CARACTERIZACIÓN DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO EN LOS PROFESORES EN FORMACIÓN PROFESIONAL INICIAL DEL PROGRAMA LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE

LAURA CATALINA MORENO OSPINA
Código: 1552246
DANIEL A. LEGUIZAMO MORENO
Código: 1552215

UNIVERSIDAD DEL VALLE SEDE NORTE DEL CAUCA
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
Santander de Quilichao - Cauca, 2020

CARACTERIZACIÓN DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO EN LOS PROFESORES EN FORMACIÓN PROFESIONAL INICIAL DEL PROGRAMA LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE

Informe final de trabajo de grado

Director:

MG. RONALD ANDRÉS GRUESO

Profesor del Instituto de Educación y Pedagogía.

UNIVERSIDAD DEL VALLE SEDE NORTE DEL CAUCA
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
Santander de Quilichao - Cauca, 2020

Tabla de contenido

Índice de ilustraciones

Índice de tablas

Resumen

La presente investigación es una propuesta para el estudio y caracterización del razonamiento inductivo en profesores en formación profesional inicial de la Universidad del Valle a través de una serie de actividades teniendo en cuenta el modelo teórico propuesto por María Consuelo Cañadas (2007) por medio de los pasos del razonamiento inductivo, a saber, *el trabajo con casos particulares, organización con casos particulares, identificación de patrones, formulación de conjeturas, justificación de conjeturas, generalización y demostración*. Por medio de un estudio de tipo cualitativo con enfoque en el estudio de caso. Se realizó un rediseño de una serie de actividades para implementarlo con estudiantes de último año de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle, con el fin de analizar e indagar las estrategias que utiliza el profesor en formación profesional inicial para llegar a la generalización de las sucesiones polinómicas. En el análisis de los resultados se usan criterios que articulan los pasos de razonamiento inductivo con los sistemas de representación que manifiestan los profesores en formación profesional inicial al resolver las tareas propuestas. Como consecuencia de este estudio, los resultados reafirman las posturas de Ávila, López y Luna (2010) y de Aparicio, Cabañas y Sosa (2019) en torno a las dificultades asociadas al conocimiento del común matemático que poseen los profesores en ejercicio y en particular, los que están etapa de formación profesional inicial. Así mismo, los resultados ponen de manifiesto la importancia de seguir investigando sobre el conocimiento común del contenido de los futuros profesores de matemáticas

Palabras clave: Razonamiento, Razonamiento inductivo (RI), Generalización, Patrones, Profesores en formación profesional inicial, Formación de profesores de matemáticas.

Introducción

El razonamiento inductivo es un proceso cognitivo que parte de sucesos particulares y busca la generalización que rige esos hechos que acontecen (Cañadas, 2002). Su importancia en la enseñanza de las matemáticas está en que permite el descubrimiento de nuevo conocimiento, por medio de conjeturas basadas en los casos particulares, y en que para validar dichas conjeturas se favorece la construcción inductiva y empírica del conocimiento para llegar a su formalización (Castro, Cañadas y Castro, 2010).

De este modo, algunos autores distinguen que el razonamiento inductivo es un método apropiado para a enseñanza y aprendizaje, pues un objetivo del pensamiento científico es ver lo general en lo que es particular, pues en esto se basan las leyes que satisfacen el mundo externo (Whitehead, 2012). También, Pérez (2005) reconoce que en las tareas de generalización se debería implementar el aprendizaje inductivo, pues cuando se pasa de lo concreto a lo abstracto se permite que los estudiantes descubran las relaciones generales que hay detrás de cada situación.

Por otro lado, se cree pertinente prestarles atención a los profesores en ejercicio, debido a que ellos son quienes deberían promover la movilización de conocimientos de los estudiantes; sin embargo, estudios como el de Aparicio, Cabañas y Sosa (2019) encuentran dificultades en los profesores en ejercicio para razonar inductivamente. Por esta razón, es importante centrarse en cómo los profesores en formación profesional inicial piensan, desarrollan y adquieren conocimiento matemático, para así evaluar su razonamiento (Llinares, 2007). De ahí surge la importancia de este trabajo de investigación.

Este trabajo se inscribe en la línea Didáctica de las matemáticas y tiene como propósito caracterizar el razonamiento inductivo en la generalización de sucesiones polinomiales, en profesores en formación profesional inicial del programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle. Esta investigación aporta al campo de la Educación Matemática, en términos de tener un insumo adicional sobre cuál sería la causa de los problemas que se presentan en el aula de clases respecto al razonamiento inductivo, siendo importante este trabajo en la identificación de las posibles causas de estos problemas, y al tiempo, estas podrían ser objeto de análisis por parte de los programas de formación de la Universidad del Valle. Esto es, porque los resultados invitarían a reflexionar sobre el conocimiento matemático que tiene el profesor y sobre las formas de intervenir en el aula para propiciar un aprendizaje significativo en sus estudiantes.

Para el cumplimiento del objetivo de esta investigación se seleccionó una población representativa de veinte profesores en formación profesional inicial de la Universidad del Valle, y de acuerdo con los antecedentes de este trabajo se adaptaron unas tareas que se refieren a la generalización de sucesiones polinómicas. La adaptación de las tareas que se realizaron fue por medio de un rediseño que fue consecuencia de los elementos conceptuales tratados en el marco teórico y que, por ende, permitieron la consideración de preguntas auxiliares que permitieran caracterizar el razonamiento inductivo en la población objeto de estudio.

La documentación teórica y los resultados obtenidos en este estudio se sistematizaron por escrito y se organizó en cuatro capítulos. En el primero, se presenta la problemática de este estudio de acuerdo con los antecedentes indagados, se justifica la importancia y pertinencia de esta investigación, con lo cual, se establecen los objetivos pretendidos al realizar el estudio.

En el segundo capítulo, se documenta la problemática desde diferentes referentes conceptuales que se organizaron en tres perspectivas: Matemática, Didáctica y Curricular. En la perspectiva matemática se realiza una fundamentación de las nociones matemáticas relacionadas con las sucesiones. En la perspectiva didáctica se describen los aspectos más importantes del modelo teórico que propone Cañadas (2007), que permitirá esbozar de manera amplia la importancia del razonamiento inductivo y los niveles que favorecen el desarrollo de este tipo de razonamiento para la adquisición de conocimiento matemático. En la perspectiva curricular se hace una descripción de la propuesta del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998, 2006) para relacionar lo que se pretende en este trabajo con los objetivos de la educación matemática en Colombia. También se presenta el marco metodológico que sirve como base para realizar el estudio de campo y los elementos más importantes que se tuvieron en cuenta para que dar alcance a los objetivos propuestos.

En el tercer capítulo se presentan los resultados y análisis de los resultados. Aquí se describen los hallazgos importantes como consecuencia de la implementación de la prueba y se analizan a la luz de los referentes mencionados en el marco teórico, con el fin de caracterizar el razonamiento inductivo en los profesores en formación profesional inicial por cada tarea propuesta. Además, se identifican y se describen los sistemas de representación y las transformaciones de los sistemas de representación usados por los profesores.

En el último capítulo, que corresponde al cuarto, se recopila toda la información de los análisis de los resultados y se proponen algunas concusiones con respecto a los objetivos planteados. También se mencionan unas recomendaciones y reflexiones didácticas para futuros trabajos de investigación.

CAPÍTULO 1

1. Aspectos Generales Del Estudio

En el presente capítulo se expondrán los antecedentes, el problema que se abordó, la justificación y los objetivos. En primer lugar, en los antecedentes se exponen los trabajos de investigación relacionados con el razonamiento inductivo que describen la importancia de éste en el desarrollo del pensamiento matemático; en segundo lugar, se describe la forma en que se manifiesta la problemática y la pregunta problema que guio este trabajo; por último, se exhiben los objetivos que se pretendieron alcanzar a lo largo de este trabajo de grado y la pertinencia de abordar la problemática por medio de la justificación. Todo esto se hizo bajo el referente conceptual de Cañadas (2007).

1.1. Antecedentes

En los últimos años, se ha mostrado un interés por estudiar el razonamiento matemático, dado que es importante para hacer y aprender matemáticas (Conner, Singletary, Smith, Wagner, & Grancisco, 2014). Por esta razón, diversos autores en el campo de la Educación Matemática se enfocan en potenciar el razonamiento desde diferentes perspectivas. Dentro de los autores más clásicos se encuentran a Cañadas y Castro (2002) que hablan sobre el razonamiento inductivo, Conner et al. (2014) sobre el razonamiento deductivo y, por último, Carlson, Sally, Coe, Larsen, y Hsu (2003) del razonamiento covariacional. Este trabajo de investigación se centra en el estudio del razonamiento inductivo.

De ese modo, la inducción se ha caracterizado por jugar un papel importante en las diferentes ciencias, entre ellas las Matemáticas. Polya (1979) afirma que “La inducción es un modo de razonar que conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de ejemplos particulares y sus combinaciones” (p.114). Así mismo, Polya (1945) propone que para trabajar el razonamiento inductivo se deben tener en cuenta cuatro pasos que son, a) el trabajo con casos particulares; b) búsqueda de patrones relacionados con los casos particulares; c) formulación de conjeturas; d) comprobación de la conjetura (generalización). En esta misma vía, Cañadas, Castro y Molina (2010) justifican por qué el razonamiento inductivo es generador de conocimiento matemático y, en gran parte del trabajo llegan a la conclusión de que la generalización (fin último del razonamiento inductivo) interviene activamente en la construcción de conceptos; para validar esto, sugieren unas actividades en las que se pueden hacer uso del modelo de razonamiento inductivo propuesto por Cañadas (2007) para el aprendizaje de las matemáticas.

En la búsqueda de la literatura especializada del tema de interés, se encontraron estudios realizados sobre el razonamiento desde diferentes enfoques. Algunos de estos estudios se relacionan con el razonamiento algebraico; sin embargo, estas investigaciones no se encuentran alejadas del interés particular del presente trabajo que se enfoca en analizar las generalizaciones. De este modo, indistintamente el enfoque, sea razonamiento algebraico o razonamiento inductivo, para efectos de asociarlo a un enfoque, en este trabajo se privilegia la alusión al razonamiento inductivo que coincide con el marco conceptual de Cañadas (2007). Por esta razón, vale aclarar que a continuación se hará mención de algunas investigaciones que aportan información importante para este trabajo en cuanto al proceso de generalización, y de este modo, se hará una caracterización de estos estudios de acuerdo con el contexto al que fue aplicado.

1.1.1. Razonamiento inductivo en estudiantes

Las investigaciones que se destacaron por estudiar la descripción de patrones y caracterización de las generalizaciones realizadas por los alumnos en la resolución de un problema, han evidenciado las estrategias inductivas que realizan los grupos de estudiantes en tareas de sucesiones lineales y cuadráticas, y concluyen que dichos estudiantes manifiestan la generalización de manera distinta a la algebraica. Por otro lado, en las estrategias que los alumnos utilizan, no organizan datos ni siguen una serie de pasos para generalizar, lo que sería importante trabajar para crear el hábito en estas acciones sin que les cueste tanto trabajo la generalización (Cañadas, Castro y Castro, 2008; Cañadas, 2007; Cañadas y Castro, 2004; Cañadas, 2002).

Además, en Medellín (Colombia), Correa (2017) también participa en estas investigaciones con estudiantes de grado undécimo en tareas de generalización de sucesiones, añadiendo series polinomiales, para centrarse en las estrategias y las formas de razonamiento algebraico que realizan dichos estudiantes. La investigación brindó caminos para la evolución del pensamiento pre-algebraico, factual, contextual y simbólico que propone Radford (2015); sin embargo, planteó la necesidad de que se potencie tanto el pensamiento algebraico desde los primeros años de escolaridad a partir del estudio de fenómenos de variación y cambio, así como de los procesos de generalización.

En este mismo contexto, en Medellín, se realizó un trabajo que pretendía desarrollar habilidades de pensamiento lógico matemático en estudiantes de noveno de educación básica secundaria con actividades que involucran situaciones de generalización como estrategia para la enseñanza y aprendizaje del Álgebra por medio de tres fases propuestas por Mason (1999); (que son: ver, describir y registrar), siendo la última fase la expresión escrita de forma simbólica de las relaciones que se observaron, es decir, la generalización. Se encontró que la mayoría de los estudiantes tenía dificultades para simbolizar y escribir fórmulas generales, por lo que el autor recomendó la implementación de la inducción en actividades de generalización en el aprendizaje, pues afirma que "conocer primero las fórmulas para aplicarlas en la solución de casos particulares condiciona al alumno a trabajar solo deductivamente y no lo hace partícipe del proceso mismo de construir matemáticas" (Pérez, 2005, p.187).

También, Cañadas y Pinto (2018) realizaron un estudio de caso con una estudiante de cuarto de primaria desde el pensamiento funcional, para describir el proceso de generalización que tenía un problema que involucra la función lineal mediante un modelo de razonamiento inductivo propuesto por Cañadas (2007). El resultado que se mostró, fue que el paso *búsqueda y predicción del patrón* a la *identificación de estructuras* del modelo permitió resaltar el rol que tienen las variables del problema. Los autores destacan que la estudiante llegó a la generalización y de manera natural realizó cuatro de los siete pasos[1] del modelo citado en un orden diferente al propuesto.

En otro caso, Cañadas y Figueiras (2011) analizan e identifican la inducción y las representaciones en la resolución de problemas en tareas de combinatoria con estudiantes de primaria. En los resultados obtenidos, se pudo rescatar que siete estudiantes recurren a la inducción como estrategia de resolución, esto les facilitó la construcción de un diagrama de árbol que representaba el crecimiento dimensional y el número de elementos que intervienen en cada factor.

Por otro lado, Salgado y Salinas (2012) llevan a cabo una propuesta que pone de manifiesto la importancia de desarrollar razonamiento inductivo en estudiantes de primaria por medio del concepto de número, teniendo en cuenta cuatro pasos del modelo de Cañadas y Castro (2007).

1.1.2. Razonamiento inductivo en profesores en ejercicio.

Se encontró que Barrera, Cañadas y Castro (2006) analizan a los profesores en formación posgradual[2] con especialidad en Educación Física en Sevilla (España). Estos autores se encargan de medir el uso del razonamiento inductivo que hacen estos profesores en la resolución de problemas mediante un pre-test; para después intervenir en una formación sobre el uso del razonamiento inductivo, y trabajar los contenidos que favorecen este razonamiento de acuerdo a los alcances encontrados en el pre-test. Por último, se realiza un post-test para medir el uso que hacen estos sujetos en torno al razonamiento inductivo y estudiar el cambio que se produce entre estos dos test realizados. La conclusión a la que llegaron fue que la instrucción realizada en torno al razonamiento inductivo; beneficia la

[1] Cañadas (2007) propone que el razonamiento inductivo se trabaje mediante siete pasos para construir nuevo conocimiento, que son: trabajo con casos particulares, organización de casos particulares, identificación de patrones, formulación de conjeturas, justificación de conjeturas, generalización y demostración.

[2] Entendiendo profesores en formación posgradual como aquellos profesores en ejercicio que, en la realización de la investigación eran estudiantes de la maestría.

resolución correcta de tareas relacionadas con secuencias numéricas (Barrera, Cañadas y Castro, 2009).

En este mismo sentido, Castro, Molina y Trujillo (2009) realizaron su estudio con la intención de identificar y conocer el modo en que los profesores en formación posgradual con énfasis en Lengua Extranjera, Educación Musical y Educación Física en la Universidad de Sevilla (España), se enfrentan a tareas de generalización, y así; discernir si dichos profesores realizan y expresan el paso de las expresiones aritméticas a las generalizaciones. Este estudio concluyó que hay cierta dificultad en dichos sujetos para expresar similitudes por medio del simbolismo algebraico.

En esta misma vía, se encontró un estudio reciente en México realizado por Núñez (2018), quien centra su investigación en identificar y describir el trabajo de los profesores de matemáticas de secundaria en torno al razonamiento inductivo en tareas de generalización de patrones figurales, en el marco de sucesiones cuadráticas. En este estudio se identificaron diferentes formas de proceder de los profesores utilizando solo cuatro pasos del modelo de Cañadas (2007); sin embargo, se encontraron limitaciones en el estudio del razonamiento inductivo en los profesores que no generalizaron. Sugiere, entonces, una posible investigación para encontrar la razón de esa dificultad, e invita a que se produzcan programas de actualización que desarrollen el razonamiento inductivo en tareas de generalización en esta población.

1.1.3. Razonamiento inductivo con profesores en formación profesional inicial[3].

En la perspectiva de la generalización, se encontró que Ávila, López y Luna (2010) se enfocaron en explorar las habilidades de generalización que tenían los alumnos de Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez en México. Los resultados obtenidos reflejan que los estudiantes presentan limitaciones en las habilidades de

[3] Entendiendo profesores en formación profesional inicial como estudiantes de licenciatura del pregrado.

generalización; así mismo, reconocen la importancia que tiene el razonamiento inductivo en la construcción de generalizaciones; y por esta razón, consideran que se debe incluir en el currículo de matemáticas.

Mientras que, Álvarez, Alonso y Salgado (2016) profundizaron en las dificultades que presentan los estudiantes de licenciatura en educación Matemática-Física de la Universidad del Oriente en Cuba en la resolución de problemas. En este sentido, los profesores de esta carrera, reconocen que no propician en los estudiantes la habilidad de resolver problemas, porque ninguna asignatura se responsabiliza de enseñar estrategias o métodos para favorecer este proceso. Los resultados indican que las dificultades tienen sus bases en los enfoques didácticos al no privilegiar el razonamiento inductivo, que hace parte de la solución del problema mediante el uso de estrategias heurísticas y metacognitivas.

En la Universidad de Ljublkana (Eslovenia), Kolar, Mastnak, & Hodnik (2012) se encargaron de explorar las competencias, de los estudiantes de tercer año del programa de enseñanza primaria en el razonamiento inductivo para resolver situaciones problemáticas. La investigación concluyó que las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes son muy diferentes y se caracterizan mediante tres etapas del razonamiento inductivo comunes a los del planteamiento de Polya (1967), Reid (2002) y Cañadas y Castro (2007) como lo es la observación de casos particulares, búsqueda y predicción de patrones y generalización. Dada esta divergencia de generalizaciones halladas en los estudiantes, los autores recomiendan que, desde el punto de vista del álgebra, podría se expresar a los estudiantes que las diversas representaciones de una generalización conllevan a una igualdad.

También, Aké (2013) realizó en España un trabajo doctoral que pretende indagar los conocimientos que poseen los profesores en formación profesional inicial del último año de la carrera de educación primaria, al resolver tareas de índole algebraico. En el trabajo de investigación se llegó a la conclusión de que los futuros profesores exhiben dificultades tanto en el conocimiento especializado relacionado con el razonamiento algebraico elemental, como en el conocimiento especializado o conocimiento del contenido matemático, dado que no conciben como razonamiento algebraico el expresar relaciones, generalizar patrones, modelar y resolver problemas.

A continuación, se hace un balance general de lo citado en los antecedentes, y es importante mencionar, que en el caso de Colombia, la mayoría de los trabajos en relación con el desarrollo del razonamiento inductivo o generalización de patrones, se ha realizado con estudiantes de la educación básica primaria y secundaria, y no se ha encontrado tanta literatura relacionada con investigaciones asociadas al trabajo con profesores en etapa de formación inicial. Sin embargo, en estudios como el de Grajales (2007) en la Universidad Nacional, destaca la importancia que adquiere la práctica docente y como incide ésta en las dificultades que se encuentran en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la Escuela. De este modo, Grajales resalta que se debe dar giro en las estrategias que se utilizan en la formación de los nuevos profesores (profesores en formación profesional inicial) al momento de afrontar dichas dificultades en el aula de clase. Dados estos hallazgos, se considera pertinente seguir investigando alrededor del trabajo con profesores en formación profesional inicial en el contexto colombiano.

En lo que concierne al presente trabajo de investigación, Cañadas y Castro (2003) indican la importancia del razonamiento inductivo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel de secundaria, y como consecuencia, la necesidad que tienen los futuros profesores de matemáticas de realizar tareas que fomenten el uso del razonamiento inductivo, y por ende el conocimiento de este tipo de razonamiento. Atendiendo a esta responsabilidad, las autoras proponen elementos de lo que podría ser una programación para desarrollar en el currículo de la formación de profesores de matemáticas de secundaria.

Por lo anterior, es importante indagar sobre la importancia que tiene el razonamiento inductivo en la construcción de conocimiento matemático y en el aprendizaje de las matemáticas. Los principales desarrollos de la ciencia han sido deductivos, sin embargo, detrás de los postulados y teoremas, existen métodos de descubrimientos, y es ahí donde se construye el conocimiento, porque hacer matemáticas implica descubrir, esto es, saber qué pasa con el experimento, cómo se comporta, y después, generalizarlo y plantear una conjetura para validar dicho conocimiento de manera formal. La importancia que tiene el razonamiento inductivo en el aprendizaje se justifica por la relación que tiene con el desarrollo de la inteligencia y la resolución de problemas, y ha llevado a considerar el proceso del razonamiento inductivo como un dominio especifico en el conocimiento (Cañadas. 2007).

De acuerdo con las investigaciones mencionadas en los apartados anteriores (1.1.1 a 1.1.3), es pertinente hacer un balance relacionado con las limitaciones o recomendaciones que, desde la perspectiva metodológica, mencionan algunos trabajos citados para tener en cuenta en las futuras investigaciones que se encuentran bajo el mismo propósito. Un primer aspecto, tiene que ver con lo reducida que es la muestra cuando se realiza un estudio de caso en el desarrollo del razonamiento inductivo desde una perspectiva funcional del trabajo de Cañadas y Pinto (2018); en segundo lugar, el tiempo de realización del estudio fue reducido, pues impide profundizar sobre el análisis del razonamiento de aquellos profesores que no llegaron a la generalización (Núñez, 2018); por último, Aké (2013) realizó un estudio exploratorio, y concluyó que este limitó el acceso por parte de los investigadores al plan de estudios y la forma en la que se integra a los profesores en formación profesional inicial.

La conclusión a la que se llega después de hacer la revisión bibliográfica del tema en cuestión, considera la importancia y la necesidad de profundizar más en el conocimiento de los profesores en formación sobre el razonamiento inductivo y su uso, debido a que la mayoría de trabajos enfocados hacia este tema se ha realizado con estudiantes y pocos con profesores de formación profesional inicial, específicamente en cómo los futuros profesores se enfrentan a situaciones de generalización de patrones(Castro, Molina y Trujillo, 2009). También es importante, porque en estos estudios se evidencian los resultados positivos de los estudiantes de educación primaria y secundaria al aplicar razonamiento inductivo, y los resultados favorables de los profesores en ejercicio después de haber recibido la instrucción sobre este tipo de razonamiento. Sin embargo, las tendencias de estos estudios del razonamiento inductivo se reducen al contexto español o mexicano, entonces, valdría la pena preguntarse sobre el conocimiento de este razonamiento en los profesores de matemáticas en formación profesional inicial en otros países, como por ejemplo Colombia.

1.2. Formulación Del Problema

La inducción ha jugado un papel importante en diversas ciencias, incluyendo a las Matemáticas, esto es porque razonar inductivamente es una acción del pensamiento que permite hacer afirmaciones y alcanzar las conclusiones por medio de casos particulares, llegando a una generalidad (Cañadas, 2002); y la importancia de este razonamiento reposa en esta, pues "La generalización es la intención de las matemáticas y se presenta en éstas como generadora de conocimiento" (Lakatos, citado por Cañadas, 2007, p.54); y la que permite la construcción de conocimiento (Cañadas, Castro y Molina, 2010).

Sin embargo, la generalización es la más dispendiosa para los estudiantes, pues en la revisión a la literatura se encontró que la mayoría de los estudiantes de secundaria y universidad, tienen habilidades pobres en la comprensión de los problemas y en su posible solución (Trujillo, Castro y Molina, 2009; Cañadas, Castro y Molina, 2010); estas dificultades se encuentran sustentadas por los resultados de las pruebas Saber[4] y en el desempeño de los estudiantes en el aula (Correa, 2017). De este modo, Álvarez, Alonso, y Salgado (2016) plantean que, al no privilegiar el razonamiento inductivo en el proceso de enseñanza y aprendizaje, no se facilita la resolución de problemas, pues este razonamiento lleva a profundizar en la estructura del problema en busca de conjeturas, de estrategias heurísticas y metacognitivas que guíen su solución.

También, Correa (2017) observó dificultades que manifiestan los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de generalización que requieren análisis y razonamiento algebraico. Se encontró que estas dificultades se le pueden atribuir al papel pasivo que ejerce el estudiante en el aula de clase, expresado, por ejemplo, en hacer uso de fórmulas sin comprender los fenómenos que modelan, limitándose a operar valores numéricos sin sentido.

---

[4] Las pruebas Saber es la evaluación que realiza el Icfes en el nivel de educación básica primaria, educación media y educación superior para monitorear el desarrollo de las competencias básicas en los estudiantes, como seguimiento de calidad del sistema educativo en Colombia. Sin embargo, en el caso de la idea desarrollada, se refiere a las pruebas que se le aplican a la educación primeria y educación media.

Al respecto conviene decir que este problema con los estudiantes se encuentra vinculado implícitamente a los profesores, pues son los que deberían promover el razonamiento matemático en sus estudiantes (NCTM, 2000) y quienes guían el proceso de enseñanza y aprendizaje. De ahí, la importancia del rol que juega el docente, debido a que los alumnos en la escuela se van a encontrar con muchas situaciones en las que harán uso de un proceso inductivo (implícito o explícito) para generar conocimiento (Cañadas y Castro, 2003).

En relación con las ideas presentadas, en su investigación Núñez (2018) manifiesta que algunos profesores tienen dificultades en la generalización e invita a que se desarrolle razonamiento inductivo en tareas de generalización en esta población. De manera convincente, en las Ilustraciones 1 y 2, se describe una de las actividades que Núñez propuso y el resultado de un profesor de matemáticas en la tarea de generalización,

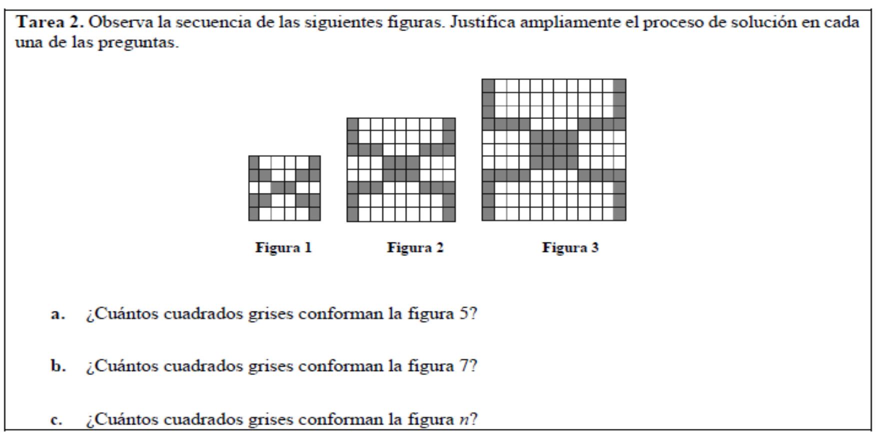

Tarea 2. Observa la secuencia de las siguientes figuras. Justifica ampliamente el proceso de solución en cada una de las preguntas.

Figura 1 **Figura 2** **Figura 3**

a. ¿Cuántos cuadrados grises conforman la figura 5?

b. ¿Cuántos cuadrados grises conforman la figura 7?

c. ¿Cuántos cuadrados grises conforman la figura *n*?

Ilustración 1. Tarea propuesta por Núñez (2018).

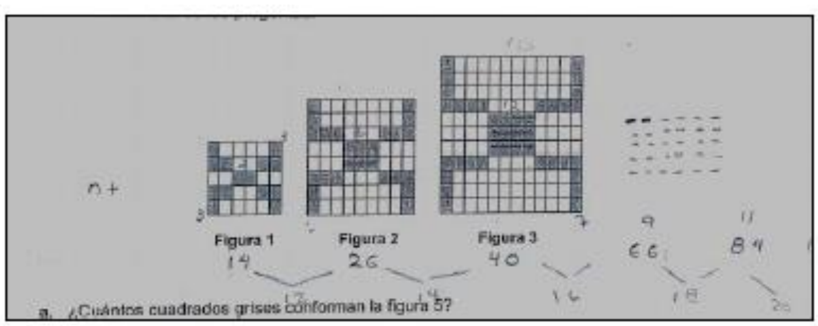


Ilustración 2. Solución de la tarea realizada por el profesor.

En la Ilustración 2, en palabras de Núñez (2018), “el profesor determina las diferencias entre ellos. Reconoce que la primera y la segunda diferencia, le permite encontrar nuevos casos particulares de la sucesión cuadrática, recurre a los términos consecutivos sumando el término anterior y la diferencia” (p.87). Esto para decir, que el profesor de matemáticas realizó la identificación del patrón de forma intuitiva por medio de los casos particulares, pero no llegó a la generalización.

Por otro lado, Barrera, Cañadas y Castro (2009) en el estudio que realizaron, identifican el conocimiento del razonamiento inductivo asociado a procesos inductivos que tienen los profesores en formación posgradual y los resultados que obtuvieron en el pre-test no fueron favorables, sin embargo, después de que realizaron la instrucción sobre este tipo de razonamiento, se produjo una mejoría, reconocida en los resultados del post-test. De acuerdo con este estudio, se puede inferir que es probable que muchas de las dificultades que presentan los estudiantes en la Escuela, también pueden obedecer al desconocimiento que los profesores evidencian en las tareas de razonamiento inductivo, en especial si dicho razonamiento se considera como generador de conocimiento, o en su formación profesional no los prepararon para adquirir habilidades sobre este tipo de razonamiento.

Ante esta problemática, Barrera, Cañadas y Castro (2009) afirman que es necesario prestar atención a los profesores, en especial a aquellos que están en programas de formación profesional inicial para que adquieran hábitos sobre esta manera de razonar y realicen reflexiones y generen situaciones o tareas en el aula que guíen el razonamiento inductivo para generar conocimiento en los estudiantes.

Al respecto, en las investigaciones realizadas sobre el razonamiento inductivo en los profesores en formación inicial se llegó a que dichos sujetos presentan dificultades en la generalización de patrones (Ávila, López y Luna, 2010), en el razonamiento algebraico, relacionado con las justificaciones dadas, y en el uso de representaciones para la generalización y manejo de las operaciones o procesos que modelan que van más allá de los conocimientos necesarios para desarrollar un algoritmo (Aké, 2013). A continuación, se muestra en la Ilustración 3 la tarea que propone Aké (2013) para explorar sobre el conocimiento algebraico que poseen los profesores en formación profesional inicial; también, esta autora plantea unas posibles soluciones para la tarea y se muestran en la Ilustración 4, y más adelante en las Ilustraciones 5 y 6 se evidencia la dificultad que presentan dos sujetos para llegar a la generalización del patrón de la tarea.

Observa la siguiente figura, y contesta:

$$\begin{array}{ccc} & & \odot \\ & \odot & \odot\odot \\ \odot & \odot\odot & \odot\odot\odot \end{array}$$

a) ¿Cuántas bolitas tendrán las figuras de la cuarta y quinta posición?
b) ¿Cuántas bolitas hay en la posición 100?
c) ¿Qué objetos algebraicos intervienen en la resolución?
d) ¿Qué nivel de algebrización le asignarías?
e) Indica algunas variables que se puedan cambiar en esta tarea para aumentar el nivel de algebrización?

Ilustración 3. Enunciado de la tarea propuesta. (Aké, 2013, p. 227)

Ítem a)

De la posición 1 a la posición 2, aumentan 2 bolitas.
De la posición 2 a la posición 3, aumentan 3 bolitas.
De la posición 3 a la posición 4, aumentan 4 bolitas.

Posición	# bolitas	Lo que se suma
1	1	+1
2	3	+2
3	6	+3
4	10	+4
5	15	+5

La posición 4 tendrá 10 bolitas
La posición 5 tendrá 15 bolitas

Ítem b)

Para la posición 100 tendríamos:

Posición	# bolitas	Lo que se suma
1	1	+1
5	15	+5
6	21	+6
…		
n		$n-1$
$n+1$		$(n-1)+1=n$

La regla que se genera es $\frac{n(n+1)}{2}$, así el número de bolitas para la posición 100 es de 5050

Ilustración 4. Posibles soluciones propuestas para la tarea (Aké, 2013, p. 228).

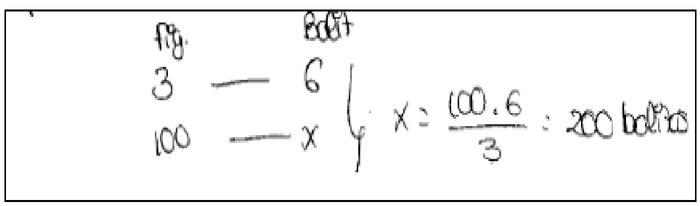


Ilustración 5. Solución de la tarea por el sujeto 1. (Aké, 2013, p. 315).

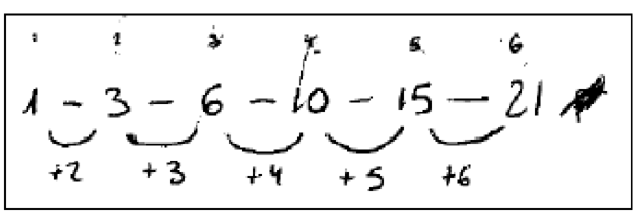


Ilustración 6. Solución de la tarea por el sujeto 2. (Aké, 2013, p. 317).

Según la autora citada, el resultado de la tarea realizada por el sujeto 1[5] que se muestra en la ilustración 5 se considera en el Nivel 0, con ausencia de razonamiento algebraico, debido a que aquí, el estudiante realiza una regla de tres y con un caso particular pero no llega a la caracterización del patrón. El sujeto 2, en la ilustración 6, expresa una regla de formación de las figuras sucesivas relacionando el orden de la figura con el número de puntos que la forman, pero no llega a la generalización.

Lo planteado evidencia que se hace necesario prestar atención a los profesores en formación profesional inicial, dado a que será el principal agente en la construcción de conocimientos matemáticos en los alumnos; como se ha mostrado a lo largo de este documento, estos profesores (en formación profesional inicial y en ejercicio) tienen dificultad para realizar generalizaciones y poca o nula familiaridad con el razonamiento inductivo, que contribuye a la construcción de conocimiento, pues ha sido un medio potente para llegar a la generalización (Cañadas, Castro y Molina 2010). De ahí el interés de presente trabajo de investigación.

Así mismo, los trabajos de investigación que se han referenciado en las Ilustraciones 3 y 4 han explicitado las dificultades que han tenido los profesores en la realización de actividades relacionadas con las sucesiones, cuyos patrones se pueden expresar mediante polinomios lineales o cuadráticos; estas dificultades tienen que ver con hallar un elemento desconocido de una secuencialidad o un término lejano de la secuencia y a partir de él, la generalización. De este modo, surgen razones para no desligar este objeto matemático del propósito del presente trabajo, pues debería enfatizarse en la importancia de seguir explorando cómo se manifiesta el razonamiento inductivo en los profesores en formación profesional inicial y por ello, el interés de verificar qué resultados se obtienen en el contexto Colombiano. Cabe aclarar que, la generalización de sucesiones polinomiales de la que se hará mención en este trabajo, hace referencia a que la generalización es de forma polinomial y la naturaleza de

[5] Cuando se hace referencia en el texto y en la ilustración a los sujetos 1 y 2, ambos corresponden a dos de los profesores en formación inicial con los que Aké (2013) realizó su estudio.

los términos de la sucesión no necesariamente es numérica (polinómica). Además, la generalización de dichas sucesiones es de naturaleza algebraica-simbólica a la que podría llegarse como consecuencia de sistematizar las regularidades encontradas.

También es importante resaltar, que las investigaciones citadas (referidas al conocimiento de los profesores) se han realizado desde otro contexto diferente al colombiano, por lo que sería pertinente preguntarse sobre el conocimiento del razonamiento inductivo de los profesores en formación profesional inicial en el contexto colombiano, específicamente en la Universidad del Valle. Esto, debido a las dificultades que se muestran en los antecedentes de los profesores en formación profesional inicial en otros países y también, las dificultades que muestran los estudiantes de los colegios, quienes potencialmente han sido instruidos por profesores que han pasado por ese proceso de formación profesional inicial en torno a este tipo de razonamiento a través de actividades que hagan uso de las sucesiones con la naturaleza o característica anteriormente mencionadas.

Para dar cuenta de ello, se propuso la siguiente pregunta que será guía en este trabajo de investigación: ¿Qué características tiene el razonamiento inductivo en los profesores en formación profesional inicial del programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle en la generalización de sucesiones polinomiales?

1.3. Objetivos:

1.3.1. Objetivo general

Caracterizar el razonamiento inductivo que evidencian los profesores en formación profesional inicial del programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle, en tareas que implican la generalización de sucesiones polinomiales.

1.3.2. Objetivos específicos

- Documentar la problemática desde la perspectiva matemática, didáctica y curricular.
- Articular los hallazgos de la documentación en una propuesta de intervención que propendan por el trabajo con actividades asociadas al razonamiento inductivo.
- Identificar los niveles de razonamiento inductivo de los profesores en formación profesional inicial a partir del análisis de los resultados de la implementación de una prueba.

1.4. Justificación

De acuerdo con la propuesta de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006), el estudio de regularidades para identificar un patrón que se repite periódicamente contribuye al desarrollo del pensamiento variacional. Estas regularidades se encuentran en las sucesiones o secuencias, de acuerdo con un contexto, dando lugar a un patrón determinado. Después, al identificar en qué consiste la regularidad o repetición del patrón, se puede expresar por medio de un algoritmo o fórmula. De este modo, para llegar a descubrir el algoritmo o fórmula que represente la regularidad, se debe pasar por un proceso de: analizar de qué forma cambia, hacer conjeturas sobre el valor del término siguiente de la secuencia, expresar el término *n*-ésimo desconocido e intentar reproducir el patrón por medio de la fórmula, para después verificar o refutar la conjetura inicial planteada y generalizarla y esta no solo alude a lo simbólico, también puede haber generalizaciones que se expresen en el lenguaje verbal. Estas son tareas propias del razonamiento inductivo que propone Cañadas (2007).

Estos documentos propuestos por el MEN mencionan que en toda actividad matemática deben estar presentes los procesos generales que explicitan ciertas competencias para desarrollar pensamiento matemático. Para esto, se pondrá atención al razonamiento, que genera pensamiento crítico en los estudiantes frente a un proceso para llegar a la conclusión, esto es sabiendo el cómo y el porqué del proceso realizado. Este trabajo se centra específicamente en el razonamiento inductivo, y parte de su importancia se apoya en que "la matemática presentada con rigor son una ciencia sistemática, deductiva, pero las matemáticas en gestación son una ciencia experimental, inductiva." (Polya, 1989, p.114).

La importancia de este razonamiento se justifica en dos objetivos principales de la Matemática en la educación. En primer lugar, el razonamiento inductivo permite el descubrimiento de un nuevo conocimiento por medio de la formulación de conjeturas basadas en los casos particulares; y, en segundo lugar, el razonamiento inductivo se puede utilizar para validar dichas conjeturas, favoreciendo la construcción inductiva y empírica del conocimiento para llegar a la generalización (Cañadas, 2007; Cañadas y Castro, 2002).

También, Dörfler (citado por Cañadas, Castro y Molina, 2010) sostiene que así como en la ciencia, en la vida cotidiana la generalización es importante para la construcción de conceptos, en la creación de ideas, hipótesis o argumentaciones. La generalización, una tarea activa en la formación de conceptos, dado a que a través de la abstracción de los casos particulares se llega a lo general, es decir, que la abstracción le precede a la generalización, a la sistematización de conocimientos, y los "NCTM se enuncian que la generalización es uno de los principales objetivos de la instrucción matemática y se argumentan sobre la trascendencia e importancia de la inducción y del razonamiento inductivo para el quehacer de los escolares" (Castro, Cañadas y Molina, 2010, p.6).

De este modo, algunos autores caracterizan el razonamiento inductivo como método apropiado para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; entre ellos, Whitehead (2012), quien sostiene que el objetivo del pensamiento científico es ver lo general en lo que es particular, pues en esto se basan las leyes que satisfacen el mundo externo; este autor sostiene que, "El progreso de la ciencia consiste en observar estas interconexiones y en mostrar con un ingenio paciente que los eventos de este mundo cambiante no son más que ejemplos de algunas conexiones o relaciones generales llamadas leyes" (p.4). También Pérez (2005) reconoce que en las tareas de generalización se debería implementar el aprendizaje inductivo, "de lo concreto a lo abstracto, que los mismos estudiantes descubran las relaciones generales que hay detrás de cada situación" (p.187). Esto es, porque el conocer las fórmulas y después aplicarle los casos particulares condicionan al alumno a aprender deductivamente, limitándose a crear en matemáticas.

Todo lo anterior para decir que, el razonamiento inductivo contribuye a que los estudiantes sean partícipes de su proceso de aprendizaje por medio de la construcción de conocimientos matemáticos partiendo de la cotidianidad o aquello que es conocido, siendo este proceso valioso para los estudiantes, dejando a un lado el método tradicional[6] en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

De manera que se cree pertinente, prestarles atención a los profesores en formación profesional inicial, debido a que los profesores son quienes deberían promover la movilización de conocimientos de los estudiantes. Sin embargo, en estudios como el de Sosa, Cabañas & Aparicio (2019) se exhiben dificultades en los profesores de secundaria para razonar inductivamente; esta dificultad radica "en la complejidad de abstraer lo general en lo particular, debido a que no se logra reconocer la característica invariante de los casos analizados y aquello que norma su comportamiento" (p.7). Las razones de las dificultades en los profesores en ejercicio son desconocidas.

De acuerdo con lo anterior, se debe prestar atención en cómo los profesores en formación profesional inicial piensan, desarrollan y adquieren conocimiento matemático, pues no hay que esperar a que los graduados salgan de los programas de formación como expertos para evaluar el razonamiento (Llinares, 2007); y en la medida en que este se vaya trabajando, los profesores serán más conscientes de su importancia y se motivan "… a guiar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje autodirigido ocupándose con regularidad a construir, simbolizar, aplicar y generalizar ideas matemáticas. Éstas son acciones propias del razonamiento inductivo" (Cañadas, 2007, p.7).

Ahora bien, como se dijo anteriormente, el razonamiento inductivo se encarga de analizar la generalización a partir de casos particulares. Así mismo, se encuentran teorías

---

[6] Ser partidario de que las matemáticas ya están construidas, y por lo tanto no hay necesidad de indagar sobre la validez de algunos enunciados y/o plantearse conjeturas a través de casos particulares.

como las de Mason (1999), o de Vergel (2015) o Radford (2015) que estudian las generalizaciones y coinciden particularmente con el razonamiento inductivo, como por ejemplo aquellos que tienen que ver con el pensamiento algebraico o razonamiento algebraico, que también involucran una serie de fases que el estudiante debe realizar para llegar a la generalización, que en últimas viene siendo el estudio de las generalizaciones. Sin embargo, en el presente trabajo de investigación se decidió y se cree pertinente tomar como referencia el razonamiento inductivo, en vista de que, como se ha visto en los antecedentes, los criterios que propone Cañadas (2007) son más amplios para poder analizar el proceso de razonamiento que sucede en un estudiante cuando se enfrenta a actividades de generalización de patrones.

Finalmente, esta propuesta pretende explicitar la importancia del razonamiento inductivo para generar nuevo conocimiento matemático por medio del marco conceptual de Cañadas (2007); sin embargo, según la revisión bibliográfica realizada, esta teoría no se ha usado en Colombia, pero no se desconocen trabajos que se han realizado en este contexto y se relacionan con la generalización. Por esta razón, se procura realizar unas actividades de sucesiones, cuyas generalizaciones permitan evidenciar los conocimientos en los profesores en formación profesional inicial sobre el razonamiento inductivo de manera implícita en la solución intuitiva de estas actividades.

También, los resultados de este trabajo, independientemente del grado de acierto de las respuestas de los profesores en formación profesional inicial con las actividades propuestas, aportaría al campo de la Educación Matemática en términos de tener un insumo adicional sobre cuál podría ser una causa de los problemas que se presentan en el aula respecto al razonamiento inductivo. Al tiempo, estas podrían ser objeto de análisis por parte en los programas de formación, en este caso el programa de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle. Esto es, porque los resultados invitarían a reflexionar sobre dos aspectos; primero, en el conocimiento matemático que tiene el profesor en formación profesional inicial y, en segundo lugar, las formas de intervenir en el aula para propiciar un aprendizaje significativo en sus estudiantes.

CAPÍTULO 2

2. Marco Teórico Y Metodológico De Referencia

En el presente capítulo se describen los referentes conceptuales que sustentan la propuesta de trabajo. Estos referentes se dividen en tres perspectivas: Matemática, Didáctica y Curricular. En primer lugar, en la perspectiva matemática se realiza una fundamentación de las nociones matemáticas relacionadas con las sucesiones. En la perspectiva didáctica, se describen los aspectos más importantes del modelo teórico que propone Cañadas (2007), que permite esbozar de manera amplia la importancia del razonamiento inductivo y los niveles que favorecen el desarrollo de este tipo de razonamiento para la adquisición de conocimiento matemático. En la perspectiva Curricular se hace una descripción de la propuesta del MEN (1998, 2006) para direccionar lo que se pretende en este trabajo con los objetivos de la educación matemática en Colombia.

2.1. Perspectiva Matemática

Anteriormente, en el siglo XIX, el matemático indio Srinivasa Ramanujan comenzó a intuir las relaciones numéricas, comprendiendo la naturaleza y comportamiento de los números. Ramanujan captaba las estructuras de los números, pero prefería centrarse en las dinámicas de los ejemplos particulares, dejando a un lado las demostraciones rigurosas. Su principal aportación se basó en la teoría analítica de los números y en aquellas expresiones generalizadas que aproximaban al número π, que formalizó gracias al matemático inglés Harold Hardy, pues dichas teorías cumplían con las condiciones de aplicación al mundo real pero no estaban comprobadas científicamente (Córdoba y Timón, 2016).

Si las sucesiones dejan a un lado la demostración rigurosa, y se conciben como un medio más práctico que facilita la forma de comprender contextos de la vida real, asignándoles un comportamiento numérico y cualitativo de los mismos; por ejemplo, en la sucesión de Fibonacci se pueden comprender determinados comportamientos de nuestro entorno, como la distribución de los pétalos de una flor, la relación entre abejas macho y abejas hembra en un panal, etc.

Se entiende por ***sucesión*** con término general a_n a la concatenación de términos que se encuentran de manera ordenada, con el fin de facilitar una designación numérica que permita encontrar los términos siguientes de la misma. Un ejemplo es el conjunto de números naturales que se muestra en la ilustración 7.

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots, & n, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \ldots, & a_n, & \ldots \end{array}$$

Ilustración 7. Términos de una sucesión. Tomada de Larson (2010)

Las sucesiones se caracterizan por la obtención de términos generales que permiten el planteamiento y desarrollo de conjeturas, debido a que se empieza con un conjunto limitado de elementos y a partir de ellos, es posible encontrar un *k*-ésimo término. A continuación, en la ilustración 8, se definen las propiedades de las sucesiones con sus respectivas características:

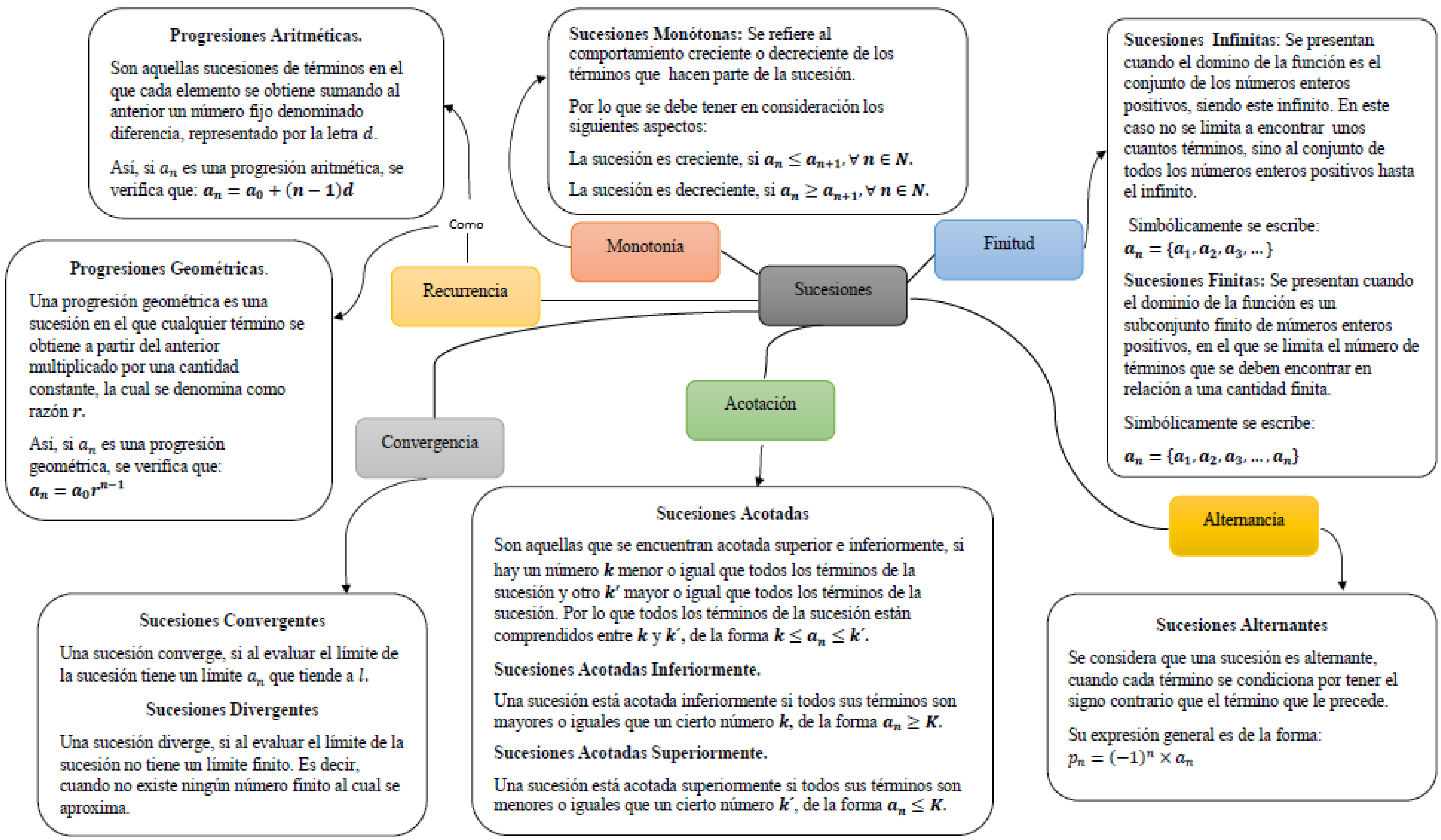


Ilustración 8. Resumen de la perspectiva matemática

Hay diferentes tipos de sucesiones; sin embargo, para el objetivo de este trabajo, se centrará la atención en aquellas que hacen parte de las sucesiones polinómicas de recurrencia. Una sucesión es de recurrencia o recursiva cuando cada término se puede expresar utilizando uno o todos los términos que lo anteceden, por tanto, para poder definir una sucesión recursiva es necesario dar a conocer uno o más de los primeros términos, es decir, si se puede obtener el término a_{n-1} a partir del anterior a_{n-2}. Las sucesiones polinómicas pueden ser de distinto grado dependiendo del mayor exponente del polinomio, en este caso, se estudiarán las sucesiones de orden 1 y 2, esto es, por medio de las progresiones aritméticas, cuyo comportamiento es lineal y las sucesiones de segundo orden, cuyo comportamiento es cuadrático.

Recibe el nombre de progresión aritmética toda sucesión de números tales que uno de ellos cualquiera, es igual al anterior, añadiéndole un número constante (fijo) d, que se distingue por ser la diferencia entre dos términos $(a_{n+1} - a_n)$ y se denomina *diferencia de la progresión*. Esto permite ver, cómo una vez conocido el primer término de la sucesión a_1 y la diferencia común $d,$ se puede llegar a la expresión general de la progresión mediante sustitución sucesiva de la relación de recurrencia $a_1, (a_1 + d), (a_1 + d + d), \dots, (a_1 + (n-2)d + d),$ por lo que se obtiene la expresión $T_n = a_0 + (n-1)d.$

A sí mismo, en lo que respecta a las sucesiones de segundo orden, son aquellas sucesiones numéricas que no guardan una relación directa o lineal entre cada uno de los términos de la sucesión a_n. Estas sucesiones son aquellas que se pueden expresar a través de una expresión cuadrática. Al mismo tiempo, se definen por facilitar el uso de las diferencias sucesivas, en el que se es posible la obtención de una nueva sucesión de la forma $(p_0, p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ la cual es el resultado al aplicarse la primera diferencia que se condiciona al ir realizando la resta de cada término de la sucesión con el termino anterior, de tal forma que se cumple lo siguiente $(a_1 - a_0, a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots).$

De forma análoga a lo anteriormente expuesto, si en las primeras diferencias no se identifica una relación numérica constante, se es posible la obtención de una segunda diferencia de la forma $(\Delta^2 p_0, \Delta^2 p_1, \Delta^2 p_2, \Delta^2 p_3, \dots, \Delta^2 p_n)$, donde para el primer término de la segunda sucesión $\Delta^2 p_0$ se cumple que $\Delta^2 p_0 = \Delta(a_{n+1} - a_n) = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = (a_{n+2} - a_{n-1}) - (a_{n-1} - a_n) = a_{n+1} - 2(a_{n-1}) + a_n$.

Al traer en a colación lo expuesto, se puede mencionar que bajo el contexto propio de las matemáticas y en especial en el desarrollo del razonamiento inductivo, el proceso del reconocimiento de regularidades, al identificar variaciones, se llega a la generalización por medio del simbolismo algebraico son conocimientos matemáticos asociados al desarrollo del razonamiento inductivo, los cuales se pueden manifestar en el uso mismo de este tipo de razonamiento.

Lo anterior se evidencia cuando los profesores en formación profesional inicial emplean la noción de recurrencia como estrategia para generalizar por medio de las diferencias sucesivas entre los términos *k*-ésimos, y esto se relaciona con los procesos de generalización que proporciona Cañadas (2007), pues permite el descubrimiento de un patrón a través de una secuencia de términos de carácter numérico y geométrico, lo que en algunas ocasiones propicia la formulación de una conjetura expresando un término *n*-ésimo.

Por esta razón, estos elementos conceptuales, teóricos y matemáticos podrían estar contemplados junto a la perspectiva del razonamiento inductivo, porque al caracterizar el razonamiento inductivo presente en los profesores en formación se evalúa el conocimiento común matemático de tal manera que se tendrá presente el primer aspecto que menciona Ball (2008) en su artículo *Content Knowledge for Teaching*[7]. En él, Ball diferencia el conocimiento propio del contenido y el conocimiento didáctico del contenido.

Para efecto de esta investigación, se refiriere solo a una de las tres componentes del conocimiento matemático (MK)[8], en efecto, el conocimiento común del contenido (KoT),

---

[7] El trabajo propuesto por Ball (2008) es producto de una restructuración de lo propuesto por (Shulman, 2007) al considerar siete categorías, que caracterizar el conocimiento del profesor, a través de ciertas dimensiones generales del conocimiento del maestro en las que se explicitan amplios campos en el que se abarquen métodos y estrategias del conocimiento del profesor.

[8] Las componentes del conocimiento profesional propuesto por Ball (2008), se subdivide en tres componentes los cuales se evidencian como lo es el conocimiento del contenido común (CCK) *"common content knowledge",*

debido a que permite analizar en los profesores en formación profesional inicial el conocimiento propio de las matemáticas en la medida en que realizan las actividades propuestas que tienen que ver con las sucesiones polinomiales.

Por lo tanto, al considerar el conocimiento del contenido, no se pretende evaluar el conocimiento que tiene los profesores en formación profesional inicial en torno a las dificultades, errores, obstáculos y perspectivas didácticas para el estudio del razonamiento inductivo, sino, más bien evidenciar desde el conocimiento matemático, qué tanto saben acerca de él y qué tipo de estrategias o medios utilizan en la resolución misma de las actividades.

2.2. Perspectiva Didáctica

Duval (2017) define el razonamiento a partir de dos procedimientos cognitivos diferentes: el primero lo considera como un proceso que está intrínsicamente ligado a la utilización del lenguaje, esto es, que a partir de una proposición dada se deriva otra; y el segundo procedimiento es inherente al acto de exploración, es decir, por medio de la manipulación de objetos o instrumentos se puede llegar a resolver un problema sin necesidad de recurrir a la verbalización. Desde la Educación Matemática, Balacheff (2000) define razonamiento como la actividad intelectual que se ocupa de la manipulación de información dada para obtener nueva información; esta no se adquiere de manera espontánea. También, algunos autores coinciden en mencionar que el razonamiento es una acción del pensamiento que permite realizar reflexiones para llegar a una conclusión, y esta se extrae de las mismas reflexiones o juicios dados inicialmente. El razonamiento también es un proceso que involucra la capacidad de pensar y argumentar para convencer a alguien o a sí mismo de un

---

conocimiento propedéutico (PK) "propaedeutic knowledge" y el conocimiento especializado del contenido (SCK) "*specialized content knowledge".*

hecho o una proposición particular (Cañadas, 2002, 2007; Núñez, 2018; Neubert & Binko, 1992).

Al razonamiento se le asocian unos procesos formales. De esta manera, el razonamiento es una acción imprescindible en Matemáticas, pues para aprender aspectos asociados a esta área, los individuos deben ser capaces de razonar para resolver un problema o desarrollar un argumento de manera coherente, siendo este un hábito que se adquiere progresivamente (Cañadas, Castro y Molina, 2010).

En el contexto de las Matemáticas, el razonamiento suele dividirse en el razonamiento deductivo y el razonamiento inductivo. El primero se concibe como un proceso en el que se obtienen conclusiones por medio de las premisas dadas, basándose en reglas de la lógica formal. El segundo, se entiende como aquel proceso cognitivo que toma en consideración los casos particulares como punto de partida para llegar a una generalidad. La distinción de estos dos razonamientos se basa en los tipos de conclusión alcanzadas, es decir, si la conclusión queda incluida en la información que viene dada, será deductiva y la conclusión tendrá un valor de verdad; si la conclusión contiene más información que las premisas establecidas inicialmente, será inductivo.

Las matemáticas combinan lo inductivo y lo deductivo, pues como lo afirma Lakatos (Citado en Cañadas, 2007) “Las matemáticas y la ciencia están, de modo más importante, inspiradas por los hechos, por las generalizaciones fácticas y luego por este imaginativo análisis deductivo” (p.94), esto quiere decir que los logros matemáticos surgen en la evidencia deductiva, sin embargo, la práctica matemática se basa en la evidencia inductiva. También Reid & Kinipping (2010) confirman dicha aclaración diciendo que el razonamiento deductivo necesita reglas para su desarrollo y a su vez, el razonamiento inductivo podría ser una forma para llegar a ellas.

Después de hacer tal distinción, se puede decir que el razonamiento inductivo ocupa un lugar importante en la Matemática, debido a que el razonamiento deductivo se ha relacionado con la resolución de problemas, esto es, porque al resolver un problema, su conclusión o respuesta, se encuentra incluida en los datos dados inicialmente (Cañadas, Castro y Molina, 2010) y el razonamiento inductivo a la toma de decisiones, a la formación de conceptos, a la adquisición de conocimiento y al aprendizaje informal (Cañadas, 2007).

2.2.1. Razonamiento Inductivo

Cañadas (2007) define el razonamiento inductivo como un proceso del pensamiento que permite la obtención de conclusiones a partir de las proposiciones establecidas inicialmente, y la conclusión contiene más información que las premisas. Se considera como el método más apropiado para la obtención de nuevos conocimientos científicos, pues da lugar al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de casos particulares. El razonamiento inductivo se caracteriza por ser flexible, gracias a la integración de experiencias que el individuo utiliza para llegar a una generalidad, siendo esta, el principal objetivo de la inducción.

Se ha dicho que el razonamiento inductivo es un proceso que parte de casos particulares y busca generalidad en los hechos que lo acontecen y, en este sentido, Polya (1945) concibe las matemáticas como una actividad de descubrimiento, como lo es la resolución de problemas; también, considera que dichos descubrimientos se han hecho implícitamente por razonamiento inductivo, esto es, utilizando los casos particulares como estrategia poderosa para entender la situación. Así mismo, este autor identificó un modelo de cuatro pasos claves para resolver problemas, teniendo en cuenta la inducción como proceso heurístico; estos pasos son: trabajo con casos particulares; formulación de conjetura; justificación de conjetura; y comprobación con nuevos casos particulares. Siendo la inducción para Polya (1965) un modo de razonar que conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de ejemplos particulares.

Neubert & Binko (1992) también proponen un modelo del razonamiento inductivo similar al de Polya; en este; los pasos son: observación, surgimiento de preguntas, desarrollo de generalizaciones; y aplicaciones de estas a nuevos detalles para ver si se mantienen. Estos autores indican que el enfoque inductivo proporciona avances para construir una especie de andamiaje intelectual en los estudiantes, porque fomenta una manera disciplinada, sistemática e independiente de razonar, debido a que el razonamiento inductivo se involucra en la construcción de conceptos y principios; situándose el estudiante en el papel de productor y no reproductor.

Tomando en consideración los pasos, evidencias e ideas de Polya y los autores citados, Cañadas (2007) hace la ampliación de los pasos de razonamiento inductivo a siete, estos, con el fin de construir generalizaciones y adquirir un nuevo conocimiento matemático, pues esta autora considera "el razonamiento inductivo como razonamiento natural por el cual se llega al conocimiento científico" (p.52). A continuación, se describen los siete pasos propuestos de este modelo teórico:

2.2.1.1. Trabajo con casos particulares.

El punto de partida son las experiencias con los casos concretos o ejemplos con los que se inicia en un proceso inductivo para resolver un problema en particular, estos pueden servir para probar una conjetura informal que se planteen los estudiantes. Esos casos suelen ser sencillos y fáciles de observar.

Se considera que un profesor está trabajando con casos particulares cuando evidencia y deja constancia de los términos *k*-ésimos de la sucesión mediante cálculos o justificaciones que haga sobre dos o más términos de dicha sucesión.

2.2.1.2. Organización de casos particulares.

Este paso está ligado al anterior; y consiste en buscar estrategias para sistematizar y clasificar los casos particulares. Esto puede ser por medio de tablas, gráficas o cualquier sistema de representación que facilite la visualización de las relaciones que posean estos casos. Este paso se identifica cuando los sistematizan los casos particulares trabajados.

2.2.1.3. Identificación de patrones.

Los patrones se consideran como aquello que se repite con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse, para suponer un comportamiento. La identificación del patrón se evidencia cuando los profesores perciben una regularidad en los casos particulares cuya representación se presenta por medio de estructuras de tipo aditivas o multiplicativas.

Los patrones cumplen un papel importante dentro del razonamiento inductivo, pues a partir de ellos se llega a la generalización de fórmulas y relaciones generales. El reconocimiento de patrones es esencial en el desarrollo de la habilidad para generalizar, debido que los patrones matemáticos pueden concebirse como una estructura modelizadora de los fenómenos que se observan en el entorno.

Rivera (2013) reconoce que hay diferentes tipos de patrones y se pueden representar de manera numérica o figural. Por medio de dichos patrones, se espera que los estudiantes desarrollen el hábito de formular generalizaciones y las justifiquen de manera sensata mediante una explicación matemáticamente válida. En la tabla 1 se nombran los patrones detectados por este autor.

Tabla 1.Tipos de patrones. Traducción de la tabla, adaptada por Rivera (2013).

Tipos de patrones	Ejemplos
Patrones constantes	A A A A A … Modelo de línea horizontal (función lineal)
Patrones oscilantes (repetitivos) Tienen una estructura cíclica	A B A B A B … Modelos por partes, modelos trigonométricos (Ejemplo: gráfica de la función seno y coseno)
Patrones numéricos (Patrones crecientes y decrecientes) Se forman de acuerdo a una regla que se construye a partir de operaciones básicas	1, 3, 5, 7, 9, 11, … 12, 10, 8, 6, 4, … Números figurados Modelos lineales, exponenciales y algunos polinómicos sobre algunos dominios específicos.
Algoritmos y /o conceptos matemáticos	Operaciones que involucran números Composición, descomposición
Otros patrones recursivos	Secuencia de Fibonacci, patrones de Torres de Hanói y patrones recursivos en matemáticas discretas
Patrones de dibujo espacial o Patrones pictóricos Se podría llamar patrón geométrico o pictórico, y es una secuencia de imágenes que presentan el cambio de un término al siguiente de manera predecible.	Algunas relaciones geométricas (Fractales, teorema de Pitágoras, teorema de suma de ángulos interiores en un triángulo, movimientos rígidos)

2.2.1.4. Formulación de conjeturas.

Consiste en establecer una proposición que se supone que es verdadera pero que aún no se verifica su validez y, por lo tanto, puede ser sometida a aceptación o rechazo.

Se considera que un profesor ha formulado una conjetura cuando pone de manifiesto alguna regularidad en los casos particulares, es decir que reconoce el comportamiento o los términos *k*-ésimos de la sucesión. Además, se reconoce cuando los profesores se apoyan en la recurrencia entre los términos consecutivos.

2.2.1.5. Justificación de las conjeturas.

Se refiere a dar razones para convencer la veracidad de las conjeturas planteadas. Esto se puede hacer de manera informal por medio de los ejemplos o casos concretos, o por la misma intuición. En otras palabras, son las razones que se dan para demostrar que algo es posible o no.

La justificación de las conjeturas se identifica cuando los profesores convencen sobre la veracidad de las conjeturas planteadas. Esto puede ser validando las conjeturas con casos particulares e incluso con casos nuevos.

2.2.1.6. Generalización.

Cuando en la conjetura se utilizan todos los casos particulares de una clase determinada, se habla de la generalización. Este paso resulta ser el objetivo principal del razonamiento inductivo, ya que se le considera como generador de conocimiento; sin embargo, para saber esto, es necesario saber con certeza su validez desde la perspectiva matemática, esto es mediante un proceso de validación formal o demostración. Pero también existen otros procesos de validación que pueden convencer sobre la validez de una conjetura sin someterse al rigor de la ciencia matemática, y se puede ver en la sección de demostración.

Kaput (Citado en Rivera, 2014) define generalización como:

> La generalización implica extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o los casos considerados, identificando y exponiendo explícitamente la similitud entre los casos, o elevando el razonamiento o la comunicación a un nivel en el que el foco ya no esté en los casos o situaciones en sí, sino en los patrones, procedimientos, estructuras y las relaciones entre ellos (que, a su vez, se convierten en nuevos objetos de razonamiento o comunicación de nivel superior). (p. 136)

En otras palabras, la generalización se explicita en la identificación de patrones por medio de la regularidad encontrada en los casos particulares, y después esta debe ser aplicada en todos los términos de la secuencia, más allá de los casos particulares considerados.

La generalización se evidencia cuando la conjetura formulada se verifica para todos los casos particulares presentados y la conjetura es válida para casos nuevos.

Davidov (Citado en Rivera, 2013) distingue dos tipos de generalización, la empírica y la teórica. La *generalización empírica* se basa en encontrar una propiedad común entre objetos o situaciones, en relación con su apariencia y forma figurativa. Es decir, se extraen y aíslan mentalmente las características que permanecen constantes por medio de la comparación y observación. A continuación, se propone un ejemplo de este tipo de generalización. La triangularidad se puede inferir fácilmente y de esta manera, se puede establecer la característica común por medio de la comparación de figuras y por ende, la generalización.

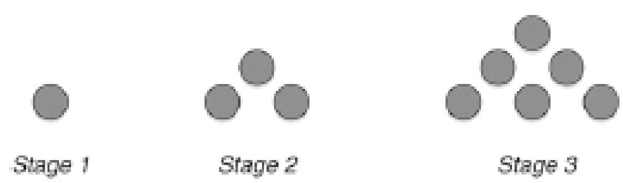


Ilustración 9. Patrón triangular. Adaptada por Rivera (2013)

Este tipo de generalización es una selección realizada entre propiedades que se obtienen de modo sensorial, directo y empírico.

La segunda generalización es la *teórica*, que tiene un nivel de complejidad más alto, pues esta se opera mediante el análisis y la abstracción de las propiedades esenciales de las cosas. Se centra en las acciones (es decir, relaciones y propiedades) que acompañan o hacen viable el proceso general.

> Las acciones reclutan herramientas cognitivas (por ejemplo, interiorizadas) o simbólicas (por ejemplo, uso de variables) que apoyan el proceso de conceptualización y, a menudo,

> la fase inicial de actuación se basa en el concreto. Las acciones significativas y con propósito en la fase concreta se transforman en invariantes o esquemas abstractos de acciones que luego se describen simbólicamente y se capturan a través de un modelo prototipo. (Rivera, 2013, p.71).

Un ejemplo que propone el autor para visualizar este tipo de generalización se evidencia en la *Ilustración 10* que representa el sistema de acciones concretas del estudiante, que le permitieron construir una generalización relacionada con la regla del producto para los logaritmos.

$$\boxed{\begin{gathered}\log(4*3*7)=\log(84)=1.924\\ \log(4)+\log(3)+\log(7)=1.924\\ \log(4*3*6)=\log(72)=1.857\\ \log(4)+\log(3)+\log(6)=1.857\\ \therefore \log(\mathrm{a}_1.a_2\ldots a_n)=\log(a_1)+\log(a_2)+\cdots+\log(a_n)\,.\end{gathered}}$$

Ilustración 10. Ejemplo que involucra la regla del producto para logaritmos. Tomada y modificada de Rivera (2013). p.171.

2.2.1.7. Demostración.

En este punto se requiere llegar a la convicción de la conjetura que se planteó en el paso anterior. Para aceptar o rechazar esta conjetura general es suficiente validarla con casos particulares; sin embargo, para validar una generalización este método no es suficiente. De este modo, es necesario dar razones para argumentar que la conjetura es verdadera; esto se puede hacer de manera formal e informal.

Cañadas (2007) recoge las ideas sobre los procesos de validación, que serán objeto de análisis en este modelo teórico del razonamiento inductivo, asignándole una terminología a los modos de expresar la demostración en este nivel; estos son: la explicación, prueba y demostración. La explicación se refiere a aquellas validaciones informales de conjeturas que el estudiante usa para justificar o convencer a los demás sobre la validez de sus producciones. En segundo lugar, está la prueba, en la que se utilizan los casos particulares como el principal (o único) elemento de convicción para justificar o validar sus conjeturas. En el tercer y último lugar, la demostración se relaciona con los procesos deductivos, en la que se tienen en cuenta los axiomas, teoremas y demás procedimientos formales de las matemáticas que garantizan la veracidad de una afirmación.

Dicho esto, hay que aclarar que el razonamiento inductivo y el deductivo no son excluyentes en este paso, pues el primero hace referencia a la comprobación de conjeturas para ciertos casos particulares, que se denominó en el párrafo anterior como *prueba*. El segundo, se refiere a la *demostración*, que en su mayoría de veces se asocia a la inducción matemática. Para dar cuenta de tal distinción, Cañadas (2007) menciona que “La naturaleza inductiva o deductiva de los procesos de validación que emplean los estudiantes es la que permite diferenciar el razonamiento inductivo del razonamiento inductivo matemático, respectivamente” (p.77). Esto quiere decir que el razonamiento inductivo se basa en la elaboración de conjeturas para la realización de una generalización a partir de observaciones y el razonamiento inductivo matemático o inducción, que hace referencia a la naturaleza deductiva, es un método que se usa en la mayoría de las ciencias para verificar que las proposiciones sean verdaderas.

De este modo, es importante aclarar que cuando una persona está haciendo matemáticas, establece una conjetura generalizando por medio de un patrón que se haya observado a partir de casos particulares y luego prueba la conjetura con una verificación lógica o con un contraejemplo (Reid & Kinipping, 2010). Por esta razón se cree pertinente la validación de la generalización realizada de las sucesiones.

Se puede decir que el proceso de validación puede verse reflejado en los distintos argumentos que usa un profesor en formación profesional inicial para convencer a otro de la veracidad de la generalización o la validez de una conjetura determinada. Sin embargo, cuando un profesor se encuentra en este ultimo paso del razonamiento inductivo, es porque realiza la validación por medio de la demostración, esto es en el caso que se use el principio de recurrencia para representar o aludir al término *n*-ésimo. Así mismo, se empela la demostración, cuando sobre el término *n*-ésimo se hace inducción matemática para demostrar la validez.

Es menester mencionar que estos siete pasos no son acumulativos, es decir, no es imprescindible la utilización del primer o segundo paso para llegar a su consecuente; su utilización tampoco se realiza estrictamente en el mismo orden; y los siete pasos no tienen el mismo peso en el proceso del razonamiento inductivo, esto quiere decir, que el uso de un paso puede significar más que el otro. Por ejemplo, es necesario hacer la generalización, pero no es indispensable utilizar o evidenciar el segundo paso, que es la organización de los casos particulares.

2.2.2. Sistemas de representación.

En el modelo teórico al que se está haciendo referencia (Cañadas. 2007), se define sistema de representación como la forma de comunicar y expresar los razonamientos que se llevan a cabo. En el contexto matemático, se define la representación como aquellas notaciones simbólicas o gráficas que permiten representar una estructura matemática como los conceptos o procedimientos del objeto matemático, incluyendo características, propiedades y sus relaciones.

De acuerdo con el objetivo de este trabajo, se tienen en cuenta las formas de expresar las sucesiones en diferentes sistemas de representación. Se pueden tomar cuatro sistemas de representación, estas son: numéricas, gráficas (no exclusivas del diagrama cartesiano), algebraicas y expresiones verbales. Estas permiten expresar propiedades de un concepto matemático (sucesiones) y facilitan su uso para determinadas funciones. A continuación, en la tabla 2, se muestra la relación de esos sistemas de representación con el objeto matemático de estudio, la definición y ejemplificación de estos sistemas (Cañadas, 2007).

En la siguiente tabla se explicitan las posibles actuaciones de los profesores en formación profesional inicial que les permitirá clasificarse en un sistema de representación determinado.

Tabla 2. Definición y ejemplos de los sistemas de representación.

<table>
<tr><th>Sistema de representación</th><th>Definición</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>Numérico</td><td>Concatenación de términos que guardan una relación entre ellos y se encuentran definidos de la forma $a_1, a_2, a_3, \dots\ a_n$</td><td>Se puede escribir:

1, 3, 5, 7, …;

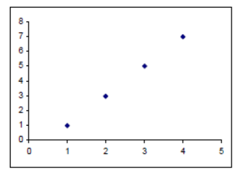
<table><tr><td>N</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>…</td></tr><tr><td>a_n</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>…</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Gráfico</td><td>Son de tipo figurativo y dispone de unas reglas de composición y de unos acuerdos de interpretación.</td><td>

Ilustración 11. Diagrama cartesiano. Tomado de Cañadas (2007)

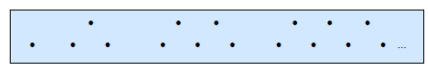


Ilustración 12. Representación pictórica</td></tr>
<tr><td>Algebraico</td><td>Término general de la sucesión. Incluye símbolos alfanuméricos que se emplean con reglas de procedimientos; este sistema está asociado al proceso de generalización;</td><td>Por medio de la ley de recurrencia:

$$a_n = 2n + 1$$

O, la expresión polinómica funcional:

$$a_n = a_{n-1} + 2$$</td></tr>
<tr><td>Verbal</td><td>Está determinado por el lenguaje cotidiano</td><td>“Números impares”

“Sucesión de números impares”

“Al doble de un número cualquiera se le suma uno”</td></tr>
</table>

2, 2, 2, 1 Transformaciones de los sistemas de representación.

Es claro que los objetos matemáticos no se pueden percibir mediante los sentidos, y por esta razón es necesario representarlos para mediar, interactuar y comunicar nuestras ideas matemáticas (Duval, 2017). Sin embargo, los procesos de transformación entre diferentes formas de expresión de un concepto matemático no es una cuestión trivial.

En los sistemas de representación se pueden realizar transformaciones y están vinculadas con la propiedad fundamental de las representaciones, que en términos de Duval (2017) define como “su transformabilidad en otras representaciones que conservan ya sea todo el contenido de la representación inicial, o bien solo una parte de ese contenido” (p.76).

Duval (2017) resalta el salto cognitivo que tiene el paso de las transformaciones entre los sistemas de representación, esto es, porque los términos de una sucesión se pueden expresar en diferentes representaciones. De este modo, las transformaciones no son una cuestión trivial, pues para identificar las transformaciones de una sucesión hay que prestar atención a la relación entre los términos y las formas de representación que puedan expresar los mismos. A continuación, se definen los tipos de transformaciones que se pueden producir en el trabajo con sucesiones:

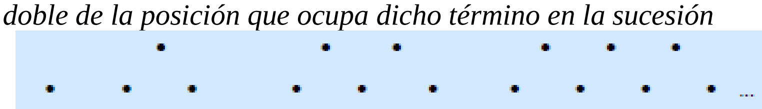
Transformaciones entre sistemas de representación, de un mismo elemento.

Este tipo de representaciones hacen referencia a la manera de expresar un elemento en otro sistema de representación distinto al que se encontraba inicialmente, teniendo en cuenta la correspondencia entre términos *k*-ésimos y el término general de una sucesión. Esto quiere decir, que si hay una transformación de los términos *k*-ésimos puede haber transformaciones entre el sistema de representación numérico, gráfico o verbal; y si se produce una transformación de un término general, puede haber transformaciones entre el sistema de representación algebraico y verbal. Así como se muestra en las siguientes *tablas* con sus respectivos ejemplos[9]:

Tabla 3. Transformaciones entre representaciones del término general

Sistema de representación	**Ejemplo**
Algebraico	$2n-1$
Verbal	*Cada término de la sucesión se obtiene restándole una unidad al doble de la posición que ocupa dicho término en la sucesión*

Tabla 4. Transformaciones entre representaciones del término k-ésimo.

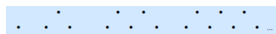
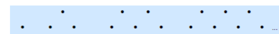
Sistema de representación	**Ejemplo**
Numérico	$1, 3, 5, 7, \ldots$
Verbal	*Cada término de la sucesión se obtiene restándole una unidad al doble de la posición que ocupa dicho término en la sucesión*
Gráfico	 *Ilustración 13. Sistema de representación gráfico*

Transformaciones entre sistemas de representación, de diferentes elementos.

Para referenciarse a este tipo de transformaciones, Cañadas (2007) llama cambios a estas para diferenciarlas de las primeras. Es decir, en esta transformación, los cambios que se hacen son entre los términos generales y los términos *k*-ésimos, como se puede ver en la siguiente *tabla:*

[9] Ejemplos tomados de Cañadas (2007, p.125-128)

Tabla 5. Cambios del sistema de representación entre diferentes elementos

Ejemplos		**Término General**	
	Sistema de representación	**Algebraico**	**Verbal**
Término k-ésimo	Numérico	$1, 3, 5, 7, \ldots \longleftrightarrow 2n - 1$	$1, 3, 5, 7, \ldots \longleftrightarrow$ *Cada término de la sucesión se obtiene restándole una unidad al doble de la posición que ocupa dicho término en la sucesión*
	Gráfico	 $\longleftrightarrow 2n - 1$	 $\longleftrightarrow$ *Cada término de la sucesión se obtiene restándole una unidad al doble de la posición que ocupa dicho término en la sucesión*
	Verbal	*Cada término de la sucesión se obtiene restándole una unidad al doble de la posición que ocupa dicho término en la sucesión* $\longleftrightarrow 2n - 1$	*Uno, tres, cinco, siete, etcétera… ó números impares* $\longleftrightarrow$ *Cada término de la sucesión se obtiene restándole una unidad al doble de la posición que ocupa dicho término en la sucesión*

Transformaciones entre formas de expresar un mismo elemento dentro de un mismo sistema de representación.

Se producen al cambiar la forma de expresar el mismo elemento dentro de un mismo sistema de representación, independientemente del término que sea k-ésimo o general. Es decir, estas transformaciones no se encuentran por fuera de un sistema de representación, sea numérico, algebraico, verbal o gráfico. Un ejemplo de esto son las diferentes formas de representar los números impares, de esta forma: $1, 3, 5, 7, \ldots$ o bien de esta: $1;\ 1 + 2;\ 1 + 2 + 2; 1 + 2 + 2 + 2; \ldots$ y a esta transformación, se le conoce como transformación sintáctica.

2.3. Perspectiva Curricular

En este marco, se tienen en cuenta los documentos del Ministerio de Educación Nacional (MEN) que actualmente orientan el currículo colombiano en las instituciones educativas. Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), proponen unas nociones que tienen como fin cumplir con los retos de la educación matemática y contribuir a que el estudiante aplique sus conocimientos fuera del ámbito escolar; esto es, en la toma de decisiones, al enfrentarse a situaciones nuevas, expresar sus opiniones; y al ser crítico y receptivo a las de los demás. Entre estas nociones, están los tres ejes importantes que fundamentan el currículo para contribuir al desarrollo integral de los estudiantes en la actividad matemática, que son: procesos generales, conocimientos básicos y contextos.

Los procesos generales son las actividades cognitivas que debe realizar el estudiante para contribuir con el desarrollo del pensamiento matemático, estos son: razonamiento matemático; resolución y planteamiento de problemas matemáticos; comunicación; modelación; y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. El segundo eje son los conocimientos básicos, que tienen que ver con los pensamientos específicos que desarrollan el pensamiento matemático, estos son: pensamiento numérico y sistemas numéricos; pensamiento espacial y sistemas geométricos; pensamiento métrico y sistemas de medidas; pensamiento aleatorio y sistemas de datos; pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. El tercer y último eje, son los contextos, que pueden ser: de las mismas matemáticas, la vida cotidiana; y de otras ciencias.

De este modo, el MEN (2006) propone dirigir estos ejes de tal forma que ya no se orienten en el logro de objetivos, sino en el desarrollo de competencias. En estas se resalta que la importancia de aprender matemáticas no solo se basa en los conocimientos conceptuales y procedimentales, sino que también se deben involucrar aspectos relacionados con las formas de expresar y comunicar lo comprendido con la praxis cotidiana, profesional o científica, y todo esto se articula con “un conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores*"* (MEN, 2006, p.4).

En este sentido, la noción de competencia está ligada al comprender, al qué se hace y por qué se hace. Sin embargo, esta no se alcanza de manera espontánea; debe haber un ambiente de aprendizaje adecuado que permita alcanzar un nivel de competencia cada vez más alto; y se explicita por medio de los procesos generales mencionados.

Para efectos de este trabajo, el pensamiento variacional se encuentra relacionado con el razonamiento inductivo, pues este conocimiento básico no se desliga de su propósito y a su vez, el razonamiento como proceso también actúa en coherencia con el razonamiento inductivo.

En cuanto al pensamiento variacional, el MEN (1998) reconoce que este pensamiento debe desarrollarse progresivamente, desde los primeros años de escolaridad, incorporando representaciones tabulares, gráficas, representaciones pictóricas e icónicas, fórmulas y expresiones analíticas. La variación puede estudiarse mediante situaciones problemáticas que involucren al estudiante en escenarios relacionados con fenómenos de variación y cambio de la vida real, para enfrentarse a la construcción de expresiones algebraicas o construcción de fórmulas, esto es porque la acción repetida de los fenómenos de variación que permiten la construcción de un patrón involucra a que el estudiante genere formulas y que comprenda el surgimiento de ellas.

Los documentos curriculares manifiestan que el pensamiento variacional alude al cambio y variación como punto central en el estudio de regularidades, y se desarrolla analizando la forma en que cambian los datos, en la identificación del patrón que se encuentre en las sucesiones o secuencias, en la modelación de un fenómeno de la vida cotidiana, en la expresión de las generalizaciones, así como en otras formas, diferentes a las del método convencional de aplicar algoritmos y operar símbolos y letras (MEN, 2006).

Relacionando lo anterior con los procesos generales, este trabajo de investigación se relaciona y va en coherencia con *el razonamiento*, pues es un proceso que permite ordenar las ideas que se encuentran en la mente, para llegar a una conclusión, que viene siendo el trabajo que realizan los matemáticos en su actividad diaria para llegar a nuevos descubrimientos.

En el razonamiento matemático se articulan una serie de actividades que contribuyen a los fines científicos y está relacionado con dar cuenta del cómo y porqué de los procesos para llegar a conclusiones; justificar las estrategias y procedimientos utilizados; formular hipótesis y hacer conjeturas; encontrar patrones y expresarlos matemáticamente; y utilizar argumentos para expresar sus ideas, entendiendo que las matemáticas son más que algoritmos y fomentan la capacidad de pensar (MEN, 1998).

Al abordar el razonamiento en conjunto con actividades que permitan el desarrollo del pensamiento variacional, que converjan a la generalización o construcción de patrones, se dota de sentido al quehacer matemático en su actividad diaria, para esto, se debe favorecer un ambiente en el aula de clase que estimule a los estudiantes a explorar, comprobar y aplicar ideas.

De acuerdo con las consideraciones realizadas hasta aquí respecto a la propuesta del MEN (1998, 2006), se puede decir que el estudiante, al realizar actividades de sucesiones que conlleven a la generalización de patrones, podrá desarrollar competencias como modelar un fenómeno matemático, interpretar relaciones, justificar estrategias y finalmente, validar conjeturas, para contribuir al fin de la educación matemática.

Esto, para decir que teniendo en cuenta el objetivo que se propuso llevar a cabo este trabajo, los planteamientos del MEN (1998, 2006) no se alejan de la propuesta teórica de Cañadas (2007) del razonamiento inductivo. En este sentido, el MEN (2006) propone unos *estándares*, que son criterios claros y públicos que permiten establecer los niveles de los conocimientos básicos de competencias que deben tener los estudiantes en Colombia. Dichos estándares vienen formulados a través de unos enunciados, en los cuales de forma implícita o explícita se alude a un conocimiento básico, a un proceso general y a un contexto.

En este sentido, para la enseñanza de las sucesiones o generalización de patrones, el MEN (2006) ha propuesto una serie de estándares que guían la actividad en el aula, para lo cual es indispensable prestar atención a la articulación generada de acuerdo con la coherencia vertical y horizontal que deben tener dichos estándares. En la coherencia vertical están los estándares que hacen referencia (implícita o explícita) a las sucesiones o generalización de patrones relacionados con los demás estándares del mismo pensamiento (pensamiento variacional) en los otros conjuntos de grados y la importancia de esta, es relacionar los estándares que se deben desarrollar en los diferentes grados para no perder la secuencialidad en el proceso de aprendizaje del mismo pensamiento, y el seguimiento de esta coherencia se hace por medio de los conocimientos que van alcanzando los estudiantes en cada etapa del grado escolar. La coherencia horizontal identifica los estándares relacionados a los diferentes tipos de pensamiento ubicados en el mismo conjunto de grados.

Para efectos de este trabajo, no se le hará énfasis a la coherencia horizontal, debido a que, por la naturaleza de este, no se pretende centrar en un conjunto de grados de escolaridad en particular. A continuación, en la Ilustración 14 se presenta la coherencia vertical.

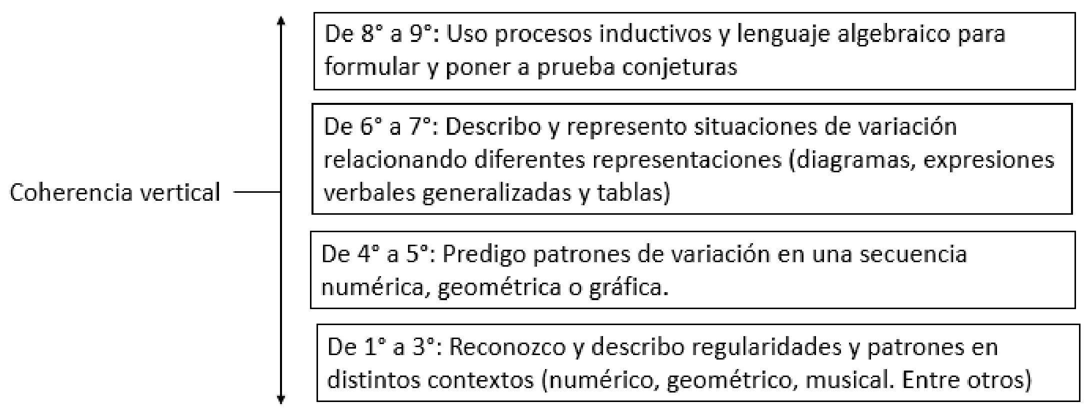


Ilustración 14. Coherencia vertical de los estándares relacionados con el estudio de las sucesiones en el pensamiento variacional

2.4. Articulaciones Teóricas

Conviene decir que, aunque en los documentos curriculares propuestos por el MEN (1998, 2006) no se aborda explícitamente el enfoque del razonamiento inductivo, en la contextualización que hacen de la importancia de las matemáticas en la escuela, en la caracterización de los procesos generales y en los conocimientos básicos, se refieren implícitamente al razonamiento inductivo. Sin embargo, se puede decir que dichos aspectos mencionados del currículo colombiano (procesos generales y conocimientos básicos) se relacionan y van en coherencia con la propuesta de Cañadas (2007).

Ahora bien, el razonamiento inductivo comienza con el trabajo de casos particulares, búsqueda de patrones dirigida a la observación de regularidades, formulación de conjeturas de acuerdo con el patrón y finalmente, el proceso se cristaliza en la generalización, siendo está la que permite la adquisición de conocimiento (Cañadas, Castro y Molina, 2010). En coherencia con el MEN (1998), el énfasis del hacer matemático escolar tiene que ver con el desarrollo de la percepción e intuición sobre figuras; la comprensión, reconocimiento y uso de las propiedades; las relaciones e invariantes a partir de la observación de regularidades que conlleve al establecimiento de conjeturas; y, por último, la generalización. En sus palabras, “una buena reproducción por parte del alumno de una actividad científica exigiría que él actúe, formule, pruebe y construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, etcétera” (p.13)

En este sentido, en la Tabla 6. Articulación teórica de los pasos de razonamiento inductivo y lo que propone el MEN (1998 Y 2006) se muestra la relación que hay entre el modelo que propone Cañadas (2007) del razonamiento inductivo y lo que se propone en los documentos curriculares en Colombia, de acuerdo con los procesos generales que deben estar presentes en toda actividad matemática, para explicitar lo que significa ser *matemáticamente competente*.

Tabla 6. Articulación teórica de los pasos de razonamiento inductivo y lo que propone el MEN (1998 Y 2006)

Modelo teórico de Cañadas (2007)	Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998)	Estándares básicos de competencias Matemáticas (MEN, 2006)
Trabajo con casos particulares		
Organización de casos particulares	Esquematizar	Analizar la situación; identificar lo relevante en ella
Identificación de patrones	Descubrir relaciones y regularidades	Establecer relaciones entre sus componentes y con situaciones semejantes
Formulación de conjeturas	Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos	Formarse modelos mentales de la situación y representarlos externamente en distintos registros; formular posibles preguntas y posibles respuestas que surjan a partir de ella
Justificación de conjeturas	Justificar estrategias y los procedimientos puestos en acción	Formular argumentos que justifiquen los análisis y procedimientos realizados
Generalización	Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente	Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas.
Validación o Demostración	Utilizar argumentos propios para exponer ideas	Usar la argumentación, la prueba, la refutación, el ejemplo, el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración

Las orientaciones curriculares en Colombia (MEN, 1998, 2006) sugieren estrategias metodológicas que el profesor debería saber y aplicar en el aula de clase, también proponen lo que un estudiante de colegio debería saber y aprender. De este modo, se pretende que un profesor de matemáticas maneje los conocimientos matemáticos que las orientaciones curriculares proponen aplicar en aula de clase. Sin embargo, se considera pertinente hacer alusión a estas orientaciones, debido a que presentan directrices generales sobre la forma en que se desarrollan aspectos relacionados con el razonamiento inductivo, entendiendo desde la perspectiva de Cañadas (2007).

Por otro lado, la perspectiva didáctica y la perspectiva matemática se articulan debido a que la teoría del razonamiento inductivo y sus pasos, giran alrededor de las sucesiones o de la generalización de patrones, y en este orden, se crearon tareas que tienen dicho fundamento matemático para caracterizar el razonamiento inductivo en los profesores en formación profesional inicial.

A continuación, se muestra un resumen de la articulación de las perspectivas mencionadas en este capítulo, que corresponden a la matemática, didáctica y curricular; esta última desde tres dimensiones: Lineamientos (MEN, 1998) y los Estándares (MEN, 2006) para explicitar la relación que tienen estos entes teóricos.

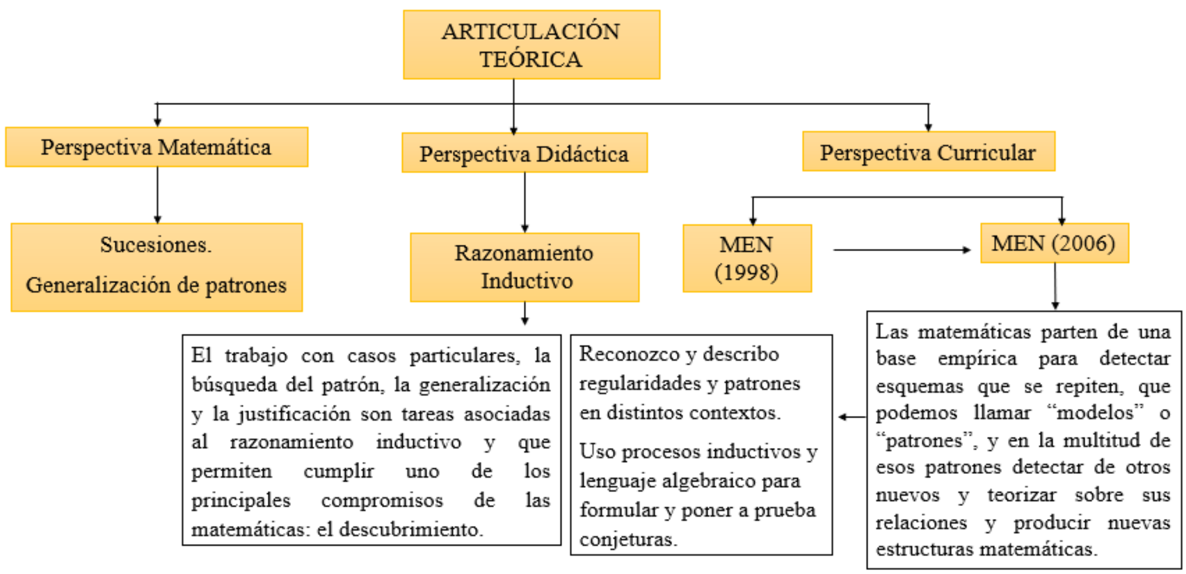


Ilustración 15. Articulación teórica del marco conceptual referenciado

Se pudo evidenciar que la forma en la que se están entendiendo los documentos curriculares no va en contravía con la propuesta de Cañadas (2007), al contrario, el modelo teórico de esta autora se podría concebir como una explicitación de lo que propone el MEN (1998, 2006). Por lo tanto, es pertinente decir que el razonamiento inductivo contribuye al fin de la educación matemática en la adquisición de conocimiento matemático de manera significativa; esto es, porque anima a los estudiantes a construir conceptos, y a su vez, se dan cuenta cómo se han ido creando las matemáticas; ocupando el lugar del matemático en su quehacer científico (Cañadas, 2002).

2.5. Marco Metodológico De La Investigación

Esta investigación se enmarca en el enfoque cualitativo con alcance exploratorio. Enfoque cualitativo porque permite obtener información sobre el conocimiento de los profesores en formación profesional inicial cuando se enfrentan a tareas de generalización por medio de sucesiones polinómicas. Por lo que para Taylor y Bogdan (1984) la metodología cualitativa es el medio idóneo en el que se producen de manera empírica datos descriptivos, producciones habladas o escritas de las personas con sus respectivas conductas. Así, con este enfoque, se pretende recolectar datos y analizar las respuestas de los profesores en formación profesional inicial para establecer algunas prioridades en futuras investigaciones sobre las actuaciones de dichos sujetos. Es de tipo exploratorio, porque el tema de investigación a tratar es poco estudiado y según los antecedentes citados, el estudio del razonamiento inductivo no se ha aplicado desde esta perspectiva en el contexto colombiano. Por estas razones, se considera que este marco es la metodología más apropiada para indagar sobre el razonamiento de los profesores en formación profesional inicial, pues permite recoger la información necesaria en este caso.

De acuerdo con lo presupuestado, este trabajo se fundamenta en un estudio de caso, dado que permite enfocar el análisis en una población y se caracteriza por precisar un proceso de búsqueda, indagación y análisis de todas las situaciones o fenómenos de los que se requiere más información o merecen algún tipo de interés en la investigación científica.

De este modo, el estudio de casos es un estudio empírico que mide y registra el comportamiento de las personas en el fenómeno estudiado, en la que las limitaciones entre el contexto y los fenómenos no se muestran de forma precisa (Yin, 1989). Por tal motivo, este se vincula con el presente trabajo de investigación al coincidir en una investigación de tipo cualitativo, con el que se pretende recolectar información de tipo descriptivo e interpretativo de los análisis de los resultados, esto permite analizar los pasos del razonamiento inductivo que evidencian los profesores en formación profesional inicial al resolver tareas que involucran las sucesiones polinómicas. Además, el estudio de caso viabiliza el uso de recursos como la entrevista, videos y grabaciones de audios

La investigación se realiza bajo la siguiente modalidad: una vez decidido el tema de trabajo, se contextualizó el caso (profesores en formación profesional inicial de la Universidad del Valle), pues dicho caso puede ser fuente de información para identificar el objetivo de investigación propuesto. Todo esto, con el fin de indagar el conocimiento del razonamiento inductivo en el objeto de estudio de caso y así mismo, en los resultados que se obtengan, generar reflexiones e inquietudes sobre el resto de la población.

2.5.1. Fases de la investigación

La investigación se desarrolló en el marco de cuatro fases. La primera fase es la documentación de la problemática, en la que se indaga sobre las investigaciones realizadas desde el marco de referencia conceptual del presente trabajo. En la segunda fase se describe la selección de las pruebas y la manera de validarlas. En la tercera fase se implementan las pruebas a los profesores en formación profesional inicial. Por último, en la cuarta fase, se analizan los resultados de las pruebas implementadas y se sacan las conclusiones de ellas.

Fase 1: Documentación de la problemática

En esta fase se documenta la problemática, en la cual se especifica el papel que cumple el razonamiento inductivo en la construcción de conceptos matemáticos y la importancia de este para generar conocimiento en los estudiantes, en este caso, en la generalización de sucesiones. También, se muestran las dificultades que tienen los estudiantes, profesores de matemáticas y los profesores en formación profesional inicial al enfrentarse a tareas que involucran la generalización de sucesiones.

Además, se indaga lo que proponen los documentos curriculares en Colombia (MEN, 1998, 2006, 2016) sobre el razonamiento inductivo y la coherencia que tienen con lo planteado por Cañadas (2007); así mismo, sobre el interés de trabajar las sucesiones polinómicas en el aula de clase. También se observa, desde una perspectiva didáctica, cómo se aborda tal problemática.

Fase 2: Diseño las actividades

En esta fase se tomaron tareas que han sido diseñadas y analizadas desde la perspectiva matemática y didáctica en investigaciones previas. De este modo, se modificaron las preguntas de dichas tareas y se aplicaron en este trabajo en dos instancias.

En primera instancia, las actividades fueron sometidas a un proceso de validación o *prueba piloto* con profesores en ejercicio de la Universidad del Valle con el fin de refinar el instrumento de intervención, esto es, analizando el tiempo de aplicación de las actividades, ambigüedad en las preguntas, las posibles respuestas y la viabilidad de estas en dichos sujetos. Después, con los resultados obtenidos, se analizó la pertinencia de ajustar las preguntas de acuerdo con el objetivo de este trabajo de investigación.

En segunda instancia, se aplicó la prueba a los profesores en formación profesional inicial para después, realizar el respectivo análisis de los resultados de la implementación.

Fase 3: Implementación de las actividades

Para la implementación de la prueba se presupuestó una sesión de 3 horas. Sin embargo, debido a que se aplicó en dos sedes distintas y en condiciones de anormalidad académica[10], no todos los estudiantes tuvieron la disponibilidad para estar de forma simultánea en tal sesión, razón por la cual se llevó a cabo la prueba en seis sesiones por grupos de estudiantes.

[10] Se entiende por anormalidad académica la participación activa que la comunidad universitaria, especialmente los estudiantes, tienen diferentes manifestaciones de orden social y político a nivel nacional, y por ello la regularidad de las clases no es la misma.

Fase 4: Análisis de los resultados

Una vez recolectados los datos, se procedió a analizar las producciones de los profesores en formación profesional inicial teniendo en cuenta los criterios de análisis que están asociados a las tres perspectivas citadas en el marco de referencia conceptual. Específicamente, se considera la perspectiva didáctica para dicho análisis, esto es, el modelo de los pasos de razonamiento inductivo y los sistemas de representación que utilizan los profesores.

Los datos que se muestran en este estudio resultan de las soluciones dadas por los profesores en formación profesional inicial y las justificaciones dadas en la entrevista. Así mismo, a partir de los resultados obtenidos y su respectivo análisis, se establecen conclusiones y posibles reflexiones sobre el razonamiento inductivo de los profesores en formación profesional inicial.

2.5.2. Descripción de la población objeto de estudio y su selección

La investigación se realizó con veinte profesores en formación profesional inicial que se encuentran cursando el último año (décimo semestre) del programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle. La población objeto de estudio está conformada por estudiantes de dos sedes[11] de la Universidad del Valle en las que se encuentra el programa mencionado. Las sedes donde se llevó a cabo el trabajo de investigación fueron: Meléndez y Norte del Cauca. Para obtener la población objeto de estudio en este trabajo Se aplicaron las pruebas a dichos estudiantes y se analizaron veinte pruebas. De ese modo se recogió información para el análisis de los datos de trece profesores en formación profesional inicial de la sede principal Meléndez y siete de la sede Norte del Cauca de la Universidad del Valle. La edad promedio de estos estudiantes es de veintitrés a veinticuatro años.

[11] Actualmente, la Universidad del Valle cuenta con nueve sedes regionales que son: Yumbo, Zarzal, Tuluá, Buga, Caicedonia, Cartago, Norte del Cauca, Pacífico y Palmira; y dos sedes principales: Meléndez y San Fernando, ubicadas en la ciudad de Cali.

2.5.3. Prueba O Instrumento De Intervención Con Los Profesores En Formación Inicial.

Para la aplicación de la prueba, se seleccionaron cinco tareas que fueron sometidas a un proceso de validación en una prueba piloto, después de haber realizado dicha validación, se hicieron modificaciones hasta obtener la prueba final aplicada a los profesores en formación profesional inicial. Estas tareas tienen la intención de reunir ciertos requisitos que puedan detectar la habilidad de los profesores en formación profesional inicial para llegar a la generalización, además de que se pueden evidenciar los pasos del razonamiento inductivo propuesto por Cañadas (2007) cuando se enfrentan a la generalización de sucesiones polinomiales. Específicamente, se trató de escoger las tareas que tuvieran posibilidad de trabajo con polinomios de orden 1 y otras de orden 2.

Las tareas aplicadas en este trabajo de investigación se tomaron de estudios previos de acuerdo con el contexto de la generalización de sucesiones polinómicas. Con base en ello y en el objetivo de esta investigación, se adaptaron preguntas que potencialmente permitieran caracterizar el razonamiento inductivo, es decir, preguntas que dan cuenta de las instancias que manejan los profesores en formación profesional inicial antes de llegar a la generalización y cómo esto se puede relacionar con el razonamiento inductivo.

De este modo, se tomaron y se adaptaron las tareas, ya que habían sido analizadas y concluidas en investigaciones previas, por lo tanto, se conocían los resultados obtenidos en contextos diferentes al colombiano, lo cual sería una oportunidad para verificar si las dificultades presentadas en los estudios anteriores son o no las mismas de los profesores en formación profesional inicial de la Universidad del Valle.

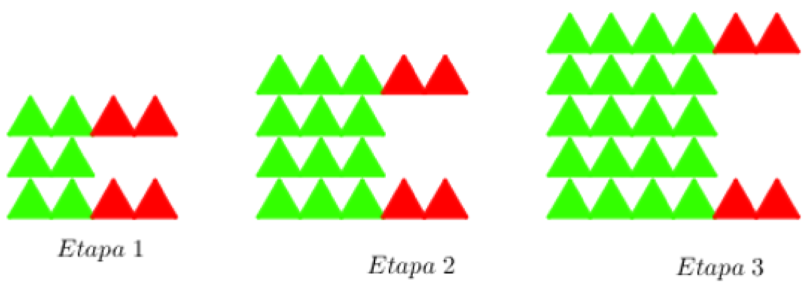
Por otro lado, de las cinco tareas aplicadas a los profesores en formación profesional inicial, se analizaron tres tareas, pues estas daban la información suficiente al presente trabajo y no se quería ser repetitivos en dichos análisis. A continuación se explicitan las tareas adaptadas que se aplicaron con los profesores en formación profesional inicial.

Tarea 1:

Es una adaptación del estudio de Núñez, K. (2018), quien la aplicó en profesores de Matemáticas. El contexto de la generalización es una sucesión cuadrática, construida por un patrón figural creciente. En esta, se sitúa al profesor a trabajar con casos particulares y de ese modo, a través de preguntas auxiliares, se espera que pueda determinar el patrón de comportamiento de la sucesión. En esta tarea se modificaron todas las preguntas y la contextualización. La tarea se presenta de la siguiente forma:

Tarea 1[1]

Una empresa dedicada a la venta de obstaculizadores viales en forma triangulares brinda varias posibilidades en las que se pueden ubicar dependiendo del ancho de la carretera. Para ello, ha elaborado las primeras tres etapas tal como se muestran a continuación.



1. Considerando las tres primeras etapas presentadas, ¿Qué relación encuentra entre cada una de ellas? ¿Qué permanece constante?
2. ¿Cuántos obstaculizadores de forma triangular se necesitan para avanzar en la construcción de la quinta y sexta etapa?
3. De acuerdo con las regularidades observadas entre las etapas, genere una expresión algebraica que permita encontrar el número de obstaculizadores que se necesitan en cada etapa. Justifique como encontró la expresión.
4. Teniendo en cuenta el punto anterior, ¿Cómo podría validar la expresión algebraica que encontró?

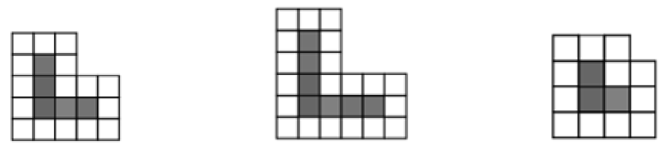
Ilustración 16. Tarea 1

Tarea 2:

Esta tarea se tomó de los estudios de Mason, J y otros (1999). Sin embargo, las preguntas se adaptaron de acuerdo con los intereses del presente trabajo. El objetivo de esta tarea consistió, inicialmente, en que el profesor en formación profesional inicial propusiera el orden de los términos dados de la sucesión y los elementos que tomaría como referencia para identificar un patrón (cuadros blancos, o cuadros grises, o en general toda la figura). De este modo, esta tarea permitiría diferentes formas de contar y visualizar la figura, lo cual genera posibilidades de encontrar varios patrones, por ende, la formulación de expresiones algebraicas distintas. A continuación, se presenta la tarea 2 en la ilustración 17.

Tarea 2[2]

Observa las siguientes figuras



1. ¿Qué relaciones encuentra entre cada una de ellas? ¿Que permanece constante y que varía?
2. Teniendo en cuenta las representaciones figurales presentes en esta tarea, encuentre una expresión general que permita representar la regularidad que encontró y que permita obtener términos de la quinta posición en adelante.
3. ¿Cómo podría validar la expresión general que encontró?

Ilustración 17. Tarea 2

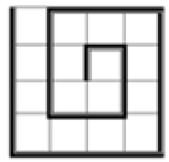
Tarea 3:

Esta tarea se tomó de los estudios de Kolar, Mastnak, & Hodnik. (2012), quienes la usaron en profesores en formación en la Universidad de Liubliana en Eslovenia. El objetivo de esta tarea consistió en construir los términos de la sucesión a partir de la imagen que representa un término específico dado, que muestra la longitud de la espiral en un cuadrado de dimensión 4×4. De ese modo, el profesor en formación profesional inicial debía explorar la espiral en cuadrados de diferentes dimensiones y obtener los términos de la sucesión.

Las preguntas de esta tarea se modificaron con el fin de dar más información y que los profesores en formación profesional inicial representaran la longitud de la espiral que se podía formar en un cuadrado de dimensión $n \times n$ y que finalmente, llegaran a validar dicha representación. A continuación se presenta la tarea 3.

Tarea 3[3]

En la imagen de abajo se presenta la forma de la espiral en el cuadrado de 4×4. Explore el problema de la longitud de la espiral en los cuadrados de diferentes dimensiones.



1. Después de haber explorado la longitud de la espiral en diferentes dimensiones, ¿Cómo podría representarla para diferentes dimensiones?
2. ¿Cómo podría validar dicha representación?

Ilustración 18. Tarea 3.

La intención de las preguntas orienta a que el proceso de resolución del estudiante permita dar información de lo que está entendiendo en las tareas. Esto también permite, que a través de los argumentos que den los profesores en formación profesional inicial, puedan llegar paulatinamente a la generalización.

Por otro lado, el orden de las preguntas pretende que los estudiantes puedan evidenciar el razonamiento inductivo, es decir, que a partir de casos particulares lleguen a los generales. Para lograr esto, se pregunta por los términos siguientes de la sucesión y finaliza preguntando sobre la validación de la expresión algebraica encontrada.

Es menester mencionar, que al final de cada tarea, cuando se les pregunta a los profesores cómo validan la expresión algebraica o la generalización a la que han llegado, no se les supedita a los profesores a que deban usar métodos formales deductivos para validar. Por esta razón, se deja a la interpretación de lo que ellos crean conveniente o entiendan por validar, de tal manera que lo podrían hacer usando casos particulares o inducción matemática, si es el caso. Así mismo se recuerda, que lo más importante es centrar la atención en los procesos que subyacen a la generalización, la demostración se puede contemplar como una de las varias formas que el estudiante usa para validar, por lo que el no uso de la demostración no desdice del proceso de generalización o razonamiento inductivo que manifieste el resolutor de las tareas.

Cabe aclarar que, en el Anexo de este trabajo, se encuentra información en forma de análisis a priori, a través de la cual se anticipan las posibles respuestas correctas y/o esperadas por los profesores en formación profesional inicial. Se explicitan algunas posibles respuestas a las tareas, en términos de cada uno de los pasos de razonamiento. Sin embargo, es importante aclarar que las respuestas sugeridas no obedecen a las únicas, sino a las más convencionales de acuerdo con los antecedentes. Así mismo, en caso de encontrar alguna respuesta válida por parte de los profesores en formación profesional inicial, se contemplaría como aporte a la información de dicho anexo y lo que conlleva a su respectivo análisis.

2.5.4. Instrumentos de recolección de datos

Los instrumentos que propiciaron la recolección de datos se basaron en: la producción escrita de los profesores en formación profesional inicial y las entrevistas realizadas suministradas en audios; esta última con el fin de aclarar, evidenciar o explicitar los argumentos que dichos sujetos tuvieron para realizar las actividades, y fueron utilizadas en este trabajo cuando se requería.

Las entrevistas se hacen en la medida en que la actividad o la producción escrita de los profesores en formación profesional inicial así se requiera para poder profundizar en algunas respuestas importantes que han llamado la atención por estar incompletas, por no entenderse la intención comunicativa de los argumentos usados, uso de estrategias no presupuestadas por los investigadores, entre otros. En dichas entrevistas, las preguntas que generalmente se les hicieron a los profesores en formación profesional inicial fueron: ¿Cómo entendió la tarea?, ¿por qué no continuó con la tarea?, ¿por qué no generaste una expresión algebraica que representara un término *n*-ésimo?, ¿por qué usaste ese método o estrategia y no otra? y ¿cómo determinó la expresión algebraica que explicita en la tarea?

De esta manera, se tuvieron mayores insumos o datos para realizar el análisis, pues el registro escrito no es suficiente, sabiendo que es un registro que puede no evidenciar lo que realmente una persona quería hacer, y que por no poder expresarlo deja información importante no suministrada que es susceptible de ser analizada.

CAPÍTULO 3

3. Análisis De La Implementación De La Prueba

En este capítulo se presentan los resultados de la implementación de la prueba, y para poder analizarla, se explicitan cuáles son las categorías y los criterios que se tienen en cuenta para analizar esos resultados, y dichos criterios de análisis son consecuencia de los referentes conceptuales abordados en el marco teórico de este trabajo. Una vez definida esa rejilla de análisis, se presentan los resultados y estos se analizan de acuerdo con las categorías expuesta, de tal manera que se puede hacer una balanza del razonamiento inductivo en los profesores en formación profesional inicial.

3.1. Categorías De Análisis

Las categorías que se tuvieron en cuenta para efectos del análisis fueron dos de la perspectiva didáctica del marco de referencia conceptual de esta investigación (Cañadas, 2007). La primera categoría es la del razonamiento inductivo, esta se divide en unos criterios o subcategorías de análisis asociadas a los pasos del razonamiento inductivo que evidenciaron los profesores en formación profesional inicial por cada tarea. La segunda categoría es la del sistema de representación y sus correspondientes transformaciones, esta se divide en unos criterios de análisis o subcategorías que son: sistema de representación numérico, verbal, pictórico y algebraico, y también, las transformaciones que son: transformaciones de sistemas de representación de un mismo elemento, de diferentes elementos y de diferentes formas de expresar un mismo elemento dentro del mismo sistema de representación. A continuación, en la Tabla 7 se evidencian dichas categorías.

Tabla 7. Categorías de análisis

CATEGORÍA DE ANÁLISIS	CRITERIOS o SUBCATEGORÍAS
Pasos de Razonamiento Inductivo	Trabajo con casos particulares
	Organización de casos particulares
	Identificación del patrón
	Formulación de conjeturas
	Justificación de conjeturas
	Generalización
	Demostración
Sistemas de representación y Transformación de sistemas de representación	Numérica
	verbal
	Pictórica
	Algebraica
	Transformaciones de sistemas de representación de un mismo elemento
	Transformaciones de sistemas de representación de diferentes elementos
	Transformaciones entre formas de expresar un mismo elemento dentro de un mismo sistema de representación.

La razón por la que se realiza una rejilla de análisis que incluya los pasos del razonamiento inductivo y los sistemas de representación, tiene que ver en la incidencia que tienen estos para llegar a la identificación del patrón, o a la formulación de la conjetura, a la generalización e incluso a la demostración, esto es, porque al presentar una sucesión pictórica, se puede realizar una representación externa que facilite establecer una relación numérica que permita encontrar una regularidad, y por medio de esta, se puede llegar a la formulación de una conjetura. Es importante mencionar que lo más importante es revisar la forma en que los profesores generalizan y cómo validan esa expresión o conjetura. Sin embargo, dentro de las formas de validar se puede encontrar que haya personas que usen métodos formales de demostración como el caso de la inducción matemática, razón por la cual, se incluye el séptimo paso de razonamiento para revisar los datos en caso de que se presenten situaciones en que los profesores usen dicho paso.

De este modo, se incluyeron las dos categorías mencionadas, porque los sistemas de representaciones y las transformaciones que se hacen en ella, se convierten en un complemento para realizar el análisis de los pasos de razonamiento inductivo que evidencian los profesores en formación profesional inicial.

3.2. Resultados Y Análisis De Resultados

A continuación, se presenta el análisis de los resultados agrupados en dos categorías. En la primera categoría, que corresponde al razonamiento inductivo, se analizó por tareas y posteriormente, por los pasos del razonamiento inductivo que se evidencian en cada profesor. Teniendo en cuenta que en algunos casos los profesores en formación profesional inicial tuvieron respuestas similares en las tareas, se decidió agrupar dichas respuestas y realizar un análisis de forma conjunta. En la segunda categoría, que corresponde a los sistemas de representación y sus transformaciones, se analiza por cada tarea de manera general, es decir, se agruparon las representaciones y las transformaciones similares que utilizaron los profesores en formación profesional inicial, para analizar solo una de cada tarea, de acuerdo con la pertinencia o grado de incidencia en términos de los resultados.

En vista de que son veinte profesores en formación profesional inicial analizados, se utiliza la siguiente notación: P1, P2, P3, … P20. Es menester aclarar que para efectos de sintetizar el uso de expresiones largas referidas a los sujetos objeto de estudio, se entenderá que cada vez que se aluda a los profesores, se está asumiendo que son profesores en formación profesional inicial. Esta convención asumida, no implica que los investigadores estén considerando que la categoría “profesor” sea equivalente a la de “futuro profesor o profesor en etapa de formación”, sólo se trata de una convención para permitir una lectura más fluida.

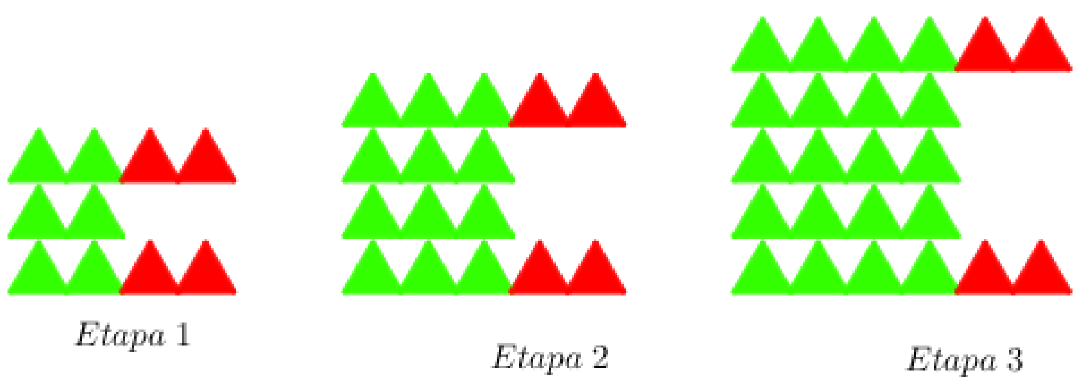
3.2.1. Categoría I: Pasos del razonamiento inductivo

En cada tarea hay una tabla en la que se especifica la cantidad de profesores que realizaron, o resolvieron la actividad o la pregunta por medio de los pasos que propone Cañadas (2007) en el razonamiento inductivo. Esto, con el fin de contextualizar los métodos de resolución de tareas por parte de los individuos, si es usando o no los pasos de dicho marco conceptual. Para esto, al referirse a cada paso de razonamiento, se usan las siguientes notaciones: TCP: Trabajo con casos particulares; OCP: Organización de casos particulares; IP: Identificación de patrones; FC: Formulación de conjeturas; JC: Justificación de conjeturas; G: Generalización; y D: Demostración.

3.2.1.1. Tarea 1

El enunciado de esta tarea es:

Una empresa dedicada a la venta de obstaculizadores viales en forma triangulares brinda varias posibilidades en las que se pueden ubicar dependiendo del ancho de la carretera. Para ello, ha elaborado las primeras tres etapas tal como se muestran a continuación.



La tarea 1 fue resuelta por dieciséis profesores. Los resultados obtenidos en esta tarea permiten evidenciar que la mayoría de los profesores emplea el trabajo con casos particulares, identifica un patrón y formula conjeturas. A su vez, son pocos los que organizan los casos particulares, justifican sus propias conjeturas y ningún profesor demuestra su generalización.

La expresión algebraica prevista para que los profesores generalizaran es $a_n = n^2 + 3n + 6$, la cual representa el total de obstaculizadores que se necesitan para construir n etapas.

En la siguiente Tabla, se presenta de manera general los pasos del razonamiento inductivo evidenciados por los profesores.

Tabla 8. Pasos del razonamiento inductivo evidenciado por los profesores en la tarea 1.

Pasos de razonamiento inductivo.	TCP	OCP	IP	FC	JC	G	D
% de profesores	65%	20%	75%	60%	25%	5%	0%

A continuación, se caracteriza el razonamiento inductivo de los profesores que se evidencia en la realización de esta tarea.

Profesor 1 (P1), Profesor 4 (P4) y Profesor 7 (P7):

El proceso inductivo evidenciado por estos profesores, inicia trabajando con casos particulares por medio del conteo de cada una de las etapas, después identifican un patrón del comportamiento de las figuras y a partir de este, formulan una conjetura por medio de la descomposición de las figuras de la secuencia, y logran visualizar la noción de área presente en la forma rectangular conformada por los obstaculizadores gris claro. De esta forma, el razonamiento inductivo manifestado por estos profesores, es:

Trabajo con casos particulares

El trabajo con casos particulares de estos profesores se basa en el conteo de obstaculizadores triangulares presentes en cada una de las etapas de acuerdo con la posición que se encuentra en cada término, para después identificar cómo fue el crecimiento (aumento de obstaculizadores) en cada etapa.

Identificación del patrón

Este grupo de profesores identifica el patrón cuando obtienen el total de obstaculizadores grises claros en cada una de las etapas. Estos profesores reconocen el comportamiento de la sucesión cuando mencionan que en cada etapa se le adiciona una fila y una columna de obstaculizadores gris claro, y los triángulos gris oscuros permanecen constantes. Un ejemplo claro de lo dicho, se muestra en la Ilustración 19, donde el rectángulo que conforma las representaciones triangulares gris claro son las variaciones de las figuras y los triángulos gris oscuros permanecen constantes.

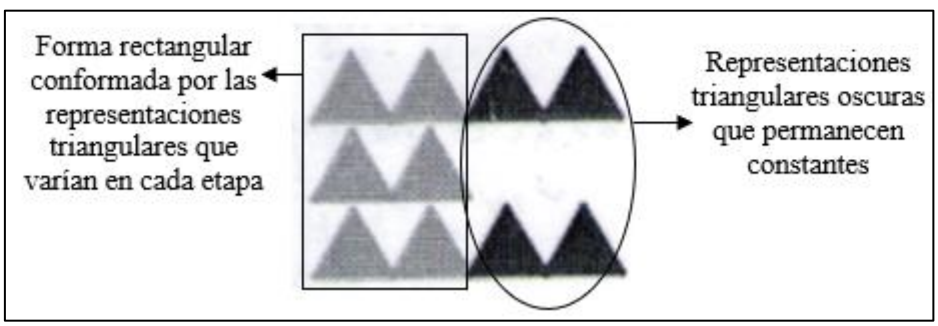


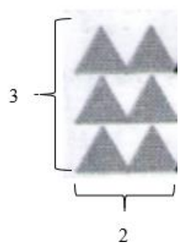
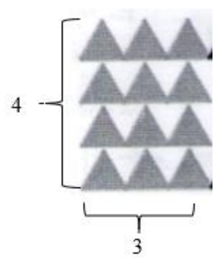
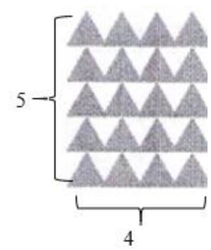
Ilustración 19. Descomposición de una figura de la sucesión.

Formulación de conjeturas

La conjetura formulada por este grupo de profesores se basa en encontrar el área de forma rectangular conformada por las representaciones triangulares señaladas en la ilustración anterior que se obtuvo en cada una de las etapas, sin tener en cuenta las cuatro representaciones triangulares oscuras que permanecen constantes. De este modo, formulan algebraicamente la base de la forma rectangular como $(n+1)$ y la altura como $(n+2)$, obteniendo como área $(n+1)(n+2)$, en la que n es el número de la etapa.

El proceso que realizó este grupo de profesores para formular la conjetura se puede visualizar mejor en la tabla 9.

Tabla 9. Procedimiento de la formulación de conjeturas por medio de la descomposición de las figuras.

Etapas	**Etapa 1**	**Etapa 2**	**Etapa 3**
			
Total de obstaculizadores	6	12	20
Área de forma rectangular conformada por las representaciones triangulares	3×2	4×3	5×4
Conjetura		$(n+2) \times (n+1)$	

Después que los profesores encontraran el área de la forma rectangular conformada por los obstaculizadores gris claro, le adicionaron el 4, que representa los obstaculizadores gris oscuro que permanecen constantes en la sucesión figural. Al final, estos profesores obtienen como conjetura $(n+1)(n+2)+4$, que representa el total de obstaculizadores que se necesitan para la etapa n.

Para finalizar, en la última pregunta se le pedía al profesor que validara la expresión algebraica encontrada y este profesor respondió:

> P1: *"Valido la expresión reemplazando el número de la etapa, para hallar el valor y puedo comparar la cantidad con la gráfica."*.

De este modo, se puede ver que el profesor no utiliza la demostración para validar su conjetura y tampoco reemplaza los casos particulares que se presentan para verificarla, quedándose la expresión algebraica evidenciada, en una conjetura.

En este paso de razonamiento inductivo el profesor 4 formuló una conjetura de la forma algebraica $[(A+1)\times(B+1)]+4$, y representa la cantidad de obstaculizadores que se necesitan para construir una etapa n, en la que A y B representan las columnas y las filas de la secuencia respectivamente.

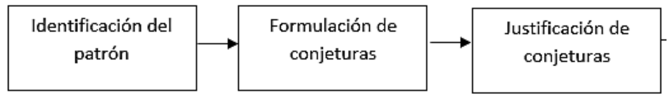
Se puede evidenciar que P4 vincula dos parámetros en su conjetura (A y B), lo cual va en contravía con lo que se espera en la generalización de sucesiones polinómicas, pues lo que establecen estas sucesiones, es la relación que existe entre la cantidad representada en el término k-ésimo y la posición de ese término.

También, en la conjetura que formula el profesor, identifica la misma cantidad de representaciones triangulares que aumenta en las filas y en las columnas, lo que permite ver que la expresión algebraica realizada la encuentra relacionada con el comportamiento la sucesión, que es el aumento de los obstaculizadores gris claro en las filas y en las comunas de cada etapa. Por esa razón, formuló $(A+1)$ y $(B+1)$ como el cambio que se representan las columnas y las filas de la sucesión respectivamente. Cabe mencionar que la expresión algebraica representada por este profesor no corresponde con la respuesta presupuestada en esta tarea.

Profesor 2 (P2), Profesor 11 (P11) y Profesor 13 (P13):

El proceso del razonamiento inductivo evidenciado por estos profesores, muestra que a partir de la descomposición de la figura que se explicitó en el anterior grupo de profesores, identifican el comportamiento de la sucesión, después formulan la conjetura basada en el patrón reconocido, la justifican y finalmente, establecen una generalización.

De esta forma, el razonamiento inductivo manifestado por estos profesores es:



Identificación del patrón

Este grupo de profesores reconocen el patrón por medio de la descomposición de la figura, percibiendo que la representación triangular gris clara está conformada por un rectángulo, y que en cada etapa se mantienen cuatro obstaculizadores constantes (representaciones triangulares oscuras), como se ve en la Ilustración 20.

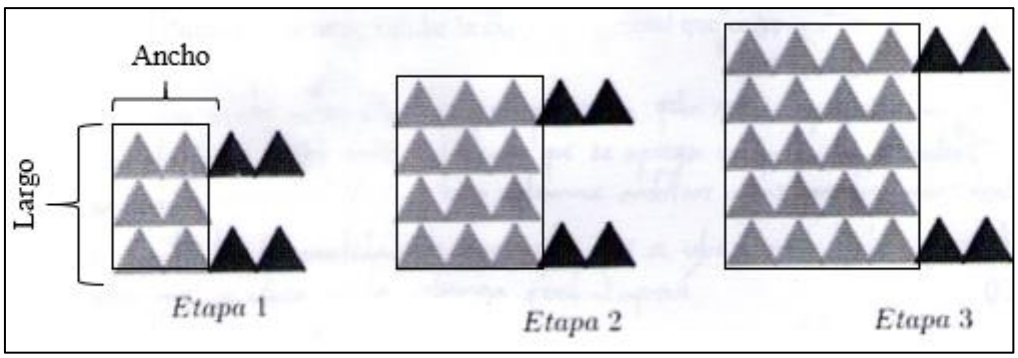


Ilustración 20. Identificación del patrón en la tarea 1

Formulación de conjeturas

La conjetura formulada por estos profesores comienza cuando analizan el comportamiento de la sucesión, teniendo como referencia la multiplicación de los lados de la figura rectangular que conforman las representaciones triangulares en cada una de las etapas, es decir, en la primera etapa obtuvo $3 \times 2 = 6$, siendo 3 el largo del rectángulo conformado y 2 el ancho del mismo, como se muestra en la Ilustración 21. Así, estos profesores construyen una expresión algebraica que conjetura la cantidad de obstaculizadores en cada etapa, que es $(n + 2)(n + 1)$, donde $(n + 2)$ representa el largo del rectángulo y $(n + 1)$ la base.

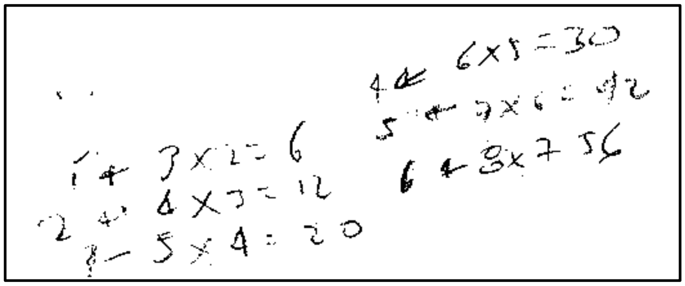


Ilustración 21. Formulación de la conjetura por P2 en la tarea 1

Justificación de conjeturas

Estos profesores justifica su conjetura reemplazando el número ordinal asociado a las dos primeras posiciones de los términos en la expresión algebraica encontrada. Sin embargo, la validez de esta conjetura no se cumple en la figura de la etapa 1 y 2 de la sucesión, pues cuando se verifica en la Ilustración 22 el resultado que encontraron para $n = 1$ es 6, y este no corresponde con la cantidad de obstaculizadores que se representan en la etapa 1. Esto se debe a que estos profesores olvidaron incluir la constante (obstaculizadores oscuros) en la expresión algebraica formulada.

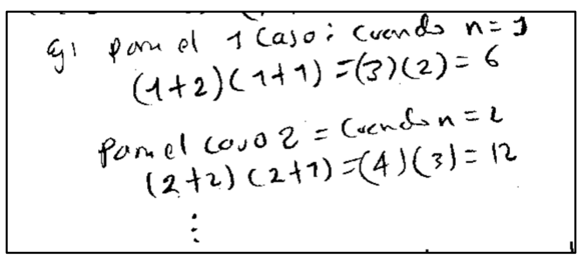
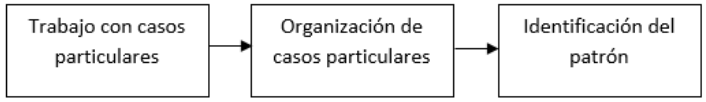


Ilustración 22. Justificación de la conjetura por P2 en la tarea 1

Profesor 3 (P3), Profesor 15 (P15) y Profesor 17 (P17):

Estos profesores inician su proceso inductivo trabajando con casos particulares por medio del conteo de obstaculizadores en cada etapa y organizándolos de acuerdo con su posición, para después encontrar relaciones entre cada uno de los términos de la sucesión. De esta forma, el razonamiento inductivo manifestado por dichos profesores, es:



Trabajo y organización de casos particulares

El trabajo con casos particulares realizado por estos profesores se basa en el conteo de obstaculizadores de cada etapa. Este conteo consiste en agrupar las piedras de acuerdo al número de la etapa, para luego identificar la regularidad de cada figura. Esto le permitió al profesor organizar los casos particulares por medio de una representación tabular y predecir los términos 4, 5 y 6 de la sucesión y esto se explicita en la ilustración 23.

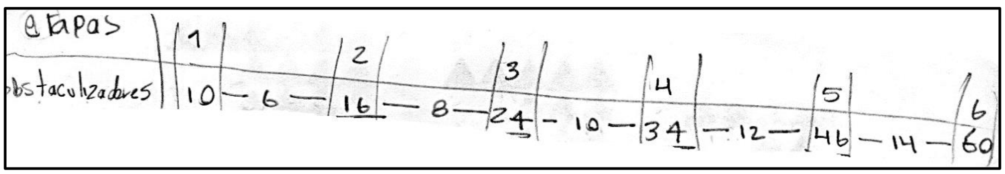


Ilustración 23. Organización de los casos particulares por P3 en la tarea 1

Identificación del patrón

Los profesores el patrón de recurrencia cuando determina las diferencias entre los términos *k*-ésimos de la sucesión. De este modo obtiene la primera diferencia y se da cuenta que no es constante, por esa razón determina la segunda diferencia (diferencia de la diferencia), y observa que es constante, como se muestra en la Ilustración 24. Sin embargo, a pesar de que el profesor 3 estableció las diferencias sucesivas de segundo orden (diferencias de las diferencias) no pudo asociar esto con una relación cuadrática para llegar a la expresión del término *n*-ésimo.

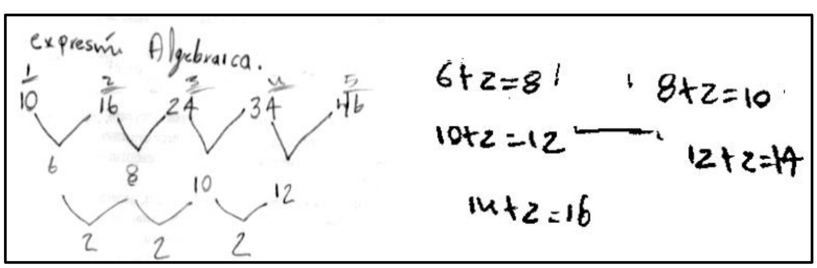


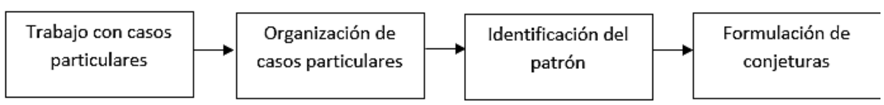
Ilustración 24. Identificación del patrón por P3 en la tarea 1.

Se pudo evidenciar que a pesar de que estos profesores identificaron los términos *k*-ésimos de la sucesión, el patrón de recurrencia y las segundas diferencias de los términos; no explicitaron que el comportamiento de esta sucesión es cuadrático. También se pudo ver que los profesores tuvieron dificultades notorias que no les permitió construir una expresión algebraica.

Profesor 5 (P5):

El profesor 5 inicia su proceso inductivo trabajando y organizando casos particulares. Luego determina las diferencias entre los términos, para así identificar la regularidad entre cada una de las etapas y así poder establecer una conjetura de forma algebraica.

De esta forma, el razonamiento inductivo manifestado por el profesor P5 es:



Trabajo y organización de casos particulares

El trabajo con casos particulares de este profesor se basa en el conteo de obstaculizadores en cada una de las etapas, para después organizarlas en una representación pictórica que alude a la presentada inicialmente en la tarea, la cual se basó en analizar las representaciones triangulares gris claro que varían en cada figura y omitir las representaciones gris oscuras que permanecían constantes en la sucesión, como se puede ver en la siguiente Ilustración.

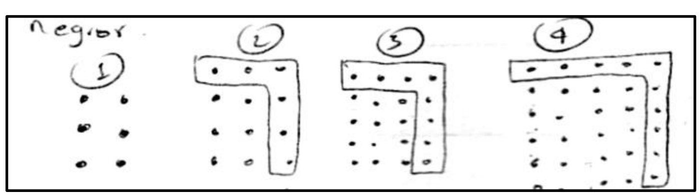


Ilustración 25. Organización de los casos particulares por P5 en la tarea 1.

Lo anterior le permitió al profesor agrupar los obstaculizadores para identificar la relación en el crecimiento de la sucesión.

Identificación del patrón

El profesor 5 identifica el patrón de recurrencia por medio del uso de la primera diferencia entre los términos *k*-ésimos establecidos en su representación pictórica de la sucesión, esta se evidencia en la cantidad de obstaculizadores señalado por él, como se muestra en la Ilustración 26, y el número resultante de esta diferencia es constante. Además, este patrón de recurrencia hallado del patrón de recurrencia hallada, el profesor encontró el comportamiento de las etapas en la sucesión pictórica realizada por él y lo expresa de la siguiente manera:

> P5: *"La etapa 2 tiene el doble de obstaculizadores grises que la etapa 1… … A medida que avanzan las etapas, se agrega un obstaculizador gris a cada fila y a cada columna…"*.

El razonamiento que hace el profesor para identificar este patrón, se basa en contar la cantidad de obstaculizadores que aumentan por etapa, eso quiere decir que en la etapa 2 aumentan 6 con respecto a la etapa 1, en la etapa 3 aumentan 8 con respecto a la etapa 2, y así sucesivamente.

Se puede evidenciar que este patrón identificado por este profesor no corresponde a la figura completa, sino que se basa particularmente en los cambios que se realizan en ella, y deja a un lado el resto de la figura, lo cual no le permitiría llegar a la conjetura esperada, pues el comportamiento de este patrón encontrado por P5 es lineal, como se muestra en la siguiente Ilustración.

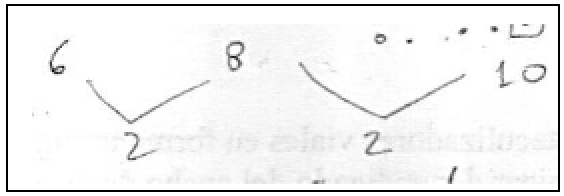


Ilustración 26. Diferencias sucesivas realizada por P5 en la tarea 1.

Formulación de conjeturas

El profesor 5 formula su conjetura de acuerdo con la noción de progresión aritmética, debido a que identificó una diferencia constante d y un primer término en la sucesión (a_0), utilizando la siguiente fórmula $a_n = a_0 + d(n-1)$. Este profesor reconoce la relación lineal que obtuvo al encontrar la diferencia sucesiva en los términos de su representación gráfica y esto le permitió reemplazar los valores en la fórmula mencionada, siendo d=2 y $a_o = 6$ y obteniendo como resultado la siguiente expresión $a_n = 6 + 2(n-1)$.

Se pudo evidenciar que este profesor no validó la conjetura formulada y esto implica, no considerarse su conjetura como una generalización.

Profesor 6 (P6):

El proceso inductivo que evidencia P6 en esta tarea se basa en la identificación del patrón, esto lo hace analizando la variación que tiene una etapa con la otra y registrando la variación observada en representación numérica. De este modo, el razonamiento inductivo evidenciado por este profesor es:

Identificación de patrón

A partir de la relación numérica establecida por P6 en cada una de las etapas, se observa la presencia de la noción de recurrencia, y toma como referencia el número de obstaculizadores en la primera etapa. La identificación del patrón de este profesor se basó en el primer término de la sucesión figural, pues como se muestra en la Ilustración 27, el profesor inicia con el primer término que es 10 y a partir de estos 10 obstaculizadores contados, le agrega los 6 que hacen falta para obtener el segundo término, para un total de 16 obstaculizadores; después cuenta los obstaculizadores de la etapa 3 sin contar los 16 de la etapa anterior, obtiene 8 y los suma con los 16 de la etapa anterior; y continua así sucesivamente hasta llegar al sexto término de la sucesión. Esta forma de encontrar los términos de la sucesión, le permitió identificar el crecimiento de las diferencias de primer orden y así pudo predecir los términos 4, 5 y 6 de la sucesión.

En resumen, la identificación del patrón del profesor 6 también se ve reflejada en la entrevista que se le realizó y da la siguiente explicación:

> P6: “*Considerando las etapas anteriores, observo que la relación que hay entre ellas es que hay obstaculizadores de diferencia en cada una de las filas de las etapas, es decir, cada que avanza una etapa, se agrega un obstaculizador a cada fila de las etapas siguientes. Además, se observa que permanecen constantes cuatro obstaculizadores en cada etapa*”.

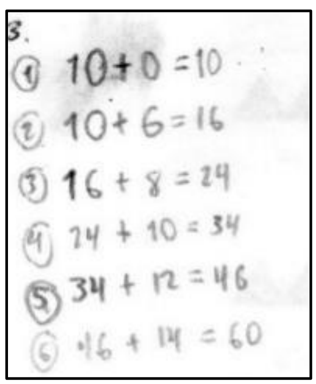


Ilustración 27. Identificación del patrón evidenciado por P6 en la tarea 1.

En este punto conviene decir, que P6 manifiesta no pudo encontrar una expresión algebraica que representara el comportamiento de la sucesión pictórica, pues al representarla numéricamente se le dificultó encontrar la regularidad de esta, pues no recordaba la forma de encontrar una expresión algebraica para una sucesión cuadrática.

Profesor 8 (P8):

El profesor 8 inició su proceso inductivo realizando una descomposición de la figura, esto es, separando los obstaculizadores gris claros de los oscuros, para poder identificar la variación que se presentan en los obstaculizadores triangulares claros. De ese modo, formuló una conjetura basándose en el área del rectángulo que conforman los obstaculizadores gris claro. Así, el razonamiento inductivo manifestado por el profesor P8, es:

Formulación de conjeturas

Formulación de conjeturas

El profesor formuló la conjetura basado en la descomposición que hizo en la figura. Las representaciones triangulares de color gris claro conforman una figura rectangular y de ese modo, el profesor encontró la forma de representar esta parte por medio del área del rectángulo obteniendo $(n+1)$ como el número de columnas y $(n+2)$ como el número de filas y a su vez, sumándole 4, que representa para él, los triángulos que se mantienen fijos. Finalmente, la conjetura construida por este profesor es: $[(n+1)\times(n+2)]+4$. Lo anterior se explicita en la Ilustración 28.

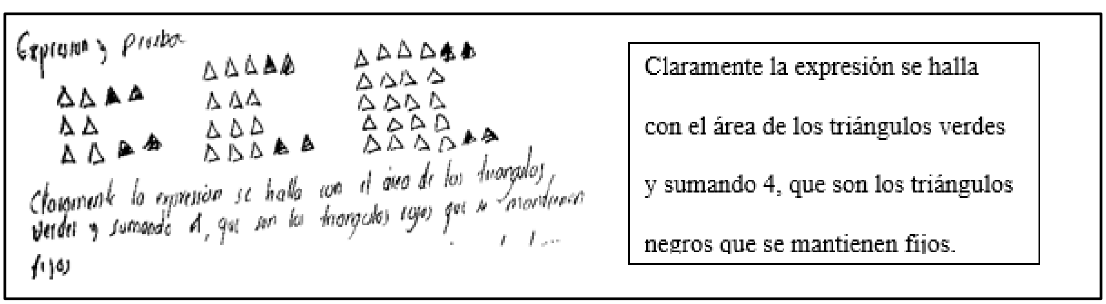


Ilustración 28. Formulación de la conjetura de P8 en la tarea 1.

El profesor 8 intenta hacer una demostración formal por medio del medio del método de inducción matemática. Se observa que toma k haciendo referencia a la conjetura formulada y la reconoce como la hipótesis inductiva, después continua con el término $k + 1$, reemplazándolo en la hipótesis inductiva, y como resultado obtiene una expresión algebraica nueva, como se muestra en la Ilustración 29. El profesor llegó hasta ahí, y en la entrevista manifestó que no tuvo más recursos para continuar su esbozo, sin embargo, en la producción escrita explicó lo siguiente:

> P8: "*Claramente en esta expresión se evidencia que para* $k + 1$ *si se conserva que el número de columnas verdes es mayor que el número de filas verde por una unidad*".

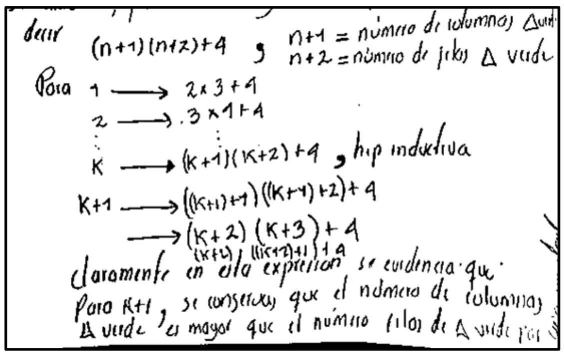
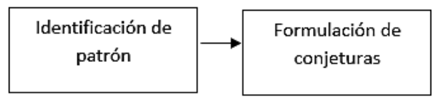


Ilustración 29. Indicación de la demostración por inducción matemática por P6.

La dificultad que manifestó este profesor para llegar a la demostración pudo estar relacionada a que no acudió a la noción de recurrencia para analizar cada uno de los términos *k*-ésimos y encontrar una expresión algebraica por medio de ellos, y a partir de ahí, tener mayor información para empezar a demostrar por inducción. Así mismo, este profesor comenzó su demostración por inducción a partir de la expresión algebraica que representa el término *n*-ésimo de la sucesión, lo que no le permitió continuar de manera satisfactoria su proceso de demostración.

Profesor 9 (P9):

El profesor 9 inició reconociendo el patrón. Para ello, sustenta una descomposición de la figura, después formuló una conjetura establecida por las estructuras aditivas que representaron el comportamiento observado por este profesor. De esta forma, el razonamiento inductivo manifestado por el profesor P9 es:



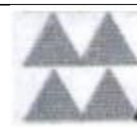
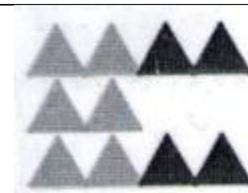
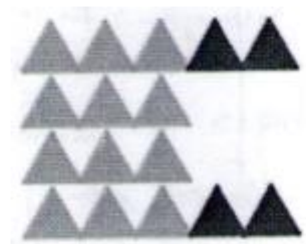
Identificación del patrón

La identificación del patrón realizado por el profesor 9, se basa en describir los términos constantes de la sucesión que corresponden a las representaciones triangulares oscuras y también manifiesta que lo que cambia o varía son los obstaculizadores gris claro, pues en cada etapa se le agrega una fila y una columna. Este patrón identificado por P9 le permitió encontrar el término 4 y 5 de la sucesión, que corresponden a 34 y 46 obstaculizadores que se necesitan para construir estas etapas respectivamente.

Formulación de conjeturas

La conjetura formulada por el profesor 9, se basa en la descomposición de los obstaculizadores en tres partes. La primera descomposición son los cuatro obstaculizadores gris oscuros que permanecen constantes. La segunda descomposición es la representación de un cuadrado que conforman las representaciones triangulares. La tercera y última descomposición es la fila superior que queda sobrando de la figura. Para aclarar esta descomposición realizada por P9 se construyó la siguiente tabla:

Tabla 10. Resolución de la tarea 1 por P9

Descomposiciones	**1**	**2**	**3**	**Total de obstaculizadores**
Etapa 1				
Total obstaculizadores	4	4	2	10
Etapa 2				
Total de obstaculizadores	4	6	3	16
Conjetura	4	$(n+1)^2$	$n+1$	$(n+1)^2+(n+1)+4$

De acuerdo con lo mencionado en la tabla 10, el resultado que el profesor obtuvo al sumar todos los términos de la expresión algebraica es $(n+1)^2+(n+1)+4$.

En la tarea se pidió que validarán la expresión algebraica encontrada, y este profesor da la siguiente respuesta en su producción escrita:

> P9: "*La expresión se valida reemplazando n por el número de la etapa y verificando que el total de triángulos coincida*".

Sin embargo, el profesor no hizo lo que mencionó, y de esa forma no se comprueba que la conjetura formulada es válida para los casos particulares, y al no realizar esta comprobación, no se considera que generalizó. También se pudo evidenciar en esta explicación dada por el profesor, que no contempla la demostración formal para validar la expresión algebraica realizada.

Por otro lado, la conjetura formulada por el profesor no corresponde con la respuesta presupuestada en esta tarea, sin embargo, es otra forma de representar el comportamiento de la sucesión.

Profesor 10 (P10):

El profesor 10 trabaja con casos particulares evidenciando los términos *k*-ésimos en cada una de las etapas y de este modo identifica el comportamiento del patrón en la descomposición de la figura realizada por él y por último formula una conjetura que da cuenta de dicho patrón. De esta forma, el razonamiento inductivo manifestado por el profesor P10, es:

Trabajo con casos particulares

El profesor 10 trabajó con casos particulares a través del conteo de las representaciones triangulares gris claro y le sumaba la cantidad de representaciones triangulares oscuras, y el total corresponde a los obstaculizadores de esa etapa, que es el término *k*-ésimo. Por ejemplo, en la Ilustración 30, en la etapa 1, el número 6 corresponde a la cantidad de obstaculizadores gris claro que hay, y el número 4 representa la cantidad de obstaculizadores gris oscuros.

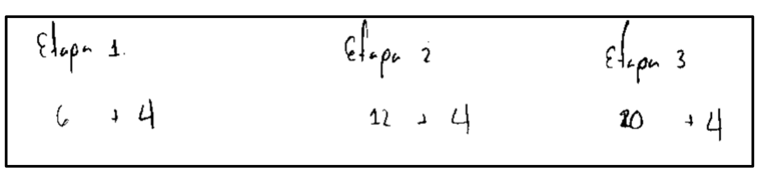


Ilustración 30. Trabajo con casos particulares de P10 en la tarea 1

Identificación de un patrón

Los términos *k*-ésimos representados por el profesor en la sucesión, favorecen que identifique el patrón de recurrencia por el método de las diferencias sucesivas. Luego, trabaja con nuevos casos particulares y establece las primeras y segundas diferencias. En las segundas diferencias identifica que se mantiene constante en 2, como se muestra en la Ilustración 31.

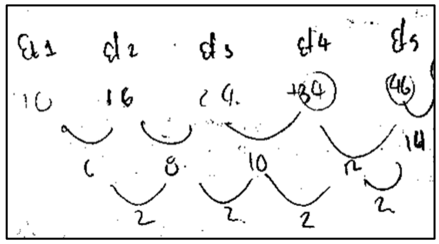


Ilustración 31. Identificación del patrón de P10 en la tarea 1

Formulación de conjeturas

La conjetura formulada por el profesor 10, deja clara la noción de área aplicada para la figura rectangular conformada por las representaciones triangulares gris claro, donde establece el ancho de la forma $(n + 1)$ y el largo $(n + 2)$ y le añade el número 4 que representa los obstaculizadores que permanecen constantes en cada una de las etapas. Después de haber conjeturado las partes de la expresión algebraica, el profesor realizó un procedimiento que le permitió simplificar dicha conjetura, obteniendo $n^2 + 3n + 6$, donde n representa la posición del término k-ésimo, como se muestra en la Ilustración 32.

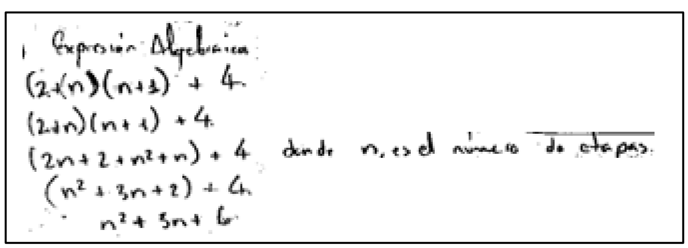


Ilustración 32. Formulación de la conjetura por P10 en la tarea 1

Después de haber formulado la expresión algebraica, el profesor da respuesta a la última pregunta de esta tarea que hace referencia a la validación de la expresión algebraica y este profesor menciona que debe reemplazar cada etapa en la expresión algebraica, pero no realiza la verificación con casos particulares, por lo que se considera que la conjetura formulada por este profesor no es una generalización.

Profesor 12 (P12), Profesor 16 (P16), Profesor 18 (P18) y Profesor 19 (P19):

Este grupo de profesores utilizan el trabajo con casos particulares por medio del conteo en cada una de las etapas de las representaciones triangulares gris claro y de las representaciones gris oscuro. De ese modo, el razonamiento inductivo que manifestaron estos profesores es:

Trabajo con casos particulares

Trabajo con casos particulares

El trabajo con casos particulares de estos profesores se basa en el conteo de los obstaculizadores gris claro y de los obstaculizadores gris oscuro, y para representar la cantidad de obstaculizadores que se encuentra en total en cada etapa, suma estas dos cantidades, como se muestra en la Ilustración 33.

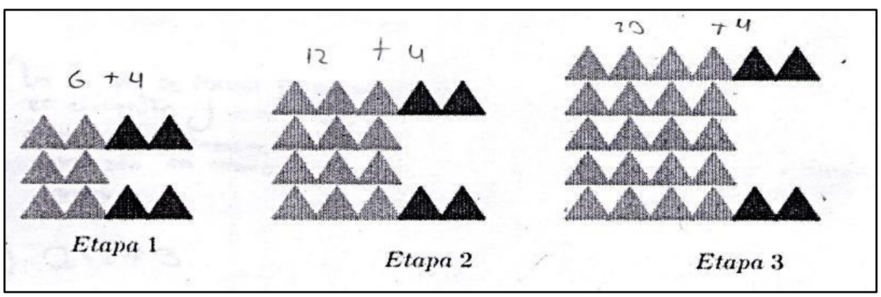


Ilustración 33. Trabajo con casos particulares de P12 en la tarea 1

Profesor 14 (P14):

El proceso del razonamiento inductivo evidenciado por el profesor 14, muestra que a partir de la descomposición de la figura que se explicitó en el grupo de profesores de P2, identifican el comportamiento de la sucesión, después formula la conjetura basada en el patrón reconocido, la justifica y finalmente, establecen una generalización. De esta forma, el razonamiento inductivo manifestado por P14, es:

Trabajo con casos particulares

El trabajo con casos particulares de este profesor se basó en la descomposición de los términos de las figuras y realizó el conteo de la cantidad de representaciones triangulares color gris, como se muestra en la Ilustración 34

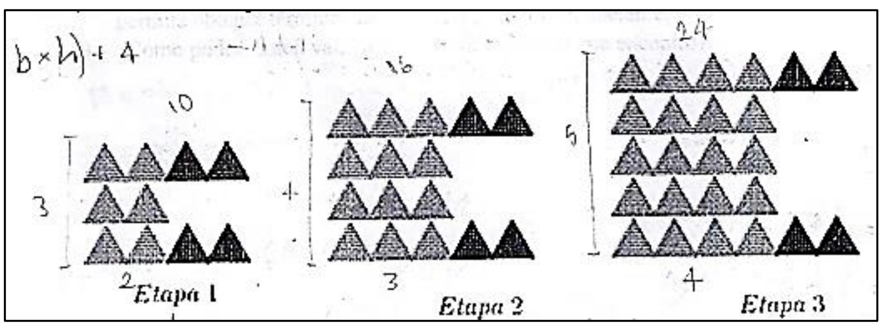


Ilustración 34. Trabajo con casos particulares evidenciado por P14 en la tarea 1

Identificación del patrón

Este profesor reconoce el patrón por medio de la descomposición de la figura, percibiendo que la representación triangular gris clara está conformada por un rectángulo, y que en cada etapa se mantienen cuatro obstaculizadores constantes (representaciones triangulares oscuras) y explicita el uso del área del rectángulo en esta actividad, como se muestra en la parte superior de la Ilustración 34. Este profesor también describe el comportamiento de las figuras en su producción, de la siguiente forma:

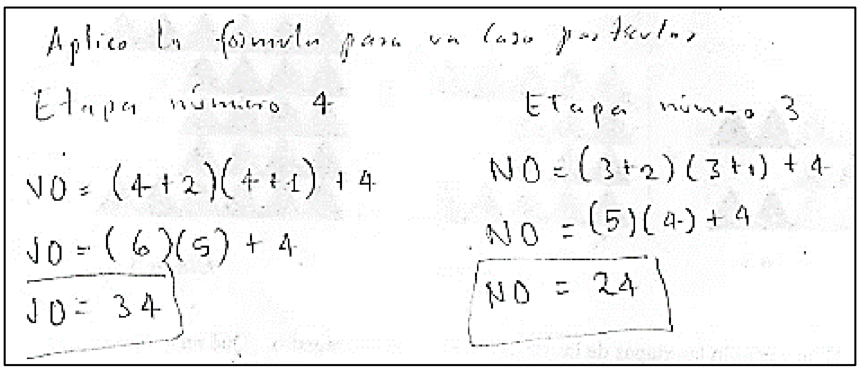
> P14: "*Como los obstaculizadores negros permanecen constantes, entonces encuentro un patrón para los obstaculizadores grises y luego le sumo 4 unidades de los obstaculizadores negros"*

Formulación de conjeturas

La conjetura formulada por este profesor comienza cuando analizan el comportamiento de la sucesión, pues sabe que debe hallar el área de la dimensión rectangular conformada por las representaciones triangulares y este procedimiento se muestra en la tabla 10 donde se explicita la formulación de conjeturas por medio de la descomposición de las figuras.

Justificación de conjeturas

Este profesor justifica su conjetura reemplazando el número ordinal asociado a la tercera y cuarta posición de los términos en la expresión algebraica encontrada, como se muestra en la Ilustración 35.



Aplico la fórmula para un caso particular

Etapa número 4

$NO = (4+2)(4+1) + 4$

$NO = (6)(5) + 4$

$\boxed{NO = 34}$

Etapa número 3

$NO = (3+2)(3+1) + 4$

$NO = (5)(4) + 4$

$\boxed{NO = 24}$

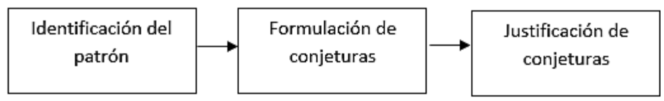
Ilustración 35 Justificación de la conjetura por P14 en la tarea 1.

Generalización

Se reconoce que generaliza, al momento en que el profesor usa la conjetura que estableció en el paso previo, para analizar otros casos de términos *k*-ésimos que se le pide determinar, es decir que establece su conjetura como válida para los casos particulares.

Profesor 20 (P20)

El razonamiento inductivo que evidenció el profesor 20 comienza con la identificación de la regularidad en el crecimiento del patrón figural, lo que le permitió formular y justificar su conjetura.



Identificación del patrón

El profesor se centra en el comportamiento de la sucesión en cada una de las etapas e identifica la variación en ellas, como lo manifiesta textualmente por escrito en la prueba.

> P20: "*los triánguladores son crecientes, se mantienen constantes 4 triánguladores de color negro…Aumenta el doble, en etapa 1 hay 6 triánguladores gris y en la etapa 2 hay 12, es decir que aumenta en cada etapa una fila y una columna…".*

Lo anterior le permitió al profesor encontrar la cantidad de obstaculizadores que se necesitan para construir 4, 5 y 6 etapas por medio del patrón encontrado.

Cabe aclarar que, en la entrevista realizada, este profesor aclaró que el término "trianguladores" al que hacía referencia en la producción escrita eran los obstaculizadores.

Formulación y justificación de conjeturas

El profesor 20 formula como conjetura $(2n)$, pues muestra que en la etapa dos hay el doble de obstaculizadores de la etapa uno, sin embargo, esta conjetura no se cumple para la etapa tres, pues el término 3 que es 30 (sin contar los obstaculizadores que permanecen constantes) no es el doble de 12, que es el término 2 de la sucesión. También, se pudo evidenciar que el profesor no tuvo en cuenta los obstaculizadores oscuros que permanecen constantes en cada una de las etapas a la hora de incluirlos en su expresión algebraica ni en la identificación de su patrón.

Al justificar su conjetura, se puede evidenciar que al reemplazar el término 2 de la sucesión, el resultado que se obtiene no es la cantidad de obstaculizadores que corresponden a la sucesión gráfica presentada en la tarea, como se muestra en la Ilustración 36.

$$2(2) = 4$$
$$2(3) = 6$$

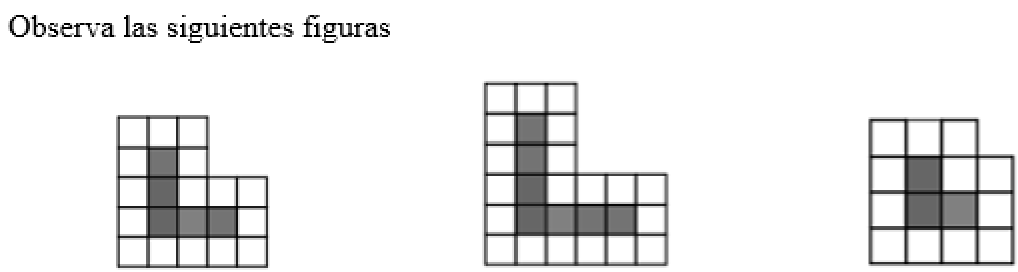
Ilustración 36. Justificación de la conjetura formulada por P20 en la tarea 1

Para finalizar con esta tarea, se hace un análisis general y se pudo notar que en la mayoría de casos, los profesores no tuvieron dificultades en el momento de comenzar a trabajar con esta tarea (es decir, las consignas de la tarea fueron claras para iniciar el proceso de resolución), y algunos profesores manifestaron que el comportamiento de la figura fue tan claro que no hubo necesidad de trabajar con los casos particulares para identificar un patrón. Sin embargo, a la hora de llegar a la generalización se presentaron dificultades, pues muchos profesores no utilizaron la conjetura o expresión algebraica para verificarla con casos particulares, y en el caso de los que lo hicieron, el valor encontrado no coincidía con la cantidad de términos que estaban en cada figura de la sucesión pictórica. Por otro lado, ningún profesor mostró indicios de realizar una demostración formal para validar la generalización encontrada.

Además, se pudo evidenciar que la razón principal por la que la mayoría de profesores no generalizaron en esta tarea, se debe a que en la formulación de la conjetura se basan en el comportamiento del patrón de una parte de la figura, y no la toman toda, por lo que al justificar la conjetura e intentar validarla, reemplazan la expresión algebraica formulada para los primeros casos, y al verificarla en la sucesión pictórica, esta expresión no se cumple. Esto quiere decir que los profesores no verifican si esta expresión se cumple o no en la sucesión pictórica, y por esta razón, no se considera la conjetura como una generalización, pues al comprobar la validación de dicha conjetura, esta no es verdadera.

3.2.1.2. Tarea 2

El enunciado de la tarea es:



Esta tarea se compone de términos figurales no ordenados, en la que se espera que los profesores puedan organizar, conjeturar, predecir, generalizar la sucesión presentada y demostrar.

Teniendo en consideración lo mencionado hasta el momento, la tarea 2 fue resuelta por dieciocho profesores. De ese modo, se pudo evidenciar que la mayoría de los profesores identifican un patrón y formulan una conjetura. A su vez, pocos profesores organizan los casos particulares y generalizan; mientras que ningún profesor demuestra.

La expresión algebraica prevista para que los profesores en formación profesional inicial generalizaran es $6n + 9$, la cual representa el total de cuadrados claros y oscuros en el término n-ésimo.

En la siguiente tabla se presentan los resultados en términos generales de los pasos de razonamiento inductivo utilizados por los profesores en formación profesional inicial.

Tabla 11. Pasos del razonamiento inductivo evidenciados por los profesores en la tarea 2.

Pasos del razonamiento.	TCP	OCP	IP	FC	JC	G	D
% de los profesores	40%	20%	85%	60%	65%	35%	0%

Profesor 1 (P1), Profesor 8 (P8), Profesor 9 (P9) y Profesor 14 (P14):

El proceso inductivo que realizaron estos profesores inicia en el trabajo con casos particulares al contar los cuadrados en cada término de la sucesión, para después organizar los términos k-ésimos de la sucesión de acuerdo con la posición correspondiente. Luego formulan una conjetura que permite la obtención de los términos *k*-ésimos de la sucesión, justifica dicha conjetura con los casos particulares presentados y con esto, llegan a la generalización. De esta forma, el razonamiento inductivo manifestado por los profesores es:

Trabajo con casos particulares → Organización de casos particulares → Identificación del patrón → Formulación de conjeturas → Justificación de conjeturas → Generalización

Trabajo y organización de casos particulares

El trabajo con casos particulares que evidencia este grupo de profesores, se basa en el conteo de las representaciones cuadradas de la figura que se encuentran en cada término, y de este modo, organizaron la secuencia para que el comportamiento de sus términos fuera creciente. En la Ilustración 37 se muestra la correspondencia de los términos *k*-ésimos encontrados por el profesor 1 y su respectiva posición.

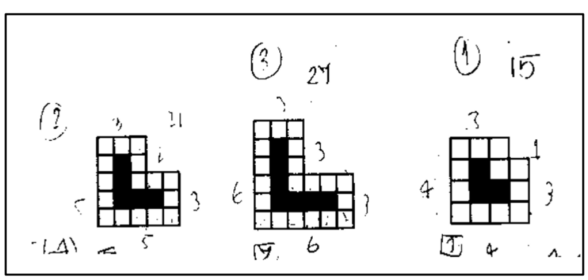


Ilustración 37. Trabajo con casos particulares evidenciado por P1 en la tarea 2

Identificación del patrón

La identificación del patrón realizada por estos profesores se basa en la explicación de la regularidad, en la que evidencia lo que varía y lo que permanece constante en la sucesión pictórica. Lo que permanece constante para estos profesores es el ancho superior de la figura (3 columnas) y el largo inferior derecho (3 filas). Lo que varía es el largo de la columna izquierda y el ancho inferior de las filas, también, los profesores manifiestan que varía la cantidad de cuadrados que están sombreados. Un ejemplo de lo que explicaron los profesores de la variación de la figura se presenta en la Ilustración 38.

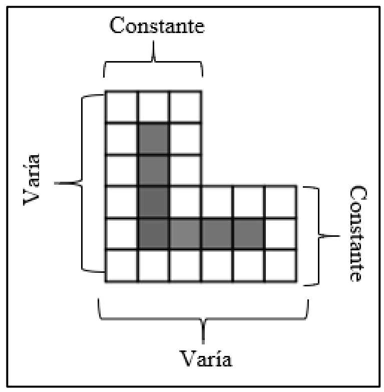


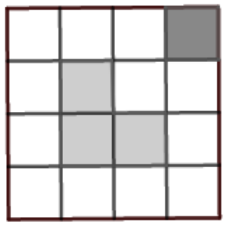
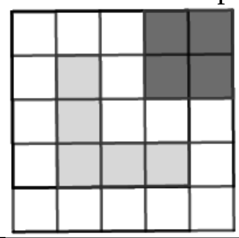
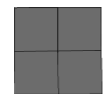
Ilustración 38. Comportamiento de las figuras en la tarea 2.

Formulación de conjeturas

La conjetura formulada por estos profesores se basa en la construcción de una expresión algebraica que modele la sucesión pictórica presentada en esta tarea. El profesor inicia mencionando que n representa el número de la figura, después plantea la expresión algebraica de acuerdo con las dimensiones de la figura, es decir, que si los cuadrados se completan, se logra visualizar la representación de un cuadrado con varios cuadrados dentro de él, y de acuerdo con la cantidad de cuadrados que se encuentran en el largo y ancho de este, se obtiene el área de la figura total, y los profesores lo representaron como $(n+3)^2$. Sin embargo, la representación algebraica mencionada se hizo completando el cuadrado, por esa razón, se le debe restar la parte que le hace falta para tener la figura representada inicialmente, que tiene un área de n^2. La expresión algebraica completa es $(n+3)^2 - (n)^2$.

Lo anterior se puede evidenciar en la siguiente tabla

Tabla 12. Ejemplo de la formulación de conjeturas de la tarea 2.

Descomposiciones	Etapa 1		Etapa 2	
				
Área de los cuadrados	4×4	1×1	5×5	2×2
Conjetura por figura	$(n+3)^2$	n^2	$(n+3)^2$	n^2
Conjetura total	$(n+3)^2 - n^2$			

Justificación de conjeturas

En este paso, los profesores verifican la validez de su conjetura reemplazando los dos primeros casos particulares en la expresión algebraica y obtiene los términos *k*-ésimo de la etapa 1 y 2, como se ve en la Ilustración 39.

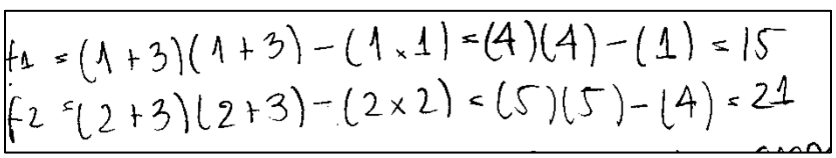


Ilustración 39. Justificación de la conjetura evidenciada por P1 en la tarea 2

Generalización

Se reconoce que los profesores han generalizado porque verifican la validez de la conjetura en el paso anterior, para casos particulares. La generalización que realizaron los profesores es $(n+3)^2 - n^2$, en la que se relacionó la correspondencia entre la posición de la figura y la cantidad de cuadrados que hay en ella.

Por otro lado, en términos de la validación, el profesor 8 dejó indicado cómo sería la demostración formal por medio del método de inducción matemática, como se muestra en la Ilustración 40, sin embargo, no continuó con su proceso por la falta de recursos en este aspecto. Por otro lado, los demás profesores no reconocen ni dan indicios de una validación formal de la generalización realizada en esta tarea.

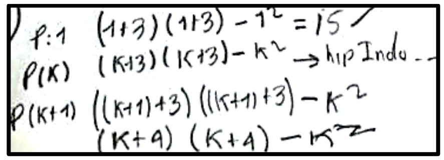
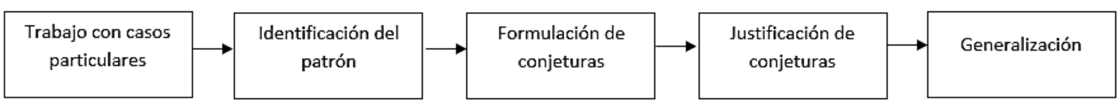


Ilustración 40. Esbozo de la demostración por P8

Profesor 3 (P3), Profesor 4 (P4) y Profesor 5 (P5):

Este grupo de profesores inicia su proceso inductivo trabajando con casos particulares, realizando el conteo de las representaciones de los cuadrados de cada figura, para identificar un patrón y después formular una conjetura que valide los términos *k*-ésimos presentados. Finalmente, justifican su conjetura por medio del trabajo con nuevos casos particulares, lo cual evidencia la validez de la generalización. De esta forma, el razonamiento inductivo manifestado por los profesores es:



Trabajo con casos particulares

El trabajo con casos particulares estos profesores se basan en el conteo de cada uno de las representaciones cuadradas que se encuentran en cada figura, lo cual le permite obtener el término *k*-ésimo de la sucesión para las tres primeras posiciones. Un ejemplo del trabajo con casos particulares que realiza el profesor se evidencia en la Ilustración 41.

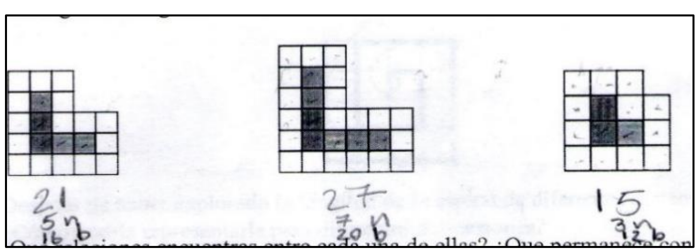


Ilustración 41. Trabajo con casos particulares evidenciado por P3 en la tarea 2

Identificación del Patrón

Al establecer los términos k-ésimos de la secuencia numérica, los profesores determinan las diferencias entre ellos. Reconocen la primera diferencia como constante, asociando este tipo de comportamiento a una fórmula lineal o de primer orden. De este modo, este grupo de profesores identifican el patrón de recurrencia, como se muestra en la Ilustración 42.

También, el profesor 3 identifica una regularidad que se relaciona con los términos figurales, y la expresa como

P3: *"…los cuadrados negros son impares en cada figura… los cuadrados blancos son pares…"*

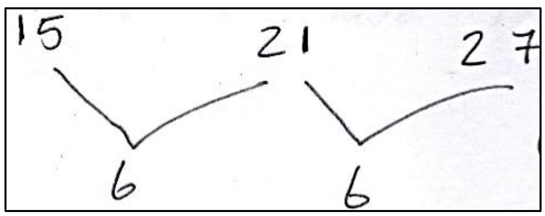


Ilustración 42. Identificación del patrón evidenciada por P3 en la tarea 2.

Formulación de conjetura

La conjetura que formularon los profesores centra la atención en la identificación del patrón de la forma $(6n + 9)$, debido a que comprende la relación lineal de los términos numéricos a partir de la relación de cada una de las representaciones figúrales y su respectiva cantidad numérica.

Por otro lado, el profesor 5 formula su conjetura de otra forma, y esta es utilizando el concepto de progresión aritmética y que su fórmula es $a_n = a_0 + d(n - 1)$. Este profesor reemplazó en la fórmula $d = 6$ que obtuvo en las diferencias sucesivas y $a_o = 15$, que es el primer término de la sucesión, y encontró la expresión algebraica que le permite encontrar la cantidad de cuadrados que necesita en una posición n. Al realizar esta serie de pasos, P5 obtuvo la expresión algebraica $(6n + 9)$.

Justificación de conjeturas

Los profesores justifican su conjetura reemplazándola en los primeros términos de la sucesión y proceden a validar la expresión en la quinta posición. Esto les permitió saber la cantidad de representaciones cuadradas necesita en las primeras posiciones. Un ejemplo de la justificación de conjeturas que realiza el profesor 3 basándose en un término nuevo de la sucesión, se muestra en la Ilustración 43.

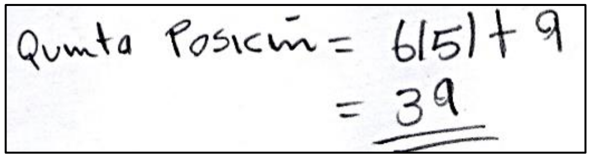


Ilustración 43. Justificación de las conjeturas evidenciada por P3 en la tarea 2

Generalización

Los profesores verificaron la veracidad de su conjetura en el paso anterior. La generalización encontrada de la forma $6n + 9$, permite encontrar la cantidad de cuadrados que se encuentren en la *n*-ésima posición.

Se pudo evidenciar que este grupo de profesores de que a pesar de que uno formuló una conjetura distinta, pudieron llegar a la misma generalización. También se vio que ningún profesor intentó demostrar de manera formal que la generalización es verdadera. Sin embargo, el profesor 3, responde que se debe demostrar $(6n + 9)$ con propiedades algebraicas cuando se le pregunta sobre la validez de la expresión general hallada.

Profesor 6 (P6), Profesor 11 (P11), Profesor 13 (P13) y Profesor 19 (P19):

Este grupo de profesores identifican un patrón por medio del sistema de representación verbal, esto es, describiendo los comportamientos de los términos de la sucesión gráfica. De esta forma, el razonamiento inductivo que manifestó por estos profesores en esta tarea es:

$\boxed{\text{Identificación de un patrón}}$

Identificación del patrón

Estos profesores describen las regularidades presentes en cada una de las representaciones figurales por medio de la relación que encuentran entre los cuadros oscuros y claros, así como lo expresó el profesor 6 en su producción:

> *P6: "La relación que existe entre las figuras es que por cada fila que se agregue en la parte superior se rellena un cuadrado…por cada columna que se agrega en la parte frontal inferior, también se rellena un cuadrado central de la fila o columna anterior a las puestas inmediatamente…"*

En la entrevista se les preguntó a los profesores el por qué no continuaron con la tarea y manifestaron que no sabían cómo representar de manera algebraica ese comportamiento visual que encontraron en la figura, es decir, no sabían cómo expresar el patrón identificado en términos de la variación e invariancia del total cuadrados negros y grises.

Se puede decir que la dificultad que tuvieron estos profesores al intentar representar algebraicamente el patrón encontrado se asocia a la no utilización de los casos particulares por medio del conteo, esto es, que los profesores contaran los cuadrados de cada figura y encontraran los términos *k*-ésimos para después representar la sucesión de manera numérica, y en ese caso se hubiera facilitado más encontrar la generalización como consecuencia de la conversión de lo numérico a lo algebraico.

Profesor 7 (P7)

El profesor 7 trabajó con casos particulares realizando una descomposición figural, en el que considera la diferencia de representaciones cuadradas entre cada uno de los términos figurales. El esquema de razonamiento inductivo evidenciado por P7 al resolver la tarea es:

Trabajo con casos particulares

Trabajo con casos particulares

El profesor 7 trabajó con casos particulares estableciendo la posición de las figuras. Este profesor no organizó las figuras de acuerdo con un comportamiento de los términos de manera ascendente, sino que los dejó como los investigadores lo propusieron. En la siguiente Ilustración se evidencia como los primeros tres términos *k*-ésimos que contempla el profesor están en el mismo orden planteado en el enunciado de la tarea, de tal manera que los términos 1, 2 y 3 son 21, 27 y 15 respectivamente. Sin embargo, este profesor identificó que la figura 1 la podía representar como $21 - 6$ y la figura 3 como $21 + 6$.

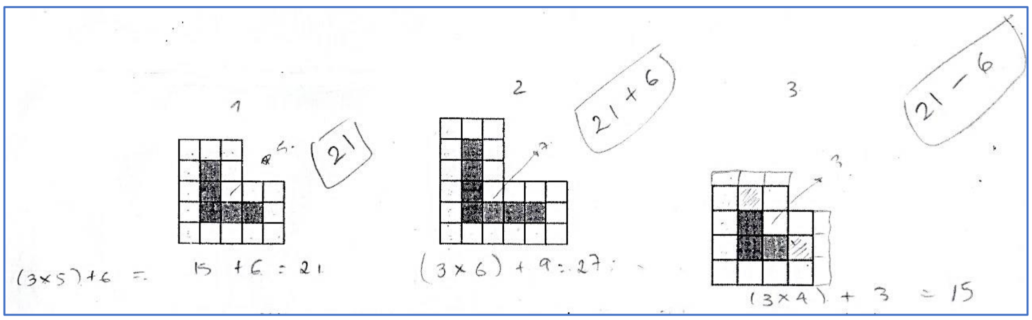


Ilustración 44. Trabajo con casos particulares evidenciado por P7 en la tarea 2.

Se pudo evidenciar que este profesor no continuó la tarea y no pudo identificar el patrón de acuerdo con lo que realizó en el trabajo con casos particulares. El profesor manifestó que no terminó la tarea por dificultades al no encontrar una regularidad en la relación numérica a simple vista de los términos que identificó en cada figura. Esta dificultad estuvo asociada a la no organización de las posiciones, pues la intención de los investigadores al entregar las figuras en desorden era que ellos identificaran la posición y los términos *k*-ésimos de ellas, y que evidenciaran el trabajo y organización de casos particulares.

La forma de trabajar con estos casos particulares por este profesor se contempló por los investigadores, sin embargo, esta forma de resolución no permitía identificar ningún comportamiento en la sucesión pictórica y numérica. Por ende, no posibilitaba la formulación y justificación de conjeturas, generalización y la demostración.

Profesor 12 (P12), Profesor 15 (P15), Profesor 17 (P17) y Profesor 20 (P20):

El proceso inductivo de este grupo de profesores inicia en la identificación del patrón por medio de la variación encontrada en la sucesión pictórica. De ese modo, los profesores formulan una conjetura que justifican para los términos k-ésimos 1 y 2. De esta forma, el razonamiento inductivo manifestado por los profesores es:

Identificación de un patrón

La identificación del patrón de estos profesores consistió en explicar lo que permanece constante en la secuencia y lo que varía. Según lo mencionado por ellos, lo que permanece constante en la sucesión es el ancho superior de la figura y el largo inferior derecho. También manifestaron que hay una variación en el aumento de cuadros y de la figura sombreada en los términos k-ésimos de la sucesión pictórica presentada. También identificaron que la secuencia de la cantidad de los cuadrados sombreados de la figura, tenía un comportamiento asociado a números impares consecutivos.

Formulación de conjeturas

La formulación de la conjetura de los profesores se basó en construir una expresión algebraica que modelara el número de cuadrados oscuros de las figuras y la representaron de manera distinta. El profesor 18 como $2^n + 1$. El profesor 15 como $2n - 1$. El profesor 12 y 17 como $2n + 1$. Esto fue porque encontraron que el comportamiento de los términos de la sucesión numérica alterna planteada por ellos (a cada figura se le asoció el número correspondiente a la cantidad de cuadros oscuros), estaba relacionada con impares.

Se pudo evidenciar que estos profesores no tuvieron en cuenta la figura completa de la sucesión, sino que tomaron la parte sombreada de ella. Una razón por la que los profesores no tomaron toda la figura podría ser que no encontraron de manera visual ninguna regularidad o un patrón que pudiera indicar el comportamiento de la sucesión. Otra razón, pudo ser que se les dificultó expresar de manera algebraica las variaciones que tiene la figura en unos lados y los lados que permanecen constantes.

Justificación de la conjetura

El profesor 18 justifica su conjetura al evaluar la expresión algebraica en los primeros dos términos de la sucesión, obteniendo la cantidad de representaciones cuadradas oscuras que se encuentran en las figuras. Sin embargo, este profesor no verifica su conjetura para el caso particular 3, y en ese caso, la conjetura que planteó no se cumple. Lo anterior se ve reflejado en la ilustración 45.

$2^1 + 1 = 3$ (Última figura)
$2^2 + 1 = 5$ (Primera figura)

Ilustración 45. Justificación de la conjetura evidenciada por P18 en la tarea 2.

El profesor 15 justificó su conjetura con el primer caso particular, sin embargo, el resultado de reemplazar la posición de la figura en la conjetura formulada, no correspondía a la cantidad de cuadrados oscuros que estaban en cada figura, es decir, como la cantidad de cuadrados oscuros es impar, entonces lo asocia con la regla de formación de los números impares, sin caer en cuenta que según la secuencia original (la pictórica), el primer número asociado a la cantidad de cuadrados oscuros no es 1, sino 3.

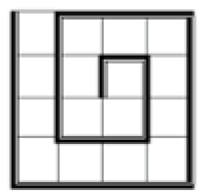
Este paso del razonamiento inductivo en estos profesores, evidenció que estos realizaron la conjetura, pero la justificaron sin sentido, pues los profesores no se preocuparon por verificar que les haya quedado bien, sino que solo querían obtener un resultado. Se pudo notar que los profesores en este punto no caen en cuenta del error en su justificación de conjeturas, que en últimas, afecta la formulación de la conjetura planteada.

Para realizar un balance general de esta tarea, se pudo evidenciar que algunos profesores formularon su conjetura basada en la parte sombreada de la figura, y no tuvieron en cuenta la figura completa para modelar el comportamiento total de los cuadrados de la sucesión pictórica. Esta forma de resolución de la tarea se presupuestaba, sin embargo, se esperaba que los profesores encontraran una regularidad en la figura completa y no en una parte de ella, y por esta razón, se pudo notar una dificultad, pues cuando se les realizó la entrevista para indagar sobre su razonamiento en esta parte, manifestaron que fue el comportamiento que hallaron a simple vista, pues no encontraron otra regularidad en la figura completa, lo que les conllevó a identificar un patrón y formular una conjetura para esta parte de la figura que hace parte de la sucesión.

3.2.1.3. Tarea 3.

El enunciado de esta tarea es:

En la imagen de abajo se presenta la forma de la espiral en el cuadrado de 4×4. Explore el problema de la longitud de la espiral en los cuadrados de diferentes dimensiones.



En esta tarea se planteó a los estudiantes como problema matemático que preveía el uso de razonamiento inductivo para llegar a la generalización. Fue resuelta por diecisiete profesores en formación profesional inicial.

Las producciones y las encuestas realizadas muestran que a la mayoría de personas se le dificultó esta tarea, pues en el transcurso de la prueba algunos profesores manifestaron que no sabían que debían hacer, por lo que los investigadores explicaron el enunciado y la intención de la tarea, ya con esto, los profesores encontraron elementos para iniciar el desarrollo de la tarea. La dificultad radicaba en que no había términos *k*-ésimos explícitos dados en el enunciado de la tarea.

Los resultados muestran que aquellos profesores que interpretaron y entendieron la explicación de los elementos que se debían tener en cuenta para resolver o responder la tarea por parte de los investigadores, extendieron la situación a otros casos con espirales de diferentes dimensiones. Mientras que los profesores que no manifestaron la dificultad que presentaron al resolver esta tarea, centraron su atención en hallar la longitud de la espiral del caso particular presentado, o no realizaron la tarea.

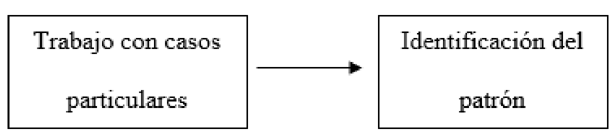
La expresión algebraica prevista para que los profesores generalizaran es $n^2 + 2n$, la cual representa la longitud de la espiral para cuadrados de dimensiones $n \times n$. De manera general, se muestra en la Tabla 13 el razonamiento inductivo evidenciado por los profesores.

Tabla 13. Pasos del razonamiento inductivo evidenciado por los profesores en la tarea 3

Pasos del razonamiento inductivo	**TCP**	**OCP**	**IP**	**FC**	**JC**	**G**	**D**
% de profesores	45%	10%	10%	35%	20%	20%	0%

Profesor 1 (P1)

El razonamiento inductivo puesto de manifiesto por el profesor 1, inicia con el trabajo con casos particulares basado en la construcción del cuadrado de diferentes dimensiones como $2 \times 2, 3 \times 3\ y\ 5 \times 5$. Después logró observar un patrón encontrado en el cambio de la figura. De esta forma, el razonamiento inductivo manifestado por el profesor es:



Trabajo con casos particulares

El profesor se involucra en la tarea descubriendo los casos que se presentan en la actividad, construyendo la espiral en cuadrados de diferentes dimensiones, como: $3 \times 3, 5 \times 5\ y\ 6 \times 6$, los cuales vienen siendo figuras auxiliares para la construcción de las respectivas espirales cuyas longitudes, en últimas, representarían los términos de la sucesión.

Además, el mismo orden que plantean para los cuadrados $n \times n$, se asocia con la posición de los términos de la sucesión.

Sin embargo, P1 manifestó que no sabía cómo medir o calcular la longitud de la espiral, por esta razón no encontró los términos k-ésimos, de acuerdo con la dimensión del cuadrado que correspondiera.

Identificación del patrón

Al identificar la cantidad de términos que le corresponde a la sucesión, P1 halla un patrón pictórico o un patrón de dibujo espacial, el cual es una secuencia de imágenes que presentan el cambio de un término al siguiente de manera predecible. La manera de hallar este patrón fue por medio de la construcción, pues este profesor comenzó dibujando la espiral desde el centro hacia afuera, y de este modo, encontró que de acuerdo con el termino par o impar de la dimensión del cuadrado, podía terminar la espiral arriba o abajo.

De este modo, el patrón pictórico hallado por este profesor fue que para la dimensión par de cuadrados $(2 \times 2, 4 \times 4, 6 \times 6, ...)$la espiral termina hacia arriba y la dimensión impar de cuadrados $(3 \times 3, 5 \times 5, ...)$ la espiral termina abajo, así como se muestra en la producción del profesor en la Ilustración 46.

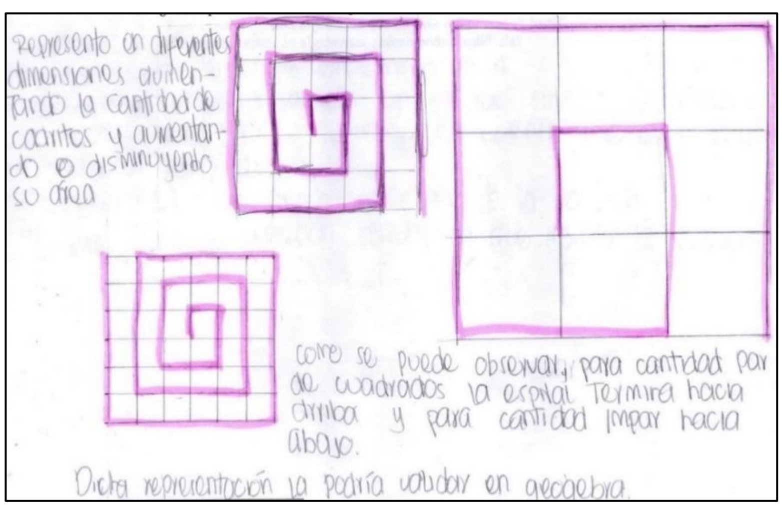


Ilustración 46. Identificación del patrón por P1 en la tarea 3

Al profesor 1 se le realizaron algunas preguntas sobre la construcción de la espiral y la resolución de esta tarea, y manifestó que tuvo dificultades al momento de entender y posteriormente, a la hora de realizar lo pedido por los investigadores, se enfocó en hacer las representaciones y no realizar ningún cálculo para determinar la longitud de las espirales.

Profesor 3 (P3):

Este profesor pensó la forma de calcular la longitud de la espiral por medio del área de cada cuadro que conformaba la dimensión 4×4 representada en la tarea, es decir, que cada vez que daba la vuelta la espiral formaba un cuadrado, así como lo manifiesta en el siguiente fragmento:

> P3: "*Cada uno de los cuadrados daba una representación de la longitud, por lo que la pregunta dice que en el cuadrado de dimensiones, y porque al dar la vuelta a la espiral, generará un nuevo cuadrado, entonces una nueva área*".

Por esta razón, el profesor representó la longitud de cada uno de esos cuadros por medio del área, es decir que, para él la longitud de la espiral sería la sumatoria de las áreas de todos los cuadrados.

En la segunda pregunta P3 debía validar la representación dada, manifestó que tal representación se hacía realizando la operación, es decir, colocándole los datos al área y se encontraba la longitud.

Finalmente, se puede concluir que el Profesor 3 no evidenció ningún nivel de razonamiento inductivo, debido que aplicaría una fórmula para encontrar la longitud de la espiral y no la construyó. Esto quiere decir, que no manifestó razonamiento inductivo en esta tarea. En Ilustración 47 se evidencia lo anterior.

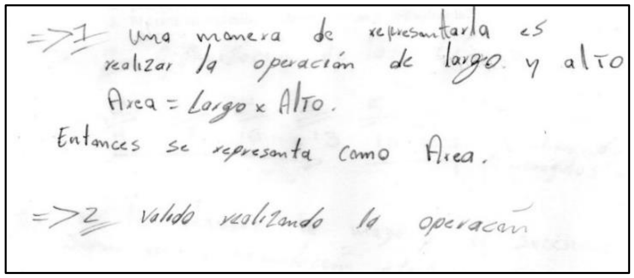

=>1 Una manera de representarla es realizar la operación de largo y alto
Area = Largo x Alto.
Entonces se representa como Area.
=>2 Valido realizando la operación

Ilustración 47. Respuesta de la tarea 3 por P3.

Profesor 4 (P4), Profesor 18 (P18), Profesor 20 (P20):

El proceso de razonamiento inductivo manifestado por este grupo de profesores evidencia que, a partir de la descomposición de la figura, encuentran un patrón para hallar el número de cuadros de la longitud de la espiral del cuadrado 4×4. Después generalizan algebraicamente a partir del patrón encontrado. Sin embargo, no se evidencia un trabajo con casos particulares, debido a que solo trabajan con el término asociado al cuadrado de dimensión 4×4 de la tarea presentada. Una vez, que establecen la longitud de las espirales, contemplan una secuencia numérica cuyos términos son las medidas de esas longitudes. De esta forma, el razonamiento inductivo manifestado por los profesores es:

Formulación y justificación de conjeturas

La conjetura que evidenciaron estos profesores en el momento de justificar el procedimiento realizado, se relacionó mucho con el procedimiento realizado por el profesor 3, dado que el cuadrado de dimensión $4{\times}4$ mostrado en la tarea, lo descompusieron y hallaron el área de cada uno, de la siguiente manera:

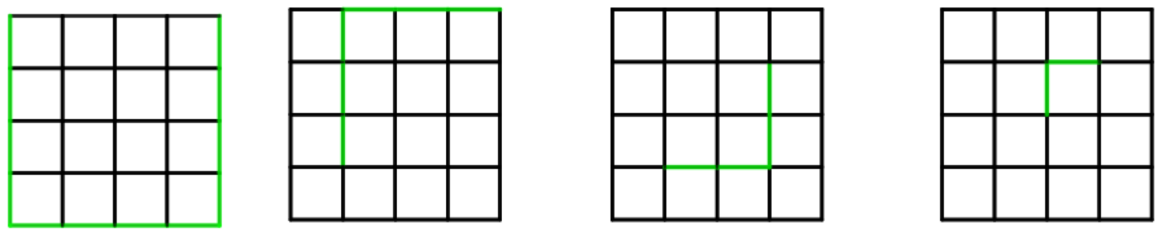


Ilustración 48. Resolución de la tarea 3 por P4.

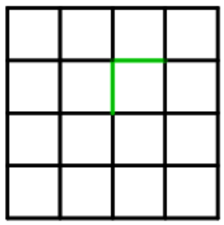
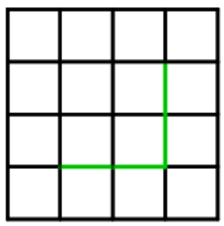
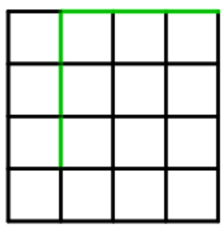
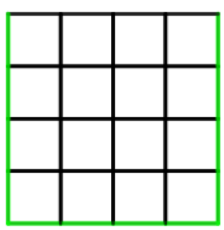
Es decir que la espiral le dio forma a cada uno de los cuadrados y los descompuso para tomar los cuadrados individualmente. Entonces estos profesores mencionaron que se tomó el cuadrado 4×4, 3×3, 2×2 y 1×1 y empezaron a hallar la cantidad de cuadrados por medio de la siguiente fórmula. Esta es, la fórmula de área. Tal como se observa, estos profesores intentaron hallar los términos *k*-ésimos a partir de la misma espiral, midiendo partes de ella.

Generalización

En la entrevista realizada a estos profesores, mencionaron que no pensaron en representar la longitud de la espiral, sino más bien la cantidad de cuadros, pues lo mencionan explícitamente cuando el profesor dice en la entrevista:

> P14: "*la longitud de la espiral daba el número de cuadritos, (…) al tomarlos todos, daría el área total de los cuadrados*"

Tabla 14. Procedimiento de P4 al generalizar la tarea 3

Longitud de la espiral	Dimensión	Área
	1×1	$1^2 = 1$
	2×2	$2^2 = 4$
	3×3	$3^2 = 9$
	4×4	$4^2 = 16$
Dimensión n	$n \times n$	n^2

Después, estos profesores comprobaron su conjetura reemplazándola por el caso particular 3, en el que el resultado le dio la cantidad de cuadrados que correspondían al término. A continuación, en la Ilustración 49 se muestra lo trabajado en esta tarea por P4.

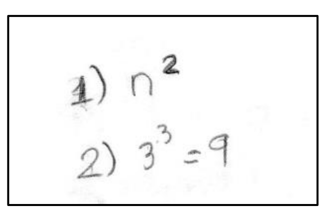


Ilustración 49. Generalización de P4 en la tarea 3

Por lo observado en este grupo de profesores, se puede decir que estos no entendieron la actividad o más bien, desviaron su interpretación hasta basarse en encontrar el número de cuadrados que hay en la dimensión total del cuadrado en la que se encuentra la longitud, olvidándose de hallar la longitud de la espiral para cuadrados de diferentes dimensiones.

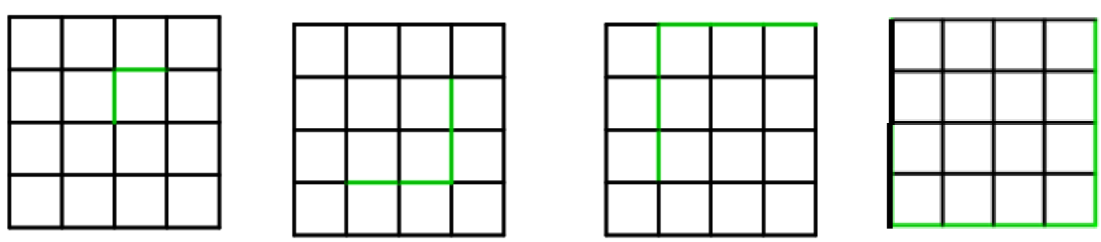
Profesor 5 (P5):

El razonamiento inductivo puesto de manifiesto por el profesor 5 fue el de la formulación de conjeturas a partir de la longitud de la espiral mostrada en la dimensión del cuadrado 4×4, es decir que no trabajó con casos particulares. De esta forma, el razonamiento inductivo manifestado por el profesor es:

Formulación de la conjetura

Formulación de la conjetura

La formulación de la conjetura de este profesor consistió en determinar la cantidad de unidades que le correspondían a la longitud de la espiral 4×4, así:



$1+1$ $2+2$ $3+3$ $4+4$

De este modo, P5 realizó la sumatoria de la longitud de la espiral para el cuadrado 4x4, pensando que se podría continuar para n casos de la misma manera, siendo la generalización $2n$, como se muestra en la Ilustración 50.

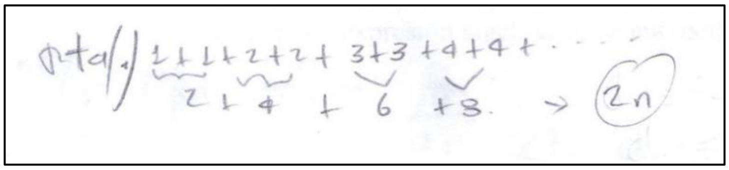


Ilustración 50. Conjetura formulada por P5 en la tarea 3

En la entrevista realizada a este profesor, manifestó que no sabía cómo hacer la tarea, e interpreto que debía hallar la longitud de la espiral presentada y los cuadrados de diferentes dimensiones eran los que contenía la espiral. De este modo, se pudo dar cuenta que él no entendió dicha tarea.

Profesor 6 (P6) y Profesor 9 (P9):

El razonamiento inductivo evidenciado por estos profesores, inicia con el trabajo con casos particulares basado en la representación de los cuadrados de diferentes dimensiones y en el conteo de la longitud de la espiral. Después organizan los casos particulares encontrados y determinan las primeras diferencias entre los términos k-ésimos de la sucesión. Sin embargo, estos profesores manifiestan que no es posible encontrar una expresión para encontrar la longitud. De esta forma, el razonamiento inductivo manifestado por los profesores es:

Trabajo con casos particulares → Organización de casos particulares

Trabajo con casos particulares

El trabajo con casos particulares de estos profesores se basó en la construcción de la espiral en cuadrados de diferentes dimensiones de 3×3, 2×2, 5×5 y 6×6. También hallaron la longitud de la espiral para cada caso, haciendo el conteo por medio de la asignación de una unidad a cada cuadrado por el que pasaba la espiral, para luego encontrar la regularidad entre la dimensión del cuadrado y la longitud de esta espiral.

Organización de casos particulares

La organización de casos particulares que realizaron estos profesores fue de forma secuencial, pues al final organizaron la sucesión de la longitud de la espiral en un sistema de representación numérico $(3, 8, 15, 24, 48)$ con los términos que correspondían a la dimensión de los cuadrados $2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4, 5 \times 5$ y 6×6 , respectivamente. En la siguiente Ilustración se presenta la respuesta a esta Tarea por P9

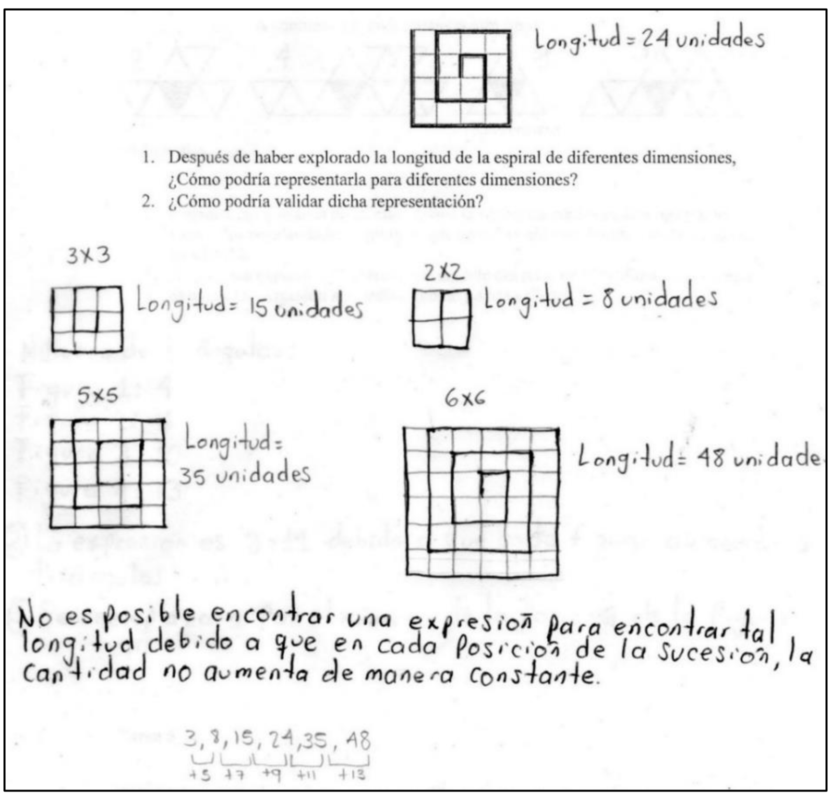


Ilustración 51. Respuesta de la tarea 3 por P9

Después, estos profesores comprobaron que la longitud de la espiral no aumentaba constantemente, sino que su diferencia seguía aumentando. Así, el profesor 9 manifestó en la entrevista que

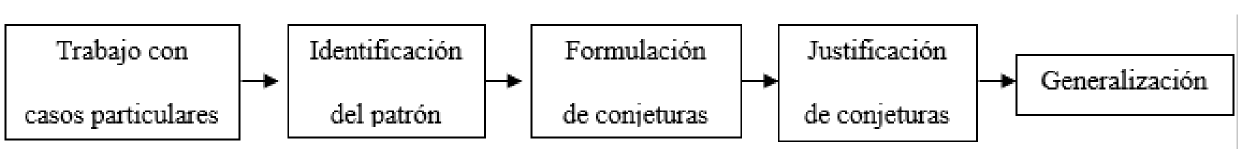
> P9: "*La sucesión cada vez aumentaba y no había una proporción. Yo sé que se puede hallar, pero no recuerdo cómo*"

por esta razón, no llegó a la generalización.

Por otro lado, el profesor 6 no continuó con el proceso de resolución ni de organización de casos por medio de una tabla o de una gráfica, pues en la entrevista manifestó que no encontraba la relación entre los números que conformaban la longitud de la espiral. Es decir que la longitud de la espiral (la sucesión) no era constante y no se acordaba de cómo hallar la generalización.

Profesor 7 (P7)

El razonamiento inductivo evidenciado por el profesor 7, comienza con el trabajo con casos particulares basado en la construcción de la espiral en cuadrados de diferentes dimensiones y encontrando su longitud. Luego, identifica el patrón hallando una regularidad, formula la conjetura y finalmente, la generalización. De esta forma, el razonamiento inductivo manifestado por los profesores es:



Trabajo con casos particulares

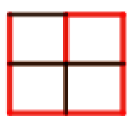
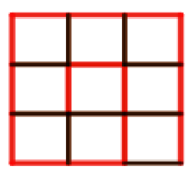
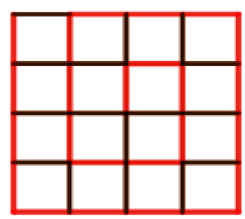
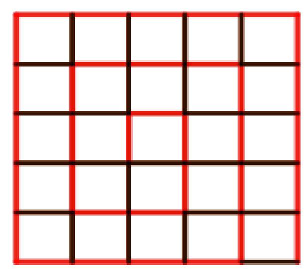
El trabajo con casos particulares del profesor se evidencia cuando hace las construcciones de los cuadrados de diferentes dimensiones y dibuja sobre ella la espiral.

Además, el profesor hace la correspondencia de los términos k-ésimos de la sucesión $(2 \times 2, 3 \times 3, 5 \times 5)$ y sus respectivos valores (longitud de la espiral).

Identificación del patrón

El profesor identificó el patrón cuando relacionaba el comportamiento de los términos con las etapas, esto se vio, cuando estableció como variable el largo de los cuadrados, para luego establecer la expresión algebraica con la que se representa el comportamiento de la longitud de la espiral. Así, pudo determinar que cada figura tenía como factor el n que corresponde al número de término o dimensión de los cuadrados, como se muestra en la Tabla 15:

Tabla 15. Resolución de la tarea 3 por P7

Representación pictorica de la espiral				
Términos	2	3	4	5
Dimensión del cuadrado	2×2	3×3	4×4	5×5
Longitud de la espiral	$L = 8$	$L = 15$	$L = 24$	$L = 35$
Conjetura	$2\,(2 + 2)$	$3\,(3 + 2)$	$4\,(4 + 2)$	$5\,(5 + 2)$

Formulación y justificación de la conjetura

El profesor, al reconocer la sucesión de las longitudes de la espiral para las dimensiones de los cuadrados, encontró la variable y, por tanto, estableció como conjetura la expresión $n\ (n+2)$. Así lo expresó P7 en la entrevista y buscó un número que, multiplicado el término, le diera la longitud,

> *P7: "por ejemplo, para el término* 3*, o dimensión* 3×3*, multiplique el 3 por algo para que me diera 15. No coloque el 5 porque no coincidía con los otros términos, entonces empecé a buscar otra manera de representar el 5 para que fuera de una manera más general y así, me dio para los otros casos"*

De esta manera, el profesor justifica su conjetura planteada en los casos particulares construidos por él.

Generalización

El profesor estableció como generalización $n\ (n+2)$, en el que n es el término de la dimensión de los cuadrados y el resultado es la longitud de la espiral. Luego, verificó que la conjetura formulada, le resultaba la cantidad que correspondía a la longitud de la espiral de acuerdo con la dimensión de su cuadrado.

Profesor 8 (P8) y Profesor 10 (P10):

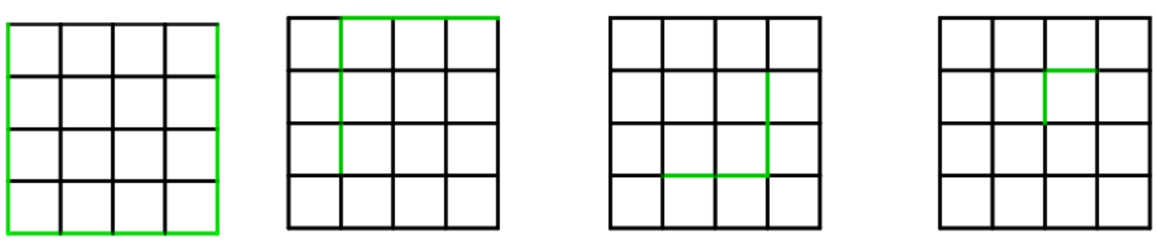
El razonamiento inductivo que evidenciaron estos profesores fue el de la formulación de conjeturas a partir del caso particular presentado. Sin embargo, en el proceso utilizado no se considera el paso de trabajo con casos particulares del modelo de Cañadas (2007), pues estos profesores no realizaron ningún tratamiento con otros términos k-ésimos de la sucesión que debía construir, sino que conjeturo a partir del caso particular presentado. Estos profesores también identificaron el comportamiento del patrón del caso particular dado en la tarea, pues reconocieron y representaron la espiral 4×4 por medio de una estructura de tipo aditiva y el resultado que obtuvieron es la longitud de la espiral; sin embargo, este patrón hallado tampoco se considera como un nivel de razonamiento inductivo del modelo teórico de Cañadas (2007), pues la detección de este patrón no se relaciona con los términos *k*-ésimos de la sucesión, sino que se relaciona con uno de ellos. De esta forma, el razonamiento inductivo manifestado por los profesores es:

Formulación de conjeturas

Formulación de conjeturas

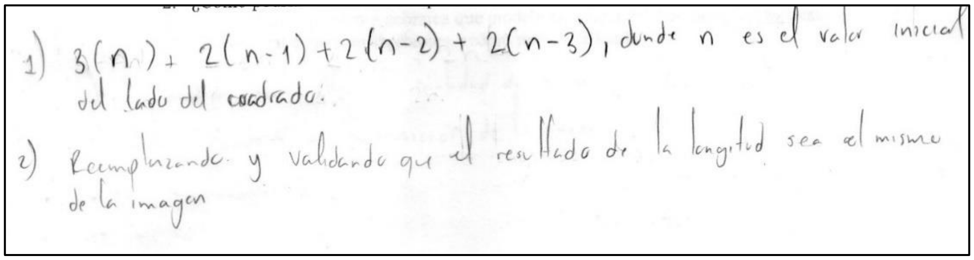
La respuesta de estos profesores se basó en el caso particular presentado en esta tarea, pues P8 evidenció en su respuesta la generalización o la expresión que la dimensión es 4 ×4, y P10, en la entrevista realizada explicó lo mismo. Ambos profesores establecieron primero la regla para el número *n* veces el caso y probaron su regla para el caso concreto, en el que el resultado sería la longitud de la espiral.

La primera regla que descubrieron y establecieron los profesores fue para en número n (en el caso presentado es el 4, del cuadrado de dimensión 4×4); después empezaron a construir la generalización por medio de la estructura de la espiral, así:



Tres veces *n* (ó 4)	Dos veces o el doble de $n-1$ (dos veces 3)	Dos veces o el doble de $n-2$ (dos veces 2)	Dos veces o el doble de $n-3$ (dos veces 1)
$3(n)$	$2(n-1)$	$2(n-2)$	$2(n-3)$

Esto para obtener $3(n) + 2(n-1) + 2(n-2) + 2(n-3)$ como formula general para el caso particular del cuadrado de dimensión 4 ×4, en el que $n = 4$, como se muestra en la Ilustración 52.


1) $3(n) + 2(n-1) + 2(n-2) + 2(n-3)$, donde n es el valor inicial del lado del cuadrado.

2) Reemplazando y validando que el resultado de la longitud sea el mismo de la imagen

Ilustración 52. Respuesta de la tarea 3 por P8

En la segunda pregunta se esperaba una validación de tipo formal para verificar la generalización realizada, sin embargo, estos dos profesores la tomaron como reemplazar el valor del caso particular y el resultado fue la longitud de la espiral en la dimensión tomada. En el caso del profesor 8, de manera implícita reemplazó el $n = 4$ en la fórmula y el resultado fue 24, que viene siendo la longitud de la espiral, tal y como lo escribe “Longitud de la espiral es 24 unidades”.

Se pudo evidenciar que estos profesores no entendieron el enunciado de la tarea, pues no construyeron los términos de la sucesión, sino que se basaron en el caso particular. Por otro lado, la conjetura que formularon estos profesores no se presupuestó en este estudio, pues el objetivo de esta tarea era que los mismos profesores construyeran la sucesión pictórica y no que encontraran un patrón o una conjetura para la longitud de la espiral representada.

Profesor 12 (P12), Profesor 13 (P13), Profesor 19 (P19), Profesor 17 (P17) y Profesor 16 (P16):

El razonamiento inductivo de este conjunto de profesores se basó en el trabajo con casos particulares por medio de la construcción de la longitud de la espiral en diferentes dimensiones de los cuadrados. Sin embargo, P12 manifestó en la entrevista que la manera de construir la espiral fue encontrando el centro de ella, y a partir de ahí encontraba la estructura. De esta forma, el razonamiento inductivo manifestado por los profesores es:

Trabajo con casos particulares

Trabajo con casos particulares

Los profesores trabajaron con casos particulares por medio de la construcción de la espiral en cuadrados de diferentes dimensiones, el cual fue su objetivo principal en esta tarea, pues intentó replicar el mismo diseño de la espiral mostrada en el ejemplo, empezando la espiral por el centro y terminando en la parte externa. Sin embargo, P12 no realizó la correspondencia con la posición de los términos 1, 2, 3, 4 y 5, ni de la sucesión construida que se relacionaba con la longitud de la espiral. Lo anterior se evidencia en la Ilustración 53.

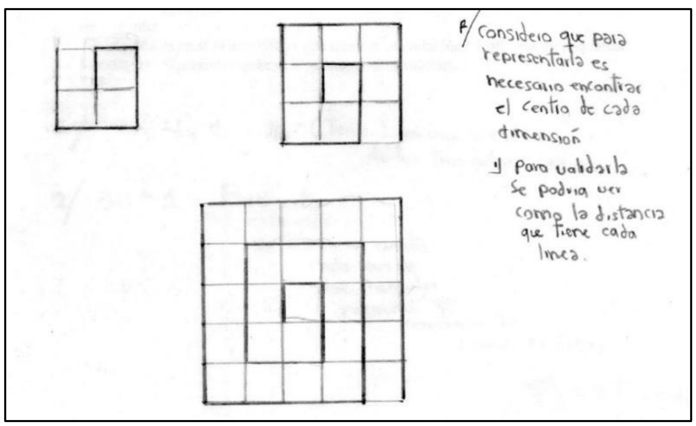


Ilustración 53. Respuesta de la tarea 3 por P12

En la entrevista realizada al profesor 12, manifestó que construyó la espiral de esa forma porque no se le ocurrieron otras y que, si hubiera pensado en otra forma, no se le hubiera hecho tan complicada la construcción y la tarea. Los otros profesores se limitaron a dibujar la espiral en diferentes dimensiones, pero tampoco relacionaron las dimensiones de los cuadrados con la longitud de la espiral, y esto no les permitió construir la sucesión esperada.

La solución dada a la tarea por estos profesores, se presentó porque dichos sujetos manifestaban que no entendieron muy bien lo que debían hacer con la longitud de la espiral o cómo medirla, por eso, solo optaron por hacer la representación pictórica y poner en la respuesta, que la forma de validación se podría ver en la distancia de cada línea, esto era, hallando la longitud. Por esta razón, los profesores no encontraron una forma para hallar una expresión algebraica que representará la longitud para n, pues no tenían ningún dato numérico y no sabían cómo encontrarlo.

Profesor 15 (P15):

En esta tarea, el profesor 15 no evidencia ningún paso del razonamiento inductivo, pues se evidencia en el proceso de resolución que P15 encuentra la longitud de la espiral en la dimensión del cuadrado 4×4, que es 24, e intenta hacer una regla de tres para encontrar la longitud de la espiral para la dimensión del cuadrado 3×3. Sin embargo, la regla de tres no se identifica con ningún paso ni proceso de razonamiento inductivo, debido a que se trata de un algoritmo que se puede aplicar de una forma directa a partir de unos datos establecidos (Kolar. V, Mastanak. A & Hodinik. T, 2012).

Además, aplicar la regla de tres, no funciona en esta tarea por dos razones. En primer lugar, 4×4 y 3×3 son los términos de la sucesión que se debía hallar, y esta no representan una cantidad y, por ende, no se puede operar. En segundo lugar, porque término a término la sucesión se comporta de forma cuadrática y con la regla de tres solo se pueden hallar los términos de una sucesión que se comportan de manera lineal y que no tienen una constante.

Lo anterior se evidencia en la producción escrita del profesor 15 en la siguiente ilustración:

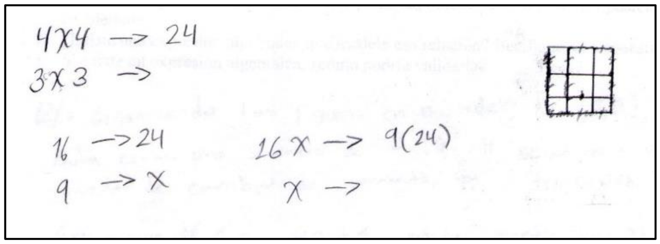


Ilustración 54. Respuesta de la tarea 3 por P15

De acuerdo con los resultados obtenidos en esta tarea, se pudo evidenciar que la mayoría de profesores tuvieron dificultades asociadas a la construcción de la longitud de la espiral en cuadrados de diferentes dimensiones, que se relaciona con la interpretación de los profesores, pues algunos profesores creyeron que los términos *k*-ésimos se derivaban de partes de la longitud de la espiral presentada y no que había que construir otras distintas dependiendo de la consideración de cuadrados de diferentes dimensiones. Lo mencionado anteriormente, conlleva a encontrar otra dificultad relacionada con la formulación de la conjetura y, por ende, con la generalización.

Es importante mencionar que a algunos profesores les costó construir una expresión algebraica a través de los términos de la sucesión numérica, pues manifestaron que al tener una diferencia sucesiva de primer orden y no obtenían un número constante, no era posible hallar dicha expresión. A estos profesores se les preguntó en la entrevista la razón de ese razonamiento, y manifestaron que no recordaban cómo encontrar una expresión algebraica que modelara los términos de una sucesión que tenían un comportamiento cuadrático, y esto no les permitió continuar con la tarea.

3.2.1.4. Balance general de los resultados

Para hacer un balance general de la primera categoría, se puede decir que en las tareas 1 y 2 gran parte de los profesores no presentan inconveniente en las interpretaciones de los enunciados y en la identificación de una regularidad, puesto que recurren a cada una de las representaciones pictóricas al poder encontrar nuevos casos particulares en los que se identifiquen la regularidad con la que avanza el patrón, esto es, teniendo en cuenta la disposición espacial, debido a que cuando aumenta cierta cantidad en la representación numérica, en la representación pictórica no se puede aumentar de cualquier manera, sino que debe ser de acuerdo con su comportamiento figural. Por otro lado, en relación con la tarea 3, se observan dificultades en la interpretación del enunciado lo que permitió que muy pocos profesores realizarán la actividad, esto pudo ser por el hecho de que la tarea 3 no presentaba de forma explícita los términos *k*-ésimos de la eventual sucesión.

También, se pudo notar que las estrategias utilizadas por los profesores al formular una conjetura y generalizar el comportamiento del patrón de estas sucesiones pictóricas, se limitaron a la descomposición de las figuras y al conteo de los términos *k*-ésimos de la sucesión y los profesores que intentaron utilizar las diferencias sucesivas como estrategia que posibilita llegar a la generalización por medio de los casos particulares, evidenciaron falta de conocimientos y/o procesos heurísticos para terminar el proceso, pues solo pudieron realizar las primeras y segundas diferencias de los términos y no pudieron establecer una generalización a partir de esa estrategia utilizada. En la entrevista realizada a los profesores, se indagó el porqué no pudieron llegar a la generalización; unos profesores manifestaron que no recordaban lo que debían hacer después para continuar con el procedimiento, y otros profesores dijeron que no encontraron una relación numérica que les permitiera identificar un patrón o formular una conjetura.

Se evidenció que los pasos del razonamiento inductivo que permitieron que los profesores llegaran a la generalización son: la identificación del patrón, la formulación de conjeturas y la justificación de conjeturas. La identificación del patrón se evidenció cuando el profesor manipulaba los casos particulares en la representación pictórica y encontraban una regularidad en la secuencia de las figuras; en la mayoría de los casos fue relacionando las figuras con la noción de área, y esto les daba elementos para formular una conjetura. Después, para establecer la conjetura formulada como una generalización, los profesores debían justificar las conjeturas o validarlas y los profesores que evidenciaron este paso, validaron sus conjeturas utilizando los casos particulares presentados e incluso, utilizaban casos lejanos.

Como se puede observar, en cada una de las tareas, los profesores usaron ciertos pasos de razonamiento y no necesariamente en el mismo orden para plantear la generalización. Así mismo, se evidencia cómo para validar lo que plantean en la generalización, no recurren al uso de métodos formales como la inducción matemática, por ejemplo (excepto un profesor que intentó hacerlo sin éxito alguno). La ausencia o uso del séptimo paso de razonamiento por parte de los profesores no incide de forma importante sobre la posible caracterización del razonamiento inductivo, solo deja ver la naturaleza inductiva o deductiva que privilegian cuando pretenden validar algo.

3.2.2. Categoría II: Sistemas de representación.

En esta categoría se muestran los sistemas de representación y las transformaciones que entre dichos sistemas de representación realizan los profesores con más frecuencia para resolver tareas que involucran sucesiones polinómicas. De este modo, se pudo analizar los sistemas de representación que más privilegiaron algunos profesores, presentando en la Tabla 16 la cantidad de profesores que realizan cada sistema de representación y las transformaciones de estos sistemas de representación por cada tarea propuesta.

Tabla 16. Porcentaje de profesores que realizaron los sistemas de representación y sus transformaciones.

Sistemas de representación y Transformación de sistemas de representación			
Criterio / Tarea	**Tarea 1**	**Tarea 2**	**Tarea 3**
Representación Numérica	35%	10%	10%
Representación Pictórica	55%	45%	40%
Representación Algebraica	55%	70%	25%
Representación Verbal	0%	5%	0%
Transformaciones de sistemas de representación de un mismo elemento	35%	10%	10%
Transformaciones de sistemas de representación de diferentes elementos	20%	25%	20%
Transformaciones entre formas de expresar un mismo elemento dentro de un mismo sistema de representación.	60%	50%	20%

3.2.2.1. Sistemas de representación

Representación Pictórica

Este tipo de representación la usan los profesores al construir nuevos términos figurales que se deben realizar para completar los términos de la sucesión. Un ejemplo claro de cómo se presenta este tipo de representación es en la Tarea 3, en la que los profesores deben construir los términos de manera pictórica para poder continuar con la actividad. De acuerdo con las tareas propuestas, este tipo de representación permite evidenciar el uso del trabajo con casos particulares y la identificación del patrón, pues a partir de este, se puede encontrar una regularidad en cada uno de los términos figurales. Esto se ve reflejado en la Ilustración 55, en la que se evidencia el uso de este tipo de representación pictórica por parte del profesor 6 en el momento que construye cuadrados de diferentes dimensiones y en ellos dibuja la espiral, lo que evidencia el trabajo con casos particulares.

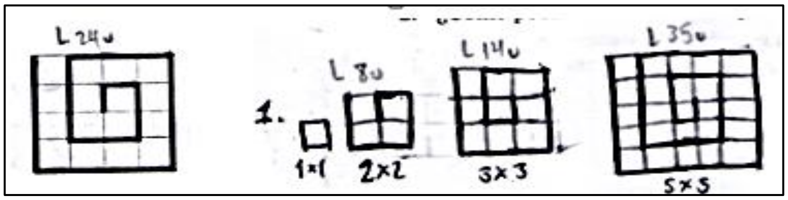


Ilustración 55. Representación pictórica realizada por P6 en la tarea 1.

Representación Numérica

La representación numérica se ve reflejada en los términos que los profesores construyen, esto es, realizando el conteo de las figuras que se presentan en cada término de la sucesión y representándolo de forma numérica. Este hecho, permite identificar un patrón de recurrencia, pues se establece una relación entre cada uno de los términos. Un ejemplo de este tipo de representación se muestra en la Ilustración 56, donde el profesor 3 representa de manera numérica la sucesión, y a partir de esta, identifica el comportamiento de la sucesión.

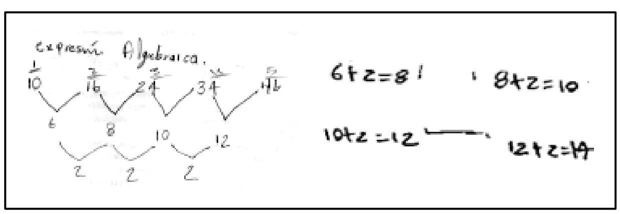


Ilustración 56. Representación numérica realizada por P3 en la tarea 1.

Cabe aclarar, que en las representaciones numéricas también se encontraron las representaciones tabulares, y el uso de esta representación le permitió que los profesores organizaran los términos de la sucesión, colocando en correspondencia la posición de cada término y la cantidad de elementos que se encuentran en cada uno de ellos. Esta representación también permitió que los profesores identificaran los términos que no se presentaban inicialmente en la sucesión.

Un ejemplo de este tipo de representación se muestra en la Ilustración 57, pues el profesor 3 organiza los términos de la sucesión en una representación tabular. Se pudo evidenciar que esto le permitió encontrar una regularidad asociada a un patrón de recurrencia, pues como se muestra en la ilustración, el profesor encuentra unas diferencias entre los terminos.

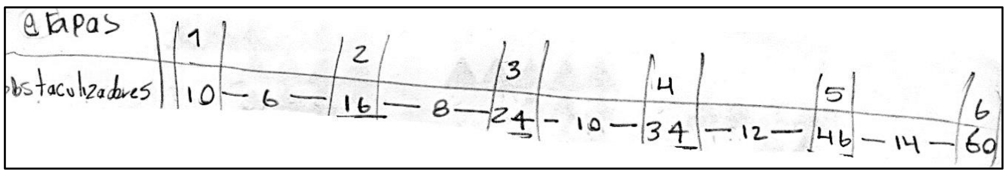


Ilustración 57. Representación numérica realizada por P3 en la tarea 1.

Representación algebraica y verbal

El sistema de representación verbal lo usó solo un profesor en la explicación de la conjetura que formuló, evidenciándose la escritura de la naturaleza de los términos *k*-ésimos de la sucesión que utilizó para la resolver la tarea. Se puede decir que los demás profesores no hicieron uso de este tipo de representación por las mismas dificultades en la generalización que se obtuvieron en la categoría I y porque no encontraron un comportamiento en la sucesión que explicitara el uso de la representación verbal.

El sistema de representación algebraico se evidencia cuando los profesores construyen una expresión algebraica que le permite encontrar el término *n*-ésimo de la sucesión.

Un ejemplo de este tipo de representaciones se muestra en la Ilustración 58, pues el profesor 15 hace una combinación de las dos. La representación verbal se explicita cuando el profesor se refiere que la expresión para el área de la figura sombreada es la de los números impares. La representación algebraica que este profesor construyó es $2n - 1$ que representa el área sombreada de la figura.

Es importante mencionar que este profesor realiza una correspondencia entre la representación verbal y la algebraica, como se muestra en la Ilustración 58.

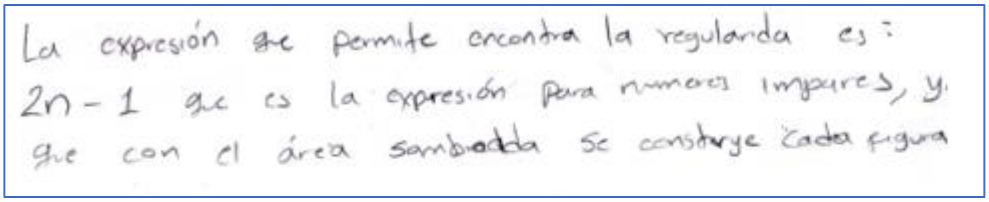

La expresión que permite encontrar la regularida es:
2n − 1 que es la expresión para numeros impares, y
que con el área sombreada se construye cada figura

Ilustración 58. Representación algebraica y verbal realizada por P15 en la tarea 3.

3.2.2.2. Transformaciones de sistemas de representación

Transformaciones entre sistemas de representación de un mismo elemento.

Este tipo de transformación evidenció la manera en que los profesores expresaban un mismo elemento en un sistema de representación distinto al que se encontraba inicialmente, esto es, realizando el conteo de la cantidad de objetos que hay en cada término y haciendo la correspondencia numéricamente, pues aquí realizaron la transformación de la sucesión pictórica a la sucesión numérica. Un ejemplo de lo anterior, se muestra en la Ilustración 59, pues P9 construyó las espirales en cuadrados de diferentes dimensiones y encontró la longitud de manera numérica de cada una de ellas.

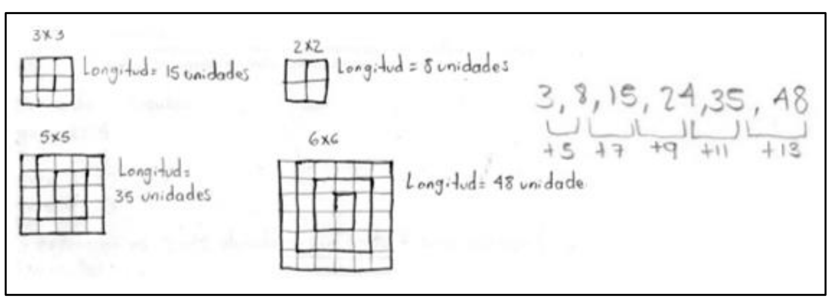


Ilustración 59. Transformación realizada por P9

Transformaciones entre sistemas de representación de diferentes elementos

En esta transformación se realizan unos cambios entre los términos generales y los términos *k*-ésimos, este se puede realizar de diferentes formas, sin embargo, los profesores analizados evidenciaron solo uno de estos, que es la transformación del sistema de representación gráfico o pictórico de los términos *k*-ésimos a la representación algebraica del término general. Este tipo de transformación como lo llama Cañadas (2007) se hace un cambio entre los términos de la sucesión pictórica a una sucesión numérica, es decir, transformó los términos *k*-ésimos representados de manera gráfica a los términos *k*-ésimos representados de manera numérica, y así llegar a la generalización que represente el término *n*-ésimo, por esta razón, se puede decir que los profesores que realizaron su generalización a partir de la sucesión o de los términos *k*-ésimos representados gráficamente como los tenían en la Tarea 1 y 2 y como los construyeron en la Tarea 3, realizaron la transformación entre sistemas de representación de diferentes elementos. Un ejemplo de esto se presenta en la ilustración 60.

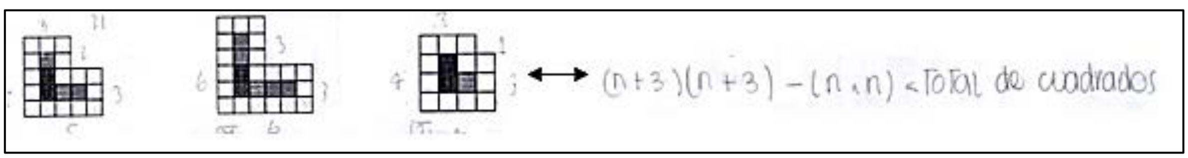


Ilustración 60. Transformación realizada por P1

Cabe aclarar que aquellos profesores que realizaron el cambio de la sucesión pictórica a la sucesión numérica y por último llegaron al término general de dicha sucesión, también se encuentran en este tipo de representación, pues su cambio también fue de los términos *k*-ésimos al término *n*-ésimo.

Este tipo de transformación posibilitó que los profesores llegaran a la formulación de conjeturas y a la generalización. Esta transformación también permite que se llegue a la demostración, pues las sucesiones presentadas en las tareas están en una representación pictórica, y para poder realizar una expresión algebraica que modele el comportamiento de ellas, era importante encontrar un patrón en el sistema de representación numérico, y esto se hace por medio de una transformación entre sistemas de representación de diferentes elementos, sin embargo, ningún profesor realizó la demostración.

Transformaciones entre formas de expresar un mismo elemento dentro de un mismo sistema de representación.

Se pudo evidenciar que en este tipo de transformación se presentaron dos formas de representar un mismo elemento dentro del mismo sistema de representación. La primera, en el sistema de representación algebraico, este se presentó en el momento que los profesores simplificaban el término general hallado y este término se transformaba en uno nuevo, sin embargo, el resultado de este no cambiaba. El segundo tipo de transformación en el sistema de representación numérico, y se presentaba cuando los profesores realizaban procedimientos entre los términos numéricos, como se muestra en la Ilustración 61.

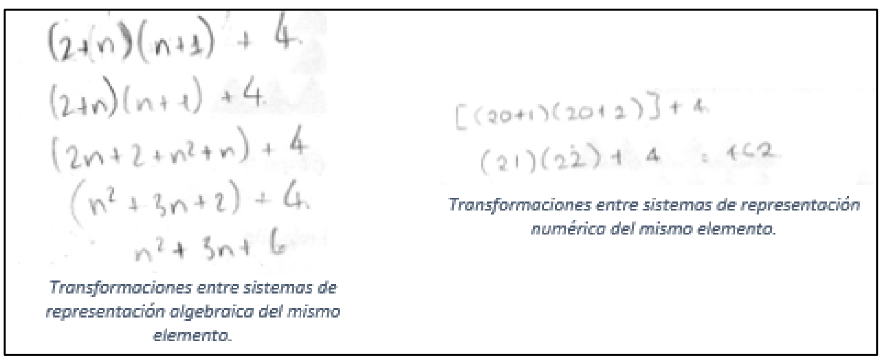


Ilustración 61. Transformaciones realizadas por P10 y P7

3.2.2.3. Balance general de los resultados

Haciendo un balance general de esta segunda categoría, se puede decir que los sistemas de representación que posibilitaron algunos pasos del razonamiento inductivo fueron el sistema de representación numérico y el sistema de representación pictórico. El primer sistema de representación posibilitó encontrar el patrón de relaciones entre los términos *k*-ésimos de la sucesión, que permitían mayor facilidad para identificar una regularidad. El sistema de representación pictórico posibilitó encontrar el patrón que modela el comportamiento de la sucesión pictórica.

Vale la pena mencionar que el sistema de representación que más se usó en la producción escrita de los profesores fue el sistema de representación pictórico, pues a partir de la sucesión presentada en ese sistema de representación, los profesores descomponían y organizaban los términos para identificar un patrón. Mientras que el sistema de representación menos usado por los profesores fue el sistema de representación verbal, y esto se relaciona con la dificultad que se encontró en los profesores para que formularan conjeturas y generalizaran.

En cuanto a la transformación que más usaron los profesores en sus producciones escritas, fueron las transformaciones entre sistemas de representación de diferentes elementos, esto es porque la sucesión se presentaba inicialmente en una representación pictórica y los profesores hacían un cambio a una representación algebraica. Este tipo de representación se evidencia cuando los profesores inician trabajando con casos particulares y formulan la conjetura por medio de una expresión algebraica que modela el comportamiento del patrón que encontró en la sucesión pictórica.

Por otro lado, las transformaciones que menos utilizaron los profesores fueron las transformaciones de sistemas de representación de un mismo elemento, pues se pudo evidenciar que la mayoría de profesores identifican el patrón a partir de la sucesión pictórica y no tuvieron necesidad de representar la cantidad de elementos que contenía cada figura para pasarlo a un sistema de representación numérica. Cabe aclarar que los profesores que hicieron esta transformación hicieron un cambio entre el sistema de representación pictórico al numérico, sin embargo, presentaron dificultades para formular la conjetura y la para generalizar, pues la mayoría de ellos manifestaron que no encontraban relaciones entre los números en la relación numérica, mientras que otros profesores, no recordaban cómo construir una expresión algebraica que modelara un comportamiento no lineal. Es importante resaltar que al realizar este tipo de transformación de sistemas de representación de un mismo elemento, se pueden utilizar otras estrategias que faciliten llegar a la generalización, como por ejemplo las diferencias sucesivas, sin embargo, ningún profesor contempló este método.

La incidencia que tuvo el uso de los sistemas de representación para utilizar los pasos del razonamiento inductivo fue bastante, pues en algunos casos, el sistema de representación pictórico permitió que los profesores explicitaran la estrategia con la que identificaran el patrón y el tratamiento entre los términos de la secuencia de figuras facilitó que trabajaran con casos particulares. También, cuando los profesores usaban el sistema de representación algebraico hallaban una conjetura que daba cuenta del término *n*-ésimo, y a partir de ahí se podía llegar a la generalización. Del mismo modo, el paso del sistema de representación pictórico al algebraico propició que los profesores conjeturaran y validaran dicha conjetura.

4. Conclusiones Y Consideraciones Finales

En esta investigación se analizó el razonamiento inductivo que evidencian los profesores en formación inicial de la Universidad del Valle, al resolver tareas que involucran la generalización de sucesiones polinomiales. En este capítulo se presentan las conclusiones a las que se llegaron después de realizar el análisis de los datos. En primer lugar, hace una descripción de los objetivos alcanzados en esta investigación y después se intenta dar respuesta a la pregunta de investigación que se planteó en el capítulo I, para ello, se hace referencia a los resultados obtenidos. En segundo lugar, se presentan algunas recomendaciones y reflexiones que deja este trabajo para considerar a futuro.

4.1. Conclusiones Generales

4.1.1. En relación con los objetivos específicos

Con relación al primer objetivo específico de este trabajo, en el que se plantea documentar la problemática, se puede concluir que se logró articular desde lo curricular, lo didáctico y matemático. Desde lo curricular se integra la importancia de proponer, promover y fomentar en el aula de clases aspectos relacionados con la generalización de patrones que permitan modelar un fenómeno matemático, interpretar relaciones, justificar estrategias y validar conjeturas para desarrollar competencias matemáticas en los estudiantes, tomando como referencia los Lineamientos Curriculares de matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006). Las habilidades y competencias allí mencionadas, están supeditadas o asociadas al conocimiento de diferentes objetos matemáticos, en particular, el conocimiento relacionado con las sucesiones y sus propiedades. Ahora, asumiendo que esto es lo que los estudiantes de la escuela deben aprender, los profesores deberían saber dicho conocimiento matemático.

Desde lo didáctico, se tienen en cuenta las dificultades que presentan los estudiantes, profesores en ejercicio y profesores en formación profesional inicial al resolver tareas que involucren la generalización de patrones. Como consecuencia de la articulación de lo curricular y lo didáctico trabajado en esta investigación, se puede concluir que estas dos perspectivas se relacionan en cuanto a las características de la actividad matemática que debería desarrollar en el aula. De esta manera, el MEN (1998, 2006) menciona que hacer matemáticas en la escuela tiene que ver con el desarrollo de la percepción e intuición sobre las figuras, comprender y reconocer el uso de sus propiedades, relaciones e invariantes a partir de la observación de regularidades que conlleve al establecimiento de conjeturas, y que por último, se generalice; y todo esto, coincide con muchos elementos o procesos cognitivos que se contemplan desarrollar con el razonamiento inductivo desde la perspectiva de Cañadas (2007).

Y desde lo matemático, se integran las nociones y propiedades asociadas a las sucesiones polinómicas. Estos aspectos mencionados son de suma importancia, ya que la articulación y fundamentación de cada uno de ellos permite rediseñar las tareas para intervenir con los profesores en formación profesional inicial.

Dentro de la documentación de la problemática se concluye que en estudios previos, como el de Ávila, López y Luna (2010), exploraron las habilidades de generalización que tenían los profesores en formación profesional inicial en la Universidad Autónoma de la Cuidad Juárez en México, y los resultados obtenidos reflejan que los estudiantes presentan dificultades en las habilidades de generalización. Las dificultades allí expresadas permiten reafirmar lo sucedido en el estudio con profesores en formación profesional inicial de la Universidad del Valle, pues la implementación de las tareas arrojó resultados que muestran cómo dichos profesores, independientemente del uso que hagan de ciertos pasos del razonamiento inductivo desde la perspectiva de Cañadas (2007), muestran limitaciones en algunas habilidades o destrezas matemáticas para expresar la regla algebraica de formación para los términos de una sucesión.

En relación con el segundo objetivo específico, el cual hace referencia a la articulación de los hallazgos en la documentación en una propuesta de intervención que propendan por el trabajo con actividades asociadas al razonamiento inductivo, se pudo concluir que:

Las tareas aplicadas en este trabajo de investigación se tomaron de estudios previos de acuerdo al contexto de la generalización de sucesiones polinomiales, y la importancia que tuvo el marco teórico en el aporte, para rediseñarlas, fue la adaptación de unas preguntas auxiliares que potencialmente permitieran caracterizar el razonamiento inductivo, es decir, preguntas que dan cuenta de las instancias que manejan los profesores en formación profesional inicial antes de llegar a la generalización y cómo esto permite potencialmente, revisar o asociar algunos pasos del razonamiento inductivo.

De acuerdo con lo observado en los análisis de la implementación de la prueba, y de la metodología empleada, se pudo concluir que las preguntas auxiliares fueron importantes porque tenían la intención de evidenciar los pasos del razonamiento inductivo que los profesores utilizaban, y la mayoría de estas preguntas atendieron a dicha intención, pues orientaron a que los profesores respondieran ciertas cuestiones que estaban asociadas a las variaciones de las figuras, a los términos lejanos de la sucesión, a la expresión algebraica que modelara el comportamiento de la sucesión y por último, la validación de la expresión algebraica. Todas esas preguntas permitieron ver con detalle los procedimientos que realizaban los profesores antes de llegar a la generalización de las sucesiones, y cómo se asociaban dichos procesos con los pasos del razonamiento inductivo.

Estas tareas promovieron que los profesores trabajaran con los casos particulares presentados e incluso con nuevos casos particulares, que identificaran el patrón para que construyeran una conjetura y seguidamente la validaran. Aunque no todos los profesores validaron sus conjeturas, se reconoce que en las tareas se formularon preguntas que les permitió hacer uso de estos procesos mencionados y por ende, de los pasos del razonamiento inductivo desde la perspectiva de Cañadas (2007). También es importante mencionar, que algunos profesores pudieron llegar a la generalización gracias a estas preguntas auxiliares formuladas.

De acuerdo con los resultados obtenidos en la implementación de la prueba, se infiere que este rediseño fue viable o pertinente para identificar y caracterizar el razonamiento inductivo que evidenciaran los profesores, excepto por algunas cuestiones metodológicas que se mencionarán más adelante en las recomendaciones.

El tercer objetivo específico, el cual hace referencia a la identificación de los niveles de razonamiento inductivo de los profesores en formación profesional inicial a partir de los resultados de la implementación de la prueba, se concluye que los pasos del razonamiento inductivo que se involucran con mayor medida en los profesores fueron: trabajo con casos particulares, la identificación del patrón y la formulación de la conjetura. Se involucran con menos frecuencia, en la organización de casos particulares, justificación de conjeturas y generalización. Por cuanto al paso de la demostración, ninguno lo realizó. A continuación, se hace una breve descripción de lo que pasó en cada nivel del razonamiento inductivo en los profesores y la incidencia de los sistemas de representación que emplearon.

4.1.1.1. Trabajo con casos particulares

La mayoría de los profesores trabajó con casos particulares, identificaron la cantidad de figuras que había en cada posición de la sucesión. En algunos casos, este trabajo consistió en los conteos estratégicos y en la descomposición de la figura, para reconocer el comportamiento del patrón figural. En este paso, la percepción visual fue muy importante para identificar el comportamiento, lo que permitió que este paso se cumpliera y se trabajará con los términos *k*-ésimos de la sucesión. Los profesores que no trabajaron con casos particulares, evidenciaron dificultades para evidenciar otros pasos del razonamiento inductivo.

4.1.1.2. Organización de casos particulares

Se identificó que algunos profesores que organizaban los casos particulares se apoyaron en el uso de representaciones tabulares y en sistematizaciones pictóricas de la sucesión, en la que se establecía la relación entre la posición de los términos y la cantidad de términos *k*-ésimos de cada figura.

4.1.1.3. Identificación del patrón

En este nivel, los profesores establecieron diversas formas de reconocerlo. Algunos profesores se apoyaron en la representación pictórica de la sucesión y reconocieron el crecimiento de la cantidad de algunos elementos de las figuras, mientras otros identificaron el patrón por medio de la representación numérica y realizaron diferencias sucesivas de primer y segundo orden y eso les permitía encontrar el comportamiento del patrón y los nuevos términos *k*-ésimos por recurrencia. Los profesores que identificaron el patrón por medio de la representación pictórica descompusieron la figura y relacionaron sus partes a conceptos como el área.

4.1.1.4. Formulación de conjeturas

Los profesores que formularon conjeturas son aquellos que identificaron el comportamiento de los cambios de las figuras que representaban los términos de la sucesión. De este modo, los profesores establecieron conjeturas a partir de estructuras aditivas y multiplicativas utilizando una variable que representaba la posición del término *n*-ésimo de la sucesión.

Se pudo evidenciar que para que los profesores llegaran a la formulación de conjeturas, incidió el trabajo con casos particulares y la identificación del patrón. En algunos casos, los profesores pudieron construir una expresión algebraica que modelara los casos particulares trabajados, y en otros casos, los profesores que identificaron el patrón por medio de la visualización de la imagen mostrando los cambios que había en las figuras de la sucesión, pudieron formular una conjetura que modelara el comportamiento de la sucesión pictórica. Esto quiere decir que hay una relación implícita entre estos niveles, pues permiten el paso de uno a otro.

4.1.1.5. Justificación de conjeturas

Los profesores que justificaron sus conjeturas fueron los que verificaron que la conjetura planteada se cumplía para los casos particulares, e incluso los que la evaluaron para términos nuevos de la sucesión.

4.1.1.6. Generalización

Los profesores que generalizaron fue porque formularon o construyeron una conjetura y la verificaron para comprobar la validez de la misma, esto es, verificarla para los casos presentados e incluso con nuevos casos particulares. Se evidencia en las producciones de los profesores que las generalizaciones que realizaron fueron representadas de manera algebraica.

Las dificultades asociadas a la generalización por parte de los profesores, se evidencia en que no verificaron la validez de su conjetura con casos particulares. Sin embargo, hubo profesores que verificaron su conjetura con dichos casos, pero que tampoco generalizaron, y esto se presentó cuando los profesores reemplazaron los casos particulares en la conjetura construida y no verificaron si esta conjetura era válida o no en los términos *k*-ésimos de la sucesión.

Por otro lado, se pudo evidenciar, que en las estrategias más recurrentes que emplearon los profesores para formular una conjetura e incluso generalizar las sucesiones, se destaca el de la descomposición de la figura para encontrar un patrón pictórico que modele su comportamiento, y el del conteo para identificar un patrón a partir de los términos numéricos. Sin embargo, se encontró una limitación detrás del hecho de que los profesores no llegaran a la generalización y esta tiene que ver con que los profesores no utilizan diversas estrategias para llegar a la generalización, pues solo la identifican por medio de las dos formas mencionadas, los profesores que intentan recurrir otro método como el de diferencias sucesivas, solo expresan las diferencias y en algunos casos las diferencias de las diferencias hasta obtener el número constante, y ahí no saben qué hacer. Todo lo mencionado hasta ahora, es un aspecto que está relacionado con la falta de habilidades que tienen los profesores al desarrollar estrategias o posibles alternativas que le permitan llegar a la generalización, y esto, se encuentra relacionado con el conocimiento común matemático del profesor.

4.1.1.7. Demostración

Finalmente, en este último paso del razonamiento inductivo, ningún profesor utilizó la demostración para intentar validar su conjetura por medio del rigor de la ciencia matemática. Sin embargo, hubo un profesor que intentó realizarla, al explicitar la hipótesis inductiva de forma anticipada, más no la termina. Al mismo tiempo, se observa que el resto de los profesores, solo recurrieron a la validación de las expresiones conjeturadas utilizando términos cercanos y lejanos de la sucesión.

En las entrevistas realizadas a los profesores se les preguntó si había otras formas de validar, y algunos profesores no mencionaron algunas diferentes a las mencionadas (utilizando los casos particulares), esto quiere decir que para ellos la validación formal no es relevante, lo cual deja una posible hipótesis sobre las dificultades que pueden tener para considerar la demostración. Cabe aclarar que el centro de atención de esta investigación no es la demostración que solo se considera que es una forma de validar lo realizado en la generalización, Así pues, el hecho de que ningún profesor haya validado a partir de la demostración, no significa que presenten niveles bajos de razonamiento inductivo, sino que es un caso particular en el cual se observa que los profesores no sienten la necesidad de utilizar métodos formales para validar sus conjeturas o la expresión algebraica a la que ha llegado, pues, al fin y al cabo, el propósito fundamental es llegar a la generalización.

4.1.1.8. Sistemas de representación

En el proceso inductivo, los profesores utilizaron diferentes sistemas de representación en la resolución de las tareas y se destacan el numérico, algebraico y pictórico. Por otro lado, el sistema de representación que menos utilizaron fue el verbal.

Se evidencia la utilidad del sistema de representación pictórico (patrón figural) en el contexto de la generalización. Los profesores que trabajaron los casos particulares y llegaron a la formulación de conjeturas o a la generalización, fueron aquellos que realizaron las transformaciones entre sistemas de representación de diferentes elementos, pues partieron de las representaciones pictóricas o numéricas al sistema de representación algebraico, y cabe aclara que esta transformación fue la más usada por los profesores. También los que pudieron llegar a la generalización fueron los profesores que en el transcurso del proceso de resolución de las tareas utilizaron diferentes tipos de representaciones.

Aquellos profesores que no generalizaron, se limitaron a reconocer el comportamiento del patrón basado en el sistema de representación pictórico combinado con el sistema de representación numérico, no lograron representar este comportamiento en términos generales por medio de expresiones algebraicas o en su defecto, verbales.

4.1.2. En relación con el objetivo general y la pregunta de investigación

Con relación al objetivo general de nuestro trabajo de investigación, el cual está asociado a caracterizar el razonamiento inductivo que evidencian los profesores en formación profesional inicial del programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle en la generalización de sucesiones polinomiales, se puede concluir que los pasos de razonamiento inductivo más usados por los profesores es el de los casos particulares, la identificación del patrón y la formulación de conjeturas. A su vez, los profesores que trabajaron con casos particulares, pudieron llegar a la generalización, esto fue, realizando transformaciones entre sistemas de representación.

Al realizar el balance general de lo que pasó en cada una de las tareas, se evidenciaron limitaciones, dificultades y fortalezas en cuanto a las habilidades destrezas y conocimientos que manifiestan los profesores para resolver las tareas. Una fortaleza en cuanto a las habilidades y destrezas se evidencia en algunos profesores que propusieron estrategias para encontrar las conjeturas por medio de la descomposición figural de los términos de la sucesión. Una dificultad posible dificultad, en cuanto a los conocimientos matemáticos, que se puede inferir como consecuencia del estudio, se evidencia cuando los profesores no utilizan diversas formas de llegar a la generalización, esto es, utilizando también el método de diferencias sucesivas, pues algunos profesores intentaron proceder en este método y llegaron a las segundas diferencias y se dieron cuenta de su comportamiento cuadrático, sin embargo, no pudieron seguir y esto da cuenta de ciertas limitaciones para poder llegar a la generalización.

También, se encontró una limitación en cuanto a las habilidades de interpretación de los enunciados expuestos en las tareas, pues algunos profesores en la Tarea 3 no pudieron comenzar, otros no sabían qué hacer cuando tenían los casos particulares construidos, y esto se debe a la poca familiaridad que se tiene con estos tipos de tareas en las que no se presentan los términos *k*-ésimos, sino que los deben construir a partir de ciertas condiciones dadas en un enunciado. De acuerdo con esto, se puede concluir que la tarea que más se le dificultó a los profesores fue la 3, debido a la ausencia de términos *k*-ésimos, pues aquí los profesores debían construirlos y crear su propia sucesión de acuerdo con la situación presentada, que era hallar la longitud de la espiral para cuadrados de diferentes dimensiones.

El sistema de representación que más usaron los profesores y que permitió la formulación de una conjetura y la generalización, es el sistema de representación pictórico para finalmente llegar al sistema de representación algebraico, esto es, realizaron una transformación entre sistemas de representación de un mismo término. También, se pudo evidenciar que el presentar las sucesiones en un sistema de representación pictórico, posibilitó que los profesores utilizaran la mayoría de los pasos del razonamiento inductivo.

En relación con los sistemas de representación, se pudo evidenciar el poco uso que hicieron los profesores de la representación verbal, y que puede estar relacionado con las deficiencias mostradas por parte de los profesores en cuanto a la generalización.

Finalmente, el razonamiento inductivo en los profesores en formación profesional inicial de la Universidad del Valle, se caracteriza por emplear mayoritariamente el paso de la identificación del patrón, con un promedio del 56,6%, el paso que le sigue es la formulación de conjeturas (53,3%), después, el trabajo con casos particulares con el 48,3%. Por otro lado, El paso que menos utilizaron los profesores fue el de la organización de patrones con el 16,6% y le sigue la generalización con el 20%. Cabe aclarar aquí que la demostración no la realizó ningún profesor y por ende, el porcentaje es 0.

El paso del razonamiento inductivo que permitió que los profesores llegaran a la generalización fue el de la justificación de las conjeturas, pues la mayoría de profesores que justificaron, pudieron llegar a la generalización. Por el contrario, los que no verificaron la conjetura, no pudieron establecer la validez de la generalización y en algunos casos dicha generalización no correspondía con la que modelaba el término *n*-ésimo de la sucesión.

Es importante mencionar que solo hubo un caso en que se usó la mayoría de pasos, los primeros seis pasos en la tarea 1. Sin embargo, se puede decir que la redacción de los pasos del razonamiento inductivo de un profesor, no necesariamente se puede pedir por la mayor cantidad de pasos de razonamiento inductivo ni por el orden, pues como lo menciona Cañadas (2007), el interés se centra en traducir estos pasos en términos del contenido matemático con el que se esté trabajando, es decir, en que los profesores reflejen buenas habilidades en las sucesiones numéricas.

4.2. Recomendaciones del estudio y en la formación de profesores

En este apartado se sugieren algunas recomendaciones en cuanto a la metodología utilizada y a la formación de profesores de la Universidad del Valle y se exponen algunas reflexiones en torno al desarrollo del trabajo realizado.

4.2.1. Recomendaciones del estudio

Para concluir con este estudio, se reconocen dos limitaciones de la parte metodológica que se recomienda tener en cuenta para la continuación de este trabajo o incluso en otros nuevos. La primera limitación que se pudo evidenciar, es cantidad de personas que hicieron parte de la población objeto de estudio, pues se hubiera aprovechado más aplicar la prueba a todos los profesores en formación profesional inicial de la Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas de la Universidad del Valle, y así no se generalizaba la información obtenida, sino que se hablaba de todos los profesores en formación profesional inicial con seguridad, sin embargo, la anormalidad académica no permitió que los estudiantes pudieran asistir a la Universidad.

La segunda limitación se encuentra relacionada con la prueba escrita que realizaron los estudiantes, pues se pudieron aprovechar mejor las preguntas, esto podía ser ampliando la información que acompañaban a las tareas o explicitando algunos términos. También, en la intervención de la prueba, los investigadores no propiciaron una estrategia metodológica que garantizara la comprensión de cada una de las tareas a los profesores, y así estos no tuvieran problemas relacionados con la comprensión de las preguntas, sino problemas relacionados con el conocimiento común matemático.

4.2.2. Recomendaciones para la formación de profesores de matemáticas

De acuerdo con lo mencionado al inicio de esta investigación, el trabajo del razonamiento inductivo en profesores en formación profesional inicial en la Universidad del Valle no se había hecho (otros autores había hecho algo parecido con nombres diferentes al razonamiento inductivo, pero no en el contexto de Univalle) y por esa razón se plantean unas reflexiones de acuerdo con los análisis realizados para tener en cuenta en la continuación de este trabajo o en la realización de otros trabajos similares a este.

A través de los análisis se pudo evidenciar en los análisis, que se encontraron dificultades respecto al conocimiento disciplinar que es el conocimiento común matemático de los profesores en formación profesional inicial al enfrentarse a tareas que involucran sucesiones polinómicas. Esto conlleva a centrar la atención en el proceso formativo de la Universidad del Valle en la Licenciatura en Educación básica con énfasis en matemáticas, pues siendo estudiantes de último semestre, ya han culminado la formación recibida por parte de cursos de componente matemático, y se supone que el conocimiento matemático asociado al razonamiento inductivo que posee, será, relativamente, el mismo para cuando sea egresado del programa de licenciatura y posiblemente esté ejerciendo como profesor.

En consecuencia de lo anterior, los investigadores proponen un futuro trabajo que ponga a prueba los conocimientos disciplinares de los profesores en formación profesional inicial de la Universidad del Valle, específicamente el conocimiento común matemático, pues dicho conocimiento hace parte lo que un profesor debe saber para generar procesos de pensamiento en sus estudiantes de la escuela. Esta situación podría ser uno de los aspectos a considerar cuando se habla de dificultades en torno al desarrollo de pensamiento variacional por parte de estudiantes en la Educación Básica y Media. Si bien, para enseñar matemáticas no es suficiente el saber disciplinar, sí es fundamental para el trabajo que se debe hacer en el aula.

De ese modo, como se mencionó en el capítulo 1, el razonamiento inductivo es de suma importancia para la construcción del conocimiento matemático y por esa razón se debe incluir en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el aula de clases, pues ayuda a desarrollar pensamiento matemático en los alumnos, es decir que lo profesores de matemáticas deben poner en práctica situaciones de aprendizaje que promuevan el razonamiento inductivo en los estudiantes en la escuela.

Por lo anterior, y por lo concluido en este trabajo de investigación, es importante que los profesores estén preparados para enfrentarse a los retos curriculares que se proponen, lo cual significa que los profesores en su formación deben familiarizarse y adquirir hábitos en la manera de razonar inductivamente (Cañadas, 2002).

Respecto a la formación de profesores, esta investigación realiza un aporte importante al campo de la Educación Matemática, y junto con otras investigaciones relacionadas, podría ser el preludio de la implementación de un proceso formativo en la Universidad del Valle que contemple el razonamiento inductivo en el programa de Licenciatura en Matemáticas. Esto con el fin de brindar, a los profesores en formación profesional inicial estrategias que desarrollen competencias en la generalización de patrones, para que ellos generen conocimiento matemático y que, por consecuencia de esto, sus estudiantes también. La implementación debe abordar conocimientos didácticos (razonamiento inductivo) y conocimiento común matemático (generalización de patrones).

5. Referencias

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación. (Tesis doctoral).* Granada: Universidad de Granada.

Alvarez, J., Alonso, I., & Salgado, A. (2016). Resolución de Problemas Matemáticos en la Licenciatura en Educación Matemática-Física. *REFCalE*, 67-82.

Aparicio, E., Cabañas, G., & Sosa, L. (2019). Dificultades para razonar inductivamente en profesores de secundaria al resolver un problema de generalización. *Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (págs. 1-8). Medellín: XV CIAEM-IACME.

Ávila, M. S., López, C., & González, J. L. (2010). La Generalización de Patrones Cuadráticos: Un estudio con alumnos de licenciatura en matemáticas. *CULCyT*, 34-40.

Balacheff, N. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. *Una empresa docente*, 200.

Ball, D., Hoover, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching what Makes it Special? *Journal of Teacher Educational*, *59*(5), 389-407. doi:10.1177/0022487108324554

Barrera, V., Cañadas, M. C., & Castro, E. (2008). Análisis del razonamiento inductivo de maestros en formación en el problema de castillos de naipe. *Investigación en el aula de matemáticas*, 127-133.

Barrera, V., Castro, E., & Cañadas, M. C. (2009). Cuaderno de trabajo sobre el razonamiento inductivo para profesores de primaria en formación. *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación* (págs. 1-18). Santander: XIII Simposio de la EIEM.

Barrera, V., Castro, E., & Cañadas, M. C. (2009). Evolución del uso del razonamiento inductivo en un grupo de maestros en formación. *Escuela Abierta*, 33-45.

Cañadas, M. C. (2002). *Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de secundaria. (Trabajo de investigación tutelada).* Granada: Universidad de Granada.

Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas. (Tesis doctoral).* Granada: Universidad de Granada.

Cañadas, M. C., & Castro, E. (2003). La importancia del razonamiento inductivo en la formación inicial de profesores. En J. Gutierrez, A. Romero, & M. Coriat, *El practicum en la formación inicial del profesorado de magisterio y educación secundaria: avances de investigación, fundamentos y programas de formación* (págs. 133-13). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Cañadas, M. C., & Castro, E. (2004). Razonamiento inductivo de 12 alumnos de secundaria en la resolución de un problema matemático. *Investigación en educación matemática : Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M.)* (págs. 173-182). Coruña: Servicio de Publicaciones.

Cañadas, M. C., & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasining. *PNA*, *2*, 69-81.

Cañadas, M. C., & Castro, E. (2007). Procedimiento para la caracterización de estrategias en problemas de sucesiones que involucran el razonamiento inductivo. *Universidad de Granada*, 1-11.

Cañadas, M. C., & Figueiras, L. (23 de Enero de 2014). *Uso de representaciones y generalización de la regla del producto.* doi:10.1174/021037011797898449

Cañadas, M. C., Castro, E., & Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas en estudiantes de 3° y 4° de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 3*, 137-151.

Carazo, P. C. (2006). El método de estudio de caso: Estrategía metodológica de la investigación cientifica. *Pensamiento & gestión*, 165-193.

Carlson, M., Sally, J., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento Covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estuio. *EMA, 8*, 121-156.

Castro, E., Cañadas, M. C., & Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, 55-67.

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation. *Mathematical Thinking and Learning*, 181-200.

Córdoba, A., & Timón, Á. (02 de Junio de 2016). La intuición matemática de Ramanujan. *EL PAÍS. Café y Teoremas* , págs. 1-2.

Correa, H. E. (2017). *Estrategias y formas de razonamiento en estudiantes de undécimo grado en tareas de generalización de sucesiones y series polinomiales.* Medellín, Colombia: Universidad de Medellín.

DeGroot, C. (2001). From Description to Proof. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *7*, 244-248.

Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano.* Cali: Programa Editorial.

Edwards, R. L. (2010). *Cálculo I de una variable novena edición.* México, D.F: HILL/INTERAMERICANA EDITORES.

Kolar, V., Mastnak, A., & Hodnik, T. (2012). Primaty teacher students competences in inductive reasoning. *Learning Problem Solving and Learning Through Problem Solving, proceedings from the 13th ProMath concerence* (págs. 54-68). Umea: Bergqvist, T.

Llinares, S. (January de 2007). Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional. *Conferecia invitada e la XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (págs. 1-13). Granada: JAEM.

Mason, J. y. (1999). *Rutas hacia / Raíces del álgebra.* Tunja, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias.* Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje: Matemáticas V.2.* Bogotá: Magisterio.

Miyazaki, M. (2000). Levels of Proof in Lower Secundary School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 47-68.

Nacional, M. d. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

Nacional, M. d. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje.* (Vol. 2). Bogotá: Magisterio.

Neubert, G., & Binko, J. (1992). *Inductive Reasoning in the Secondary Classroom.* Washington, DC: National Educaction Association of the United States.

Nuñez, K. (2018). *Razonamiento inductivo en profesores de matemáticas al resolver tareas de generalización con sucesiones cuadráticas.* Guerrero: Universidad Autónoma de Guerrero.

Pérez, J. (2005). *La generalización como proceso de pensamiento matemático: una propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje del álgebra elemental. (Tesis de maestria).* Medellín: Universidad de Antioquia .

Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2018). Generalización y razonamiento inductivo en una estudiante de cuarto de primaria. Un estudio de caso desde el pensamiento funcional. (L. J. Rodriguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodriguez, A. Aguilar-Gonzalez, P. Alonso, F. J. Garciía García, & A. Bruno, Edits.) *SEIEM*, 457-466.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* USA: Princeton University Press.

Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Reid, D., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education.* Canada: Sense Publichers.

Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics.* San Jose, USA: Springer.

Salgado, M., & Salinas, M. J. (2012). El razonamiento inductivo como generador de la construcción del número en 5 años. En J. L. Lupiañez, D. Arnau, & A. Maz, *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (págs. 119-125). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia y SEIEM.

Taylor, S., & Bogdan, R. (1984). *Introduction to Qualitative Research Methods, the search for meanings (Trad. J. Piatigorky).* Barcelona : Paidós, SAICF.

Trujillo, P. A. (2008). *Proceso de generalización que realizan futuros maestros. (Tesis de maestria).* Granada: Universidad de Granada.

Trujillo, P. A., Castro, E., & Molina, M. (2009). Un estudio de casos sobre el proceso de generalización. *Investigación en Educación Matemática XIII*, 511-521.

Whitehead. (2012). *An Introduction to Mathematics.* Londres: Oxford University Press.

Yin, R. (1984/1989). Case study research: Design and Methods, applied social research methods series. *Newbury Park CA Sage*.

6. Anexo

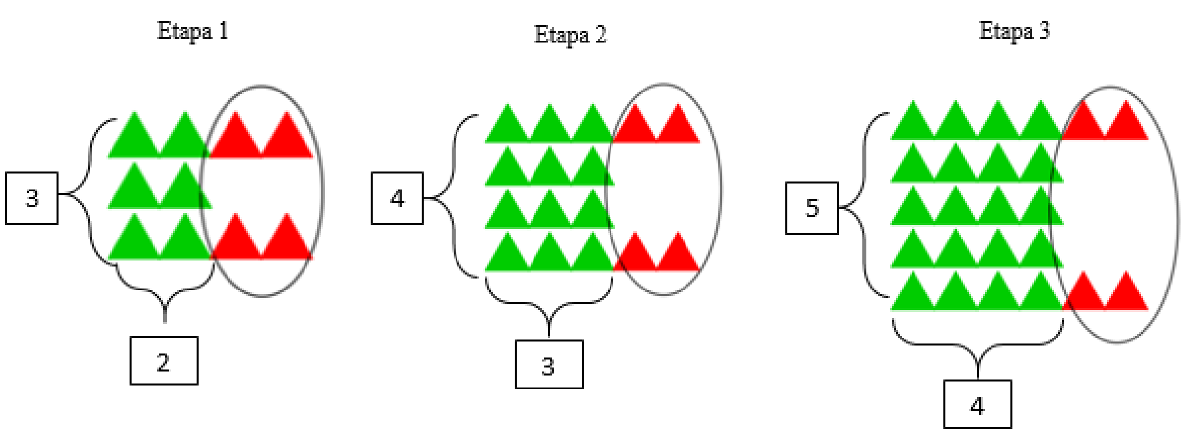
A continuación, se explicitan algunas posibles respuestas a las tareas, en términos de cada uno de los pasos de razonamiento. Sin embargo, es importante aclarar que las respuestas sugeridas no obedecen a las únicas, sino a las más convencionales de acuerdo con los antecedentes.

Tarea 1

1. Considerando las tres primeras etapas presentadas, ¿Qué relación encuentra entre cada una de ellas? ¿Qué permanece constante?

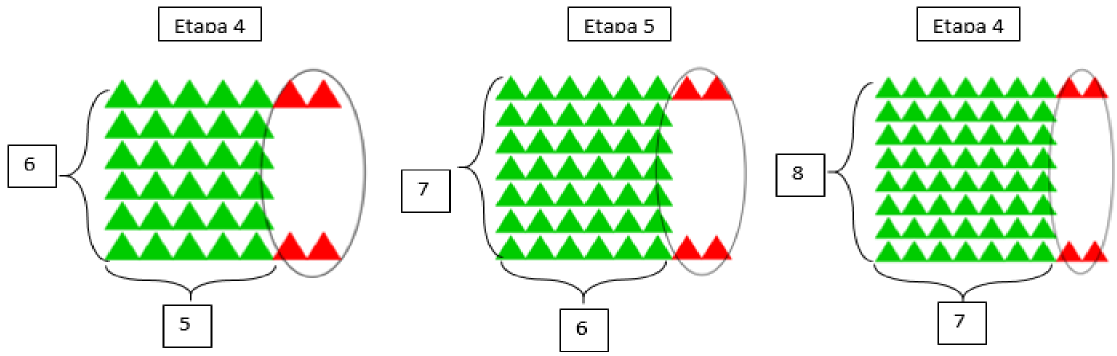
Al hacer el respectivo análisis entre las tres primeras etapas, se puede realizar una descomposición figural en la que se centra la atención en aquella de dimensión $n \times n$ de color verde, pues aumenta de una unidad a la longitud y anchura de la misma. Por lo que, a parir del principio de recurrencia, para poder darse la etapa siguiente se es necesario volver a la anterior.

Lo que permanece constante son las cuatro representaciones figúrales de color rojo



2. ¿Cuántos obstaculizadores de forma triangular se necesitan para avanzar en la construcción de la quinta y sexta etapa?

R// Siguiendo con la relación establecida en el primer punto, las siguientes tres etapas son tal y como se muestran en la ilustración 63.



De manera visual, se puede decir que la cantidad de obstaculizadores para la quinta y sexta etapa son:$a_5 = 46$; $a_6 = 60$.

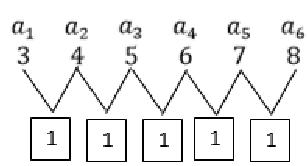
3. De acuerdo con las regularidades observadas entre las etapas, genera una expresión algebraica que permita encontrar el número de obstaculizadores que se necesitan en cada etapa. Justifica como encontró la expresión.

R/ Al momento de generar la expresión algebraica, podemos centrar la a tención desde dos momentos.

Caso 1: <u>variación entre las longitudes de la representación teniendo constante las cuatro representaciones de color rojo.</u>

Longitud del rectángulo

1 etapa	2 etapa	3 etapa	4 etapa	5 etapa	6 etapa
3	4	5	6	7	8



Se observa que cada uno de los términos siguientes a su antecesor aumenta una unidad. Por lo que la relación cumple con la definición de progresión aritmética, en donde se cumple que:

$$a_n = a_0 + (n - 1)d$$

Donde $a_0 = 3$, $n =$ valor posicional de los términos y $d =$ diferencia comun entre los términos a_{n+1} y a_n.

Por lo que el polinomio que modela la longitud es:

$$a_n = 3 + (n - 1)1$$

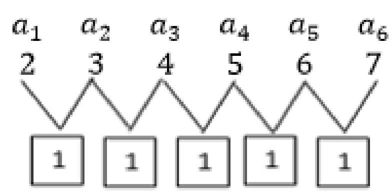
$$a_n = 3 + n - 1$$

$$a_n = n + 2$$

Variación entre las anchuras de la representación teniendo constante las cuatro representaciones de color rojo:

Ancho del rectángulo

1 etapa	2 etapa	3 etapa	4 etapa	5 etapa	6 etapa
2	3	4	5	6	7



Observamos que cada uno de los términos siguientes a su antecesor excede en una unidad. Por lo que la relación cumple con la definición de progresión aritmética, en donde se cumple que:

$$a_n = a_0 + (n - 1)d$$

Donde $a_0 = 2$, $n =$ valor posicional de los términos y $d =$ diferencia comun entre los términos a_{n+1} y a_n.

Por lo que el polinomio que modela la longitud es:

$$a_n = 2 + (n - 1)1$$

$$a_n = 2 + n - 1$$

$$a_n = n + 1$$

Luego la expresión algebraica es:

$$a_n = (n+2)(n+1) + 4$$

$$a_n = n^2 + 2n + n + 2 + 4$$

$$a_n = n^2 + 3n + 6$$

Caso 2: Teniendo en cuenta la variabilidad en las áreas de cada una de las etapas.

Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3
$a_1 = (3\times4)-2$	$a_2 = (4\times5) - 4$	$a_2 = (5\times6) - 6$
$a_1 = 12 - 2$	$a_2 = 20 - 4$	$a_3 = 30 - 6$
$a_1 = 10$	$a_2 = 16$	$a_3 = 24$

Etapa 4	Etapa 5	Etapa 6
$a_4 = (6\times7)-8$	$a_5 = (7\times8) - 10$	$a_6 = (8\times9) - 12$
$a_4 = 42 - 8$	$a_5 = 56 - 10$	$a_6 = 72 - 12$
$a_4 = 34$	$a_5 = 46$	$a_6 = 60$

Luego la expresión algebraica es:

$$a_n = (n+2)(n+1) + 4$$

$$a_n = n^2 + 2n + n + 2 + 4$$

$$a_n = n^2 + 3n + 6$$

4. Teniendo en cuenta el punto anterior, ¿Cómo podría validar la expresión algebraica que encontró?

En términos de la validación, se puede esperar que los profesores en formación inicial lleven a cabo procesos tales como lo puede ser la demostración, la justificación y la prueba por medio de la sustitución de los casos particulares en la expresión algebraica encontrada.

Al analizar cada una de las representaciones figurales, observamos el siguiente comportamiento:

$$\begin{gathered}
a_0 = 6 \\
a_1 = 10 = a_0 + 6 = a_0 + 2(1+1) \\
a_2 = 16 = a_1 + 6 = a_1 + 2(2+1) \\
a_3 = 24 = a_2 + 8 = a_2 + 2(3+1) \\
a_4 = 34 = a_3 + 10 = a_3 + 2(4+1) \\
a_5 = 46 = a_4 + 12 = a_4 + 2(5+1) \\
a_6 = 60 = a_5 + 14 = a_5 + 2(6+1) \\
\vdots \\
a_n = a_{n-1} + 2(n+1)
\end{gathered}$$

Por otro lado, si hacemos recurrencia llegamos a que $a_n = n^2 + 3n + 6$, donde $a_0 = 6$

Luego, se demostrará por inducción matemática la generalización $a_n = n^2 + 3n + 6$ dada la condición $a_0 = 6$ y $a_n = a_{n-1} + 2(n+1)$.

- Para $n = 1$, $a_1 = 10$
- Suponemos que se cumple para $n = k$ y mostraremos para $n = k + 1$

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k + 2[(k+1)+1] \\
&= k^2 + 3k + 6 + 2(k+2) \\
&= k^2 + 3k + 6 + 2k + 4 \\
&= k^2 + 3k + 6 + 2k + 3 + 1 \\
&= (k^2 + 2k + 1) + (3k + 3) + 6 \\
&= (k+1)^2 + 3(k+1) + 6 \blacksquare
\end{aligned}$$

Tarea 2.

1. ¿Qué relaciones encuentra entre cada una de ellas? ¿Que permanece constante y que varía?

Para poder encontrar una relación entre cada una de las figuras, organizamos los términos figúrales en orden tal como se muestra a continuación.

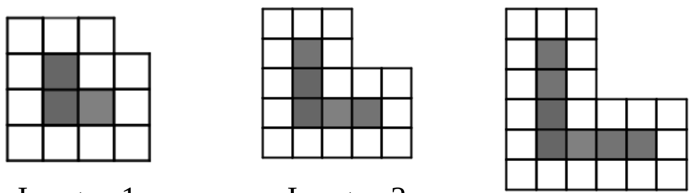
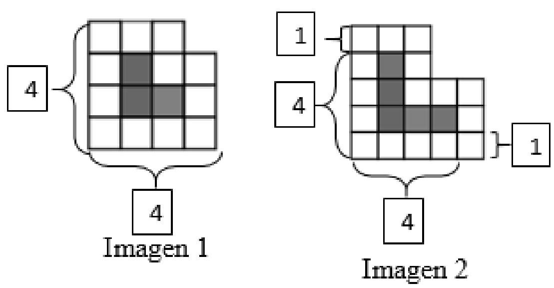


Imagen 1 Imagen 2 Imagen 3

Como se puede observar, en la medida en que nos acercamos de la imagen 1 y a la imagen 2, se observa la variación entre el largo y el ancho del cuadrado el cual opta por una dimensión $l \times l$, permitiendo mostrar que por cada imagen siguiente a la anterior hay un aumento de una unidad cuadrada tal como se muestra en la siguiente imagen.

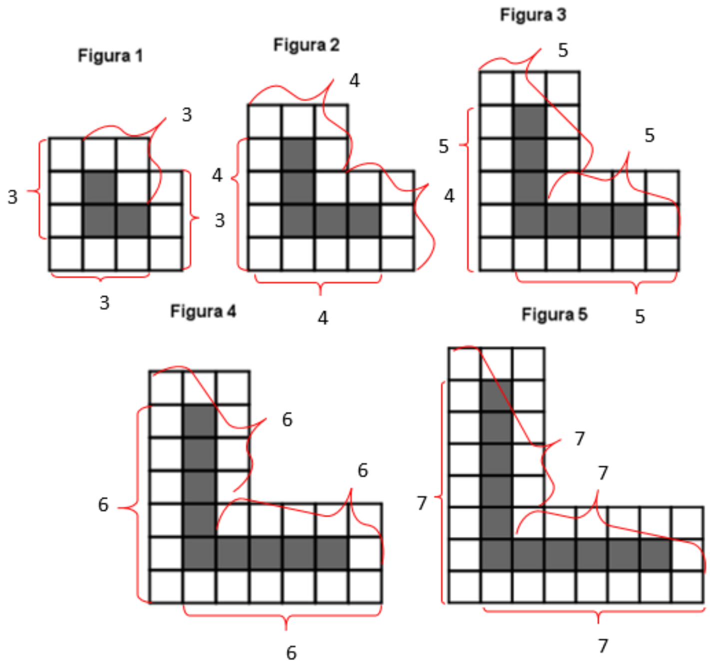


Por otro lado, lo que permanece constante son los lados superiores y lateral derecho con una magnitud de tres unidades.

2. Teniendo en cuenta las representaciones figúrales presentes en esta tarea, encuentre la expresión general que permita representar la regularidad que encontró y que permita obtener términos de la quinta posición en adelante.

Teniendo en cuenta las variaciones que podemos encontrar en las representaciones figúrales en la tarea 2, estas se presentan por casos, así:

Primer caso: <u>N° de cuadrados blancos.</u>



Como podemos observar en la imagen que para poder encontrar una regularidad, buscamos en cada una de las etapas una regularidad constante en la que se pueda obtener una reciprocidad cuantitativa constante encada una.

Ejemplificando lo mencionado anteriormente, consideremos lo siguiente:

$$n \times N° \ de \ cuadrados = N° \ de \ cuadrados \ blancos$$

Luego tenemos que:

N° de figura	N° de cuadrados blancos.
Figura 1	$4 \times 3 = 12$
Figura 2	$4 \times 4 = 16$
Figura 3	$4 \times 5 = 20$
Figura 4	$4 \times 6 = 24$
Figura 5	$4 \times 7 = 28$

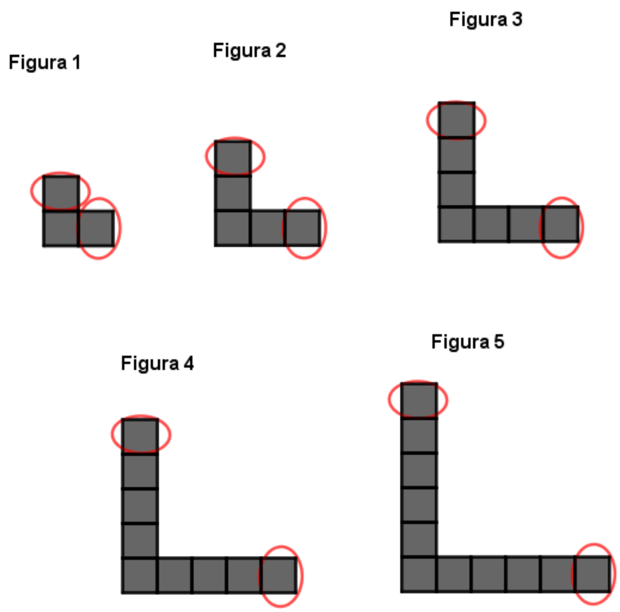
$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 \\ 12 & \xrightarrow{+4} & 16 & \xrightarrow{+4} & 20 & \xrightarrow{+4} & 24 & \xrightarrow{+4} & 28 \end{array}$$

$$a_n = 12 + 4(n-1)$$

$$a_n = 12 + 4n - 4$$

$$a_n = 4n + 8 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} \textit{Expresión algebraica que nos} \\ \textit{permite encontrar cualquier termino} \end{array}$$

Segundo caso: N° de cuadrados sombreados.



Como podemos observar en la imagen, para poder encontrar una regularidad, buscamos en cada una de las etapas una regularidad constante en la que se pueda obtener una reciprocidad cuantitativa constante encada una. Se presenta un ejemplo de esto:

$$1 + 2 = 3$$

$$3 + 2 = 5$$

$$5 + 2 = 7$$

$$7 + 2 = 9$$

$$9 + 2 = 11$$

Luego tenemos que:

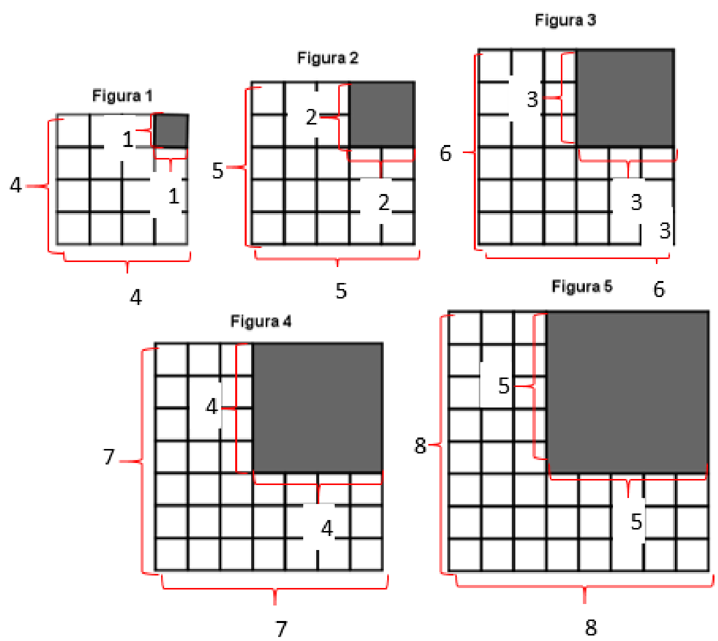
$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 \\ 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & 11 \\ & +2 & & +2 & & +2 & & +2 & \end{array}$$

$$a_n = 3 + 2(n-1)$$

$$a_n = 3 + 2n - 2$$

$$a_n = 2n + 1 \quad \rightarrow$$ Expresión algebraica que nos permite encontrar cualquier termino

Tercer caso: <u>Con el número total de recuadros.</u>



Como podemos observar, para poder encontrar una regularidad, buscamos en cada una de las etapas una regularidad constante en la que se pueda obtener una reciprocidad cuantitativa constante encada una.

Para ello, debemos calcular el área total de cada una de las figuras y hacer la diferencia respectiva junto al área del recuadro sombreado.

Ejemplificando lo mencionado anteriormente, consideremos lo siguiente:

Área total	Área sombreada
$4{\times}4 = 16$	$1{\times}1 = 1$
$5{\times}5 = 25$	$2{\times}2 = 4$
$6{\times}6 = 36$	$3{\times}3 = 9$
$7{\times}7 = 49$	$4{\times}4 = 16$
$8{\times}8 = 64$	$5{\times}5 = 25$

Considerando cada una de los resultados anteriores, procedemos a calcular cada una de las diferencias de las cinco primeras figuras.

$$\mathrm{A}_{\text{total}} - \mathrm{A}_{\text{sombreada}} = N° \; de\ cuadros\ blancos.$$

Luego tenemos que:

Figura 1

$16 - 1 = 15$

Figura 2

$25 - 4 = 21$

Figura 3

$36 - 9 = 27$

Figura 4

$49 - 16 = 33$

Figura 5

$64 - 25 = 39$

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 15 & 21 & 27 & 33 & 39 \end{array}$$

$$+6 \quad +6 \quad +6 \quad +6$$

$$a_n = 15 + 6(n-1)$$

$$a_n = 15 + 6n - 6$$

$a_n = 6n + 9 \quad \rightarrow$ Expresión algebraica que nos permite encontrar cualquier termino

3. ¿Cómo podría validar la expresión general que encontró?

En términos de la validación, se puede esperar que los profesores en formación inicial lleven a cabo procesos tales como lo puede ser la demostración, la justificación y la prueba por medio de la sustitución de los casos particulares en la expresión algebraica encontrada.

Al analizar cada una de las representaciones figurales, observamos el siguiente comportamiento:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 9 \\
a_1 &= a_0 + 6 \\
a_2 &= a_1 + 6 \\
a_3 &= a_2 + 6 \\
a_4 &= a_3 + 6 \\
a_5 &= a_4 + 6 \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + 6
\end{aligned}
$$

Por otro lado, si hacemos recurrencia llegamos a que $a_n = 6n + 9$, donde $a_0 = 9$.

Luego, se demostrará por inducción matemática la generalización $a_n = 6n + 9$ dada la condición $a_0 = 9$ y $a_n = a_{n-1} + 6$.

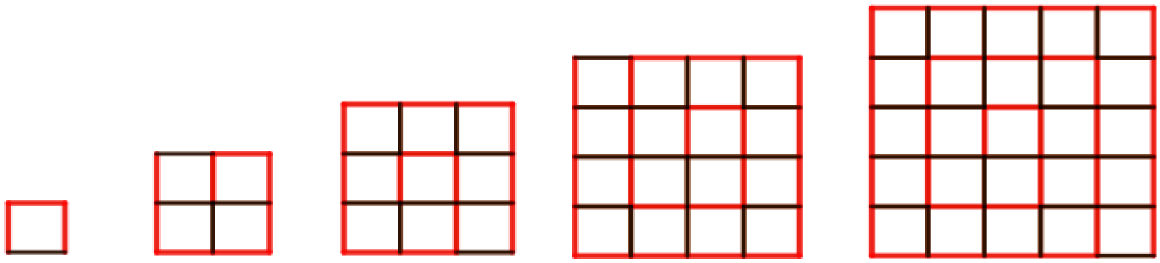
- Para $n = 1$, $a_1 = 15$
- Suponemos que se cumple para $n = k$ y mostraremos para $n = k + 1$

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k + 6 \\
&= 6k + 9 + 6 \\
&= (6k + 6) + 9 \\
&= 6(k + 1) + 9 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Tarea 3.

Inicialmente lo que se esperaba del estudiante, es que interpretaran las instrucciones del apartado y que le dieran el verdadero significado del verbo “explorar” como extender el caso presentado a otros casos similares y no solo trabajar con el caso particular presentado.

En esta tarea se preveían dos posibles soluciones, sin embargo, se muestra una que coincidió con la respuesta de P7, la otra solución prevista por los investigadores no se presentara, debido a que no las realizaron otros profesores. La solución que se presenta consiste en construir inicialmente los cuadrados de diferentes dimensiones como 2×2, 3×3, 4×4 (representada en la tarea), 5×5, etc, de la siguiente manera:



$\mathbf{1 \times 1}$ $\mathbf{2 \times 2}$ $\mathbf{3 \times 3}$ $\mathbf{4 \times 4}$ $\mathbf{5 \times 5}$

Posteriormente, cuando se dibujan las espirales en diferentes dimensiones, se puede ver dos tipos de variaciones, que es la dimensión del cuadrado (viene siendo el número de figura) y la longitud de la espiral, por lo que podemos organizar dichas variaciones y datos de la siguiente manera:

Dimensión del cuadrado	Longitud de la espiral
2×2	8
3×3	15
4×4	24
5×5	35
6×6	48

De acuerdo a los datos obtenidos, se puede observar una regularidad en los cambios de la longitud de la espiral que no es de manera constante, y al realizar las diferencias, se obtiene en la segunda diferencia como constante dos, lo que nos lleva a decir que el comportamiento de la sucesión es cuadrático. De esta forma, se construye dicha sucesión por medio de una descomposición numérica para encontrar un patrón y/o establecer una conjetura, así:

Dimensión del cuadrado	Longitud de la espiral	Descomposición de la longitud	Regularidad
2×2	8	$4 + 4$	$4 + 2^2$
3×3	15	$6 + 9$	$6 + 3^2$
4×4	24	$8 + 16$	$8 + 4^2$
5×5	35	$10 + 25$	$10 + 5^2$
6×6	48	$12 + 36$	$12 + 6^2$

Después de descomponer los números encontrados en la longitud de la espiral, se evidencia la regularidad y una conjetura. Esto es, por sabiendo que se encuentra el numero cuadrado del numero de la figura (o dimensión del cuadrado) más el doble de este mismo número. De esta forma, se establece como formula general de esta tarea

$$\text{Longitud de la espiral para n dimensiones} = n^2 + 2n$$

En términos de la validación, se puede esperar que los profesores en formación inicial lleven a cabo procesos tales como lo puede ser la demostración, la justificación y la prueba por medio de la sustitución de los casos particulares en la expresión algebraica encontrada.

Al analizar cada una de las representaciones figurales, observamos el siguiente comportamiento:

$$\begin{gathered}
a_0 = 3 \\
a_1 = 8 = a_0 + 5 \\
a_2 = 15 = a_1 + 7 \\
a_3 = 24 = a_2 + 9 \\
a_4 = 35 = a_3 + 11 \\
a_5 = 48 = a_4 + 13 \\
\vdots \\
a_n = a_{n-1} + (2n + 3)
\end{gathered}$$

Por otro lado, si hacemos recurrencia llegamos a que $a_n = n^2 + 4n + 3$, donde $a_0 = 3$.

Luego, se demostrará por inducción matemática la generalización $a_n = n^2 + 4n + 3$ dada la condición $a_0 = 3$ y $a_n = a_{n-1} + (2n + 3)$.

- Para $n = 1$, $a_1 = 8$
- Suponemos que se cumple para $n = k$ y mostraremos para $n = k + 1$

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k + [2(k + 1) + 3] \\
&= k^2 + 4k + 3 + 2k + 2 + 3 \\
&= k^2 + 4k + 2k + 8 \\
&= k^2 + 4k + 2k + 4 + 1 + 3 \\
&= (k^2 + 2k + 1) + (4k + 4) + 3 \\
&= (k + 1)^2 + 4(k + 1) + 3 \blacksquare
\end{aligned}$$