x+3)<x$ debe ser $x>\dfrac{3}{2}=1,5$.

Luego podemos tomar a $x = 2$, y así $y_{k+1} = \frac{1}{4}(2y_k + 3) < \frac{1}{4}(2 \cdot 2 + 3) = \frac{7}{4} < 2$, por lo tanto $y_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostraremos ahora que $y_n < y_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como ya se ha probado la validez para $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces supongamos que es válido para $n = k$ y miremos si se cumple para $n = k+1$, es decir $y_{k+1} < y_{k+2}$. En efecto, $y_{k+1} = \frac{1}{4}(2y_k + 3) < \frac{1}{4}(2y_{k+1} + 3) = y_{k+2}$, entonces $y_{k+1} < y_{k+2}$. Por tanto $y_k < y_{k+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea demostrado que la sucesión es creciente y acotada superiormente por 2. Puesto que $y_{n+1} = \frac{1}{4}(2y_n+3)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y como la cola-1 $Y_1 := \{y_{1+n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y por el Teorema 6.10, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} Y_1 = y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, entonces $y = \lim\limits_{n\to\infty} Y_1 \ \wedge \ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, donde $y = \lim\limits_{n\to\infty}(Y_1) = \lim\limits_{n\to\infty}(y_{1+n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}(2y_n + 3)\right) = \frac{1}{4}\left[2\left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n\right) + 3\right] = \frac{1}{4}\left[2\,(y) + 3\right] = \frac{y}{2} + \frac{3}{4}$, por consiguiente $y = \frac{3}{2}$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{3}{2}$. $\square$

Observación 1.50. En el paso en el que se puso $y_n < x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ese x se coloco por que no se sabia con certeza quien era.

(3) *Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales definida por $z_1 = 1$ y $z_{n+1} = \sqrt{2z_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge y encuentre el limite.*

Demostración. Calculemos algunos términos de la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $z_1 = 1$, para $n = 1$, $z_{1+1} = z_2 = \sqrt{2z_1} = \sqrt{2}$, para $n = 2$, $z_{2+1} = z_3 = \sqrt{2z_2} = \sqrt{2\sqrt{2}}, \ldots$, podemos observar que $1 \leq z_1 = 1 < z_2 = \sqrt{2} < z_3 = \sqrt{2\sqrt{2}} < \cdots$, es decir que $1 \leq z_n < z_{n+1} < x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y algún $x \in \mathbb{R}$ fijo. Debemos probar esto por inducción. En efecto, de hecho, esto es verdadero para $n = 1, 2, 3\ldots$, entonces supongamos que se cumple para $n = k$, $1 \leq z_k < z_{k+1} < x$, entonces $1 < z_{k+1} = \sqrt{2z_k} < \sqrt{2z_{k+1}} = z_{k+2} < \sqrt{2x} < x$, luego $\sqrt{2x} < x$ de donde $x = 0$ ó $x = 2$, pero descartamos la posibilidad de que $x = 0$, pues por hipótesis $1 \leq z_k < z_{k+1} < z_{k+2}$, entonces $1 < z_{k+2}$.

Por lo tanto, $1 \geq z_n < z_{n+1} < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así hemos probado que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente y acotada, entonces por el Teorema de Convergencia monótona 6.9, se concluye que la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un $z \in \mathbb{R}$. Por otro lado, como la cola-1 $Z_1 = \{z_{1+n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces por el Teorema 6.10, se tiene que $z = \lim\limits_{n\to\infty}(Z_1) = \lim\limits_{n\to\infty}(z_{n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2z_n}) = \sqrt{2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} z_n} = \sqrt{2z}$ de donde $z = 0$

ó $z = 2$. descartamos la posibilidad de que $z = 0$, pues la sucesión es creciente, por lo tanto $\lim_{n\to\infty} z_n = 2$. □

(4) *Sea* $x_1 > 1$ *y* $x_{n+1} := 2 - \dfrac{1}{x_n}$ *para* $n \geq 2$. *Demostrar que* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *está acotada y que es monótona. Encontrar el limite.*

Demostración. Analicemos algunos términos de la sucesión. $x_1 > 1$, para $n = 2$, $x_{2+1} = x_3 = 2 - \dfrac{1}{x_2}$, para $n = 3$, $x_{3+1} = x_4 = 2 - \dfrac{1}{x_3} = 2 - \dfrac{1}{2 - \dfrac{1}{x_2}}$, para $n = 4$, $x_{4+1} = x_5 = 2 - \dfrac{1}{x_4} = 2 - \dfrac{1}{2 - \dfrac{1}{2 - \dfrac{1}{x_2}}}$. Como podemos observar $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots$, pues en particular, si tomamos $x_1 < x_2$ entonces $x_1 \cdot x_1 < x_1 \cdot x_2$, luego $0 < (x_1 - 1)^2 < x_1x_2 - 2x_1 + 1$ de donde $0 < (x_1-1)^2 < x_1\left(2 - \dfrac{1}{x_1}\right) - 2x_1 + 1 = 2x_1 - \dfrac{x_1}{x_2} - 2x_1 + 1 = 0$, lo cual es una contradicción, por lo tanto, demostraremos que $x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De hecho se cumple para $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces supongamos que es válido para $n = k$, es decir que $x_{k+1} \leq x_k$, entonces $x_{k+2} = 2 - \dfrac{1}{x_{k+1}} < 2 - \dfrac{1}{x_k} = x_{k+1}$, es decir que $x_{k+2} < x_{k+1}$, por tanto para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \leq x_n$. Probaremos ahora que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. En efecto, como podemos observar, para $n = 2$, $x_{2+1} = x_3 = 2 - \dfrac{1}{x_2}$, con $x_2 \neq 0$, entonces $x_2 < 0$ ó $x_2 > 0$.

Consideremos primero el caso en que $x_2 < 0$, entonces $\dfrac{1}{x_2} < 0$ lo que implica que $-\dfrac{1}{x_2} > 0$, es decir que $2 - \dfrac{1}{x_2} > 2$, lo cual es una contradicción, pues a 2 le estoy restando una cantidad positiva $-\dfrac{1}{x_2} > 0$, luego ha de ser $x_2 > 0$, lo cual implica que $-\dfrac{1}{x_2} < 0$, entonces $2 - \dfrac{1}{x_2} = x_3 < 2$, es decir que $x_3 < 2$. para $n = 3$, $x_{3+1} = x_4 = 2 - \dfrac{1}{x_3}$, con $x_3 \neq 0$, entonces $x_3 < 0$ ó $x_3 > 0$.

Consideremos primero el caso en que $x_3 < 0$, entonces $\dfrac{1}{x_3} < 0$ lo que implica que $-\dfrac{1}{x_3} > 0$, es decir que $2 - \dfrac{1}{x_3} > 2$, lo cual es una contradicción, pues a 2 le estoy restando una cantidad positiva $-\dfrac{1}{x_3} > 0$, luego ha de ser $x_3 > 0$, lo cual implica que $-\dfrac{1}{x_3} < 0$, entonces $2 - \dfrac{1}{x_3} = x_4 < 2$, es decir que $x_4 < 2$, luego para

$n = 2, 3, 4, \ldots$, tenemos que $0 < x_2 < x_3 < \cdots < 2$, entonces supongamos que se cumple para $n = k$, es decir que $0 < x_k < 2$, entonces $0 > -\dfrac{1}{2} > -\dfrac{1}{x_k}$, así $2 > 2 - \dfrac{1}{2} > 2 - \dfrac{1}{x_k} = x_{k+1}$, es decir que $2 > x_{k+1}$ y como $x_{k+2} = 2 - \dfrac{1}{x_{k+1}}$, entonces $x_{k+1} \neq 0$, entonces $x_{k+1} < 0$ ó $x_{k+1} > 0$.

Consideremos primero el caso en el que $x_{k+1} < 0$, luego $-\dfrac{1}{x_{k+1}} > 0$ lo que implica que $2 - \dfrac{1}{x_{k+1}}$, lo cual es una contradicción, pues a 2 le estoy restando una cantidad positiva $-\dfrac{1}{x_{k+1}} > 0$, luego ha de ser $x_{k+1} > 0$ y así $0 < x_{k+1} < 2$ para todo $n \geq 2$, por lo tanto, para todo $n \geq 2$, $0 < x_n < 2$ así hemos probado que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona decreciente y acotada y por el Teorema de la convergencia monótona 6.9, se tiene que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un $x \in \mathbb{R}$ y por el Teorema 6.10 se tiene que $x = \lim\limits_{n\to\infty} X_1 = \lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \dfrac{1}{x_n}\right) = 2 - \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = 2 - \dfrac{1}{x}$ de donde $x = 1$. Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$. $\square$

Teorema 6.11. *Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales tales que converjan a x y y respectivamente. Si $x < y$, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq M$, $x_n < y_n$.*

Demostración. Como $x < y$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x < c < y$, entonces $0 < c - x$ y $0 < y - c$. Sea $\epsilon > 0$ dado, tomemos $\epsilon^* = c - x > 0$ y $\epsilon^{**} = y - c > 0$, luego como $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ y $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, entonces existe $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $i \geq k_1$ entonces $|x_i - x| < \epsilon^*$ y si $j \geq k_2$ entonces $|y_j - y| < \epsilon^{**}$ y como existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k := \max\{k_1, k_2\}$ y si $n \geq k$ implica que $n \geq k_1$ y $n \geq k_2$, entonces $|x_n - x| < \epsilon^* = c - x$ y $|y_n - y| < \epsilon^{**} = y - c$, luego $c + 2x < x_n < c$ y $c < y_n < 2y - c$, por lo tanto $x_n < y_n$. $\square$

Ejercicios 6.3.

(1) *Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $y_n :=$ mín$\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.*

Demostración. Como $y_n \in \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, entonces $0 \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, además $0 \leq y_n \leq |x_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\epsilon > 0$ dado, por consiguiente existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$ implica que $|x_n - 0| < \epsilon$, luego $0 \leq |y_n - 0| = |y_n| = y_n \leq |x_n| < \epsilon$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. $\square$

(2) *si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, entonces el $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado, tomemos $\epsilon^* = \dfrac{\epsilon}{2} > 0$, luego existe $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $t \geq k_1$ entonces $|x_t - a| < \epsilon^*$ y si $s \geq k_2$ con tal de $|(x_s - y_s) - 0| < \epsilon^*$. Sea $k := \text{máx}\{k_1, k_2\}$, si $n \geq k$ implica que $n \geq k_1$ y $n \geq k_2$, entonces $|x_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$ y $|y_n - x_n| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Luego, $|y_n - a| = |(y_n - x_n) + (x_n - a)| \leq |y_n - x_n| + |x_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. $\square$

(3) *Sea* $a \neq 0$. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{a} = 1$, *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado, tomemos $\epsilon^* = \dfrac{\epsilon}{|a|} > 0$, por consiguiente existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$, implica que $|\dfrac{y_n}{a} - 1| < \epsilon^* = \dfrac{\epsilon}{|a|}$. Luego $|y_n - a| = |a| \cdot \dfrac{1}{|a|} \cdot |y_n - a| < |a| \cdot \dfrac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. $\square$

(4) *Sea* $b \neq 0$. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = b$, *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{a}{b}$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado. Como $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ y en virtud del Teorema 6.3 y la Proposición 1.38, existe $h_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leq h_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, $\dfrac{x_n}{y_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$ y $b \neq 0$, entonces por el Teorema 6.8 y el Lema 1.43 se tiene que, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{x_i}{y_i} \neq 0$ para todo $i \geq k_1$, lo cual implica que $x_i \neq 0$ y $y_i \neq 0$ para todo $i \geq k_1$, y existe $h_2 \in \mathbb{R}^+$ y $k_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $j \geq k_2$ implica que $\left|\dfrac{x_j}{y_j}\right| \geq h_2$. Sea $k_3 := \text{máx}\{k_1, k_2\}$ y si $s \geq k_3$ implica que $s \geq k_1$ y $s \geq k_2$, entonces $\left|\dfrac{x_s}{y_s}\right| \geq h_2$ y $x_s \neq 0$ para todo $s \geq k_3$, por consiguiente $\left|\dfrac{y_s}{x_s}\right| \leq \dfrac{1}{h_2}$ para todo $s \geq k_3$. Luego $|y_s| = \left|\dfrac{y_s}{x_s} \cdot x_s\right| \leq \dfrac{1}{h_2} \cdot h_1 = h \in \mathbb{R}^+$ para todo $s \geq k_3$. Tomemos $\epsilon^* = \dfrac{|b|}{2h} \cdot \epsilon > 0$ y $\epsilon^{**} = \dfrac{|b|}{2} \cdot \epsilon > 0$, por consiguiente, existen $k_4, k_5 \in \mathbb{N}$ tales que si $m \geq k_4$, entonces $|x_m - a| < \epsilon^{**}$ y si $t \geq k_5$, entonces $\left|\dfrac{x_t}{y_t} - b\right| < \epsilon^*$ y como existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k := \text{máx}\{k_3, k_4, k_5\}$ y si $n \geq k$ implica que $n \geq k_3$ y $n \geq k_4$ y $n \geq k_5$, entonces $|y_n| \leq h$ y $|x_n - a| < \epsilon^{**}$ y $\left|\dfrac{x_n}{y_n} - b\right| < \epsilon^*$. Luego, $\left|y_n - \dfrac{a}{b}\right| = \left|\dfrac{1}{b}\right| \cdot |(by_n - x_n) + (x_n - a)| \leq \dfrac{|y_n|}{|b|} \cdot \left|b - \dfrac{x_n}{y_n}\right| + \dfrac{1}{|b|} \cdot |x_n - a| < \dfrac{h}{|b|} \cdot \dfrac{|b|}{2h} \cdot \epsilon + \dfrac{1}{|b|} \cdot \dfrac{|b|}{2} \cdot \epsilon = \epsilon$, por lo tanto $\lim\limits_{y_n} = \dfrac{a}{b}$. $\square$

Un caso análogo del ejercicio anterior esta expresado en el siguiente ejercicio.

5. *Sean* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiones de números reales tales que* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a un* $x \neq 0$ *y* $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge. Pruébese que* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un $x \neq 0$, entonces existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \neq 0$ para todo $i \geq k_1$ y en virtud del Teorema 6.3 y la Proposición 1.38, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_i| \leq M$ para todo $i \geq k_1$. Además como $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un $w \in \mathbb{R}$, entonces $w = 0$ ó $w \neq 0$. Consideremos primero el caso en que $w \neq 0$. Como $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \neq 0$ para todo $n \geq k_1$, así $\dfrac{x_n}{y_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} w \neq 0$ con $\dfrac{x_n}{y_n} \neq 0$ para todo $n \geq k_1$, luego por el Corolário 1.4, existe $h_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que $\left|\dfrac{x_n}{y_n}\right| \geq h_1$ para todo $n \geq k_1$, entonces existe un $h_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que $\left|\dfrac{y_n}{x_n}\right| \leq \dfrac{1}{h_1}$ para todo $n \geq k_1$. Luego, $|y_n| = \left|\dfrac{y_n}{x_n}\cdot x_n\right| \leq \dfrac{1}{h_1}\cdot M = h \in \mathbb{R}^+$ para todo $n \geq k_1$. Tomemos $\epsilon^* = \dfrac{|w|}{2}\epsilon > 0$ y $\epsilon^{**} = \dfrac{|w|}{2h}\cdot\epsilon > 0$, por consiguiente, existen $k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ tales que si $i \geq k_2$ implica que $|x_i - x| < \epsilon^*$ y si $s \geq k_3$ implica que $\left|\dfrac{x_s}{y_s} - w\right| < \epsilon^{**}$ y como existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k := \max\{k_1, k_2, k_3\}$ y si $n \geq k$ implica que $n \geq k_1$ y $n \geq k_2$ y $n \geq k_3$, entonces $|y_n| \leq h$ y $|x_n - x| < \epsilon^*$ y $\left|\dfrac{x_n}{y_n} - w\right| < \epsilon^{**}$. Luego, $\left|y_n - \dfrac{x}{w}\right| = \left|\dfrac{1}{w}\right|\cdot|(wy_n - x_n) + (x_n - x)| \leq \dfrac{|y_n|}{|w|}\cdot\left|w - \dfrac{x_n}{y_n}\right| + \dfrac{1}{|w|}\cdot|x_n - x| < \dfrac{h}{|w|}\cdot\dfrac{|w|}{2h}\cdot\epsilon + \dfrac{1}{|w|}\cdot\dfrac{|w|}{2}\cdot\epsilon = \epsilon.$

Por otro lado, como $x_i \neq 0$ para todo k_1, entonces por el Corolario 1.4, existe un $M' > 0$ tal que $|x_i| \geq M'$ para todo $i \geq k_1$, lo cual implica que $\dfrac{1}{|x_i|} \leq \dfrac{1}{M'}$ para todo $i \geq k_1$ y como $|y_n|\cdot|y_n| \leq h^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\dfrac{|y_i\cdot y_i|}{|x_i|} \leq \dfrac{h^2}{M'}$ para todo $i \geq k_1$. Tomemos $\epsilon^\circ = \dfrac{M'}{2h^2}\epsilon > 0$ y como existe $k' \in \mathbb{N}$ tal que $k' = \max\{k_1, k_3\}$ y si $n \geq k'$ implica que $n \geq k_1$ y $n \geq k_3$, entonces $\left|\dfrac{y_n\cdot y_n}{x_n}\right| \leq \dfrac{h^2}{M'}$ y $\left|\dfrac{x_n}{y_n} - 0\right| < \epsilon^*$. Luego, $|y_n - 0| = \left|\dfrac{y_n\cdot y_n}{x_n}\left(\dfrac{x_n}{y_n} - 0\right)\right| < \dfrac{h^2}{M'}\cdot\dfrac{M'}{h^2}\cdot\epsilon = \epsilon$ y así $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, lo cual es una contradicción, pues por la definición de la sucesión $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, tiene que ser $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además el $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$. □

6. *Sean* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiones de números reales tales que* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ *y para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $k \in \mathbb{N}$*tal que* $|b_n - a_n| < \epsilon$, *para todo* $n \geq k$. *Pruébese que* $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado, tomemos $\epsilon^* = \dfrac{\epsilon}{2} > 0$ y como $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, entonces existe $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $i \geq k_1$ implica que $|a_i - a| < \epsilon^*$ y si $j \geq k_2$ implica que $|b_j - a_j| < \epsilon^*$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k := \text{máx}\{k_1, k_2\}$ y si $n \geq k$ implica que $n \geq k_1$ y $n \geq k_2$, entonces $|a_n - a| < \epsilon^*$ y $|b_n - a_n| < \epsilon^*$. Luego,

$$|b_n - a| = |(b_n - a_n) + (a_n - a)| \leq |a_n - a| + |b_n - a_n| < 2\epsilon^* = 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. □

Proposición 1.51. *Supongase que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones tales que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen. Pruébese que $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado. Como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen, entonces existen $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} = l_1$ y $(a_n + b_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} = l_2$. Tomemos $\epsilon^* = \dfrac{1}{2}\epsilon$, por consiguiente existe $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geq k_1$ implica que $|a_i - l_1| < \epsilon^*$ y si $j \geq k_2$ implica que $|(a_j + b_j) - l_2| < \epsilon^*$. Además existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k := \text{máx}\{k_1, k_2\}$ y si $n \geq k$, entonces $n \geq k_1$ y $n \geq k_2$, por tanto $|a_n - l_1| < \epsilon^*$ e $|(a_n + b_n) - l_2| < \epsilon^*$.Luego,

$$|b_n - (l_2 - l_1)| = |[(b_n + a_n) - l_2] + (-a_n + l_1)| \leq |(b_n + a_n) - l_2| + |-a_n + l_1| < 2\epsilon^* = 2 \cdot \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

Por lo tanto, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $l_2 - l_1$. □

Ejercicios 6.4.

(1) *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente tal que $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$, entonces la sucesión $\{a_n - L\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - L) = 0$.*

Demostración. Como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y la sucesión $\{-L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que es convergente, pues $-L$ es constante, es más $-L_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -L$, entonces sea $C_n := a_n + (-L_n)$ una sucesión convergente, véase la Proposición 1.51, es decir que existe el $\lim\limits_{n\to\infty} C_n$, por ende $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + (-L_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} L_n = L - L = 0$. □

(2) *Dése un ejemplo en el que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converjan, y, sin embargo, $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converja. Consideremos las sucesiones $\{1 - (-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2, 0, 2, \ldots\}$ y $\{-1, 1, \ldots\}_{n\in\mathbb{N}}$, las cuales divergen, pero $\{(1 - (-1)^n) + (-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 1, \ldots\}$ converge a 1.*

Proposición 1.52. *Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones tales que $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ esta acotada, entonces la sucesión $\{a_n \cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $a_n b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Demostración. Como $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, entonces por la Proposición 1.38, se tiene que existe un $h\in\mathbb{R}^+$ tal que $|b_n|\leq h$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Sea $\epsilon>0$ dado, tomemos $\epsilon^*=\dfrac{1}{h}\epsilon>0$ y como $a_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, entonces por la Definición 1.39, existe un $k\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq k$ implica que $|a_n-0|<\epsilon^*$. Luego, $|a_nb_n-0|=|b_n|\cdot|a_n-0|<h\cdot\dfrac{1}{h}\epsilon=\epsilon$ y así $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$. $\square$

Ejemplos 6.2.

(1) *Sean* $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión convergente y* $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión acotada, entonces la sucesión* $\left\{(-1)^n\cdot\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente.*

Demostración. Como la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y es tal que el $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, además la sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, entonces por la Proposición 1.52, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n\cdot\dfrac{1}{n}\right)=0$, por tanto la sucesión $\left\{(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. $\square$

El siguiente ejemplo es un claro uso de las Proposiciones 1.51 y 1.52.

2. *Consideremos la sucesión convergente* $\left\{\dfrac{1}{n}+2\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y la sucesión acotada* $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *entonces la sucesión* $\left\{\left[\left(\dfrac{1}{n}+2\right)+(-2)\right]\cdot(-1)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ha cero. En efecto, consideremos la sucesión constante* $\{-2_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *es decir que* $\lim\limits_{n\to\infty}(-2_n)=-2$, *por lo tanto* $\{-2_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente y como* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+2\right)=2$, *entonces por la Proposición 1.51, se tiene que* $\left\{\left(\dfrac{1}{n}+2\right)+(-2)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente y es tal que* $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{1}{n}+2\right)+(-2)\right]=0$, *además la sucesión* $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{R}}$ *es acotada y en virtud de la Proposición 1.52, la sucesión* $\left\{\left[\left(\dfrac{1}{n}+2\right)+(-2)\right]\cdot(-1)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* 0.

Teorema 6.12. *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales tal que* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ *y si* $x\neq0$, *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{x}$.

Demostración. Sea $\epsilon>0$ dado. Como $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ con $x\neq0$ y en virtud del Teorema 6.8 y el Corolário 1.4 se tiene que, existe $k_1\in\mathbb{N}$ tal que $x_n\neq0$ para todo $n\geq k_1$ y existe $M\in\mathbb{R}^+$ tal que $|x_n|\geq M$, entonces $\dfrac{1}{|x_n|}\leq\dfrac{1}{M}$ para todo $n\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq k_1$. Tomemos

$\epsilon^* = M|x|\epsilon > 0$, por consiguiente existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geq k_2$ implica que $|x_i - x| < \epsilon^*$ y como existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k := \max\{k_1, k_2\}$ y si $n \geq k$ implica que $n \geq k_1$ y $n \geq k_2$, entonces $\dfrac{1}{|x_n|} \leq \dfrac{1}{M}$ y $|x_n - x| < \epsilon^* = M|x|\epsilon$. Luego $\left|\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x||x_n|} \cdot |x - x_n| < \dfrac{1}{M|x|} \cdot M|x|\epsilon = \epsilon$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{x}$.

Demostración alternativa. Sea $\epsilon > 0$ dado. Como el $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ con $x \neq 0$, entonces tomemos $\epsilon^* = \dfrac{|x|}{2} > 0$, por consiguiente existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geq k_1$ implica que $|x_i - x| < \epsilon^*$. Luego, $|x| = |x - x_i + x_i| \leq |x - x_i| + |x_i|$, es decir que $|x| - |x_i| \leq |x_i - x| < \epsilon^* = \dfrac{|x|}{2}$ por tanto $0 < \dfrac{|x|}{2} < |x_i|$ y así $0 < \dfrac{1}{|x_i|} < \dfrac{1}{|x|}$ para todo $i \geq k_1$. Por otro lado, tomemos $\epsilon^{**} = \dfrac{|x|^2}{2}\epsilon > 0$, por consiguiente existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq k_2$ implica que $|x_j - x| < \epsilon^{**}$. Sea $k := \max\{k_1, k_2\}$ y si $n \geq k$ implica que $n \geq k_1$ y $n \geq k_2$, entonces $\dfrac{1}{|x_n|} < \dfrac{2}{|x|}$ y $|x_n - x| < \dfrac{|x^2|}{2}\epsilon$. Luego $\left|\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x||x_n|} \cdot |x - x_n| < \dfrac{1}{|x|} \cdot \dfrac{2}{|x|} \cdot \dfrac{|x|^2}{2}\epsilon = \epsilon$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{x}$. □

Definición 1.53. (Subsucesión). Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria de números naturales estrictamente creciente $r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r_k < \cdots$, la sucesión $X' = \{x_{r_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ en reales dada por $\{x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3}, \ldots, x_{r_k}, \ldots\}$ se llama una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $X'_k = x_{r_k}$.

En términos menos formales, podemos decir que una subsucesión se obtiene suprimiendo algunos términos (o ninguno, puesto que toda sucesión es subsucesión de sí misma) de la sucesión y numerando nuevamente los restantes, manteniendo el orden original de los términos.

Ejemplos 6.3.

(1) *Consideremos la sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2, 4, 6, 8, \ldots, 2p, \ldots\}$ *y* $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{2k-1\}_{k\in\mathbb{N}} = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 2p-1, \ldots\}$ *entonces la subsucesión* $\{x_{r_k}\} = \{2, 6, 10, 14, \ldots, 4p-$ $2, \ldots\}$.

(2) *Hallemos las subsucesiones de la sucesión* $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $r_k = k^2$, $r_k = 2k$ *y* $r_k = 2^k$, *entonces como* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots\right\}$, *luego* $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}} =$

$\{k^2\}_{k\in\mathbb{N}} = \{1, 4, 9, 16, 15, \cdots, k^2, \ldots\}$, $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{2k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 2k, \ldots\}$ y $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{2^k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{2, 4, 8, 16, 32, \ldots, 2^k, \ldots\}$, entonces las subsucesiones correspondientes son respectivamente:

$$\{x_{r_k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{x_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}, \ldots, x_{2k}, \ldots\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2k}, \ldots\right\},$$

$$\{x_{r_k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{x_{k^2}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{x_1, x_4, x_9, x_{16}, \ldots, x_{k^2}, \ldots\} = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots, \frac{1}{k^2}, \ldots\right\} \text{ y}$$

$$\{x_{r_k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{x_{2^k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{x_2, x_4, x_8, x_{16}, x_{32}, \ldots, x_{2^k}, \ldots\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^k}, \ldots\right\}.$$

Las subsucesiones $\left\{\frac{1}{k^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\left\{\frac{1}{2k}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a 0, véase el Ejercicio 6.1. 1. Además la sucesión $\left\{\frac{1}{2^k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ también converge a 0. En efecto, como $\left\{\frac{1}{2^k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente acotada, es decir que $\left\{\frac{1}{2^k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona acotada. Por otro lado, es evidente que 0 es una cota inferior para $\left\{\frac{1}{2^k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$. Basta probar que dado cualquier $c > 0$, no es una cota inferior para $\left\{\frac{1}{2^k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$. Dado cualquier $c > 0$, existe por la Propiedad de Arquimedes, un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{c} < k$, entonces $\frac{1}{k} < c$ y por el Ejercicio 2.2 1, se tiene que para todo $k \in \mathbb{N}$, $k < 2^k$ y así $\frac{1}{2^k} < \frac{1}{k} < c$ para todo $k \in \mathbb{N}$ por tanto $\inf\left\{\frac{1}{2^k}\right\}_{k\in\mathbb{N}} = 0$. Luego por el Teorema de la convergencia monótona 6.9, se concluye que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0$.

(3) *Consideremos la sucesión $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y al sucesión $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $r_k = 2k$ y $r_k = 2k-1$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Si $r_k = 2k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, se obtiene la subsucesión $a_{r_k} = 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$, es decir que todos los términos de la subsucesión son iguales a 1 y por ende converge a 1, por otro lado, si se toma $a_{r_k} = 2k-1$ para cada k, entonces $a_{r_k} = 0$ para cada k y la subsucesión que se obtiene converge a 0.*

Observación 1.54. En el Ejemplo 6.3, el 2 era una sucesión convergente y de las tres subsucesiones, las tres eran convergentes y con el mismo limite (el limite de la sucesión original), en cambio en el 3 se considero una sucesión no convergente que tenia dos subsucesiones con limites distintos, es decir que las subsucesiones de sucesiones convergentes también convergen al mismo limite, como se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 6.13. *Si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales converge a un número real x si, y solamente si cada una de sus subsucesión converge. Además si todas las subsucesiones convergen, entonces todas ellas convergen al mismo limite.*

Demostración. Como toda sucesión es una subsucesión de sí misma, entonces si todas las subsucesiones de una sucesión convergen, entonces la sucesión es convergente, puesto que la sucesión queda incluida entre las subsucesiones, todas las cuales son convergentes por hipótesis. Por otro lado, supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, que converge a un número real x, entonces por la Definición 1.39, se tiene que dado $\epsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$ implica que $|x_n - x| < \epsilon$, además consideremos a $\{x_{r_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $r_1 < r_2 < \cdots < r_k < r_{k+1} < \cdots$, entonces podemos conjeturar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq r_n$.

En efecto, como para $n = 1$ se tiene que $1 \leq r_1$, lo cual es válido, pues $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números naturales, entonces supongamos que es valida para $n = k$, es decir $k \leq r_k$ y como $r_k < r_{k+1}$ entonces $k < r_{k+1}$ y por $N5$) se concluye que $k + 1 \leq r_{k+1}$, por lo tanto, para todo $n \leq r_n$, luego como se tiene que $n \geq k$ y $n \leq r_n$, entonces $r_n \geq k$, por consiguiente $|x_{r_n} - x| < \epsilon$, y así $\lim\limits_{x_{r_n}} = x$. □

Ejercicios 6.5.

(1) *El* $\lim\limits_{n\to\infty}(b^n) = 0$ *si, y solamente si* $0 < b < 1$.

Demostración. Como $0 < b < 1$, entonces $0 \cdot b^n < b \cdot b^n = b^{n+1} = x_{n+1} < b^n = x_n$, por lo tanto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente. Otra forma de probar esto, es comprobar que $x_{n+1} \leq x_n$ ó $x_n \leq x_{n+1}$, por consiguiente $0 \leq x_n - x_{n+1}$ ó $0 \leq x_{n+1} - x_n$, lo cual implica que $b^n(1-b) \geq 0$ ó $0 \leq (b-1)b^n$, por consiguiente

$$\left[\overbrace{(b^n \geq 0 \ \wedge \ 1 \geq b)}^{V} \vee \overbrace{(b^n \leq 0 \ \wedge \ \underbrace{1 \leq b}_{f})}^{f}\right] \vee \left[\overbrace{(\underbrace{b \geq 1}_{f} \wedge b^n \geq 0)}^{f} \vee \overbrace{(b \leq 1 \ \wedge \ \underbrace{b^n \leq 0}_{f.\ cons.\ n=1})}^{f}\right]$$

es decir que $b^n \geq 0$ y $1 \geq b$, por lo tanto $x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Debemos probar que $0 \leq b^n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, Para $n = 1$, $0 \leq b < 1$, para $n = 2$, $0 \leq b^2 < 1$, lo cual es válido, pues $0 < b < 1$ entonces $0 = 0 \cdot b < b \cdot b = b^2 < 1 \cdot b = b < 1$, luego como es válido para $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces supongamos que se cumple para $n = k$, es decir $0 \leq b^k z1$, entonces $0 = 0 \cdot b < b^k \cdot b = b^{k+1} < 1 \cdot b = b < 1$, por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq b^n < 1$, así $\{b^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona decreciente y esta acotada, luego en virtud del Teorema de la convergencia monótona 6.9, se tiene que la sucesión $\{b^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un $x \in \mathbb{R}$.

Consideremos a $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{b^{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de la sucesión $\{b^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, luego en virtud del Teorema 6.13, se tiene que $x = \lim\limits_{n\to\infty}(b^{2n}) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} b^n\right)^2 = x^2$ donde $x = 0$ ó $x = 1$, descartamos la posibilidad de que $x = 1$, pues $\{b^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0$. $\square$

(2) *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Si $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a L, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado. Como $x_{2n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$ y $x_{2n-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$, por consiguiente, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $i \geq k_1$ implica que $|x_{2i} - L| < \epsilon$ y si $j \geq k_2$ implica que $|x_{2j-1} - L| < \epsilon$. Sea $k \in \text{máx}\{2k_1, 2k_2 - 1\}$ y si $n \geq k$ implica que $n \geq 2k_1$ y $n \geq 2k_2 - 1$ y del hecho de que n es par ó n impar, se tiene que $[n \geq 2k_1\ y\ \ n \geq 2k_2 - 1\ y\ \ n\ par]$ ó $[n \geq 2k_1$ y $n \geq 2k_2 - 1$ y $n\ impar]$, entonces $[n \geq 2k_1$ y $n\ par]$ ó $[n \geq 2k_2 - 1$ y $n\ impar]$, lo cual implica que $\left[\frac{n}{2} \geq k_1; \frac{n}{2} \in \mathbb{N}\right]$ ó $\left[\frac{n+1}{2} \geq k_2; \frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}\right]$ por consiguiente $\left|x_{2\left(\frac{n}{2}\right)} - L\right| < \epsilon$ ó $\left|x_{2\left(\frac{n+1}{2}\right)-1} - L\right| < \epsilon$, es decir que $|x_n - L| < \epsilon$ ó $|x_n - L| < \epsilon$ y así $|x_n - L| < \epsilon$, por lo tanto, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $|x_n - L| < \epsilon$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$, por tanto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L. $\square$

(3) *Demostrar que $\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente.*

Demostración. Como $\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{1 + (-1), \frac{1}{2} + 1, \ldots\right\}$ es decir que $\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{2} + 1, \frac{1}{4} + 1, \ldots, \frac{1}{2n} + 1, \ldots\right\} \cup \left\{1 + (-1), \frac{1}{3} + (-1), \ldots, \frac{1}{2n-1} +\right.$, luego podemos considerar dos subsucesiones $\{x_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{2k} + 1\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{x_{2k-1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{2k-1} + (-1)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Además $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{2k}) = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{1}{2k}+1\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{1}{k}\right)+1 = \dfrac{1}{2}\cdot 0+1 = 1$ y

$$\lim_{k\to\infty}(x_{2k-1}) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-1\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{k}}{2-\frac{1}{k}}\right)-1 = \frac{\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}\right)}{2-\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}\right)}-1=-1,$$

por lo tanto $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{2k}) = 1 \neq \lim\limits_{k\to\infty}(x_{2k-1}) = -1$, luego en virtud del Teorema 6.13, se concluye que $\left\{\dfrac{1}{n}+(-1)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge. □

(4) *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona. Si $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión acotada de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Demostración. Consideremos a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona y $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión acotada de $\{x_n\}_{k\in\mathbb{N}}$, entonces por la Proposición 1.38, existe $h\in\mathbb{R}^+$ tal que $|x_{n_k}|\leq h$ para todo $k\in\mathbb{N}$, lo cual implica que $-h\leq x_{n_k}$ y $x_{n_k}\leq h$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Ahora como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona, entonces supongamos que es creciente, por consiguiente $x_1\leq x_n$ para todo $n\geq 1$ y como $k\leq n_k$ para todo $k\in\mathbb{N}$, entonces $x_k\leq x_{n_k}\leq h$ para todo $k\in\mathbb{N}$, es decir que $x_k\leq h$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Así $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente por h.

Por otro lado, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, entonces $x_1\geq x_n$ para todo $n\geq 1$ y como $k\leq n_k$ para todo $k\in\mathbb{N}$, entonces $x_k\geq x_{n_k}\geq -h$, es decir que $x_k\geq -h$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Así, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada inferiormente por $-h$, por tanto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona acotada y en virtud del Teorema 6.9, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. □

Teorema 6.14. (*Subsucesión monótona*). *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales, entonces existe una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que es monótona*

Demostración. Para los fines de esta demostración se dirá que el $m-$ésimo término x_m es un "pico" si $x_m\geq x_n$ para toda $n\in\mathbb{N}$ con $m\leq n$. (Es decir, x_m nunca es excedido por ningún término que lo precede). Se considerán dos casos, dependiendo de si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un número infinito o finito de picos.

Caso i): La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un número infinito de picos. En este caso, los picos se ordenan mediante subíndices crecientes, por tanto, se tienen los picos $x_{m_1}, x_{m_2},\ldots,x_{m_k},\ldots$, donde $m_1<m_2<\cdots<m_k<\cdots$. Puesto que cada uno de los términos es un pico, se tiene que $x_{m_1} \geq x_{m_2} \geq \cdots \geq x_{m_k} \geq \cdots$, por tanto, la subsucesión $\{x_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de picos es una subsucesión decreciente de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Caso *ii*): la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un número finito (posiblemente cero) de picos. Sean estos picos $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_r}, \ldots$, sea $s_1 := m_{r+1}$ (el primer indice después del último pico). Puesto que x_{s_1} no es un pico, existe $s_2 > s_1$ tal que $x_{s_1} < x_{s_2}$. Puesto que x_{s_2} no es un pico, existe $s_3 < s_2$ tal que $x_{s_2} < x_{s_3}$, si se continua de esta manera, se obtiene una subsucesión creciente $\{x_{s_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

Teorema 6.15. (**Teorema de Bolzano-Weiertrass**). *Una sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Del Teorema 6.14 se sigue que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de números reales, entonces tiene una subsucesión $\{x_{r_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que es monótona. Puesto que esta subsucesión también está acotada, por el Teorema 6.9, se deduce que la subsucesión es convergente. □

Definición 1.55. (Sucesión de Cauchy). Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice de Cauchy si, y solamente si para todo $\epsilon > 0$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq k$ implica que $|x_m - x_n| < \epsilon$.

Teorema 6.16. *Toda sucesión de Cauchy de números reales es acotada.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, entonces para todo $\epsilon > 0$ dado, tomemos $\epsilon^* = 1 > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq k$ entonces $|x_m - x_n| < \epsilon^*$. En particular, si $n, k \geq k$ implica que $|x_n - x_k| < \epsilon^* = 1$, entonces $-1 + x_k < x_n < 1 + x_k$. Luego existen $s, i \in \mathbb{R}$ tal que $s := \text{máx}\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + 1\}$ y $i := \text{mín}\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k - 1\}$. Así $i < x_n < s$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Además existe $h \in \mathbb{R}^+$ tal que $h := \text{máx}\{|i|, |s|\}$ por consiguiente $|x_n| \leq h$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 6.17. *Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ dado y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente, entonces existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$. Tomemos $\epsilon^* = \dfrac{\epsilon}{2} > 0$, por consiguiente, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $s \geq k$ implica que $|x_s - L| < \epsilon^*$. En particular, si $m, n \geq k$ implica que $m \geq k$ y $n \geq k$, entonces $|x_m - L| < \epsilon^*$ y $|x_n - L| < \epsilon^*$. Luego,

$$|x_m - x_n| = |(x_m - L) + (x_n - L)| \leq |x_m - L| + |x_n - L| < \epsilon^* + \epsilon^* = 2 \cdot \epsilon^* = 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Por lo tanto, para todo $\epsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq k$ implica que $|x_m - x_n| < \epsilon$ y en virtud de la Definición 1.55, se concluye que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. □

Teorema 6.18. (**Criterio de convergencia de Cauchy**). *Una sucesión de números reales es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. La primera parte ya se probo en el Teorema 6.17. Por otro lado, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, se demostrará que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún numero real. Por el Teorema 6.16, se tiene que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada y por el Teorema 6.15, existe una subsucesión $\{x_{n_{k'}}\}_{k'\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a algún número real x^*, se completara la demostración al probar que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x^*. Puesto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y sea $\epsilon > 0$ dado, tomemos $\epsilon^* = \dfrac{\epsilon}{2} > 0$ y por la Definición 1.55, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq k$ implica que $|x_n - x_m| < \epsilon^*$ $(*)$.

Como la subsucesión $\{x_{n_{k'}}\}_{k'\in\mathbb{N}}$ converge a x^*, entonces por la Definición 1.39, existe un número natural $k' \geq k$ que pertenece al conjunto $\{n_1, n_2, \ldots\}$ tal que $|x_{k'} - x^*| < \epsilon^*$, puesto que $k' \geq k$ y de $(*)$ con $k' = m$ se sigue que $|x_n - x_{k'}| < \epsilon^*$ para $n \geq k$, por lo tanto si $n \geq k$ implica que $n \geq k$ y como $k' \geq k$, entonces $|x_n - x_{k'}| < \epsilon^*$ y $|x_{k'} - x^*| < \epsilon^*$. Luego, $|x_n - x^*| = |(x_n - x_{k'}) + (x_{k'} - x^*)| \leq |x_n - x_{k'}| + |x_{k'} - x^*| < \epsilon^* + \epsilon^* = 2\epsilon^* = 2 \cdot \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$ y así $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$, es decir que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. □

Ejemplo 1.56. Usemos el Teorema de la convergencia de Cauchy para demostrar que la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. En efecto, Como se vio en el Ejercicio 6.1 1. la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, sin embargo para demostrar directamente que $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy se observa que si se da $\epsilon > 0$, entonces existe por la Propiedad de Arquímedes un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{2}{\epsilon} < k$, por tanto si $n, m \geq k$, entonces se tiene que $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{k}$ y $\dfrac{1}{m} \leq \dfrac{1}{k}$, por consiguiente $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} \leq \dfrac{2}{k}$, Se sigue por tanto que si $n, m \geq k$, entonces,

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{k} < \epsilon$$

Por lo tanto en virtud de la Definición 1.55, se concluye $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y por el Teorema 6.18 se sigue que $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Teorema 6.19. *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de Cauchy y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces*

i) $\alpha\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de Cauchy.*
ii) $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de Cauchy.*
iii) $\{a_n \cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Para la i). Consideremos dos casos, $\alpha = 0$ ó $\alpha \neq 0$. Consideremos primero el caso en que $\alpha = 0$. Para todo $\epsilon > 0$ dado, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq k$ implica que $|a_m - a_n| < \epsilon$. Como $0 \cdot |a_m - a_n| \leq |a_m - a_n| < \epsilon$, entonces $|0 \cdot a_m - 0 \cdot a_n| < \epsilon$ pero como $\alpha = 0$, entonces $|\alpha a_m - \alpha a_n| < \epsilon$. Por otro lado, como $\alpha \neq 0$, entonces tomemos $\epsilon^* = \dfrac{\epsilon}{|\alpha|} > 0$, existe un $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq k_1$ implica que $|a_m - a_n| < \epsilon^* = \dfrac{\epsilon}{|\alpha|}$, luego $|\alpha a_m - \alpha a_n| < |\alpha| \cdot \dfrac{\epsilon}{|\alpha|} = \epsilon$, por lo tanto $\{\alpha a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Para la ii) Sea $\epsilon > 0$ dado. Tomemos $\epsilon^{**} = \dfrac{\epsilon}{2} > 0$, por consiguiente, existe $k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ tal que si $t, s \geq k_1$ implica que $|a_t - a_s| < \epsilon^{**}$ y si $i, j \geq k_3$ implica que $|b_i - b_j| < \epsilon^{**}$. Sea $k = \text{máx}\{k_2, k_3\}$, entonces si $m, n \geq k$ implica que $m, n \geq k_2$ y $m, n \geq k_3$, así $|a_m - a_n| < \epsilon^{**}$ y $|b_m - b_n| < \epsilon^{**}$. Luego, $|(a_m + b_m) - (a_n + b_n)| \leq |a_m - a_n| + |b_m - b_n| < \epsilon^{**} + \epsilon^{**} = 2\epsilon^{**} = 2 \cdot \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$, por lo tanto $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Para la iii). Como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy, entonces en virtud del Teorema 6.16 existe $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^+$ tal que $|a_n| \leq h_1$ y $|b_n| \leq h_2$. Sea $\epsilon > 0$ dado, tomemos $\epsilon^* = \dfrac{\epsilon}{2h_1} > 0$ y $\epsilon^{**} = \dfrac{\epsilon}{2h_2} > 0$, por tanto, existe $k_4, k_5 \in \mathbb{N}$ tal que si $t, s \geq k_4$ por eso $|a_t - a_s| < \epsilon^{**}$ y si $i, j \geq k_5$ con tal de $|b_i - b_j| < \epsilon^*$. Sea $k := \text{máx}\{k_4, k_5\}$. Si $m, n \geq k$ implica que $m, n \geq k_4$ y $m, n \geq k_5$, entonces $|a_m - a_n| < \epsilon^{**}$ y $|b_m - b_n| < \epsilon^*$. Luego, $|a_m b_m - a_n b_n| = |b_m(a_m - a_n) + a_n(b_m - b_n)| \leq |b_m||a_m - a_n| + |a_n||b_m - b_n| < h_2 \cdot \dfrac{\epsilon}{2h_2} + h_1 \cdot \dfrac{\epsilon}{2h_1} = \epsilon$, por lo tanto $\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. □

Ejercicios 6.6. *Demostrar directamente que una sucesión monótona creciente y acotada es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona creciente y acotada, luego en virtud del Teorema 6.9, se sigue que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y supongamos que converge a $x \in \mathbb{R}$, es decir que dado $\epsilon > 0$, tomemos $\epsilon^* = \dfrac{\epsilon}{2} > 0$, por consiguiente existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$ implica que $|x_n - x| < \epsilon^*$. En particular si $n, k \geq k$ implica que $n \geq k$ y $k \geq k$, entonces $|x_n - x| < \epsilon^*$ y $|x_k - x| < \epsilon^*$. Luego,

$$|x_n - x_k| = |(x_n - x) + (x - x_k)| \leq |x_n - x| + |x_k - x| < \epsilon^* + \epsilon^* = 2 \cdot \epsilon^* = 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Por lo tanto, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq k$ implica que $|x_m - x_n| < \epsilon$ donde $k = m$ y en virtud de la Definición 1.55, se concluye que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. □

7. Topologia de la recta

Estudiaremos algunos conjuntos llamados abiertos y otros cerrados.

Definición 1.57. (Punto interior). Sea $X \subset \mathbb{R}$ y $x \in X$. Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tal que $x \in (a, b) \in X$, entonces diremos que x es punto interior de $\mathbb{X}$.

Ejemplos 7.1. *Sea* $X = (1, 5] \subset \mathbb{R}$.

(1) $1 \notin \mathbb{X}$*, por lo tanto,* 1 *no es punto interior de* X*.*
(2) $5 \in \mathbb{X}$*, pero no existe* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *tal que* $5 \in (a, b) \subset X$*, por lo tanto,* 5 *no es punto interior de* X*, pues supongamos que existe* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *y* $5 \in (a, b) \subset (1, 5]$*, lo cual implica que* $1 < a$*,* $b < 5$ *y* $5 \in (a, b)$*, entonces* $b < 5$ *y* $5 < b$*, lo cual es una contradicción.*
(3) 3 *es punto interior de* X*, pues* $3 \in X$ *y existen* $1{,}5, 4{,}5 \in \mathbb{R}$ *con* $1{,}5 < 4{,}5$ *tal que* $3 \in (1{,}5, 4{,}5)$ *lo cual implica que* $(3 - 1{,}5, 3 + 1{,}5) = (1{,}5, 4{,}5) \subset X$

Teorema 7.1. *Sean* $X \subset \mathbb{R}$*,* $x \in X$*, entonces* x *es punto interior de* X *si, y solamente si, existe un* $\epsilon > 0$ *tal que* $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset X$*.*

Demostración. Supongamos que x es punto interior de X, entonces por la Definición 1.57, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $x \in (a, b) \subset X$, es decir que $a < x$ y $x < b$. Sea $\epsilon = \text{mín}\{x - a, b - x\}$, entonces $\epsilon \leq x - a$ y $\epsilon \leq b - x$, es decir que $a \leq x - \epsilon$ y $x + \epsilon \leq b$.

¡¡Afirmación!!. $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (a, b) \subset X$. En efecto, sea $w \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$, lo cual implica que $a \leq x - \epsilon < w < x + \epsilon \leq b$, entonces $a < w < b$, esto es $w \in (a, b)$, luego existe un $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (a, b) \subset X$, por tanto existe un $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset X$. Por otro lado, supongamos que existe un $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset X$. Tomemos $\dfrac{(x - \epsilon) + x}{2} = x - \dfrac{\epsilon}{2} = a$ y $\dfrac{(x + \epsilon) + x}{2} = x + \dfrac{\epsilon}{2} = b$.

¡¡Afirmación!! $(a, b) \subset (x - \epsilon, x + \epsilon)$. En efecto, como $a = x - \dfrac{\epsilon}{2} < x$, es decir que $a < x$ y $b = x + \dfrac{\epsilon}{2} > x$, es decir que $b > x$ y así $a < x$ y $x < b$, entonce $x \in (a, b)$. Sea $y \in (a, b)$, entonces $x - \epsilon < x - \dfrac{\epsilon}{2} < y < x + \dfrac{\epsilon}{2} < x + \epsilon$, lo cual implica que $x - \epsilon < y < x + \epsilon$, esto es $y \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$, luego para todo $y \in (a, b)$, entonces $y \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$, por tanto $(a, b) \subset (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset X$ y así $(a, b) \subset X$, por lo tanto, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $x \in (a, b) \subset X$, entonces x es punto interior de X. □

Definición 1.58. (Conjunto interior). Sea $X \subset \mathbb{R}$. El conjunto formado por todos los puntos interiores del conjunto X se le llama interior de X y se nota $int(X)$.

Esto es, $int(X) := \{x \in \mathbb{R}; x$ es punto interior de $X\}$.

EJEMPLO 1.59. sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, el $int(X) = \phi$, pues A esta formado por 4 puntos y si tomamos intervalos muy pequeños no están contenidos en A, esto es, para todo $\epsilon > 0$, $(a - \epsilon, a + \epsilon) \not\subset A$ para $a = 1, 2, 3, 4$.

PROPOSICIÓN 1.60. *Sea* $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \phi$, *entonces* $int(X) \subset X$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in int(X)$, entonces por la Definición 1.58, se tiene que x es punto interior X y por la Definición 1.57, $x \in X$ y existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tal que $x \in (a, b) \subset X$, entonces $x \in X$, luego para todo $x \in int(X)$ implica que $x \in X$, esto es, $int(X) \subset X$. $\square$

PROPOSICIÓN 1.61. *Si* $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$, X, Y *diferentes de* ϕ, *entonces* $int(X) \subseteq int(Y)$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$, $X, Y \neq \phi$. Sea $x \in int(X)$, entonces por la Definición 1.58, x es punto interior de X y en virtud de la Definición 1.57, $x \in X$ y existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $x \in (a, b) \subset X$ y del hecho de que $X \subseteq Y$, se tiene que $x \in X \subseteq Y$ y existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tal que $x \in (a, b) \subset X \subseteq Y$ y así $x \in Y$ y existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tal que $x \in (a, b) \subset Y$ y por la Definición 1.57, x es punto interior de Y, esto es $y \in int(Y)$, luego para todo $x \in int(X)$ implica que $x \in int(Y)$, por lo tanto $int(X) \subseteq int(Y)$. $\square$

Demostración alternativa. Sea $x \in int(X)$, entonces por la Definición 1.58, x es punto interior de X y en virtud del Teorema 7.1, existe un $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq X$ y del hecho de que $X \subseteq Y$, se tiene que existe un $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq Y$ y así x es punto interior de Y, esto es, $x \in int(Y)$, luego para todo $x \in int(X)$ implica que $x \in int(Y)$, por lo tanto $int(X) \subseteq int(Y)$.

OBSERVACIÓN 1.62. Lo contrario no siempre es cierto, por ejemplo, consideremos $X = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $int(X) = \phi$ pero $X \not\subset int(X)$, pues $X = \{1, 2, 3, 4\} \not\subset int(X) = \phi$. Otro ejemplo seria considerando a $X = (1, 3]$, y a pesar de que $3 \in X$, 3 no es punto interior de X, entonces $3 \notin int(X)$, por ende $X \not\subset int(X)$.

EJERCICIOS 7.1.

(1) *Si* $X = (a, b)$ *ó* $X = (-\infty, b)$ *ó* $X = (a, +\infty)$, *entonces* $int(X) = X$.

DEMOSTRACIÓN. .

i) Si $X = (a, b)$. Sea $x \in (a, b)$, entonces $a < x < b$. Sea $\epsilon = \dfrac{1}{2}\text{mín}\{x - a, b - x\} > 0$, entonces $\epsilon \leq \dfrac{1}{2}(x - a)$ y $\epsilon \leq \dfrac{1}{2}(b - x)$, lo cual implica que $a \leq x - 2\epsilon$ y $x + 2\epsilon \leq b$.

¡¡Afrimación!! $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset X$. En efecto, sea $w \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$, lo cual implica que $a \leq x - 2\epsilon < x - \epsilon < w < x + \epsilon < x + 2\epsilon \leq b$, entonces $a < w < b$, esto es, $w \in (a, b)$, luego existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (a, b) = X$, entonces x es punto interior de X, y así $x \in int(X)$, entonces $x \subset int(X)$ y del hecho de que $int(X) \subset X$ (Proposición 1.60), se concluye que $X = int(X)$.

ii) Si $X = (-\infty, b)$. Sean $x \in (-\infty, b)$ y $\epsilon = b - x > 0$. ¡¡Afirmación!! $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (-\infty, b)$. En efecto, Sea $w \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$, entonces $x - \epsilon < w < x + \epsilon = b$, lo cual implica que $x - \epsilon < w$ y $w < b$ y por tanto $w < b$ y así $w \in (-\infty, b)$, luego existe un $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (-\infty, b)$, es decir que x es punto interior de X, por tanto $x \in int(X)$, esto es, $X \subset int(X)$ y en virtud del la Proposición 1.60, se concluye $x = int(X)$.

iii) si $X = (a, +\infty)$. Se demuestra de manera análoga a *ii*). En efecto, sea $x \in (a, +\infty)$, entonces existe un $c \in \mathbb{R}$, $x < c$ tal que $a < x < c$, así $x \in (a, c) \subset (a, +\infty)$, lo cual implica que $X \subset int(X)$ y en virtud de la Proposición 1.60, se concluye que $X = int(X)$.

$\square$

(2) *Sean* $X = [c, d]$*,* $Y = [c, +\infty)$ *y* $Z = (-\infty, d]$*, entonces* $int(X) = (c, d)$*,* $int(Y) = (c, +\infty)$ *y* $int(Z) = (-\infty, d)$

Demostración. .
i) Sea $X = [c, d]$. Como $c \in X$ y supongamos que existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tal que $c \in (a, b) \subset X$, entonces $c < a$, $b < d$ y $c \in (a, b)$, lo cual implica que $c < a$ y $a < c$, lo cual es una contradicción, por tanto, c no es punto interior de X, con un razonamiento similar se demuestra que d no es punto interior de X. Por otro lado, consideremos $c < w < d$.
Sea $\epsilon = \min\{w - c, d - w\} > 0$ dado, luego $(w - \epsilon, w + \epsilon) \subset (c, d) \subset X$, pues sea $l \in (w - \epsilon, w + \epsilon)$, es decir que $w - \epsilon < l < w + \epsilon$ y como $c \leq w - \epsilon$ y $w + \epsilon \leq d$, entonces $c < l < d$, lo cual implica que $l \in (c, d)$ y así existe un $\epsilon > 0$ tal que $(w - \epsilon, w + \epsilon) \subset X$, es decir que w es punto interior de X, por tanto, $w \in int(X)$, esto es, $(c, d) \subset int(X)$.

Ahora probaremos que $int(X) \subset (c, d)$. En efecto, sea $s \in int(X)$ y por la Definición 1.58, s es punto interior de X y por la Definición 1.57, existen $a, b \in \mathbb{R}$ con

$a < b$ tal que $s \in (a,b) \subset X = [c,d]$, lo cual implica que $a < s < b$, $c \leq a$ y $b \leq d$, por tanto $c \leq a < s < b \leq d$, es decir que $c < s < d$, entonces, $s \in (c,d)$, esto es, $int(X) \subset (c,d)$, luego en virtud de la Proposición 1.60 se concluye que $int(X) = (c,d)$.

Demostración Alternativa. Veamos que $(c,d) \subset int\,([c,d])$. En efecto, Sea $x \in (c,d) \subset [c,d]$ y por la Definición 1.57, x es punto interior de $[c,d]$ es decir que $x \in int\,([c,d])$, esto es $(c,d) \subset int\,([c,d])$. Por otro lado, si $x \in int\,([c,d])$, entonces x es punto interior de X, es decir que existen $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tal que $x \in (a,b) \subset X = [c,d]$, por consiguiente $c \leq a < x < b \leq d$, entonces $c < x < d$, esto es, $x \in (c,d)$ y así $int(X) \subset (c,d)$, por lo tanto $int(X) = (c,d)$. veamos ahora que $c, d \notin int\,([c,d])$, pues supongamos que $c \in int\,([c,d])$, entonces c es punto interior de X, es decir que existe un $\epsilon > 0$ tal que $(c-\epsilon, c+\epsilon) \subset [c,d]$, es decir que $c \leq c - \epsilon$ y $c + \epsilon \leq d$, entonces $0 \leq -\epsilon$, esto es, $\epsilon \leq 0$, lo cual es una contradicción, con un razonamiento similar se prueba que b no es punto interior. □

Los incisos ii) y iii) quedan como ejercicio para el lector.

Definición 1.63. (Conjunto abierto). Sea $A \subset \mathbb{R}$. Si $A \subset int(A)$, entonces A se le llama conjunto abierto.
Esto es, A es un conjunto abierto, si todos sus puntos son interiores. ($int(A) = A$).

Observación 1.64. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $A \neq \phi$. A es un conjunto abierto si, y solamente si, $A = int(A)$. En efecto, sea A un conjunto abierto, entonces $A \subset int(A)$ y en virtud de la Proposición 1.60, se concluye que $A = int(A)$. Por otro lado, si $A = int(A)$, entonces $A \subset int(A)$ y $int(A) \subset A$, lo cual implica que $A \subset int(A)$ y así A es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$.

Ejemplos 7.2.

(1) *ϕ y $\mathbb{R}$ son conjuntos abiertos, pues si $x \in \phi$ (lo cual es falso), entonces $x \in int(\phi)$, lo cual implica que $\phi \subseteq int(\phi)$ y del hecho de que $int(\phi) \subseteq \phi$ (Proposición 1.60), se concluye que $\phi = int(\phi)$ y así ϕ es un conjunto abierto. Por otro lado, si $x \in \mathbb{R}$, entonces existe un $\epsilon = 1 > 0$ tal que $(x-1, x+1) \subset \mathbb{R}$ y en virtud del Teorema 7.1, se tiene que x es punto interior de $\mathbb{R}$ y así $x \in int(\mathbb{R})$, luego, para todo $x \in \mathbb{R}$, implica que $x \in int(\mathbb{R})$, por lo tanto, $\mathbb{R} \subset int(\mathbb{R})$ y por la Proposición 1.60, se concluye que $\mathbb{R} = int(\mathbb{R})$ y en virtud de la Definición 1.63, $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto.*

(2) *Sea $A=(1,3)$, entonces A es un conjunto abierto. En efecto, Sea $x\in A=(1,3)$, entonces $1<x<3$. Sea $\epsilon=\dfrac{1}{2}\text{mín}\{x-1,3-x\}>0$ entonces $\epsilon\leq\dfrac{1}{2}(x-1)$ y $\epsilon\leq\dfrac{1}{2}(3-x)$, es decir que $1\leq x-2\epsilon$ y $x+2\epsilon\leq 3$. Hay que probar que $A\subset int(A)$, pero para ello, basta probar que existe un $\epsilon>0$ tal que $(x-\epsilon,x+\epsilon)\subset(1,3)$. En efecto, Sea $w\in(x-\epsilon,x+\epsilon)$, entonces $1\leq x-2\epsilon<x-\epsilon<w<x+\epsilon<x+2\epsilon\leq 3$, es decir que $1<w<3$, esto es, $w\in(1,3)$, luego para todo $w\in(x-\epsilon,x+\epsilon)$ implica que $w\in(1,3)$, por consiguiente, existe un $\epsilon>0$ tal que $(x-\epsilon,x+\epsilon)\subset(1,3)=A$, entonces x es punto interior de A, lo que implica que $x\in int(A)$, luego para todo $x\in A$, implica que $x\in int(A)$, por lo tanto, $A\subset int(A)$ y por la Proposición 1.60, se concluye que $A=int(A)$ y así en virtud de la Definición 1.63, A es un conjunto abierto.*

(3) *Si $A=(0,1)\cup(2,5)$, entonces A es un conjunto abierto. En efecto, sea $x\in A=(0,1)\cup(2,5)$, entonces $x\in(0,1)$ ó $x\in(2,5)$ y como $x\in(0,1)\subset((0,1)\cup(2,5))$ ó $x\in(2,5)\subseteq((0,1)\cup(2,5))$, entonces existen $0,1\in\mathbb{R}$ con $0<1$ tal que $x\in(0,1)\subset A$ ó existen $2,5\in\mathbb{R}$ con $2<5$ tal que $x\in(2,5)\subset A$ y así x es punto interior de A ó x es punto interior de A, lo cual implica que x es punto interior de A, y en virtud de la Definición 1.63, se concluye que $x\in int(A)=int\left((0,1)\cup(2,5)\right)$, luego para todo $x\in A$ implica que $x\in int(A)$, por lo tanto, $A\subset int(A)$ y por la Proposición 1.60, se concluye que $A=int(A)$, entonces A es un conjunto abierto.*

(4) *Si $a,b\in\mathbb{R}$, con $a<b$, entonces el conjunto $H=(a,b)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. En efecto, sea $x\in H=(a,b)\subseteq(a,b)=H$, entonces x es punto interior de H y por tanto $x\in int(H)=int\left((a,b)\right)$, esto es, $H\subset int(H)$ y en virtud de la Proposición 1.60, se concluye que $H=(a,b)$ es un conjunto abierto. Demostremos esto aplicando el Teorema 7.1. Sea $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ y como $H\neq\phi$, entonces sea $x\in(a,b)$. Sea $\epsilon=\dfrac{1}{2}\text{mín}\{x-a,b-x\}>0$, es decir que $a\leq x-2\epsilon$ y $x+2\epsilon\leq b$ y como $(x-\epsilon,x+\epsilon)\subset(a,b)$, pues, sea $w\in(x-\epsilon,x+\epsilon)$, por consiguiente, $a\leq x-2\epsilon<x-\epsilon<w<x+\epsilon<x+2\epsilon\leq b$, es decir que $a<w<b$, esto es, $w\in(a,b)$, por lo tanto, existe $\epsilon>0$ tal que $(x-\epsilon,x+\epsilon)\subset(a,b)=H$ y así x es punto interior de H, por consiguiente, $x\in int(H)$, lo que implica que $H\subset int(H)$ y en virtud de la Proposición 1.60, se concluye que H es un conjunto abierto.*

Proposición 1.65. *Si A_1, A_2 son conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, entonces $A_1\cap A_2$ es un conjunto abierto.*

Demostración. Si $A_1 \cap A_2 = \phi$, entonces $A_1 \cap A_2$ es un conjunto abierto, véase el Ejemplo 7.2 1. Por otro lado, si $A_1 \cap A_2 \neq \phi$. consideremos a $A_1 = (a_1, b_1)$ y $A_2 = (a_2, b_2)$. Sea $a := \text{máx}\{a_1, a_2\}$ y $b := \text{máx}\{b_1, b_2\}$. Además como $(a, b) \subseteq A_1$ y $(a, b) \subseteq A_2$, pues si $x \in (a, b)$, entonces $a_1 \leq a < x < b \leq b_1$ y $a_2 \leq a < x < b \leq b_2$, lo cual implica que $a_1 < x < b_1$ y $a_2 < x < b_2$, esto es, $x \in (a_1, b_1)$ y $x \in (a_2, b_2)$. Así existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tal que $x \in (a, b) \subseteq A_1$ y $x \in (a, b) \subseteq A_2$, lo cual implica que existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tal que $x \in (a, b) \cap x \in (a, b) \subseteq A_1 \cap A_2$ y así existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tal que $x \in (a, b) \subseteq A_1 \cap A_2$, por ende x es punto interior de $A_1 \cap A_2$, es decir que $x \in int\,(A_1 \cap A_2)$, por tanto, $A_1 \cap A_2 \subseteq int\,(A_1 \cap A_2)$ y en virtud de la Proposición 1.60, se concluye que $A_1 \cap A_2$ es un conjunto abierto. □

Demostración alternativa. Sea $x \in A_1 \cap A_2$ entonces $x \in A_1$ y $x \in A_2$, luego por hipótesis (A_1, A_2, conjuntos abiertos) se tiene que $x \in int(A_1)$ y $x \in int(A_2)$, entonces existen $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tal que $(x - \epsilon_1, x + \epsilon_1) \subseteq A_1$ y $(x - \epsilon_2, x + \epsilon_2) \subseteq A_2$. Sea $\epsilon^* = \text{mín}\{\epsilon_1, \epsilon_2\} > 0$. Además como $(x - \epsilon^*, x + \epsilon^*) \subseteq (x - \epsilon_1, x + \epsilon_1)$ y $(x - \epsilon^*, x + \epsilon^*) \subseteq (x - \epsilon_2, x + \epsilon_2)$, pues si $w \in (x - \epsilon^*, x + \epsilon^*)$, entonces $x - \epsilon_1 \leq x - \epsilon^* < w < x + \epsilon^* \leq x + \epsilon_1$ y $x - \epsilon_2 \leq x - \epsilon^* < w < x + \epsilon^* \leq x + \epsilon_2$, lo que implica $x - \epsilon_1 < w < x + \epsilon_1$ y $x - \epsilon_2 < w < x + \epsilon_2$, esto es, $w \in (x - \epsilon_1, x + \epsilon_1)$ y $w \in (x - \epsilon_2, x + \epsilon_2)$.

Luego existe un $\epsilon^* > 0$ tal que $(x - \epsilon^*, x + \epsilon^*) \cap (x - \epsilon^*, x + \epsilon^*) \subseteq (x - \epsilon_1, x + \epsilon_1) \cap (x - \epsilon_2, x + \epsilon_2) \subseteq A_1 \cap A_2$, así existe un $\epsilon^* > 0$ tal que $(x - \epsilon^*, x + \epsilon^*) \subseteq A_1 \cap A_2$, y en virtud del Teorema 7.1, se concluye que x es punto interior de $A_1 \cap A_2$, por consiguiente, $x \in int\,(A_1 \cap A_2)$, entonces $A_1 \cap A_2 \subset int\,(A_1 \cap A_2)$ y por la Proposición 1.60 se concluye que $A_1 \cap A_2$ es un conjunto abierto.

El resultado de la Proposición 1.65, se generaliza en el siguiente teorema.

Teorema 7.2.

i) *Si* $\{A_i\}_{i \in I}$, $I = \{1, 2, \ldots, k\}$ *es una familia finita de conjuntos abiertos, entonces* $A := \bigcap_{i \in I} A_i$ *es un conjunto abierto.*

ii) *Si* $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ *es una familia de conjuntos abiertos de* $\mathbb{R}$*, entonces* $A := \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ *es un conjunto abierto.*

Demostración. .

Para *i*). Si $A = \phi$, entonces A es un conjunto abierto. Por otro lado, si $A \neq \phi$, entonces sea $x \in A = \bigcap_{i \in I} A_i$, lo cual implica que para todo $i \in I$, $x \in A_i$ y como A_i es un conjunto abierto para todo $i \in I$, entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tales que $x \in (a, b) \subseteq A_i$ para todo $i \in I$, por consiguiente, $x \in (a, b) \subset \bigcap_{i \in I} A_i$, así x es punto interior de $\bigcap_{i \in I} A_i$, entonces $x \in int\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$, por lo tanto, $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq int\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$, y en virtud de la Proposición 1.60, se concluye que $\bigcap_{i \in I} A_i$ es un conjunto abierto.

Para ii). Si $A = \phi$, entonces A es un conjunto abierto. Por otro lado, si $A \neq \phi$, entonces sea $x \in A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, por consiguiente, existe (al menos) $\lambda_1 \in L$ tal que $x \in A_{\lambda_1}$ y como A_{λ_1} es un conjunto abierto, entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tal que $x \in (a, b) \subset A_{\lambda_1}$. Además como existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tal que $x \in (a, b) \subset A_{\lambda_1} \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, entonces x es un punto interior de $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, esto es, $x \in int\left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right)$, así $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \subset int\left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right)$, luego $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ es un conjunto abierto. □

Observación 1.66. La hipótesis de finitud en i) es esencial. Por ejemplo, consideremos $A_n := \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, con $n = 1, 2, \ldots$, infinitos conjuntos abiertos, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ y $\{0\}$ no es abierto. En efecto, sea $x \in \{0\}$, es decir que $x = 0$ y como $|x| = |0| = 0 < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $|x| < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por consiguiente, $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subset A_n$ para $n = 1, 2, \ldots$ y así $x \in A_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots$, por tanto, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ para $n = 1, 2, \ldots$, esto es, $\{0\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ para $n = 1, 2, \ldots$.

Por otro lado, sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces $x \in A_n$ para $n = 1, 2, \ldots$, por consiguiente x es punto interior de A_n para todo $n = \ldots$ y así existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tal que $x \in (a, b) \subset \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = A_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots$, entonces $x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ para $n = 1, 2, \ldots$, es decir que $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ para todo $n = 1, 2, \ldots$, luego $x = 0$ ó $x < 0$ ó $x > 0$.

Consideremos primero el caso en el que $x > 0$, entonces $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}^+$ y por la Propiedad de Arquímedes, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{x} < n \cdot 1$, por consiguiente, $\frac{1}{n} < x$, lo cual es una contradicción. si $x < 0$, entonces $-x \in \mathbb{R}^+$ y por el Corolario de la propiedad de Arquímedes, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{n} < -x$, por lo cual $-\dfrac{1}{n} > x$, lo cual es una contradicción, por lo tanto, $x = 0$, entonces $x \in \{0\}$, es decir que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \{0\}$ y así $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ para todo $n = 1, 2, \ldots$

Un caso más general esta expresado en la siguiente proposición, en donde mostraremos que la intersección de infinitos conjuntos abiertos con cierta restricción es un conjunto cerrado.

Proposición 1.67. *Si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, entonces* $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) = [a, b]$.

Demostración. Sea $x \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$ entonces $x \in \left(a - \dfrac{1}{n}, b + \dfrac{1}{n}\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $a - \dfrac{1}{n} < x < b + \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos las sucesiones $\left\{a - \dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\left\{b + \dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales, además como $a - 1 < a - \dfrac{1}{2} < \cdots < a - \dfrac{1}{n} < \cdots < x$ y $b + 1 > b + \dfrac{1}{2} > \cdots > b + \dfrac{1}{n} > \cdots > x$, entonces $\left\{a - \dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente y acotada y $\left\{b + \dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona decreciente y acotada, luego en virtud del Teorema 6.9, se concluye que convergen y además $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(a - \frac{1}{n}\right) = a - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = a - 0 = a = \sup \left\{a - \frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(b + \frac{1}{n}\right) = b + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = b + 0 = b = \inf \left\{b + \frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, es decir que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a - \dfrac{1}{n} \leq a$ y $b \leq b + \dfrac{1}{n}$ y como x es cota superior para $\left\{a - \dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ y x es cota inferior para $\left\{b + \dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces $a \leq x$ y $x \leq b$ y así, $a - \dfrac{1}{n} \leq a \leq x \leq b \leq b + \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $a \leq x \leq b$, entonces $x \in [a, b]$, por lo tanto $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) \subset [a, b]$.

Por otro lado, si $x \in [a, b]$, entonces $a \leq x \leq b$ y del hecho de que $a = \sup \left\{a - \dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $b = \inf \left\{b + \dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene que $a - \dfrac{1}{n} < a \leq x \leq b < b + \dfrac{1}{n}$, lo cual implica que $x \in \left(a - \dfrac{1}{n}, b + \dfrac{1}{n}\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$ es decir que

$[a,b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto, si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) = [a,b]$. □

Demostración alternativa. Sea $x \in [a,b]$, entonces $a - \frac{1}{n} < a \leq x \leq b < b + \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por consiguiente, $a - \frac{1}{n} < x < b + \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es, $x \in \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$ y así $[a,b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$. Por otro lado, sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$, entonces $a - \frac{1}{n} < x < b + \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por consiguiente para todo $n \in \mathbb{N}$ $a < x + \frac{1}{n}$ y $x < b + \frac{1}{n}$, entonces $a \leq x$ y $x \leq b$, lo cual implica que $a \leq x \leq b$, por lo cual, $x \in [a,b]$ y así $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) \subset [a,b]$, por lo tanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) = [a,b]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicios 7.2.

(1) *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Si A, B son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$, entonces $A \cup B$ es abierto en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Si $A \cup B = \phi$, entonces $A \cup B$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Por otro lado, si $A \cup B \neq \phi$, entonces sea $x \in (A \cup B)$, lo cual implica que $x \in A$ ó $x \in B$ y en virtud de la Definición 1.63, se tiene que x es punto interior para A ó x es punto interior para B y así existen $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ con $a_1 < b_1$ y $a_2 < b_2$ tales que $x \in (a_1, b_1) \subset A$ ó $x \in (a_2, b_2) \subset B$, por consiguiente, existen $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ con $a_1 < b_1$ y $a_2 < b_2$ tales que $x \in (a_1, b_1) \subset A \cup B$ ó $x \in (a_2, b_2) \subset A \cup B$, lo cual implica que x es punto interior de $A \cup B$ ó x es punto interior de $A \cup B$ y por la Definición 1.58, $x \in int(A \cup B)$ ó $x \in int(A \cup B)$ de donde se sigue que $x \in int(A \cup B)$, por tanto, $(A \cup B) \subset int(A \cup B)$ y por la Proposición 1.60, se concluye que $A \cup B$ es un conjunto abierto. □

(2) *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto y $a \in A$, entonces el conjunto $A - \{a\}$ es abierto.*

Demostración. Sea $x \in A - \{a\}$, entonces $x \in A$ y $x \notin \{a\}$ y por la Definición 1.63, $x \in int(A)$ y $x \notin \{a\}$, por consiguiente, x es punto interior de A y $x \neq a$ y en virtud del Teorema 7.1, existe un $\epsilon^* > 0$ tal que $(x - \epsilon^*, x + \epsilon^*) \subset A$ y $x \neq a$. Sea

$\epsilon = \text{mín}\{\epsilon^*, |x-a|\} > 0$, entonces $\epsilon \leq \epsilon^*$ y $(x - a \geq \epsilon$ ó $x - a \leq -\epsilon)$ por consiguiente $(\epsilon \leq \epsilon^*\ y\ x - \epsilon \geq a)$ ó $(\epsilon \leq \epsilon^*\ y\ x + \epsilon \leq a)$ y como $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset A - \{a\}$, pues, sea $w \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$, entonces $x - \epsilon < w < x + \epsilon$.

Por tanto, $(\epsilon \leq \epsilon^*\ y\ x - \epsilon < w < x + \epsilon \leq a)$ ó $(\epsilon \leq \epsilon^*\ y\ a \leq x - \epsilon < w < x + \epsilon)$, por consiguiente, $(x - \epsilon^* \leq x - \epsilon < w < a)$ ó $(a < w < x + \epsilon \leq x + \epsilon^*)$, lo cual implica que $(x - \epsilon^* < w < a)$ ó $(a < w < x + \epsilon^*)$ de donde se sigue que $w \in (x - \epsilon^*, a)$ ó $w \in (a, x + \epsilon^*)$, esto es, $w \in [(x - \epsilon^*, a) \cup (a, x + \epsilon^*)]$, entonces $w \in A$ y $w \neq a$, por lo cual $w \in A$ y $w \notin \{a\}$, es decir que $w \in A - \{a\}$, luego existe un $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset A - \{a\}$ y en virtud del Teorema 7.1, se tiene que x es punto interior de $A - \{a\}$, es decir que $x \in int(A - \{a\})$ y así $A - \{a\} \subset int(A - \{a\})$ y por la Proposición 1.60, se deduce que $A - \{a\} = int(A - \{a\})$ y por lo tanto, $A - \{a\}$ es un conjunto abierto. □

(3) *Sea $B \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$, el conjunto $x + B := \{x + y; y \in B\}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Análogamente, si $x \neq 0$, entonces el conjunto $x \cdot B = \{x \cdot y; y \in B\}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Primero probaremos que $x + B := \{x + y; y \in B\}$ es un conjunto abierto. Sean $x \in \mathbb{R}$ fijo y $w \in \{x+B\}$, entonces existe $y \in B$ tal que $x+y = w$ y como B es un conjunto abierto, entonces $y \in int(B)$ y $x + y = w$, es decir que y es un punto interior de B y $x + y = w$ y en virtud del Teorema 7.1, existe un $\epsilon > 0$ tal que $(y - \epsilon, y + \epsilon) \subset B$ y $x + y = w$. ¡¡Afirmación!! $(w - \epsilon, w + \epsilon) \subset x + B$. En efecto, sea $z \in (w - \epsilon, w + \epsilon)$, es decir que $w - \epsilon < z < w + \epsilon$ y como $x + y = w$, entonces $(x + y) - \epsilon < z < (x + y) + \epsilon$, por consiguiente, $y - \epsilon < z - x < y + \epsilon$, lo cual implica que $(z - x) \in (y - \epsilon, y + \epsilon) \subset B$, esto es $(z - x) \in B$ y por la definición del conjunto $x + B$, se tiene que $[x + (z - x)] \in \{x + B\}$ y así $z \in \{x + B\}$.

Luego existe un $\epsilon > 0$ tal que $(w - \epsilon, w + \epsilon) \subset x + B$, y por el Teorema 7.1, w es punto interior de $\{x + B\}$, lo cual implica que $w \in int(x + B)$, por lo tanto, $x + B \subset int(x + B)$ y por la Proposición 1.60, se concluye que $x + B = int(x + B)$, es decir que $x + B$ es un conjunto abierto. Por otro lado, probaremos que $x \cdot B = \{x \cdot y; y \in \mathbb{B}\}$ es un conjunto abierto. Sea $w \in \{x \cdot B\}$, por consiguiente, existe un $y \in B$ tal que $x \cdot y = w$ y como B es un conjunto abierto, entonces $y \in int(B)$ y $x \cdot y = w$, es decir que y es punto interior de B y $x \cdot y = w$, y en virtud del Teorema 7.1, existe un $\epsilon^* > 0$ tal que $(y - \epsilon^*, y + \epsilon^*) \subset B$ y $x \cdot y = w$.

Sea $\epsilon = \text{mín}\,\{|\epsilon^* \cdot x|, \epsilon^*\}$, entonces $\epsilon \leq |\epsilon^* \cdot x|$ y $\epsilon \leq \epsilon^*$. ¡¡Afirmación!! $(w-\epsilon, w+\epsilon) \subset x \cdot B$. En efecto, sea $z \in (w-\epsilon, w+\epsilon)$, es decir que $w-\epsilon < z < w+\epsilon$ y como $x \cdot y = w$, entonces $x \cdot y - \epsilon < z < x \cdot y + \epsilon$ $\}(*)$. Consideremos dos casos: $i)$ si $x > 0$ ó $ii)$ si $x < 0$.

Caso $i)$, si $x > 0$, entonces $\epsilon \leq \epsilon^* \cdot x$ y $\epsilon \leq \epsilon^*$, por consiguiente, $\dfrac{\epsilon}{x} \leq \epsilon^*$ y $\epsilon \leq \epsilon^*$, luego de $(*)$ se sigue que $y - \dfrac{\epsilon}{x} < \dfrac{z}{x} < y + \dfrac{\epsilon}{x}$ entonces $y - \epsilon^* \leq y - \dfrac{\epsilon}{x} < \dfrac{z}{x} < y + \dfrac{\epsilon}{x} \leq y + \epsilon^*$, por consiguiente, $y - \epsilon^* < \dfrac{z}{x} < y + \epsilon^*$, lo cual implica que $\dfrac{z}{x} \in (y-\epsilon^*, y+\epsilon^*) \subset B$, es decir que $\dfrac{z}{x} \in B$ y por definición de $\{x \cdot B\}$ se tiene que $\left(\dfrac{z}{x} \cdot x\right) \in x \cdot B$, esto es , $z \in x \cdot B$.

Caso $ii)$, si $x < 0$, entonces $\epsilon \leq -(\epsilon^* \cdot x)$ y $\epsilon \leq \epsilon^*$, por consiguiente, $\dfrac{\epsilon}{(-x)} \leq \epsilon^*$ y $\epsilon \leq \epsilon^*$, luego de $(*)$ se sigue que $y - \dfrac{\epsilon}{x} > \dfrac{z}{x} > y + \dfrac{\epsilon}{x}$, por consiguiente, $y - \dfrac{\epsilon}{(-x)} < \dfrac{z}{x} < y + \dfrac{\epsilon}{(-x)}$, lo cual implica que $y - \epsilon^* \leq y - \dfrac{\epsilon}{(-x)} < \dfrac{z}{x} < y + \dfrac{\epsilon}{(-x)} \leq y + \epsilon^*$, es decir que $y - \epsilon^* < \dfrac{z}{x} < y + \epsilon^*$, esto es, $\dfrac{z}{x} \in (y-\epsilon^*, y+\epsilon^*) \subset B$ de donde se sigue que $\dfrac{z}{x} \in B$ y por la definición de $\{x \cdot B\}$, se tiene que $\left(\dfrac{z}{x} \cdot x\right) \in x \cdot B$, entonces $z \in x \cdot B$.

Por lo tanto, de $i)$ y $ii)$ se tiene que, existe un $\epsilon > 0$ dado tal que $(w-\epsilon, w+\epsilon) \subset x \cdot B$ y en virtud del Teorema 7.1, w es punto interior de $x \cdot B$, esto es, $w \in int(x \cdot B)$, es decir que $x \cdot B \subset int(x \cdot B)$ y por la Proposición 1.60, se concluye que $x \cdot B = int(x \cdot B)$, por lo tanto, $x \cdot B$ es un conjunto abierto. $\square$

TEOREMA 7.3. *Un intervalo A es un conjunto abierto si y solamente si A es un intervalo abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Razonemos por el absurdo. Sea A un conjunto abierto y supongamos que A no es un intervalo abierto, lo que implica que A es de alguna de las formas, $(c,d]$, $[c,d)$, $(-\infty, C]$ y $[d, +\infty)$ para cualquier $c, d \in \mathbb{R}$, los cuales no coinciden con su interior, por lo tanto no son abiertos, locual es una contradicción. Por otro lado, Sea $A = (c,d)$ un intervalo abierto. Si $x \in (c,d) \subset (c,d) = A$ y en virtud de la Definición 1.57, x es un punto interior de A, por consiguiente, $x \in int(A)$, esto es, $(c,d) \subset int(A)$ y por la Proposición 1.60, se concluye que A es un conjunto abierto. $\square$

7.1. Conjuntos cerrados.

DEFINICIÓN 1.68. (Punto adherente). Sea $X \subset \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Decimos que a es un punto adherente de X si, y sólo si, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

EJEMPLO 1.69. Sea $X = (0,1)$. Como $0 < \dfrac{1}{n+1} < 1$, entonces $\left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$ y $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, por lo tanto, 0 es punto adherente. Con un razonamiento similar se demuestra que 1 también es punto adherente.

PROPOSICIÓN 1.70. *si $X \subset \mathbb{R}$ y $x \in X$, entonces x es punto adherente de X.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $X \subset \mathbb{R}$, $x \in X$ y consideremos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, y además como $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x = x$, por lo tanto, x es punto adherente. □

DEFINICIÓN 1.71. (Adherencia o Clausura de X). Si $x \subset \mathbb{R}$, es el conjunto $\{a \in \mathbb{R}; a \text{ es punto adherente de } X\}$, se le llama adherencia de X o clausura de X y se nota $\bar{X}$.

PROPOSICIÓN 1.72. *Sea $X \subset \mathbb{R}$, entonces $X \subset \bar{X}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $X \subset \mathbb{R}$ y $x \in X$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\lim_{n\to\infty} x = x$, es decir que x es punto adherente, lo cual implica que $x \in X$ □

EJERCICIOS 7.3. *Sean $X, Y \subset \mathbb{R}$ tales que $X \subset Y$. Demostrar que $\bar{X} \subset \bar{Y}$. En efecto, sea $w \in \bar{X}$, entonces w es punto adherente de X, por consiguiente, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = w$ y como $X \subset Y$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = w$ y así w es punto adherente de Y, es decir que $w \in \bar{Y}$, esto es , $\bar{X} \subset \bar{Y}$.*

DEFINICIÓN 1.73. (Conjunto cerrado). Si $\bar{X} \subset X$, el conjunto X se le dice cerrado.

EJEMPLO 1.74. Sea $X = [3,5]$, $\bar{X} = [3,5]$, entonces $\bar{X} = [3,5] \subset X = [3,5]$, por lo tanto, $X = [3,5]$ es un conjunto cerrado.

TEOREMA 7.4. *Un punto $a \in \mathbb{R}$ es adherente de $X \subset \mathbb{R}$ si, y sólo si, para todo $\epsilon > 0$, $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap X = \phi$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $a \in \mathbb{R}$, a es punto adherente de $X \subset \mathbb{R}$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, es decir que para todo $\epsilon > 0$ dado, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$ implica que $|x_n - a| < \epsilon$, es decir que $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$, lo cual implica que $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ y como $x_n \in X$, entonces $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon) \cap X$, esto es,

$(a-\epsilon, a+\epsilon)\cap X \neq \phi$. Así, para todo $\epsilon > 0$, $(a-\epsilon, a+\epsilon)\cap X \neq \phi$. Por otro lado, supongamos que para todo $\epsilon > 0$, $(a-\epsilon, a+\epsilon)\cap X \neq \phi$. Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario fijo, luego $\dfrac{1}{n} > 0$, entonces en particular, $\left(a - \dfrac{1}{n}, a + \dfrac{1}{n}\right) \cap X \neq \phi$.

Así, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\left(a - \dfrac{1}{n}, a + \dfrac{1}{n}\right) \cap X \neq \phi$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ existe x_n tal que $x - n \in \left(a - \dfrac{1}{n}, a + \dfrac{1}{n}\right) \cap X$, por consiguiente, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X$ y $x_n \in \left(a - \dfrac{1}{n}, a + \dfrac{1}{n}\right)$, lo cual implica que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $a - \dfrac{1}{n} < x_n < a + \dfrac{1}{n}$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a - \dfrac{1}{2}\right) \leq \lim\limits_{n\to\infty}(x_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty}\left(a + \dfrac{1}{2}\right)$, esto es $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $a \leq \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq a$, por consiguiente, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, por lo tanto a es punto de adherencia de X. □

Corolario 1.5. Sea $X \subset \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces a es un punto adherente de X si, y sólo si para todo intervalo abierto I que contenga a a, $I \cap X \neq \phi$.

Demostración. Sean $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ y como $a \in I$, entonces existe $a-\epsilon, a+\epsilon \subset I$ para $\epsilon > 0$, además a es punto adherente de X, lo que implica que $\phi \neq X \cap (a-\epsilon, a+\epsilon) \subset I \cap X$, así $I \cap X \neq \phi$. Por otro lado, sea $\epsilon > 0$ dado, como $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ es un intervalo que contiene a a, entonces $(a-\epsilon, a+\epsilon)\cap X \neq \phi$, por lo tanto, a es punto adherente de X. □

Corolario 1.6.

i) Si $\phi \subset X \subset \mathbb{R}$ es acotado inferiormente, entonces $\text{ínf}(X)$ es un punto adherente de X.
- Si $\phi \neq X \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente, entonces el $\sup(X)$ es un punto adherente de X.

Demostración. Como $\phi \neq X \subset \mathbb{R}$ es acotado inferiormente, entonces por el Teorema de la existencia del supremo y el ínfimo, existe el $\text{ínf}(X) = i$. Sea $\epsilon > 0$ dado, luego $i < i + \epsilon$ y en virtud del Teorema de la aproximación de ínfimo, existe un $x \in X$ tal que $i \leq x < i + \epsilon$ y como $i - \epsilon \leq i$, entonces existe $x \in X$ tal que $i - \epsilon < x < i + \epsilon$ y $x \in X$, lo cual implica que existe un $x \in X$ tal que $x \in (i-\epsilon, i+\epsilon)\cap X$, es decir que $(i-\epsilon, i+\epsilon)\cap X \neq \phi$, por lo tanto, $i = \text{ínf}(X)$ es punto de adherencia de X.

Por otro lado, si $\phi \neq X \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente, entonces en virtud del Teorema de la existencias del supremo y el ínfimo, existe el $\sup(X) = s$. Sea $\epsilon > 0$ dado, luego

$s-\epsilon < s$ y en virtud del Teorema de la aproximación del supremo y del hecho de que $s < s+\epsilon$, entonces existe un $x \in X$ tal que $s-\epsilon < x \leq s < s+\epsilon$, lo cual implica que existe un $x \in X$ tal que $x \in (s-\epsilon, s+\epsilon)$ y $x \in X$, es decir que existe un $x \in X$ tal que $x \in (s-\epsilon, s+\epsilon) \cap X$, por lo tanto $(s-\epsilon, s+\epsilon) \cap X \neq \phi$, esto es $s = \sup(X)$ es un punto de adherencia de X. $\square$

Observación 1.75. Si $\phi \neq X \subset \mathbb{R}$ es acotado y cerrado entonces el $\inf(X)$ y el $\sup(X)$ están en X. En efecto, como $\phi \neq X \subset \mathbb{R}$ es acotado, entonces en virtud del Teorema de la existencias del supremo y el ínfimo, existe el $\inf(X)$ y el $\sup(X)$, además como X es cerrado, es decir que $\bar{X} \subset X$, esto es, todos los puntos adherentes de X están en X y como el $\inf(X)$ y el $\sup(X)$ son puntos adherentes (Corolario 1.6), por lo tanto, el $\inf(X)$ y el $\sup(X)$ pertenecen a X

Teorema 7.5. *Un conjunto $F \subset \mathbb{R}$ es cerrado si y solo si su complemente $\mathbb{R} - F$ es abierto.*

Demostración. Probaremos primero que $F^c = \mathbb{R} - F$ es abierto. En efecto, sea $w \in \mathbb{R} - F$, entonces $w \in \mathbb{R}$ y $w \neq F$, y como F es cerrado, entonces $F \subset \bar{F}$, lo cual implica que $w \in \mathbb{R}$ y $w \notin \bar{F}$, entonces $w \in \mathbb{R}$ y w no es punto adherente de F, por tanto, $w \in \mathbb{R}$ y existe un $\epsilon > 0$ tal que $(w-\epsilon, w+\epsilon) \cap F = \phi$, por consiguiente, $w \in \mathbb{R}$ y existe un $\epsilon > 0$ tal que $(w-\epsilon, w+\epsilon) \subset \mathbb{R} - F$, es decir que $w \in int(\mathbb{R} - F)$ y aśi $\mathbb{R} - F \subset int(\mathbb{R} - F)$ y por la Proposición 1.60, se concluye que $\mathbb{R} - F = int(\mathbb{R} - F)$, esto es $\mathbb{R} - F$ es abierto.

Por otro lado, como F es cerrado si y solo si $\bar{F} \subset F$ si y solo si $F^c \subset \bar{F}^c$ si y solo si $\mathbb{R} - F \subset \mathbb{R} - \bar{F}$. Veamos que $F^c \subset \bar{F}^c$. En efecto, sea $w \in \mathbb{F}^c$, entonces $w \in \mathbb{R} - F$ y como $\mathbb{R} - F$ es abierto, por consiguiente, $w \in int(\mathbb{R} - F)$ y aśi existe un $\epsilon > 0$ tal que $(w-\epsilon, w+\epsilon) \subset \mathbb{R} - F$, es decir que existe un $\epsilon > 0$ tal que si $(w-\epsilon, w+\epsilon) \cap F = \phi$, por tanto, w no es punto adherente, esto es $w \notin \bar{F}$, lo cual implica que $w \in \bar{F}^c$, por lo cual $F^c \subset \bar{F}^c$ y por ende, $\bar{F} \subset F$ ($A \subset B \longleftrightarrow B^c \subset A^c$), así que F es cerrado en $\mathbb{R}$. $\square$

Teorema 7.6. *La clausura de un conjunto $X\mathbb{R}$ es un conjunto cerrado, es decir $\bar{X} = \bar{\bar{X}}$.*

Demostración. Es claro que $\bar{X} \subset \bar{\bar{X}}$. Debemos probar que la $\bar{\bar{X}} \subset \bar{X}$. Veamos que $\bar{\bar{X}} \subset \bar{X} \longleftrightarrow \bar{X}^c \subset \bar{\bar{X}}^c$. En efecto, sea $w \in \bar{X}^c$, entonces $w \in \mathbb{R} - \bar{X}$, es decir que $w \in \mathbb{R}$ y $w \notin \bar{X}$, por consiguiente, $w \in \mathbb{R}$ y w no es punto adherente de X, esto es, $w \in \mathbb{R}$ y existe un $\epsilon > 0$ tal que $(w-\epsilon, w+\epsilon) \cap X0\phi$. ¡¡Afirmación!! $(w-\epsilon, w+\epsilon) \cap \bar{X} = \phi$ }(*). En efecto, supongamos que para todo $\epsilon > 0$, $(w-\epsilon, w+\epsilon) \cap \bar{X} \neq \phi$, entonces existe un

$y \in \left[(w-\epsilon, w+\epsilon) \cap \bar{X}\right]$, entonces $y \in (w-\epsilon, w+\epsilon)$ y $y \in \bar{X}$ para todo $\epsilon > 0$, por consiguiente, para todo $\epsilon > 0$ $y \in (w-\epsilon, w+\epsilon)$ y y es punto adherente de X, lo cual implica que para todo $\epsilon > 0$, $(w-\epsilon, w+\epsilon) \cap X \neq \phi$, lo cual es una contradicción, $(*)$.

De esta manera si $y \in \bar{X}$ entonces $y \notin (w-\epsilon, w+\epsilon)$ o sea que $(w-\epsilon, w+\epsilon) \cap \bar{X} = \phi$, lo que implica que $w \in \mathbb{R}$ y $w \notin \bar{\bar{X}}$, es decir que $w \in (\mathbb{R} - \bar{\bar{X}})$, esto es, $w \in \bar{\bar{X}}^c$. Así $\bar{\bar{X}} \subset \bar{X}$, por lo tanto, $\bar{X} = \bar{\bar{X}}$, es decir que $\bar{X}$ es un conjunto cerrado. $\square$

Definición 1.76. (Punto de acumulación). Sea $X \subset \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Decimos que a es punto de acumulación del conjunto X, cuando todo intervalo abierto con centro es a contiene al menos un punto $x \in \mathbb{X}$ diferente de a. $(x \neq a)$.
Esto es, para todo $\epsilon > 0$, $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \phi$.

Ejemplo 1.77. Sea $X = (a, b) \cup \{c\}$, luego para todo $\epsilon > 0$, $(c-\epsilon, c+\epsilon) \cap X - \{c\} = \phi$, entonces c no es punto de acumulación.

Notación 1.3. Notaremos con X' al conjunto $\{a \in \mathbb{R}; a \text{ es punto de acumulación de } X\}$ y lo llamaremos el derivado de X.

Observación 1.78. No todos los puntos adherentes, son puntos de acumulación, pues si miramos el ejemplo anterior, podemos observar que c es punto adherente de X, pues existe una sucesión $\{c\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$, pero para todo $\epsilon > 0$ $(c-\epsilon, c+\epsilon) \cap (x - \{c\}) = \phi$

Ejercicios 7.4. *Si $X \subset \mathbb{R}$, entonces $X' \subset \bar{X}$. En efecto, sea $X \subset \mathbb{R}$ y $w \in \mathbb{X}'$, entonces w es punto de acumulación, es decir que para todo $\epsilon > 0$, $(w-\epsilon, w+\epsilon) \cap X - \{w\} \neq \phi$, por consiguiente, para todo $\epsilon > 0$, $(w-\epsilon, w+\epsilon) \cap X - \{w\} \neq \phi$ y $X - \{w\} \subset X$, entonces para todo $\epsilon > 0$, $\phi \neq (w-\epsilon, w+\epsilon) \cap X - \{w\} \subset (w-\epsilon, w+\epsilon) \cap X$, esto es, para todo $\epsilon > 0$, $(w-\epsilon, w+\epsilon) \cap X \neq \phi$ y así w es punto adherente de X, lo cual implica que $w \in \bar{X}$, por lo tanto, $X' \subset \bar{X}$.*

Definición 1.79. (Punto aislado). Sean $X \subset \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Si $a \notin X'$, entonces se le llama punto aislado para X.

Observación 1.80. En el Ejemplo 1.77, podemos observar que c es un punto aislado, pues $c \notin X'$.

Ejercicios 7.5. *Sea $X \subset F \subset \mathbb{R}$ y F cerrado, entonces $\bar{X} \subset F$. En efecto, sea $X \subset F \subset \mathbb{R}$ y F cerrado, entonces por el Ejercicio 7.3, se tiene que $\bar{X} \subset \bar{F}$ y como F es cerrado, es decir que $\bar{F} \subset F$, por lo tanto, $\bar{X} \subset F$. Demostremos esto utilizando la definición. Sean*

$X \subset F \subset \mathbb{R}$, F cerrado y $w \in \mathbb{X}$, entonces w es punto adherente de X, es decir que para todo $\epsilon > 0$, $(w-\epsilon, w+\epsilon) \cap X \neq \phi$, por consiguiente, para todo $\epsilon > 0$, $\phi \neq (w-\epsilon, w+\epsilon) \cap X \subset (w-\epsilon, w+\epsilon) \cap F$, entonces para todo $\epsilon > 0$, $(w-\epsilon, w+\epsilon) \cap F \neq \phi$, lo cual implica que w es punto adherente de F, esto es, $w \in \bar{F}$ y $\bar{F} \subset F$, pues F es cerrado, entonces $w \in F$ y por lo tanto, $\bar{X} \subset F$.

Definición 1.81. (Conjunto Denso). Sean $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$. Diremos que X es denso en Y si $Y \subset \bar{X}$.

Ejemplos 7.3.

i) $(0,2)$ *es denso en* $(0,2]$, *pues* $(0,2) \subset (0,2]$ *y* $(0,2] \subset \overline{(0,2)} = [0,2]$.

ii) $\mathbb{Q}$ *y* $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *son densos en* $\mathbb{R}$, *pues* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *y* $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \supseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ *y* $\bar{\mathbb{I}} = \mathbb{R} \supset \mathbb{R}$.

Teorema 7.7. *Para todo* $x \subset \mathbb{R}$, $\overline{X} = X \cup X'$

Demostración. Primero probaremos que $\overline{X} \subseteq X \cup X'$. En efecto, sea $w \in \overline{X}$, entonces w es punto adherente de X, es decir que para todo $\epsilon > 0$, $(w-\epsilon, w+\epsilon) \cap X \neq \phi$, por consiguiente, para todo $\epsilon > 0$, existe un $x \in [(w-\epsilon, w+\epsilon) \cap X]$. Consideremos dos casos.
i) si $w \in X$, entonces $w \in (x \cup X')$, es decir que $\overline{X} \subset X \cup X'$.
ii) si $w \notin X$, entonces $x \neq w$ y $x \in (w-\epsilon, w+\epsilon) \cap X$, por tanto, para todo $\epsilon > 0$, $(w-\epsilon, w+\epsilon) \cap X - \{w\} \neq \phi$.
Esto es, w es punto de acumulación, por consiguiente, $w \in X'$ y así $\overline{X} \subset X \cup X'$ $\}(1)$. Por otro lado, es claro que $X \subset \overline{X}$ y como $X' \subset \overline{X}$, pues sea $w \in X'$, entonces para todo $\epsilon > 0$, $(w-\epsilon, w+\epsilon) \cap X - \{w\} \neq \phi$, por consiguiente, para todo $\epsilon > 0$, $\phi \neq (w-\epsilon, w+\epsilon) \cap X - \{w\} \subset (w-\epsilon, w+\epsilon) \cap X$, esto es para todo $\epsilon > 0$, $(w-\epsilon, w+\epsilon) \cap X \neq \phi$, es decir que w es punto adherente de X, lo cual implica que $w \in \overline{X}$ y así $x \subseteq \overline{X}$ y $X' \subseteq \overline{X}$, entonces $X \cup X' \subset \overline{X} \cup \overline{X}$, es decir que $X \cup X' \subseteq \overline{X}$ $\}(2)$, por lo tanto, de (i) y (i) se concluye que $\overline{X} = X \cup X'$. □

Definición 1.82. (Vecindad o entorno de un punto). Llamaremos vecindad o entorno de un punto a a cualquier segmento abierto que contenga a dicho punto como centro y lo denotaremos $V_r(a) = (a-r, a+r)$.

Observación 1.83. En este caso a es el centro y r es el radio. Observemos que $x \in V_r(a)$ significa que $x \in (a-r, a+r)$, es decir $|x-a| < r$, por lo tanto $V_r(a) = \{x \in \mathbb{R}; |a-x| < r\} = (a-r, a+r)$.

Capítulo 2

FUNCIONES

La idea de función continua es el tema central de la topología. El estudio de las funciones continuas reales de una variable real, que trabajaremos en este capítulo, tiene el doble propósito de establecer los hechos y conceptos topológicos esenciales del análisis y al mismo tiempo, proporcionar al lector un primer contacto con las nociones básicas de la topología, como introducción a esta disciplina.

Después de definir el concepto de función continua, demostraremos sus propiedades mas elementales y examinaremos las diferentes formas por las cuales una función puede dejar de ser continua. Se establecerá las relaciones entre la continuidad y las propiedades topológicas de los subconjuntos de la recta que se introdujeron en un curso introductorio de análisis real. Por último, estudiaremos con cierto detalle el importante concepto de continuidad uniforme y algunas consecuencias importantes del Teorema del Valor Intermedio.

1. La noción de función continua

Definición 2.1. (**Función Continua**). Una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es continua en el punto $a \in X$ cuando es posible tomar un $f(x)$ arbitrariamente próximo a $f(a)$ siempre y cuando tomemos un x suficientemente cerca de a.

En términos precisos, se dice que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en el punto $a \in X$ cuando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $x \in X$ y $|x - a| < \delta$ impliquen que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Simbólicamente:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 / x \in X, |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

En términos de intervalos: dado cualquier intervalo abierto J que contiene a $f(a)$, existe un intervalo abierto I que contiene a, tal que $f(I \cap X) \subset J$. Siempre que queramos, podemos tomar $J = (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$, con $\epsilon > 0$ y $I = (a - \delta, a + \delta)$, con $\delta > 0$.

Se dice que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua cuando f es continua en todos los puntos de X.

Observación 2.2.

(1) Si a es un punto aislado del conjunto X, entonces toda función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en el punto a. (Dado cualquier $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \cap X = \{a\}$. Entonces $|x - a| < \delta$ con $x \in X$ implica $x = a$ y por lo tanto $|f(x) - f(a)| = 0 < \epsilon$ En particular, si todos los puntos de X son aisladas entonces cualquier función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, por ejemplo si $X = \mathbb{Z}$, entonces toda función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua.

(2) Sea ahora $a \in X$ un punto de acumulación de X, entonces $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en el punto a si y sólo si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Esto reduce esencialmente la noción de función continua en el limite. Recíprocamente, podríamos definir $\lim_{x\to a} f(x) = L$ por la condición de ser continua en el punto a, la función $g : X \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $g(a) = L$ y $g(x) = f(x)$ para $x \in X - \{a\}$.

(3) Al investigar la continuidad de una función f en un punto a o en un conjunto, es fundamental tener siempre en cuenta el dominio de f, Por ejemplo, dada $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, sea $Y \subset X$, consideremos las dos afirmaciones:
   i) La función f es continua en cada punto $a \in Y$.
   ii) La restricción $f|Y$ es una función continua.

   Evidentemente, *i*) $\Longrightarrow$ *ii*), pero el recíproco es falso: basta con considerar Y finito o, más general, un conjunto Y cuyos puntos son todos aislados, entonces $f|Y$ es siempre continúa pero $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ puede ser discontinua en algún punto de Y. El hecho es que *i*) se refiere al comportamiento de $f(x)$ con x próximo de a, para cualquier x en X. Por otro lado, *ii*) es una afirmación que sólo se refiere a puntos de Y.

Ejemplo 2.3. Toda función $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua porque todo punto de $\mathbb{Z}$ es aislado. Por la misma razón, toda función definida en el conjunto $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ es continua. Por otro lado, si $Y = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$, entonces una función $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua si, y sólo si, es continúa en el punto 0 (ya que los demás puntos de Y son todos aislados), en otras palabras, $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua si, y sólo si, $f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

Teorema 1.1. *Toda restricción de una función continua es continua. Más precisamente: sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continúa en el punto $a \in X$. Si $a \in Y \subset X$ y $g = f|Y$, entonces $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$*

es continua en el punto a. Cuando, $Y = I \cap X$, donde I es un intervalo abierto que contiene a a, entonces vale la recíproca: si $g = f|Y$ es continua en el punto a, entonces $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ también es continua en el punto a.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado $x \in Y \subset X$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $|x-a| < \delta$ implica que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Como $x, a \in Y$, entonces $f(x) = g(x)$ y $f(a) = g(a)$ y así $|g(x) - g(a)| < \epsilon$, luego g es continua en a. Por otro lado, sea $g = f|Y$, $Y = I \cap X$, $a \in I$ y g continua en a. Sea $\epsilon > 0$ dado, $x \in Y$, como g es continua en a, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta_1$, entonces $|g(x) - g(a)| = |f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Además $a \in I$ (I abierto), entonces $a \in int(I)$, existe δ_2 tal que $(a-\delta_2, a+\delta_2) \subset I$, entonces $(a - \delta_2, a + \delta_2) \cap X \subset I \cap X = Y$. Ahora sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces $(a - \delta, a + \delta) \subset (a - \delta_1, a + \delta_1)$ y $(a - \delta, a + \delta) \subset (a - \delta_2, a + \delta_2)$. Si $x \in X$ y $|x - a| < \delta$, implica que $x \in (a - \delta, a + \delta) \subset (a - \delta_1, a + \delta_1)$ y $x \in (a - \delta, a + \delta) \subset (a - \delta_2, a + \delta_2)$, por consiguiente $x \in (a-\delta_1, a+\delta_2)$ y $x \in (a-\delta_2, a+\delta_2) \cap X \subset Y$, lo cual implica que $x \in (a-\delta_1, a+\delta_1)$ y $x \in Y$, por lo tanto $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. □

Destaquemos la parte final del Teorema 1.1, la cual dice que la continuidad de una función f es un fenómeno local, es decir, si f coincide cerca del punto a, con una función que es continua en a, entonces f también es continua en este punto. (Coincidir con una función continua en la vecindad de a significa que, para un cierto intervalo abierto I, que contiene a, la restricción $f|(I \cap X)$ es continua en el punto a).

Teorema 1.2. *Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en el punto $a \in X$, entonces f es acotada en una vecindad de a, esto es, existe $\delta > 0$ tal que, cuando $U_\delta = X \cap (a - \delta, a + \delta)$, el conjunto $f(U_\delta)$ es acotado.*

Demostración. Sea $\epsilon = 1 > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$, entonces $|f(x) - f(a)| < 1$. Ahora $|f(x)| = |(f(x) - f(a)) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| < 1 + |f(a)| = A > 0$, así $|f(x)| < A$ y $A > 0$, es decir $-A < f(x) < A$, entonces $f(U_\delta)$ es acotado. □

Teorema 1.3. *Si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas en el punto $a \in X$ y $f(a) < g(a)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$ con $|x - a| < \delta$.*

Demostración. Sea $\epsilon = \frac{g(a)-f(a)}{2} > 0$, como f y g son continuas en a, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que, si $x \in X$, $|x-a| < \delta_1$ implica que $|f(x)-f(a)| < \frac{g(a)-f(a)}{2}$ y $|x-a| < \delta_2$ implica que $|g(x)-g(a)| < \frac{g(a)-f(a)}{2}$. Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Si $x \in X$, $|x-a| < \delta$ implica que $|x-a| < \delta_1$

y $|x-a|<\delta_2$, por consiguiente $\frac{f(a)-g(a)}{2}<f(x)-f(a)<\frac{g(a)-f(a)}{2}$ y $\frac{f(a)-g(a)}{2}<g(x)-f(a)<\frac{g(a)-f(a)}{2}$, es decir que $\frac{3f(a)-g(a)}{2}<f(x)<\frac{f(a)+g(a)}{2}$ y $\frac{f(a)+g(a)}{2}<g(x)<\frac{3g(a)-f(a)}{2}$, por tanto $f(x)<\frac{f(a)+g(a)}{2}<g(x)$ y así para $x\in X$, $|x-a|<\delta$ implica que $f(x)<g(x)$. □

COROLARIO 2.1. Sean $f: X\longrightarrow\mathbb{R}$ continua en el punto $a\in X$ y $k\in\mathbb{R}$ una constante. Si $f(a)<k$,entonces existe $\delta>0$ tal que $f(x)<k$ para todo $x\in X$ con $|x-a|<\delta$.

El corolario del teorema 1.3. es un hecho simple, sin embargo, es extremamente importante en las aplicaciones, vale la pena, por lo tanto, dar su demostración explícita.

DEMOSTRACIÓN. Sea $g(x)=k$ para todo $x\in X$, $g: X\longrightarrow\mathbb{R}$. Es claro que g es continua en $a\in X$, luego el Teorema 1.3, nos garantiza que existe $\delta>0$, tal que si $x\in X$, $|x-a|<\delta$, entonces $f(x)<g(x)=k$ implica que $f(x)<k$. Otra forma de demostrar esto, como $f(a)<k$, tomemos $\epsilon=k-f(a)>0$. Por la definición 2.1, a este ϵ le corresponde un $\delta>0$ tal que, $x\in X$, $|x-a|<\delta\Longrightarrow f(a)-\epsilon<f(x)<f(a)+\epsilon$. Pero $f(a)+\epsilon=k$, Luego todo punto $x\in X$, cuya distancia al punto a sea menor que δ se cumple que $f(x)<k$.

□

Por supuesto, un resultado análogo es válido, si $f(a)>k$: existe $\delta>0$ tal que $x\in X$ y $|x-a|<\delta$, lo cual implica que $f(x)>k$. Lo mismo se dá para $f(a)\neq 0$, pues debe existir $\delta>0$ tal que $x\in X$ y $|x-a|<\delta$, lo cual implica que $f(x)\neq k$. (En efecto, si $f(a)\neq k$, se tiene $f(a)>k$ o $f(a)<k$ y se aplica entonces uno de los dos resultados anteriores.)

Ahora supongamos que f es continua en todos los puntos de X y consideremos el conjunto A de los puntos $a\in X$ tales que $f(a)>k$, es decir,

$$A=\{a\in X; f(a)>k\}$$

¿Qué se puede decir de A? Por lo que hemos visto, para cada punto $a\in A$, existe un intervalo abierto $I_a=(a-\delta,a+\delta)$ de tal manera que $x\in I_a\cap X$, lo cual implica que $f(x)>k$, esto significa que $a\in I_a\cap X\subset A$ para todo $a\in A$. Sea $U=\bigcup_{a\in A} I_a$, entonces U es un conjunto abierto y $a\in U\cap X\subset A$ para todo $a\in A$, o sea, $A\subset U\cap X\subset A$ es decir $A=U\cap X$.

En particular, cuando X es abierto, el conjunto A es abierto, como intersección $A=U\cap X$ de dos abiertos.

TEOREMA 1.4. *Para $f: X\longrightarrow\mathbb{R}$ sea continua en el punto $a\in X$ es necesario y suficiente que se tenga $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$ para toda sucesión de puntos $x_n\in X$ con $\lim\limits_{x\to\infty} x_n=a$.*

Demostración. Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ (f continua en a) y tomemos una sucesión $\{x_n\}_{\in\mathbb{N}}$ de puntos de X, tal que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Sea $\epsilon > 0$ dado, como f es continua en a, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$, $|x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Para este $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces $|x_n - a| < \delta$, por lo tanto $x_n \in X$ y $|x_n - a| < \delta$ implica que $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Por otro lado, supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ (f es continua en a), entonces existe $\epsilon > 0$ tal que si $\frac{1}{n} > 0$, $x_n \in X$, $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ y $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$. Así $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$. □

Corolario 2.2. Para que f sea continua en el punto a es necesario que exista $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ y es independiente de la sucesión de números $x_n \in X$ con $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$.

Corolario 2.3. A fin de que f sea continua en el punto a, es suficiente que, para toda sucesión de puntos $x_n \in X$ con $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$, existe $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Dadas las funciones $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, se pueden definir nuevas funciones $f + g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f - g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \cdot g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\dfrac{f}{g} : X_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $X_0 = X \backslash g^{-1}(0) = \{x \in X; g(x) \neq 0\}$. Tenemos $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ y $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Teorema 1.5. *Si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas en el punto $a \in X$, entonces $f+g$, $f-g$ y $f \cdot g$ son continuas en ese mismo punto. Si $g(a) \neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ también es continua en el punto a.*

Demostración. Como f y g son continuas en el punto $a \in X$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$. Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = f(a) \pm g(a)$, $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = f(a) \cdot g(a)$ y $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)}$, con $g(a) \neq 0$. □

En particular, si f es continua en el punto a, entonces $c \cdot f$ es continua en el mismo punto, para cualquier $c \in \mathbb{R}$. También lo mismo ocurre con $\dfrac{1}{f}$ si $f(a) \neq 0$.

Teorema 1.6. *La composición de dos funciones continuas es continua. Es decir, si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas en los puntos $a \in X$, $b = f(a) \in Y$, respectivamente, y, además, $f(X) \subset Y$, entonces $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en el punto a.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado, existe $\eta > 0$ tal que si $y \in Y$, $|y - b| < \eta$, implica que $|g(y) - g(b)| < \epsilon$ y asiendo $b = f(a)$ se tiene que $|g(y) - g(f(a))| < \epsilon$. Como f es continua en a, para cada $\eta > 0$, $x \in X$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \eta$, $f(x) \in Y$, luego $|g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$. Así que $\lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = g(f(a))$. □

La restricción de una función continua $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ a un subconjunto $X \subset Y$ es un caso particular de función compuesta: Tenemos $g|X = g \circ f$, donde $f : X \longrightarrow Y$ es la inclisión, es decir, $f(x) = x$ para todo $x \in X$.

Ejemplos 1.1.

(1) *Como la función identidad $f(x) = x$, $x \mapsto x$ es evidentemente continúa toda la recta real, lo mismo ocurre con la función $x \mapsto x^n$, $(n \in \mathbb{N})$ en virtud del Teorema 1.5. Del mismo teorema resulta que todo polinomio $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ es una función continua. También es continúa toda función racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ (cociente de dos polinomios) en los puntos donde es definida, es decir, los puntos en los que su denominador no se anula.*

(2) *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera: para $x \geq 5$, $f(x) = x+1$. Si $x \leq 5$, entonces $f(x) = 16 - 2x$, luego f es continua en todo punto $a > 5$ pues coincide con la función continua $g(x) = x + 1$ en el intervalo abierto $(5, +\infty)$, que contiene a a. De forma similar, f es continua en todo punto $a < 5$. También en el punto 5, f es continua, pues $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = 6 = f(5)$.*

(3) *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 1$, es decir, $f(x) = 1$ para $x \geq 0$ y $f(x) = -1$ cuando $x < 0$, entonces f es continua en todos los puntos $x \neq 0$, pero no es continua en el punto $x = 0$, porque no existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.*
Notese que f coincide con $g(x) = 1$ para $x > 0$, lo cual es continua, similarmente, $h(x) = -1$ para $x < 0$, pero $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$, así que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe, luego f no es continua en $x = 0$.

Teorema 1.7. *Sea $X \subset F_1 \cup F_2$, donde F_1 y F_2 son conjuntos cerrados. Si la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que sus restricciones $f|(X \cap F_1)$ y $f|(X \cap F_2)$ son continuas, entonces f es continua.*

Demostración. Sea $a \in X$. Para demostrar que f es continua en el punto a, supongamos que dado $\epsilon > 0$, hay tres posibilidades. Primera: $a \in F_1 \cap F_2$, entonces, como $f|(X \cap F_1)$ es continua en el punto a, existe $\delta_1 > 0$ tal que $x \in X \cap F_1$, $|x - a| < \delta_1$, lo cual implica que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. De manera similar, existe $\delta_2 > 0$, tal que $x \in X \cap F_2$, $|x - a| < \delta_2$, lo cual implica que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, si $x \in X$ y $|x - a| < \delta$, entonces $|x - a| < \delta_1$ y $|x - a| < \delta_2$, luego cualquier $x \in F_1$, o cualquier $x \in F_2$, se cumple que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

La segunda posibilidad es que $a \in F_1$ y $a \notin F_2$, escojamos $\delta_1 > 0$, tal que $x \in X \cap F_1$, $|x-a| < \delta_1$, lo cual implica que $|f(x)-f(a)| < \epsilon$, como F_2 es un conjunto cerrado, podemos obtener $\delta_2 > 0$ tal que no existe $x \in F_2$ con $|x-a| < \delta_2$ (pues $a \notin F_2$). Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$; si $x \in X$ y $|x-a| < \delta$, entonces $x \in F_1$ y $|x-a| < \delta_1$, luego $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. La tercera posibilidad es $a \in F_2$ y $a \notin F_1$; este caso sería tratado de forma análoga al segundo, en cualquier caso, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en el punto a. □

Corolario 2.4. Sea $X = F_1 \cup F_2$, donde F_1 y F_2 son conjuntos cerrados. Si la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que sus restricciones $f|F_1$ y $f|F_2$ son continuas, entonces f es continua.

En el caso del corolario 2.4, el dominio de la función f es un conjunto cerrado, lo que no ocurre en general. Es evidente, sin embargo, que el teorema 1.7 (y su corolario 2.4) es válido cuando se tiene un número finito de conjuntos cerrados $F_1, \ldots, F_n$. El caso de una infinitud de conjuntos cerrados es obviamente falso: todo conjunto X es unión de conjuntos cerrados (es decir, sus puntos) y $f|\{x\}$ es siempre continua, para cualquier $x \in X$, pero f puede no ser continua.

Ahora podemos entender mejor los dos ejemplos anteriores. En el Ejemplo 2, tenemos $\mathbb{R} = F \cup G$, donde los conjuntos $F = (-\infty, 5]$ y $G = [5, +\infty)$ son cerrados. Como $f|F$ y $f|G$ son continuas, se deduce que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua. En el Ejemplo 3, tenemos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que, poner $A = (-\infty, 0)$ y $B = [0, +\infty)$, se cumple que $\mathbb{R} = A \cup B$ y las restricciones $f|A$ y $f|B$ son continuas. Pero A no es un conjunto cerrado, este hecho permite que f sea discontinua.

En caso de conjuntos abiertos, en lugar de cerrados, el resultado todavía es verdadero. Además, es admisible cubrir a X con una infinidad de estos conjuntos. El Teorema siguiente está contenido esencialmente en la segunda parte del teorema 1.1, pero vamos a demostrarlo de todos modos.

Teorema 1.8. *Sea* $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ *una cobertura de* X *por medio de abiertos* A_λ. *Si una función* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *es tal que, para todos los* $\lambda \in L$, *las restricciones* $f|(A_\lambda \cap X)$ *son continuas, entonces* f *es continua.*

Demostración. Tomemos $a \in X$. Para mostrar que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en el punto a, supongamos que dado $\epsilon > 0$, existe algún $\lambda \in L$, tal que $a \in A_\lambda$, como A_λ es un conjunto abierto, a es un punto interior para A_λ, luego existe $\delta_1 > 0$ tal que $(a-\delta_1, a+\delta_1) \subset A_\lambda$, por lo tanto $|x-a| < \delta_1$ $(x \in (a-\delta_1, a+\delta_1))$, lo cual implica que $x \in A_\lambda$. Como $f|(A_\lambda \cap X)$ es continua, existe $\delta_2 > 0$ tal que $x \in A_\lambda \cap X$, $|x-a| < \delta_2$, entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Si $x \in X$ y $|x-a| < \delta$, entonces $x \in A_\lambda \cap X$ y $|x-a| < \delta_2$, luego $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Esto prueba que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en el punto de a. $\square$

Corolario 2.5. Sea $X = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, donde cada A_λ es un conjunto abierto. Si cada restricción $f|A_\lambda$ es continua, entonces $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Demostración. Como $X = \bigcup_{\lambda \in l} A_\lambda$, entonces $A_\lambda \subset X$ para todo $\lambda \in l$ y $X \subseteq \bigcup_{\lambda \in l} A_\lambda$, luego $A_\lambda \cap X = A_\lambda$ para todo $\lambda \in l$, por lo tanto $f|A_\lambda = f|A_\lambda \cap X$ continua para todo $\lambda \in l$ y $X \subseteq \bigcup_{\lambda \in l} A_\lambda$, entonces el Teorema 1.8 garantiza que f es continua en X. $\square$

Ejemplo 2.4. Sea $X = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Definamos $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -1$ si $x < 0$ y $f(x) = 1$ si $x > 0$, entonces $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, pues $X = A \cup B$, donde $A = (-\infty, 0)$ y $B = (0, +\infty)$ son abiertos, con $f|A$ y $f|B$ son continuas.

El Teorema 1.8 y su Corolario 2.5 corroborar el hecho de que la continuidad es un fenómeno local.

2. Discontinuidades

Definición 2.5. **(Discontinuidad)**. Dada $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, un punto de discontinuidad (o simplemente, una discontinuidad) de la función f, es un punto $a \in X$ tal que f no es continua en el punto a.

Observación 2.6. Si $a \in X$ es un punto de discontinuidad de $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos afirmar que existe un número $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, se pueda encontrar un $x_\delta \in X$ con $|x_\delta - a| < \delta$, pero $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \epsilon$.

Ejemplos 2.1.

(1) *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ para x racional y $f(x) = 1$ cuando x es irracional, entonces todo número real es punto de discontinuidad de f porque no existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, para cualquier $a \in X$.*

(2) *Definamos* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *con* $g(x) = 0$ *si* x *es irracional,* $g(0) = 1$ *y* $g\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ *cuando* $\frac{p}{q}$ *es una fracción irreducible distinta de cero, con* $q > 0$*. Si escribimos* $g_1 = g|\mathbb{Q}$ *y* $g_2 = g|(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$*, tendremos, para todo* $a \in \mathbb{R}$*,* $\lim_{x\to a} g_1(x) = 0$ *y* $\lim_{x\to a} g_2(x) = 0$ *porque* $g_2 \equiv 0$*. Se sigue inmediatamente que, para todo número real* a*, se tiene* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$*. Concluimos así que* g *es continua en los números irracionales y discontinua en los números racionales. (Sería imposible conseguir una función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *cuyos puntos de discontinuidad fueran exactamente los números irracionales. Véase el ejercicio 18 de este Capítulo)*

(3) *Sea* $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $h(x) = x + \frac{x}{|x|}$ *si* $x \neq 0$*,* $h(0) = 0$*, entonces el único punto de discontinuidad de* h *es el punto* 0*.*

(4) *Sea* $K \subset [0,1]$ *el conjunto de Cantor. Definimos una función* $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *de la siguiente manera:* $\varphi(x) = 0$ *para todo* $x \in K$*, Si* $x \notin K$*, ponemos* $\varphi(x) = 1$*. El conjunto de puntos de discontinuidad de* φ *es* K*. En efecto, siendo* $A = [0,1]\backslash K$ *un conjunto abierto el cual* φ *es constante (y por tanto continua),se sigue que* $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua en cada punto* $a \in A$*, por otro lado, como* K *no tiene puntos interiores, para cada* $k \in K$*, podemos obtener una sucesión de puntos* $x_n \in A$ *con* $\lim_{n\to\infty} x_n = k$*, entonces* $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = 1 \neq 0 = \varphi(k)$*, Luego* φ *es discontinua en todos los puntos* $k \in K$*.*

Definición 2.7. **(Discontinuidad de primera especie).** Se dice que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene una *discontinuidad de primera especie* en el punto $a \in X$ cuando f es discontinua en el punto a y, además, existen los límites laterales $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$. (El caso en que a sea punto de acumulación de X en un solo lado, exigimos apenas que exista el limite lateral correspondiente.)

Definición 2.8. **(Discontinuidad de segunda especie).** Una discontinuidad $a \in X$ de la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada de *segunda especie* cuando $a \in X'_+$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ no existe o cuando $a \in X'_-$ pero no existe el limite por la izquierda de f en el punto a.

Ejemplos 2.2.

(1) *En los Ejemplos 2.1. 2 y 3, tienen discontinuidades de la primera especie. En el Ejemplo 2, en cada punto de discontinuidad* a*, existen los límites laterales, que son iguales pero diferentes del valor de* $f(a)$*. En el Ejemplo 3, el límite de la izquierda*

es -1 *y el límite de la derecha es* $+1$ *que es el único punto de discontinuidad. Los Ejemplos 2.1. 1 y 4, los puntos de discontinuidad son todos de segunda especie.*

(2) *El ejemplo conocido de discontinuidad de segunda especie es la función* $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, *definida por* $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *para* $x\neq 0$. *Cualquiera que sea el valor asignado a* $f(0)$, *el punto* 0 *será una discontinuidad de segunda especie para* f, *porque no existe* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ *ni* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

(3) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ *con* $x\neq 0$ *y* $f(0)=0$, *define una función* $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *cuya única discontinuidad es el punto* 0, *entonces, el límite de la derecha es* 0, *mientras que el límite de la izquierda es* 1. *Es por lo tanto, una discontinuidad Primera especie.*

(4) *Si tomamos* $g(x)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ *para* $x\neq 0$ *y* $g(0)=0$, *así tenemos una función* $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *con una única discontinuidad en el punto* 0, *luego* $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$, *mientras que* $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$ *no existe. El punto* 0 *es por tanto, un discontinuidad de segunda especie en el cual existe límite por la derecha, pero el limite por la izquierda, aunque tenga sentido (*0 *es punto de acumulación por la derecha para el dominio* g*), no existe.*

(5) *Sin recurrir al Cálculo, es fácil dar ejemplos de discontinuidad de segunda especie, en la cual uno de los límites laterales existe. Basta consideran* $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *definida por* $f(x)=0$ *si* $x\leq 0$ *o si* $x>0$ *con* x *racional,* $f(x)=1$ *para los* $x>0$ *con* x *irracional, en donde existe* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$ *pero no existe* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, *luego* 0 *es una discontinuidad del tipo buscado.*

TEOREMA 2.1. *Una función monótona* $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ *no admite discontinuidades de segunda especie.*

DEMOSTRACIÓN. Dado $a\in X$, como f es monótona si $(a+\delta)\in X$ (respectivamente $(a-\delta)\in X$) entonces f es acotada en el conjunto $[a,a+\delta]\cap X$ (respectivamente $[a-\delta]\cap X$), luego existen los limites laterales para el punto a. $\square$

TEOREMA 2.2. *Sea* $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ *monótona. Si* $f(X)$ *es un conjunto denso en algún* I, *entonces* f *es continua.*

Demostración. Para cada $a \in X'_+$ sea $f(a^+) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$. Análogamente, si $a \in X'_-$, escribiremos $f(a^-) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$. Supongamos f es no decreciente, tomemos $a \in X$. se tiene sentido fallar en $f(a^+)$, esto es, si $a \in X'_+$, mostraremos que $f(a) = f(a^+)$. En efecto, $f(a^+) = \text{ínf}\{f(x); x > a\}$ y como sabemos que $a < x$, entonces $f(a) \leq f(x)$. Luego $f(a) \leq f(a^+)$. Supongamos que $f(a) < f(a^+)$. Como existen puntos $x \in X$ con $x > a$, vemos que en $f(X)$ hay puntos $f(x) \geq f(a^+)$. Así, todo intervalo I que contiene a $f(x)$ debe contener por lo menos el intervalo $(f(a), f(a^+))$, en donde no hay puntos de $f(X)$ pues $x \leq a$, lo cual implica que $f(x) \leq f(a)$ y $a < x$, entonces $f(a^+) \leq f(x)$. Esto contradice que $f(X)$ sea denso en el intervalo I, Por consiguiente, $f(a) = f(a^+)$. Del mismo modo veríamos que $f(a^-) = f(a)$ para todo $a \in X'_-$, Por lo tanto f es continua. $\square$

Corolario 2.6. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona y $f(X)$ es un intervalo, entonces f es continua.

Ejemplo 2.9. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$, si x es racional, y $f(x) = -x$, si x es irracional, entonces f es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ que es continua apenas en el punto 0, esto se da porque f no es monótona.

Continuaremos escribiendo, $f(a^+) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ y $f(a^-) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

Teorema 2.3. *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cuyas discontinuidades son todas de primera especie, entonces el conjunto de los puntos de discontinuidad de f es numerable.*

Antes de demostrar el teorema 2.3, definamos una función $\sigma : X \longrightarrow \mathbb{R}$, de la siguiente manera, para cada $x \in X$, $\sigma(x) = \text{máx}\{|f(x) - f(x^+)|, |f(x) - f(x^-)|\}$ si $x \in X'_+ \cap X'_-$, y si $x \in X'_+$ o $x \in X'_-$ pondremos respectivamente $\sigma(x) = |f(x) - f(x^+)|$ o $\sigma(x) = |f(x) - f(x^-)|$. Finalmente, si x es un punto aislado de X, pondremos $\sigma(x) = 0$.

La función σ es definida cuando f no tiene discontinuidades de segunda especie. Su valor $\sigma(x)$ se llama *salto* de f en el punto x.

Note se que si $a \leq f(x) \leq b$ para todo $x \in X$, entonces $0 \leq \sigma(x) \leq b - a$, el hecho más importante a acerca σ es que $\sigma(x) > 0$ si, y sólo si $x \in X$ es una discontinuidad de f.

Demostración. Teorema 2.3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $D_n = \left\{x \in X; \sigma(x) \geq \dfrac{1}{n}\right\}$. El conjunto de puntos de discontinuidad de f es $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$. Basta mostrar que cada D_n es contable (o enumerable). Afirmamos que, por todo $n \in \mathbb{N}$, D_n tiene solamente puntos aislados. En efecto, sea $a \in D_n$. Siendo f discontinua en el punto a, tenemos que $a \in X'$. Supongamos que $a \in X'_+$, por definición de $f(a^+)$, dado n, existe $\delta > 0$ tal que $a < x < a+\delta$, $x \in X$, lo cual implica que $f(a^+) - \dfrac{1}{4n} < f(x) < f(a^+) + \dfrac{1}{4n}$. Así, para cada $x \in (a, a+\delta) \cap X$, se cumple que $\sigma(x) \leq \dfrac{1}{2n}$. Pero si tuviéramos $a \notin X'_+$, escogemos $\delta > 0$ tal que $(a, a+\delta) \cap X = \phi$. En cualquier caso, para todo $a \in D_n$ existe un intervalo $(a, a+\delta)$ tal que $(a, a+\delta) \cap D_n = \phi$. De modo semejante encontramos, para cada $a \in D_n$, un intervalo abierto $(a-\delta', a)$ de tal manera que $(a-\delta', a) \cap D_n = \phi$. Esto demuestra que ningún punto de D_n es punto de acumulación, En otras palabras, todo punto de D_n es aislado. Se sigue que D_n es contable. □

Corolario 2.7. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona. El conjunto de puntos de discontinuidad de f es contable.

Demostración. En virtud de Teorema 2.1, las discontinuidades de f son todas de primera especie. □

3. Funciones continuas en intervalos

El siguiente teorema establece matemáticamente el principio bastante importante de que una función continua definida en un intervalo, no puede pasar de un valor a otro sin tener que ir a través de todos los valores intermedios.

Teorema 3.1. *(Teorema del valor intermedio). Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Si $f(a) < d < f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.*

Primera demostración. Como f es continua en el punto a, dado $\epsilon = d - f(a) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $a \leq x \leq a+\delta$, lo cual implica que $f(x) < f(a) + \epsilon = d$. Así, todos los puntos x suficientemente próximos de a en intervalo $[a,b]$ son tales que $f(x) < d$. De manera similar, se verifica que todos los puntos y suficientemente próximos de b en el intervalo $[a,b]$ son tales que $d < f(y)$. En particular, los conjuntos $A = \{x \in (a,b); f(x) < d\}$ y $B = \{y \in (a,b); d < f(y)\}$ son ambos no vacíos. El corolario 2.1. nos dice que A y B son conjuntos abiertos. Si no existe un punto c con $a < c < b$ y $f(c) = d$, entonces $(a,b) = A \cup B$, en contradicción con la unicidad de la descomposición de un intervalo abierto como unión de intervalos abiertos.

Segunda demostración. Sea $A = \{x \in [a,b]; f(x) < d\}$. Como $a \in [a,b]$ y $f(a) < d$, entonces $a \in A$ y así A es no vació. ¡Afirmación! No existe $\xi \in A$ tal que para todo $t \in A$,

$t < \xi$. En efecto, sea $\alpha \in A$, entonces $\alpha \in [a, b]$ y $f(\alpha) < d$. Note se que $\alpha \neq b$, pues $d < f(b)$, por consiguiente, $\alpha < b$. Tomemos $\epsilon = d - f(\alpha) > 0$, además como f es continua en el punto α, entonces existe $\delta > 0$ (que tomaremos pequeño, de modo que $[\alpha, \alpha + \delta] \subset [a, b]$) tal que, para todo $x \in [\alpha, \alpha + \delta)$ se tiene que $|f(x) - f(\alpha)| < \epsilon$, lo cual implica que $f(x) < d$. Así todos los puntos del intervalo $[\alpha, \alpha + \delta)$ pertenecen a A. Ahora pongamos $c = \sup(A)$, como c es el limite de una sucesión de puntos $x_n \in A$, tenemos que $f(c) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \leq d$ y como $c \notin A$, entonces no se da $f(c) < d$, por lo tanto ha de ser $f(c) = d$.

Corolario 2.8. Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en un intervalo I (que puede ser cerrado o no, acotado o no). Si $a < b$ pertenecen a I y $f(a) < d < f(b)$, entonces existe $c \in I$ tal que $f(c) = d$.

Basta restringir en el intervalo $[a, b]$ y aplicar el Teorema 3.1.

Corolario 2.9. Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en un intervalo I, entonces $f(I)$ es un intervalo.

Demostración. En efecto, sean $\alpha = \inf\limits_{x \in I} f(x)$ y $\beta = \sup\limits_{x \in I} f(x)$. (Esta notación es simbólica. Podemos tener $\alpha = -\infty$, si f no es acotada inferiormente en I, o $\beta = +\infty$, en caso de ser f no acotada superiormente en I.) Afirmamos que $f(I)$ es un intervalo cuyos extremos son α y β, es decir, dado y con $\alpha < y < \beta$, debe existir $x \in I$ tal que $y = f(x)$, de hecho, por las definiciónes de ínfimo y del supremo (o por la definición de conjunto no acotado, en el caso que algunos de los extremos α o β sea infinito) existen $a, b \in I$ de tal manera que $f(a) < y < f(b)$ y en virtud del Teorema 3.1, existe un punto x entre a y b tal que $f(x) = y$. □

Observación 2.10.

(1) El Teorema 3.1, también es valido en el caso de que $f(b) < d < f(a)$.
(2) En el Corolario 2.9, no dice nada sobre los extremos del intervalo $f(I)$ si pertenecen o no al intervalo. Podemos tener $f(I) = [\alpha, \beta]$, o $f(I) = (\alpha, \beta)$, o $f(I) = [\alpha, \beta)$ o $f(I) = (\alpha, \beta]$. Además el intervalo I es completamente arbitrario, por ejemplo, sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, entonces tomando $I = (-1, 3)$ tenemos que $f(I) = [0, 9)$.

Ejemplos 3.1.

(1) *Si I es un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que toma solo valores enteros, entonces f es constante, de hecho, $f(I)$ debe ser un intervalo contenido en $\mathbb{Z}$, luego es generado (reduce a un punto). Más general, si $Y \subset \mathbb{R}$ con interior vacío*

y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(x) \subset Y$, entonces f es constante en cada intervalo que puede contener a X.

(2) *Sea $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un polinomio real, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ de grado impar (es decir, $a_n \neq 0$ y n impar) tiene una raíz real, es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$. En efecto, Supongamos que $a_n > 0$, entonces sea*
$$r(x) = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x_n},$$
entonces, $p(x)$ se puede reescribir como $p(x) = a_n \cdot x^n \cdot r(x)$, luego $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x) = 1$. Como $\lim\limits_{x\to+\infty}(a_n x^n) = +\infty$ y (por ser n impar) $\lim\limits_{x\to-\infty}(a_n x^n) = -\infty$, se concluye que $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$, tomando $I = \mathbb{R}$ en el Corolario 2.9, vemos que $p(\mathbb{R})$ es un intervalo. Los límites calculados anteriormente muestran que el intervalo $p(\mathbb{R})$ es ilimitado en ambos sentidos, por lo tanto $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ y así $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es sobreyectiva. En particular, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$.

TEOREMA 3.2. . *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua inyectiva, definida en un intervalo I, entonces f es monótona, su imagen $J = f(I)$ es un intervalo y su inversa $f^{-1} : J \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Como el lector puede verificar sin dificultad, para concluir que f es monótona, basta verificar su monotonicidad en cada subintervalo acotado y cerrado $[a, b] \subset I$. Así podemos admitir que $I = [a, b]$. Sabemos que $f(a) \neq f(b)$, sin perdida de generalidad, vamos a suponer que $f(a) < f(b)$ y mostraremos entonces que f es creciente, de lo contrario, existirían puntos $x < y$ en $[a, b]$ tales que $f(x) > f(y)$, luego tenemos dos posibilidades $f(a) < f(y)$ o $f(a) > f(y)$. En el primer caso, tenemos $f(a) < f(y) < f(x)$, luego por el Teorema 3.1, existe $c \in (a, x)$ con $f(c) = f(y)$, esto contradice la inyectividad de f. En el segundo caso, $f(y) < f(a) < f(b)$ y nuevamente por el teorema 3.1, obtenemos $c \in (y, b)$ tal que $f(c) = f(a)$, aun contradiciendo la inyectividad de f.

Esto demuestra que toda función real continua e inyectiva definida en un intervalo, es monótona. El Corolario 2.9 nos da que $J = f(I)$ es un intervalo y el Teorema 2.2 (o su Corolario 2.6) nos garantiza que $f^{-1} : J \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua pues $f^{-1}(J) = I$ y la inversa de una función monótona es monótono. (Como $[a, b]$ es compacto, la continuidad de f^{-1} también es resultado del teorema 15 el cual enunciaremos mas adelante.) □

OBSERVACIÓN 2.11. En el caso del teorema 3.2 (función continua, inyectiva, monótona), el intervalo $J = f(I)$ es del mismo tipo (abierto, cerrado, semiabierto) que I. De hecho siendo f monótona inyectiva, $a \in I$ es un extremo de I si, y sólo si $f(a)$ es un extremo de J. Note se, sin embargo, que uno de los intervalo I, J pueden ser ilimitado sin que el otro lo sea. Consideremos, por ejemplo, la función $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Tenemos $f((0, 1]) = [1, +\infty)$.

Dados, $X, Y \subset \mathbb{R}$, una biyección continua $f : X \longrightarrow Y$, cuya inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ también es continua y se llama un *homeomorfismo* entre X y Y. El Teorema 3.2 dice que si X es un intervalo, la continuidad de la inversa f^{-1} es una consecuencia de la continuidad de f. Debe notar que esto no ocurre en general. Por ejemplo, sea $X = [0, 1) \cup [2, 3]$, $Y = [1, 3]$ y $f : X \longrightarrow Y$ la biyección continua definida por $f(x) = x + 1$ si $0 \leq x < 1$, $f(x) = x$ si $2 \leq x \leq 3$. La inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ es discontinua en el punto 2. En efecto, $f^{-1}(y) = y$ si $2 \leq y \leq 3$ y $f^{-1}(y) = y - 1$ si $1 \leq y < 2$. Así, $f^{-1}(2) = 2$ cuando $\lim\limits_{y \to 2^-} f^{-1}(y) = 1$.

Ejemplo 2.12. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, entonces existe $\sqrt[n]{y}$ para todo $y \geq 0$. En efecto, dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos la función $f : I \longrightarrow I$ con $I = [0, +\infty)$ definida por $f(x) = x^n$, la cual es continua en el intervalo I y en virtud del corolario 2.9, $f(I)$ es un intervalo y como $f(0) = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, entonces $f(I) = [0, +\infty)$, luego f es sobreyectiva, por lo tanto, para $y \geq o$, existe $x \geq 0$ tal que $x^n = y$, además f es creciente y por tanto inyectiva y así f es una biyección. Dado $y \geq 0$, el número $x \geq 0$ tal que $x^n = y$ es único y se escribe $x = \sqrt[n]{y}$. Finalmente, la función $f^{-1} : I \longrightarrow I$, tal que $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$, es continua en virtud del teorema 3.2.

En el párrafo siguiente, veremos otra situación en la cual la inversa de una función continua es continua.

4. Funciones continuas en conjuntos compactos

Teorema 4.1. *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Si X es compacto, entonces $f(X)$ es compacto.*

Demostración. Dada una cobertura abierta $f(X) \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$, podemos para cada $x \in X$ escoger $A_{\lambda(x)}$ tal que $f(x) \in A_{\lambda(x)}$. En virtud de la continuidad de f, cada punto $x \in X$ se puede poner en un intervalo abierto I_x de tal manera que $y \in X \cap I_x$, lo cual implica que $f(y) \in A_{\lambda(x)}$. Así obtenemos una cobertura abierta $X \subset \bigcup\limits_{x \in X} I_x$ y como X es compacto, podemos extraer una subcobertura finita $X \subset I_{x_1} \cup \cdots \cup I_{x_n}$, en consecuencia, $f(X) \subset A_{\lambda(x_1)} \cup \cdots \cup A_{\lambda(x_n)}$, lo que demuestra la compacidad de $f(X)$. $\square$

Segunda demostración. Sea $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $f(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $f(x_n) = y_n$, como X es compacto, podemos conseguir una subsucesión convergente $x_{n_k} \longrightarrow x \in X$. Siendo f continua, tenemos $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) = y \in f(X)$, luego $f(X)$ es compacto.

COROLARIO 2.10. **(Weierstrass)**. Toda función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un compacto X es acotada y contiene sus extremos (esto es, existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in X$).

DEMOSTRACIÓN. Como X es compacto y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces $f(X)$ es compacto, por tanto, es cerrado y acotado, por consiguiente admite un máximo y un mínimo, luego existe $\sup f(X) \in f(X)$ y $\inf f(X) \in f(X)$, por lo tanto existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $\inf f(X) = f(x_1)$ y $\sup f(X) = f(x_2)$. Así $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in X$). □

EJEMPLOS 4.1.

(1) *La función continua $f : (-1, +1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, la cual no se limita. Esto puede ser debido a que su dominio es un conjunto limitado pero no cerrado (y por lo tanto no es compacto). Por otro lado, la función $g : (-1, +1) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x$, es continua y limitado, pero no asume un valor máximo ni un valor mínimo en su dominio $(-1, +1)$. La función $h : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, es continua y limitada. Asume su valor máximo en el punto $x = 0$, pero no existe $x \in [0, +\infty)$ tal que $h(x) = 0 = \inf\{h(x); x \in [0, +\inf)\}$. Esto es posible porque el dominio h es un subconjunto cerrado pero no limitado de $\mathbb{R}$.*

(2) *Dados un punto $a \in \mathbb{R}$ y un subconjunto cerrado no vacío $F \subset \mathbb{R}$, existe un punto $x_0 \in F$ tal que $|a - x_0| \leq |a - x|$ para todo $x \in F$. (El punto x_0 es el punto de F mas próximo a.) Para ver esto, basta con considerar una intervalo cerrado $[a-n, a+n]$ lo suficientemente grande de forma que la intersección $K = [a-n, a+n] \cap F$ sea no vacía. K es limitado y cerrado, luego es compacto. Consideremos la función continua $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - a|$. Por el Teorema de Weierstrass, f alcanza su valor mínimo en un punto $x_0 \in K$. Para todos los puntos $x \in F$ se tiene $|x_0 - a| \leq |x - a|$ porque los puntos de F que no pertenecen a K se encuentran fuera del intervalo $[a-n, a+n]$ y por tanto están más lejos de a que el punto x_0. Note que si F no fuera cerrado, podríamos tomar $a \in \bar{F} \backslash F$, luego el ínfimo de la función f sería cero, el cual no lo alcanza en algún punto $x \in F$, por tanto, cuando F no es cerrado, se puede siempre encontrar un punto a, del cual ningún punto de F es el más próximo.*

TEOREMA 4.2. *Sea $X \subset \mathbb{R}$ compacto. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y inyectiva entonces $Y = f(X)$ es compacto y la función inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $b = f(a) \in Y$. Para probar que f^{-1} es continua en el punto b, consideremos una secesión de puntos $y_n = f(x_n) \in Y$, con $y_n \longrightarrow b$. Debemos mostrar que $f^{-1}(y_n) = x_n \longrightarrow a = f^{-1}(b)$. Cómo $x_n \in X$, la secesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es limitada. Así, es suficiente probar que a es el único valor de adherencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea entonces $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una subsucesión que converge a un punto a'. Como X es compacto, tenemos $a' \in X$, además, $y'_n = f(x'_n)$ todavía converge a b. Como f es continua en el punto a', tenemos $f(a') = \lim_{n\to\infty} f(x'_n) = b$, siendo f inyectivos, esto obliga a que $a' = a$, el cual completa la demostración. ☐

5. Continuidad uniforme

Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Dado $\epsilon > 0$ podemos, para cada $a \in X$, obtener un $\delta > 0$ (que depende de ϵ y de a) tal que $|x - a| < \delta$, lo cual implica que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

En general, no es posible obtener a partir de $\epsilon > 0$ dado un único $\delta > 0$ que sirva para todos los puntos $a \in X$.

EJEMPLOS 5.1.

(1) *Sea $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Dado $\epsilon > 0$, mostraremos que no se puede escoger un $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$, entonces $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}\right| < \epsilon$ para cualquiera $a > 0$. De hecho, dado $\epsilon > 0$, escogemos un $\delta > 0$.y tomemos un número positivo a tal que $0 < a < \delta$ y $0 < a < \dfrac{1}{3\epsilon}$, entonces, para $x = a + \dfrac{\delta}{2}$ tenemos $|x - a| < \delta$ pero*

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{1}{a + \frac{\delta}{2}} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{2}{2a + \delta} - \frac{1}{a}\right| = \frac{\delta}{(2a + \delta)a} > \frac{\delta}{3\delta \cdot a} = \frac{1}{3a} > \epsilon.$$

(2) *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = cx + d$ con $c \neq 0$. Dado $\epsilon > 0$, escogemos $\delta = \dfrac{\epsilon}{|c|}$, entonces cualquiera que sea $a \in \mathbb{R}$, tenemos $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| = |(cx + d) - (ca + d)| = |cx - ca| = |c||x - a| < |c|\delta = \epsilon$. En este caso, fue posible a partir del ϵ dado, obtener un $\delta > 0$, que sirvió para todos los puntos a del dominio de f.*

La función con esa propiedad se llaman uniformemente continua. Más formalmente:

DEFINICIÓN 2.13. Una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice *uniformemente continua* cuando, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Es evidente que toda función uniformemente continua es continua, pero lo contrario no es cierto. Así, la función continua $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$, no es uniformemente continua ya que como vimos en el Ejemplo 5.1 1, dado $\epsilon > 0$, para cualquier $\delta > 0$, podemos encontrar puntos x, y en el dominio de f, con $|x-y| < \delta$ y $|f(x)-f(y)| \geq \epsilon$. Por otro lado, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = cx+d$, es uniformemente continua, como vimos en el Ejemplo5.1 2. (allí se a supuesto $c \neq 0$, pero es claro que si $c = 0$ da una función constante que es uniformemente continua.)
A fin de que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ no sea uniformemente continua, es necesario y suficiente que exista $\epsilon > 0$ con la siguiente propiedad, que para cada $\delta > 0$, se pueda obtener $x_\delta, y_\delta \in X$ tales que $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ pero $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \epsilon$.

Ejemplo 2.14. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *lipschitziana*. Esto significa que no existe una constante $c > 0$ tal que $x, y \in X$, lo cual implica que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$, entonces f es uniformemente continua, dado $\epsilon > 0$, tomamos $\delta = \dfrac{\epsilon}{c}$, una función lineal, $f(x) = cx + d$, es lipschitziana en toda la recta, con constante $|c|$, La función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, es lipschitziana si X es limitado. Por ejemplo, si tuviéramos $|x| \leq A$ para todo $x \in X$, entonces dados $x, y \in X$ arbitrarios, se cumple

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \leq 2A \cdot |x - y|$$

Basta con tomar $c = A$. Por otro lado, si $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ no es incluso uniformemente continua, en efecto, sea $\epsilon = 1$, cualquier que sea $\delta > 0$ escogido, podemos tomar $x > \dfrac{1}{\delta}$ y $y = x + \dfrac{\delta}{2}$, entonces $|x - y|\delta$ pero $|f(x) - f(y)| = \left(x + \dfrac{\delta}{2}\right)^2 - x^2 = x\delta + \dfrac{\delta^2}{4} > x\delta > 1$ con un poco mas de trabajo se muestra que para todo $n > 1$ la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^n$ que no es uniformemente continua.

Teorema 5.1. *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una secesión de Cauchy en X entonces $(f(x_n))$ es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $|x - y| < \delta$, lo cual implica que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. A su vez, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$, entonces $|x_m - x_n| < \delta$, luego $m, n > n_0$, lo cual implica que $|f(x_m) - f(x_n)| < \epsilon$ o sea que $(f(x_n))$ es una sucesión de Cauchy. $\square$

Corolario 2.11. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua. Para todo $a \in X'$, existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Demostración. Para toda secesión de puntos $x_n \in X - \{a\}$ con $x_n \longrightarrow a$, la secensión $(f(x_n))$ es convergente, por se de Cauchy, entonces existe el $\lim_{x \to a} f(x)$. $\square$

Ejemplo 2.15. Las funciones $f, g : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $g(x) = \frac{1}{x}$, no son uniformemente continua por que no existe el límite cuando $x \longrightarrow 0$.

Para mostrar que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ no es uniformemente continua basta obtener $\epsilon > 0$ y dos secesiones de puntos $x_n, y_n \in X$ tales que $\lim_{n \to \infty} (x_n - y_n) = 0$ y $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ para todo n. Por ejemplo, $f(x) = x^3$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, como se ve tomando $x_n = n + \frac{1}{n}$ y $y_n = n$, luego tenemos que $\lim_{n \to \text{ínf}} (x_n - y_n) = 0$ pero $x_n^3 - y_n^3 \geq 3$ para todo n.

Teorema 5.2. *Sea X compacto. Toda función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado. Para cada $x \in X$, f es continua en el punto x, luego existe $\delta_x > 0$ tal que $y \in X$, $|y - x| < 2\delta_x$, lo cual implica que $|f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$, Pongamos $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$, la cobertura $X \subset \bigcup_{x \in X} I_x$ admite una subcobertura finita $X \subset I_{x_1} \cup \cdots \cup I_{x_n}$. Sea δ el menor de los números $\delta_{x_1}, \cdots, \delta_{x_n}$. Si $x, y \in X$ y $|x - y| < \delta$, debemos tener $x \in I_{x_j}$ para algún j, donde $|x - x_j| < \delta_{x_j}$ y por tanto $|y - x_j| \leq |y - x| + |x - x_j| < 2\delta_{x_j}$. Estas desigualdades implican que $|f(x) - f(x_j)| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|f(y) - f(x_j)| < \frac{\epsilon}{2}$ de donde $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. $\square$

Segunda manifestación. Supongamos que f no sea uniformemente continua, entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $x_n \in X$ y $y_n \in X$ con $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ y $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$, como X es compacto, una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$, fructuosamente, tenemos que $\lim_{k \to \infty} y_{n_k} = x$. Como f es continua, $\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} f(y_{n_k}) = f(x)$, pero esto contradice la desigualdad $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon$ para todo k, luego f es uniformemente continua.

Ejemplo 2.16. La función $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x}$ es continua (como inversa de $x \longrightarrow x^2$, definida en el mismo intervalo) y por tanto es uniformemente continua, pues $[0, 1]$ es compacto. Cabe notar que f no lipschitziana en algún intervalo el cual 0 sea adherente por que el cociente $\frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ no es limitado para valores muy pequeños de x y y. Por otro lado, la función $g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$ (la cual f es una restricción) es uniformemente continua, aunque su dominio no sea compacto. Es suficiente observar que $g|[1,+\infty)$ es lipschitziana: $|g(x)-g(y)| = \dfrac{|x-y|}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \leq \dfrac{1}{2}|x-y|$, siempre y cuando $x \geq 1$ y $y \geq 1$. Como se ve fácilmente, la continuidad uniforme de $g|[0,1]$ y $g|[1,+\infty)$ se concluye la continuidad uniforme de g en todo su dominio $[0,+\infty)$.

Se dice que una función $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ es una *extensión* de $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ cuando f es una restricción de φ, es decir, cuando se tiene que $X \subset Y$ y $\varphi(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Cuando φ es continua, se dice que f se extiende continuamente a la función φ.

El siguiente Teorema completa el corolario 2.11.

Teorema 5.3. *Toda función uniformemente continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ admite una extensión continua $\varphi : \bar{X} \longrightarrow \mathbb{R}$; φ es la única extensión continua de f a $\bar{X}$ y es uniformemente continua.*

Demostración. Tenemos $\bar{X} = X \cup X'$. Para todo $x' \in X'$, pongamos $\varphi(x') = \lim\limits_{x \to x'} f(x)$. Este límite existe, por el Corolario 2.11, como f es continua, vemos que $\varphi(x') = f(x')$ cuando $x \in X' \cap X$. Completamos la definición de φ poniendo $\varphi(x) = f(x)$ para $x \in X$. Notemos que, para todo $\bar{x} \in \bar{X}$, si $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ con $x_n \in X$, entonces $\varphi(\bar{x}) = \lim f(x_n)$. Mostremos ahora que φ es uniformemente continua.

Dado $\epsilon > 0$, la continuidad uniforme de f nos da un $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $|x-y| < \delta$, lo cual implica que $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Afirmamos que el mismo δ satisface para la continuidad uniforme de φ. En efecto, si $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{X}$ son tales que $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta$, tenemos $\bar{x} = \lim x_n$ y $\bar{y} = \lim y_n$ con $x_n, y_n \in X$, de hay vemos que $|\bar{x} - \bar{y}| = \lim |\bar{x} - \bar{y}|$, luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0$, lo cual implica que $|x_n - y_n| < \delta$. De ello se deduce que $|f(x_n) - f(y_n)| < \dfrac{\epsilon}{2}$ para todo $n > n_0$ y por tanto $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| = \lim |f(x_n) - f(y_n)| \leq \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Sólo nos falta verificar la unicidad de φ, en efecto si $\psi : \bar{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ es otra extensión continua de f, entonces para todo $\bar{x} \in X$, escribiremos $\bar{x} = \lim x_n$ con $x_n \in X$, tendríamos que $\psi(\bar{x}) = \psi(\lim x_n) = \lim \psi(x_n) = \lim f(x_n) = \lim \varphi(x_n) = \varphi(\lim x_n) = \varphi(\bar{x})$. $\square$

Corolario 2.12. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua. Si X es limitado, entonces $f(x)$ es limitado; esto es, f es limitada en X.

Demostración. Sea $\varphi : \bar{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ la extensión continua de f al cierre de X. Como X es limitado, $\bar{X}$ es limitado y cerrado, y por lo tanto compacto. Por el teorema 4.1, $\varphi(\bar{X})$ es compacto y por tanto limitada y además $f(X) \subset \varphi(\bar{X})$ completando la prueba. $\square$

Ejercicios 5.1. .

(1) *Si un subconjunto S de R contiene una cota superior, ésta cota superior es el supremo de S.*

Demostración. Sea $S \subset R$ dado, tal que $u \in S$, u cota superior para S. En efecto por hipótesis se tiene que u es cota superior para S, luego si k es una cota superior para S arbitraria, entonces $u \leq k$,es ésta manera $u = sup(S)$ □

(2) *Demostrar qué unión de dos conjuntos acotados es acotada.*

Demostración. Sea A, B conjuntos acotados, veamos que $A \cup B$ es un conjunto acotado. En efecto A, B son acotados entonces existe u, w, s, t en los reales tales que para todo a, $u \leq a$ y $a \leq w$ con $a \in A$, y para todo b, $s \leq b$ y $b \leq t$ con $b \in B$. Ahora sea, sea $d \in A \cup B$ entonces $d \in A$ ó $d \in B$, con lo que $u \leq d \leq w$ ó $s \leq d \leq t$, hacemos $e = min\{u, s\}$ y $f = max\{w, t\}$. Si $u \leq d \leq w$ quiere decir que $e \leq u \leq d \leq w \leq f$ por consiguiente $e \leq d \leq f$. de misma manera si $s \leq d \leq t$ entonces $e \leq s \leq d \leq t \leq f$ en consecuencia $e \leq d \leq f$. En todo caso $e \leq d \leq e$, por lo tanto, $A \cup B$ es acotado. $inf(A) \geq cx$ □

(3) *sea $A \in \mathbb{R}$ no vacío acotado. Dado $c < 0$, sea $cA = \{cx : x \in A\}$. Pruebe que cA es acotado y que $sup(cA) = c\ inf(A)$, $inf(cA) = c\ sup(A)$.*

Demostración. Sea $A \in \mathbb{R}$ no vacío acotado. Dado $c < 0$, sea $cA = \{cx : x \in A\}$. En efecto existe $sup(A)$, $Inf(A)$ tales que para todo $x \in A$, $cx \leq sup(A)$ y $inf(A) \leq x$ entonces para todo $x \in A$, $cx \geq c\ sup(A)$ y $c\ inf(A) \geq cx$ por consiguiente $c\ sup(A)$ es una cota inferior para cA y $c\ inf(A)$ es cota superior para cA así cA es acotado.

i) Tenemos $cA \neq \emptyset$, $cA \subset \mathbb{R}$, cA es acotado, entonces existe $sup(cA)$ tal que $sup(cA) \leq c\ inf(A)$, pues $sup(cA)$ es la menor cota superior para cA, además $cx \leq sup(cA)$ para todo $x \in cA$, con lo que $c^{-1}cx \geq c^{-1}sup(cA)$, por consiguiente $x \geq c^{-1}sup(cA)$ de manera que $c^{-1}sup(cA)$ es cota inferior para A. Luego $inf(A) \geq c^{-1}sup(cA)$ pues $inf(A)$ es la mayor cota inferior para A. Multiplicando la desigualdad por $c < 0$ se tiene que $c\ inf(A) \leq sup(cA)$. Así $c\ inf(A) = sup(cA)$.

ii) Como $cA \neq \emptyset$, $cA \subset \mathbb{R}$ cA es acotado, existe $inf(cA)$ tal que $inf(cA) \geq c\ sup(A)$ pues $inf(cA)$es la mayor cota inferior para A. por otro lado, $inf(cA) \leq cx$ para todo $cx \in cA$ entonces $c^{-1}\ inf(cA) \geq c^{-1}cx$ con lo que $c^{-1}inf(cA) \geq$

x de manera que $c^{-1}inf(cA)$ es cota superior para A, entonces $sup(A) \leq c^{-1}inf(cA)$ por ser $sup(A)$ la menor cota superior para A,luego $c\ sup(A) \geq inf(cA)$, Así $c\ sup(A) = inf(cA)$.

$\square$

(4) *Sean A, B conjuntos de números reales positivos.*
Definamos $A \cdot B = \{x \cdot y;\ x \in A\ y\ x \in B\}$. Pruebe que si A y B fueran limitados entonces $A \cdot B$ es limitado, siendo $sup(A \cdot B) = sup(A) \cdot sup(B)$ y $inf(A \cdot B) = inf(A) \cdot inf(B)$.

Demostración. Sea A, Bconjuntos de números reales positivos no vacíos y acotados, entonces existen extremos superiores para A y B. Sean $a = sup(A)$, $b = sup(b)$, $c = inf(A)$ y $d = inf(B)$. Para todo $x \in A,\ x \in B$, $x \leq a$ y $y \leq b$ entonces $x \cdot y \leq a \cdot b$ con lo que $a \cdot b$ es cota superior para AB, ademas para todo $x \in A,\ x \in B$, $c \leq x$ y $d \leq y$ en consecuencia $c \cdot d \leq x \cdot y$ entonces $c \cdot d$ es cota inferior para $A \cdot B$, así $A \cdot B$ es acotado.

i) Tenemos que $a \cdot b$ es cota superior para $A \cdot B$. Tomando $z < a \cdot b$ entonces $\frac{z}{a} < b$ con lo que existe $y \in B$ tal que $\frac{z}{a} < y$, por consiguiente $\frac{z}{y} < a$ de esta manera existe $y \in B$, y existe $x \in A$ tal que $\frac{z}{y} < x$ de aquí $z < x \cdot y$, así z no es cota superior para $A \cdot B$, por tanto $sup(AB) = a \cdot b = sup(A) \cdot sup(B)$.

ii) Por otro lado, tenemos que $c \cdot d$ es cota superior para $A \cdot B$. tomamos $t < c \cdot d$ entonces $\frac{t}{c} > d$ con lo que existe $y \in B$ tal que $y < \frac{t}{c}$ de esta manera $c < \frac{t}{y}$ de tal formal que existe $x \in A$ y $y \in B$ tal que $x < \frac{t}{y}$ de aquí $x \cdot y < t$, así t no es cota inferior para $A \cdot B$ por tanto $inf(AB) = c \cdot d = inf(A) \cdot inf(B)$.

$\square$

(5) *Sea $X \subset \mathbb{R}$. una función $f : X \to \mathbb{R}$ se llama limitada cuando su imagen $f(X) \subset \mathbb{R}$ es un conjunto limitado. En este caso se define el $sup(f)$ como el supremo del conjunto $f(x)$ (Algunas veces se escribe $\sup_{x \in X} f(x)$ ó $\sup_X f$).*

i) *Pruebe que la suma de dos funciones limitadas $f, g : X \to \mathbb{R}$ es una función limitada $f + g : X \to \mathbb{R}$.*

Demostración. Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ acotados entonces $f(X), g(X)$ son acotados, con lo que para todo $x \in X$, $|f(X)| \leq M_1$ y $|g(X)| \leq M_2$ por consiguiente $|f(X)| + |g(X)| \leq M_1 + M_2$, de aqui $|f(X) + g(X)| \leq |f(X)| + |g(X)| \leq M_1 + M_2$, así $|f(X) + g(X)| \leq M_1 + M_2 \leq M$, de manera que

$|f(X) + g(X)| \leq M$, en conclusión $|(f+g)_{(x)}| \leq M$. Por lo tanto la función suma $f+g$ de dos funciones limitadas es también una función limitada. $\square$

ii) *Muestre que $(f+g)(X) \subset f(X) + g(X)$.*

Demostración. Tenemos $f(X) + g(X) = \{a + b : a \in f(X) \text{ y } b \in g(X)\}$. Sea $w \in (f+g)(X)$ entonces para todo $x \in X$, $w = (f+g)(x)$ con lo que $w = f(x)+g(x)$ por tanto $W \in f(X)+g(X)$, así $(f+g)(X) \subset f(X)+g(X)$. $\square$

iii) *Concluya que $sup(f+g) \leq sup(f) + sup(g)$ y $inf(f+g) \geq inf(f) + inf(g)$.*

Demostración. Sea u a función limitada $f : V \to \mathbb{R}$ con $sup(f) := sup(f(V)) = sup\{f(x) \mid x \in V\}$ y $inf(f) := inf(f(V)) = inf\{f(x) \mid x \in V$.

(i) Tenemos $sup(f+g)$ igual a $sup[(f+g)(X)]$ entonces seria menor o igual al $sup[f(X) + g(X)]$ pero es igual al $sup(f(x)) + sup(g(x))$ e igual así mismo al $sup(f) + sup(g)$. Así $sup(f+g) \leq sup(f) + sup(g)$.

(ii) Tenemos $inf(f+g)$ igual a $inf[(f+g)(X)]$ de igual formal es mayor o igual a $inf[f(X) + g(X)]$ pero esto es igual a $inf[f(x)] + inf[g(x)]$ igual así mismo es igual al $inf(f) + inf(g)$.

$\square$

(6) *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la propiedad de que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo x, y. Si f es continua en cero, pruébese que f es uniformemente continua y además existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$ para todo x. Pruébese también que f es continúa en cero si f está acotada en un entorno del cero.*

Demostración. Veamos que:

i) $f(0) = 0$. tenemos $f(x-y) = f(x) - f(y)$, en efecto $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ entonces $f(0) - f(0) = f(0)$ con lo que $0 = f(0)$ así $f(0) = 0$.

ii) $f(x) = f(x+0)$ de igual forma es igual a $f((x-y)+y)$ e igual a $f(x-y) + f(y)$ entonces $f(x) - f(y) = f(x-y)$

iii) Sea $\varepsilon > 0$ dado. Como f es continua en 0, entonces $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$, por tanto existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 0| < \delta$ entonces $|f(x) - 0| < \varepsilon$. Luego si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $(x-y) \in \mathbb{R}$, Así si $0 < |x-y| < \delta$ por consiguiente $|f(x-y)| < \varepsilon$ luego $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, por lo tanto f es uniformemente continua.

$\square$

(7) *Sean $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas, pruebe que $f+g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua. ¿Qué se puede decir sobre la función $f \cdot g$?.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{D}$ y $\varepsilon > 0$, Luego para $\varepsilon^* = \dfrac{1}{2}\varepsilon > 0$ entonces existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que si $0 < |x - y| < \delta_1$ por consiguiente $|f(x) - f(y)| < \varepsilon^*$, de esta manera si $0 < |x - y| < \delta_2$ entonces $|g(x) - g(y)| < \varepsilon^*$. Tomando $\delta^* = min\{\delta_1, \delta_2\}$ con lo que $\delta^* \leq \delta_1$ y $\delta^* \leq \delta_2$. por lo tanto existe $\delta^* > 0$. Si $0 < |x - y| < \delta^*$ entonces $|x - y| < \delta^* \leq \delta_1, \delta_2$ de aquí $|x - y| < \delta_1$ y $|x - y| < \delta_2$, por consiguiente $|f(x) - f(y)| < \varepsilon^*$ y $|g(x) - g(y)| < \varepsilon^*$, luego $|(f + g)(x) - (f + g)(y)|$ es igual a $|f(x) + g(x) - f(y) - g(y)|$ de esta misma manera es menor o igual a $|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$ y esto menor a $\varepsilon^* + \varepsilon^* = 2\varepsilon^* = 2\dfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$ □

(8) *Si* $f : [1, 0] \to [0, 1]$ *es u a función continua, entonces existe* $x \in [1, 0]$ *talque* $f(x) = x$.

Demostración. Sea $g : \begin{cases} [1, 0] \to & [0, 1] \\ \quad x \to & g(x) = f(x) - x \end{cases}$
la cual es continua ya que g es la suma de dos funciones continuas $(f + (-I))$. Como $f : [1, 0] \to [0, 1]$, para todo $x \in [1, 0]$, $0 \leq f(x) \leq 1$.

i) Tomemos $0 \leq f(x)$ entonces $0 \leq f(x) - 0$ con lo que $0 \leq f(0) - 0 = g(0)$, Así $0 \leq g(0)$.
ii) Tomemos $f(x) \leq 1$ entonces $f(x) - 1 \leq 0$ de aquí $f(1) - 1 \leq 0$ por consiguiente $g(1) \leq 0$.

Así $g(1) \leq 0 \leq g(0)$ entonces existe $x \in [0, 1]$ talque $g(x) = 0$ con lo que $f(x) - x = 0$ y en conclusión $f(x) = x$. □

Capítulo 3

DERIVADAS

Este capitulo esta dedicado al estudio de las derivadas de las funciones reales de variable real. Esperamos, principalmente, que el lector este familiarizado con el significado geométrico de la derivada como coeficiente angular de la tangente la gráfico de una función (o pendiente de la recta tangente a la curva de una función).

Aunque esas imágenes intuitivas no desempeñan un papel alguno en el desenvolvimiento lógico del texto, consideramos indispensable la actitud mental de pensar en el gráfico de cada función mencionada en el presente capitulo, de lo contrario seria difícil entender el significado de las proposiciones y los ejemplos, e incluso el propio concepto de derivada se tornaría artificial y injustificado, también estudiaremos algunas consecuencias importantes del Teorema Del Valor Medio.

1. Definición y propiedades de la derivada en un punto

Definición 3.1. **(Derivada)** Sean $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in X \cap X'$ (esto es, a es un punto de acumulación de X que pertenece a X). Se dice que f es *derivable* en el punto a cuando exista el limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Si existe lo notaremos $f'(a)$. En este caso, el limite $f'(a)$ se llama la *derivada* de f en el punto a.

La función $g : x \longrightarrow \dfrac{[f(x) - f(a)]}{x - a}$ es definida en el conjunto $X - \{a\}$. Geometricamente, $g(x)$ representa la inclinación (o pendiente) de la recta secante al gráfico de f que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$. L recta que pasa por el punto $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^2$ y tiene inclinación igual a $f'(a)$ y es llamada *tangente* al gŕafico de f en el punto $(a, f(a))$. La inclinación de la tangente es, por lo tanto el limite de las inclinaciones de las rectas secantes que pasan por los puntos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$ cuando $x \to a$. Escribiremos $h = x - a$ y así

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Ahora, la función $h \longrightarrow \dfrac{[f(a+h)-f(a)]}{h}$ es definida en el conjunto $Y = \{h \in \mathbb{R} - \{0\}; a+h \in X\}$, el cual tiene al 0 como punto de acumulación.

Cuando $a \in X \cap X'_+$ (esto es, cuando a es un punto de acumulación a la derecha de X, y a le pertenece), podemos definir la derivada a la derecha de una función f en el punto a, como el limite: (si existe)

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Análogamente se define la derivada a la *izquierda* de f como $f'_-(a)$ cuando a es un punto de acumulación a la izquierda que pertenece al dominio de f.

Evidentemente, cuando $a \in X$ y es punto de acumulación a la izquierda y a la derecha (es decir, cuando $a \in int(X)$) entonces $f'(a)$ existe si, y sólo si, existen y son iguales las derivadas laterales $f'_+(a)$ y $f'_-(a)$.

Por ejemplo, cuando se dice que una función $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida en un intervalo compacto, es derivable en un punto $a \in [c,d]$ esto significa que $a \in (c,d)$, y f posee las dos derivadas laterales en el punto a y ellas son iguales, en caso de que a sea alguno de los dos extremos, quiere decir que solo existe en este punto una derivada lateral que tiene sentido.

Observación 3.2. Se siguen de las propiedad generales de limite que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en el punto a si, y sólo si, dada cualquier sucesión de puntos $x_n \in X - \{a\}$ con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} = f'(a)$$

En efecto, Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, $x_n \in X-\{a\}$ y $\epsilon > 0$ dado. Como $f : X \to \mathbb{R}$ es derivable en a, entonces existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x-a| < \delta$ implica que $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - L\right| < \epsilon$. Ahora como $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ para cada $\delta > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$, $n > k$, $|x_n - a| < \delta$, entonces $\left|\dfrac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} - L\right| < \epsilon$.

Mas generalmente, si dada cualquier función $g : Y \longrightarrow X \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{y\to b} g(y) = a$, con $b \in Y'$. Si $y \neq b$ entonces $g(y) \neq a$, lo cual implica que

$$\lim_{y\to b} \frac{f(g(y))-f(a)}{g(y)-a} = f'(a)$$

EJEMPLOS 1.1. (1) *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *constante, esto es, existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = c$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*, entonces* $f'(a) = 0$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$ *(La derivada de una contante es nula.)*

En efecto, Sea $a \in \mathbb{R}$*,* $a \in \mathbb{R} \cap \mathbb{R}$*, entonces,*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{a - a}{x - a} = \lim_{x \to a} 0 = 0.$$

(2) *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = cx + b$*, entonces, para todo* $a \in \mathbb{R}$*,*

$$f(x) - f(a) = (cx + d) - (ca + d) = c(x - a)$$

de modo que el cociente $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = c$ *la cual es una constante y así* $f'(a) = \lim_{x \to a} c = c$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$*.*

(3) *Sea* $f(x) = x^2$*, entonces* $f(a + h) = (a + h)^2$ *y* $f(a) = a^2$*, entonces,*

$$f(a + h) - f(a) = (a + h)^2 - a^2 = (a + h + a)(a + h - a) = h(2a + h)$$

luego $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2a + h)}{h} = \lim_{h \to 0}(2a + h) = 2a + 0 = 2a.$

(4) *Usando la formula del binomio de Newton, se muestra, que si* $p(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ *es un polinomio, entonces* $p'(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \cdot a_i x^{i-1} = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*. En efecto,*

$$\frac{p(x + h) - p(x)}{h} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i (x + h)^i - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{h} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i [(x + h)^i - x^i]}{h} =$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \left[x^i + i x^{i-1} h + \frac{i(i-1)x^{i-2}h^2}{2!} + \cdots + h^i - x^i\right]}{h} = \sum_{i=0}^{n} a_i \left[i x^{i-1} + \frac{i(i-1)}{2!} x^{i-2} h + \cdots\right.$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i (i x^{i-1}) = 0 + \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}.$$

(5) *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = |x|$*, entonces para* $x \neq 0$*,* $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x} = \pm 1$ *(+1 si* $x > 0$ *y* -1 *si* $x < 0$*), luego* $f'_+(0) = \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0}(1) = 1$ *y* $f'_-(0) = \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0}(-1) = -1$ *pero no existe* $f'(0)$*, pues*

$f'_+(0) = 1 \neq f'_-(0) = -1$. *Para* $a \neq 0$, *existe* $f'(a)$, *que vale* 1 *si* $a > 0$ *y* -1 *si* $a < 0$.

(6) *Sea* $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \sqrt{x}$. *Para todo* $a \in (0, +\infty)$ *y* $h \neq 0$, *se tiene que* $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \dfrac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \dfrac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$ *por lo tanto, se* $a > 0$ *existe* $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$, *por otro lado, si* $a = 0$, *tenemos*

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Luego no existe el limite cuando $h \longrightarrow 0$, *o sea, la función* $f(x) = \sqrt{x}$ *no posee derivada en el punto* 0.

(7) *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \inf\{|x - n|; n \in \mathbb{Z}\}$, *es decir,* $f(x)$ *es la distancia de* x *al entero más próximo, entonces si* $x \in \left[n, n + \dfrac{1}{2}\right]$, $f(x) = |x - n| = x - n$ *(pues,* $n \leq x \leq n + \frac{1}{n} \to x - n \geq 0$*). Por otro lado, si* $x \in \left[n + \dfrac{1}{2}, n + 1\right]$, $f(x) = (n+1) - x$. *La gráfica de* f *es una sierra cuyos dientes tiene puntas en los puntos* $\left(n + \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, *existe la derivada de* f *en cada punto del intervalo* $\left(n, n + \dfrac{1}{2}\right)$ *y es igual a* 1. *Para cada* $a \in \left(n + \dfrac{1}{2}, n + 1\right)$ *también existe la derivada* $f'(a) = -1$. *Los puntos* n *y* $n + 1$, *con* $n \in \mathbb{Z}$, *existen apenas las derivadas laterales pero son diferentes.*

OBSERVACIÓN 3.3. Siendo definida como un limite, la derivada tiene carácter *local.* Así, si la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ posee derivada en un punto $a \in X \cap X'$, entonces dado $Y \subset X$ tal que $a \in Y \cap Y'$, la función $g = f|Y$ también tiene derivada en el punto a, siendo $g'(a) = f'(a)$. Si $Y = I \cap X$ donde I es un intervalo abierto que contiene al punto a, entonces se cumple la reciproca: la existencia de $g'(a)$ implica la existencia de $f'(a)$.

DEFINICIÓN 3.4. **(Derivable en un conjunto)** Se dice que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es *derivable en el conjunto* X cuando exista la derivada de f en todos los puntos $a \in X \cap X'$.

Interpretaremos ahora la existencia de la derivada $f'(a)$ como significado que, las proximidades de a, la función f se exprime como un polinomio de grado ≤ 1 más un resto que es "muy pequeño" en sentido bien preciso.

Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ posee derivada en el punto $a \in X \cap X'$, escribiremos $r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h$, entonces para todo $h \neq 0$, tal que $a + h \in X$ tendremos

i) $f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r(h)$, con $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$.

Por causa de la relación $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$ se dice que el "resto" $r(h)$ tiende para cero mas rápidamente que h, se dice también que $r(h)$ es un infinitésimo (= función cuyo limite es cero) de orden superior a 1, relativamente a h. Recíprocamente dada f, supongamos que exista una constante L tal que se pueda escribir

ii) $f(a+h) = f(a) + L \cdot h + r(h)$, con $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$.

(La primera igualdad siempre puede ser escrita: ella es apenas la definición de $r(h)$. Es crucial saber si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$.) Note se, el caso si se tiene

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L + \frac{r(h)}{h}$$

y por tanto, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$, esto es, existe la derivada $f'(a)$ y es igual a L.

La condición *ii)* es por tanto necesaria y suficiente para la existencia de la derivada $f'(a)$. La constante L, si existe con aquella propiedad es única y es igual a $f'(a)$. Las condiciones *i)* y *ii)* son equivalentes y se pueden escribir de la siguiente manera.

iii) $f(a+h) = f(a) + [f'(a) + \rho(h)]h$, con $\lim\limits_{h \to 0} \rho(h) = 0$.

La función ρ será definida para todo h tal que $a + h \in X$ (inclusive para $h = 0$). Para $h \neq 0$, tendremos

$$\rho(h) = \frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a).$$

Para $h = 0$, pondremos $\rho(h) = 0$, así la continuidad de la función ρ en el punto 0 equivale a la existencia de la derivada $f'(a)$.

Consideraciones análogas se pueden hacer para las derivadas laterales, basta con suponer $h > 0$ para la derivada de la derecha y $h < 0$ para la derivada de la izquierda.

EJEMPLOS 1.2.

(1) *Tenemos* $(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$, *donde* $f(x) = x^2$, $f'(a) = 2a$ *y* $r(h) = h^2$. *Dando un pequeño crecimiento a* h *al punto* a, *el crecimiento sufrido por ser cuadrado, es*

decir $(a+h)^2 - a^2$ *es esencialmente igual a* $2a \cdot h$ $(= f'(a) \cdot h)$ *ya que el resto* h^2 *es despreciable en relación a* h *(si* h *es muy pequeño).*

(2) *Se sabe del Cálculo que la función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *dada por* $f(x) = \sin(x)$, *posee en todo punto* $a \in \mathbb{R}$, *la derivada* $f'(a) = \cos(a)$, *entonces podemos escribir* $\sin(a + h) = \sin(a) + h \cdot \cos(a) + r(h)$, *donde* $\lim \dfrac{r(h)}{h} = 0$, *por tanto, para valores muy pequeños de* h, *tenemos aproximadamente* $\sin(a+h) \sim \sin(a) + h. \cos(a)$, *con error igual a una fracción pequeña de* h. *(el número* $\rho(h)$ *proporciona la razón entre el error* $r(h)$ *y el crecimiento* h.*) Comparemos con la formula de Trigonométrica:* $\sin(a+h) = \sin(a)\cdot\cos(h) + \cos(a)\cdot\sin(h)$, *obtenemos que* $r(h) = \sin(a)\cdot(\cos(h)-1) + \cos(a)\cdot(\sin(h) - h)$, *esto confirma que* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$. *En efecto,* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(h) - 1}{h} = 0$ *y* $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{\sin(h)}{h} - 1\right) = 0$ *como resulta del cálculo las derivadas de* $\cos(x)$ *y* $\sin(x)$ *en el punto* 0.

La expresión $f'(a) \cdot h$, que proporciona una buena aproximación para el crecimiento $f(a+h) - f(a)$ cuando h es pequeño, es llamada la *diferencial* de f en el punto a. Observe que la diferencial es una funcón de h (y del punto a), la cual se escribe aveces $df(a) = f'(a)\cdot h$.

Se establece ahora las propiedades más básicas para la derivada en un punto. En primer lugar, se mostrara que no puede existir la derivada en un punto donde la función es discontinua.

TEOREMA 1.1. *Si existe la derivada* $f'(a)$, *entonces* f *es continua en el punto* a.

DEMOSTRACIÓN. Como existe $f'(a)$, es decir que existe el $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ y además existe $\lim\limits_{x\to a}(x - a) = 0$ entonces existe también el limite $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - f(a)] = \lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)\right] = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim\limits_{x\to a}(x-a) = 0$, por consiguiente, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ y así f es continua en el punto a. $\square$

OBSERVACIÓN 3.5.

(1) Si existe apenas una derivada lateral, f puede ser discontinua en el punto a, por ejemplo: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = 1$ si $x \geq 0$ y $f(x) = -1$ si $x < 0$. Note se el caso, $f'_+(0) = 0$, (pues $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1 - 1}{x} = 0$) pero $f'_-(0)$ no existe (*pues* $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1 - 1}{x} = -2 \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ *no existe*). El mismo argumento arriba muestra que $f'_+(0)$ existe entonces f es *continua a la derecha* del punto

a, esto es, $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, del mismo modo, la existencia de la derivada a la izquierda $f'_-(0)$ implica que f es *continua a la izquierda* en este punto, o sea que $f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x)$.

En particular, para que f sea continua en el punto a, basta que existan las dos derivadas laterales, incluso siendo deferentes. El ejemplo que acabamos de dar, la función f es continua a la derecha y discontinua a la izquierda en el punto 0, por lo tanto la derivada $f'_-(0)$ no existe.

(2) Los ejemplos 2.1 el 4, 5 y 6 muestran que una función puede ser continua en toda la recta y no ser derivable en algunos puntos. Es posible construir una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua que no posee derivada en cualquier punto de la recta. Vea el libro **Espacios Métricos** del autor *elon lages lima*, el ejemplo 33 Capitulo 7, donde se muestra que la mayoría de las funciones continua no poseen derivada en ningún punto.

TEOREMA 1.2. *Sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables en el punto $a \in X \cap X'$, entonces $f \pm g$, $f \cdot g$ y $\dfrac{f}{g}$ (con $g(a) \neq 0$) son derivables en el punto a. Esto es,*

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$$

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$$

COROLARIO 3.1. Sea $c \in \mathbb{R}$, entonces $(c \cdot f)' = c \cdot f'$. Si $f(a) \neq 0$, entonces $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(a) = \dfrac{-f'(a)}{(f(a))^2}$. En efecto, $(cf)' = c'f + cf' = 0f + cf' = cf'$.

TEOREMA 1.3. (*Regla de la cadena*). *Sean $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \subset Y$, $a \in X \cap X'$, $b = f(a) \in Y \cap Y'$. Si existen $f'(a)$ y $g'(b)$, entonces $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en el punto a, siendo $(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a) = g'\left(f(a)\right) \cdot f'(a)$.*

Demostración. Como f es derivable en a $f'(a)$ y g es derivable en $b = f(a)$ $(g'(b))$, entonces se tiene que:

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + [f'(a) + \rho(h)] \cdot h & \text{donde } \lim\limits_{h \to 0} \rho(h) = 0, \\ g(b+k) = g(b) + [g'(b) + \sigma(k)] \cdot k & \text{donde } \lim\limits_{k \to 0} \sigma(k) = 0. \end{cases}$$

Sea $k = f(a+h) - f(a) = [f'(a) + \rho(h)] \cdot h$, por consiguiente $f(a+h) = f(a) + k = b + k$. Luego: $(g \circ f)(a+h) = \ g\,[f(a+h)] = g(b+k) = g(b) + [g'(b) + \sigma(k)] \cdot k = \ g(b) + [g'(b) + \sigma(k)] \cdot [f'(a) + \rho(h)] \cdot h = \ g(b) + [g'(b) \cdot f'(a) + \theta(h)] \cdot h$.

Con $\theta(h) = \sigma\,(f(a+h) - f(a)) \cdot [f'(a) + \rho(h)] + g'(b) \cdot \rho(h)$, como f es continua en el punto a y σ es continua en el punto 0, entonces $\lim\limits_{h \to 0} \sigma\,(f(a+h) - f(a)) = 0$ y $\lim\limits_{h \to 0} g'(b)\rho(h) = 0$, por lo cual $\lim\limits_{h \to 0} \theta(h) = 0$, así $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(g \circ f)_{a+h} - g(f(a))}{h} = g'(b)f'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$, por lo tanto $(g \circ f)'_a = g'(f(a)) \cdot f'(a)$. □

Corolario 3.2. (Derivada de una función inversa.) Sea $f : X \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}$ una función que posee inversa $g = f^{-1} : Y \longrightarrow X \subset \mathbb{R}$. Si f es derivable en el punto $a \in X \cap X'$ y g es continua en el punto $b = f(a)$, entonces g es derivable en el punto b si, y sólo si, $f'(a) \neq 0$. En caso afirmativo $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} \Longleftrightarrow g'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Observación 3.6. La continuidad de g en el punto b será consecuencia de la continuidad de f en el punto a cuando f es continua en todos los puntos de X y, además X es un intervalo o X es compacto.

Veamos la demostración del Corolario 3.2. Como g es continua en el punto b, entonces $\lim\limits_{y \to b} g(y) = g(b) = a$, Además, $y \in Y \backslash \{b\}$, lo cual implica que $g(y) \neq a$, así

$$\lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{g(y) - a}{f\,(g(y)) - f(a)} = \lim_{y \to b} \left[\frac{f\,(g(y)) - f(a)}{g(y) - a} \right]^{-1} = \frac{1}{f'(a)}$$

Luego $g'(b)$ existe y es igual a $\dfrac{1}{f'(a)}$ cuando $f'(a) \neq 0$. Recíprocamente, si existe $g'(b)$, entonces como $g \circ f = id_x$, la regla de la cadena nos da $g'(b) \cdot f'(a) = 1$ y por lo tanto $f'(a) \neq 0$ con $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Ejemplo 3.7. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$, es una biyeción continua con inversa continua $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(y) = \sqrt[3]{y}$, y $f'(a) = 3a^2$, luego $f'(a) \neq 0$ para $a \neq 0$ pero $f'(0) = 0$, además g no posee derivada en el punto $0 = f(0)$. Para $a \neq 0$ y $b = a^3$ el

Corolario 3.2 nos da que $g'(b) = \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{b^2}}$ la cual es una formula que no esta definida para $b = 0$.

La derivada es el instrumento por excelencia para estudiar el crecimiento de una función en una vecindad de un punto. El Teorema siguiente y su Corolario nos dan una indicación de como es esto. Resultados "globales" que hablan de la existencia de la derivada en todos los puntos de un intervalo serán establecidos en el parágrafo siguiente.

Definición 3.8. (**Máximo local - estricto**) Se dice que una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ posee un *máximo local* en el punto $a \in X$ cuando existe $\delta > 0$ tal que $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta)$, implica que $f(x) \leq f(a)$. Cuando se cumple la implicación $x \in (X \setminus \{a\}) \cap (a-\delta, a+\delta)$, implica $f(x) < f(a)$ decimos que f posee un *máximo local estricto* en el punto a.

Definición 3.9. (**Mínimo local - estricto**) Se dice que una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ posee un *mínimo local* en el punto $a \in X$ cuando existe $\delta > 0$ tal que $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta)$, entonces $f(x) \geq f(a)$. Cuando se cumple la implicación $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta)$, entonces $f(x) > f(a)$ decimos que f posee un *mínimo local estricto* en el punto a.

Ejemplo 3.10. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$ posee un mínimo local estricto en el punto 0. La función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \sin(x)$ posee máximos locales estrictos en los puntos $(4k+1)\dfrac{\pi}{2}$ y mínimo local (no estrictos) en cada punto de su dominio. La función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = 1$ si $x \geq 0$ y $h(x) = -1$ si $x < 0$ tiene un máximo local (no estricto) en el punto 0, el cual no es un mínimo local. La función $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = x^2\left(1 + \sin(\dfrac{1}{x})\right)$ si $x \neq 0$, $\varphi(0) = 0$ es continua y posee un mínimo local en el punto 0. Si se tiene $\varphi(x) \geq 0$ para todo x, $\varphi(0) = 0$ y en cualquier vecindad de 0 hay puntos x tales que $\varphi(x) = 0$.

Observación 3.11. Si una función no decreciente $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ posee derivada en el punto a, debe ser $f'(a) \geq 0$.
En efecto, Sea $\epsilon > 0$ dado, como f es derivable en a, entonces existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$, con $x \neq a$, así existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta)$, entonces $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| < \epsilon$, luego $f'(a) - \epsilon < \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < f'(a) + \epsilon$ y ahora como $x \neq a$, se pueden presentar dos casos: *i)* $x > a$ entonces $x - a > 0$ y $f(x) \geq f(a)$ $(f(x) - f(a) > 0)$, luego $0 \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < f'(a) + \epsilon$, entonces $0 < f'(a) + \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$, así $f'(a) \geq 0$. *ii)* Si $x < a$, entonces $x - a < 0$ y $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) - f(a) \leq 0)$, entonces $0 \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < f'(a) + \epsilon$, es decir que $0 < f'(a) + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, por tanto $f'(a) \geq 0$.

TEOREMA 1.4. *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable a la izquierda en el punto $a \in X \cap X'_+$. Si $f'_+(a) > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a < x < a + \delta$, lo cual implica que $f(a) < f(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\epsilon > 0$ dado, tomemos $\epsilon^* = f'_+(a) > 0$, como $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_+(a)$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$, $x \in (a, a+\delta)$, entonces $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'_+(a)\right| < \epsilon^* = f'_+(a)$, luego $-f'_+(a) + f'_+(a) < \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 2f'_+(a)$ y $x - a > 0$, entonces $f(x) - f(a) > 0$ y así $f(x) > f(a)$. □

OBSERVACIÓN 3.12. Si trocamos los sentidos $>$ y $<$, $+$ y $-$ se obtienen tres teoremas análogos a este, con demostraciones semejantes. El primero dice que si $f'_-(a) > 0$, entonces $f(x) < f(a)$ para todo $x < a$ y suficientemente próximo de a. El segundo afirma que si $f'_+(a) < 0$ entonces para cualquier $x > a$ suficientemente próximo de a se tiene que $f(x) < f(a)$. Finalmente, si $f'(a^-) < 0$, entonces $f(x) > f(a)$ para todo $x < a$ suficientemente próximo de a. (En todos los casos, estamos suponiendo $x \in X$.) Evidentemente, si existe la derivada $f'(a)$, entonces $f'(a) > 0$ implica una función bilateral como la del Corolário siguiente:

COROLARIO 3.3. Sea $a \in X$ un punto de acumulación a la derecha y a la izquierda. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ posee el punto a, una derivada $f'(a) > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$ y $a - \delta < x < a < y < a + \delta$ implican que $f(x) < f(a) < f(y)$.

DEMOSTRACIÓN. Como $f'(a) > 0$, entonces $f'_+(a) > 0$ y $f'_-(a) > 0$, luego existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que: $x \in (a - \delta_1, a)$ implica $f(x) < f(a)$, $y \in (a, a + \delta_2)$ implica $f(a) < f(y)$. Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces $(a - \delta_1, a) \supseteq (a - \delta, a)$ y $(a, a + \delta_1) \supseteq (a, a + \delta)$. Luego, para $x, y \in X$, $x \in (a - \delta, a)$ y $y \in (a, a + \delta)$, se tiene que $x \in (a - \delta_1, a)$ y $y \in (a, a + \delta_2)$, entonces $f(x) < f(a)$ y $f(a) < f(y)$. Así dados $x, y \in X$, $a < \delta < x < a < y < a + \delta$ implica que $f(x) < f(a) < f(y)$. □

COROLARIO 3.4. Sean $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en el punto a y posee un máximo o un mínimo local en ese punto, entonces $f'(a) = 0$

DEMOSTRACIÓN. Si fuese $f'(a) > 0$ el Corolário 3.3. excluiría la existencia de un máximo o un mínimo local en el punto a. Un análogo del mismo Corolário también diría que no puede ser $f'(a) < 0$, por lo tanto debe ser $f'(a) = 0$. □

2. Funciones derivables en un intervalo

Si quisiésemos proseguir considerando funciones definidas en subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ tendríamos que tomar en los próximos teoremas, un conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$ tal que todo punto $x \in X$ con excepción de $a = \inf X$ y $b = \sup X$ si fuesen puntos de acumulación de x a la izquierda y a la derecha, y además $X \neq \{a, b\}$. Sin embargo, un conjunto de este tipo coincide con el intervalo $[a, b]$. (De hecho, el intervalo abierto $\mathbb{R}\backslash X$ es reunión de intervalos abiertos disjuntos dos a dos). los cuales son $(-\infty, a)$ y $(b, +\infty)$. Si (c, d) fuese otro intervalo que compone a $\mathbb{R}\backslash X$, tendríamos $c \in X$ poro c no seria punto de acumulación de X a la derecha. También $d \in X$, pero d no seria punto de acumulación a la izquierda de X, entonces $(c, d) = (a, b)$, el cual es absurdo pues $X \cap (c, d) = \phi$, en cuanto $X \cap (a, b) \neq \phi$.)

Cuando la función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ posee derivada en todos los puntos del intervalo I, considerese la *función derivada* $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$, que asocia a cada $x \in I$ la derivada $f'(x)$. Cuando f' es continua, se dice que f es una función *continuamente derivable* en el intervalo I, o una función *de clase* C^1.

Ejemplo 3.13. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \sin(\dfrac{1}{x})$ cuando $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, su derivada $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es dada por $f'(x) = 2x \sin(\dfrac{1}{x}) - \cos(\dfrac{1}{x})$ si $x \neq 0$, $f'(0) = 0$. Véase que f' es discontinua en el punto 0, luego f no es de clase C^1 en toda la recta.

Cuando una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 en el intervalo I, dados $a < b$ en I, si $f'(a) < d < f'(b)$ entonces existe $c \in I$ con $a < c < b$ tal que $f'(c) = d$. Esto se deduce del Teorema del Valor Intermedio 2.1 aplicado a la derivada f'.

La derivada f' no tiene que ser continua. El teorema abajo, debido a Darboux, nos dice que si f es derivable en $[a, b]$, su derivada f', incluso siendo discontinua, cumple la condición del valor intermedio.

Teorema 2.1. (*Valor intermedio para la derivada*) *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en todos los puntos $x \in [a, b]$. Si $f'(a) < d < f'(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = d$.*

Demostración. Consideremos primero el caso en que $d = 0$, esto es, $f'(a) < 0 < f'(b)$, entonces por el Teorema 1.4. (Obs. 3.12) se tiene que $f(a) > f(x)$, para un x próximo de a, y $f(x) < f(b)$ para un x próximo de b $(a < x < b)$. Por consiguiente, el mínimo de f en $[a, b]$ (que existe en virtud del Teorema de Weiertrass 2.10, pues f es continua en el intervalo compacto $[a, b]$) es alcanzado en un punto $c \in (a, b)$ (Considere los casos $f(a) < f(b)$ *o* $f(b) < f(a)$ *o* $f(a) = f(b)$) y por el Corolário 3.4, tenemos que $f'(c) = 0$. Por otro lado, supongamos que $d \neq 0$, consideremos una función $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - d \cdot x$. Es claro que g es continua en $[a, b]$, entonces g alcanza un máximo y un mínimo en $[a, b]$, además $g'(x) = f'(x) - d$, luego $g'(a) = f'(a) - d < 0 < f'(b) - d = g'(b)$, es decir que $g'(a) < 0 < g'(b)$, por consiguiente g alcanza un máximo en a y b, por lo tanto g alcanza un mínimo en el punto $c \in (a, b)$ y así $g'(c) = 0$, esto es, $g'(c) = f'(c) - d = 0$, entonces $f'(c) = d$. □

Corolario 3.5. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en un intervalo I, entonces f' no puede tener discontinuidad de primera especia en I.

Sea $c \in I$ un punto el cual tanga limite a la derecha (esto es, c no es la extremidad superior de I). si existe $L = \lim_{x \to c^+} f'(x)$, mostraremos que necesariamente será $L = f'(c)$. En efecto, si fuese por ejemplo $L > f'(c)$, tomaríamos d satisfaciendo $f'(c) < d < L$, existiera $\delta > 0$ tal que

$$c < x < c + \delta \longrightarrow d < f'(x) \tag{3.1}$$

En particular, $f'(c) < d < f'\left(c + \dfrac{\delta}{2}\right)$ pero es una contradicción por el Teorema 2.1, se sigue de (3.1) que no existe $x \in \left(c, c + \dfrac{\delta}{2}\right)$ con $f'(x) = d$. De manera análoga se muestra que la existencia de $\lim_{x \to c^-} f'(x) = M$ obliga a que $M = f'(c)$, luego, solamente existen ambos limites laterales de la derivada cuando esta es continua.

Ejemplo 3.14. Por lo que acabamos de ver, las discontinuidades de una función derivada en un intervalo son bien complicadas. (Vea el Ejemplo 3.13.) No se debe confundir el ejemplo de la función $f(x) = |x|$ con el contra ejemplo al corolário arriba. En este caso tenemos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y su derivada $f' : \mathbb{R} \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ es dada por $f'(x) = -1$ si $x < 0$, $f'(x) = 1$ si $x > 0$. El punto 0 no es una discontinuidad de primera especie para f', lo que ocurre es que $f'(0)$ simplemente no existe. El corolário 3.5 nos dice que, cualquiera que sea la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g|\left(\mathbb{R} \backslash \{0\}\right) = f'$, g no es derivada de alguna función derivable en toda la recta. Análogamente, la función $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $\varphi(x) = 1$ si $x \notin \mathbb{Q}$, no es derivada de una función $\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. En efecto, aunque las discontinuidades de φ sean todas de segunda especie, ella transgrede violentamente la ley del Valor Intermedio.

Teorema 2.2. (*M. Rolle, 1691*) *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua, tal que* $f(a) = f(b)$*. si* f *es derivable en* (a, b)*, entonces existe un punto* $c \in (a, b)$ *donde* $f'(c) = 0$*.*

Demostración. Consideremos primero el caso en que f sea constante en $[a, b]$, entonces $f'(c) = 0$ para todo $c \in (a, b)$. Por otro lado, si f no es constante y como f es continua en el conjunto compacto $[a, b]$, entonces por el Teorema de Weirestrass 2.10, f alcanza un mínimo m y un máximo M en un punto interior $c \in (a, b)$, (pues si ambos fuesen alcanzados en las extremos, tendríamos $m = M$ y f seria constante) y en virtud del Corolario 3.4 se concluye que $f'(c) = 0$. □

EJEMPLOS 2.1.

(1) *Sea* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x$ *si* $x \in [0,1)$ *y* $f(1) = 0$, *entonces* $f(0) = f(1)$ *y* f *es derivable en* $(0,1)$ *pero* $f'(x) = 1$ *para cualquier* $0 < x < 1$. *Esto se da por que* f *no es continua en* $[0,1]$.

(2) *Sea ahora* $g : [-1,+1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$. *Tenemos* g *es continua en* $[-1,+1]$, $g(-1) = g(1)$, *pero no existe* $c \in (-1,+1)$ *tal que* $g'(c) = 0$, *el motivo es que* g *no tiene derivada en el punto* 0.

(3) *Sea* $f : [-1,+1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, *la cual es continua en* $[-1,+1]$ *y derivable en* $(-1,+1)$, *luego podemos aplicar el Teorema de Rolle 2.2. en el punto* $x = 0$, *en donde* $f'(0) = 0$. *Una observación análoga se cuple para la función* $g : [-1,+1] \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por* $g(x) = (1-x^2)\sin\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)$ *si* $|x| \neq 1$, $g(\pm 1) = 0$. *Ahora, si consideramos* $h : [-1,+1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \sin\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)$ *si* $|x| \neq 1$ *y* $h(-1) = h(+1) = 0$, *veamos que el Teorema de Rolle 2.2, conforme el enunciado de arriba, no se aplica, pues* h *es discontinua en los puntos* -1 *y* $+1$. *Entretanto existen infinitos puntos en* $(-1,+1)$ *los cuales la derivada de* h *se anula.*

TEOREMA 2.3. (*Teorema del valor medio, J.L. de Lagrange, 1797.*) *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua. Si* f *es derivable en* (a,b), *entonces existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Un enunciado equivalente seria: Sea $f : [a, a+h] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua y derivable en* $(a, a+h)$, *entonces existe* t, $0 < t < 1$ *tal que* $f(a+h) = f(a) + f'(a+th) \cdot h$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ con $x \in [a,b]$. Es claro que φ es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), por definición de f. Además $\varphi(a) = f(a) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0$ y $\varphi(b) = f(b) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = 0$, luego en virtud del Teorema de Rolle 2.2, existe $c \in (a,b)$ tal que $\varphi'(c) = 0$ y como $\varphi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, entonces $\varphi'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, por lo tanto $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. □

OBSERVACIÓN 3.15. Geométricamente, $f'(c) = \dfrac{[f(b)-f(a)]}{b-a}$ significa que la tangente a la gráfica de f en el punto c es paralela a la secante que constituye la gŕafica de g

Corolario 3.6. Si una función continua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ posee derivada nula en todos los puntos $x \in (a, b)$, entonces f es constante.

Demostración. Para todo $x \in (a, b]$, tenemos $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$ donde $c \in (a, x)$. Como $f'(c) = 0$ tenemos $f(x) - f(a) = 0$, esto es, $f(x) = f(a)$ para todo $x \in (a, b]$ y por tanto f es constante. $\square$

Proposición 3.16. *Sea f continua en $I = [a, b]$ y derivable en (a, b), $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces f es continua en I.*

Demostración. Sea $x \in [a, b]$ tomemos $x > a$ entonces $[a, x] = I_x \subset [a, b] = I$ donde f es continua en $I_x = [a, x]$ y derivable en $(a, x) \subset (a, b)$, luego existe $c \in (a, x) \subset (a, b)$ tal que $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$ se tiene $f(x) - f(a) = 0 \cdot (x - a) = 0$ por eso $f(x) - f(a) = 0$ así $f(x) = f(a)$, por lo tanto f es constante en I. $\square$

Corolario 3.7. Si $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas, derivables en (a, b), y $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + c$ para todo $x \in [a, b]$.

Demostración. Como f y g son continuas en $[a, b]$, entonces $(f - g)$ es continua en $[a, b]$. Sea $f - g = h$ es continua es $[a, b]$, además $h' = (f - g)' = f' - g' = f' - f' = 0$ así $h'(x) = 0$, para todo $x \in (a, b)$ por la preposición 3.16 existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = c$ para todo $x \in (a, b)$, luego existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + c$. $\square$

Observación 3.17. La función $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, no es constante, aunque cumpla $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. El motivo es que el dominio de f no es un intervalo.

Corolario 3.8. Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en el intervalo abierto I. Si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in I$, entonces cualesquiera que sean $x, y \in I$ se cumple que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Demostración. Dados $x, y \in I$, f es continua en el intervalo cerrado cuyos extremos son x e y y es derivable en el intervalo abierto correspondiente, luego, $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$ donde z es un punto entre x y y. Como $|f'(z)| \leq k$, vemos $|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x - y| \leq k \cdot |x - y|$.

Así, una función que posee derivada limitada en un intervalo abierto es lipschitziana, y por tanto uniformemente continua es ese intervalo. En particular, si $I = (a, b)$, existen $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$. (Corolário 2.11.)

Por ejemplo, la función $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ no tiene limite a la derecha en el punto 0, tiene derivada ilimitada en cualquier intervalo del tipo $(0,\delta)$. Sabemos que para $x\neq 0$, $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. □

OBSERVACIÓN 3.18. Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), se sigue por pasar al limite que la desigualdad $|f(x)-f(y)|\leq k|x-y|$ aún es valida para $x,y\in[a,b]$ desde que $|f'(x)|\leq k$ para todo $x\in(a,b)$.

COROLARIO 3.9. Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si existe $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=L$, entonces existe $f'_+(a)$ y vale $f'_+(a)=L$.

DEMOSTRACIÓN. Basta mostrar que, dada arbitrariamente una sucesión de puntos $x_n>a$ con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, se tiene $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}=L$. Ahora por el Teorema del Valor Medio 2.3, para cada $n\in\mathbb{N}$ existe y_n, con $a<y_n<x_n$ tal que $\dfrac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}=f'(y_n)$. Es evidente que $y_n\longrightarrow a$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} f'(y_n)=L$, el que proporciona el resultado deseado.

Evidentemente, un enunciado análogo es valido para el limite a la izquierda en el punto b. Se sigue entonces el □

COROLARIO 3.10. Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ derivable excepto posiblemente en un punto $c\in(a,b)$ donde f es continua. Si existe $\lim\limits_{x\to c} f'(x)=L$, entonces existe $f'(c)$ y además $f'(c)=L$.

COROLARIO 3.11. Sea $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ derivable en el intervalo I. Se tiene $f'(x)\geq 0$ para todo $x\in I$ si, y solamente si f no es decreciente en I. Si $f'(x)>0$ para todo $x\in I$ entonces f es creciente en I, En este caso, f posee una inversa f^{-1} definida en el intervalo $f(I)=J$, la cual es derivable en J, con $\left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$ para todo $y=f(x)\in J$.

DEMOSTRACIÓN. Si $f'(x)\geq 0$ para todo $x\in I$, entonces dados $a<b$ en I, tendremos $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$ con $a<c<b$, luego $f(b)-f(a)\geq 0$, y por tanto f es no decreciente. Recíprocamente, si f es no decreciente entonces para todo $x\in I$ y todo $h\neq 0$ tal que $x+h\in I$, tendremos $\dfrac{[f(x+h)-f(x)]}{h}\geq 0$, luego $f'(x)\geq 0$. Si $f'(x)>0$ para todo $x\in I$, entonces $a<b$ en I implica $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ con $a<c<b$, luego $f(b)-f(a)>0$ esto es, f es creciente. Se sigue del Teorema 3.2 que $f^{-1}:J\longrightarrow I$ es continua en el intervalo $J = f(I)$. Por el Corolário 3.2, la función f^{-1} es derivable y su derivada tiene el valor arriba enunciado.

Ademśa, Es valido un resultado análogo para funciones no crecientes y decrecientes con $\leq$ y $<$. Note se, efectivamente sin embargo que f es estrictamente creciente que puede tener derivada igual a cero en algunos puntos, como es el caso de $f(x) = x^3$. $\square$

Ejemplos 2.2.

(1) *Como la función exponencial* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *dada por* $f(x) = e^x$ *posee derivada* $f'(x) = e^x$. *Dado* $x > 0$, *el Teorema del Valor Medio 2.3 aplicado al intervalo* $[0, x]$ *bajo la forma* $f(x) = f(0) + f'(c)(x - 0)$, $0 < c < x$, *nos da* $e^x = 1 + e^c \cdot x$, *pero* $c > 0$, *lo que implica que* $e^c > 1$, *luego podemos escribir* $e^x > 1 + x$ *para todo* $x > 0$. *Estas simples consecuencias del Teorema del Valor Medio 2.3 tienen una aplicación interesante. A partir de allí, mostraremos que para todo* $n \in \mathbb{N}$, *se cumple que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$. *En efecto, tenemos* $e^{\frac{x}{n+1}} > 1 + \dfrac{x}{n+1} > \dfrac{x}{n+1}$ *si* $x > 0$. *Elevando a la potencia* $n + 1$ *y escribiendo* $A = (n + 1)^{n+1}$, *obtenemos* $e^x > \dfrac{x^{n+1}}{A}$, *donde* $\dfrac{e^x}{x^n} > \dfrac{x}{A}$, *o* $\dfrac{x^n}{e^x} < \dfrac{A}{x}$. *El resultado se sigue. De allí es fácil concluir mas generalmente que si tiene* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{p(x)}{x^n} = a_n$, *luego* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{p(x)}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{p(x)}{x^n} \cdot \dfrac{x^n}{e^x} = a_n \cdot 0 = 0$.

(2) *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$ *si* $x \neq 0$ *y* $f(0) = 0$. *Como* $\lim\limits_{x\to0} e^{\frac{-1}{x^2}} = 0$, *veamos que* f *es continua. Además* f *es derivable en* $\mathbb{R} - \{0\}$ *con* $f'(x) = \dfrac{2}{x^3} \cdot e^{\frac{-1}{x^2}}$ *para todo* $x \neq 0$. *poniendo* $y = \dfrac{1}{x}$, *vemos que* $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{2y^3}{e^{y^2}} = 0$ *en virtud del Ejemplo anterior. Si hacemos* x *tender hacia cero por valores negativos, esto apenas tocará la* <u>*sinal*</u> *de* $f'(x)$, *luego se cumple aún* $\lim\limits_{x\to0-} f'(x) = 0$. *Se sigue del Corolário 3.10 que existe* $f'(0)$ *y se tiene* $f'(0) = 0$. *Usando el mismo argumento, podemos examinar la función* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por* $g(x) = e^{\frac{-1}{x}}$ *para* $x \neq 0$ *y* $g(0) = 0$. *En el punto* 0, g *es discontinua aunque es continua a la derecha. Para todo* $x \neq 0$ *tenemos* $g'(x) = \dfrac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{-1}{x}}$, *se sigue que* $\lim\limits_{x\to0^+} g'(x) = 0$ *y por tanto, existe* $g'_+(0) = 0$. *Entretanto* $\lim\limits_{x\to0^-} g'(x) = +\infty$.

Observación 3.19. Las dos situaciones en las cuales se cumple el Teorema del Valor Medio sem se supor suponer que la función $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ sea continua en los puntos a y b. La primera de ellas es completamente trivial: basta admitir que existan $L=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ y $M=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$, entonces la formula se torna $M-L=f'(c)\cdot(b-a)$ y se tendrá $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$ donde $M-L=f(b)-f(a)$. Esto ocurre inmediatamente del Teorema 2.3 el cual usamos en vez de f una función que coincide con f en (a,b) pero asume los valores L y M respectivamente en los puntos a y b.

La segunda situación es la siguiente, admitimos que $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ sea limitada, derivable en (a,b) pero supongamos que por lo menos uno de los limites en los extremos, digamos $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ no exista, entonces todavía existe un $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)\cdot(b-a)=f(b)-f(a)$. En efecto, la no existencia del limite a la derecha en el punto a muestra (vea los comentarios en seguida del Corolario 3.8) que $f'(x)$ no puede ser limitada en (a,b). Afirmemos que f' es limitada superior e inferiormente, pues suponga que $f'(x)\geq A$ (digamos) para todo $x\in(a,b)$, la función $g(x)=f(x)-Ax$ teria derivada no negativa en (a,b) seria monótona limitada y existiría su limite a la derecha en el punto a, lo que es absurdo pues esto implicaría la existencia del $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$. En particular, haciendo $d=\dfrac{[f(b)-f(a)]}{b-a}$, vemos que existen puntos $x_1,x_2\in(a,b)$ los cuales $f'(x_1)<d$ y $f'(x_2)>d$, por el Teorema del Valor Intermedio para la Derivada 2.1, existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=d$, esto es $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$

Como aplicación del Teorema del Valor Medio 2.3, caracterizaremos las funciones uniformemente derivadas.

Definición 3.20. (Uniformemente derivable) Diremos que $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ es uniformemente derivable en el intervalo I cuando f sea derivable en I y además para cada $\epsilon>0$ dado sea posible obtener un $\delta>0$ tal que $0<|h|<\delta$, lo cual implica que $\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\epsilon$ si $x\in I$, $x+h\in I$.

Una condición equivalente seria: para cada $\epsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $0<|h|<\delta\Longrightarrow|f(x+h)-f(x)-f'(x)\cdot h|<\epsilon|h|$ para cualesquiera $x\in I$ y $x+h\in I$.

Teorema 2.4. *Una función $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ es uniformemente derivable si, y solamente si es de clase C^1.*

Demostración. Supongamos inicialmente que $f\in C^1$, esto es que $f':[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ sea continua (y por tanto uniformemente continua pues $[a,b]$ es compacto), entonces dado $\epsilon>0$ obtenemos $\delta>0$ tal que $|y-x|<\delta$, lo cual implica que $|f'(y)-f'(x)|<\epsilon$. Ahora,

$f(x+h) - f(x) = f'(y) \cdot h$ donde $|x - y| < |h|$, por tanto $0 < |h| < \delta \longrightarrow |f(x+h) - f(x) - f'(x) \cdot h| = |f'(y) \cdot h - f'(x) \cdot h| = |f'(y) - f'(x)||h| < \epsilon|h|$, luego f es uniformemente derivable. Tomemos ahora este hecho como hipótesis y probemos que f' es (uniformemente) continua en $[a, b]$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |h| < \delta$ y $x \in I$, $x + h \in I$ implican que $\left|\frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] - f'(x)\right| < \frac{\epsilon}{2}$ y $\left|\frac{1}{-h}[f(x) - f(x+h)] - f'(x+h)\right| < \frac{\epsilon}{2}$. La segunda desigualdad se escribe como $\left|\frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] - f'(x+h)\right| < \frac{\epsilon}{2}$. Comparándola con la primera, vemos $|f'(x+h) - f'(x)| < \epsilon$ para cualesquier $x \in I$, $x + h \in I$ con $0 < |h| < \delta$, luego f' es uniformemente continua. $\square$

TEOREMA 2.5. **Teorema del valor intermedio** *(repaso)*

Los siguientes dos teoremas son conocidos como teorema del valor intermedio, teorema de Bolzano-Cauchy, teorema de Bolzano.

TEOREMA 2.6. **Teorema del valor intermedio**, *caso especial. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y sea $f : [a, b] \to R$ una función continua que toma valores con signos opuestos en los extremos del intervalo $[a, b]$, esto es, $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

TEOREMA 2.7. **Teorema del valor intermedio**, *caso general. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y sea $f : [A, b] \to R$ una función continua tal que $f(a) \neq f(b)$, esto es, $f(a) < f(b)$ o $f(a) > f(b)$. Entonces para todo u entre $f(a)$ y $f(b)$ existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = u$.*

EJEMPLOS 2.3.

(1) *Demuestre que la función f tiene al menos una raíz real y encuentre un intervalo de longitud menor o igual a 1 que contenga por lo menos una raíz de f.*

$$f(x) = 2^x + 4x + 3.$$

(2) *Demuestre que la función f tiene al menos una raíz real y encuentre un intervalo de longitud menor o igual a 1 que contenga por lo menos una raíz de f.*

$$f(x) = \cos(2x) - 3x + 4.$$

EJERCICIOS 2.1.

(1) *Explique el sentido geométrico del teorema del valor intermedio, primero en el caso especial y luego en el caso general.*
(2) *Muestre que la primera versión del teorema es un caso especial de la segunda versión.*

(3) *Demuestre el teorema del valor intermedio en el caso general usando el caso especial del mismo teorema.*

(4) *Sean* $f : [0,1] \to [0,1]$ *y* $g : [0,1] \to [0,1]$ *funciones continuas tales que*

$$f(0) = 0,\ \ f(1) = 1,\ \ g(0) = 1,\ \ g(1) = 0.$$

Demuestre que existe por lo menos un punto $c \in [0,1]$ *tal que* $f(c) = g(c)$*.*

(5) *Sean* $f : [A,b] \to \mathbb{R}$ *y* $g : [A,b] \to \mathbb{R}$ *funciones continuas tales que*

$$f(A) \leq g(b) \ \ y \ \ f(b) \geq g(A).$$

Demuestre que existe por lo menos un punto $c \in [A,b]$ *tal que* $f(c) = g(c)$*.*

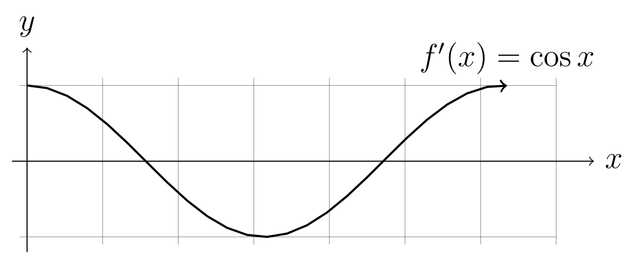
(6) *Sea* $f : [A,b] \to \mathbb{R}$ *función continua tal que*

$$\min_{x\in[A,B]} f(x) = 3A + 5,\ \ \max_{x\in[A,B]} f(x) = 3b + 5$$

. Demuestre que existe por lo menos un punto $c \in [A,b]$ *tal que* $f(c) = 3c + 5$*.*

Ejercicios 2.2. (1) *Demostrar que* $\dfrac{\cos a - \cos b}{\sin a - \sin b} = -\tan(c)$ *donde* $c \in (a,b)$*.*

Demostración. Consideremos las funciones $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ donde f y g son continuos en $[a,b]$ y derivables en (a,b).
$f'(x) = \cos x$,



consideremos $\cos x \neq 0$, luego por el teorema del valor medio generalizando existe $c \in (a,b)$ tal que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ de manera que

$$\frac{\sin b - \sin a}{\cos b - \cos a} = \frac{\sin c}{-\cos c} = -\frac{\sin c}{\cos c} = -\tan c$$

. ∎

(2) *Sea* $x > 15$ *demostrar que* $8\sqrt{1+x} < x + 17$*.*

Demostración. Consideremos la función

$$\begin{array}{ccc} f:[-1,\alpha) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & f(k)=\sqrt{1+t} \end{array}$$

Luego, $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}$ donde f es continua en $[15,x]$ y derivable en $(15,x)$ por consiguiente del teorema del valor medio garantiza que existe $c \in (15,x)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(x)-f(15)}{x-15}$, entonces $(x-15)f'(c) = f(x)-f(15)(\spadesuit)$
$f'(c) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+c}}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$ y $f(15) = 4$.
Como $c \in (15,x)$ entonces $15 < c < x$ por tanto $1+15 < 1+c$ en consecuencia $\sqrt{1+c} > 4$ se tiene $2\sqrt{1+c} > 8 > 0$ dado que $\dfrac{1}{2\sqrt{1+c}} < \dfrac{1}{8}$ entonces $(x-15)\dfrac{1}{2\sqrt{1+c}} < \dfrac{x-15}{8}(\Diamond)$.
Retomando $(\spadesuit)$ y usando $(\Diamond)$, $(x-15)\cdot f'(c) = f(x)-f(15)$ así $(x-15)\dfrac{1}{2\sqrt{1+c}} = \sqrt{1+x}-4$ de manera que $\sqrt{1+x}-4 = (x-15)\dfrac{1}{2\sqrt{1+c}} < (x-15)\dfrac{1}{8}$ por eso $8\sqrt{1+x}-32 < x-15$ por lo tanto $8\sqrt{1+x} < x+17$. $\square$

(3) *Sea f y g continuas y derivables en $\mathbb{R}$. Si $f'(x) > g'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ y $f(a) = g(a)$, $a \in \mathbb{R}$. Demostrar que $f(x) > g(x)$, $\forall x \in (a,\alpha)$.*

Demostración. Consideremos la función $h(x) = f(x)-g(x)$ lo cual es continua y derivable en $\mathbb{R}$ consideremos el intervalo $(a,x) \subset (a,+\infty)$, $x > a$ así h es continua en $[a,x]$ y derivable en (a,x), luego por el teorema del valor medio , existe $c \in (a,x)$ tal que $h'(x) = \dfrac{h(x)-h(a)}{x-a}$ entonces $f'(c)-g'(c) = \dfrac{f(x)-g(x)-(f(a)-g(a))}{x-a}$ se tiene $0 < f'(c)-g'(c) = \dfrac{f(x)-g(x)}{x-a}$, $f(a)-g(a) = 0$ por esto $0 < \dfrac{f(x)-g(x)}{x-a}$ y $x-a > 0$, luego $o < f(x)-g(x)$ de donde $g(x) < f(x)$, por lo tanto $f(x) > g(x)$ para todo $x \in (a,\alpha)$. $\square$

Ejercicios 2.3. (1) *Demostrar que $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$, para todo $x,y \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $x,y \in \mathbb{R}$ tomemos $x < y$, $I = [x,y]$ y la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ la cual es continua en $[x,y] \subset \mathbb{R}$ y derivable $(x,y) \subset \mathbb{R}$, entonces $\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x = \cos(c)(y-x)$ de manera que $|\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x| = |\cos c|\cdot|y-x|$ se tiene $|\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x| \leq |x-y|$. $\square$

(2) *Sea* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continuas y derivables en el intervalo (a,b). Entonces existe* $c \in (a, b)$, *tal que* $[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$.

Demostración. Sea

$$\begin{array}{rcl} h : [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x) \end{array}$$

Es claro que h es continua en $[a, b]$ ya que f y g lo son, además es continua en (a, b) por similar razón. Ahora

$$\begin{aligned} h(a) &= f(b) - f(a)]g(a) - [f(b) - g(a)]f(b) \\ &= f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(b) &= [f(b) - f(a)]g(x) - [f(b) - g(a)]f(b) \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(b) - f(b)g(b) + f(b)g(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) \end{aligned}$$

Luego $h(a) = h(b)$, así se cumple las condiciones del Teorema de Rolle.
Por lo tanto existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$ así $h'(x) = [f(b) - f(a)]g'(x) - [g(b) - g(a)]$
por consiguiente $h'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c) = 0$ se tiene $[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$. □

(3) *Sea* f *una función tal que* $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$ *y* $f(1) = 0$ *pruebe que* $f(xy) = f(x) + f(y)$ *para todo* $x, y > 0$.

Demostración. Sean $x, y > 0$, y fijo y $g'(x) = f(xy)$ entonces $g'(x) = \dfrac{1}{xy} \cdot y = \dfrac{1}{x} = f'(x)$, luego existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + k$ en consecuencia $f(xy) = f(x) + k$. Si $x = 1$ entonces $f(y) = f(y) = f(1 \cdot y) = f(1) + k = 0 + k$ por tanto $f(y) = k$ así $f(xy) = f(x) + f(y)$. □

Conclusiones

Realizar un estudio analítico detallado de los teoremas del extremo interior, de Rolle, del valor intermedio de Bolzano y el teorema del valor medio permite tener una claridad sobre los diferentes temas que se estudian en los cursos de calculo, además las diversas aplicaciones que se pueden obtener a partir de dichos teoremas resultan muy fructíferos ya que se consiguen las soluciones de problemas mas elaborados.

Bibliografía

[1] Bartle, Robert G.; Sherbert, Donald R. *Introduction to real analysis.* Second edition. John Wiley Sons, Inc. 1992.

[2] Rudin, Walter. *Principles of mathematical analysis.*, Third edition. Mc Graw-Hill 1976.

[3] Lima, Elon Lages. *Curso de Analise. Vol 1.* Impa, Brasil, 1995.

[4] Apostol, Tom. *Análisis matemático.* Segunda edición. Editorial Reverte.

[5] Browder, Andrew. *Mathematical analysis, an introduction.* Springer, 1996.

[6] Mattuck, Arthur. *Introduction to Analysis.* Prentice Hall,1999.

[7] Pinter Ch. *Set Theory,* Dover, 1980.