Saberes matemáticos inmersos en la práctica cultural portejadeña de trenzado artesanal de cabello afro, un caso de investigación en Etnomatemáticas.

Karen Verónica Castillo Lasso

201552024

Alejandra Milena Loaiza Calderón

201552059

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Santander de Quilichao

2020

Saberes matemáticos inmersos en la práctica cultural portejadeña de trenzado artesanal de cabello afro, un caso de investigación en Etnomatemáticas.

Karen Verónica Castillo Lasso

201552024

Alejandra Milena Loaiza Calderón

201552059

Requisito para optar al título de Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Lina Marcela Paramo

Directora del proyecto de grado

Adriana García Moreno

Cotutora

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Santander de Quilichao

2020

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

Universidad del Valle

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Programa Académico: Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Fecha

Día	Mes	Año
25	Julio	2020

Código del programa: 3469 Resolución del program #

Título del Trabajo o Proyecto de Grado				
Matemáticas inmersas en la práctica cultural portejadeña de trenzado artesanal de cabello afro, un caso de investigación en Etnomatemáticas.				
Se trata de:				
Proyecto		Informe Final x		
Director				
Lina Marcela Páramo Félix				
Nombre del Primer Evaluador				
Evelio Bedoya Moreno				
Nombre del Segundo Evaluador				
Jhonny Alfredo Vanegas Díaz				
Estudiantes				
Nombres y Apellidos	**Código**	**Plan**	**E-mail**	**Télefonos de contacto**
Karen Verónica Castillo Lasso	1552024	3469	Castillo.karen@correounivalle.edu.co	301 3002013
Alejandra Milena Loaiza Calderon	1552059	3469	alejandra.loaiza@correounivalle.edu.co	323 3044571

Evaluación

Aprobado x	Meritorio	Laureado
Aprobado con recomendaciones	No Aprobado	Incompleto

En el caso de ser ***Aprobado con recomendaciones*** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de ____________ (máximo un mes)* ***ante:***

Director del Trabajo o Proyecto de Grado — Primer Evaluador — Segundo Evaluador

En el caso de que el Informe Final se considere ***Incompleto*** *(diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de ____________ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el* dd mm aa

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la ***razón del desacuerdo*** *y las* ***alternativas*** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firmas

Lina M. Paramo f.		
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

Recomendaciones	x **Observaciones**	**Razón de desacuerdo - Alternativas**

Firmas

Lina M. Paramo f.		
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

Agradecimientos

Agradecemos primeramente a Dios, por guiarnos, darnos la sabiduría para desarrollar esta investigación y poder terminarla con éxito. Por la salud y las fuerzas que nos dio durante todo este proceso para no rendirnos.

A nuestras directoras de trabajo de grado, Lina Marcela Páramo y Adriana García Moreno, por haberse arriesgado a emprender este proyecto tan incierto y desconocido. Por apoyarnos desde el inicio y durante toda esta investigación, buscando siempre mil maneras para poder sacar este proyecto adelante, sin ellas definitivamente no hubiera sido posible.

A nuestra familia por sus constantes oraciones, por ser incondicionales en esta etapa, por impulsarnos cada día a dar lo mejor de nosotras y hacer las cosas de la mejor manera.

A nuestros amigos más cercanos por estar dispuestos siempre a escuchar con atención, por sus consejos, sus aportes y sus críticas constructivas, que sin duda fueron de gran provecho para este trabajo. Agradecemos especialmente a Sindy Arboleda y César Lucumí quienes fueron pieza fundamental para acceder a la comunidad Portejadeña de peinadoras.

Por último, pero no menos importante, agradecemos al municipio de Puerto Tejada Cauca y su comunidad de peinadoras artesanales de cabello afro, por abrirnos las puertas, permitirnos conocer y ser parte de tan bella práctica cultural y por estar dispuestas siempre a cooperar durante todo este proceso.

Muchas gracias a todos ustedes, Dios les bendiga.

Resumen

El presente trabajo se inscribe en una perspectiva sociocultural de la Educación Matemática denominada Etnomatemática. Surge debido a la necesidad educativa Portejadeña de integrar elementos socioculturales propios de la cultura afrodescendiente que brinden elementos significativos a sus estudiantes. De manera que pretende aportar elementos didácticos y teóricos para la Educación Matemática, el sistema educativo Portejadeño y/o profesores interesados en diseñar planes de aula en matemáticas que privilegie los contextos culturales afrodescendientes como punto de partida para generar conocimiento matemático; así pues, se caracterizan los saberes matemáticos identificados en los procesos de trenzado artesanal de cabello afro de una comunidad Portejadeña, desde la visión de las matemáticas disciplinares. Esta investigación deja abierto un panorama hacia la realización de futuras investigaciones, que atienda directamente el diseño y aplicación de propuestas de aula, sobre la base de las prácticas matemáticas identificadas.

Palabras clave: Etnomatemática, Etnoeducación, Educación Matemática, trenzado afro, prácticas matemáticas, saberes matemáticos. Concepto matemático de grafos, permutaciones, unidades de medida no estandarizadas, transformaciones geométricas de reflexión y homotecia.

Tabla de contenido

Introducción

Este trabajo se enmarca en la línea de investigación de la Didáctica de las Matemáticas, propuesta por el programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle. Este trabajo es producto de una preocupación que ha aquejado a la comunidad académica desde hace tiempo, en la cual se muestra la necesidad de analizar hasta qué punto las prácticas sociales y culturales infieren en la formación académica de los estudiantes.

Bajo estos presupuestos se centra la atención en la formación matemática y en una práctica cultural específica, así pues, se pretende caracterizar los saberes matemáticos identificados en los procesos de trenzado artesanal de cabello afro de la comunidad Portejadeña, desde la visión de las matemáticas disciplinares.

Al abordar la Educación Matemática[1](EM) desde un enfoque sociocultural, surgió el programa de Etnomatemática que es considerado como un campo de investigación que tiene como fin estudiar las ideas, los procedimientos y las prácticas matemáticas originadas en contextos culturales específicos que responden a diversas formas de vida y se desarrollan a partir de la necesidad de sobrevivir y trascender, tanto en el tiempo como en el espacio.

Teniendo en consideración lo anterior, esta investigación bajo el enfoque Etnomatemático pretende aportar a la recuperación de los saberes matemáticos implícitos en las prácticas culturales Portejadeñas, en vista de que culturas afrocolombianas como esta, tal cual lo expone Blanco (2006), aun siendo aceptadas ya como un grupo étnico diferenciado, poco han sido tenidas en cuenta en el desarrollo de investigaciones que se preocupen por ofrecer elementos didácticos que le facilite a su sistema educativo el diseño de actividades matemáticas contextualizadas y favorezca su derecho a la etnoeducación[2].

---

[1]Existe un campo profesional, denominado Educación Matemática, en el que trabajan los profesores de los Sistemas Educativos de todos los países y los investigadores comprometidos en la solución de los problemas de la enseñanza de las matemáticas. El campo profesional del Educador Matemático tiene entidad propia, es ejercido por decenas de miles de profesionales y afecta a millones de escolares (Rico & Sierra, 1991)

[2]Debe entenderse por etnoeducación como un modelo o sistema educativo definido, proyectado y ejecutado según las etnias. Es decir, el modelo educativo no debe partir de una copia

Para ello, se realiza un estudio etnográfico de esta cultura con la metodología de investigación MOMET de Albanese (2014), enfocándose en la descripción y análisis de la práctica cultural de trenzado artesanal de cabello afro Portejadeño, desde la perspectiva matemática, que además de ser una práctica cultural predominante, tiene un origen ontológico; lo cual brinda más elementos para afirmar que el proceso de trenzado junto con el producto final dado por el peinado, pueden ponerse en correspondencia con cuestiones que van más allá de lo estético y por tanto es posible inferir que estos individuos al trenzar podrían desarrollar y poner en práctica las matemáticas, así sea de forma inconsciente e intuitivamente.

En esta dirección, en el capítulo uno, dos y tres de este trabajo, se consigna la documentación didáctica necesaria para poner en marcha, y orientar esta investigación. En el capítulo uno se plantean algunos antecedentes locales y globales; se menciona lo que se considera útil de cada antecedente para los fines de esta investigación. A partir de ello, se consigna la problemática, justificación y objetivos que direcciona este estudio. En el capítulo dos, se plantea el marco conceptual de esta investigación, la cual se instaura en la línea Didáctica de las Matemáticas y se enfoca particularmente desde la Etnomatemática e integra los referentes matemáticos asociados a los saberes matemáticos identificados en la práctica del trenzado. Y en el capítulo tres, se expone con detalle la metodología de investigación MOMET propuesta por Albanese (2014) para describir y analizar procesos de trenzado la cual se adaptada a los propósitos de esta investigación.

En el capítulo cuatro 'el camino en función del MET' se hace la respectiva descripción de la práctica del trenzado de cabello afro, desde la metodología de investigación propuesta por Albanese, y a su vez, en concordancia con el primer objetivo específico planteado para este trabajo. A partir de lo anterior, se identifican y destacan cinco saberes matemáticos implícitos en la práctica en cuestión, los cuales se enmarcan en lo que se ha denominado "categorías de análisis". En la primera categoría de análisis, categoría proceso, se considera el paso a paso necesario para realizar trenzado de cabello afro; aquí se identifica una aproximación a los saberes matemáticos de grafos y

---

importada, sino de la concepción que se tenga como pueblo asentado en este territorio. (Tejada, 2008) permutaciones. Por su parte la segunda categoría, categoría producto, considera la visión global del trenzado, es decir, los aspectos de forma que caracterizan el producto final del trenzado realizado; aquí se identifica una aproximación a los saberes matemáticos de unidades de medida no estandarizadas y de transformaciones geométricas de reflexión y homotecia.

Por su parte, en el capítulo cinco ‘Análisis en función del MOM’, se desarrolla el respectivo análisis de la misma, en concordancia con el segundo objetivo específico propuesto para este trabajo, con lo cual, también se logra caracterizar los saberes matemáticos inmersos en los procesos de trenzado de cabello afro, a partir del empalme entre los saberes informales identificadas en la práctica y lo que establece formalmente la teoría.

Finalmente, en el capítulo seis se consignan las respectivas conclusiones que subyacen alrededor de este estudio, a partir de tres enfoques. El primer enfoque considera el análisis de esta investigación en función de los objetivos inicialmente delimitados. El segundo enfoque, considera las reflexiones finales desde el punto de vista de las investigadoras, en función de los referentes didácticos consignados en un principio; con el fin de dar respuesta a la problemática planteada en un inicio, y a su vez, justificar la importancia de este tipo de investigaciones para el sistema educativo Portejadeño y en general para la Educación Matemática. Por último, el tercer enfoque, pretende dejar un panorama abierto hacia futuras investigaciones, tomando como punto de partida los saberes matemáticos identificados y caracterizados en la práctica del trenzado artesanal de cabello afro.

1 Capítulo 1 Aspectos generales de la investigación

En este primer capítulo, se pretende consignar los elementos didácticos y culturales que direccionan esta investigación, los cuales muestran la importancia de poner en marcha investigaciones en matemáticas que integren los diferentes contextos culturales, como lo es el afrodescendiente. Se pretende abordar las distintas problemáticas educativas que enfrentan el municipio afrodescendiente de Puerto Tejada en particular, las posibles causas de las problemáticas que enfrentan, y a su vez, el impacto educativo, cultural y social que dichos aspectos tiene sobre los individuos de aquella comunidad y la comunidad en sí misma. También, se proponen una serie de objetivos a partir de los cuales se busca atender algunas de las necesidades educativas que enfrenta la cultura Portejadeña y en general la didáctica de las matemáticas.

1.1 Antecedentes

Al preguntarse por el eje central que moviliza esta investigación, se encuentra que para abordar la problemática es necesario identificar el alcance que hay entre las prácticas culturales y el proceso de formación matemática de los estudiantes, es decir hasta qué punto una conexión entre las prácticas culturales y los saberes matemáticos escolares, fortalece los procesos de enseñanza y de aprendizaje de los estudiantes. Pues bien, para atender a esta necesidad se debe recurrir a algunas investigaciones que dan luz en este sentido, en especial aquellas que determinan cómo hacerlo al trabajar sobre la práctica cultural de trenzado de cabello.

Bajo estos presupuestos se ha encontrado tanto a nivel local como global una serie de investigaciones en las que se realiza un estudio parcial o exhaustivo de este tipo de conexión, salvo algunas variaciones o restricciones, como se verá más adelante. Algunas de estas investigaciones son el punto de partida de este trabajo. En efecto, de las múltiples fuentes teóricas que se pueden encontrar hay algunas que en el proceso de diseño de este proyecto se consideran pertinentes pues proporcionan bases teóricas y metodológicas para orientar la investigación y justificar la importancia de realizar este tipo de trabajos.

1.1.1 Antecedentes globales

Recurriendo a la perspectiva de las matemáticas populares[3], Lave (1998) elaboró el proyecto nombrado Adult Math Project (AMP) por medio del cual estudió los procedimientos matemáticos utilizados por personas adultas en situaciones de compras y en ambientes de evaluación. En este proyecto, se concluyó que los algoritmos aprendidos en la escuela son diferentes de los utilizados en situaciones diarias. Otras investigaciones estudiaron el uso de una aritmética popular para resolver problemas originados en las actividades de la industria láctea (Scribner, 1984) y en las ferias libres (Carraher, Carraher & Schliemann; 1982). De acuerdo con los resultados de estos estudios, Rosa & Orey (2006) afirman que en dichas investigaciones se confirma la existencia de una discontinuidad entre las operaciones utilizadas para resolver los problemas de las matemáticas académicas y aquellas utilizadas para solucionar las situaciones-problema encontradas en la vida diaria.

Así pues, dado que los estudiantes llegan a las aulas con una gran variedad de conocimientos previos, mecanismos, técnicas y estrategias para hacer frente a las situaciones-problema que enfrentan en la vida diaria, es necesario que también adquieran un intelecto mejorado del uso de las matemáticas a través del estudio de los problemas encontrados por la comunidad o por las comunidades en las cuales están inmersos (D'Ambrosio, 2012). Esta es una consideración importante para las acciones pedagógicas que permean el currículo matemático y que pueden contribuir a disminuir la brecha que hay entre los saberes matemáticos académicos y los cotidianos. En consecuencia, esto invita a hacer más investigaciones en comunidades locales, las cuales deben favorecer a todos los participantes del sistema educativo; es decir se invita a realizar investigaciones que atiendan a una doble contribución, por un lado, que se generen bases teóricas y estrategias didácticas para los educadores e investigadores interesados en la Educación Matemática, y, por otro lado, que se construya un conocimiento significativo para los estudiantes.

Una de las investigaciones que va en este sentido y que pretende atender a las preocupaciones antes expuestas es el trabajo de doctorado de Verónica Albanese (2014) del

---

[3]Maier, en Harris, Mary, Ed. (1991) denominó las matemáticas populares, como "las prácticas matemáticas que se originan y desarrollan en la vida cotidiana" P. 542

Harris, Mary, Ed. (1991). School, mathematics and work. London, England: The Falmer Press programa de doctorado en ciencias de la educación de la universidad de Granada, titulado: Etnomatemáticas en artesanías de trenzado y concepciones sobre las matemáticas en la formación docente (2014). Esta investigación guarda una estrecha relación con la propuesta de investigación que aquí se pretende realizar, además es un referente importante para nuestra propuesta por el vínculo que allí se establece entre las matemáticas populares y el trenzado artesanal.

En efecto, en el trabajo de doctorado de Albanese se busca incidir en las concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas desde la perspectiva Etnomatemática en la formación docente, a través de talleres sobre las matemáticas en artesanías de trenzado. Para ello, se propuso primero describir la realización de algunas artesanías (de trenzado), las cuales desde la perspectiva Etnomatemática debían tener algún potencial educativo; esto se hizo a través de un modelo etnográfico. En este trabajo proponen continuar la investigación, haciendo el estudio de otras artesanías de trenzado, puesto que aquí se limitó a indagar solo dos tipos de artesanías de trenzado, propias de la cultura argentina. Esta investigación abre un abanico de posibilidades, e invitan a analizar este tipo de práctica popular en otro tipo de trenzados y en otras comunidades.

Hasta el momento se relacionan algunas investigaciones a nivel internacional, las cuales hacen especial énfasis en el enfoque sociocultural, pero es relevante destacar que a nivel nacional también se han evidenciado trabajos que apuntan en esta dirección, los cuales pretenden determinar las condiciones de acceso a los elementos base que dan paso a la comprensión de los constructos matemáticos por medio de las prácticas culturales. Esto nos brinda elementos importantes a considerar en nuestra investigación, veamos algunos de estos referentes:

1.1.2 Antecedentes locales

Al realizar la revisión de algunos trabajos relacionados con los fines de esta investigación, se encontró que en lo que respecta a las investigaciones en Etnomatemática realizadas en Colombia, se considera la clasificación hecha por Tabares (2016), el cual destaca que los trabajos en Etnomatemática deben distinguirse desde tres enfoques: La Etnomatemática en la educación, la Etnomatemática en las comunidades étnicas y la

Etnomatemática en sectores populares. Así, se ha hecho una selección de los trabajos que, bajo esta clasificación, aportan en mayor medida a nuestra propuesta de investigación.

1.1.1.1 Etnomatemática en la educación

Entre los trabajos de Etnomatemática en educación, Tabares (2016) desarrollo el trabajo de grado titulado: Estado del arte de la Etnomatemática en Colombia para obtener el título de licenciado en Etnoeducación, en el cual, tal como indica el título de su trabajo, elaboró un estado del arte de la Etnomatemática en Colombia del 2005 al 2016, con el fin de establecer los alcances logrados hasta la fecha y así explorar nuevos campos y/o investigaciones que fortalecieran los procesos de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas en las etnias del país. Este estado del arte se inscribió en una investigación documental que, a partir del análisis de referencias bibliográficas, arrojó un total de 35 investigaciones, y mostró que hay menos de tres investigaciones anuales (2.9) bajo este enfoque, lo cual es poco para un país como Colombia que es rico en diversidad étnica y cultural.

De igual forma, este estudio concluyó que la Etnomatemática en Colombia debería transitar por, cuando menos, tres caminos en los que se puede hacer los mejores aportes y ocupar así el lugar destacado que merece: a). La Etnomatemática como un elemento que permita recuperar y mantener los conocimientos ancestrales de las diferentes culturas étnicas como dice D'Ambrosio (teniendo en cuenta que hasta el año 2016 dentro de las investigaciones realizadas en Etnomatemática, solo se han registrado estudios en 6 comunidades diferentes, habiendo según el Dane[4] en 2005 un total de 87 comunidades ancestrales, o 102 si nos atenemos a las cifras de la Organización Nacional Indígena de Colombia (ONIC, 2016)); b). La Etnomatemática como un instrumento de enseñanza de las matemáticas que mezcla la pedagogía con la lúdica y se complementa con el currículum de la enseñanza tradicional, y c). La Etnomatemática como un medio que permite recuperar los saberes populares para multiplicar su uso en sectores de baja formación académica y así mejorar su situación laboral y combatir la pobreza extrema.

[4] El Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE) es la entidad responsable de la planeación, levantamiento, procesamiento, análisis y difusión de las estadísticas oficiales de Colombia.

1.1.1.2 Etnomatemática en las comunidades étnicas

Entre las investigaciones de Etnomatemática en las comunidades étnicas de Colombia, se destaca principalmente el aporte del investigador Armando Aroca (2007), quien desarrolló una propuesta para enseñar geometría a una comunidad indígena desde una de sus costumbres culturales, el tejido. Este trabajo fue realizado con el fin de obtener el título de magíster en la Maestría de Educación con énfasis en Educación Matemática de la Universidad del Valle (la primera en Colombia con el enfoque Etnomatemático), titulado: Una propuesta de enseñanza de geometría desde una perspectiva cultural. Caso de estudio: Comunidad Indígena Ika – Sierra Nevada de Santa Marta (2007). En este trabajo "no solamente se describen los procesos geométricos que las indígenas arhuacas emplean al tejer sus figuras tradicionales en la parte lateral de sus mochilas, sino que también se liga este análisis a su significado cosmogónico, cosmológico y a su cosmovisión (los tres niveles de significación simbólica)" (Aroca, 2007, p. 13).

Es importante anotar que esta investigación tiene un trasfondo muy ambicioso al pretender crear un sistema de enseñanza de la geometría a partir de lo que el autor llama 'geometría transcultural', que serviría para que los indígenas puedan hacer que sus conocimientos trascienden más allá del solo uso dado en la fabricación de sus productos artesanales como las mochilas.

Así mismo, al ser la primera investigación en el marco de la Etnomatemática en el país, abre un abanico de posibilidades que brindan elementos para la creación de una línea de investigación que dé cuenta de prácticas y saberes que generan pensamiento matemático en contextos culturales diferenciados. Por lo tanto, esta investigación contribuye a consolidar la Línea de investigación en Etnomatemática dentro del grupo de Historia de las matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, incentivando a investigadores y estudiantes de pregrado y postgrado de la licenciatura en matemáticas o de matemáticas de distintas universidades del país, a presentar propuestas de investigación en el campo de la Etnomatemática.

Siguiendo esta línea de investigación Morán & Acosta (2015) elaboran un trabajo para optar al título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemática de la Universidad del Valle, titulado: La construcción del concepto de medida en el contexto de la escuela indígena “Las aves” de Canoas[5]. En dicho trabajo, se plantea la problemática que por lo regular en las escuelas indígenas se enfatiza en una enseñanza que debe estar al mismo nivel que la de los estudiantes de las ciudades, de modo que los niños indígenas se ven obligados a lidiar con procesos escolares que los desvincula de los conocimientos que estos habían comenzado a construir en su cultura, lo que consideran que es “…un aprendizaje pobre y no competente, pero (que) además borra los elementos que hacen de un estudiante indígena lo que él es: un estudiante indígena” (p. 5).

En efecto, Morán & Acosta (2015) en su investigación se dan cuenta que en la comunidad Nasa se desconocen los conocimientos previos que adquieren los niños, en especial aquellos que son otorgados por los quehaceres de la misma comunidad. En consecuencia, se dan a la tarea de diseñar una forma de usar la actividad de la siembra de la comunidad del pueblo Nasa como un contexto significativo para construir el concepto de medida de longitudes lineales en su escuela indígena. Es prudente señalar que, para desarrollar la problemática de este trabajo, Morán & Acosta (2015) tomaron como referencia la etnografía educativa, la cual se basa en un método estrictamente cualitativo; y bajo sus parámetros observaron la relación que se puede encontrar entre la construcción del concepto de medida y la actividad de la práctica de la siembra.

Pues bien, parte de los modelos que describen los trabajos expuestos hasta aquí, permiten ir consolidando el diseño metodológico que se usó en esta investigación. En particular, el trabajo de Morán & Acosta (2015) permitió inferir desde una visión general e implícita la importancia y el alcance de la etnografía en nuestra investigación, motivo por el cual fue parte de la metodología implementada en nuestro trabajo.

1.1.1.3 Etnomatemática en sectores populares

En el enfoque de la Etnomatemática en sectores populares, se encuentra la investigación de Armando Aroca Araujo (2013), titulada: Algunas concepciones espaciales de los pescadores de Buenaventura, Pacífico colombiano. En esta investigación se da

[5] Canoas es un resguardo indígena del pueblo nasa, ubicado en el municipio de Santander de Quilichao, en el departamento del Cauca, en el suroccidente de Colombia.

cuenta de unos conceptos muy particulares por parte de esta población trabajadora de la Costa Pacífica colombiana; producto de sus "interpretaciones o análisis sobre las interacciones entre la Tierra, la Luna y el Sol, y por ende sus consecuencias como direcciones de los vientos, cambios de la marea, etc., muestra otro tipo de pensamiento matemático, otras concepciones espaciales que reafirman la teoría de que las matemáticas son un fenómeno cultural, que son desarrolladas por todos los grupos social o culturalmente diferenciados" (p. 47).

Mediante entrevistas a un grupo de pescadores artesanales de Buenaventura, Aroca, A (2013) obtuvo información de cuatro categorías de análisis: el "movimiento" del Sol, la dirección del viento y su funcionalidad, el comportamiento de las olas, los cambios de la Luna y la interacción de las cuatro categorías. Aroca reconoce que las concepciones de estos pescadores son contrarias a la ciencia, a las leyes de Kepler, pero concluye que el hecho de que estas personas crean en cosas absurdas no las hace ignorantes. "Tienen y viven en otra realidad matemática, en otras concepciones espaciales que le dan sentido a su forma de vivir" (p. 60).

Las anteriores investigaciones, nos dan bases teóricas (Etnomatemáticas) y metodológicas para el desarrollo de esta investigación, en las que se pudo evidenciar la importancia de desarrollar este tipo de trabajos. Esta investigación se enmarca en la Etnomatemática en comunidades étnicas, en particular en la comunidad afrodescendiente con el trenzado de cabello afro, de ahí que se considera pertinente trabajar con la metodología propuesta en (Albanese, 2014) con algunas modificaciones adaptadas a los propósitos de esta investigación, a continuación, se presenta la problemática sociocultural que nos invita a desarrollar este trabajo.

1.2 Problemática

En la actualidad se viene cuestionando sobre el estudio de la Educación Matemática desde una perspectiva sociocultural, al respecto Lizcano (2002) se cuestiona: "¿Qué vemos si, en lugar de mirar las prácticas populares [6]desde la matemática, vemos la matemática desde las prácticas populares?" (P.125). Este planteamiento desafía a la comunidad

[6] Maier, en Harris, Mary, Ed. (1991) denominó las matemáticas populares como las prácticas matemáticas que se originan y desarrollan en la vida cotidiana.

académica, a poner en marcha estudios en los que se promueva la construcción de propuestas curriculares que tomen esta visión como punto de partida. En otras palabras, qué se lograría si los docentes en lugar de presentar a los estudiantes las aplicaciones en matemáticas como una forma de hacer en la que se valide sus conocimientos adquiridos, mejor, empiezan a mostrar las matemáticas desde sus prácticas populares como una forma de conocer[7], es decir, indagar si se puede extraer algunos saberes matemáticos de las prácticas populares y si estos pueden ser considerados como el peldaño inicial para que los estudiantes puedan construir un tipo de conocimiento matemático, de manera que los docentes puedan proponer actividades contextualizadas que les permitan a los estudiantes generar, construir y poner en práctica los elementos base para acceder al conocimiento matemático.

Con base a lo anterior, y considerando que la Educación Matemática en Colombia entre otras cosas, se rige bajo los parámetros y lineamientos consignados en los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 2006), el cual entre otros aspectos menciona que el lugar donde se construye el sentido y significado de los contenidos matemáticos es ante todo el lugar sociocultural, puesto que permite que se establezcan conexiones de las matemáticas con la vida cotidiana de los estudiantes, las actividades educativas institucionales y con las demás ciencias, se propone ver la Educación Matemática desde tres contextos; de las matemáticas mismas, de otras ciencias y de la vida diaria, de manera que el estudiante llegue a ser consciente del carácter útil de las matemáticas, a medida que estas se integren a su diario vivir, cuando este logra experimentarlas, evidenciarlas y asociarlas a las situaciones cotidianas.

En concordancia con lo que propone el MEN (2006), Blanco señala que:

> Una problemática a la que hay que dedicar más investigaciones es a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en comunidades indígenas y afrocolombianas, que aunque desde la etnoeducación se han venido realizando ingentes esfuerzos por el rescate de la lengua, la música, las danzas, la medicina tradicional, se necesita trabajar más en la recuperación de los saberes matemáticos autóctonos de estos grupos culturales, que en

---

[7] Enseñar a hacer matemáticas destaca el conocimiento como una manera de hacer. Una Educación Matemática debe ocuparse u ofrecer una manera de conocer, esto impulsa a ver el conocimiento desde una perspectiva cultural (Bishop, 1999).

muchos casos se han perdido o se encuentran inmersos en la práctica cotidiana, en los ritos, en la agricultura, en las mochilas, etc., para luego incorporarlos a sus currículos (2011, P. 60).

A partir de las ideas expuestas hasta aquí y en pro de la recuperación de los saberes matemáticos autóctonos de los grupos culturales, se centra la atención en el municipio de Puerto Tejada, Cauca, que cuenta con un 98% de su población de etnia afrodescendiente. Así pues, en la revisión del plan de desarrollo municipal 2008-2011 de Puerto Tejada Cauca (es el más actual) se menciona que al ser reconocidos por el estado como un grupo étnico (afrodescendiente) diferenciado, necesitan introducir cambios sustanciales en su sistema educativo que defienda la autonomía educativa a la que el municipio tiene derecho, en virtud de sus características étnicas, culturales y sociales.

En este sentido, exponen que como cultura afro deben ser educados de tal manera que desarrollen sus aptitudes y condiciones particulares, eliminando las visiones de superioridad e inferioridad entre las otras culturas de tal forma que se les valore, reconozca y respete; ya que se argumenta que el sistema educativo actual Portejadeño se rige bajo los parámetros de una educación homogeneizadora[8], implantada desde el sistema de educación nacional[9] que poco se preocupa en integrar aspectos reales, relevantes y específicos que hacen parte de las aspiraciones reales de quienes se benefician y, atentan contra su cultura, dignidad, autonomía y determinación.

No obstante, en la práctica la realidad es otra porque el modelo educativo implementado por las instituciones de Puerto Tejada ha sido una copia importada de otros modelos ajenos a su cultura, es decir, se hacen uso de estrategias de enseñanza y de aprendizaje ajenos a sus necesidades y particularidades culturales que no desarrollan sus aptitudes ni fortalecen sus costumbres. Por ejemplo, trabajan las matemáticas iniciando con

[8] La palabra educación homogeneizadora, se puede entender en términos de Bishop (1999) como el aprendizaje impersonal, basado en el supuesto falso de que el carácter universal de las matemáticas implica la universalidad de su enseñanza. Las reglas se deben aprender, los procedimientos aceptar y las técnicas practicar, los estudiantes no se toman como personas sino como alumnos generalizados ya que suponen que deben aprender exactamente lo mismo y sus aportaciones son irrelevantes, se ignora la individualidad del alumno y su contexto social, este no tiene oportunidad para interpretar.

[9] Este es una entidad que rige la educación en Colombia, junto con el ministerio de educación nacional.

los algoritmos y fórmulas propias de los temas que son objeto de estudio para después llevar al aula algunas situaciones problema, si el tiempo así lo permite. En tal caso, las situaciones presentadas son por lo regular descontextualizadas para los Portejadeños, puesto que son tomadas de otros grupos culturales que enfrentan realidades distintas, por lo que tales situaciones sólo adquieren vital importancia dentro de sus respectivas comunidades.

Lo anterior permite dilucidar la gran relevancia que tiene el articular los contenidos matemáticos con situaciones contextualizadas, tanto para contribuir a que los estudiantes adquieran el sentido y significado social de las matemáticas, como para vislumbrar el camino hacia un buen desempeño educativo.

Desafortunadamente tal como se ha consignado en el plan de desarrollo municipal 2008-2011 de Puerto Tejada, las comunidades afro descendientes como esta, han perdido gradualmente su identidad, sus creencias y sus costumbres, dado que la cultura occidental ha colonizado gran parte de sus particularidades históricas, de manera que se han desligado sus características culturales de la concepción que han construido de las matemáticas mismas, aun cuando a la cultura se le da el estatus de ser un ente fundamental para la construcción de los conocimientos matemáticos.

Bajo esta consigna, es un hecho que el sistema educativo portejadeño, como cultura afrodescendiente carece de elementos didácticos y metodológicos a los cuales la comunidad docente portejadeña pueda tener acceso para integrar a sus planes de aula, de manera que no se limiten al yugo de la educación monopolizadora y homogeneizadora que se les ha implantado. Esto revela la gran dificultad que hay al tratar de considerar los contextos, pues como lo indica Blanco (2011), aun cuando los docentes quieran innovar sus prácticas de enseñanza, están limitados debido a que se han realizado pocas investigaciones que se preocupen en proponer una Educación Matemática que atienda a las necesidades reales de estos individuos, brinde las herramientas requeridas a su sistema educativo y/o permitan articular las clases a sus prácticas culturales particulares; razón por la cual acuden siempre a los modelos tradicionales.

Los argumentos expuestos hasta este momento revelan la necesidad educativa portejadeña, en especial las ideas de Blanco (2011) y Lizcano (2002) abren el panorama hacia la realización de una investigación educativa que considere el contexto sociocultural portejadeño como una actividad en la cual la comunidad puede desarrollar intuitivamente ciertas habilidades, ideas, conceptos y destrezas matemáticas y aporte a la recuperación de saberes matemáticos inmersos en sus prácticas. En virtud de ello, es preciso cuestionarnos: ***¿qué saberes matemáticos autóctonos de la cultura portejadeña se encuentran inmersos en sus prácticas de trenzado artesanal de cabello afro?*** Esta investigación pretende aportar elementos didácticos y teóricos para la EM, el sistema educativo portejadeño y/o profesores interesados en diseñar planes de aula en matemáticas que privilegie los contextos culturales afrodescendientes como punto de partida para generar conocimiento matemático, de manera que se deja abierto un panorama hacia la realización de futuras investigaciones que atienda directamente el diseño y aplicación de secuencias y/o actividades didácticas sobre la base de los saberes matemáticos identificados.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Caracterizar los saberes matemáticos[10] escolares implícitos (o subyacentes) en las prácticas de trenzado artesanal de cabello afro en una comunidad de peinadoras portejadeñas

1.3.2 Objetivos específicos

OE. 1 identificar y describir los procesos de trenzado artesanal de cabello afro como una práctica cultural propia de la comunidad portejadeña.

OE. 2 identificar y analizar los saberes matemáticos subyacentes en los procesos de trenzado artesanal de cabello afro, determinando sus posibles relaciones e implicaciones curriculares y didácticas sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

[10] Entiéndase los saberes matemáticos desde la perspectiva de etnomatemática que propone Rosa & Orey, (2013) como el cúmulo de conocimientos o ideas matemáticas originados y producidos en prácticas matemáticas cotidianas y/o de la vida diaria, por individuos de una determinada cultura, que en la mayoría de las veces suelen ser disonantes de las estructuras matemáticas disciplinares enseñadas en la academia. En este sentido, no hablamos de caracterizar las nociones, concepto o conocimientos matemáticos puesto que estos ya están caracterizados desde las matemáticas disciplinares.

1.4 Justificación

La constitución política de Colombia promulgada en 1986 por el gobierno conservador exigía una educación que nos curará como pueblo colombiano estigmatizado de salvaje, degenerado y débil. La cultura escolar impuesta, tenía como propósito primordial civilizarnos, cambiar nuestro estilo de vida y sistema educativo colombiano, implantando conocimientos y pedagogías occidentales que obligaban a los educandos de la época a renunciar a su lengua y a las costumbres que identifican su comunidad, la escuela los recibía para cambiarlos negando lo que eran, memorizaban, pero no aprendían (Tenorio, 2011. P.58). En palabras de Bishop (1999) el aprendizaje se basaba en el supuesto falso de que el carácter universal de las matemáticas implica la universalidad de su enseñanza[11].

Hasta la década de los años 80 el sistema educativo se basaba en la enseñanza tradicional donde el profesor de matemáticas solo se encargaba de emitir conocimiento a través de algoritmos y fórmulas, y por su parte, el estudiante como receptor, se dedicaba a mecanizar y reproducir exactamente dichos procesos. No obstante, en la reforma al sistema educativo de esta época, se cuestionó el hecho de que incluso cuando el diseño de unidades didácticas en matemáticas estuviese estructurado bajo cuatro componentes curriculares: contenidos, metodologías, objetivos y evaluación, se hiciera énfasis solo en los contenidos y no se diera protagonismo a los demás componentes. Así pues, los estudiantes no manifestaban los resultados formativos esperados y se concluyó que la estructura curricular no era el problema, sino que el profesor de matemáticas carecía de formación profesional en didáctica que pudiera proporcionarle herramientas teóricas suficientes para articular eficazmente las otras tres componentes curriculares y así diseñar buenas unidades didácticas (Rico, 1997)

Gracias a la constitución liberal colombiana promulgada en 1991, se reformó el estado y por ende su sistema educativo, reconociendo nuestro país como pluriétnico y multicultural. De manera que se consolidó un sistema educativo instaurado bajo los siguientes parámetros:

---

[11] Enseñar matemáticas debía ser igual para todos porque las matemáticas se consideran como verdades universales, se ignoraba la individualidad del alumno y su contexto social. (Bishop, 1999)

Artículos 7 y 10 reconocen y protegen la diversidad étnica y cultural con sus lenguas y dialectos;

- los artículos 67 y 68 se refieren a la educación como derecho y servicio público con función social para todos los colombianos, respetando la identidad cultural –"el derecho a una formación que respete y desarrolle su identidad cultural"–;
  Y el artículo 70 señala la responsabilidad del Estado en garantizar estos derechos (Tenorio, 2011. P.58)

El sistema educativo en la misma década de los 90, también se pronunció al respecto y tanto lineamientos curriculares como estándares básicos de competencia consignaron que:

- […] el conocimiento matemático es resultado de una evolución histórica, de un proceso cultural, cuyo estado actual no es, en muchos casos, la culminación definitiva del conocimiento y cuyos aspectos formales constituyen sólo una faceta de este conocimiento (Ministerio de Educación Nacional, 1998: 29, citado en Blanco, 2011. p.61)

- [...] una nueva visión de las matemáticas como actividad humana, resultado de la actividad de grupos culturales concretos (ubicados en una sociedad y en un periodo de tiempo determinado) y, por tanto, como una disciplina en desarrollo, provisoria, contingente y en constante cambio (Ministerio de Educación Nacional, 2006: 48, citado en Blanco,2011. p.61)

- […] la educación matemática debería conducir al estudiante a la apropiación de los elementos de su cultura y a la construcción de significados socialmente compartidos, desde luego sin dejar de lado los elementos de la cultura matemática universal (Ministerio de Educación Nacional, 1998: 30, citado en Blanco,2011. p.61)

- [...] comenzar por la identificación del conocimiento matemático informal de los estudiantes en relación con las actividades prácticas de su entorno y admitir que el aprendizaje de las matemáticas no es una cuestión relacionada únicamente con aspectos cognitivos, sino que involucra factores de orden afectivo y social, vinculados con contextos de aprendizaje particulares (Ministerio de Educación Nacional, 2006: 47, citado en, Blanco, 2011. p.61)

Dichas reformas, permitieron ver y entender el conocimiento matemático como un proceso social. Siendo consecuentes con su origen, este debe partir desde los constructos sociales y culturales, de manera que sus aspectos formales (algoritmos y fórmulas), conforman solo una parte de las matemáticas. Ahora bien, el problema era que el sistema educativo no sabía lidiar con ello; por un lado, los profesores carecían en su formación de elementos didácticos que le permitieran abordar las clases bajo esta ideología y por otro, los profesores solo conocían aspectos superficiales de las culturas que educaban, lo que presentó un gran reto para el sistema educativo.

A causa de ello, la EM como actividad social encargada de los procesos de enseñanza y aprendizaje, como lo expone Rico & Sierra (1991), empezó a preocuparse por generar y cómo enseñar el conocimiento científico, lo que hoy día llamamos Didáctica de las Matemáticas[12], en este sentido y desde entonces se han puesto en marcha diferentes investigaciones[13] que estudian los fenómenos de enseñanza y aprendizaje que atañen a las diferentes culturas, en vista de que la reforma educativa privilegió el contexto de la vida diaria como uno de los pilares fundamentales en la adquisición significativa del conocimiento matemático.

En virtud de ello, esta investigación bajo el enfoque Etnomatemático pretende atender estas necesidades educativas, aportando a la recuperación de los saberes matemáticos autóctonos de las prácticas culturales portejadeñas, dónde de alguna forma se pretende recuperar la identidad de esta comunidad, puesto que culturas afrocolombianas como esta no cuenta con elementos didácticos que le facilite a su sistema educativo el diseño de actividades matemáticas contextualizadas, donde se beneficie su derecho a la Etnoeducación. En particular, se pretende realizar un estudio etnográfico de esta cultura, enfocado en la descripción y análisis de sus costumbres estéticas de trenzados desde una perspectiva matemática, que además de ser una práctica cultural predominante, tiene un origen ontológico que permite deducir de forma parcial que estos individuos al trenzar cabello desarrollan y ponen en práctica las matemáticas inconsciente e intuitivamente.

[12] "La didáctica de una disciplina es la ciencia que estudia, para un dominio particular (en nuestro caso las ciencias y las matemáticas), los fenómenos de las enseñanzas, las condiciones de la transmisión de la "cultura" propia a una institución (específicamente, las instituciones científicas) y las condiciones de la adquisición de conocimientos por parte de un aprendiz." su preocupación central es elaborar estrategias de intervención adecuadas y efectivas, y para ello debe situarse en la realidad del aula" (Arboleda & Castrillón, 2007)

[13] Tales como la teoría de las situaciones didácticas (TSD) (Brousseau, G, 1998), la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 1992), organizadores del currículo (Rico & Sierra, 1991) entre otras.

En esta dirección, se busca también favorecer los fines de la EM, que según los estándares básicos de competencia y lineamientos curriculares, pretende, entre otros aspectos, desarrollar individuos competentes[14] que sepan hacer en contexto, no en uno cualquiera, pues no se trata de maquillar la educación tradicional sino de lograr problematizar los contenidos matemáticos, que según lo que expone Pólya (1965) no consiste en involucrar arbitrariamente objetos matemáticos en cualquier contexto, sino de privilegiar el contexto de la vida diaria. En consecuencia, se pretende consignar una serie de elementos teóricos didácticos como herramienta pedagógica para los interesados en la Educación Matemática y sea bajo este enfoque que se privilegie el contexto portejadeño, otorgando las bases fundamentales para abrir la posibilidad del diseño de tareas y/o secuencias enriquecedoras que promuevan y posibiliten la construcción significativa del conocimiento matemático de los estudiantes, a su vez se facilite el desarrollo de los procesos[15] de comunicación, pensamiento crítico y lógico, la modelación y la formulación de conjeturas, y al mismo tiempo, se fortalezcan dichas prácticas culturales.

[14] Por competentes se entiende lo consignado en (MEN, 2006)
[15] Los procesos mencionados aquí, son los consignados en los estándares de competencia básica en matemáticas, ver en el MEN (2006)

2 Capítulo 2 Marco conceptual [16]

Los antecedentes consignados en este trabajo han permitido constatar efectivamente que se han hecho pocas investigaciones preocupadas en rescatar los saberes matemáticos autóctonos de los grupos afrodescendientes, como lo es el caso particular del municipio de Puerto Tejada Cauca. Estos argumentos a su vez han permitido exponer la problemática educativa que enfrenta este municipio en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Desde el marco legal se ha podido justificar la importancia de esta investigación como un derecho del municipio de Puerto Tejada, en virtud de sus particularidades étnicas y, a su vez, se ha evidenciado desde los estándares básicos y lineamientos curriculares que esta investigación es una necesidad de la Educación Matemática y sistemas educativos, pues estos deben proveer a las diferentes culturas una educación matemática desde el enfoque sociocultural.

En este sentido, en este capítulo se expone los elementos de carácter conceptual que se consideran pertinentes para el desarrollo de esta investigación, pues bien, como es de menester en este tipo de investigaciones, se hace necesario sustentar desde unas bases teóricas didácticas y/o matemáticas los argumentos expuestos hasta aquí, de manera que sean útiles para cumplir los objetivos de este trabajo.

Por ende, en un primer momento se presenta la caracterización de la comunidad de estudio (portejadeña). En un segundo momento, se describen las dos fuentes didácticas principales usadas en la investigación, Etnomatemática y prácticas matemáticas, las cuales se encuentran fuertemente vinculadas con la perspectiva sociocultural de la Educación Matemática que es sobre quien reposa la investigación. En un tercer momento, se expone el referente conceptual en relación con el software de geometría dinámico ‘GeoGebra’ ya que es el medio que nos permitió modelar de forma más eficaz y precisa los saberes matemáticos inmersos en la práctica de trenzado artesanal afro, así como conjeturar y constatar con precisión ciertos comportamientos, esto a través de las representaciones bidimensionales de dicha práctica y nuestro papel como investigadoras. Y, por último, se

[16] Se habla de referente conceptual, debido a que no está constituido con elementos de una sola teoría, sino, de diferente naturaleza.

consignan los referentes matemáticos fundamentales para el desarrollo de esta investigación.

2.1 La cultura afrodescendiente Portejadeña

Por afrodescendientes se entiende a los descendientes africanos y africanas, provenientes de diversas regiones y etnias de África que llegaron al país en condición de esclavos. Estos individuos se caracterizan, por lo general, por tener una tez muy oscura, cabeza alargada, frente ligeramente abombada, nariz chata y más ancha, ojos oscuros, labios más gruesos, pelo oscuro y rizado, piernas largas y estatura elevada y, poseen costumbres y una identidad cultural única en comparación con otras culturas del país.

El ministerio de cultura (2010), presenta una caracterización bastante clara y específica de la cultura afrodescendiente aquí en Colombia en particular. Primero se menciona el amplio debate que se ha generado al tratar de responder cuál es el etnónimo correcto para denominar tal cultura, con lo cual se llegó a la conclusión de denominar Afrocolombianos a las comunidades con huellas africanas, aunque existen movimientos que se han autodenominado negritudes para hacer énfasis a las connotaciones negativas que se han hecho alrededor del color piel "negro" que hicieron de esta categoría colonial un dispositivo legitimador de marginación social, que debe reconocerse mientras a su vez se lleva a cabo un proceso de re significación de lo negro, y de los aportes afrocolombianos a la construcción de la nación colombiana. Señala que, en 1991, la cultura afrodescendiente fue denominada y reconocida por primera vez como tal en Colombia, como pueblo con un conjunto de derechos colectivos que forma parte de la diversidad étnica y cultural de la Nación, por primera vez reconocida constitucionalmente. Y se define como:

> "un conjunto de familias de ascendencia afrocolombiana que posee una cultura propia comparte una historia, y [que] tiene sus propias tradiciones y costumbres dentro de la relación campo-poblado, que revela y conserva conciencia de identidad que la distingue de otros grupos étnicos… (Art.2. De la Ley 70/1993 citada en: Ministerio de Justicia y del Interior de Colombia, s.a)." (Ministerio de cultura, 2010 p.2)

Las comunidades auto reconocidas como negro, mulato o afrocolombiano se concentran en el departamento del Valle del Cauca, en donde habita el 25,53% de la población (1'090.943 personas). Le sigue Antioquia con el 13,88% (593.174 personas), Bolívar con el 11,50% (491.364 personas) y Chocó con el 6,69% (285.964 personas). Estos cuatro departamentos concentran el 57,59% poblacional de este grupo étnico. De manera que las comunidades negras y afrocolombianas representan el 10,31% de la población total de Colombia (Ministerio de cultura 2010)

2.1.1 Historia

La población afrocolombiana está compuesta por hombres y mujeres con una marcada ascendencia (lingüística, étnica y cultural) africana. Los y las afrocolombianos (as) son algunos de los descendientes de africanos y africanas- provenientes de diversas regiones y etnias de África- que llegaron al continente americano en calidad de esclavos.

Existe el imaginario social de que la población negra afrocolombiana llegó a los territorios de la actual Colombia como un grupo homogéneo y que aún lo es, y esta es una creencia equívoca. La población afrocolombiana incluye una gran diversidad cultural y regional, que a grandes rasgos incluye la población afro de los valles interandinos, de las costas atlántica y pacífica, las zonas de pie de monte caucano, y de la zona insular caribeña. Además de las comunidades afrocolombianos palenqueras (descendientes de los cimarrones que huyeron y constituyeron palenques, residencias anticoloniales, fortificadas y aisladas en las que se concentraron como esclavos libres); y raizales (descendientes del mestizaje entre indígenas, españoles, franceses, ingleses, holandeses y africanos, en las islas caribeñas de San Andrés, Santa Catalina y Providencia (Ministerio de cultura, 2010)

Esta investigación se centra en el estudio de la población que habita en las zonas de pie de monte Caucano, en particular en el municipio de Puerto Tejada ubicado en el Norte del Cauca.

Figura 1*a* Mapa del municipio de Puerto Tejada, Cauca, proporcionado por Google Maps

El territorio que hoy se conoce como norte del Cauca y del que hace parte Puerto Tejada, "corresponde con los términos de la jurisdicción de la ciudad colonial de Caloto" (Zuluaga & Romero, 2006). Puerto Tejada se fundó para "meter en orden" a los negros de los ríos Palo, Paila y Guengüe. Fue en ese proceso de resistencia que, durante los siglos XVIII y XIX, negros esclavos y libres se tornaron imposibles de controlar por parte de los hacendados; pero con mayor fuerza desde la promulgación de la ley de abolición de la esclavitud en 1851. Desde entonces esta población recién liberada se asentó en las haciendas a través de diversas formas de colonato para aprovechar la fertilidad de las tierras donde construyeron fincas familiares dedicadas a la producción del cacao, tabaco, café, yuca, maíz y plátano, dando lugar a una potente economía agrícola de colonos y terragueros a finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX.

Puerto Tejada, también nombrado Monte Oscuro es el resultado de la colonización de tierras planas y bajas diferente a la de laderas, pues no se hace con inmigrantes sino por expansión de la propia población sobre dominios privados y no sobre improductivos de la nación, de la resistencia al sistema esclavista manejado desde Popayán[17], y de la lucha por la libertad de los hombres de raza africana que, desde el siglo XVIII, sirvieron de fuerza productora de riqueza de Caloto; fundamentalmente en las minas y en las haciendas latifundistas esclavistas que ahora corresponden al norte del actual Departamento del

[17] Capital del departamento del Cauca

Cauca: Japio , La Bolsa, Quintero, Pílamo, Guayabital, Güengüe, San Fernando, La Ciénaga, El Ortigal. Junto a Puerto Tejada surgen 10 pueblos más, los cuales aceleran la descomposición final del régimen colonial y esclavista que sobrevivía a finales del siglo XIX, y crea las condiciones para la entrada del capital comercial caleño y de extranjeros orientado hacia la exportación de cacao, tabaco y café, y al inicio de la implantación cañera en **1940** y a su expansión paroxística en **1960-70.**

2.1.2 Aspectos socioculturales

Los ritos y las tradiciones afrocolombianas condensan la resistencia ancestral de estas comunidades, la cual les permitió conservar su cultura y sus saberes ancestrales. Desde tiempos coloniales las prácticas y los objetos rituales y festivos afro- como el currulao y otros bailes, instrumentos musicales como la marimba y el tambor, sus prácticas medicinales y curativas - fueron estigmatizadas y/o condenadas por la iglesia católica como actos y objetos sospechosos, oscuros o del demonio. Las festividades son la representación del sentimiento colectivo, algunas de ellas transitan entre lo divino y lo mundano, y son el reflejo del proceso adaptativo y de diversas formas de reinterpretación de los símbolos y significados culturales. En Colombia los afrocolombianos participan en eventos como el Carnaval de Barranquilla, la Fiesta de Reyes- en el Festival Andino de Blancos y Negros-, las Fiestas del Diablo, las Balsadas de los Santos en el Pacífico, en los que se expresan las herencias de la cultura africana con bastante colorido y contenido iconográfico.

2.2 Etnomatemática

Se ha recurrido a una fuente de investigación denominada Etnomatemática, la cual está fuertemente vinculada con una perspectiva sociocultural de la Educación Matemática. En las siguientes líneas de este apartado, se exponen los preliminares y origen de la Etnomatemática, el Programa de Etnomatemática como campo de investigación y Educación Matemática y, por último, las tensiones y preocupaciones del programa Etnomatemática.

2.2.1 Preliminares y origen de la Etnomatemática

La Etnomatemática surge principalmente por la necesidad de plantear la Educación Matemática desde una perspectiva sociocultural. Así pues, la Etnomatemática se basa en una forma de construir el conocimiento matemático, donde se considera la diversidad cultural, el respeto por la diferencia entre estas y las influencias culturales en los procesos de aprendizaje de los sujetos.

Sin embargo, es importante señalar que las matemáticas disciplinarias adoptadas actualmente en Latinoamérica están lejos de ceñirse a los parámetros que caracterizan a la Etnomatemática, en general, las matemáticas que se enseñan son producto de las implicaciones que trajo consigo la colonización Europea; de modo que, la visión de las matemáticas adoptada por nuestras culturas es el resultado de la compilación y estructuración de conocimientos matemáticos producidos por pueblos como Asia, África, y Europa en respuesta a sus esfuerzos por sobrevivir. Bajo estas consideraciones, la matemática occidental fue adoptada a nivel mundial, e impuesta como la única manera de hacer y conocer. En efecto, la visión de las matemáticas occidentales no incluye los conocimientos matemáticos autóctonos de las culturas latinoamericanas (Parra, Osorio, & Rincón, 2015). En particular, en la cultura colombiana, los planes de aula dejan de lado a sus comunidades afrodescendientes, indígenas y las diversas comunidades que hacen parte de nuestra nación.

No obstante, D´Ambrosio (2012) refiere que en el quinto congreso internacional de la Educación Matemática del año 1984 bajo su plenaria "*sociocultural bases for mathematical Educacion*", propuso por primera vez la Etnomatemática como un campo de investigación enfocado en resaltar la necesidad de una perspectiva sociocultural para la Educación Matemática. Por ende, sus primeros esfuerzos se centraron en señalar los factores sociales, históricos, culturales y lingüísticos que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje, resaltando la necesidad de vincular la Educación Matemática escolar con el contexto sociocultural en el que se desarrolla con otras disciplinas. Según D'Ambrosio (2012) "el programa de Etnomatemática desafía la visión convencional en la cual la ciencia; y esto incluye las matemáticas, es considerado un fenómeno occidental moderno único" P. 4

En este sentido, el surgimiento de la Etnomatemática motivó a investigadores que tenían una idea implícita de Etnomatemática y usaban terminologías como: socio matemáticas, matemáticas espontáneas, matemática informal, matemática oprimida, matemáticas populares, matemática codificada en el saber hacer, matemática oral, matemática implícita, matemática no profesional, matemática contextualizada; hacer énfasis sobre la forma en que diferentes culturas no occidentales, en función de sus necesidades particulares, desarrollan conocimientos matemáticos autóctonos, y cómo ello, a su vez, puede ser útil para los procesos de enseñanza y aprendizaje (Albanese, 2014)

2.2.2 Programa de Etnomatemática como campo de investigación y Educación Matemática

El programa de Etnomatemática es considerado como un campo de investigación que tiene como fin estudiar las ideas, los procedimientos y las prácticas matemáticas originadas en contextos culturales específicos que responden a diversas formas de vida y se desarrollan a partir de la necesidad de sobrevivir y trascender, tanto en el tiempo como en el espacio (D´Ambrosio, 2012)

En este sentido, la Etnomatemática posibilita realizar estudios al interior de cualquier comunidad: grupos de niños de la calle, comunidades afrodescendientes, comunidades científicas (matemáticos, médicos, etc.), comunidades indígenas, carpinteros, albañiles, campesinos o cualquier otro grupo sociocultural con el fin de evidenciar las distintas prácticas matemáticas que culturalmente son producidas (Parra, Osorio, & Rincón, 2015).

En esta dirección, D'Ambrosio (2012) menciona que las diferentes investigaciones desarrolladas bajo el enfoque Etnomatemático, han permitido reconocer e identificar dentro de las prácticas cotidianas de las diferentes culturas, ideas matemáticas explícitas e implícitas de observación, comparación, clasificación, ordenación, medición, cuantificación, reconocimiento de simetría, entre otras ideas matemáticas, y a su vez, se ha determinado que los procedimientos y algoritmos matemáticos utilizados por individuos de grupos culturales específicos para solucionar problemas cotidianos, son distintos de los aprendidos en la escuela. Es decir, difieren de las estructuras matemáticas disciplinares estandarizadas.

En este sentido, la escuela que es considerada como una cultura[18] escolar compuesta por un conjunto de normas, reglas de trabajo, comportamientos y valores entre otros aspectos; al mismo tiempo contiene una diversidad cultural, puesto que cada estudiante en ella representa una cultura diferente. Por lo tanto, no se debe impartir una enseñanza en el aula que sea independiente de la forma en que los estudiantes acostumbran a construir conocimientos. Más aún, la educación escolar no puede ignorar los contextos socioculturales en los que se está ubicado, ya que cada estudiante llega a la escuela con un bagaje de conocimientos y perspectivas originados de los contextos culturales en base a las experiencias propias (Rosa & Orey, 2013).

Bajo estos parámetros, los estudiantes llegan al aula de clase con un bagaje de conocimientos que han construido a partir de sus experiencias, en los cuales encierran los diferentes mecanismos, técnicas y estrategias que constantemente ponen en práctica para desenvolverse frente a las situaciones problemáticas que enfrentan a diario. Si bien desde la Etnomatemática este es un punto a favor, para los sistemas educativos no es suficiente, pues es necesario e importante que los estudiantes logren adquirir un conocimiento matemático más estructurado de las matemáticas.

En función de lo anterior, el programa de la Etnomatemática brinda elementos al estudiante con el objetivo de alcanzar un conocimiento matemático más estructurado, pues ayuda al alumno: 1) a formalizar el conocimiento matemático significativamente a través de sus propias vivencias. 2) a atribuirle significado y sentido al conocimiento matemático formal. 3) a que este logre comparar críticamente la versión oficial y la informal de las matemáticas. En efecto, el conocimiento informal de los estudiantes puede actuar como la cuota inicial para la adquisición del conocimiento matemático disciplinar, puesto que desde

[18] En la medida en que un complejo de compresiones (conjunto de ideas de naturaleza única, es decir, valores, paradigmas, tradiciones, relaciones sociales y políticas) sea compartido por un grupo de personas, estas pertenecerán al mismo grupo cultural, tales compresiones se convierten en su cultura; en este sentido, un individuo puede pertenecer a más de una cultura. (Bishop, 1999)

esta perspectiva se le ayuda al estudiante a disminuir las barreras y el distanciamiento que generalmente se crea entre los saberes matemáticos académicos y los cotidianos (Rosa & Orey, 2006)

Dentro de este contexto, Rosa & Orey (2006) argumentan que si desde la perspectiva Etnomatemática, el currículo escolar logra proporcionar el equilibrio necesario entre las matemáticas académicas y las matemáticas informales de los alumnos; es decir, si se logran propiciar dentro del aula los encuentros entre los saberes matemáticos que los alumnos adquieren fuera del aula y los saberes matemáticos académicos; se puede lograr mancomunadamente varias cosas: primero, que los estudiantes logren humanizar las matemáticas y adquieran la construcción significativa de estos conocimientos, puesto que ambos saberes se complementan mutuamente. Segundo, que el aprendizaje sea una contribución mutua y enriquecedora entre las distintas perspectivas culturales que manifiestan los participantes en el aula a través de la comunicación. Y tercero, que los estudiantes mantengan su identidad y conserven sus características culturales y sociales.

Sin embargo, es importante concientizar los entes que hacen parte del sistema educativo: administradores, directivos, profesores y educadores para que puedan valorar la diversidad cultural presente en las escuelas, y entender que cada individuo inmerso en la cultura escolar interpreta a través de sus lentes culturales[19] de forma distinta a los otros individuos, y que aquello involuntariamente siempre está funcionando y ejerciendo una gran influencia en la manera en que logran adquirir el conocimiento y que por tanto, es necesario que la diversidad cultural escolar en lugar de ser ignorada, sea incorporada y tenida en cuenta en los currículos. Rosa & Orey (2006)

2.2.3 Tensiones y preocupaciones del programa Etnomatemática

Una vez se ha descrito los propósitos de este enfoque y sus distintas potencialidades; es importante exponer algunas problemáticas o críticas que el programa de etnomatemática ha tenido que enfrentar, con el fin de no caer en ningún prejuicio y así,

---

[19] Se entiende por lentes culturales como la forma particular en que un individuo le da sentido o asigna un significado a algo lo cual depende o es influenciado estrechamente por la cultura a la que pertenece. Según Delpit, (1995) citado en (Rosa & Orey, 2006)

poder delimitar claramente los criterios que desde este enfoque son fundamentales para el desarrollo de esta investigación.

2.2.3.1 Problematización de las prácticas culturales ¿acto político de resistencia o reforzamiento de la matemática disciplinar?

Una primera tensión radica en que si bien la Etnomatemática busca defender y resaltar las distintas formas de conocimiento, tomar las matemáticas disciplinares como un referente bajo el cual se deben valorar las prácticas culturales, termina provocando que estas prácticas culturales sean solo un medio que permite abordar eficazmente los contenidos matemáticos impartidos por la academia, lo cual no fundamenta el argumento del enfoque sociocultural de la educación, debido a que este indica que la matemática occidental (matemática disciplinar) es solo una de las formas que puede tomar el conocimiento matemático, pero no se agota en todo su esplendor.

Otro factor polémico circunda en el hecho de denominar matemáticas, a prácticas culturales que no están contenidas en la estructura matemática disciplinar estandarizada hoy en día, ya que para muchos investigadores las prácticas que caracterizan a la etnomatemática son un acto político consciente de resistencia cultural deliberada por parte de las comunidades que están involucradas. En otras palabras, este enfoque etnomatemático para muchos investigadores es considerado como una fachada adoptada por grupos culturales para esconder su deseo de rebelarse contra el sistema.

2.2.3.2 Problema de la identificación y la perspectiva: que se observa y desde dónde se observa

Otra tensión, se relaciona con las diferentes perspectivas desde las que se asume la Etnomatemática; puesto que muchos han polemizado alrededor de si considerar o no como matemáticas a las prácticas culturales que originalmente no fueron concebidas ni desarrolladas bajo el modelo de esta disciplina, esta crítica es conocida como paradoja de Millroy (1990). Se argumenta que este es un problema de reflexividad que depende de la mirada o punto de vista del investigado, en este sentido se ha argumentado que la inconformidad de los críticos parte de la metodología empleada para discernir tal conocimiento, pues si se adoptara otra metodología de investigación diferente de la etnográfica, podría disminuirse o mejor, disolverse tal tensión.

2.3 Prácticas matemáticas

según Albertí, M (2007) citado en Gonzales y Zambrano (2011), la práctica es una actividad sociocultural en la que se resuelven situaciones con un objetivo bien determinado por medio de unos conocimientos necesarios y específicos, que se infiere son propios de la cultura. Bajo estos presupuestos, los componentes fundamentales que intervienen en una práctica son los autores, procedimientos, tecnología y objetivo. Específicamente en esta investigación los autores son los artesanos, es decir, los peinadores; los procedimientos dan cuenta de los procesos que se realizan para llevar a cabo un peinado; la tecnología refiere los instrumentos auxiliares que se necesitan para llevar a cabo la práctica en cuestión, en el caso particular de la práctica que se analiza en esta investigación, corresponde a las peinetas de diferente tamaño y forma, cauchos, gel y apliques entre otros objetos que en su momento se detallarán; y el objetivo, es el producto final de la realización de una práctica (trenzado de cabello resultante)

Sin embargo, hablar de práctica es una idea general que desborda los propósitos de esta investigación, por lo cual es necesario enfocarse en una situación particular, así pues, como el eje central de este trabajo se fundamenta en el campo de las matemáticas, se debe recurrir a la idea de práctica matemática propuesta por Albertí.

Albertí (2007) menciona que en una práctica se pueden distinguir situaciones que llevan inmersas consideraciones matemáticas y otras que no; entonces ¿qué hace que una situación sea o no matemática? La respuesta puede ser variada en función de la resolución que cada individuo haga de tal situación, es decir; sólo si el individuo trae consigo un pensamiento matemático para su resolución, se le puede atribuir a una situación la cualidad de ser una situación matemática dentro del contexto de una práctica (práctica matemática). En esta orden de ideas y, dado que los términos práctica y situación tienen un vínculo fuerte, se dice que una práctica es matemática dependiendo del conocimiento que cada individuo tiene o utiliza para resolver la situación.

En síntesis, las prácticas matemáticas son aquellas que, para la resolución de las situaciones vinculadas, requieren del uso de conocimientos matemáticos ya sean implícitos o explícitos, formales o informales. Sin embargo, no se debe considerar que una práctica, es práctica matemática sólo por el hecho de conllevar conceptualizaciones o representaciones propias de las matemáticas. Esto debido a que el significado de práctica matemática es más profundo, porque es en la resolución matemática de una situación que se tiene que ser consciente de lo que se hace y por qué se hace. No obstante, se debe señalar que el sujeto no debe ser necesariamente consciente del hecho de que su quehacer puede ser analizado desde una perspectiva matemática, basta que éste tenga un propósito claro del porqué de su práctica. Es decir, no importa que el sujeto no reconozca lo matemático de su quehacer, ya que eso sólo le concierne al interesado, en este caso al investigador.

En correspondencia con lo anterior, es pertinente cuestionarse entonces sobre: ¿cómo identificar cuándo una práctica es matemática sin caer en errores? y ¿cómo localizar las matemáticas en las distintas situaciones que practican los individuos de una cultura? Al respecto, Albertí menciona un argumento que precisa y da cuenta de la importancia y contundencia que este término tiene para las investigaciones vinculadas al enfoque Etnomatemático.

> Sin embargo, si la práctica y la experiencia perceptiva del entorno representan el origen del conocimiento matemático, este comienza a ser adquirido por quien lleva a cabo la práctica, tal vez la cuestión esté en la idea de práctica, por lo que encontramos un primer motivo para concretar el significado de *prácticas matemáticas.* Albertí, M (2007) citado en (Gonzales y Zambrano, 2011, P. 46)

Lo que expresa Albertí (2007) en esta afirmación se puede ilustrar remontándose a la época del hombre primitivo. En la que el ser humano en su deseo de organizar la sociedad, registrar y llevar un control de todas sus pertenencias, entre otras necesidades, empezó a usar sus extremidades físicas (dedos de las manos y pies) e incluso otros elementos como piedras o palos de manera que pudiesen atribuir a cada uno de dichos elementos, cierta cantidad de ganado, por ejemplo. Dicha práctica la conocemos actualmente mediante el término de “ley de correspondencia”.

De esta manera, la práctica cultural que exploró el hombre primitivo bajo la necesidad de controlar, registrar y organizar sus pertenencias, puede ser considerada una práctica matemática, puesto que dicha actividad fue realizada con un objetivo bien determinado y bajo unos conocimientos propios de dichas culturas, que están estrechamente relacionados con las matemáticas. En esta dirección, la ilustración anterior permite no sólo sustentar sino también esclarecer la idea de que hay prácticas culturales en las cuales están inmersas las matemáticas. Por ejemplo, lo que hizo el hombre primitivo fue contar, estableciendo relaciones de correspondencia entre ciertas cantidades, ahora sabemos que cada cultura primitiva exploró el conteo, tal vez de formas distintas, pero, lo importante es que las diferentes estrategias usadas por cada una de ellas para controlar, registrar y organizar su sociedad convergieron en la idea de contar.

Al respecto Bishop (1991) citado en Gonzales y Zambrano (2011), bajo la consigna de que las matemáticas son un producto cultural, establece seis actividades matemáticas universales que son comunes de todas las culturas. Estas seis actividades se dividen en tres grupos. El primero, encierra la actividad de contar y medir, las cuales se cree son las dos actividades matemáticas principales, pues son la base para el desarrollo de las otras cuatro actividades matemáticas. El segundo grupo está conformado por las actividades de localizar y diseñar, las cuales están relacionadas estrechamente con el concepto de la geometría y el espacio, y el último grupo de actividades, jugar y explicar, hacen referencia a la interacción social de las matemáticas, la comunicación.

Cada una de estas seis actividades universales, puede ser relacionada con algunos de los cinco pensamientos y/o procesos matemáticos propuestos que propone el MEN (2006). En este sentido, la actividad de contar está relacionada estrechamente con el pensamiento numérico y sistema numérico, puesto que son actividades centradas en la comprensión y usos de los significados del número incluyendo su sentido, significado y relaciones en las cuales se desarrollan diferentes técnicas para realizar cálculos y estimaciones.

En segunda instancia, se tiene la actividad universal de medir la cual está relacionada estrechamente con el pensamiento métrico y los sistemas de medida, ya que los conceptos que se movilizan en este tipo de actividades hacen referencia a lo que un individuo entiende de manera general sobre los conceptos de “cantidad” y “magnitud”, incluyendo las estrategias que usa para medir en determinadas situaciones.

Por su parte, las actividades de localizar y diseñar se relacionan estrechamente con el pensamiento espacial y sistema geométrico, puesto que en este tipo de actividades los sujetos tienden a identificar, relacionar e interactuar con diferentes objetos en un espacio, y a su vez, suelen atribuirles a dichos objetos propiedades y características propias de la geometría. Y, por último, se tiene las actividades de jugar y explicar que están estrechamente relacionadas con el proceso matemático de la comunicación, porque mediante el juego y la explicación, los individuos expresan y representan la adquisición del conocimiento matemático generando ambientes de aprendizaje significativos.

Ahora bien, se puede inferir que Albertí, M (2007) propone estas seis actividades matemáticas universales con el fin de determinar que todo tipo de práctica que, en su resolución, necesariamente involucre una o más de estas actividades, partiendo de un propósito o intención claramente definido por el autor, puede ser considerada una práctica matemática cultural digna de este tipo de análisis.

2.4 Geogebra como medio para desarrollar los procesos de modelación.

Para los intereses de este trabajo, se ha optado por integrar el software de geometría dinámico “GeoGebra” como un medio que permite de una forma práctica e innovadora modelar los fenómenos físicos presentes en la realidad. Este software, según González, L (2016), es una herramienta tecnológica potente para la enseñanza de las matemáticas, libre y gratuita, que posibilita abordar los Objetos Matemáticos (OM) de una forma dinámica. Geogebra, se destaca principalmente por integrar la geometría (involucra el CAS y las hojas de cálculo en un solo software) de manera que permite la construcción y exploración de figuras en segunda y tercera dimensión. Su característica principal es representar de múltiples formas las relaciones que hay entre la geometría, el álgebra, el cálculo, la estadística y la probabilidad. Este software, facilita la visualización y el reconocimiento de las características y propiedades de los OM, puesto que provee una vista gráfica y múltiples herramientas que posibilitan la interacción con los objetos representados.

GeoGebra, actúa también como un eficaz simulador de los fenómenos reales ya sean matemáticos o naturales. Por lo que es común usar este software para los siguientes escenarios de actuación:

1. **Herramienta de visualización de los OM:** GeoGebra ofrece una visión dinámica, así como una representación en múltiples registros de los OM, de modo que los participantes mediante la función de "arrastre" pueden "visualizar los OM" y a la vez "explorar los OM visualizados". En efecto, este software permite interactuar de forma eficaz con los OM, de tal manera que se evidencia directamente el paso de la representación estática a la representación dinámica de estos objetos conservando sus características y propiedades.
2. **Herramienta de construcción de los OM:** GeoGebra permite utilizar sus diferentes herramientas de construcción (puntos, rectas, segmentos, ángulos…) para acceder a las distintas representaciones semióticas de los OM, especialmente a las figuras geométricas en 2D y 3D, donde se favorece el estudio de dichos objetos en todo su esplendor, más allá del lápiz y papel.
3. **Herramienta de descubrimiento:** Este software posibilita la identificación de patrones, características, códigos, invariantes y regularidades de los OM, por lo que brinda una construcción significativa de los conocimientos matemáticos en juego.
4. **Representación y comunicación de los OM:** GeoGebra es un insumo para la Educación Matemática que favorece los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta, en tanto que profesores y estudiantes pueden comunicar y representar los OM, en concordancia con la infraestructura tecnológica que el mundo actual exige.

De las anteriores formas descritas para el uso de GeoGebra, esta investigación se enfocará particularmente en hacer uso de la herramienta de construcción de los OM y la herramienta descubrimiento, de modo que se pueda llevar a cabo una apropiada modelación de la práctica del trenzado de cabello que a su vez de lugar a un análisis enriquecedor de la misma. Se adoptará la herramienta de construcción puesto que tal como su nombre lo indica, permite construir representaciones gráficas de los fenómenos permitiendo la identificación de patrones, esquemas y características propias de los procesos de trenzado, En función de este último aspecto, se hace necesario recurrir al segundo escenario de actuación, es decir, la herramienta de descubrimiento. De esta manera, será posible pasar de simples representaciones semióticas a representaciones que puedan dar cuenta de forma apropiada a la modelización matemática del proceso de trenzado.

En síntesis, el Software GeoGebra se consolida como un medio eficaz para la modelación de los OM. Bajo estos presupuestos, esta investigación pretende utilizar dicho software para trabajar la fase metodológica “MOM”, puesto que ofrece características propias y eficientes para modelar dinámicamente tanto la actividad matemática como los fenómenos de la vida diaria. En particular, aquí se implementa GeoGebra para modelar los trenzados artesanal de cabello afro; puesto que favorece la construcción figural de lo que se pretende analizar y, a su vez, permite garantizar las condiciones para crear un escenario que promueva la observación, experimentación y el descubrimiento de patrones que se movilizan en este fenómeno, lo cual brinda más elementos para hacer una traducción del lenguaje informal a un lenguaje formal de las aproximaciones matemáticas descritas en estos procesos de trenzado.

Por otro lado, para llevar a cabo las dos grandes fases de esta investigación ‘MOM y MET’, es importante delimitar los elementos que facilitan la recolección e interpretación detallada y precisa de los datos a recolectar incluyendo las respectivas técnicas de recolección que se adoptaran para que ello sea posible. En concordancia con esto, se considerará para el desarrollo de esta investigación la utilización de: cartas, diarios personales, fotografías, grabaciones de audio y video mediante el uso de los dispositivos tecnológicos como lo son los teléfonos celulares, las tabletas entre otros. También, serán considerados otros objetos como prendas de vestir, grafiti y toda clase de expresiones artísticas, documentos escritos de cualquier tipo, archivos, huellas, medidas de erosión y desgaste, etcétera. Es importante mencionar que el investigador es la principal fuente de recolección de datos pues es quien constantemente interactúa con la cultura (Fernández, Hernández, & Baptista, 2014). Con base en lo anterior, los instrumentos de recolección de datos que se utilizaran para esta investigación son principalmente: grabadoras de sonido, filmadoras, cámaras de teléfono, hojas de block en las que ellos puedan expresar y dibujar sus peinados y los diarios de campo.

2.5 Referentes matemáticos

En el siguiente apartado se pretende dar cuenta de los referentes matemáticos necesarios para desarrollar la etapa correspondiente al análisis de esta investigación. Cabe resaltar que en esta investigación no se propuso identificar en dicha práctica un concepto matemático en específico, sino que ese criterio se dejó abierto de manera que se pudiese contar con más posibilidades de recolección y análisis de los datos, considerando además que en este tipo de investigaciones es muy común recolectar información que supere o modifique los objetivos inicialmente propuestos.

Con base en lo anterior, una vez realizada la descripción de los ejemplares que son objeto de estudio para esta investigación, se identificó y se hizo la selección de los saberes matemáticos identificados en la práctica artesanal de trenzado de cabello afro en la comunidad de puerto tejada, dignos de análisis. Esta selección se hace sobre la base de dos consignas: primero, se busca limitar en la medida de lo posible la extensión del trabajo, puesto que la diversidad y riqueza que es encontrada en los peinados rebasa los tiempos de investigación y restringe la profundidad del trabajo. Segundo, se intenta trabajar sobre aquellos saberes matemáticos inmersos en los procesos de trenzado, que evidencian en lo más posible un comportamiento análogo al que emana de los conocimientos matemáticos formales.

Bajo estas consideraciones, para la etapa de análisis de esta investigación se identificó y seleccionó principalmente cinco saberes matemáticos[20] implícitos en los procesos de trenzado. Como se ha mencionado antes, en la práctica del trenzado afro se movilizan dos modalidades de tejido; la trenza y la tropa simple, y en ambas modalidades se debe considerar la categoría proceso y la categoría producto. En este sentido, en la

---

[20] Se han llamado saberes matemáticos principales puesto que, también se pudo observar otras saberes matemáticas como: noción de cantidad, razón, proporción, funciones, polígonos irregulares, etc. Estas nociones no serán consideradas en la etapa de análisis de esta investigación ya que no cumplen con todos los criterios de selección mencionados.

categoría proceso se identificó una aproximación a los conceptos matemáticos de grafos y permutaciones. Por otro lado, en la categoría producto se identificó una aproximación a los conceptos matemáticos de las transformaciones geométricas proyectivas de reflexión y homotecia y las unidades de medida no estandarizadas. A continuación, se abordará primero la perspectiva formal de las matemáticas identificadas en la categoría proceso de los trenzados de cabello afro y luego los identificados en la categoría producto.

2.5.1 Teoría de grafos

Es importante mencionar que el concepto matemático de grafos identificado en el proceso de trenzado artesanal de cabello afro, se encuentra contenido en una teoría matemática más amplia, denominada teoría de grafos. En este sentido, se aborda el concepto de grafos bajo el referente de la teoría de grafos desde la perspectiva de Espinosa, R (2010).

Espinosa, R (2010), expone que un grafo se puede entender intuitivamente como un gráfico pictórico que indica a través de líneas cualquier recorrido que se haya hecho de un lugar a otro. En este sentido, dado dos conjuntos finitos no vacíos en un plano, $V: \{vértices\}\ y\ E: \{aristas\}$; se define un grafo G, como la conformación de un todo unificado entre los conjuntos $V\ (G)$ y $E\ (G)$. En otras palabras, se puede decir que un grafo une dos vértices (puntos) en un plano a través de una arista (línea), donde a cada par de vértices que se conectan a través de una arista se les llama vértices adyacentes o puntos críticos, y se dice que aquella arista incide sobre dichos puntos críticos. Ver *figura 1.* Sin embargo, existen grafos que tienen vértices adyacentes a sí mismos, un ejemplo de ello es cuando una arista comienza y termina en el mismo vértice. El grafo que se forma bajo esta característica se le llama bucle. Ver *figura 2.*

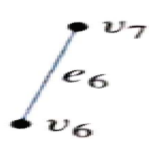


Figura 1 Grafo. La arista e_6 une el par de vértices adyacentes v_7 y v_6, incidiendo sobre ellos.

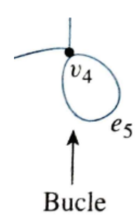


Figura 2 Bucle. Arista e_5 empieza y termina en el mismo vértice v_4.

Ahora bien, si dos o más aristas inciden sobre el mismo vértice se llaman aristas adyacentes ver *Figura 3*, mientras que cuando hay al menos un par de aristas diferentes conectadas mediante el mismo conjunto de vértices, se dice que las aristas son paralelas ver *figura 4*. Existen también, vértices sobre los cuales no incide ninguna arista, en tal caso se dice que es aislado *ver Figura 5.*

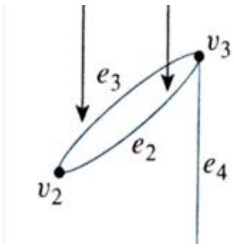


Figura 3 Aristas adyacentes: e_{3}, e_2 y e_{4}, son aristas adyacentes pues todas inciden o se conectan en el vértice v_3

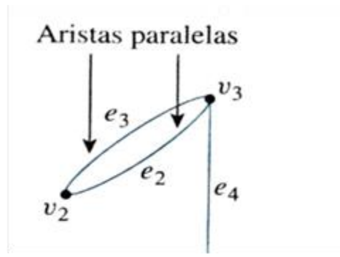


Figura 4 Aristas paralelas e_3 y e_2 son aristas paralelas pues tienen en común los mismos vértices adyacentes.

Figura 5 Vértice aislado. Se muestra el vértice v_5, aislado puesto que sobre él no incide ninguna arista.

Para los intereses de este trabajo se distinguen tres tipos de grafos, que son denominados dentro de la teoría de grafos, descrita por Espinosa, R (2010), como grafos especiales. Algunos de ellos se definen a continuación:

1. **Grafo dirigido:** este tipo de grafos establece la relación de una arista *e*, no con un conjunto de vértices sino específicamente con un par ordenado de vértices (u, v) en donde se dice que e es la arista dirigida de u a v, y en la cual esta asociación se indica a partir de una flecha que va de u a v, como se observa en la *figura 6.*

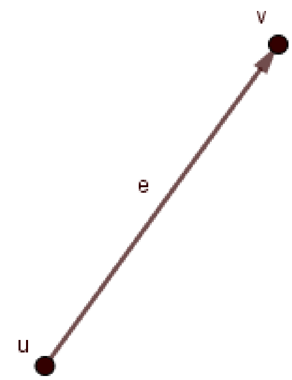


Figura 6 Grafo dirigido. Con arista e que va de u a v

2. **Grafo simple:** un grafo simple es aquel que no contiene bucles ni aristas paralelas, solamente se compone de una arista e que relaciona exactamente dos puntos extremos, o vértices adyacentes (u, v), como se observa en la *figura 7.*

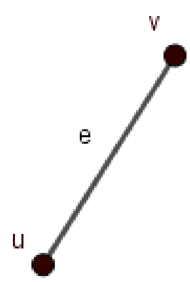


Figura 7 grafo simple. Con arista e y vértices adyacentes (u, v)

3. **Grafo completo:** un grafo es completo si se compone de varios grafos simples. En este sentido, si n indica el número de vértices del grafo completo entonces se tiene que al menos una arista conecta a cada par de vértices de dicho grafo. Ver ejemplo en la *figura 8.*

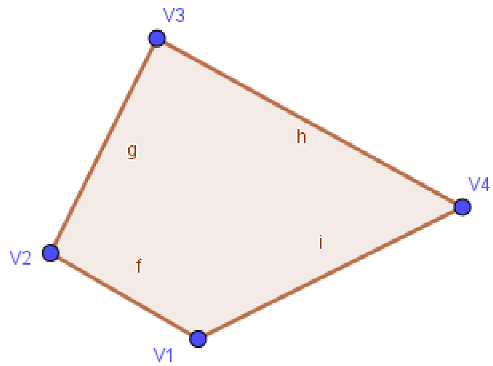


Figura 8 Grafo completo con vértices (V1, V2, V3, V4) y aristas (f, g, h, i)

Este último tipo de grafos permite introducir un concepto clave en la teoría de grafos, se trata de los subgrafos.

2.5.1.1 Subgrafos

Un subgrafo según Espinosa, R (2010) corresponde a uno o más grafos simples que hacen parte del grafo completo. Esto es, si se tiene un grafo G, ver *figura 9,* se dirá que el grafo H, ver *figura 10,* es un subgrafo de G si cumple tres condiciones: 1) cada vértice de H debe ser también un vértice de G. 2) cada arista de H debe ser también una arista de G, y 3) cada arista en H debe tener los mismos vértices adyacentes que están en G.

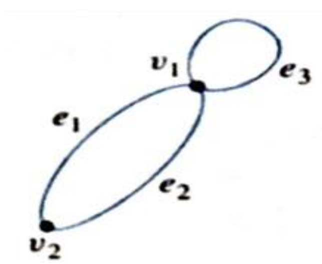


Figura 9 Grafo G. En esta imagen se muestra el grafo G, indicando sus determinados vértices y aristas.

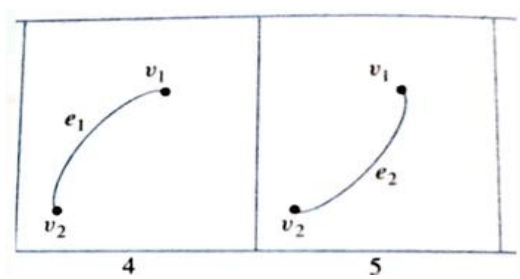


Figura 10 Subgrafo H del grafo G. Se muestran dos posibles subgrafos de G, donde se evidencia que cada vértice y arista de H, es también vértice y arista de G, de modo que H y G tienen los mismos vértices adyacentes.

En últimas, se puede decir que cualquier tipo de grafo, dirigido, simple, compuesto, subgrafo o cualquier otro tipo; debe estar compuesto por dos elementos básicos: vértices y aristas. En este sentido, la teoría de grafos contiene un concepto que relaciona estrechamente estos dos elementos de una forma particular, y da cuenta de uno de los teoremas fundamentales de esta teoría, este concepto se conoce como el grado de un grafo.

2.5.1.2 Grado de un grafo

Espinosa, R (2010), menciona que en un grafo el grado de un vértice corresponde al número de aristas que inciden en él. Es decir, el número de segmentos que se interceptan en determinado vértice. El concepto de grado es importante en la teoría de grafos, ya que por teorema se tiene que la suma de todos los grados de los vértices de un grafo es equivalente al doble de las aristas que hay en dicho grafo. Ver *figura 11.* Tal como lo muestra la imagen, se tiene un grafo G, compuesto por cuatro vértices: $\{3, 4, 5, 6\}$ y cuatro aristas: $\{c, e, f, g\}$.

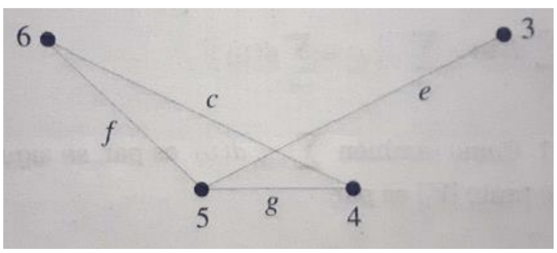


Figura 11 Grafo G, demostración del teorema del grado de un grafo. Este grafo contiene cuatro aristas y cuatro vértices. La suma de los grados de cada vértice, 8, es exactamente el doble de las aristas del grafo.

Como se puede observar, sobre el vértice 3 incide solo una arista, la arista e, sobre el vértice 4, inciden dos aristas, g y c. A su vez, sobre el vértice 5 inciden tres aristas, f, g y e. Y, por último, sobre el vértice 6 inciden dos aristas, f y c. Por consiguiente, se tiene que la suma de todos los grados de cada vértice del grafo G es igual a 8, y esa cantidad corresponde exactamente al doble del número de aristas del grafo, que es 4.

2.5.1.3 Caminos, senderos, trayectorias y circuitos

Dentro de la teoría de grafos, Espinosa, A (2010) señala que se encuentran trayectorias que cumplen ciertas especificidades. Esto se puede ejemplificar a partir de situaciones de la vida cotidiana en las que para ir de un lugar a otro no hay solo un camino; y por tanto, se pueden encontrar rutas más cortas, rutas más largas, atajos, entre otros. Regularmente la elección de la ruta a tomar depende de los intereses de cada uno.

Por ejemplo, alguien se quiere dirigir de un punto a a un punto b, pero debe pasar por el punto c, entonces tal persona intentará tomar la ruta que le permita pasar por los tres lugares de tal manera que en lo posible no requiera devolverse o recorrer dos veces el mismo camino; sin embargo, puede darse el caso en que para dirigirse a c necesariamente deba pasar por un camino ya recorrido en el trayecto de a a b. Considere como ejemplo el grafo completo G de la *figura 12*, la cual muestra que G se compone de cinco vértices { u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 } y siete aristas $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7,\}$.

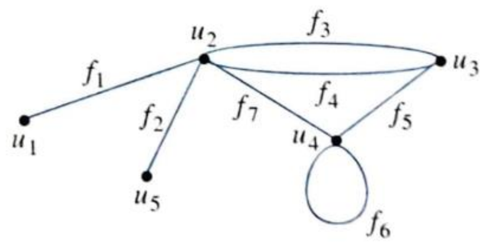


Figura 12 Grafo completo G, donde se indican dos recorridos o rutas que se pueden tomar para ir de la posición u_1 a la posición u_4

Observe que si se quiere ir del vértice u_1 al vértice u_4 se puede tomar el siguiente recorrido: $u_1\, f_1\, u_2\, f_7,\, u_4$ Es decir, se puede empezar en el vértice u_1, pasar por la arista f_1, parar en el vértice u_2, luego pasar por la arista $f_{7,}$ y finalmente llegar al vértice u_4. O se puede tomar el recorrido dado por: $u_1\, f_1\, u_2\, f_3\, u_3\, f_5\, u_4$ es decir, empezar en u_1 pasar por la arista $f_{1\,,}$ parar en el vértice $u_{2\,,}$ pasar por la arista $f_{3,}$ llegar al vértice $u_{3\,,}$ pasar por la arista $f_{5,}$ y finalmente llegar al vértice u_4.

Como se puede evidenciar, si se quiere desplazar de un lugar a otro hay diferentes rutas o recorridos que se pueden tomar. En este sentido, la teoría de grafos considera especial cuatro tipos de recorridos. A continuación, se procede a describir cada uno de esos recorridos desde la perspectiva de Espinosa, A (2010).

Camino. Dado un grafo G y un par de vértices de G (u, v), un camino de u a v es una sucesión finita alternada de vértices adyacentes y aristas entre sí. Ver *figura 13*

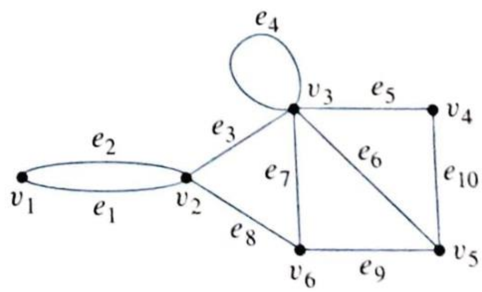


Figura 13: En el grafo G el recorrido $v_1 e_2 v_2\ e_8 v_6\ e_8\ v_2\ e_3$ configura un camino puesto que es una sucesión alternada de vértices adyacentes y aristas entre sí, en este tipo de recorridos no importa si se pasa dos veces por el mismo vértice o arista.

Sendero. Dado un grafo G y un par de vértices de G (u, v), el sendero de u a v se define como aquel camino que no contiene una arista repetida**.** Ver *figura 14*

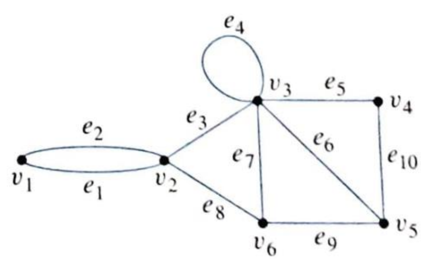


Figura 14: En el grafo G el recorrido $v_1 e_2 v_2\ e_3 v_3$ configura un sendero, puesto que está compuesto por una sucesión alternada de vértices adyacentes y aristas entre sí, y además no contiene una arista repetida, es decir no pasa dos veces por el mismo camino.

Trayectoria: Dado un grafo G con u y v vértices de G, una trayectoria de u a v corresponde al sendero que no contiene un vértice repetido. Esto implica que el camino a seguir no tiene ni aristas ni vértices repetidos. Ver *figura 15*

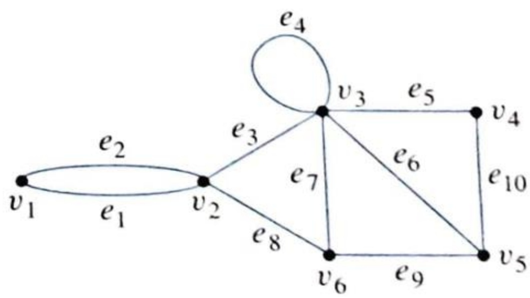


Figura 15 Grafo G en el que se considera el recorrido $v_1 e_2 v_2\ e_8 v_6$ en el cual se tiene una sucesión alternada de vértices adyacentes y aristas entre sí, en la que no se pasa dos veces por el mismo vértice y arista, por lo que este recorrido configura una trayectoria.

Un circuito. Dado un grafo G con u y v vértices de G, el circuito de u a v corresponde al camino que no tiene un vértice repetido, pero además el vértice donde empieza G termina G.

A partir de lo anterior, se tiene que cualquiera de los recorridos mencionados configura un camino, puesto que siempre se va a tratar de recorridos compuestos por una sucesión alternada de vértices adyacentes y aristas entre sí; algunos bajo ciertas especificidades.

2.5.1.4 Circuitos de Euler

Leonhard Euler, según lo menciona Espinosa, R (2010), después de plantearse el problema de los siete puentes de Königsberg[21], descubrió que, si se quiere ir de un lugar a otro sin pasar dos veces por el mismo lugar o repetir camino, se debe cumplir que las salidas que haya para ir de dicho lugar a otro deben ser múltiplo de dos, es decir, debe ser par. Teniendo en consideración situaciones similares a lo propuesto por Euler sobre el puente Königsberg, se definen los circuitos de Euler en honor a él como un tipo de grafos especiales. Así pues, en un grafo G se encuentra un circuito de Euler si se satisface tres condiciones: primero, en G hay al menos un bucle. Segundo, cada vértice de G se debe

[21] En el problema de los siete puentes de Königsberg, Euler se plantea la siguiente pregunta: ¿se puede recorres toda la ciudad sin pasar dos veces por un mismo puente? A esta pregunta la respuesta fue negativa, dado que Euler concluyó que no todos los puntos por los que se pasaban tenían un número par de salidas, por lo que resultaría imposible recorrer la ciudad sin pasar dos veces por un mismo lugar.

utilizar al menos una vez, y tercero, cada arista de G se debe utilizar exactamente una vez. Bajo estas consideraciones, se garantiza el teorema que dice, para que cada camino de G sea recorrido exactamente una vez se debe cumplir que el número de aristas que incidan sobre cada vértice de G sea par. En otras palabras, el grado de cada vértice de G debe ser múltiplo de dos.

2.5.2 Permutaciones y combinaciones

Según Espinosa, R (2010), los conceptos de permutación y combinación en matemáticas suelen ser muy útiles cuando se desea identificar dentro de un determinado conjunto, los elementos que satisfacen ciertas condiciones. Este tipo de procedimientos suelen hacerse de manera informal, por ejemplo: si se quiere conocer cuántos subconjuntos o grupos diferentes de dos elementos se pueden obtener del conjunto de los números naturales menores que diez, se puede recurrir a varias estrategias para llegar a la respuesta; por conteo, tanteo, ensayo y error, lápiz y papel, entre otras formas. Sin embargo, los conceptos de permutación y combinación permiten determinar este tipo de respuestas de una manera más precisa, formal y rápida, de tal forma que se logre identificar los elementos de dicho conjunto que cumplen con las características deseadas.

2.5.2.1 Permutaciones

Sea A un conjunto no vacío. Una $k-permutación$ es un arreglo ordenado de todos los elementos del conjunto A . En este sentido si A tiene una cantidad n de elementos; una permutación puede entenderse como un subconjunto ordenado de A con un numero k de elementos distintos de n. Para simbolizar el número de $k-permutaciones$ de un conjunto n, se utiliza la notación $P\ (n,k)$. Ejemplo: si A= $\{a,b,c\}$ entonces: $P\ (3,2) = 6.$ Es decir, las $2-permutaciones$ (agrupaciones ordenada de dos elementos) del conjunto A son $\{ab,ac,ba,bc,ca,cb\}$. Matemáticamente se puede predecir el comportamiento de $P\ (n,k)$ mediante la fórmula:

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

En esta fórmula, el resultado indica el número de permutaciones que se deben obtener para determinado conjunto. Espinosa, R (2010)

2.5.2.2 Combinaciones

Sea A un conjunto no vacío. Una k −combinación de A, es un subconjunto de A con una cantidad k de elementos de dicho conjunto. Para determinar el número de combinaciones de un conjunto se utiliza la notación $C\ (n, k)$. Ejemplo: si se tiene $A = \{a, b, c\}$ entonces $P\ (3, 2) = 3$. Es decir, las 2 −combinaciones (agrupaciones de dos elementos) del conjunto A son $\{ab, ac, bc\}$ respectivamente. La fórmula matemática que describe el comportamiento de C (n, k) está dada por:

$$C\ (n, k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Como se pudo observar, si bien tanto las permutaciones como las combinaciones son subconjuntos con un número k de n elementos de un conjunto determinado, la diferencia sustancial entre ellas consiste en que en las permutaciones importa el orden en que se organizan los elementos, mientras que en las combinaciones sólo importa la presencia del elemento en el subconjunto. Es decir, mientras que desde el concepto matemático de combinación significa lo mismo tener (a, b) y (b, a) porque en cualquiera de los dos conjuntos los elementos a y b están presentes; desde el concepto matemático de permutación no es lo mismo puesto que no sólo importa la presencia del elemento en el subconjunto sino también el orden en que se ubican los elementos. En este sentido, (a, b) es diferente de (b, a). Espinosa, R (2010)

Como se mencionó en la introducción de este capítulo, las nociones matemáticas presentadas hasta aquí corresponden a la perspectiva formal de las prácticas matemáticas inmersas en la categoría proceso de las modalidades de trenzado ‘tropa y trenza simple’. A continuación, se detalla la perspectiva formal de las prácticas matemáticas inmersas en la categoría producto de las dos modalidades de trenzado ‘trenza y tropa simple’. Estos referentes corresponden por una parte a las unidades de medida no estandarizadas y por otra a la rama de la geometría, en particular la geometría proyectiva, de donde se destacan las transformaciones proyectivas de simetría y homotecia.

2.5.3 Unidades de medida no estandarizadas

Godino, J. Batanero, C & Roa, R. (2002) mencionan que medir, en su sentido más amplio, se puede entender como la acción que permite asignar un código al grado o modalidad en que una característica identifica un objeto perceptible, que puede variar o coincidir con respecto a las características de otros objetos. Esta definición permite incluir no sólo las medidas cuantitativas y continuas como las de peso, longitud y densidad, que son las más utilizadas para dar cuenta de esta acción, sino que también permite considerar medidas cualitativas, como el color de los ojos de una persona, su color de piel, el clima de un lugar, sensaciones etc. En relación con lo anterior, es importante hablar de Magnitud, pues en últimas eso es lo que pretende la acción de medir.

Al respecto, Godino, J. Batanero, C. Eat (2002) mencionan que el concepto de magnitud generalmente se relaciona con la función de atribuir un valor cuantitativo, continuo o discreto a los atributos o rasgos característicos de un objeto, acción o situación. Ya sea un valor de tiempo, longitud, intensidad de corriente eléctrica, sustancias, masas, temperatura o intensidad luminosa; la magnitud es la cantidad en que una característica es valorada. Así pues, si se habla de medir una cantidad lo que se busca es determinar numéricamente cuántas veces dicha cantidad contiene una cantidad de referencia. Es aquí donde toma lugar la unidad de medida, puesto que al realizar una medición se debe asignar como mínimo un valor numérico y una unidad de medida. Es importante resaltar que la cantidad asignada a cierta medida no es independiente a la unidad de medida tomada o viceversa, puesto que sin una no se puede dar cuenta de forma acertada de la otra.

Al respecto, es importante señalar que los conceptos de medida y magnitud tuvieron su origen en los escenarios remotos de problemáticas sociales, tal como lo refiere (Godino, Batanero. Eat 2002). Por ende, se puede inferir que las magnitudes y unidades de medida son en sí Etnomatemáticas, y que las situaciones que le dieron origen a estos conceptos son prácticas matemáticas. En efecto, el cuestionarse sobre cuántas cosas tenía cada familia, la dificultad de trasladar un objeto en el espacio y tiempo a otro lugar debido a su tamaño y naturaleza desconocidos; llevaron a las personas a buscar estrategias que les permitieran alivianar dichas cargas. En síntesis, se trataba de relacionar las características de los objetos conocidos con los que no conocían, De manera que los objetos de referencia (conocidos) se convirtieron en su patrón o unidad de medida. Por ejemplo, se empezó a usar una cuerda para determinar el ancho de un mueble, y se empezó a registrar la cantidad de ovejas en el redil, con marcas en un palo. Así pues, la cuerda y las marcas en el palo configuraron en un principio las primeras unidades y patrones de medida, de tal forma que a una magnitud se le atribuía un valor numérico y unidad de medida. En este sentido, se decía por ejemplo que el mueble medía tres veces la cuerda; así pues, en esta magnitud, el valor numérico es el tres y la unidad o patrón de medida es la cuerda.

Bajo estas consideraciones, se tiene que las unidades de medida estandarizadas que hoy se conocen como los Segundos para medir el tiempo, el Metro para medir longitudes, los Amperios para medir la intensidad de corrientes eléctricas, los Moles para medir la cantidad de sustancias, los Kilogramos para medir la masa, los grados Kelvin para medir la temperatura, la Candela para medir la cantidad luminosa, etc.; se configuraron en un principio sobre la base de las unidades de medidas informales o no estandarizadas. Con el tiempo, las unidades de medida informales como “la cantidad de cuerda que se vaya” o “la cantidad de marcas en el palo que se hagan” fueron modificándose, en función de las necesidades sociales porque se empezó a necesitar unidades de medidas más precisas que respondieran satisfactoriamente a las necesidades sociales.

En últimas, el cambio en el uso de las unidades de medida no estandarizadas al uso de las unidades de medidas estandarizadas, fue producto de problemas de precisión y errores de medida. Aunque como lo señalan Godino, J. Batanero, C. Eat (2002), al medir una cantidad de magnitud continua se pueden cometer al menos dos errores: errores en el procedimiento a causa de la persona que mide, o errores causados por la configuración del instrumento de medida. Estos últimos, suelen deberse a la fabricación del instrumento, de manera que estos errores no pueden ser completamente eliminados, por lo tanto, ninguna medida es exacta; todas las medidas son aproximadas. En efecto, la exactitud de la medida que se tome está ligada a la precisión del instrumento que se utilice para medir, en tanto que la precisión de un instrumento indica la mínima variación que puede ser determinada sin error. En este sentido se tienen instrumentos más precisos (estandarizados) y menos precisos (no estandarizados), los cuales arrojan medidas más exactas y medidas menos exactas respectivamente. En definitiva, lo anterior muestra que es totalmente acertado medir con unidades de medida no estandarizadas. Pues si bien, las medidas estandarizadas pueden resultar más precisas, los procedimientos no estandarizados también son válidos.

En función de lo anterior, Godino, J. Batanero, C. Eat (2002) señalan que si bien determinar magnitudes de medida, en función de sistemas de medidas legales tiene ventajas muy sobresalientes en cuanto a precisión y comunicación (puesto que son reglas y códigos de uso que la mayoría de culturas conocen y adoptan) en comparación con los sistemas regulares e irregulares de medidas; estos dos últimos, también pueden ser aceptados y adoptados para llevar a cabo diversas prácticas culturales, sociales y educativas que involucren la acción de medir. Es más, Godino, J. Batanero, C. Eat (2002) afirman que enfrentar este tipo de situaciones reales y problemáticas sociales que requieren de la actividad de medir, y que a su vez promueven que los individuos adopten unidades de medida no convencionales como los sistemas regulares e irregulares de medidas[22], puede actuar como un subsidio para que los estudiantes, o bien las personas en general, pueda atribuirle sentido y significado social, cultural y científico a los conceptos formales de magnitud y unidades de medida, logrando no necesariamente que ellos reinventen por sí solos las técnicas de medida sino más bien que dominen los respectivos procedimientos.

2.5.4 Geometría proyectiva

Entre las diversas geometrías[23] conocidas está la geometría proyectiva, la cual es fundada por matemáticos franceses a mediados del siglo XII, cuyo principal exponente fue Gerald Desargues en 1639. Desargues trabajó y completó la idea de perspectiva geométrica del siglo XV; en efecto, su tratado original sobre las secciones cónicas marco gran impacto en la idea de proyección. Sin embargo, la noción de proyección que se tenía entonces fue consolidada en lo que hoy se conoce como geometría proyectiva, solo hasta el siglo XIII[24]

[22]Un sistema regular e irregular de medida hace referencia respectivamente al uso de una unidad de medida no estandarizadas como patrón, o bien, al uso de más de una unidad de medida no estandarizada para precisar de forma más exacta la magnitud.

[23] Sabiendo que la geometría es el estudio de las propiedades y las medidas de las figuras en el plano, en la actualidad se distinguen 49 tipos de geometrías, entre estas se destacan la geometría plana, espacial, analítica, diferencial, proyectiva, geometría descriptiva, etc.

[24] La idea de perspectiva geométrica de Desargues fue retomada solo hasta este siglo, puesto que, en su época marco más impacto la geometría de Descartes.

con la aparición de la Géometrie descriptive de Gaspard Monge en 1795, la propuesta del Programa de Erlangen de Felix Klein en 1872, entre otros.

La geometría proyectiva surge de la necesidad de proyectar figuras tridimensionales en superficies bidimensionales. En particular, aparece como la solución al problema que tenía el artista al tratar de pintar el mundo tridimensional en sus lienzos bidimensionales. Ciertamente los artistas del Renacimiento[25] se interesaron profundamente e hicieron un gran esfuerzo en descubrir las leyes que rigen la proyección de un objeto sobre una pantalla, de modo que desarrollaron los elementos de una teoría fundamental de perspectiva.

Al hablar de perspectiva se hace referencia a las diferentes formas que tiene el ojo de observar un objeto en función del ángulo de donde se observe tal objeto, o también las diferentes imágenes que se proyectan de un mismo objeto en una pantalla al cambiar el ángulo de observación. Bajo estos presupuestos y dado que esta investigación toma como objeto de estudio proyecciones bidimensionales de los modelos de peinado, es pertinente rescatar algunos elementos de la idea de perspectiva que se trabaja desde la geometría proyectiva.

Pues bien, en la *figura 16* se da un ejemplo de la representación que adquiere un objeto tridimensional bajo un ángulo de observación determinado, así pues, el objeto bidimensional obtenido en la pantalla es obtenido a partir de lo que se denomina geometría proyectiva. En consecuencia, según Alberti (1435), citado en Luna y Álvarez (2005) si se considera una pirámide de rayos que parten del ojo al pintor (denotado como O en la *figura 16*) y terminan en cada punto de la escena que desea pintar (el cubo), a la pirámide de rayos que se forma se le llama proyección.

[25] Renacimiento es el nombre dado en el siglo XIX a un amplio movimiento cultural que se produjo en Europa en un período de transición entre la Edad Media y los inicios de la Edad Moderna impulsado por artistas tales como Leonardo dan Vinci, Miguel Ángel, Rafael Sanzio, entre otros. El Renacimiento es un movimiento cultural caracterizado por un retorno a las ideas e ideales culturales de la Grecia y Roma antiguas. Al margen, el significado original de la palabra refiere al acto de volver a nacer. Entonces, será descrito como una ruptura deliberada con las estructuras anteriores.

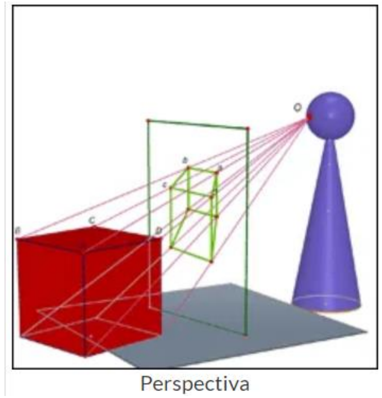


Figura 16: Ejemplo geometría proyectiva. La esfera azul representa la cabeza del sujeto, en la cual se ubica el punto O que representa el ojo. Aquí el sujeto observa a través de una pantalla de cristal el cubo rojo, formando así una sección del objeto. Tomada de: https://piziadas.com/2012/02/origen-de-la-geometria-proyectiva-renacimiento-alumnos.html

Si entre la escena y el ojo se coloca una pantalla de cristal como se muestra, cada uno de los rayos determina un punto sobre el cristal formándose así una sección. Esta sección crea en el ojo (reproduce) la misma imagen que la escena. Según la posición de la pantalla, se tiene distintas secciones del mismo objeto. Así pues, se establece una relación de transformación entre la figura original y la proyección de esta. Ver *figura 16*

Con base en lo anterior, la transformación es la operación u operaciones necesarias para convertir la figura dada en otra, de manera que exista entre los elementos de origen y los transformados una relación biunívoca. En específico, una transformación en el plano es una correspondencia uno a uno entre los puntos del plano. “Si un punto P se transforma en un punto P’ a este último se le conoce como la imagen y a P se le llama la preimagen” (Sángari, 2002)

En la actualidad, existen diversos tipos de transformaciones, esto en función de la geometría con que se estudie; sin embargo, Klein (1872), citado en Luna y Álvarez (2005) mostró que las propiedades básicas de una geometría como la de Euclides, pueden ser representadas por el grupo de transformaciones que preservan esas propiedades, por lo que el programa divide las geometrías en grupos y abarca tanto la geometría euclidiana como la no euclidiana[26]. Ver *figura 17.*

[26] Se designa geometría no euclidiana o no euclídea, a cualquier sistema formal de geometría cuyos postulados y proposiciones difieren en algún asunto de los establecidos por Euclides en su tratado de los Elementos.

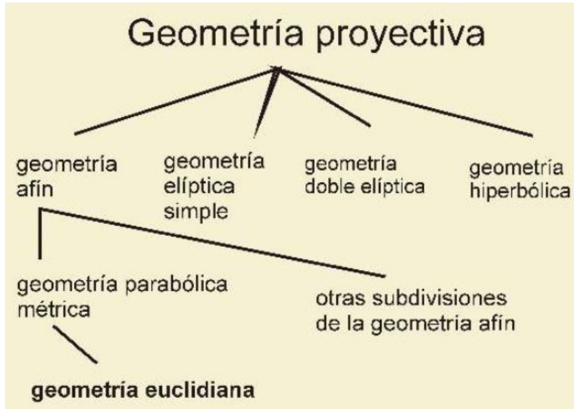


Figura 17 Clasificación de la geometría proyectiva dada por Klein (1872)

De donde se infiere que las geometrías pueden ser consideradas subgeometrías de la geometría proyectiva. De ahí que en esta investigación se habla de transformaciones proyectivas como objeto de análisis, en particular está geometría nos ofrece una base más consistente y completa en concordancia con los fines de este trabajo.

2.5.5 Transformaciones proyectivas

Las transformaciones proyectivas son aquellas que se obtienen de las aplicaciones de un espacio lineal (rectas, planos, espacios tridimensionales) en otro, de manera que cuatro puntos en línea recta se transforman en cuatro puntos en línea recta.

Según el sentido, la forma, y el tamaño de la figura original y la transformada en el plano; las transformaciones pueden clasificarse en tres tipos: isométricas, isomórficas y anamórficas.

Isométricas: Las transformaciones isométricas son movimientos de figuras en el plano que no alteran ni la forma ni el tamaño de esta. La palabra isometría tiene su origen en las palabras griegas iso y metría, que significan igual medida. Así pues, después de aplicar la isometría la figura inicial será congruente con la figura final.

Hay tres tipos de isometrías: Traslación, Simetría o Reflexión y Rotación. Estas transformaciones se realizan sin variar las dimensiones ni el área. La figura inicial y la final son semejantes y geométricamente congruentes. Sin embargo, se diferencian porque la traslación es un movimiento rígido en el plano de una figura donde cambia de lugar más no de posición alrededor de su eje, en la simetría una figura es simétrica a otra cuando cada uno de sus puntos está a la misma distancia del eje de simetría, pero en el lado opuesto de ese eje. Es decir, cambian la posición de los puntos que la conforman en sentido opuesto al eje. Y la rotación o giro es el movimiento que hace una figura sin cambiar de lugar, pero que adquiere distinta posición sobre su eje, es decir, el movimiento se hace en función del centro de rotación y el ángulo de rotación.

En la *figura 18* se puede observar la preimagen descrita por el triángulo XYZ que ha sido expuesto a diferentes transformaciones isométricas[27], donde se puede constatar que en las figuras (imágenes) transformadas cambia las posiciones o dirección de las figuras, más no su tamaño y forma.

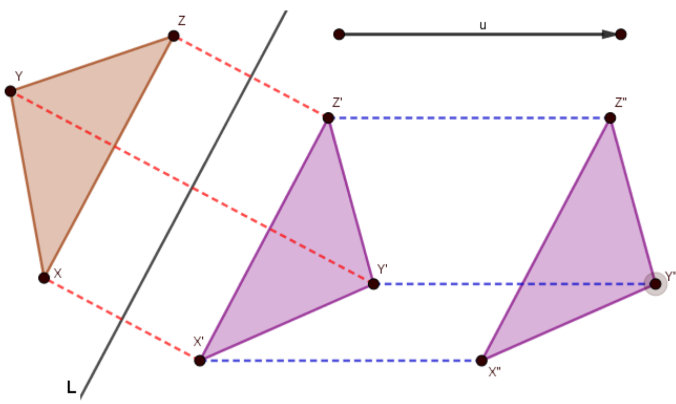


Figura 18 Composición de transformaciones isométricas, la figura xyz se transforma en la figura $x'y'z'$ mediante una simetría (reflexión) y esta a su vez se transforma en la figura $x''y''z''$ mediante una traslación con vector u

Así pues, se evidencia cómo en la traslación la figura cambia de lugar, más no la posición de sus puntos. Y en la simetría las figuras con sus respetivos puntos quedan en sentidos contrarios.

En síntesis, en términos de Klein, una isometría del plano es una función f: $R^2 \longrightarrow R^2$ que preserva distancias. Esto es, para todo (x, y) $\in R^2$ se cumple que $d(f(x), f(y)) = d\,(x, y)$; es decir, $||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$.

La definición anterior, es la manera formal de denominar la isometría cuando se trabaja sobre el plano cartesiano. Esta permite determinar la distancia entre puntos y por

[27] La sumatoria de estas transformaciones se le llama composición de transformaciones

ende la equidistancia de estos, con respecto a un eje de simetría. Esta entre los signos de valor absoluto () ya que las distancias no son negativas. Sin embargo, no especificaremos en ella, pues, la modelación que se hace de la aproximación reflexiva de los peinados afro en los análisis se trabaja a través de Geogebra y, está ya tiene incorporada la opción de distancia entre puntos u objetos.

Isomórficas: En geometría las transformaciones geométricas isomórficas son aquellas que sólo conservan la forma; es decir, en ellas los ángulos de la figura original y de la transformada son iguales y las longitudes proporcionales. La palabra isomórfica tiene su origen en el griego iso (igual o mismo) y morphe (mórfica) que significa igual forma. Se Pueden distinguir dos tipos; la semejanza y homotecia. En la semejanza lo esencial es que se conserve la forma, mientras que la homotecia, además de que se conserva la forma, también se conserva la posición de los puntos correspondientes; por lo tanto, los segmentos correspondientes entre dos figuras homotéticas son paralelas. En la *figura 19* se muestra un ejemplo de homotecia, donde se observa que los segmentos correspondientes son paralelos, mientras que en la *figura 20* se evidencia que los segmentos correspondientes de las tres figuras no son paralelos entre sí, a causa de ello, se habla de semejanza y no de homotecia.

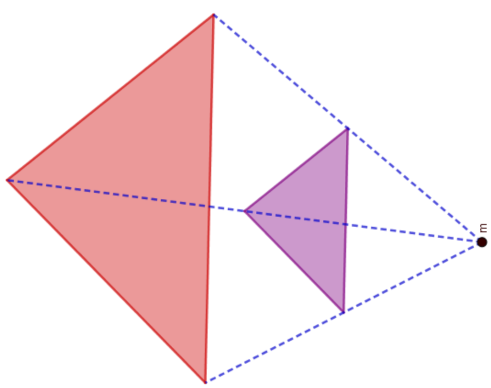


Figura 19 Homotecia de la figura pequeña (preimagen) en la figura grande (imagen) con centro E y razón de 2.

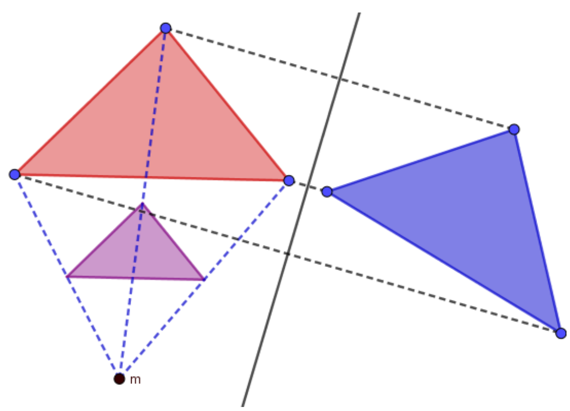


Figura 20 Composición de transformaciones que hace que las tres figuras sean semejantes

Con base en lo anterior se puede concluir que toda homotecia es una semejanza, pero que no necesariamente una semejanza es una homotecia.

Anamórficas: Son las transformaciones que no conservan la forma. Existen dos tipos: homología y afinidad. La homología es una transformación geométrica de una figura en otra coplanaria, de manera que se correspondan punto a punto y recta a recta, ver *figura 21*, respetando que: primero, dos puntos homólogos $(B \ y \ B')$ deben estar alineados en un punto fijo (O) llamado centro de homología; y segundo, dos rectas homólogas se cortan en una recta m llamada eje de homología.

Por otra parte, la afinidad es una transformación geométrica, en el que el centro de afinidad se encuentre en el infinito[28] (ver *figura 22*). En toda afinidad debe cumplirse que: toda recta que une dos puntos afines AA', son paralelas a la dirección de afinidad y dos rectas afines $r \ y \ r'$, se cortan en un mismo punto del eje de afinidad CC', siendo este un punto doble.

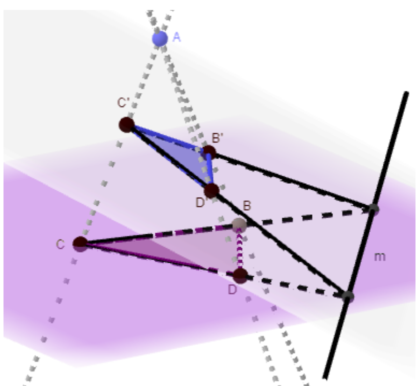


Figura 21 Homología con centro de homología A

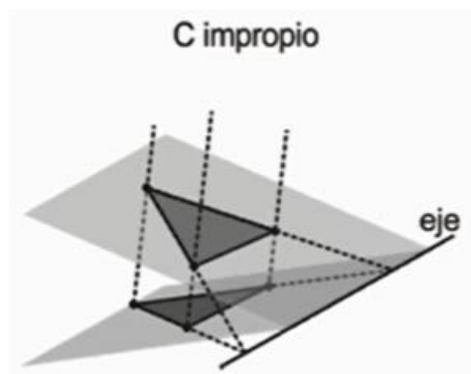


Figura 22 Afinidad con C impropio, es decir no tiene centro.

En esta investigación, se hace énfasis en un tipo de transformación isométrica, la simetría, y en un tipo particular de transformación isomórfica, la homotecia.

Antes de desarrollar estos apartados es necesario aclarar algunos conceptos básicos de la geometría plana y del espacio.

[28] Este centro de afinidad que se encuentra en el infinito es lo que se llama punto impropio en geometría proyectiva. Esto se explica con detalle más adelante.

> “Toda forma pictórica se inicia con un punto que se pone en movimiento... el punto se mueve... y surge la línea - la primera dimensión-. Si la línea se transforma en un plano, conseguimos un elemento bidimensional. En el salto del plano al espacio, el impacto hace brotar el volumen (tridimensional)... Un conjunto de energías cinéticas que cambian al punto en línea, la línea en plano y el plano en una dimensión espacial". (Klein, 1872, citado en Luna y Álvarez (2005), p. 202)

En resumen, el punto es la dimensión cero, la línea que se construye a partir de dos puntos es la dimensión uno, el plano que es la extensión de una línea es la dimensión dos, y, por último, la extensión de un plano se convierte en un volumen, es decir; la dimensión espacial (3D)

Ahora bien, una vez definidos los elementos básicos que forman el espacio, se debe precisar algunos elementos que presentan variaciones importantes en la geometría proyectiva con respecto a la geometría euclídea tradicional. Así pues, es necesario definir lo siguiente:

Elementos impropios: Los elementos impropios, también llamados elementos en el infinito, pertenecen a la geometría no euclídea o proyectiva. Esta geometría es desarrollada por el matemático Jean Victor Poncelet (1768-1867) el cual introduce variaciones importantes respecto a lo elementos básicos de la geometría euclídea tradicional.; por ejemplo, la recta y los planos paralelos pasan a ser secantes, ya que se cortan en el infinito; esta circunstancia no contradice la geometría euclídea, sino que la complementa, situándola en un ámbito espacial limitado.

- Punto impropio: O en el infinito, es el elemento común que tiene entre sí todas las rectas paralelas de un conjunto. Cualquier recta tiene un único punto impropio
- Recta impropia: O en el infinito, es el elemento común que tienen entre sí todos los planos paralelos de un conjunto. Cualquier plano tiene una única recta impropia.
- Plano impropio: es el lugar geométrico constituido por todos los elementos impropios de la geometría euclidiana. Existe un único plano impropio y todo aquel elemento que no esté incluido en el, es propio. (Ortiz &Angulo, 2010).

Establecidos los elementos clave de la geometría proyectiva, a continuación, se describe en detalle los tipos de transformaciones a las que se hace énfasis en esta investigación.

2.5.5.1 Isometría: Reflexión o simetría axial

La simetría como se mencionó líneas más arriba hace parte de las transformaciones isométricas y se caracteriza porque la figura original y la transformada conservan la misma forma y medida, son congruentes, es decir una es el reflejo de la otra.

Estas transformaciones o ideas de movimiento y de superposición estuvieron implícitas en el libro de los elementos de Euclides en sus demostraciones de congruencia. Puesto que, Klein (1872), citado en Luna y Álvarez (2005), expresa que Euclides basa sus demostraciones de congruencia en el postulado “cosas que coinciden una con la otra son iguales entre sí” de lo que es posible, como lo hizo Klein, formular en términos precisos los movimientos rígidos o isometrías del plano. En particular la simetría se define en los siguientes términos.

Sea *l* una recta en un plano. Una reflexión sobre la recta *l* es una transformación que proyecta cada punto *P* del plano sobre otro punto *P’* del mismo plano de manera que:

1. Si *P* está en *l* (eje de simetría), entonces $P' = P$. Ver *figura 23.*

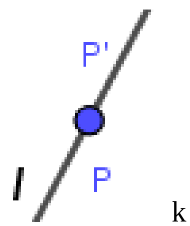


Figura 23: Simetría de *P* cuando *P* está en *l*

2. Si *P* no está en *l* (eje de simetría), entonces *l* es la mediatriz[29] del segmento *PP´*. *Ver figura 24*

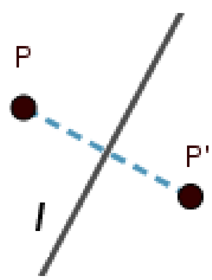


Figura 24: Simetría de *P* cuando *P* no está en *l*

---

[29] La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento y que pasa por el punto medio de éste

De la definición, se puede inferir lo siguiente, vea *figura 24*:

3. La distancia entre un punto y la recta de reflexión es igual a la distancia entre la recta y la imagen de ese punto, esto es la distancia $d(P\ l)\ = d(\ l\ P')$.
4. Los cuatro ángulos formados por la recta y el segmento $\underline{PP'}$ son rectos (90°)
5. La distancia entre un punto y su imagen es el doble de la distancia entre el punto y la recta de reflexión.

Hasta aquí se nombraron los elementos clave en lo que respecta a la reflexión, a continuación, se hace lo mismo para la homotecia que como se indicó es otro tipo de transformación

2.5.5.2 Isomorfismo: Homotecia

La homotecia es un cambio geométrico en el plano donde a partir de un punto fijo llamado centro (O), se multiplican las distancias por un factor común. De esta forma, cada punto P corresponde a otro punto P' producto de la transformación, y estos se encuentran alineados con el punto O (Ortiz & Angulo, 2010)

Una de las principales propiedades de la homotecia es que, por la razón de la homotecia (k), todas las figuras homotéticas son semejantes. Entre sus propiedades se destacan:

- El centro de la homotecia (O) es el único punto doble y este se transforma en sí mismo; es decir, no varía.
- Las rectas que no pasan por el centro se transforman en rectas paralelas; de esa forma, los ángulos de la homotecia se mantienen iguales.
- La imagen de un segmento obtenido a partir de una homotecia de centro O y razón k, es un segmento paralelo al original y tiene k veces su longitud. Por ejemplo, como se observa en la *figura 25* de un segmento $\underline{AB}$ resulta otro segmento $\underline{A'B'}$ al aplicarle una homotecia, de tal forma que $\underline{AB}$ es paralelo a $\underline{A'B'}$ con razón $K = \frac{\underline{A'B'}}{\underline{AB}}$.

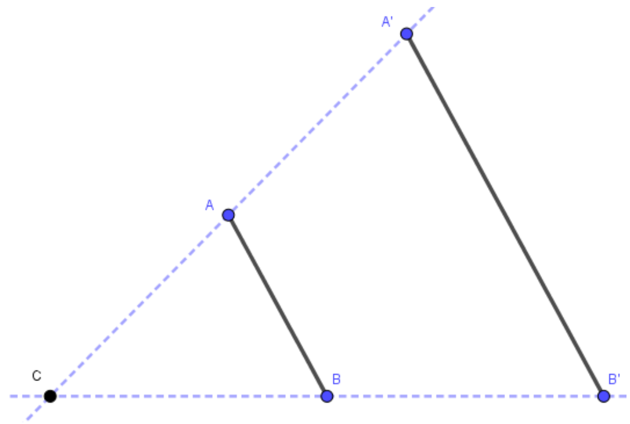


Figura 25 Si la magnitud de $\underline{AB}$ y $\underline{A'B'}$ es 1 y 2 unidades respectivamente, entonces la homotecia con centro C de $\underline{AB}$ tiene razón $k = 2$

- Los ángulos homotéticos son congruentes; es decir, tienen la misma medida. Por lo tanto, la imagen de un ángulo es un ángulo que tiene su misma amplitud (Ortiz & Angulo, 2010)

Por otra parte, se tiene que la homotecia varía en función del valor de su razón (k), así pues, se extraen las siguientes propiedades adicionales vinculadas a la razón (k).

- Si la constante $k = 1$, todos los puntos son fijos porque se transforman a sí mismos. Así, la figura homotética coincide con la original y la trasformación se llamará función identidad.
- Si $k \neq 1$, el único punto fijo será el centro de la homotecia (O).
- Si $k = -1$, la homotecia se convierte en una simetría central (C); es decir, ocurrirá una rotación alrededor de C, en un ángulo de 180°. Ver *figura 26*

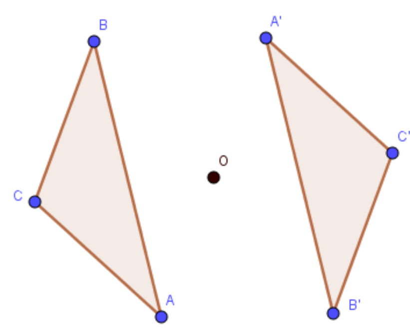


Figura 26 Homotecia del triángulo ABC con centro O y razón $K = -1$

- Si $k > 1$ el tamaño de la figura transformada será mayor al tamaño de la original.
- Si $0 < k < 1$, el tamaño de la figura transformada será menor que el de la original. Por ejemplo, en la *figura 27* se muestra la homotecia del triángulo ABC con centro de

homotecia O y razón $k = 0{,}5$, donde evidentemente la imagen $A'B'C'$ es menor en cuanto al tamaño.

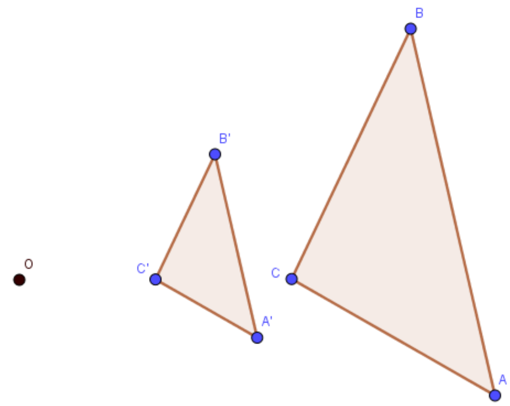


Figura 27: Homotecia del triángulo ABC con centro de homotecia O y razón $k = 0{,}5$

- Si $-1 < k < 0$, el tamaño de la figura transformada será menor y estará girada con respecto a la original. En la *figura 28* se muestra ejemplo de ello, al aplicarle una homotecia con centro O y razón $k = -\frac{1}{2}$ al triángulo ABC.

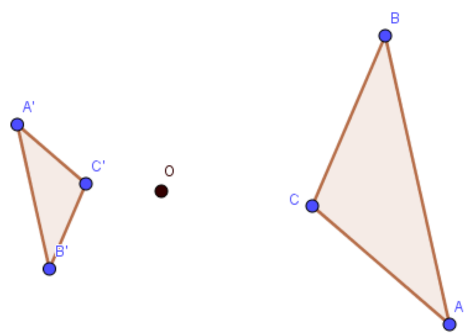


Figura 28 *Homotecia del triángulo ABC con centro de homotecia O y razón* $k = -\frac{1}{2}$

- Si $k < -1$, el tamaño de la figura transformada será mayor y estará girada alrededor de C, en un ángulo de 180° con respecto a la original. Ver *figura 29* (Ortiz & Angulo, 2010)

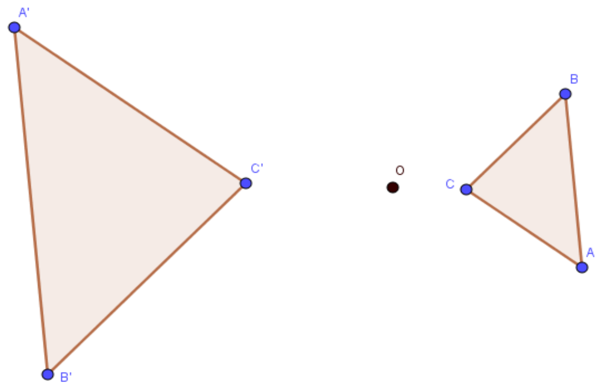


Figura 29 Homotecia del triángulo ABC con centro de homotecia O y razón $k = -2$

Con esta última propiedad asociada a la razón k de la homotecia, se finaliza la presentación de los referentes geométricos.

Hasta aquí se han mostrado los referentes matemáticos que le dan sustento a la presentación de las prácticas matemáticas seleccionadas y que están inmersas en los procesos de trenzado, los cuales son fundamentales para realizar y dar continuidad al análisis del proceso de trenzado que es la finalidad de los siguientes apartados.

3 Capítulo 3 Marco metodológico

Este trabajo tiene como objetivo general caracterizar las prácticas matemáticas inmersas en el proceso de trenzado artesanal de cabello afro en una comunidad del municipio de Puerto Tejada. En esta dirección, se han delimitado dos grandes fases para esta investigación, en concordancia con los dos objetivos específicos propuestos para el desarrollo de esta respectivamente. La primera fase, pretende identificar y describir los procesos de trenzado artesanal de cabello afro como una práctica cultural propia de la comunidad portejadeña. La segunda fase, consta de la identificación y el análisis de los saberes matemáticos subyacentes en los procesos de trenzado artesanal de cabello afro, a fin de determinar sus posibles relaciones e implicaciones curriculares y didácticos sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Así pues, para dar cuenta de las dos fases de desarrollo que movilizan nuestra investigación, es pertinente realizar un estudio etnográfico[30], el cual está enmarcado dentro de la metodología de investigación cualitativa que según Fernández, Hernández, & Baptista (2014) es una metodología que centra su atención en comprender los fenómenos culturales desde la perspectiva de los individuos pertenecientes a la cultura en cuestión; su propósito principal es estudiar la forma en que los nativos perciben y experimentan tales fenómenos, puesto que este tipo de investigación advierte que desde el punto de vista del nativo se pueden obtener interpretaciones enriquecedoras que permiten atribuir a tales fenómenos los significados que las personas le atribuyen naturalmente. Tal como lo señalan las investigaciones etnográficas, lo que los individuos expresen en relación con los fenómenos culturales en estudio, puede ser reinterpretado por otras personas, pero no puede ser modificado en su naturaleza, la esencia de lo que piensan los nativos al respecto no se puede cambiar, que es el objetivo de este tipo de investigaciones.

Desde los parámetros que rigen esta investigación se ha seleccionado del estudio etnográfico la metodología MOMET elaborada por Albanese, V (2014), la cual se ha

[30] La etnografía es entendida como aquellos procesos de investigación que generan datos descriptivos, en cuanto a incidentes claves y relevantes que se ubican en el contexto en el que han sucedido naturalmente.

considerado pertinente para el desarrollo de esta investigación, pues proporciona una forma precisa para describir y analizar los trenzados artesanales de una forma más estructurada y organizada, de manera que se pueda cumplir efectivamente con los objetivos propuestos para esta investigación. A continuación, se describe con detalle, en qué consiste esta metodología y cómo se desarrolla en esta investigación.

3.1 Método MOMET

El instrumento metodológico MOMET está constituido por dos componentes, que Albánese, V (2014) bautizó como MET (Método de análisis etnográfico) y MOM (modelización matemática o Modelo de análisis matemático) que en conjunto conforman el MOMET. El componente metodológico MET, es de tipo descriptivo, y será adoptado para desarrollar la primera fase de esta investigación que corresponde a la descripción del proceso de trenzado afro observado. Por su parte el componente metodológico MOM, es el instrumento que facilita analizar los datos recolectados a partir de una modelización matemática de los elementos encontrados, y se adoptará para desarrollar la segunda fase de esta investigación, concerniente al análisis de los saberes matemáticos identificados en los procesos de trenzado afro descritos en el MET. A continuación, se detallará cada elemento inmerso tanto en la fase del MET como en la fase del MOM y como cada uno de estos será articulado con esta investigación.

3.1.1 MET (Método de análisis etnográfico)

Como se ha mencionado, el diseño metodológico MET, constituye un factor fundamental para desarrollar la primera fase de esta investigación ‘descripción de los procesos de trenzado’ puesto que da pautas y proporciona elementos para organizar de una manera más estructurada la información a recolectar. Albanese (2014) ha estructurado la fase del MET en 5 factores: caracterización, utilidad, material, modalidad de tejido y diseño. Estos factores propuestos por Albaneses permiten dar cuenta de la descripción del trenzado artesanal de cabello afro de manera organizada, resaltando los factores más relevantes de esta práctica. A continuación, se detalla los elementos que deben ser precisados en cada uno de estos cinco factores.

1. Factor de caracterización. En este factor se pretende definir y/o describir el objeto de estudio, que en este caso se trata de los trenzados artesanales de cabello afro

Portejadeño, bajo los siguientes parámetros. a) Indicar la proveniencia histórica y geográfica de este tipo de trenzado artesanal de cabello afro; b) Realizar una descripción general del proceso de trenzado artesanal afro, indicando en qué consiste y cómo se lleva a cabo esta práctica; c) se complementa lo anterior con sus respectivas imágenes.

2. Factor utilidad: en este factor se toma en consideración el para qué (propósito) se lleva a cabo el proceso de trenzado artesanal de cabello afro, y el dónde (lugar geográfico) se lleva a cabo esta práctica.
3. Factor material: como su nombre lo indica este factor pretende consignar y detallar los materiales empleados para la realización de los trenzados de cabello, para lo cual se debe consignar la cualidad natural de cada material implicado en dicha práctica. Es decir, de qué está hecho, indicando si se lleva a cabo un proceso previo de preparación de los materiales.
4. Factor modalidad de tejido: en este factor se analizan los tipos de tejido, o forma en que se mezclan los cadejos (mechones de pelo) bajo los siguientes parámetros; a) se distingue entre los ejemplares (trenzados) que presentan nudos, “anudados” y b) los ejemplares que no presentan nudos “trenzados”. La modalidad “trenzado” tiene la peculiaridad de que, en cualquier punto, si se deja sin atar, se va soltando.

Para esta investigación se consideran solo los ejemplares que representan la modalidad de tejido “trenzado” puesto que los trenzados son el foco de análisis de esta investigación.

5. Factor diseño: este factor caracteriza detalladamente el proceso de trenzar, para lo cual se debe considerar; a) El número de cadejos que se utilizan para desarrollar cada modalidad de tejido indicando si se utilizan o no, diferentes colores para cada cadejo, b) el grosor de cada cadejo, c) la forma en que se tejen (la visión global del producto terminado del peinado afro: cuadrado, redondo, linear…etc.). En síntesis, se debe indicar paso a paso la secuencia de acciones que se requieren para llegar a realizar el trenzado, en todo su esplendor.

Así pues, teniendo las respectivas descripciones de los trenzados artesanales de cabello afro, en función de los anteriores factores, se pasa a la fase de análisis en función de MOM descrita en las siguientes líneas.

3.1.2 MOM (Modelo de análisis matemático)

La segunda fase de esta investigación se desarrolla bajo el modelo del MOM propuesto por Albanese, V, Oliveras, L & Perales, F. (2014) el cual es una metodología para analizar los procesos de trenzado. A continuación, se muestra cómo se aborda la modelación matemática en función del análisis de esta investigación, que responde a los objetivos que la delimitan. Por lo tanto, es necesario que los elementos caracterizados para la fase del MOM, sean adaptados a los fines de este trabajo. En particular, se adapta la idea de modelación a los intereses de este trabajo. En este sentido, es preciso primero aclarar la perspectiva desde la cual será entendida la modelación para esta investigación y cómo será articulado para los fines de esta.

Modelación. La metodología propuesta por Albanese para la fase del MOM, toma como elemento fundamental la modelación. Específicamente la modelación teórica de los procesos de trenzado; la cual, parte a su vez, de la modelación gráfica de esta práctica; es decir, se infiere que, a partir de la modelación gráfica de los procesos de trenzado, se llega a la modelación teórica de la misma. Cabe resaltar, que la metodología adoptada por Albanese está sujeta a los objetivos[31] propuestos para su investigación, los cuales van mucho más allá de caracterizar la práctica, caso contrario a esta investigación. En consecuencia, Albanese adopta una visión más amplia de modelización de la que se requiere para esta investigación, por lo que es necesario acotarla a los fines de esta.

En función de lo anterior, se adopta para esta investigación la modelación entendida desde los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas- MEN (2006). Así pues, la modelación corresponde a uno de los cinco procesos de la actividad matemática que refiere

[31] Los objetivos de Albanese pueden resumirse en los siguientes aspectos: 1. Elegir algunas artesanías de trenzados y describir este tipo de trabajo desde una perspectiva etnográfica 2. Identificar las matemáticas implícitas presentes ya sea en el cordel o la trenza 3. Describir el proceso de trenzar desde el punto de vista matemático formal. Para lo cual son necesarios otros dos objetivos. 1. Crear un método de análisis etnográfico de las artesanías.2. Elaborar un método de análisis que a través de la matemática formal modelice el producto y el proceso.

una construcción mental, gráfica o tridimensional con el fin de intentar representar un fenómeno en forma esquemática o estructurada para así facilitar su comprensión. Desde esta visión, la modelación pretende transformar una idea o concepto en una versión concreta de sí misma que permita adquirir una apropiación significativa de ella. En un sentido más amplio, la modelación permite identificar patrones y pistas que posibilitan constatar formulaciones, conjeturas y razonamientos planteados en relación con un fenómeno y, a su vez, brinda elementos para determinar demostraciones. “La modelación puede entenderse como la detección de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente” (MEN, 2006)

En otras palabras, la modelación matemática posibilita determinar en cualquiera de sus formas, el comportamiento (patrones, esquemas) de una situación de la vida real para relacionarla con un concepto matemático ya conocido. Es decir, si se toma como referencia el conocimiento matemático relacionado a la situación en cuestión, se puede llegar a la teorización formal del concepto matemático que dicha situación evoca, y a partir de ello, se puede adquirir su sentido matemático abstracto, el cual a su vez puede actuar como cimiento para construir nuevos modelos o estructuras matemáticas. Bajo estas consideraciones, se dice que todo modelo puede ser una representación semiótica, pero, no cualquier representación semiótica actúa como una modelación matemática.

A manera de ejemplificación, se dice que en el proceso de realización de una trenza simple en la que se ilustra gráficamente su tejido mediante un sólo ciclo es una representación semiótica, sin embargo, no se configura como una modelación matemática puesto que no arroja información suficiente para poder determinar patrones y esquemas relacionables con algún conocimiento matemático establecido, puede convertirse en una modelación si se representa dicho proceso de tejido a partir de más ciclos consecutivos, puesto que este escenario permitiría intentar establecer patrones, conjeturar relaciones matemáticas entre los distintos pasos realizados, como pretende hacerse en esta investigación.

Ahora bien, toda investigación necesita una herramienta o un medio que permita lograr los fines propuestos, no obstante, dicho medio debe corresponder directa o ser proporcionalmente con el método de análisis que se ha delimitado en función de la misma, en este caso a los procesos de modelación matemática. Es por esto, que se consideró pertinente explicar el medio 'GeoGebra' que se utiliza en esta investigación y su respectiva relación en el capítulo 2, pues bien, a partir de este es que se hace la modelación de los saberes matemáticos identificados en la práctica de trenzado artesanal afro.

Por otro lado, para llevar a cabo las dos grandes fases de esta investigación 'MOM y MET', es importante delimitar los elementos que facilitan la recolección e interpretación detallada y precisa de los datos a recolectar incluyendo las respectivas técnicas de recolección que se adoptaran para que ello sea posible. En concordancia con esto, se considerará para el desarrollo de esta investigación la utilización de: cartas, diarios personales, fotografías, grabaciones de audio y video mediante el uso de los dispositivos tecnológicos como lo son los teléfonos celulares, las tabletas entre otros. También, serán considerados otros objetos como prendas de vestir, grafiti y toda clase de expresiones artísticas, documentos escritos de cualquier tipo, archivos, huellas, medidas de erosión y desgaste, etcétera. Es importante mencionar que el investigador es la principal fuente de recolección de datos pues es quien constantemente interactúa con la cultura (Fernández, Hernández, & Baptista, 2014). Con base en lo anterior, los instrumentos de recolección de datos que se utilizaran para esta investigación son principalmente: grabadoras de sonido, filmadoras, cámaras de teléfono, hojas de block en las que ellos puedan expresar y dibujar sus peinados y los diarios de campo.

3.2 Técnicas de recolección de datos

Dentro de las técnicas de recolección de datos que consignan Fernández, Hernández, Baptista (2014), se considera pertinente para la primera fase del trabajo, modelo MET, la observación y la entrevista.

3.3 La observación

En este tipo de investigaciones cualitativas la observación no puede limitarse al sentido de la vista, sino que debe abarcar necesariamente los demás sentidos porque de esto depende el tipo de registros y anotaciones que se hagan alrededor de un suceso clave y, por ende, su respectiva interpretación "no es mera contemplación ("sentarse a ver el mundo y tomar nota"); en efecto, implica adentrarnos profundamente en situaciones sociales y mantener un papel activo, así como una reflexión permanente. Estar atentos a los detalles, sucesos, eventos e interacciones" (Fernández Hernández, & Baptista, 2014, p. 399)

En este tipo de investigación lo que varía es la postura que el investigador puede adoptar: no participante, participación pasiva, participación moderada, participación activa, participación completa[32]. Dado el carácter de nuestra investigación, es conveniente que se adopte la postura de participante activo, puesto que el investigador puede involucrarse en la mayoría de las actividades, sin mezclarse completamente con los participantes, es decir, sin intervenir directamente con el desarrollo mismo de la investigación.

En lo que respecta a esta investigación, se pretende observar de principio a fin la realización del trenzado artesanal. En este sentido, la observación se basa entre otros aspectos en: cómo se hace o se llevan a cabo los trenzados, las posiciones que toman las manos en dicho proceso, determinar si se requiere de algún instrumento para la realización de estas prácticas, de ser así, para qué se usan, y las técnicas que adoptan los artesanos para realizar estas prácticas.

3.4 La entrevista

Otra de las técnicas de recolección de datos pertinente para este trabajo es la entrevista cualitativa que, a diferencia de la observación, es más íntima. Esta puede entenderse como un espacio en el que dos personas, entrevistador y entrevistado, se reúnen para intercambiar información. Esta técnica de recolección de datos a partir de preguntas y respuestas permite la construcción conjunta de significados respecto a un tema.

La entrevista cualitativa se divide en tres tipos: estructuradas, semiestructuradas y no estructuradas o abiertas. En el primer tipo el entrevistador realiza su labor sujetándose exclusivamente a una guía de preguntas específicas, que previamente se delimitan incluyendo el orden en qué se hará. El segundo tipo consiste en una guía de asuntos o preguntas, pero en este caso, el entrevistador tiene la posibilidad de introducir preguntas

---

[32] No participación: Por ejemplo: cuando se observan videos. Participación pasiva: Está presente el observador, pero no interactúa. Participación moderada: Participa en algunas actividades, pero no en todas. Participación activa: Participa en la mayoría de las actividades; sin embargo, no se mezcla completamente con los participantes, sigue siendo ante todo un observador. Participación completa: Se mezcla totalmente, el observador es un participante más.

adicionales para precisar conceptos u obtener más información. Y, por último, el tercer tipo se fundamenta en una guía general de contenido y el entrevistador posee toda la flexibilidad para manejarla. Regularmente en la investigación cualitativa, las primeras entrevistas son abiertas y de tipo “piloto”, y van estructurándose conforme avanza el trabajo de campo. Regularmente el propio investigador conduce las entrevistas.

Nuestra investigación, se inclina hacia la adopción del tipo de preguntas semiestructuradas, puesto que la información que se necesita obtener depende principalmente de la habilidad del investigador para conseguir información. De modo, que cualquier mínimo detalle producido o presentado por el entrevistado, es considerado determinante e importante para la identificación de las prácticas matemáticas inmersas en los procesos de trenzado de la comunidad Portejadeña. En este sentido, no es plausible ceñirse obligatoriamente a una guía de preguntas porque no se sabe con qué se encontrará, pero sí, a medida que se desarrolle la conversación se puede dar forma y construir preguntas que respondan a un interés particular, en este caso, a los fines del investigador.

Es necesario tener en cuenta que estas entrevistas se llevarán a cabo para realizar dos etapas fundamentales; la primera está enfocada a la caracterización de la muestra a investigar y la segunda, se enfoca en el desarrollo de los objetivos propuestos. En este sentido, ambas etapas se encuentran vinculadas a la observación ya que el desarrollo efectivo de estas dos fases depende principalmente del proceso de observación participante entre los entrevistados y las entrevistadoras.

4 Capítulo 4 El camino en función del MOMET

Esta investigación se estructura bajo los factores del MET, por lo cual en un primer momento es necesario mencionar los criterios que se llevaron a cabo para la selección de las peinadoras, la manera en que se recolecta la información y los modelos de peinado. Una vez establecidos estos criterios para la selección y observación del peinado, se da paso a la descripción de ellos, la cual se fundamenta sobre los factores del MET

Para llevar a cabo la primera etapa, descripción del trenzado afro, se seleccionó una muestra de dos peinadoras. Los criterios de selección se centraron en tres aspectos; primero, que sean mujeres nacidas en el municipio de Puerto Tejada. Segundo, que tengan cinco años o más ejerciendo la práctica del trenzado, y tercero, que sean reconocidas por su excelente desempeño en dicha práctica. Este último criterio se incorporó porque en este trabajo es de suma importancia la precisión en sus trenzados, es decir, el producto final debe quedar lo más parecido posible al modelo de peinado de referencia.

Así pues, para hacer tal selección, fue necesario contactarse con dos personas oriundas del municipio, ellos como habitantes del pueblo brindaron las referencias necesarias de algunas peinadoras que cumplían con esos tres aspectos. De las peinadoras sugeridas se escogieron dos, este segundo filtro se hizo también en función de tres aspectos; primero, la facilidad para acceder al sitio de trabajo de cada una[33]. Segundo, la disponibilidad de tiempo, y tercero, la diversidad entre ellas[34]. Este último criterio se incorpora con la idea de recolectar más variedad de elementos, es decir, es posible que dos perspectivas diferentes frente a un mismo fenómeno (trenzado) sea más fructífero para la investigación, tanto desde la descripción como desde el análisis de esta práctica.

En un primer momento, se contactó con las peinadoras sugeridas, se les comentó superficialmente de qué se trataba el trabajo y se les preguntó si podían colaborar en la

[33] En el municipio de Puerto Tejada esto es un aspecto clave, debido a que hay barrios a los que no se puede entrar sin antes cumplir con un protocolo establecido por algunos miembros del mismo municipio. Esto debido a la existencia de algunas pandillas en la zona. Aquí prima la existencia de las llamadas líneas invisibles (fronteras), las cuales no pueden ser cruzadas a menos de que se vaya en compañía de alguien conocido en el municipio o con una autorización previa.

[34] La diversidad de perspectivas se intuye a partir de la localidad (barrios) donde viven y las referencias que nos dieron de ellas previamente.

realización del mismo[35]; después de ello, se concretó una visita, para la cual se diseña una primera entrevista semiestructurada. Está entrevista tenía como fin contextualizar la comunidad de dónde provienen las peinadoras, de modo que se aplicó a cada una por separado[36]. Posteriormente, se cuadró horarios con cada una de ellas para la próxima visita, en la que se da inicio con la observación de la práctica del trenzado. El acuerdo con cada una de ellas fue observarlas en un día normal en las que tuvieran peinados programados con sus respectivas clientas. Mientras se observaba sus prácticas, se les realizan preguntas que permitieran consolidar información útil para los propósitos de esta investigación. Finalmente, dentro de todos los peinados que se observaron se eligieron aquellos que ofrecían más elementos para abrir un panorama hacia la aproximación de los conceptos matemáticos. Bajo estas consideraciones se seleccionan 3 modelos de peinado afro. La peinadora 1 (P1) realiza uno de ellos y la peinadora 2 (P2) realiza los dos modelos restantes[37].

Una vez establecidos estos criterios para la selección y observación del peinado, se da paso a la descripción de ellos, la cual se fundamenta sobre los factores del MET. Como se mencionó en la metodología, se deben describir los cinco factores que desde el MET intervienen en la práctica de trenzado; sin embargo, desde los parámetros que rigen esta investigación y en aras de dar claridad y orden, es necesario describir de manera general y conjunta los factores 1, 2, y 3 para todos los peinados; y entrar a especificar los factores 4 y 5 para cada tipo de peinado. Estas descripciones son producto de los elementos recolectados en las observaciones y entrevistas realizadas.

---

[35] A ellas se les menciona solo que queremos describir la práctica artesanal, para que, de esta manera, no se altere el entorno.

[36] En esta entrevista explican cómo habían aprendido a hacer este tipo de peinados y los diferentes significados sociales, culturales y económicos que ellas le asignaban a esta práctica.

[37] Se entiende por modelo de peinado afro; un diseño particular de trenzado en el cual se conserva la idea original de trenza y tropa, pero en las que estas pueden variar en función de su forma. Es decir, según la creatividad y gusto de la peinadora y la clienta respectivamente. (la cantidad de trenzas que se desee, la posición o inclinación en la cabeza, su grosor…) casi siempre las clientas llevan un modelo de peinado de referencia en una foto, para indicar el peinado que quiere. En otras ocasiones, tienen el modelo que desean en su cabeza, o, también sucede que dejan su modelo de peinado a merced de la creatividad del peinador.

Es prudente resaltar que se opta por tomar esta decisión en el análisis, puesto que de los modelos de peinado afro observados se concluye que los factores 1, 2 y 3 intervienen de la misma manera. En efecto, particularizar cada factor podría ser innecesario y redundante ya que para cada modelo peinado seleccionado estos tres factores se caracterizan de forma semejante.

4.1 Factor de caracterización

En este factor se pretende definir y/o describir el objeto de estudio, que en este caso se trata de los trenzados artesanales de cabello afro Portejadeño, bajo los siguientes parámetros. 1) Indicar la proveniencia histórica y geográfica de este tipo de trenzado artesanal de cabello afro; 2) Realizar una descripción general del proceso de trenzado artesanal afro, indicando en qué consiste y cómo se lleva a cabo esta práctica. Se complementa lo anterior con sus respectivas imágenes.

4.1.1 Proveniencia histórico-geográfica del ejemplar

Erelis Navarro en su libro "origen y resistencia de los peinados afro, como estrategia pedagógica" publicado en el año 2014, narra cómo históricamente los peinados afro fueron inicialmente propuestos por los negros[38] esclavizados como estrategias de escape, jugando un papel muy importante en los procesos de resistencia africana. La investigación producida por la profesora y escritora Erelis Navarro, indica que los peinados pueden ser utilizados para enseñar la historia negra ya que el palenque de san Basilio[39] fue conformado justamente gracias a los mapas de fuga, escondidos en los peinados de niñas y mujeres cimarronas.

> "El camino a la libertad lo tejieron las esclavizadas de una forma muy particular en su cabello a través de trenzas… como ellas no estaban vigiladas podían husmear los mapas que tenía el amo y por los caminos divisar los ríos, las montañas, el paisaje y el ejército español.

---

[38] Utilizamos el término "negros" para referirnos a las familias que llegaron de África. Es una forma de hacerle honor a sus raíces, asignando su sentido de pertenecía y resaltar sus raíces pues así se llamaban entre ellos mismos con mucho orgullo en San los Palenques.

[39] **Una de aquellas comunidades fortificadas** fundadas por los negros esclavos fugitivos, como refugio y escondite, es el único palenque que ha sobrevivido hasta hoy. el término "palenque" refiere al hecho de que estos refugios eran hechos de palos que levantaban en forma de chozas.

En su pelo tejían lo que veían, a través de huidas y marañas trenzadas" (Navarro, 2014, p. 213)

Según Navarro, E (2014), cuando las mujeres palenqueras peinaban y atendían a sus amas podían escuchar los planes que los españoles, sus amos, tenían contra ellos. Así pues, como punto de encuentro concretaban los patios traseros de las haciendas en las que trabajaban, en los cuales se reunían a trenzar el cabello de las niñas más pequeñas tejiendo en sus cabezas las rutas a seguir que habían observado en los mapas de los amos. Cada tropa indicaba un camino, cada partidura tenía una intención, cada forma tejida en el cabello tenía su razón de ser. Esta acción de trenzar fue consolidada por los esclavos como una manera de comunicarse entre ellos los planes de huida, de modo que los hombres al ver el cabello de las pequeñas trenzado de tales formas, sin necesidad de intercambiar palabras sabían qué caminos tomar, puesto que, lo último que los amos pensarían es que sus peinados tuvieran algo que ver con planes de escape.

Dentro de los distintos peinados afro que trenzaban las palenqueras en esa época se destacan, el caracol, ver figura 30, el ZIG-ZAG, *ver figura 31*, las carreritas, *ver figura 32*, y el hundihito, *ver figura 33*

Figura 30 El caracol: Consiste en un número determinado de vueltas que rodea toda la cabeza. Estás simbolizan las vueltas que daban los barcos que llevaban esclavizados.

Figura 31 EL ZIG-ZAG: identificaba las coordenadas y los caminos de escape

Figura 32: Las carreritas del hombre y mujer africana que mostraba las rutas a seguir de manera interna logrando el objetivo de encontrarse todos adelante

Figura 33 El hundihito: semejaba las montañas sin precisión, que lo orientaban para esconderse detrás de ellas.

En la actualidad, tal como lo señala Navarro, E (2014) estas prácticas de trenzado se han convertido más en cuestiones de estética y belleza aun cuando el origen de estos era la búsqueda de la libertad. Hoy día, hay pocos peinados afro que tienen un nombre específico como sucedía en la época de la esclavitud, ahora el modelo de peinado afro varía según el gusto de la persona que se lo va a realizar. Es decir, la decisión es autónoma en cuanto al número de trenza y/o tropas que se desee, la cantidad de estas, su posición o inclinación en la cabeza, el grosor, los apliques (adornos), entre otros aspectos. Lo que sí se mantiene claro hasta el día de hoy, es aquello que se entiende por tropas y trenzas, desde los tiempos de la esclavitud hasta hoy las mujeres que realizan estas prácticas conservan la idea original sobre estos conceptos, incluso hoy día la sociedad en general conoce esta práctica también por el nombre de “trenzas africanas”.

Además, actualmente, esta no es una práctica de uso exclusivo de la raza negra, sino que es utilizada por todo tipo de etnias, sin importar el género o la edad, sobrepasa los límites socioculturales, rompiendo con todo tipo de estereotipos, códigos y barreras sociales. Incluso, las personas con otro tipo de tez han aprendido a realizar muy bien este tipo de trenzado tal es el caso que llegan a asemejarse en todo su esplendor a las mujeres afrodescendientes.

En últimas, esta práctica ha sido adaptada globalmente convirtiéndose en una práctica pluriétnica enfocada a la estética y la belleza, lo cual se ha convertido para muchas personas en una fuente generadora de ingresos. Algunas personas, como profesores, maestras, líderes o lideresas afro, como lo es Erelis Navarro; usan estos eventos históricos como estrategias pedagógicas para visibilizar estos peinados como un tipo de resistencia cultural que a su vez permite fortalecer, valorar y resaltar la autoestima en las niñas, niños y jóvenes en el proceso de su identidad étnica.

4.1.2 Rápida descripción del ejemplar

Los modelos de peinado afro responden a un diseño particular de trenzado en el cual se conserva la idea original de trenza y tropa (la explicación hace parte del factor 4), pero que pueden variar en función de su forma. Es decir, según la creatividad y gusto de la peinadora y la clienta. Tal variación responde a algunos elementos particulares encontrados en los peinados, como la cantidad de trenzas que se desee, la posición o inclinación de las trenzas en la cabeza, su grosor, entre otras. De modo que casi siempre las clientas llevan una foto en la cual se retrata el modelo de peinado de referencia que quieren. En otras ocasiones, el modelo que desean lo tienen memorizado o lo llevan ya hecho en su cabeza, o, también se encuentran algunos casos en los que la clienta deja su modelo de peinado a merced de la creatividad del peinador.

Figura 34 Modelo de peinado 1

Figura 35 Modelo de peinado 3

En la *figura 34* se aprecia uno de los modelos de peinados observados, modelo de peinado 1, este se compone de tropas simples que inician al frente de la cabeza y convergen en la parte trasera, donde son sujetadas con cauchos. En la *figura 35* se aprecia el modelo de peinado 3 en el cual se realizan partiduras en la cabeza, sobre las cuales el cabello es sujetado con cauchos, para posteriormente terminar con trenzas simples. En el factor 4, se explica con más detalle las características que dan paso al peinado.

4.2 Factor utilidad

En este factor se destacan dos aspectos claves: el para qué (propósito) se lleva a cabo el proceso de trenzado de cabello afro artesanal, y el dónde (lugar geográfico) se realiza esta práctica.

Para qué acción. Las tres peinadoras que se entrevistaron manifiestan que se dedican a la realización de peinados afro porque además de que les apasiona, se ha convertido en su principal fuente generadora de ingresos, con la cual pueden mantener a sus familias, ya que los peinados se cotizan entre los $7000 y $80 000 pesos, depende si el trenzado es sencillo o complicado respectivamente.

También comentan que sus clientes se hacen estos peinados afro, porque, aseguran ellas, "quieren verse bonitas, quieren verse bien"; presumen que los trenzados son "algo que está muy de moda", y que además de ser un peinado práctico es algo que les permite mantener su cabello sujeto por más de una semana, sin que deban preocuparse cada día por el arreglo de su cabello. También es un peinado muy favorable para las mujeres y hombres afro, ya que la textura de ese tipo de cabello tiende a encogerse y esponjarse si no se sujeta.

Otra de las razones por los cuales las mujeres afro se hacen este tipo de peinados es porque la aparición de las extensiones sintéticas de pelo, les permite a las mujeres de poco y corto cabello, que consideran esto un problema o defecto, aparentar que tienen un cabello más largo y abundante. Básicamente la invención de este tipo de peinados es el salvavidas para muchas mujeres, en especial las mujeres afro, pues les da satisfacción y armonía plena con su apariencia física. Es más, muchas de las mujeres afro, no se atreven a salir de sus casas si no tienen alguno de estos peinados afro.

Dónde. Este tipo de prácticas se puede llevar a cabo en cualquiera de los tres siguientes lugares: la casa de la clienta, la casa de la peinadora o en el salón de belleza. El encuentro se hace por citas o se atiende de inmediato, depende de la demanda del horario y la temporada. Si es por citas, se escoge o asigna un turno dependiendo del número de clientas que haya para ese día, así como la disponibilidad de la clienta y la peinadora, así como los acuerdos a los que las participantes lleguen.

4.3 Factor material: Materiales empleados y cualidad material

En este factor se pretende consignar y detallar los materiales empleados para la realización de esta práctica. Así pues, por lo general, los materiales usados por las peinadoras son las peinetas, los fijadores, las moñas y accesorios, los cuales se detallan a continuación.

Uno de los materiales principales usado por las peinadoras para ejercer el trenzado es la peineta. En especial, una peineta pequeña (de dientes pequeños juntos y finos), una peineta grande (de dientes grandes; anchos y separados) y otra peineta mediana (de dientes entre pequeños y anchos, a una distancia regular entre unos y otros), ver *figura 36*. Cada una de estas peinetas juega un papel muy importante tanto para desenredar el cabello, como para definir el peinado. Generalmente las peinetas medianas y grandes permiten desenredar bien el cabello, y la pequeña definir el peinado (trazar partiduras, dividir cantidades).

Figura 36: Tipos de peinetas para realizar la práctica artesanal

Las peinetas que usualmente se utilizan para este tipo de peinados están hechas de plástico o un tipo especial de goma, como se puede observar en las imágenes. Estas se componen de dos partes; el mango y los dientes, ambas partes están ubicadas sobre un mismo eje. Los dientes de las peinetas son unas púas rígidas que van juntas o separadas dependiendo del tipo de peineta y el mango es de donde se sostiene este instrumento. En estas prácticas, hasta el mango de las peinetas es útil para realizar el peinado porque en ocasiones con este suelen hacer las partiduras. Estas peinetas se consiguen en una droguería, tienda de belleza o incluso en los supermercados de cadena.

Otro material necesario para este tipo de peinados es el gel vibrante, *ver figura 37*. Este es un gel especial, que como su nombre lo indica permite fijar y moldear el peinado, y suele tener un color rojizo. Entre más cantidad de este gel se aplique en el cabello más fuerte es la fijación del peinado. Este gel permite que el peinado dure más tiempo, dando la constante apariencia de recién acabado. De modo que permite que las virutas[40], no se levanten tan rápidamente ya que asienta bien el cabello.

Figura 37 Gel vibrante

Entre los materiales de uso para la realización de los peinados se encuentra también los cauchos o moñas para cabello, *ver figura 38 y 39* respectivamente. Estos son lazos usados para adornar y/o sujetar el cabello, generalmente se consiguen en diferentes colores, formas, grosores y tamaño. Los cauchos como su nombre lo indica son hechos de material plástico, y por su parte, las moñas son hechas de lana o tela.

[40] Este término según las peinadoras hace referencia a los cabellos cortos que por lo general se encuentran en la parte de adelante de la cabeza, que no son tan fácil de sujetar y dar forma.

Figura 38 Cauchos

Figura 39 Moñas

Ambos materiales se caracterizan por ser elásticos y pueden conseguirse en tiendas de belleza. En esta práctica del trenzado, estos materiales cumplen una función determinante y es la de atar la trenza para que esta no se suelte. En el proceso de trenzar es importante tener en cuenta que, si la trenza se va a tejer a mitad del largo del cabello, se debe atar con un caucho o una moña de lo contrario la trenza se desata. Si la trenza se teje completa, es decir al largo del cabello, esta no se suelta si se trata del cabello afro, porque este tipo de cabello en la punta disminuye en cantidad, debido a que las hebras no tienen todas el mismo largo, y su forma crespa permite que al final de la trenza los cadejos se adhieran unos a otros. Si se trata de cabello lacio, la trenza, ya sea tejida a medio largo o a largo completo, necesita obligatoriamente sujetar el cabello con un caucho o goma para no soltarse.

Por último, están los apliques y la laca; estos son materiales para adornar el peinado. Los apliques, *ver figura 40*, son adornos opcionales generalmente hechos de material plástico que se ajustan a la tropa o a la trenza según se desee. Por su parte la laca, *ver figura 41*, es un producto cosmético de belleza que le da al peinado un acabado con aspecto de brillo, viene en presentación de espray o aerosol. Este producto se pulveriza sobre el cabello para que permanezca en buen estado por más tiempo. Además de cuidar, suavizar y nutrir la fibra capilar del cabello.

Figura 40 Apliques

Figura 41 Laca

Hasta aquí se han nombrado los elementos esenciales para realizar dicha práctica. En las siguientes líneas se detalla la realización de los modelos de peinado, esto en función de los factores 4 y 5.

4.4 Factor “modalidad del tejido”

En este factor se analizan los tipos de tejido, o forma en que se mezclan los cadejos (mechones de pelo), bajo los siguientes parámetros; a) se distingue entre los ejemplares (trenzados) que presentan nudos, “anudados” y b) los ejemplares que no presentan nudos “trenzados”. Estos tejidos tienen la peculiaridad de que, en cualquier punto, si se deja sin atar, se va soltando.

Entre las modalidades de tejidos que se presentan en esta práctica cultural Portejadeña del trenzado afro, se ha distinguido dos tipos de tejido: La trenza simple, y la tropa simple. Ambas modalidades de tejido se hacen a partir de la unidad primordial que se denomina “cadejo”, el cual como se indicó antes corresponde a un mechón de cabello. Tanto la trenza simple como la tropa simple se tejen a partir de tres cadejos. Estas dos modalidades presentan el mismo tejido, pero se comportan diferente (esto se detallará más adelante) y tienen la característica particular de que en cualquier punto si se deja de tejer la tropa o la trenza se va soltando, por lo tanto, estas dos modalidades de tejido se clasifican en la modalidad de “trenzado” porque no presentan nudos. Es importante señalar que el tejido hace referencia al proceso en el cual se entrelazan entre sí tres cadejos en un proceso cíclico que finalmente conforma el tipo de tejido trenza o tropa simples. Esto se detallará con más precisión en las siguientes líneas.

4.4.1 Modalidad de tejido 1 “Trenza simple”

Según la RAE las trenzas son una combinación de tres o más cadejos que se van entrelazando alternadamente. En particular, en el trenzado artesanal afro esta práctica se realiza con tres cadejos, aunque puede intervenir más de tres. A este tipo de trenzado se le conoce como trenza simple. Y es sobre este tipo de trenzado que se realizan los peinados que son objeto de estudio de esta investigación.

Si llamamos a, b y c a las posiciones verticales de los tres cadejos $1, 2, 3$; ver *figura 42*, entonces para construir la trenza simple se requiere de dos pasos que se repiten cíclicamente: En el paso uno se entrelazan los cadejos de las posiciones a y b, ver *figura 43*. Y en el paso dos se entrelazan los cadejos de las posiciones b y c; esto forma un ciclo, tras realizar varios ciclos se forma la trenza, ver *figura 44*.

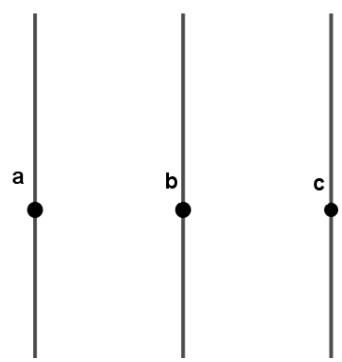


Figura 42 posición inicial de los cadejos (trenza simple)

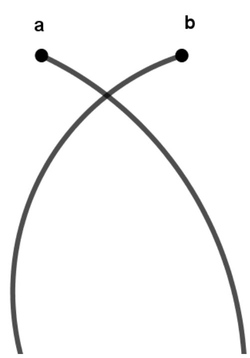


Figura 43 primer paso (trenza simple)

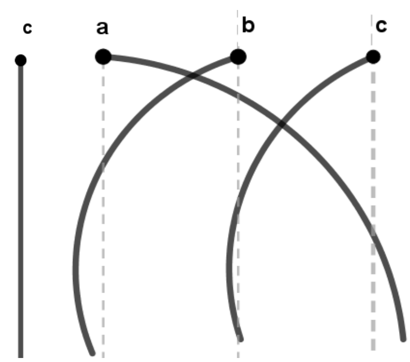


Figura 44 segundo paso (trenza simple)

En la *figura 45* se puede observar cómo desde la ilustración 1 (cero movimientos) hasta la ilustración 6, se va formando la trenza simple, al hacer alternadamente los pasos uno y dos durante un total de 5 ciclos.

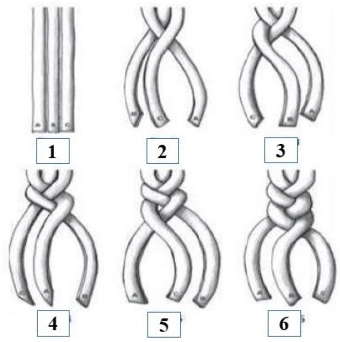


Figura 45: Realización de la trenza simple. En Albanese (2014)

Para entender más a profundidad este proceso, veamos la *figura 46*.

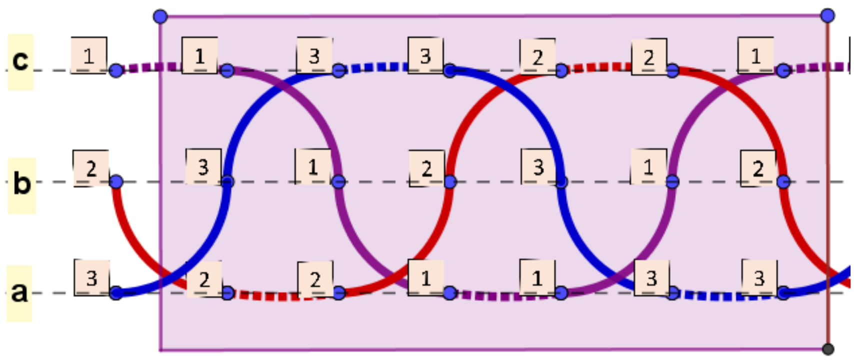


Figura 46 Proceso simple de trenzado, modelado a partir de Geogebra, en donde se muestran la realización de la trenza durante tres ciclos.

Sea a, b y c las posiciones por las que se van alternando los cadejos 1 (Morado), 2 (Rojo), y 3 (Azul) para ir formando la trenza simple. Se tiene que en el primer paso el cadejo 3 pasa a la posición b que era ocupada por el cadejo 2 y el cadejo 2 pasa a la posición a que era ocupada por el cadejo 3. Seguidamente en el segundo paso de este primer ciclo, el cadejo 1 pasa a la posición b, y a su vez, el cadejo 3 pasa a la posición c que era ocupada por el cadejo 1, *ver figura 46.* De igual forma, se puede observar que, al repetir 3 veces los ciclos, que como se dijo antes están conformados por dos pasos, cada cadejo vuelve a la posición original; de donde se evidencia que en el caso hipotético de que se prolongue el trenzado infinitamente, la secuencia se repite infinitamente.

4.4.2 Modalidad de tejido 2 "tropa simple"

Es importante mencionar que la tropa se teje a partir de tres cadejos iniciales simulando el proceso que se lleva a cabo para tejer una trenza simple, con la diferencia de que la tropa se teje pegada al cuero cabelludo. Es preciso recordar que una trenza se teje a partir de dos cambios de posiciones que se presenta entre los tres cadejos, a lo cual se le llama ciclo. Y la realización repetida de dicho ciclo (ver *figura 45*) es la que conforma la trenza. La tropa, como se teje pegada al cuero cabelludo, debe ser alimentada a partir de "cajones", las peinadoras les llaman así a las cantidades de cabello que se toman del cuero cabelludo para ser agregados cíclicamente a uno de los tres cadejos que compone la tropa.

En este sentido, cada vez que se realiza un ciclo, se toma una cantidad pequeña de cabello (cajón), y se agrega al cadejo que al terminar el primer ciclo haya quedado en la posición b (ver *figura 46*), es decir, la posición del medio. Al terminar este primer ciclo, la cantidad de cabello es agregada al cadejo 1, porque este queda ocupando la posición b. Al repetir por segunda vez el ciclo, se toma otra cantidad de cabello y se agrega nuevamente al cadejo que haya quedado en la posición b, es decir, el cadejo 3. Y finalmente al repetir por tercera vez el ciclo, el cadejo que ocupa la posición b es el cadejo 2, por lo tanto, la cantidad de cabello será agregada a ese cadejo. Es necesario hacer notar que el cadejo que queda en la posición b tras culminar el primer ciclo, es distinto al cadejo que ocupa la misma posición tras terminar el segundo y tercer ciclo, los cuales son a su vez distintos entre sí. Ahora bien, para el cuarto ciclo se repite el proceso descrito líneas atrás, es decir sigue un proceso cíclico que se repite hasta terminar de tejer la tropa.

De manera que, una vez dividida la cantidad de cabello que va a ser tejida hay tres formas en que se puede tejer una tropa: 1) alimentada hacia el centro, consiste en alimentar el mechón del centro tomando los cajones tanto del lado derecho como del lado izquierdo de la cantidad de cabello dividida (forma de espina de pescado), como se observa en la tropa T2, *figura 47*. 2) alimentada hacia la izquierda, consiste en alimentar tomando los cajones solo del lado derecho, como se observa en la tropa T1, y 3) alimentada a la derecha, alimentar sólo con los cajones que son tomados del lado izquierdo para tejer la tropa, como se observa en la tropa T3.

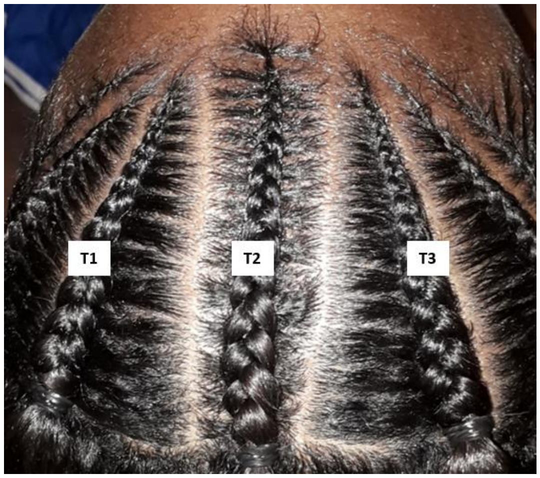


Figura 47. alimentación de las tropas a la izquierda, al centro y a derecha. T1, T2 y T3 respectivamente

Siguiendo esta línea de explicación, se evidencia que cada dos ciclos uno de los tres cadejos es alimentado por la misma cantidad de cabello que los demás, de manera que la proporción de cada uno irá aumentando progresiva y proporcionalmente hasta terminar de tejer toda la tropa. En este sentido, cabe resaltar que la tropa se comporta de forma distinta a la trenza, ya que la trenza se teje de principio a fin con tres cadejos "iguales" en cantidad de cabello, sin que sean alterados sus proporciones, es decir, sin que se le agregue o disminuya cabello a la cantidad inicial de cada cadejo.

4.5 Factor diseño

En este punto de la metodología se especifica, mediante un paso a paso, la descripción detallada de los modelos de peinados (ejemplares) que se observaron en la práctica de las dos peinadoras. Aquí se pretende indicar la secuencia de acciones que se llevan a cabo para realizar cada uno de los tres modelos de peinados observados, dando cuenta de manera explícita de la forma que toma la(s) trenza(s) o tropa(s) que se va tejiendo, es decir, determinar si responde a una forma curva, redonda, o lineal… etc.

4.5.1 Modelo de peinado 1, realizado por la peinadora 1 (P1)

Para realizar el primer modelo de peinado, P1 tomó como referencia la *figura 48*, la cual fue elegida por la clienta. De donde se obtuvo el producto final que corresponde al peinado realizado por P1, *ver figura 49*.

Figura 48 Peinado de referencia, modelo1

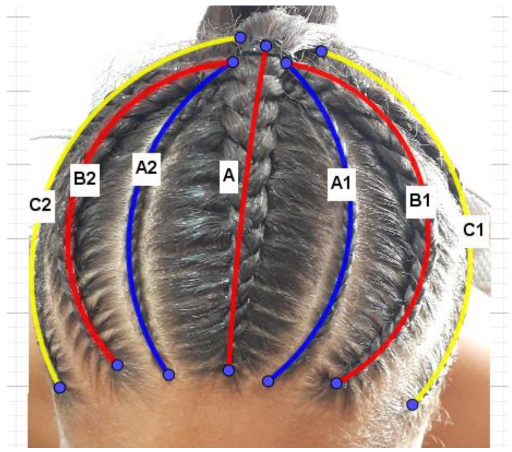


Figura 49 Modelo de peinado realizado por P1

Como se puede observar el peinado de referencia, ver *figura 48*, consta de nueve tropas, cuatro al lado izquierdo, otras cuatro al lado derecho y una en la mitad de la cabeza. En la versión final realizada por $P1$, esta cantidad es modificada, ver *figura 49*, porque se disminuye una tropa a cada lado de la cabeza. Esto debido a que la cantidad de cabello de la clienta no es suficiente para tejer las nueve tropas. Así pues, $P1$ decide tejer 7 tropas, una ubicada en posición vertical en el centro de la cabeza (tropa A), tres tropas al lado izquierdo de la tropa A: $(A1, B1, C1)$ y otras tres al lado derecho de la tropa A: $(A2, B2, C2)$, las cuales se asemejan en forma y grosor a las tres tropas antes mencionadas. Esto se detallará paso a paso con más precisión en las siguientes líneas, los cuales han sido numerados en aras de dar claridad.

1. Ubicación de la peinadora y la clienta: es muy importante describir las posiciones de las personas implicadas en esta acción, ya que su ubicación en el espacio físico es crucial para que se lleve a cabo bien la práctica, ver *figura 50*. De ahí que, en la práctica de peinados, es necesario que la clienta se siente en una silla de peluquería movible y graduable en posición vertical, y a su vez, la peinadora deba ubicarse de

pie detrás de la clienta, ver *figura 51*. Esta posición le permite a la peinadora visualizar completamente la cabeza y el rostro de la clienta, de modo que pueda tener un panorama más amplio que le permita usar fácilmente la peineta para hacer bien las partiduras y las divisiones de cabello según lo indique el peinado.

Figura 50: Ubicación de P1 y la cliente

Figura 51: Ubicación de P1 al trenzar

2. Desenredar el cabello: en este paso $P1$ utiliza una peineta de dientes pequeños para desenredar todo el cabello, peinando de adelante hacia atrás y de la raíz hasta las puntas. Ver *figura 52*. Después de ello, hace uso de una peineta de dientes medianos para repetir el procedimiento anterior, eso lo hace aproximadamente durante tres minutos. $P1$, argumenta que es importante que el cabello quede "bien desenredado para que la tropa quede fina", de lo contrario "la tropa queda con grumos, queda con nudos".

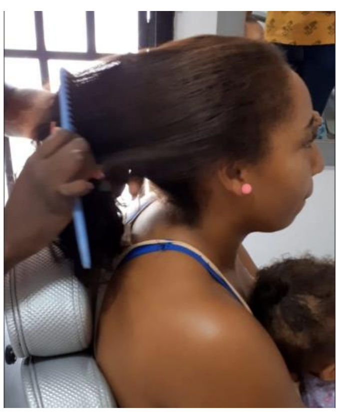


Figura 52 Modelo 1, peinar el cabello

3. Dividir el cabello: Con ayuda de una peineta pequeña, $P1$ divide el cabello de la clienta a la mitad tanto en forma vertical como en forma horizontal. Para ello, toma

una peineta pequeña, en el caso de la forma vertical toma como referencia la nariz y ubica la peineta en la mitad de ella, de manera que desliza hacia arriba abriendo una partidura hasta la mitad de la cabeza, ver *figura 53.* Ahora para el caso de la forma horizontal, $P1$ divide el cabello nuevamente con la peineta pequeña, donde toma como referencia las orejas y abre una partidura que va desde el extremo de una oreja hacia la otra, la cual forma una línea aproximadamente horizontal y perpendicular a la línea vertical descrita antes. Ver *figura 54.*

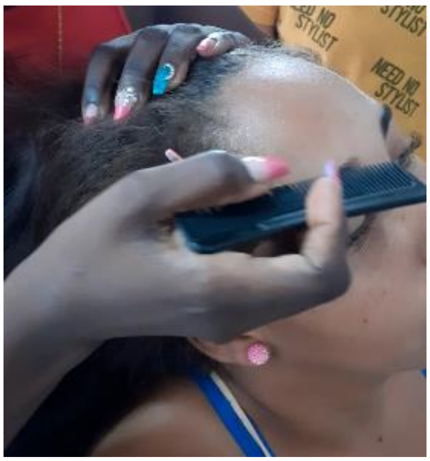


Figura 53 Posición de la peineta para sacar la partidura vertical

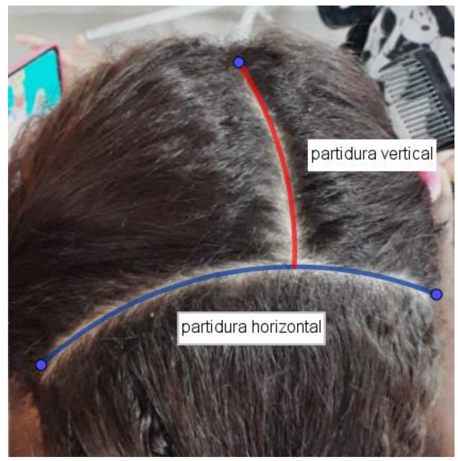


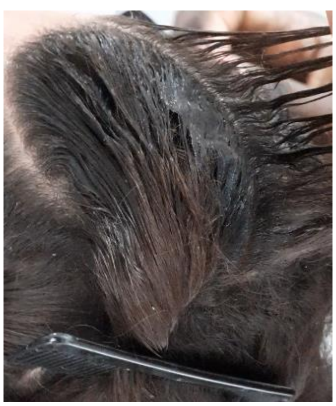
Figura 54 Partidura vertical y horizontal, modelo

4. Definir el modelo del peinado para $A1, A, A2$:
   a) Definir tropa A: con ayuda de una peineta pequeña, $P1$ inicia a definir el modelo, es decir, a dividir el cabello en las cantidades necesarias para tejer las tropas que indica el peinado, es importante tener en cuenta que la forma en que se tracen las partiduras define la forma en que será tejida la tropa; es decir, si las partiduras son curvilíneas, las tropas se tornan curvilíneas. Así pues, se inicia el peinado con el tejido de la tropa A, la cual va ubicada en la mitad de la cabeza. Para realizar esta tropa, P1 divide la cantidad de cabello necesaria con ayuda de una peineta pequeña, donde se toma como referencia la nariz. Esta división la realiza a partir de dos partiduras curvilíneas, las cuales se forman de tal manera que la misma cantidad de cabello que se tome de la partidura vertical hacia la derecha, sea en lo posible la misma cantidad de cabello que se tome de la

partidura vertical hacia la izquierda (ver *Figura 55*). Esta medida la toma a partir de su registro visual.

Figura 55: Partiduras curvilíneas realizadas para obtener la tropa de referencia.

b) Definir tropa $A2$: con ayuda de una peineta pequeña $P1$ divide de la cantidad de cabello tomada en el paso anterior (ver *figura* 55) una hilera de cabello delgada en torno a la forma de las partiduras, ver *figura 56*, es decir con la misma forma curva. Luego, aplica gel a ambas partes con un cepillo de dientes para fijar el modelo del peinado, ver *figura 57*. Culminado esto, $P1$ procede a tejer la tropa $A2$ la cual se forma con la cantidad de cabello dividida antes. Este tejido va hasta cierta parte pues se amarra las puntas con un caucho. Ver *figura 58*.



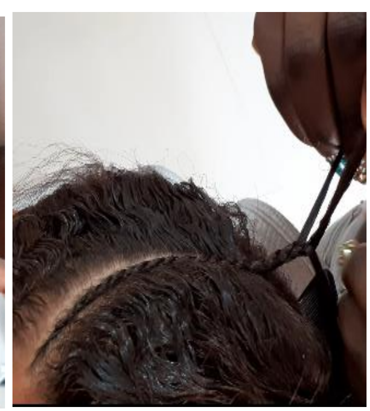


Figura 56: Proporción de A2 *Figura 57:* Aplicación del gel *Figura 58:* Tejido de la tropa A2

c) Definir tropa $A1$: al terminar de tejer la tropa $A2$, con ayuda de una peineta pequeña $P1$ divide nuevamente de la cantidad de cabello definida en el paso $4a$

(ver *figura 55*) una cantidad de cabello aproximadamente igual en forma (curva) y tamaño (cantidad) a la dividida en el paso anterior, 4b, de tal manera que esta hilera de cabello este en el lado contrario del tejido dado por la tropa $A2$. Este se teje para formar la tropa $A1$, la cual llega hasta cierta parte del cabello y luego es atado en las puntas con un caucho. Ver *figura 59*

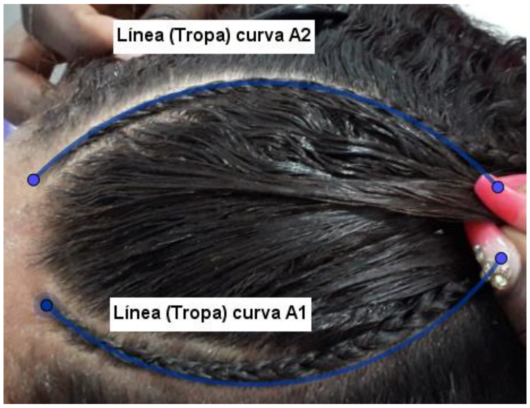


Figura 59: Tropa A1 y A2, modelo 1

d) Tejer tropa A: después del paso anterior se tienen tejidas las tropas $A2$ y $A1$, por lo cual $P1$ puede tejer la tropa A. Ver *figura 60*

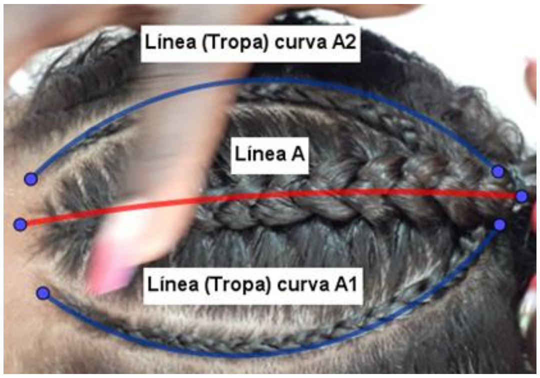


Figura 60 Tropa o línea A, modelo 1

5. Definir el modelo del peinado en el lado izquierdo, tropas $B1$ y $C1$

   a) Definir tropa $B1$: con ayuda de una peineta de dientes pequeños, $P1$ divide la cantidad de cabello necesaria para la tropa $B1$. Para ello, abre una partidura al lado izquierdo de la cabeza dándole una forma curva, después de ello procede a trenzar. Ver *figura 61*

Figura 61 Proceso de trenzado de B1, modelo 1

b) Definir para C1: después de haber tejido la tropa B1, P1 hace la última tropa del lado izquierdo (C1) que va desde la partidura inferior de B1 hasta la parte superior de la oreja. Esta tropa al igual que las tropas anteriores tiene forma curva. Ver *figura 62*

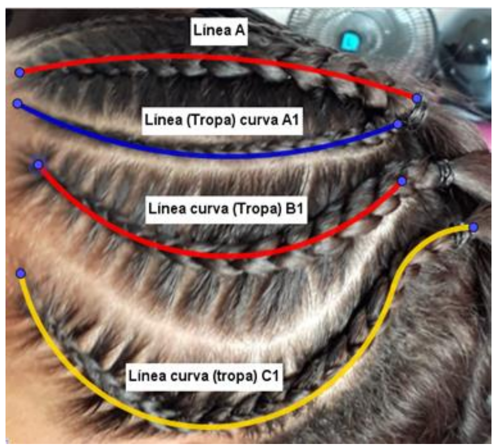


Figura 62 Línea *curva C1, modelo 1*

6. Definir el modelo del peinado en el lado derecho, tropas $B2$ y $C2$:

a) Definir $B2$: En este punto, $P1$, ya ha tejido la tropa A, y las tropas $A1, B1$ y $C2$ que se ubican a la izquierda de la tropa A. La peinadora observa y expresa que hay una similitud (simetría) en el peinado, es decir, que las tropas del lado izquierdo de la cabeza son iguales en forma (curva) y tamaño (cantidad de cabello, grosor) a las tropas del lado derecho de A. Así pues, $P1$ toma de referencia a $B1$ para tejer $B2$, por lo cual el cálculo de la cantidad de cabello que debe ser dividida para que $B2$ se asemeje o sea igual tanto como se pueda a $B1$, lo hace con los sentidos de la vista y el tacto. De modo que teje $B2$ en sentido contrario a $B1$. Ver *figura 63.*

Figura 63: Proceso en el tejido de la tropa B2, en el cual se intenta garantizar una semejanza con la tropa B1, modelo 1

b) Tejer tropa $C2$: para tejer $C2, P1$ procura que sea simétrica a $C1$. De modo que divide una cantidad de cabello aproximadamente igual (forma curva y cantidad de cabello) a la usada para tejer $C1$, al igual que en el paso anterior utiliza los sentidos de la vista y el tacto para constatar que las tropas sean simétricas entre sí. Al finalizar el trenzado, sujeta todas las trenzas en la parte superior de la cabeza con cauchos para que no se suelten, ver *figura* 64. Con este paso se termina el proceso de trenzado, luego se fija con laca el peinado y se coloca algunos apliques al modelo. En la *figura 65* se aprecia el modelo 1 finalizado desde una perspectiva frontal, en la cual, se observan todas sus tropas y el comportamiento de estas.

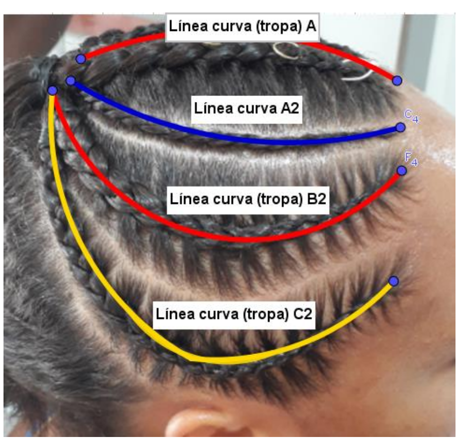


Figura 64 Producto final, lado derecho del modelo 1

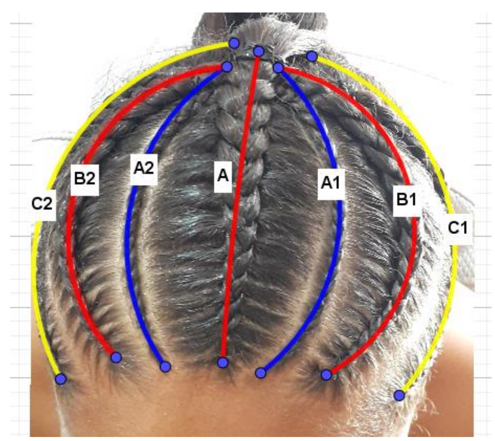


Figura 65 Producto final del modelo 1

4.5.2 Modelo de peinado 2, realizado por la peinadora 2 (P2)

Este modelo de peinado fue realizado por la peinadora 2. Como se observa en la *figura 66,* este modelo consta de cuatro tropas, dos al lado izquierdo de la cabeza, A y B, y dos al lado derecho de la cabeza, A' y B'. En este modelo de peinado hay una partidura en posición vertical a la mitad de la cabeza denotada con la letra L, la cual es crucial en este peinado ya que la tropa A y B tiende a ser simétrica a la tropa A' y B' respectivamente, si se toma como eje la partidura L. Las tropas A y B, se tejen alimentadas a la derecha, y las tropas A' y B' se tejen alimentadas hacia la izquierda. Estas tropas toman una forma de arco de circunferencia. Por ende, se puede decir que las tropas B y B' forman parte de un círculo total designado como O[41], ver *figura 67*. Esto se detallará paso a paso con más precisión en las siguientes líneas.

Figura 66 Modelo de peinado de referencia 2

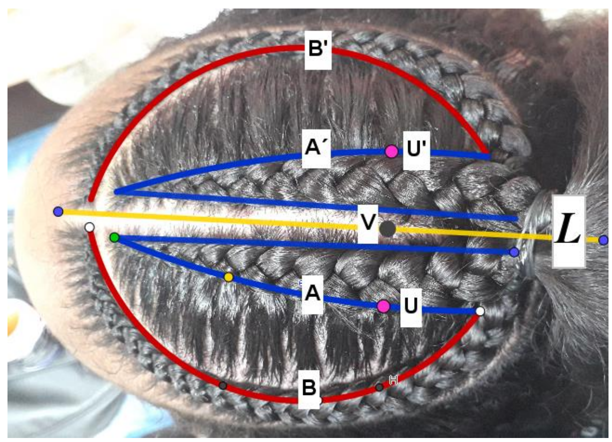


Figura 67 Producto final del modelo 2 realizado por P2

No obstante, antes de iniciar con la descripción del paso a paso es necesario resaltar que los pasos 1, 2 y 3 desarrollados en el modelo de peinado 1 son similares en los tres modelos seleccionados. En consecuencia, para no caer en redundancias y mantener claridad en la descripción, se omite volver a detallar estos pasos en los modelos siguientes y se deja la consigna de, si es necesario, revisarlos en las páginas 91-92 de este documento.

Paso a paso:

[41] Se puede inferir que se obtiene la circunferencia O al prolongarse los arcos B y B’

Una vez se ha desarrollado los pasos 1,2 y 3 descritos en el modelo de peinado 1, la peinadora $P2$ inicia con la división del cabello de tal forma que ubica la mitad de la cabeza en forma vertical. Para hacer esto utiliza el mango de la peineta pequeña, en particular coloca el cabo de dicha peineta sobre la nariz de la clienta y tras haber ubicado la mitad de la nariz voltea la peineta y con sus dientes traza a "L" (partidura vertical en forma recta) ver *figura 68*. Para verificar que la partidura se haya trazado realmente a la mitad de la cabeza, la peinadora se acomoda derecha detrás de la silla, y observa que la partidura trazada coincida con la punta de la nariz. En efecto, al realizar la observación el lenguaje corporal de la peinadora permite inferir que ella mentalmente prolonga una recta desde la punta de la nariz hasta la nuca. Si no está del todo recta o bien a la mitad, la define nuevamente con la peineta pequeña.

Figura 68: Proceso seguido por $P2$ para hacer la partidura L del modelo de peinado 2

Una vez dividido el cabello en dos partes iguales como se muestra en la *figura 68,* se define el comportamiento del lado izquierdo:

1. Definir el peinado para B y A:

   a. Definir la mitad del círculo O ($O1$). Para definir la mitad del círculo O que va al lado izquierdo de L llamado $O1$ (ver *figura 68), $P2$* realiza la partidura $L1$ con la ayuda de la peineta pequeña y bajo la referencia de la ceja izquierda. Es decir, $L1$ intenta ser aproximadamente perpendicular a la ceja izquierda, y con ayuda de la peineta pequeña le va dando forma semicircular, ver *figura 69*. Luego, $P2$ lleva la partidura $L1$ hasta la mitad (horizontal[42]) de la cabeza; que según $P2$ se

[42] Esta corresponde a la mencionada en el paso 3 del modelo de peinado 1.

encuentra entre el extremo de una oreja a la otra. Posterior a ello, se sujeta con una moña el cabello restante pues este no será trenzado, y para que no se una con el obtenido en la división, ver *figura 70*. Para fijar el cabello que se debe tejer primero, $P2$ aplica gel alrededor de $O1$.

Figura 69 Partidura L1, modelo 2

Figura 70 Partidura O1, modelo 1

b. Definir y tejer para B: Para definir y tejer $B, P2$ con ayuda de una peineta pequeña divide de $O1$ una cantidad determinada de cabello dándole forma semicircular. Después de haber dividido completamente esa cantidad de cabello teje la tropa B alimentándola a la derecha. Ver *figura 71*

Figura 71 Tropa B, modelo 2

c. Definir y tejer para A: Después de haber tejido la tropa $B, P2$ toma de $O1$ la cantidad restante de cabello y con ella teje la tropa A (ver *figura 72*) la cual va alimentada a la derecha. Con este paso, $P2$ finaliza el lado izquierdo. Hasta aquí, ya se han tejido las dos tropas que van del lado izquierdo y además se ha formado el primer arco del circulo O, nombrado $O1$.

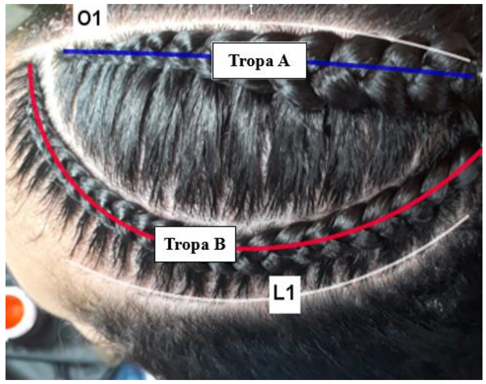


Figura 72 Lado izquierdo con tropas A y B, modelo 1

2. Definir el otro arco del circulo O $(O2)$: Después de lo anterior, $P2$ comienza a definir el semicírculo $O2$ obtenido de O, el cual va al lado derecho de L (ver *figura 68*). Es decir, $O1$ y $O2$ forman el circulo O. Para ello, toma como referencia nuevamente la ceja, esta vez la ceja derecha, y traza desde ahí la semirrecta $L2$ de la misma manera que se hizo para $L1$. A partir de esta semirrecta define $O2$ (ver *figura 73*).

Figura 73 Partidura L2 y O2, modelo 1

a. Definir $B2$: Antes de iniciar a tejer la tropa $B2$, $P2$ argumenta que tejer primero las tropas de todo un lado de la cabeza le facilita tejer bien el otro lado, ya que con un lado tejido tiene medidas de referencia con las cuales puede guiarse para garantizar que el otro lado quede aproximadamente igual[43]. Por lo tanto, $P2$ toma como referencia la recta L y trata de tejer la tropa B' simétrica a la tropa B. Así pues, $P2$ afirma que la cantidad de falanges que haya de $L1$ a B, debe ser la

[43] Recordemos que P3, ha tejido B1 y A1

misma que haya de $L2$ a B'. Después de ello, con ayuda de una peineta pequeña, $P2$ divide de la cantidad de cabello $O2$ una proporción de cabello que corresponda a una medida aproximadamente igual a la del otro lado y le da la misma forma semicurva que le ha dado a la tropa B, ver *figura 74.* Luego, con el cabello restante teje la tropa A' entre la tropa B' y la línea L.

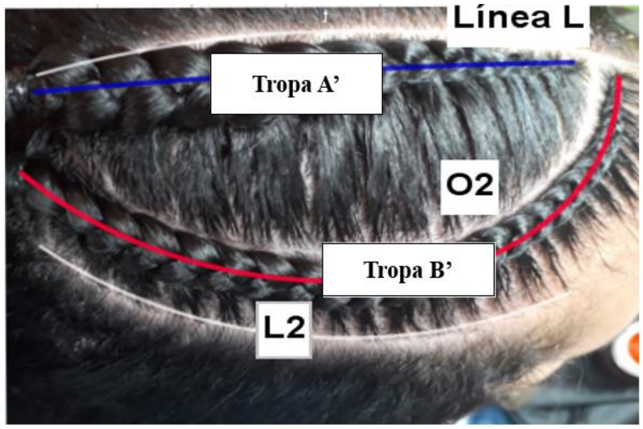


Figura 74 Lado derecho con tropas A' y B' simétricas a A y B respectivamente.

La peinadora argumenta que este tipo de medidas también se realizan tomando como referencia el mango de una peineta pequeña, en particular, se puede tomar las distancias de un punto a otro, así como marcar sosteniendo la uña en el lugar indicado, mientras se lleva esta medida al otro lado de la cabeza.

b. Definir $A1$: Si ambos semicírculos son iguales ($O1 = O2$ tanto en forma (circular), como en tamaño (grosor o cantidad de cabello)), y las partes que se toman para tejer de ambos semicírculos B y B' también son iguales, ($B = B'$ tanto en forma (circular), como en tamaño (grosor o cantidad de cabello)) entonces las cantidades restantes de ambos semicírculos A y A' "son iguales" tanto en forma (circular), como en tamaño (grosor o cantidad de cabello)

Así pues, $P2$ termina de tejer las trenzas y las sujeta todas con una moña en la corona de la cabeza, como se muestra en la *figura 75.*

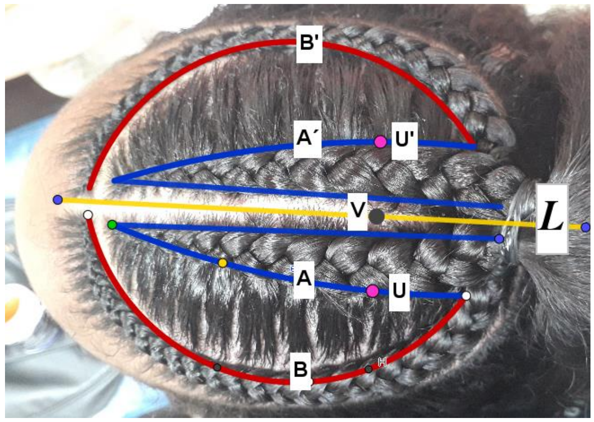


Figura 75 Producto final del modelo de peinado 2 con sus respectivas nomenclaturas

4.5.3 Modelo de peinado 3, realizado por la peinadora 2 (P2)

A diferencia de los demás ejemplares, en este peinado no se hacen tropas, sino que sólo se realizan trenzas simples. $P2$ inicia el peinado con las partiduras y teje las trenzas simples como se puede apreciar en la *figura 76 y 77*.

Figura 76 Modelo de referencia, ejemplar 3

Figura 77 Modelo 3 realizado por P2

Este peinado consta de 4 trenzas al lado izquierdo y 4 al lado derecho. Veamos paso a paso cómo es el proceso. Como se indicó antes, una vez P2 ha realizado los pasos 1,2 y3; descritos en el modelo de peinado 1, comienza a definir el peinado.

Paso uno: $P2$ toma como referencia la punta de la nariz y las orejas de la modelo y con ayuda de una peineta pequeña, divide el cabello en dos partes aproximadamente iguales desde la frente hasta la corona de la cabeza, formando la partidura o línea L. Luego para darle forma a la partidura aplica gel con un cepillo, peinando el cabello desde la línea L hacia el lado izquierdo y repite el proceso con el lado derecho. Ver *figura 78*

Figura 78: Proceso de la línea L, modelo 3

Paso dos: Una vez definida la línea L, $P2$ se dispone a realizar la partidura M que va desde la corona de la cabeza hasta la parte de atrás de la oreja derecha y cortando a la línea L, se deja suelto el cabello de este lado y el restante se sujeta con una moña. Estas líneas le permiten a $P2$ tener una guía para hacer las partiduras (líneas) diagonales que necesita hacer más adelante para dar forma al peinado. Ver *figura 79*

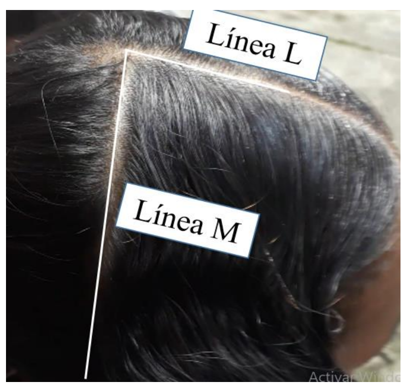
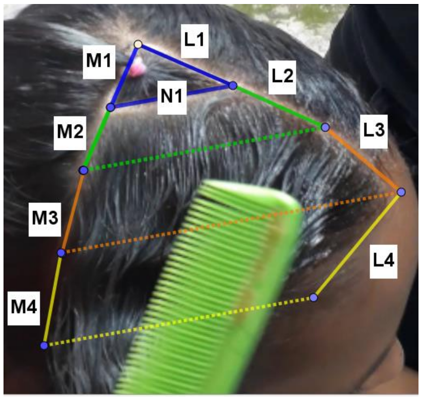


Figura 79: Líneas de referencia L y M, modelo 3

Paso tres: $P2$ mediante los sentidos divide la línea M en 4 partes y la línea L en 3 partes aproximadamente iguales, creando las líneas $M1, M2, M3, M4$ y $L1, L2, L3$ respectivamente, ver *figura 80*. Estas líneas le permiten a $P2$ tener una guía para hacer las partiduras (líneas) que cortan simultáneamente a L y M en diferentes puntos, de donde se obtiene las líneas $N1, N2$ y $N3$ (Ver figura *81)*



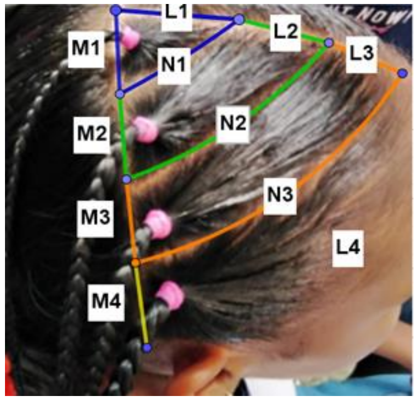


Figura 80: Partición de las líneas M y L *Figura 81:* líneas N1, N2 y N3 que cortan a L y M

Al trazar la primera partidura o línea $N1$, se tiene la referencia para trazar otras líneas con la misma inclinación de $N1$. Así pues, la línea $N1$ sirve de referencia para hacer dos partiduras denominadas $N2$ y $N3$ las cuales son aproximadamente paralelas a $N1$, como se muestra en la *figura 81*.

Paso cuatro: para terminar las particiones del lado derecho descritas en el paso anterior, $P2$ peina el cabello restante hacia atrás, aplica gel y lo sujeta con un caucho rosado en el costado junto a $M4$. Por último, teje trenzas simples con las cantidades de cabello sujetadas en los costados junto a $M1, M2, M3$ y $M4$ como se mostró en la *figura 81*.

Paso quinto: Como se procura que el lado derecho e izquierdo queden "iguales" en forma y grosor, pero en direcciones opuestas, entonces se repiten los pasos anteriores para el lado izquierdo, de modo que se obtiene como producto final la representación de la *figura 82*.

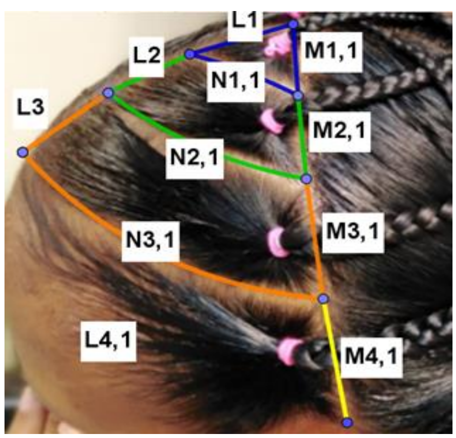


Figura 82: Producto final lado izquierdo de la cabeza, modelo 3

Paso sexto: para finalizar $P2$ sujeta las trenzas en la parte de atrás, y con esto termina de hacer el modelo de peinado.

Con la descripción del modelo de peinado 3 dado para el factor 5 del MET, se finaliza la etapa descriptiva de esta investigación, con ello se ha alcanzado el primer objetivo de esta investigación que consiste en describir la práctica artesanal. Sin embargo, como se explicó antes el factor 5 considera tanto aspectos descriptivos en función del MET como de análisis en función del MOM (modelización matemática o Modelo de análisis matemático); por lo tanto, para alcanzar el segundo objetivo de esta investigación, es necesario realizar el análisis determinado por el diseño metodológico dado por el MOM, el cual fue descrito en el capítulo 3 de este trabajo. Para atender a este propósito, se desarrolla en el capítulo 5 que se presenta a continuación.

5 Capítulo 5 Análisis de la práctica artesanal en función del MOM

Antes de iniciar el análisis de los tres modelos de peinado afro descritos en el capítulo anterior, es preciso mencionar que la descripción hecha de los modelos de peinado observados y el análisis que se pretende realizar en este capítulo, obedece a la necesidad de poder alcanzar el objetivo general de esta investigación, el cual busca caracterizar los saberes matemáticos escolares implícitos (o subyacentes) en las prácticas del trenzado artesanal de cabello afro en una comunidad de peinadoras portejadeñas. En consecuencia, para llevar a cabo el análisis de los modelos de peinado fue necesario consignar los referentes matemáticos con los cuales se hace dicho análisis.

En función de ello, al realizar la descripción de los tres modelos de peinado, se pudo notar que en los procesos de trenzado de cabello afro está implícita una aproximación a los saberes matemáticos de grafos, permutaciones, transformaciones geométricas de reflexión y homotecia, y las unidades de medida no estandarizadas. No obstante, es importante señalar que, aunque puede encontrarse otros saberes matemáticos que sean motivo de análisis, la elección que se hizo aquí obedece a los conceptos matemáticos que describen unos comportamientos más cercanos y amoldados a los criterios y propiedades dados por la teoría.

En este sentido, se consignó los referentes matemáticos en cuestión en el marco conceptual (capítulo 2), los cuales otorgan las bases fundamentales para poder realizar el empalme entre los saberes matemáticos encontrados en los procesos de trenzado artesanal de cabello afro y lo que establece formalmente la teoría.

5.1 Análisis del proceso y producto de la práctica artesanal

En este apartado se pretende realizar, bajo la visión de las matemáticas disciplinares, el análisis de los tres peinados afro descritos en el cuarto capítulo de esta investigación. Como se mencionó antes, los peinados afro se realizan bajo dos modalidades de tejido bien sea la trenza o la tropa simple, y a su vez estas modalidades constituyen la unidad principal en este tipo de peinados. En este sentido, este análisis se llevará a cabo en dos subcategorías: la categoría proceso, que considera el análisis de las dos modalidades de tejido fundamentales en la realización de un peinado afro. Y la categoría producto, que considera el análisis de la visión global del modelo de trenzado observado, es decir, el producto terminado.

Siguiendo esta línea de argumentación, en la categoría proceso se analiza la secuencia de acciones necesarias que se deben cumplir para tejer la trenza y la tropa, en la que ambas modalidades son analizadas de forma independiente. Y por su parte, en la categoría producto, se considera la visión global del peinado terminado. Es decir, los aspectos de forma que caracterizan el peinado realizado (la forma que adquirieron las trenzas y/o las tropas tras realizar el tejido, sus grosores, cantidades, tamaños) y entre otros aspectos de forma que se especificarán con detalle líneas más adelante.

En un primer momento, se desarrolla el análisis que concierne a la categoría proceso bajo el referente matemático conceptual de grafos y permutaciones. Y en un segundo momento se desarrolla el análisis correspondiente a la categoría producto de los peinados afro, bajo el referente matemático conceptual de las transformaciones geométricas proyectivas, en el cual se consideran los sistemas de medidas no estandarizadas.

5.1.1 Una aproximación a los grafos

Después de describir con detalle los procesos de trenzado artesanal afro , y tomando como referencia la metodología MOMET propuesta por Albanese para estudiar los trenzados tanto en su descripción (MET) como en su análisis (MOM); se logró evidenciar a partir de la modelización integrada con Geogebra (MOM) que las dos modalidades de tejido clasificadas dentro de la categoría proceso de los trenzados artesanales de cabello afro, trenza y tropa simple, pueden hacerse corresponder con unos tipos especiales de grafos y entenderse desde una aproximación a partir de las permutaciones, como se va a detallar a continuación.

5.1.1.1 Categoría proceso: modalidad de tejido trenza simple

Se inicia el análisis de la modalidad de tejido trenza simple bajo el concepto matemático de grafos. Para ello hay que recordar que la trenza simple de cabello se teje a partir de dos pasos fundamentales, los cuales requieren para su realización una cantidad de cabello dividida en tres cantidades aproximadamente iguales llamadas cadejos.

Para explicar claramente el proceso de tejido de la trenza simple se debe considerar lo siguiente: Dadas tres posiciones verticales (a, b, c) ocupadas por los tres cadejos $(1, 2, 3)$ respectivamente como se observa en la *figura 83*, se llama trenza simple de cabello a la composición finita de dos pasos consecutivos. El primer paso consiste en intercambiar los cadejos que ocupan las posiciones a y b como se muestra en la *figura 84* y el segundo paso consiste en intercambiar los cadejos que ocupan las posiciones b y c. Ver *figura 85*

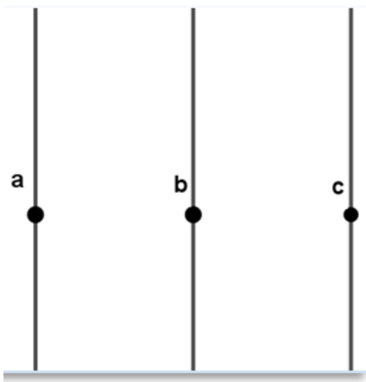


Figura 83 los cadejos 1, 2, 3 ocupando las posiciones a, b y c. es decir en su posición inicial.

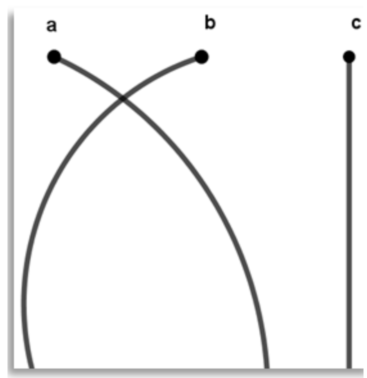


Figura 84 Paso 1 en donde los cadejos 1 y 2 que ocupan las posiciones a y b intercambian de lugar

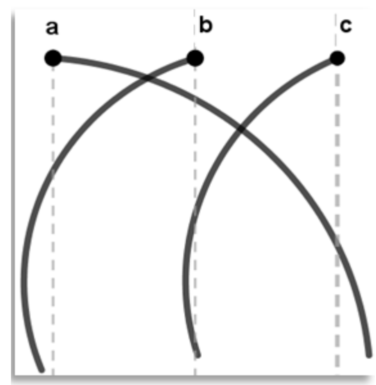


Figura 85 Paso 2, en donde los cadejos 2 y 3 que ocupan las posiciones b y c intercambian de lugar.

A la composición únicamente de estos dos pasos se llama ciclo. El ciclo conforma el número máximo de movimientos mínimos que se deben realizar para ir conformando la trenza. Es decir, la trenza simple de cabello corresponde a una repetición finita de dicho ciclo, donde la cantidad de ciclos a realizar está determinada por el largo que se desee.

Para el desarrollo de este análisis, se observó que el comportamiento de la trenza simple puede ser explicado desde el concepto matemático de grafos, si se hacen algunas restricciones. Es decir, al hacer corresponder las aristas con el conjunto de los cadejos $A\colon \{A_{1,} A_{2,}\ A_{3,}\}$ y los vértices con el conjunto de las posiciones $V\colon \{a, b, c.\}$, se puede mostrar que la trenza simple de cabello se puede interpretar como un grafo completo[44]. Esto debido a que la trenza simple se puede entender como la composición de n grafos simples,

[44]Un grafo es completo si se compone de varios grafos simples. (ver página 39)

cada uno formado a partir de los tres vértices V: {a, b, c.} y una única arista A: $\{A_{1,}A_{2,}\ A_{3,}\}$ que conecta cada par de vértices distintos en el plano.

En el primer paso, es decir, cuando los cadejos que ocupan las posiciones a y b intercambian de lugar, toma forma la arista A_1, la cual da lugar a un grafo dirigido simple[45] que une la pareja ordenada de vértices (a, b). Es decir, A_1 tiende a comportarse como una arista dirigida que va de la posición a a la b. De igual manera, toma forma la arista A_2 que da lugar a otro grafo simple dirigido, el cual une la pareja ordenada de vértices (b, a). Es decir, A_2 describe una arista dirigida que va de b hacia a. Ver *figura 86*[46].

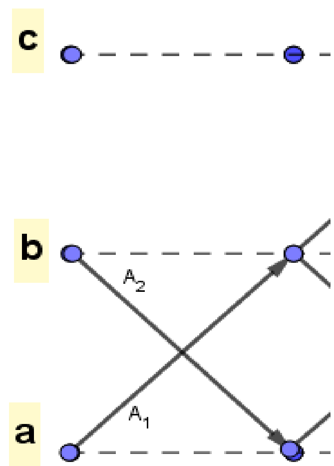


Figura 86: Aristas A_1 y A_2 del paso 1 (trenza simple): la posición a pasa a ocupar la posición b y da forma A_1; análogamente la posición b pasa a ocupar la posición a y da forma a A_2 Mientras que el vértice c, se mantiene aislado.

Por otro lado, en el segundo paso ya se ha formado la arista A_1 la cual a su vez representa un grafo simple dirigido que une la pareja ordenada de vértices (b, c). Es decir,

[45]Un grafo simple se compone de una arista *e* que relaciona exactamente dos vértices extremos (u, v). y un grafo dirigido es aquel que establece la relación de una arista *e*, específicamente con un par ordenado de vértices (u, v) en donde se dice que *e* es la arista dirigida de u a v (ver página 39)

[46]Es importante aclarar que en las líneas punteadas sobre las cuales se encuentran cada uno de los vértices a b y c siempre se va a encontrar el mismo vértice, como si dicho vértice fuera trasladado sobre la misma línea finitas veces. En este sentido, sobre cada línea punteada siempre se va a encontrar el mismo vértice, puesto que, en el proceso de trenzar, las posiciones siempre conservan el mismo lugar, y lo que mantiene en constante cambio son las aristas. a, b y c, siempre conservan la misma posición.

A_1 se comporta ahora como una arista dirigida va parte de la posición b hacia la posición c. Al mismo tiempo toma forma la arista A_3 dando lugar a la conformación de un nuevo grafo simple dirigido que une la pareja ordenada de vértices (b, c). Es decir A_3 en este segundo paso se comporta como una arista dirigida que va de la posición c hacia la posición b. Ver *figura 87*

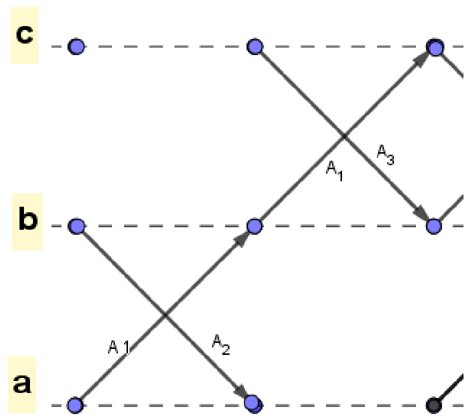


Figura 87: Paso dos composiciones de un ciclo, (grafo completo), la arista A_1 que en el paso anterior ocupaba la posición b, ahora ocupa la posición c, y A_3 que en el paso anterior ocupaba la posición c (no presentó movimiento), ahora cambia de lugar ocupando la posición b.

A partir de lo anterior, se deduce que el paso uno consta de la composición de dos grafos simples obtenidos por las aristas A_1 y A_2, que a su vez forman un único grafo completo con dos aristas (A_1 y A_2) cuyos vértices adyacentes[47] corresponden a un circuito[48] entre las posiciones (a y b) y un vértice aislado c. Es necesario resaltar que el nombre de este último vértice responde al hecho de que en este primer paso ninguna arista incide sobre él. Análogamente, se evidencia en el paso dos, que a partir de la composición de dos grafos simples formados por las aristas A_1 y A_3 respectivamente, se forma un único grafo completo que contiene dos aristas A_1 y A_3 cuyos vértices adyacentes, determinan un circuito simple entre las posiciones (b, c) y el otro, determina un vértice aislado a. Es prudente advertir que se ha analizado solo el primer ciclo de la trenza simple de cabello,

[47]los vértices adyacentes o puntos críticos son aquellos que se conectan a través de una sola arista, recordemos que una arista une a cada par de vértices en un plano. (ver página 37)

[48]El circuito corresponderá al camino que recorre una arista el cual no tiene un vértice repetido además del vértice en el que empieza termina. (ver página 44)

puesto que sucede de manera análoga para todos los ciclos que se formen de allí en adelante.

Después de modelar con Geogebra el comportamiento del trenzado afro artesanal, se observó que los vértices adyacentes de cada arista que compone la trenza simple pueden variar entre una de las 2-permutaciones[49] del conjunto $V: \{a, b, c\}$. Es decir, a cada arista implicada en la composición de la trenza simple le corresponde un arreglo par y ordenado de vértices adyacentes del conjunto V. En este sentido tenemos la expresión $P\ (3,2)\ =\ 6$, la cual indica que si se tiene un conjunto de tres (3) vértices $V: \{a, b, c\}$ se obtienen seis (6) arreglos pares (2) ordenados de dicho conjunto, los cuales determinan las posibles parejas de vértices adyacentes para cada arista implicada en la composición de la trenza simple. En este orden de ideas, se tiene que las 2-permutaciones de $V: \{a, b, c.\}$ = $\{(a, b);\ (b, a);\ (a, c);\ (c, a);\ (b, c);\ (c, b)\}$. A su vez, estos seis arreglos obtenidos pueden organizarse en permutaciones (P) de la siguiente forma: $P: (a, b)\ =\ \{(a, b), (b, a)\}$, $P: (a, c) = \{\ (a, c)\ , (c, a)\}\ y\ \ P: (b, c)\ =\ \{(b, c)\ ,\ \ (c, b)\}$.

Como se ha venido mencionando, la trenza simple de cabello se compone de la repetición cíclica de dos pasos. En el primer paso se entrelazan los cadejos que ocupan las posiciones a y b es decir, en este paso se dan a la par dos movimientos; el cadejo que ocupa la posición b se dirige a la posición a y viceversa, a este paso se le llamará $P1: (a, b)\ =\ \{(a, b), (b, a)\}$ el cual indica el par de vértices adyacentes que le corresponde a las dos aristas implicadas en dicho paso, pues el intercambio se da entre las posiciones a y b. Se tiene también el segundo paso en el que se entrelazan los cadejos que ocupan las posiciones b y c donde se dan a la par dos movimientos; el cadejo de que ocupa la posición b se dirige a la posición c y viceversa, a este paso se le llamará $P2: (b, c)\ =\ \{(b, c)\ ,$ $(c, b)\}$ que indica el par de vértices adyacentes que le corresponde a las dos aristas implicadas en este paso pues el intercambio se da entre las posiciones b y c.

[49]Una k-permutación es un arreglo ordenado de todos los elementos del conjunto A, en donde K, indica el número de elementos distintos en el que va a subdividirse el conjunto A. Es decir, K, indica la cantidad de elementos que debe haber en los subconjuntos, ya sean subconjuntos o agrupaciones de a dos elementos, de a tres elementos… etc. (ver página 45)

Es necesario resaltar que los seis arreglos ordenados dados en las 2-permutaciones, tienen sentido si se entiende la relación entre los cadejos (aristas) y las posiciones (vértices) como grafos simples dirigidos, tal como se ha venido detallando. Para el desarrollo de esta investigación, se trabaja solo con $P1$ y $P2$, ya que en cada paso de la composición de una trenza simple de cabello, lo único que se intercambian cíclicamente es la ubicación de los cadejos que ocupan las posiciones involucradas en $P1$ y $P2$, y como se ha podido evidenciar a lo largo de este análisis nunca sucede el caso de que el cadejo que ocupa la posición c se dirija a la posición a y viceversa, es decir nunca se da la siguiente permutación. $P: (a, c) = \{ (a, c), (c, a)\}$Por lo tanto, estos pares de arreglos ordenados no se toman en cuenta como vértices adyacentes de las aristas implicadas en la conformación de la trenza simple.

A continuación, se muestra la *tabla 1* que organiza esta información, en función del primer recorrido de una trenza simple. Es decir, hasta que cada cadejo vuelve a su posición inicial. La primera columna indica el número de pasos del cero al seis, las tres siguientes columnas corresponden a las posiciones (a, b, c) que pueden ocupar los cadejos $A_{1,}A_{2,}\ A_3$. En la columna cinco se indica el paso correspondiente que se realiza ya sea $P1$ o $P2$, y en la columna seis, se indica los dos cadejos que deben intercambiar de lugar en determinado paso.

Tabla 1: Pasos que muestran el primer recorrido que conforma la composición de una trenza simple de cabello

#paso	***a***	***b***	***c***	***pi***	***Movimientos específicos***
0	A_3	A_2	A_1	P1: (a, b)	(3,2)
1	A_2	A_3	A_1	P2: (b, c)	(3,1)
2	A_2	A_1	A_3	P1: (a, b)	(2,1)
3	A_1	A_2	A_3	P2: (b, c)	(2,3)
4	A_1	A_3	A_2	P1: (a, b)	(1,3)
5	A_3	A_1	A_2	P2: (b, c)	(1,2)

6	A_3	A_2	A_1		

Para comprender la información descrita en la tabla se explica el comportamiento entre el paso cero y uno. A partir de la tabla se puede observar que en la posición cero (primera fila) todas las artistas ocupan su posición inicial, ninguna ha realizado algún movimiento.

Así pues, la arista A_3 ocupa la posición a, la arista A_2 ocupa la posición b y la arista A_1 ocupa la posición c. También se puede observar, que la casilla Pi indica que para el siguiente paso, es decir para el paso 1 (segunda fila), los cadejos (Aristas) que ocupan las posiciones a y b en el paso cero son los que van a cambiar de lugar entre sí, y por último se tiene la casilla de movimientos específicos la cual indica las aristas que deben cambiar de lugar entre sí, puesto que ocupan las posiciones a y b respectivamente. Es decir, el paso 1 (segunda fila) se obtiene con el cambio de las aristas A_3 y A_2, las cuales deben cambiar de lugar porque son las que ocupan las posiciones a y b en el paso cero (fila 1) tal como lo indica la casilla Pi: '$P1$: (a, b)'

Bajo estas consideraciones, se tiene que en el paso 1 (segunda fila), tal cual se anticipó en el paso cero (fila 1), la arista A_3 ha cambiado de posición con la arista A_2 la que estaba en la posición a se dirige a la posición b y viceversa, dando lugar a dos grafos simples dirigidos. Se puede observar también, que, en dicho paso, la posición c constituye un vértice aislado puesto que ninguna arista incide sobre él. En otras palabras, no se da un movimiento que lo involucre. Y esto mismo sucede entre cada uno de los seis pasos siguientes, así como entre cualquier paso realizado en la conformación de la trenza simple.

En efecto, observe que en el paso cero las aristas A_3 A_2 A_1 ocupan las posiciones a, b y c respectivamente. Por otro lado, en el paso uno (fila dos), las posiciones a, b y c son ocupadas por las aristas A_2 A_3 A_1 respectivamente. Note que, si se compara lo sucedido entre el paso cero y uno, A_1 inicia y termina ocupando la misma posición c, lo que le otorga a c la cualidad de ser un vértice aislado. Lo anterior se debe a que las aristas que cambian de posición entre el paso cero y uno son aquellas que ocupan las posiciones a y b, es decir, sólo las aristas A_2 A_3 presentan movimiento mientras que la arista A_1 conserva su posición inicial. En general, la posición c se mantiene como vértice aislado en cada ciclo.

Ahora bien, a partir de la tabla también se puede observar que se necesitan de tres ciclos, es decir 6 pasos, para que cada cadejo (Arista) vuelva a su posición inicial. Note que, en cada uno de los seis pasos, las aristas ocupan diferentes posiciones; tal como se muestra en el ejemplo descrito antes, del paso cero al paso uno las aristas A_3 A_2 A_1 cambian de ubicación de modo que no ocupan la misma posición que en el paso cero. En general, tras efectuar un paso las aristas cambian de posición cada vez hasta completar 6 pasos. En síntesis, son necesarios tres ciclos o seis pasos para que las aristas vuelvan a sus posiciones iniciales de ahí que, en el desarrollo de los seis pasos, las aristas no ocupan exactamente las mismas posiciones. Lo anterior coincide con el hecho de que las posiciones a, b y c se van ocupando alternadamente por las tres aristas, conservando siempre en cada paso un vértice aislado. En otras palabras, en cada paso solo dos de los tres cadejos van a cambiar de posiciones, por lo que el restante va a permanecer siempre aislado.

Vamos a registrar cada uno de los seis movimientos en la *tabla 2*, indicando en cada paso la posición que ocupa cada arista.

Tabla 2: pasos que muestran la posición que ocupan los tres cadejos en cada uno de los primeros seis movimientos, es decir, hasta que cada cadejo vuelve a su posición inicial.

#paso	***A***	***B***	***C***
0	A_3	A_2	A_1
1	A_2	A_3	A_1
2	A_2	A_1	A_3
3	A_1	A_2	A_3
4	A_1	A_3	A_2
5	A_3	A_1	A_2
6	A_3	A_2	A_1

A partir de la tabla 2 se puede resumir lo que antes se había expresado, primero que las posiciones a, b y c nunca cambian, siempre ocupan el mismo lugar y lo que cambia de posición son las aristas, siendo en el paso 6, tercer ciclo, que cada arista vuelve a su posición original. Y segundo, en el primer ciclo el vértice c Se mantiene aislado, ya que su arista no presenta movimiento, lo mismo sucede para el segundo y tercer ciclo.

De estas circunstancias se obtiene que las seis formas en que las tres aristas A_3 A_2 A_1 ocupan las posiciones a, b y c respectivamente sin repetición, hasta que cada arista vuelve a su posición inicial, corresponde a una de las 3-permutaciones del conjunto de las aristas A= $\{A_3\ A_2\ A_1\}$ en función de las posiciones que cada una de estas puede ocupar. Lo anterior se reduce a la expresión $P\ (3{,}3) =\ 6$, la cual indica que si se tiene un conjunto de tres (3) Aristas A= $\{A_3\ A_2\ A_1\}$ se obtienen seis (6) arreglos ternarios (3) ordenados de dicho conjunto, es decir se determinan las posibles ternas en que el conjunto de las aristas A_3 A_2 A_1 pueden ocupar ordenadamente las posiciones a, b y c respectivamente, hasta completar una primera vuelta. Así pues, tenemos que las 3-permutaciones de A= $\{A_3\ A_2\ A_1\}$ = { $(A_3\ A_2\ A_1)$, $(A_2\ A_3\ A_1)$, $(A_2\ A_1\ A_3)$, $(A_1\ A_2\ A_3)$, $(A_1\ A_3\ A_2)$, $(A_3\ A_1\ A_2)$}, y que estos seis arreglos ordenados, como se puede evidenciar a partir de la tabla, corresponde a cada una de las seis formas en que las posiciones a, b y c ordenadamente son ocupadas por las aristas $A_3A_2\ A_1$ en la conformación de la trenza simple durante tres ciclos consecutivos.

Por otro lado, es importante considerar que, los grafos que se trazan en cada paso indican finalmente el recorrido de cada arista en función de los tres vértices del plano. En este sentido, cada arista es un grafo completo que se forma a partir de los grafos simples que se trazan de un vértice a otro en cada paso. Bajo estos presupuestos, se puede decir que si una trenza simple se teje solo durante exactamente un ciclo cada arista A_3 A_1 A_2 se desplazará exactamente de un vértice a otro. *Ver figura 88*[50]. Tal como se observa en la

---

[50]Se ha diferenciado el recorrido de las tres aristas a partir de tres colores distintos: *azul* para representar el recorrido de la arista A3, rojo para representar el recorrido de la arista A2, y morado para representar el recorrido de la arista A1. Es importante para la interpretación efectiva de esta gráfica aclarar que cuando en el recorrido de cada arista se encuentren líneas punteadas, se está indicando que en dicho paso aquella arista no está realizando movimiento, es decir mantiene la misma posición que en el paso anterior

figura 88, en el primer ciclo la arista A_3 (color azul) va de la posición a a la posición b y de la posición b a la posición c, análogamente, la arista A_2 (color rojo) en el primer ciclo va exactamente de la posición b a la posición a, y finalmente, la arista A_1 (color morado) en dicho ciclo, va exactamente de la posición c a la posición b. Obsérvese que cada una de las tres aristas durante el primer paso de este ciclo, ha conformado exactamente un grafo simple.

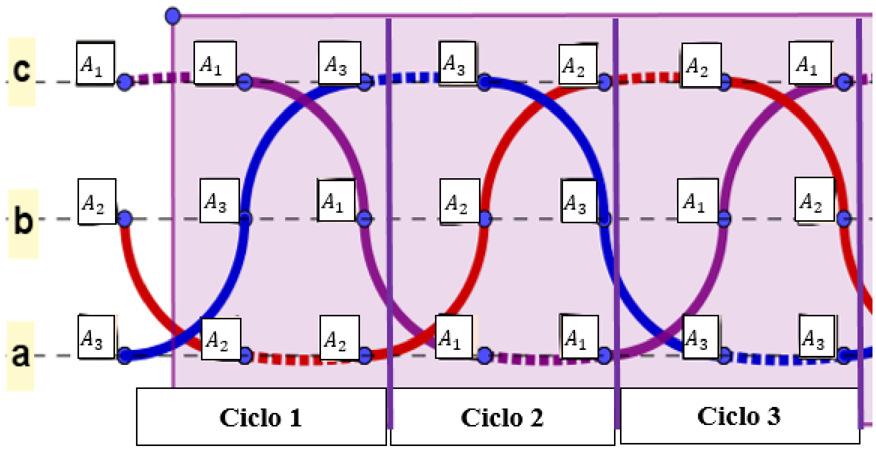


Figura 88 Descripción por ciclos del primer recorrido que conforma la composición de una trenza simple (hasta que cada una regrese a su posición inicial) a partir de 3 colores. Azul para diferenciar la arista A_3 rojo para diferenciar la arista A_2 , y, morado para diferenciar la arista A_1.

Note particularmente que A_3 en el primer paso va de la posición a a la posición b, formando solo un grafo simple, y que, en el segundo paso, se desplaza de la posición b a la c formando otro grafo simple. Es decir, A_3 al terminar el primer ciclo, conforma un grafo completo pues se compone de dos grafos simples de sí mismo; y en adelante A_3 seguirá comportándose como un grafo completo, al igual que las demás aristas pues en los siguientes ciclos seguirán formando grafos simples sobre sí mismas.

Bajo estas consideraciones, se puede decir que si cada arista completa al menos tres veces un ciclo, como se indicó a partir de la tabla, el camino[51] que recorrerá cada una será más largo en comparación a que realice un solo ciclo, puesto que no irán exactamente de una posición a otra (como en el caso anterior), sino que cada una de las aristas recorrerá de una manera más amplia una sucesión alternada de vértices adyacentes y aristas entre sí. En

[51]Dado un grafo G y un par de vértices de G (u, v), un camino de u a v, es una sucesión finita alternada de vértices adyacentes entre sí y aristas. (ver página 40)

esta dirección se tiene que cada arista se conforma así misma como un grafo completo, a partir de cada grafo simple formado en cada paso.

En función de lo anterior, obsérvese, *Ver figura 89,* que el camino que recorre A_3 es: $aA_3bA_3cA_3bA_3a$. Es decir, A_3 se dirige de la posición a hacia la b, luego se dirige de la posición b hacia la c, entre el paso tres y cuatro se mantiene aislado (no presenta movimiento), luego se dirige de la posición c hacia la b y de la posición b hacia la a, regresando a la posición en la que empezó. El camino que recorre A_2 es: $bA_2aA_2bA_2cA_2b$. Es decir, A_2 se dirige de la posición b hacia la a, se mantiene aislado entre el paso dos y tres, después de ello se dirige de la posición a hacia la b, de la posición b hacia la c, y entre el paso cinco y seis se mantiene aislado; para luego ir de la posición c hacía la b volviendo a la posición en la que inició. Y, por último, el camino que recorre la arista A_1 es: $cA_1bA_1aA_1bA_1c$, es decir, A_1 en el primer paso se mantiene aislado, después va de la posición c hacia la b, luego va de la posición b hacia la a, entre el paso cuatro y cinco se mantiene aislado, después va de la posición a hacia la b, y por último se traslada de la posición b hacia la c volviendo a su posición inicial después de seis pasos.

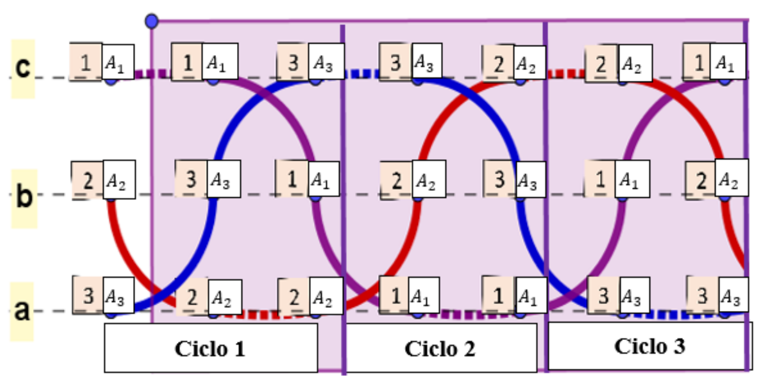


Figura 89: Grafo G completo, camino conjunto que recorre cada arista.

Con base en lo anterior, *ver figura 89,* se puede considerar también como grafo completo al recorrido conjunto de cada una de las tres aristas. Es decir, considerar que cada artista constituye en sí un grafo completo a partir de los grafos simples que se forma de sí misma en cada paso. Similarmente, se puede llamar grafo completo a la composición de la trenza simple de cabello pues es la integración conjunta de cada una de sus tres aristas.

Pues bien, llamamos grafo completo G de la trenza simple de cabello al recorrido conjunto de las aristas A_3 A_2 A_1 durante los tres ciclos mencionados. *Ver figura 89*

Así pues, el grafo completo G, *ver figura 89,* integra paso a paso el camino recorrido de las tres aristas durante tres ciclos consecutivos. Estas tres aristas componen en un todo al grafo G. En esta dirección, se tiene que el grafo completo G se compone del camino recorrido por A_1 el cual puede interpretarse como un subgrafo[52] A de G. *ver figura 90*

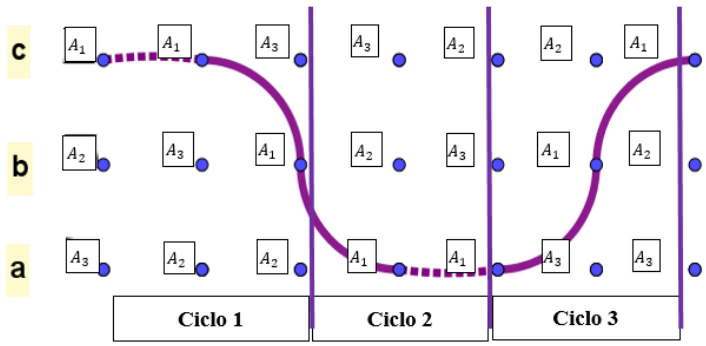


Figura 90 Subgrafo A de C. Camino recorrido por A_1

Análogamente, el grafo completo G, *ver figura 89,* integra el camino recorrido de la arista A_2 que puede interpretarse como un subgrafo B del grafo G. ver *figura 91.*

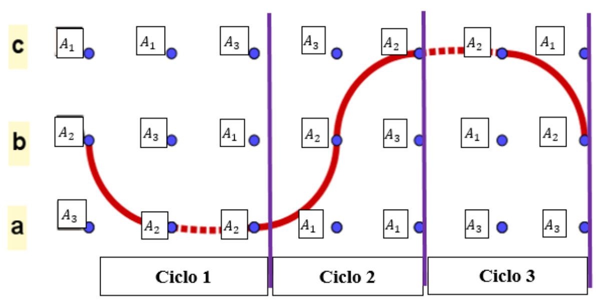


Figura 91 Subgrafo B del grafo C. Camino recorrido de la arista A_2

Y por último se tiene que el grafo completo G, *ver figura 90,* contiene el camino recorrido de la arista A_3 el cual puede interpretarse también como un subgrafo C del grafo G. Ver *figura 92*

[52]Un subgrafo corresponde a uno o más grafos simples que hacen parte del grafo completo. (ver página 43)

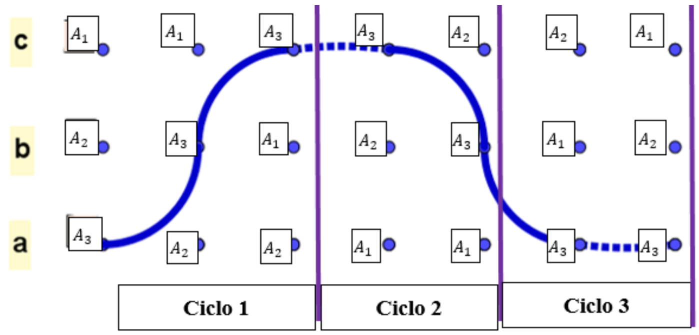


Figura 92 Subgrafo C del grafo G. Trayectoria de la arista A_3

Tal como se puede observar, A, B y C son tres subgrafos de G puesto que: 1) cada vértice de A, B y C es también un vértice de G, cada arista de A, B y C es también una arista de G, y cada arista contenida en A, B y C, tiene los mismos vértices adyacentes que están en G, tal como lo establece la teoría.

A partir de la figura anterior, se puede determinar que en el caso del subgrafo APor ejemplo, no todos sus vértices tienen grado par, por ello este grafo no empieza y termina en el mismo punto, es decir, no cierra sin pasar dos veces por el mismo vértice y arista. Lo mismo sucede con el subgrafo B y C. Por lo tanto, no comportan un circuito Euleriano, en general el grafo completo G tampoco lo es.

5.1.1.2 Categoría proceso: modalidad de tejido "tropa simple"

Este apartado pretende dar cuenta del análisis de la modalidad de tejido, tropa simple. Para ello, es preciso mencionar que el proceso seguido en el tejido de la tropa simple de cabello es exactamente el mismo que se realiza para tejer la trenza simple de cabello. En efecto, para la modalidad de tejido "tropa simple" se cumplen los mismos criterios analizados en la modalidad de tejido "trenza simple". No obstante, hay un aspecto en el que ambas modalidades de tejido difieren que es pertinente detallar y analizar, este aspecto se ha denominado comportamiento. Para iniciar este análisis es necesario recordar que la tropa simple, a diferencia de la trenza simple, se teje pegada al cuero cabelludo de la persona. Es decir, la trenza simple de cabello comienza y termina con la misma cantidad de cabello (Ver *figura 93)* y en ningún momento se alteran esas cantidades, lo que no sucede en el proceso de tejer la tropa. Al contrario, para tejer la tropa simple de cabello de manera que se pueda garantizar que su tejido este sobre el cuero cabelludo (Ver *figura 94*), es necesario que a los tres cadejos iniciales se le agregue de manera proporcional y alternada nuevas cantidades de cabello adquiriendo la apariencia de una espina de pescado que crece proporcionalmente.

Figura 93: Comportamiento de trenzas simples.

Figura 94: Comportamiento de tropas simples.

Tal como se mencionó en un principio, este análisis se hará bajo la perspectiva matemática de la teoría de grafos y permutaciones, al igual que se hizo con el análisis de la trenza simple, pero se enfocará solo en analizar el comportamiento de la tropa ya que es el único aspecto en el que difiere de la modalidad de tejido "trenza simple". Bajo esta consideración, es preciso hacer un recuento de lo fundamental en este tejido.

Así pues, se tiene que para tejer la tropa simple de cabello se requieren tres cadejos $A_{1,}A_{2,}\ A_3$ que ocupan en un inicio tres posiciones a, b, c respectivamente. En este sentido, el conjunto de los cadejos está dado por: A: $\{A_{1,}A_{2,}\ A_3\}$ y el conjunto de las posiciones está dado por: V: $\{a, b, c.\}$. De modo que el comportamiento de la tropa simple puede ser explicado desde la teoría de grafos si se hace corresponder las aristas con el conjunto de los cadejos: A: $\{A_{1,}A_{2,}\ A_3\}$ y los vértices con el conjunto de las posiciones: V: $\{a, b, c.\}$. Entonces, es fácil comprender que al igual que la trenza simple, se puede interpretar la tropa simple de cabello como un grafo completo[53]. Esto debido a que está compuesta por

[53]Un grafo es completo si se compone de varios grafos simples. (ver página 39)

una cantidad de n grafos simples dirigidos[54], cada uno formado a partir de los tres vértices V: {a, b, c.} y una única arista A: $\{A_{1,}A_{2,}\ A_{3,}\}$ que conecta cada par de vértices distintos en el plano.

Teniendo esto claro, se dice que la tropa simple al igual que la trenza simple de cabello, se teje a partir de dos pasos fundamentales, el primer paso está dado por el intercambio de los cadejos que ocupan las posiciones a y b, (Ver *figura 96*) y el segundo paso consiste en el intercambio de los cadejos que ocupan las posiciones b y c (Ver *figura 97*)

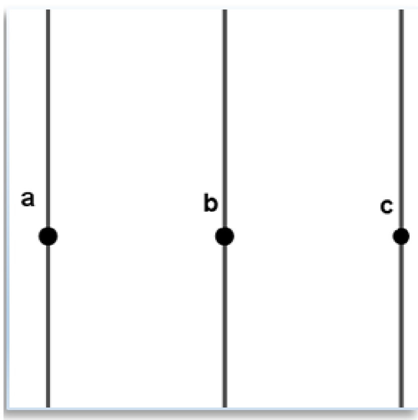


Figura 95: Cadejos 1, 2, 3 ocupando las posiciones a, b y c. es decir en su posición inicial.

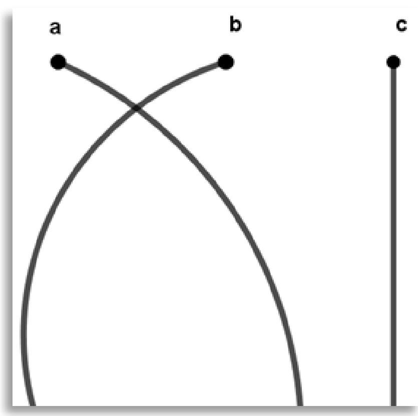


Figura 96 Paso 1 tejido de la tropa, en donde los cadejos 1 y 2 que ocupan las posiciones a y b intercambian de lugar.

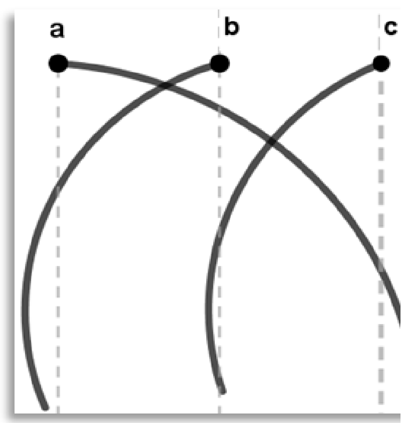


Figura 97 Paso 2 tejido de la tropa, en donde los cadejos 2 y 3 que ocupan las posiciones b y c intercambian de lugar.

[54]Un grafo simple se compone de una arista que relaciona exactamente dos vértices extremos (u, v). y un grafo dirigido es aquel que establece la relación de una arista *e*, específicamente con un par ordenado de vértices (u, v) en donde se dice que *e* es la arista dirigida de u a v

De lo anterior, se sabe que estos dos pasos forman un ciclo y configuran el número máximo de movimiento mínimos que deben realizarse para conformar la tropa simple, obteniendo el tejido de la tropa simple en su totalidad por la repetición finita de dicho ciclo.

Ahora bien, como se mencionó al principio la tropa simple de cabello se debe tejer sobre el cuero cabelludo. Para que esto suceda, cada que se complete un ciclo se debe agregar una nueva cantidad de cabello al cadejo que haya quedado ocupando la posición b. Cabe señalar que las cantidades de cabello agregadas no forman parte de las que se tienen inicialmente, y deben ser tomadas una detrás de la otra (en fila) pero alternadamente de un lado de la cabeza y de otro, para que la tropa aumente su grosor proporcionalmente. Ver *figura 98*.

Figura 98: Proceso para tejer una tropa simple, el cabello adicional es tomado de ambos lados alternadamente en cada ciclo, de manera que se formen los cajones alrededor de la tropa.

Para explicar lo anterior, se toma como referencia la *Tabla 3* donde se diferencian las tres aristas A_3 A_2 A_1 a partir de colores, con el propósito de indicar en cada paso cuál de ellas ocupa la posición b. En este sentido, el color amarillo representa la arista A_2, el color rojo la arista A_3 , y el color morado la arista A_1. Note que en la tabla 3 se registra el recorrido de una tropa durante tres ciclos consecutivos que es cuando se completa una vuelta, es decir, hasta que cada cadejo vuelve a ocupar su posición inicial. Además, en cada uno de los pasos (0-5), las posiciones a, b y c, son ocupadas en órdenes diferentes por cada una de las tres aristas. Por tanto, durante la primera vuelta tras culminar cada ciclo que la compone, la posición b es ocupada siempre por un cadejo diferente.

Tabla 3 se muestra la posición de las aristas paso a paso durante la primera vuelta, especialmente, cuando cada una de ellas ocupa la posición b, al terminar un ciclo.

#paso	***a***	***B***	***C***	***Ciclos***
0	A_3	A_2	A_1	
1	A_2	A_3	A_1	Ciclo 1
2	A_2	A_1	A_3	
3	A_1	A_2	A_3	Ciclo 2
4	A_1	A_3	A_2	
5	A_3	A_1	A_2	Ciclo 3
6	A_3	A_2	A_1	

Así pues, obsérvese que al terminar el primer ciclo (paso 1), el cadejo $A_{3,}$ ocupa la posición b, por lo cual, se debe tomar una cantidad de cabello de un lado de la cabeza, (supongamos que esa cantidad se toma del lado derecho de la cabeza) y agregarlo al cadejo $A_{3,}$ quien al terminar dicho ciclo quedó ocupando la posición b. Así pues, se tiene que el cadejo $A_{3,}$ recibe una transformación de aumento con respecto a la cantidad de cabello inicial que poseía. Por lo tanto, el cadejo $A_{3,}$ en este punto, tiene más cantidad de cabello que las aristas A_2 y A_1

Obsérvese también que al terminar el segundo ciclo (paso 3), la arista que ocupa la posición b es la arista A_2, por lo que se debe tomar una cantidad de cabello, esta vez del lado izquierdo de la cabeza, para ser agregada al cadejo A_2 quien al terminar el segundo ciclo quedó ocupando la posición b. Es importante tener en cuenta que las peinadoras tratan de agregar cantidades de cabello que en la medida de lo posible sean iguales. En función de ello, se puede decir, que los cadejos A_3 y A_2 en el paso tres, poseen la misma cantidad de cabello, puesto que en este punto ambos cadejos han recibido la misma cantidad de cabello.

Por último, obsérvese que al terminar el tercer ciclo (paso cinco) el cadejo A_1 es quien ocupa ahora la posición b. Así pues, se debe tomar una cantidad nueva de cabello, esta vez del lado derecho de la cabeza, y agregarla al cadejo A_1 quien al terminar el ciclo tres quedó ocupando la posición b. Por consiguiente, al terminar la primera vuelta se presupone que las tres aristas A_3 A_2 A_1 han recibido la misma transformación de aumento en función de la cantidad de cabello inicial que poseían puesto que se les ha añadido la misma cantidad de cabello.

Bajo estos parámetros, se puede decir que el crecimiento de la tropa simple en relación con la cantidad de cabello que posee es proporcional, puesto que cíclica y alternadamente cada cadejo tendrá una misma transformación de aumento; lo cual se debe a que las permutaciones[55] de los tres cadejos, en función de las posiciones que pueden ocupar paso a paso, se va a repetir cíclicamente hasta que se termine de tejer la tropa.

Bajo estos presupuestos y tal como se explicó en el proceso de tejido de la trenza simple, *(ver página 121)*, se tiene que en el paso seis cada cadejo vuelve a su posición inicial lo que quiere decir que, para la segunda vuelta, se añade una nueva cantidad de cabello a las aristas en el mismo orden en que se agregó cabello durante la primera vuelta. Es decir, primero se añade cabello a la arista A_3, después a la arista A_2 y por último a la arista A_1 . La tabla 4 que representa la continuación de la tabla anterior pretende detallar este último aspecto, mostrando el comportamiento de la tropa simple durante la segunda vuelta.

Tabla 4 Continuación de la tabla 3, en la que se indica la posición de las aristas en la segunda vuelta, donde se muestra especialmente, el caso en que cada una de ellas ocupa la posición b al terminar un ciclo.

#paso	***a***	***B***	***C***	***Ciclos***
6	A_3	A_2	A_1	
7	A_2	A_3	A_1	Ciclo 4
8	A_2	A_1	A_3	

[55] Una k-permutación es un arreglo ordenado de todos los elementos del conjunto A, en donde K, indica el número de elementos distintos en el que va a subdividirse el conjunto A. Es decir, K, indica la cantidad de elementos que debe haber en los subconjuntos, ya sean subconjuntos o agrupaciones de a dos elementos, de a tres elementos…

9	A_1	A_2	A_3	Ciclo 5
10	A_1	A_3	A_2	
11	A_3	A_1	A_2	Ciclo 6
12	A_3	A_2	A_1	

Nótese que en el ciclo cuatro (paso7) se le añade cabello al cadejo A_3 . En el ciclo cinco (paso 9) se añade cabello al cadejo A_2 . Y, por último, en el ciclo seis (paso 11) se añade cabello al cadejo A_1 . En este punto, se infiere que cada cadejo posee nuevamente la "misma" cantidad de cabello, lo cual a su vez indica que para el paso 12 cada arista vuelve a su posición inicial y están listas para repetir el mismo proceso durante la siguiente vuelta. A partir de lo anterior, se puede decir que el proceso mencionado aplica para cualquier cantidad de vueltas que deseen repetirse durante la realización de una tropa simple de cabello.

En conclusión, se puede afirmar que el crecimiento proporcional de la cantidad de cabello de la tropa simple se garantiza por el orden en que se dan las permutaciones de las aristas en función de las posiciones que ocupan en cada paso y ciclo que se realiza. Esto debido al orden de aparición alternado sobre la posición b que tienen las aristas A_3 A_2 A_1 en cada ciclo. Así pues, al terminar de tejer la tropa cada cadejo que la compone termina con la misma cantidad de cabello, que a su vez difiere de la cantidad inicial que poseían. Por lo tanto, el grosor con el que la tropa termina difiere del grosor con el que inició.

Con el análisis de la modalidad de tejido de la tropa simple bajo el referente matemático de grafos y permutaciones, se culmina el análisis referente a la categoría proceso. Ahora, se pretende hacer el análisis concerniente de la categoría producto, el cual se detalla a continuación.

5.1.2 Transformaciones proyectivas (simetría y homotecia)

En las siguientes páginas se pretende consignar el análisis de la categoría producto de los peinados afro observados. Este análisis como su nombre lo indica y como ya se ha mencionado, considera la visión global del peinado realizado, es decir los aspectos de forma que caracterizan el peinado, así como la dirección en que fueron tejidas las tropas y/o trenzas, (circulares, curvilínea, en línea recta), sus grosores, cantidades, tamaños y entre otros aspectos que se detallarán en su momento con claridad y precisión.

En primera instancia, hay que considerar que este análisis se hace a partir de los tres modelos de peinado afro seleccionados. Para la realización de estos, cada una de las peinadoras recurrió a una representación fotográfica de los modelos en su versión final, la cual fue proporcionada por la clienta. De igual modo para documentar la información necesaria para esta investigación, se recurrió a fotografiar el paso a paso que seguía la peinadora hasta completar el producto final.

Pues bien, en el análisis de los peinados desde el primer momento se evidenció que se puede establecer una aproximación análoga a la geometría proyectiva de Klein, aunque los individuos no sean conscientes de ello. En particular, se observa que las peinadoras hacen una interpretación de las proyecciones de objetos tridimensionales que han sido plasmadas en superficies bidimensionales; es decir para replicar los modelos de peinados que están en el espacio, las peinadoras utilizan una representación fotográfica que es descrita en un plano bidimensional.

En este sentido, si entre la escena y el ojo se coloca una pantalla (cámara), cada uno de los rayos determina un punto sobre la pantalla formándose así una sección que si se captura crea en el ojo la misma imagen que la escena misma. Según la posición de la pantalla al capturar la imagen, se tendrá distintas secciones del mismo objeto. Así pues, se ha establecido una relación de transformación del mismo modelo, pero desde diferentes perspectivas geométricas sin que estas alteren la naturaleza del objeto capturado. Esta relación de transformación crea en el ojo de la persona una correspondencia biunívoca entre el objeto y la imagen; es decir a cada elemento de la imagen, le corresponde un elemento de la preimagen; sin embargo, esto solo se logra si la peinadora se empeña en hacer el peinado lo más parecido posible y es consciente de esta correspondencia uno a uno al menos de manera empírica o intuitiva.

Particularmente para realizar el modelo de peinado 1 (MP1), la peinadora $P1$ tomó como referencia la imagen de la *figura 99* esta fotografía fue capturada desde una perspectiva que no permite observar en detalle el diseño del peinado. Sin embargo, esta proyección permite que $P1$ infiera el comportamiento total de MP1 sobre la base de lo que se muestra en la representación fotográfica. Esto debido a que $P1$ puede observar el comportamiento completo de uno de los lados de $MP1$. En efecto, en la imagen de la *figura 100*, se observa el producto final realizado por $P1$, donde se puede constatar que $P1$ infiere que el comportamiento de las tropas a un lado de la cabeza debe ser similar con el otro lado.

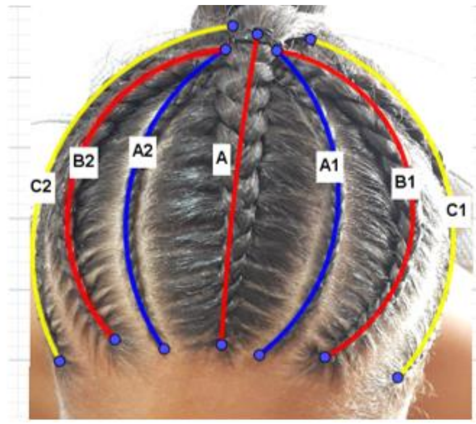


Figura 99 Modelo de referencia, peinado 1

Figura 100 Modelo 1, peinado realizado por P1

Al establecer las relaciones de transformación en un primer momento, entre la imagen de referencia y el peinado realizado, y en un segundo momento entre el peinado realizado y la imagen que se toma de este, permite afirmar que la esencia y características propias del peinado no se pierden al plasmarlo en una representación bidimensional. Generalmente, este tipo de transformaciones es lo que se le conoce como transformaciones proyectivas y pueden analizarse e interpretarse en infinidad de maneras, esto en función de la geometría o perspectiva con la que se estudie o se quiera hacer énfasis. Particularmente en lo que respecta al análisis desde un lente matemático de los modelos de peinado observados y descritos en esta investigación, los cuales abarcan tanto las geometrías euclidianas como las no euclidianas y que va en concordancia con los referentes conceptuales seleccionados, se opta por trabajar con la representación de los peinados en la superficie bidimensional, de manera que exista entre los elementos de origen y los transformados una relación biunívoca pertinente[56] para el análisis.

En vista de las consideraciones anteriores se destaca, entre las diversas nociones o aproximaciones matemáticas encontradas en los peinados, la simetría y la homotecia, estudiadas sobre la base de la geometría proyectiva de Klein. En las siguientes líneas se describen estas aproximaciones.

5.1.2.1 Una aproximación a la noción de reflexión o simetría axial

En los tres modelos de peinados seleccionados se evidencian aproximaciones reflexivas y elementos muy similares en la realización de estos. Puesto que, tanto $P1$ como $P2$ toman medidas no convencionales con la peineta, los dedos, uñas, o rasgos faciales de su clienta para sacar las partiduras y trenzar el cabello. Así pues, luego de tejer en los tres peinados un lado de la cabeza y a partir de las unidades de medida no convencionales como las mencionadas anteriormente, tejen el otro lado de la cabeza a partir de las mismas unidades utilizadas inicialmente, de manera que se obtienen partiduras y tropas aproximadamente iguales en cantidad y distancia a las tropas y partiduras del otro lado de la cabeza. A continuación, se muestra cómo se ve reflejado lo anterior en los tres modelos de peinado. *Ver figura 101*

Figura 101: Producto final de los tres modelos de peinado, donde se evidencia que en los tres modelos las tropas y partiduras de un lado de la cabeza son aproximadamente iguales a las del otro lado, pero en sentidos contrarios.

[56] Con pertinente, nos referimos a que la representación capturada de cada modelo logre revelar ante los ojos del lector los elementos y propiedades que se pretenden mostrar.

Al apreciar que entre los tres peinados hay similitudes que corresponden de forma análoga a las aproximaciones de reflexividad y en aras de evitar redundancias, se recurre para el análisis de la reflexividad a entrar en detalle solo en el modelo de peinado 2 (MP2). Pues bien, esta elección se hizo tras identificar cuál de los peinados presentó un comportamiento que se acopla mejor a las características y propiedades propias del concepto matemático en cuestión (simetría). El análisis de los otros peinados se hace de forma análoga para organizar y sintetizar mejor la información.

En vista de lo anterior, si se observa la *figura 102* en la cual se presenta la representación bidimensional del MP2 realizado por $P2$, se pueden describir las propiedades propias de la simetría que son abstraídas de él.

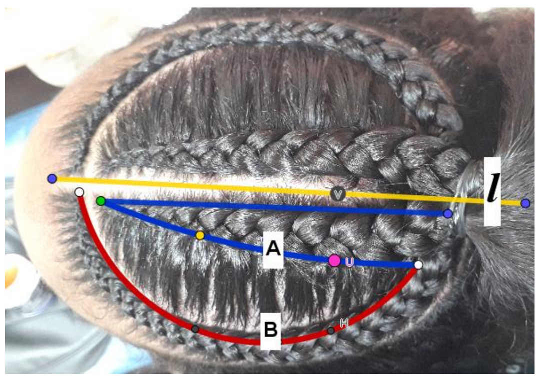


Figura 102 Modelo de peinado 2 realizado por P2.

Sea l la partidura que $P2$ hace de forma vertical por la mitad de la cabeza, línea amarilla en la *figura 102*; y A y B las tropas de la parte izquierda de la cabeza, líneas azules y roja respectivamente[57]. Entonces, al asignar a la línea l la categoría de eje de simetría, se observa que cada línea A y B del plano bidimensional se transforma en las líneas A' y B' respectivamente que están ubicadas al otro lado de la cabeza, y que aparentemente coincide con las tropas de ese otro lado. Esta información se corrobora al hacer la transformación referente a la simetría axial a través de una modelación en el software de geometría dinámico GeoGebra, el cual tiene las herramientas necesarias para crear diversidad de transformaciones proyectivas.

[57] Se modelan las partiduras y tropas por medio de líneas, puesto que permiten ver de manera más clara el comportamiento y las formas de estas.

En consecuencia, al modelar a través de GeoGebra la reflexión o simetría axial que como se dijo en el desarrollo del documento es una transformación que proyecta a cada punto *P* del plano en otro punto *P'* del mismo plano a partir de un eje de simetría (Sángari, 2002), se observa que las líneas *A* y *B* (preimágenes) del plano en el eje de simetría *l*, dan como resultado las líneas *A'* y *B'* respectivamente en el mismo plano. Ver *figura 103.*

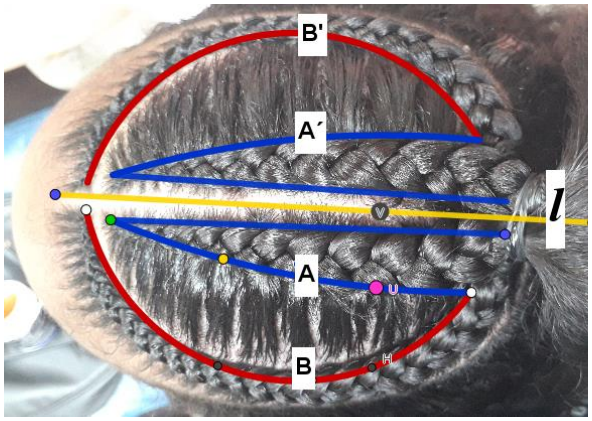


Figura 103 Simetría axial de las preimágenes *A* y *B* en el eje *l*

En la *figura 103* se muestra las imágenes *A'* y *B'* obtenidas como resultado de la simetría axial aplicada a las preimágenes *A* y *B* a través del eje de simetría *l*, las cuales coinciden aproximadamente con el comportamiento y forma de las tropas y partiduras del modelo de peinado MP2. A continuación se estudia a profundidad sus propiedades.

Si *A'* y *B'* son imágenes de *A* y *B* obtenidas por simetría, entonces *l* es la mediatriz de los segmentos *AA'* obtenidos para cada punto sobre *A* y *A'* y de forma análoga *l* es la mediatriz de para todos los segmentos *BB'* formados por los puntos sobre *B* y *B'* (Sángari, 2002). En tal circunstancia, es posible encontrar un punto medio V entre *A* y *A'* (de forma análoga sucede con el segmento *BB'*). En efecto, si se ubica el punto *U* en la línea *A* y el punto *U'* en la línea *A'* entonces la distancia del segmento *UV* es igual a la distancia del segmento *VU'*. Ver *figura 104.*

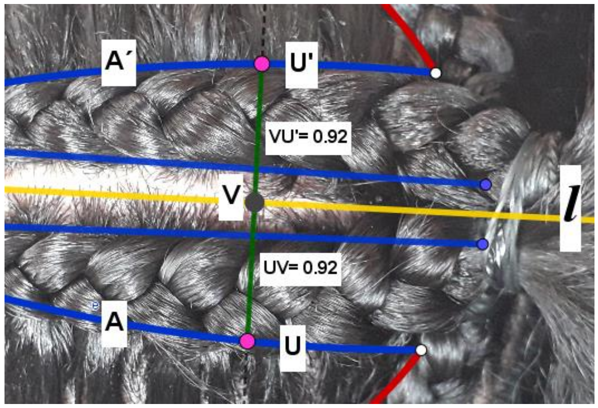


Figura 104: Representación de la mediatriz obtenida a partir de la simetría del punto U, en la cual se describe el punto medio del segmento UU'. Distancia $UV = VU' = 0.92$

Al ser las distancias de UV y VU' iguales entonces los puntos U y U' equidistan del eje de simetría *l* y la distancia de U a U' es el doble de la distancia de U a V.

Siguiendo este análisis, se mide los ángulos formados por el segmento UU' y el eje de simetría *l* por medio de GeoGebra, y se muestra que efectivamente se forman ángulos rectos (90°), lo que termina por demostrar que efectivamente *l* es la mediatriz de los segmentos AA' y los segmentos BB' simultáneamente. Ver *figura 105*.

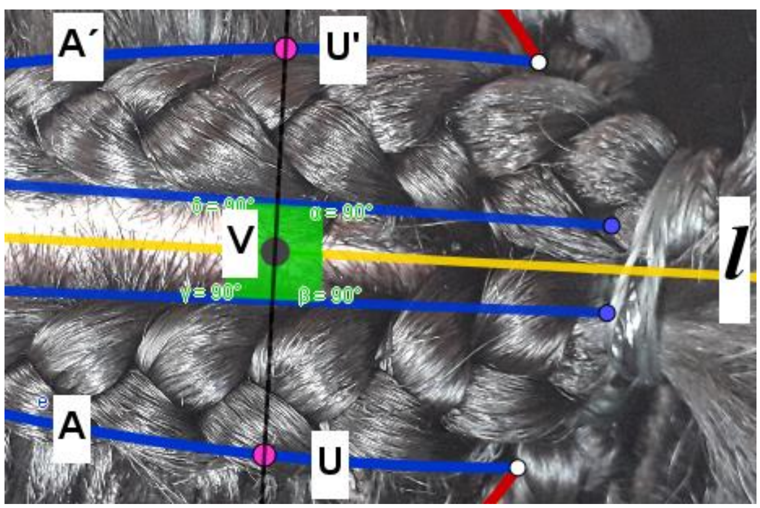


Figura 105 Ángulos rectos formados por puntos correspondientes de líneas congruentes.

Es necesario aclarar que los elementos rescatados hasta aquí y los que se muestran a continuación, son sólo aproximaciones de los conceptos matemáticos que se hacen sobre las representaciones obtenidas en esta práctica artesanal, pero estas aproximaciones no deben confundirse con los conceptos matemáticos mismos.

5.1.2.2 Una aproximación a la noción de homotecia

La aproximación a la noción de homotecia puede ser estudiada sólo a partir del modelo de peinado 3 (ver *figura 106)*, puesto que en los demás modelos de peinado no se encontraron rastros de esta noción. Al igual que la noción de simetría axial, también se trabaja con la representación bidimensional y rescatando características evidenciadas en el paso a paso de la construcción del diseño de peinado (ver descripción modelo 3, pág. 98)

Figura 106 Modelo de peinado 3 realizado por P2

Para la ejecución de este modelo, como se mostró antes, P2 inicia dividiendo el cabello dos veces en dos partes aproximadamente iguales para formar las partiduras o líneas L y M, esta última corta a la línea L. Ver *figura 107*

Figura 107 Línea L y M del modelo 3

Y con base en ello, $P3$ obtiene las líneas $M1, M2, M3, M4, L1, L2, L3$ haciendo subdivisiones de L y M aproximadamente iguales. Con lo anterior, $P2$ tiene una guía para hacer las partiduras (líneas) que cortan simultáneamente a L y M en diferentes puntos, de donde se obtiene las líneas $N1, N2$ y $N3$, *Ver figura 108.*

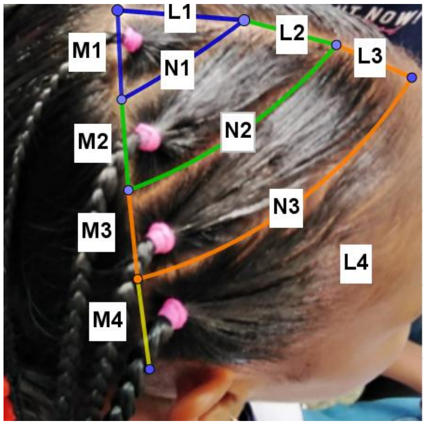


Figura 108 Lado derecho del modelo 3, con sus respectivas subdivisiones (partiduras)

Se observa que la primera partidura o línea $N1$, forma un triángulo de lados $M1, L1$ y $N1$ y que la línea $N2$ y $N3$ aparentemente describen un lado de dos triángulos diferentes. Sin embargo, es importante señalar que esto se da porque la línea $N1$ sirve de referencia para hacer las dos partiduras $N2$ y $N3$ que son aproximadamente paralelas a $N1$, como se muestra en la *figura 108.* Esto último se pretende detallar en lo que sigue.

Pues bien, después de analizar el paso a paso seguido por $P2$ en la realización de las partiduras del lado derecho, se puede inferir con base a la forma en que $P3$ construye el peinado que ella tiene aparentemente una noción empírica de la transformación de homotecia[58]. Esto es, si en la intersección de las líneas M y L se traza el punto C y se le da el nombre de triángulo T al triángulo de lados $L1, M1$ y $N1$[59], es posible obtener otra figura triangular semejante a T, a partir del punto fijo C y bajo la multiplicación de las distancias por un factor común. Debido a que, en la construcción de estas figuras, $P2$ procura que las sublíneas de M y L sean iguales en cuanto a su magnitud. Analicemos un caso particular; $M1 = M2$ y $L1 = L2$. Por ende, se obtiene un triángulo $T´$ de lados $2M1, 2L1$ y $N2$ de manera que se ha realizado una transformación homotética con centro C y razón $K = 2$.

De esta forma, a cada punto o línea de T le corresponde otro punto o línea T' producto de la transformación, los cuales se encuentran alineados con el centro o punto C. A continuación, se realiza el modelo en GeoGebra para corroborar este comportamiento.

---

[58]En la pág. 58 se define a qué hace alusión esta transformación

[59]Es de menester aclarar que estas aproximaciones a figuras triangulares son geometrías no euclidianas

Entonces, sea T el triángulo de lados $L1, M1$ y $N1$ como se observa en la *figura 109*, al aplicar con el software de GeoGebra una homotecia con centro C y razón $K = 2$ a T, se obtiene el triángulo T' de lados $M1 + M2, L1 + L2$ y $N1 + N1$ o de forma equivalente el triángulo de lados $2M1, 2L1$ y $N2$

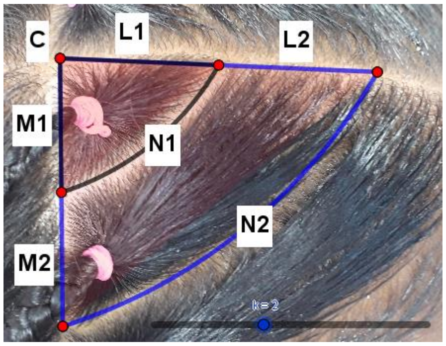


Figura 109 Homotecia con centro C y razón $K = 2$

Al observar la *figura 109*, nos muestra que T' es homotético a T, corroborando así la intuición de que los triángulos descritos en el peinado tienen un comportamiento que obedece a una relación de homotecia.

Así pues, al hacer alusión a una de las principales propiedades de la homotecia que establece que por la razón de homotecia (k) todas las figuras homotéticas son semejantes, es decir se conserva la forma; se observa que la *figura 109* al ser modelada en GeoGebra describe tal propiedad, lo cual es producto de que el cambio de tamaño en las dimensiones de T sólo altera las dimensiones en T'; no obstante, la forma permanece intacta por la construcción que $P2$ hace las figuras del peinado, donde se intenta mantener la igualdad entre las sublíneas formadas, esto es $M1 = M2$ y $L1 = L2$. Por ende, la distancia desde C hasta la segunda subdivisión aumenta el doble de la distancia descrita por la primera subdivisión, lo cual se reduce a decir que el triángulo T' es una transformación homotética con centro C y razón $K = 2$. Esta descripción da fundamento a la afirmación de que las propiedades propias de los objetos en el espacio pueden ser analizadas a partir de las representaciones bidimensionales de estas.

Veamos con detalle las figuras T y T' por separado como se muestran en las *figuras 110 y 111*, de manera que se pueda abstraer características propias de la transformación de homotecia:

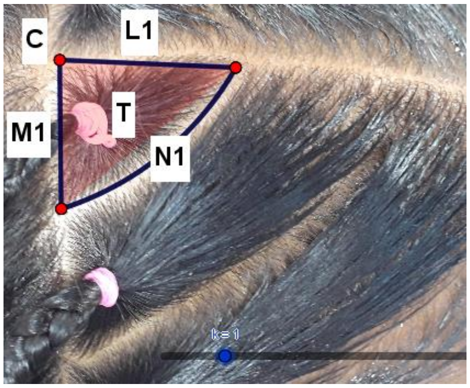


Figura 110 Triángulo T

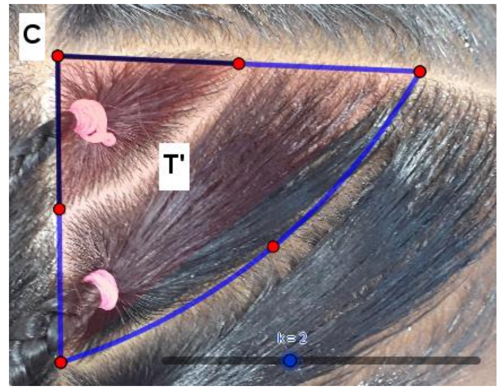


Figura 111 Triángulo T'

Específicamente, dado que M1= M2 y $L1 = L2$ entonces las dimensiones de T' son $2M1$, $2L1$ y $2N1$ afirmando así que la razón k es igual a 2.

Dentro de este contexto y bajo el análisis de una de las propiedades de la homotecia, se rescata que los ángulos entre la figura original y la transformada son iguales puesto que las líneas correspondientes que no pasan por el centro se transforman en líneas paralelas entre sí. Pues bien, en el caso particular que le compete al modelo de peinado que se está analizando, se encuentra que $N1$ es paralela a $N2$[60] y los tres ángulos internos del triángulo T no euclidiano son congruentes con los tres ángulos correspondientes del triángulo T'. De manera que si se llama A, B y C a los ángulos internos de T, como se observa a continuación: *ver figura 112*

[60] En geometría proyectiva dos rectas paralelas se pueden cortar en el infinito, esto en función de la perspectiva de que se observe.

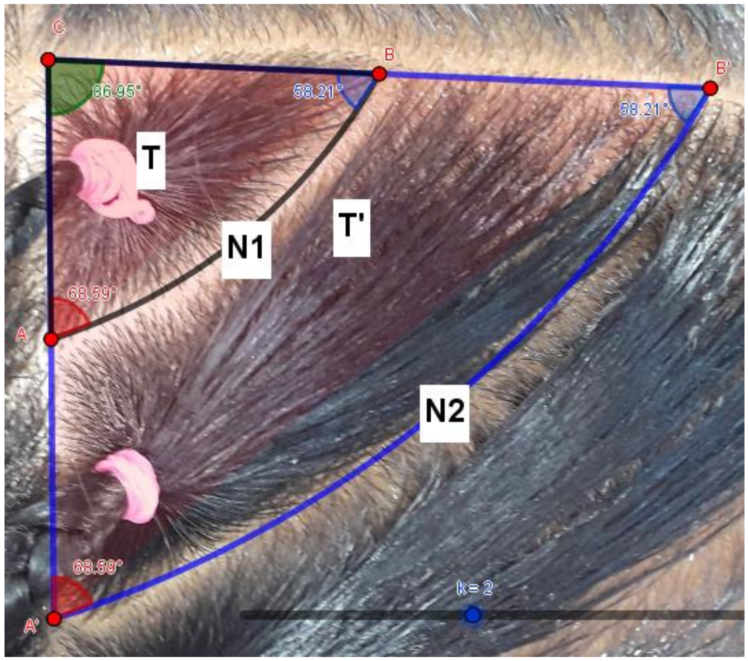


Figura 112 Ángulos A, B y C aproximadamente iguales a los ángulos A', B' y C' respectivamente

Por medio de GeoGebra se verifica que los ángulos A, B y C tienden a ser congruentes a los ángulos A', B' y C' respectivamente, es decir, tienen la misma medida. Por lo tanto, la imagen de cada ángulo es un ángulo que tiene la misma amplitud que el ángulo inicial, como se observa en la *figura 112*.

Por otra parte, es importante mencionar lo siguiente: se tiene que la homotecia varía en función del valor de su razón (k), si es mayor a 1, si está entre 0 y 1 o si es menor que 0. Específicamente como la razón es 2 está entre los mayores a 1, por tanto la figura transformada es más grande que la original, sin embargo, si T' fuese la figura original y T la transformada se estaría hablando de una razón entre 0 y 1, en particular $\frac{1}{2}$ y por tanto la figura transformada es más pequeña que la original. Así pues, se evidencia que la razón cambia en función de la perspectiva de donde se observe (Luna y Álvarez, 2005)

Con esta última anotación se cierra la fase de análisis en la cual bajo aproximaciones se logró rescatar de los modelos de peinado observados, algunos elementos propios de las matemáticas disciplinares, mostrando una práctica, el trenzado como proceso y el peinado como producto final, en la cual estos conceptos matemáticos adquieren un significado que va más allá de la teoría y las situaciones hipotéticas.

6 Capítulo 6 Conclusiones

En aras de dar claridad a los elementos que subyacen de esta investigación y que son delimitados bajo los fines propuestos inicialmente, las conclusiones de esta investigación se desarrollan desde tres enfoques. Primero, se abordan las conclusiones bajo el horizonte delimitado por los objetivos inicialmente propuestos. Segundo, con base en lo anterior se realiza algunas reflexiones finales, a partir de los referentes didácticos, el desarrollo de la investigación y el desde el punto de vista de las autoras del trabajo, con el fin de dar una postura y plantear una posible solución a la problemática expuesta en la investigación, lo que termina por justificar la importancia de este trabajo para la Educación Matemática. Por último, se pretende dejar un panorama abierto hacia futuras investigaciones, señalando la importancia de promover y realizar investigaciones que tomen como objeto de estudio los trenzados de cabello desde cualquier contexto, en particular los trenzados artesanales de cabello afro y en general hacia la consolidación de investigaciones que estudien cualquier tipo de práctica artesanal.

6.1 Conclusiones en función de los objetivos propuestos

Para el desarrollo de esta investigación se propuso como objetivo general caracterizar los saberes matemáticos escolares implícitos (o subyacentes) en las prácticas del trenzado artesanal de cabello afro en una comunidad de peinadoras portejadeñas. Así mismo, para alcanzar este objetivo, se propuso dos objetivos específicos. Con el primer objetivo específico se buscaba identificar y describir los procesos de trenzado artesanal de cabello afro como una práctica cultural propia de la comunidad portejadeña. Y por su parte, con el segundo objetivo específico, se buscaba identificar y analizar los saberes matemáticos subyacentes en los procesos de trenzado artesanal de cabello afro, a fin de determinar sus posibles relaciones e implicaciones curriculares y didácticas sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En función de ello, se mostrará cuándo, cómo y qué se alcanza en cada uno de estos. Así pues, tenemos que:

En lo que respecta al objetivo específico 1, se hizo la descripción de la práctica del trenzado de cabello tomando como referencia la metodología etnográfica MOMET propuesta por (Albanese, 2014) la cual está estructurada bajo cinco factores que permitieron describir dicha práctica resaltando los aspectos más importantes de esta. Los tres primeros factores: factor caracterización, factor utilidad y factor material; permitieron conocer en general, los fines culturales y sociales de la misma. Mientras que los dos factores restantes, modalidad de tejido y factor de diseño, brindaron la información necesaria para identificar aquellos saberes matemáticos implícitos en la práctica.

En efecto, el factor cuatro 'modalidad de tejido' permitió distinguir las dos modalidades de tejido fundamentales en la realización de un peinado afro, trenza y tropa simple de cabello, las cuales son susceptibles de análisis porque al estudiar detalladamente la forma en la que se mezclan o entrelazan los cadejos se evidencia un comportamiento particular y cíclico en el proceso de tejer la trenza y que puede ser modelado bajo una teoría matemática. Por su parte, el factor cinco 'factor diseño' permitió dar cuenta del producto final obtenido después del trenzado, esto debido a que este factor se centra en desarrollar la descripción de la práctica detallando los aspectos de forma del trenzado (peinado afro), es decir, estudiar y analizar la dirección (diagonal, hacia la derecha, hacia la izquierda, hacia el centro…) y la forma (circular, lineal, curvilínea…) en que son tejidas la trenza y la tropa simple.

Con la descripción de estos factores, se culminó el capítulo cuatro de esta investigación el cual permitió alcanzar el primer objetivo. Durante la descripción de esta práctica, se obtuvo evidencias de que el proceso, así como el producto final del peinado, tiene un comportamiento particular que coincide con las propiedades fundamentales que caracterizan algunos conceptos matemáticos; tal vez sea de allí que subyace los estándares de belleza del peinado. En especial, se identifica y se trabaja principalmente sobre cinco de los saberes matemáticos implícitos en el trenzado de cabello afro: el concepto de grafos, las permutaciones, unidades de medida no estandarizadas y las transformaciones geométricas de reflexión y homotecia.

Ahora bien, en relación con el objetivo específico 2, el análisis de los saberes matemáticos identificados en los procesos de trenzado artesanal de cabello afro se hizo en función de la metodología MOM que corresponde a uno de los elementos descritos por Albanese en su modelo metodológico general, lo cual responde al hecho de que esta metodología da prioridad y nos brindó los elementos necesarios para hacer el análisis desde los constructos matemáticos.

Para lograr lo anterior, se modeló la práctica en cuestión mediante el software de geometría dinámica Geogebra, que permitió consolidar[61] y constatar que los saberes matemáticos identificados en el capítulo anterior cumplen ciertas propiedades que deben ser analizadas porque caracterizan algunos conceptos matemáticos, las cuales se dan tanto desde el proceso mismo de tejer como en el peinado resultante; de modo que se clasificó el análisis en dos categorías: la categoría proceso y la categoría producto. La primera, consideró el análisis de las dos modalidades de tejido bajo los conceptos matemáticos de grafos y permutaciones. Y la segunda, categoría producto, consideró el análisis de los aspectos de forma que caracterizan el trenzado afro, bajo los conceptos matemáticos de: unidades de medidas no estandarizadas y de las trasformaciones geométricas de reflexión y homotecia.

En relación con la categoría proceso del trenzado de cabello afro se pudo concluir que, desde la perspectiva formal de los grafos y permutaciones, para la modalidad de tejido "trenza simple" se cumplen los siguientes criterios:

1. Si se hacen corresponder las aristas con el conjunto de los cadejos A: $\{A_3\ A_2\ A_1\}$ y los vértices con el conjunto de las posiciones V: {a, b, c.}, se puede mostrar que la trenza simple de cabello se puede interpretar como un grafo completo. Esto debido a que la trenza simple se puede entender como la composición de n grafos simples dirigidos, cada uno formado a partir del conjunto de los tres vértices V: {a, b, c.} y una única arista del conjunto A: $\{A_3\ A_2\ A_1$que conecta cada par de vértices distintos en el plano.
2. A cada arista implicada en la composición de la trenza simple le corresponde un arreglo par y ordenado de vértices adyacentes. En este sentido, tenemos la expresión P (3,2) = 6. La cual indica que si se tiene un conjunto de tres (3) vértices V: {a, b, c} se obtienen seis (6) arreglos pares (2) y ordenados de dicho conjunto. Es decir, tenemos que las 2-permutaciones de V: {a, b, c.} = {(a, b); (b, a); (a, c); (c, a); (b, c); (c, b)} y que estos seis arreglos ordenados determinan

[61] A partir de Geogebra se identificó patrones y se estableció conjeturas y teorías sobre los saberes matemáticos informales identificados en la práctica del trenzado, conjeturas que después fueron confirmadas mediante el empalme entre los saberes matemáticos encontrados en la práctica y lo que establece la teoría formal de las matemáticas (la perspectiva formal de los cinco saberes matemáticos identificados en la práctica se expone al inicio del capítulo 3)

las posibles parejas de vértices adyacentes para cada arista implicada en la composición de la trenza simple de cabello. En esta dirección,

3. Se necesitan de tres ciclos (6 pasos), para que cada cadejo (Arista), vuelva a su posición inicial. En cada uno de estos pasos, las aristas ocupan las posiciones a b y c en órdenes diferentes, y durante ese recorrido ninguna arista repite el orden en que se ha ocupado ya dichas posiciones. En este sentido, cada uno de esos 6 órdenes corresponde a una de las 3-permutaciones del conjunto de las aristas A= $\{A_1, A_2, A_3\}$ en función de las posiciones V: {a, b, c} que cada una de estas puede ocupar. Así pues, se tiene la expresión P (3,3) = 6. La cual indica que si se tiene un conjunto de tres (3) Aristas A= $\{A_1, A_2, A_3\}$ se obtienen seis (6) arreglos ternarios (3) ordenados de dicho conjunto. Es decir, las 3-permutaciones de A= $\{A_3\ A_2\ A_1\}$ corresponden a $\{(A_3\ A_2\ A_1)$, $(A_2\ A_3\ A_1)$, $(A_2\ A_1\ A_3)$, $(A_1\ A_2\ A_3)$, $(A_1\ A_3 A_2)$, $(A_3\ A_1 A_2)\}$, las cuales determinan las ternas en que el conjunto de las aristas A= $\{A_3\ A_2 A_1\}$ ocupan ordenada y respectivamente las posiciones V: {a, b, c} durante el proceso de tejer una trenza.
4. Durante el proceso de tejer una trenza, cada arista se conforma así misma como un grafo completo, a partir de cada grafo simple dirigido que forma en cada paso de sí misma. En consecuencia, el recorrido conjunto de las tres aristas constituye en sí un grafo completo, pues es la integración conjunta de cada una de sus tres aristas. Por lo tanto:
5. El recorrido conjunto de las tres aristas, constituye en sí el grafo completo del trenzado artesanal de cabello afro. En consecuencia, cada una de las tres aristas $(A_3\ A_2 A_1)$ conforma por sí misma un subgrafo del grafo completo del trenzado de cabello.

Desde la perspectiva formal del concepto de grafos y permutaciones, para la modalidad de tejido “tropa simple” se pueden concluir los mismos criterios mencionados para la trenza simple con una diferencia; la tropa simple es tejida sobre el cuero cabelludo por lo que al culminar un ciclo se agrega una cantidad de cabello al cadejo que haya quedado en la posición del centro “b”. Estas cantidades que se agregan cíclicamente son prácticamente “iguales” y es lo que hace que la tropa aumente su grosor de forma proporcional. Dado esto, se puede concluir el siguiente criterio:

> El crecimiento “proporcional” de la cantidad de cabello de la tropa simple, se debe al orden en que se dan las permutaciones de las aristas en función de las posiciones que ocupan en cada paso y ciclo que se realiza. Ya que como se mencionó[62] el orden en que cada una de las tres aristas A: $\{A_3\ A_2 A_1\}$ ocupan las posiciones V: {a, b, c} respectivamente, permite determinar que cada una de ellas recibirá una misma

[62] Ver paso tres del punto anterior.

cantidad de cabello, puesto que la posición "b" alternadamente es ocupada por cada una de las aristas durante cada vuelta que se complete en la conformación del tejido. Así pues, al terminar de tejer la tropa, cada cadejo que la compone termina con la misma cantidad de cabello, que a su vez difiere de la cantidad inicial que poseían. Por lo tanto, el grosor con el que la tropa termina difiere del grosor con el cual inició.

Por otra parte, en relación con la categoría producto del trenzado de cabello afro se pudo concluir que desde la perspectiva formal del concepto matemático de unidades de medida no convencionales y las transformaciones proyectivas (simetría y homotecia) para las modalidades de tejido "trenza y tropa simple", se cumplen los siguientes criterios:

1. Las peinadoras utilizan unidades de medida no convencionales, tales como las falanges, las uñas, rasgos faciales, distancias entre dientes de las peinetas o la visión misma, para la realización de las partiduras y tropas, y aun bajo el uso de estas medidas manejan una precisión impresionante, a tal punto de que las medidas de los modelos construidos con el trenzado de cabello son congruentes y se representan figuras semejantes. Pues bien, las peinadoras tejían un lado de la cabeza, el cual toman como referencia para identificar las medidas utilizadas en el otro lado ya sea que se realice una partición transversal o longitudinal.

2. Con base en lo anterior, fue posible identificar otras aproximaciones matemáticas como lo es la reflexión y la homotecia. Pues en particular estas transformaciones conservan propiedades donde se evidencia la congruencia y la semejanza entre figuras (partiduras o tropas). Para dar cuenta de ello de manera formal, se modela en Geogebra dos peinados por separado, uno para cada transformación, de tal manera que se pueda abstraer información relevante para fortalecer las aproximaciones matemáticas encontradas en cada una. En los siguientes ítems se explica con detalle.

3. Las transformaciones se trabajan con la representación fotográfica (bidimensional), por lo tanto, fue necesario sustentar desde la geometría proyectiva de Klein que, al pasar del espacio tridimensional al bidimensional, no se alteran las propiedades de los objetos de análisis (peinados) sino que nos permite la abstracción de propiedades propias de las figuras, esto en función de la perspectiva donde se observe.

4. Ahora bien, por una parte, se hayan aproximaciones reflexivas en cuanto a la equidistancia entre tropas y partiduras correspondientes. En particular, en los tres peinados primero tejen un lado de la cabeza utilizando unidades de medida no convencionales como las mencionadas anteriormente, y luego tejen el otro lado de la cabeza utilizando como referencia para tomar las medidas, las mismas unidades que utilizan al otro lado, de manera que resulten partiduras y tropas que sean aproximadamente iguales, en cantidad y distancia, a las tropas y partiduras del otro lado de la cabeza. Así pues, se llega a una noción empírica de reflexión, que representamos de la siguiente manera: sea $A\ y\ B$ dos tropas al lado derecho de la cabeza entonces existen $A'\ y\ B'$ en el lado izquierdo de la cabeza, equidistantes del eje de simetría l

en sentidos contrarios. Ver *pág. 124.* Asegurando así la equidistancia entre figuras y puntos que conforman las figuras, ángulos correspondientes congruentes (aproximadamente), que la mediatriz entre puntos correspondientes sea el mismo eje, etc.

5. Por otra parte, en lo que respecta a la noción de homotecia, se concluye que si en la intersección de las líneas M y L se traza el punto C y se le da el nombre de triángulo T al triángulo de lados $L1, M1\ y\ N1$[63], es posible obtener otra figura triangular semejante a T, a partir del punto fijo C y bajo la multiplicación de las distancias por un factor común. Debido a que, en la construcción de estas figuras, $P3$ procura que las sublíneas de M y L sean iguales en cuanto a su magnitud. De esta forma, a cada punto o línea de T le corresponde otro punto o línea llamada T' producto de la transformación, los cuales se encuentran alineados con el centro o punto C.

6. Análogamente, si T' fuese la figura original y T la transformada se concluye que hay una razón entre $0\ y\ 1$, en particular $\frac{1}{2}$ y por tanto la figura transformada es más pequeña que la original. Así pues, se evidencia que la razón cambia en función de la perspectiva desde donde se observa (Luna y Álvarez, 2005)

Con esta última anotación cerramos las conclusiones obtenidas en el análisis de la categoría producto, con las cuales se termina por alcanzar el objetivo específico 2 y a su vez el objetivo general de la investigación. A continuación, se presentan las conclusiones o reflexiones desde nuestro papel como investigadoras.

6.2 Reflexiones finales desde el punto de vista de las investigadoras

Para este trabajo de grado, se propuso investigar qué saberes matemáticos autóctonos de la cultura portejadeña se encuentran implícitos en sus prácticas culturales de trenzado artesanal de cabello afro, con el fin de atender algunas de las problemáticas que aquejan al sistema educativo Portejadeño, y en general, guiadas por el deseo de aportar desde nuestro trabajo de grado elementos que pudieran ser útiles para la Educación Matemática y las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas.

En este sentido, una de las problemáticas más fuertes que aqueja el sistema educativo portejadeño, identificado en su plan de desarrollo vigente, y que direccionó está investigación circunda bajo el hecho de que su modelo educativo actual es una copia importada y homogeneizadora que ha traído implicaciones culturales en tanto que su

[63] Es de menester aclarar que estas aproximaciones a figuras triangulares son geometrías no euclidianas

población no está siendo educada de manera que puedan atender sus necesidades culturales y a su vez, fortalezcan y desarrollen sus costumbres. Por lo que concluyen diciendo que necesitan urgentemente introducir cambios sustanciales en su sistema educativo, en defensa de su autonomía y particularidades étnicas. Con base en el estado del arte realizado encontramos que sus argumentos son válidos, ya que no se encontró una evidencia sustancial[64] que dé cuenta de una investigación en Didáctica de las Matemáticas que considere particularmente el contexto afrodescendiente y menos el contexto portejadeño en la cual se ofrezca elementos teóricos y didácticos a su sistema educativo que beneficie el diseño de planes de aula que respondan a sus necesidades étnicas y culturales, tal como ellos lo exponen.

Por lo anterior, nos permitimos inferir que aun cuando puede existir un interés por parte de los docentes en proponer planes de aula contextualizados, estos se encuentran limitados, puesto que no disponen de elementos teóricos y/o didácticos para hacerlo. Así pues, desde el enfoque Etnomatemático, hemos logrado estudiar atentamente una de las prácticas portejadeñas y afrodescendientes más predominantes,[65] el trenzado de cabello afro, identificado en el desarrollo de la práctica, una aproximación a los saberes matemáticos de: grafos, permutaciones, unidades de medida no estandarizadas y transformaciones geométricas de reflexión y homotecia, que se encuentran implícitos en dicha práctica, con ello hemos analizado cómo se desarrollan y ponen en práctica dichos saberes matemáticos desde nuestro punto de vista como investigadoras. Y tal como lo afirma D' Ambrosio (2012) constatamos que la forma intuitiva en que estos individuos acceden a los saberes matemáticos difiere de la manera formal de hacerlo.

En relación con lo anterior y mediante las entrevistas realizadas a las peinadoras, nos dimos cuenta de que estas llevan años ejerciendo dicha práctica, aprendieron a tejer desde pequeñas y continúan con el legado enseñándoles a las niñas pequeñas de la siguiente generación a trenzar. En este sentido, desde nuestra mirada como investigadoras analizamos que en los procesos de trenzado artesanal de cabello afro hay unos saberes matemáticos escolares que se ponen en juego constantemente y que no son nuevos, sino

[64]Esto no nos permite asegurar que ciertamente no se haya realizado alguna.
[65]Los peinados afro son una tendencia estética a nivel internacional

que han estado siempre implícitos en el desarrollo de la práctica, es decir, tal como lo expone Rosa & Orey (2006) son saberes con los que muchas niñas y aun niños llegan actualmente al aula de clase y muy probablemente no están siendo aprovechados y tenidos en cuenta para diseñar planes de aula que atienda las necesidades educativas de esta cultura.

En relación con lo anterior, se tiene que tal como lo afirma Rosa & Orey (2006) si desde la didáctica de las matemáticas se logran propiciar dentro del aula los encuentros entre los saberes matemáticos escolares e informales identificados en la práctica del trenzado con los saberes formales que establece la teoría, se puede lograr atender algunas de las problemáticas que actualmente enfrenta el sistema educativo Portejadeño, que se reduce en tres aspectos:

1. Que los educandos Portejadeños logren humanizar las matemáticas, tal cual lo establece el MEN y los estándares básicos, puesto que se estaría integrando dos contextos; el contexto de las matemáticas mismas y el contexto de la vida diaria, y como se ha mencionado dichos contextos se complementan mutuamente
2. Que el aprendizaje de dichos saberes matemáticos sea una construcción mutua y enriquecedora a través de la comunicación entre las distintas perspectivas culturales que los estudiantes tienen frente a la práctica del trenzado.
3. Que los Portejadeños y en general la comunidad afrodescendiente pueda mantener y conservar su identidad cultural que tanta falta les hace.

En este sentido, Rosa & Orey (2006) afirman que los estudiantes llegan al aula de clase con un bagaje de conocimientos, ideas, técnicas y estrategias que están fuertemente vinculadas con las matemáticas y que han adquirido y construido a través de sus experiencias al tratar de desenvolverse en su vida diaria. Estas estrategias a menudo difieren de las estrategias formales de las matemáticas, e involuntariamente siempre están ejerciendo gran influencia en la forma en cómo los individuos logran adquirir los conocimientos matemáticos, lo cual debe ser incorporado y tenido en cuenta en los currículos escolares.

No obstante, como se ha podido constatar, el foco de esta investigación no fue precisamente consignar una serie de tareas que estructuren una idea precisa hacia el diseño de una propuesta didáctica en la que se desarrolle los saberes matemáticos escolares identificados en la práctica del trenzado, sino que se dejó sobre la mesa cómo estos saberes matemáticos surgen en la práctica del trenzado artesanal de cabello afro, desde la perspectiva del investigador lo cual, como se ha mencionado antes, es útil y necesario para poner en marcha una nueva investigación direccionada en este sentido y que sea delimitada por ejemplo bajo la pregunta: ¿cómo diseñar una estrategia de intervención didáctica para trabajar conceptos asociados a los grafos y las permutaciones desde la práctica de trenzado artesanal afro? La cual puede ser delimitada por unos objetivos que, a consideración propia, van en correspondencia con el diseño metodológico a implementar. Como, por ejemplo; los organizadores del currículo propuesto por Rico, o la idoneidad didáctica propuesta por Godino. O mejor aún, desde las TIC, en particular con el uso del software GeoGebra bajo el diseño metodológico de la teoría de situaciones didácticas (TSD) propuesta por Brousseau, entre otros que surgen a consideración e interés del investigador.

6.3 Panorama hacia futuras investigaciones

Esta investigación al ser la primera en esta práctica artesanal afro portajadeña desde un enfoque etnomatemático, deja mucho camino por recorrer y profundizar. De manera que abre un amplio panorama hacia futuras investigaciones en función del énfasis o aproximación matemática que se quiera hacer. Pues bien, aquí se pudieron rescatar algunos saberes matemáticos pertinentes desde nuestro rol como investigadoras, sin embargo, es prudente mencionar que hubo saberes que dejamos por fuera del análisis debido a que no se logró profundizar en ellos, por cuestiones de tiempo, complejidad de estas y/o obtención de elementos carentes de profundidad, producto de los peinados elegidos como objeto de análisis.

En particular, llamó la atención el llegar a modelar el comportamiento de los cadejos con las funciones cosenoidales o senoidales, puesto que al comportarse de manera cíclica cada uno por las posiciones a, b y c, se encontró evidencia de curvas muy similares a las del comportamiento de estas funciones.

Así mismo, como investigadoras dejamos abierta la posibilidad de proponer una serie de tareas o estrategias didácticas enfocadas en generar los saberes matemáticos implícitos en la realización de la trenza simple. Es decir, enfocados a enseñar el concepto básico de grafos y/o permutaciones, tomando como referencia el diseño metodológico de las TSD, en el cual los objetivos estarían direccionados a cada uno de los escenarios de actuación que Brousseau propone. Esto en pro de que los estudiantes se encuentren con situaciones matemáticas que estén inmersas en sus prácticas culturales. De manera que se fortalezcan los saberes autóctonos de sus comunidades afrodescendientes.

Por otro lado, al promover un primer acercamiento desde nuestra perspectiva como investigadoras a los saberes matemáticos inmersos en los procesos de trenzado artesanal de cabello afro, logramos ver las matemáticas desde la práctica artesanal, pero haciendo énfasis en caracterizar dichas prácticas no desde el pensamiento matemático o concepciones matemáticas propias de las peinadoras observadas, sino, desde la visión de las matemáticas disciplinares que desde nuestra concepción subyacen de la práctica cultural realizada y que a nuestro juicio son el primer peldaño hacia la adquisición de los conocimientos matemáticos que le corresponden y que como investigadoras identificamos.

En esta dirección, se deja el panorama abierto hacia una futura investigación en la que se pueda analizar la práctica del trenzado artesanal de cabello afro desde el pensamiento matemático mismo de las peinadoras, de tal forma que desde su propio discurso se pueda determinar y analizar el quehacer matemático de su práctica, y no se limite al análisis que se hace desde el lente del investigador como se hizo en este trabajo. Puesto que si bien en esta investigación no direccionamos el análisis desde dicha perspectiva, sí podemos afirmar que en el discurso, los movimientos, las posiciones y demás acciones que realizan las peinadoras al momento de trenzar, hay muchos elementos que pueden ser útiles y que demarcan el camino hacia la identificación de los saberes matemáticos inmersos, solo por mencionar algunos destacamos: las medidas de los falanges de sus dedos que consciente y constantemente utilizan para asegurar la igualdad (forma, dirección, grosor) entre el modelo de las trenzas y tropas que tejen; los puntos de referencia como la nariz, los extremos de las orejas, y los extremos y medios de las cejas que usan explícitamente como referencia para dividir el cabello en la mitad, o la mitad de la mitad, tanto vertical como horizontalmente; y también la estrategia de tejer siempre un lado de la cabeza a partir de una partidura (línea recta o curva que se hace con la peineta pequeña) como referencia para mantener la homogeneidad del peinado.

Finalmente, queremos resaltar que el desarrollo de esta investigación aportó mucho a nuestra formación como futuras docentes, puesto que con este estudio se logró constatar que el quehacer docente va más allá de la puesta en escena en un aula de clase. Es decir, la práctica docente es de carácter social y tiene un propósito formativo que va más allá de la mera trasmisión de contenidos en una Institución Educativa; eso lo comprendimos luego del análisis de los referentes curriculares propuestos por MEN en Colombia, los referentes matemáticos, los referentes didácticos y el Plan de Desarrollo del Municipio de Puerto Tejada del departamento del Cauca.

Además, adentrándonos en la cultura, conociendo su historia, costumbres, saberes, lenguajes, maneras de ver y entender el mundo; en particular en una práctica artesanal de trenzado de cabello Afro que más que una tradición denota parte sus costumbres, estética y una forma particular de su lenguaje; se identificaron unos saberes matemáticos.

Es así como haber profundizado en el enfoque de las Etnomatemáticas, nos permite comprender la importancia de reivindicar los valores y prácticas de cada cultura y para nuestra investigación en particular, a aquellos que dan origen a un conocimiento matemático. Tal como lo hicimos en el desarrollo del trabajo y que nos permitió a partir de esta práctica, tener un acercamiento con la teoría de grafos para poder identificar las representaciones de algunos grafos en la práctica artesanal del trenzado de cabello afro; así como las transformaciones geométricas para modelar y hacer una aproximación a éstas en algunos de los peinados. Con esto queremos decir, que en primera instancia el ejercicio de la práctica docente exige conocer el contexto sociocultural, pero es necesario también unos conocimientos matemáticos bien fundamentados.

Por otro lado, entendemos también la importancia de integrar la tecnología en procesos de enseñanza y aprendizaje; ya que como lo hemos mencionado a través de la herramienta GeoGebra fue posible hacer el proceso de modelado. Esto facilita el análisis y la caracterización de las prácticas artesanales de cabello afro.

En este sentido, el ejercicio de investigación que hicimos ha fortalecido significativamente nuestra experiencia profesional, personal y nuestras proyecciones profesionales futuras. Con ello, hacemos referencia a que en primera instancia tenemos un gran reto como personas que hacen parte de la cultura y que tienen un compromiso, su conservación y transformación; pero, por otro lado, al momento de iniciar el ejercicio de nuestra profesión, habremos de partir de las problemáticas y necesidades propias de cada contexto, y recurrir a los referentes matemáticos, didácticos y curriculares.

Además, nos atrevemos a sugerir al programa Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en matemáticas, que considere la incorporación en su estructura curricular de un curso y unas reflexiones más profundas desde las etnomatemáticas; en especial, la Sede Norte, porque nos encontramos en una región pluriétnica y pluricultural. Nuestro trabajo queda como uno de los tres trabajos que se han propuesto bajo este enfoque en la Sede Norte y es un aporte al municipio de Puerto Tejada para que sea tenido en cuenta como Parte de su plan de desarrollo y de su Proyecto Educativo.

Bajo estas consideraciones, esta investigación nos invita como docentes a centrar más la atención en el componente curricular metodológico, por lo que comprendemos en un sentido más amplio que no se trata de impartir contenidos matemáticos por cumplir con un rol solamente, sino que los aspectos culturales influyen y ejercen mucha presión sobre la forma en que nuestros estudiantes logran adquirir los conocimientos matemáticos , y que con un trabajo comprometido en nuestra práctica docente, lograríamos aprovechar los saberes matemáticos con los que implícita y diariamente los estudiantes llegan al aula, para diseñar actividades contextualizadas, de manera que las matemáticas adquieran sentido y significado sociocultural para ellos.

Referencias

Albanese, V, Oliveras, L y Perales, F. (2014). *Etnomatemáticas en Artesanías de Trenzado: aplicación de un modelo metodológico elaborado*. ISSN 1980-4415, Bolema, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 1-20. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a01

Albanese, V. (2014). *Etnomatemáticas en artesanías de trenzado y concepciones sobre las matemáticas en la formación docente.* (Tesis doctoral) Granada: Editorial Universidad de Granada.

Arboleda, C y Castrillón, G. (2007). *Educación Matemática, pedagogía y didáctica*. Revista electrónica: Revemat, UFSC (V2.1), 5-27

Alberti. M. (2007) *Interpretación situada de una práctica artesanal*. Tesis Doctoral. Departamento de didáctica de las matemáticas y las ciencias experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona.

Aroca, A. (2007). *Una propuesta de enseñanza de geometría desde una perspectiva cultural. Caso de estudio: Comunidad indígena Ika – Sierra Nevada de Santa Marta (Tesis de maestría).* Cali, Colombia. Universidad del Valle.

Aroca, A. (2013). Algunas concepciones espaciales de los pescadores de Buenaventura, Pacífico colombiano. *Revista Amauta. Universidad del Atlántico*, 47-61.

Bishop. (1999). Enculturación matemática. La Educación Matemática desde una perspectiva cultural. Barcelona: Paidos.

Blanco, H. (2006). La Etnomatemática en Colombia. Un Programa en construcción. *Bolema*, 49-75.

Blanco, H. (2011). La postura sociocultural de la Educación Matemática y sus implicaciones en la escuela. Revista Educación y Pedagogía, 23(59), 59-66

Brousseau, G. (1998). La Théorie des situations didactiques. Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Carraher, T., Carraher, D., y Schliemann, A. (1982). Na vida dez, na escola zero: os contextos culturais da educação matemática. *Cadernos de Pesquisa, v. 42*, 79-86.

D'Ambrosio, U. (2012). The program ethonomathematics: theretical basis and the dynamics of cultural. *Notices of the American Mathematical Society*, 1183-1185.

Espinosa, R. (2010). Matemáticas discretas. México: Alfa Omega. Grupo Editor, S. A de C. V.

Fernández, C., Hernández, S., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación.* México: Interamericana Editoress, S.A. de C.V.

Godino, J y Batanero, C y Roa, R. (2002). Medida de magnitud didáctica para maestros. Proyecto Edumat-Maestros. Granada: Universidad de Granada. ISBN:84-932510-2-X

Gonzales y Zambrano (2011) *Representaciones sociales y prácticas matemáticas de un grupo laboral de Corabastos*. Trabajo de grado. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José De Caldas, facultad de ciencias y educación.

Gonzales, L. (2016). Geogebra en diferentes escenarios de actuación. Revista electrónica: Conocimiento libre y Licenciamiento, Venezuela, ISSN (2244-7423). 9-23.

Harris, M. E. (1991). School, mathematics and work. London: The Falmer Press.

Lave, J. (1998). Cognition in practice: mind, mathematics, and culture in everyday life. *Cambridge University Press*.

Lizcano. (2002). Etnomatemática, currículo e formação de professores. En G. Knijnik, F. Wanderer y C. Oliveira (Eds.). Las matemáticas de la tribu europea: un estudio de caso. Santa Cruz: Edunisc.

Luna, J., y Álvarez, Y. (2005). Felix Klein y el estudio de la geometría. Memorias XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética. http://funes.uniandes.edu.co/9148/1/Klein2005Luna.pdf

Navarro, E. (2014) Origen y resistencia de los peinados afrodescendientes como estrategia pedagógica.

Ministerio de Educación Nacional-MEN (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá (Colombia): Magisterio.

Mincultura. (2010). Comunidades negras, afrocolombianas, raizales y palenqueras. Bogotá. https://www.mincultura.gov.co/areas/poblaciones/comunidades-negras-afrocolombianas-raizales-y-palenqueras/Paginas/default.aspx

Morán, J., y Acosta, D. (2015). *La construcción del concepto de medida en el contexto de la escuela indígena "las aves" de canoas.* (trabajo de grado) Universidad del Valle.

Ortiz, J. A., y Angulo, J. J. (2010). La homotecia, un tema casi olvidado en la Enseñanza de la Educación Matemática en Buenaventura: Una propuesta desde el punto de vista algebraico. *Universidad del Valle sede Pacifico*.

Parra, Osorio, y Rincón. (2015). En *Una visión latinoamericana de la etnomatemática: tensiones y desafíos* (págs. 137-150). Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18(2).

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Rico, L. y Sierra, M. (1991). La comunidad de educadores matemáticos. En A. Gutiérrez (edt.) *Área de conocimiento: Didáctica de la matemática. Madrid: Editorial Síntesis.*

Rico, L. (1997a). Los organizadores del currículo de matemáticas, en Rico, L. (coord.). La Educación Matemática en la enseñanza secundaria, pp. 39-59. Barcelona: Horsori.

Rosa, M., y Orey, D. (2006). Abordagens atuais do programa etnomatemática: delinenando-se um caminho para a ação pedagógica. *Bolema*, 19-48.

Rosa, M., y Orey, D. (2013). Uma base teórica para fundamentar a existéncia de influéncias etnomatemáticas em salas de aula. *Currículo sem Fronteiras*, 538-560.

Sángari, A. (2002). *Geometría básica.*

Soto, J. L. (2018). *Nociones matemáticas en el sombrero de tampalkuari de la comunidad indígena Misak.* Santiago de Cali: Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

Scribner, S. Pricing delivery tickets: school arithmetic in a practical setting. *The Quarterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition*, v. 6, n. 1, p. 19-25, 1984.

Tabares, J. J. (2016). *Estado del Arte de la Etnomatemática en Colombia.* (trabajo de grado) Medellín: Universidad Nacional Abierta y a Distancia – UNAD.

Tenorio, C. (2011). *Escolaridad generalizada: ¿inclusión social o pérdida de la identidad cultural?* Revista de estudios sociales. Bogotá, Colombia, ISSN (123-885x). P. 57-71

Tejada, A. M. (2008). *Plan de desarrollo municipal 2008-2011.* Puerto Tejada- Cauca: Alcaldia municipal de Puerto Tejada - Cauca.

Zuluaga, U y Romero, M (2006). *Sociedad, cultura y resistencia negra en Colombia y Ecuador.* Cali: Programa Editorial Universidad del Valle. ISBN: 9789587654318