

**UN ACERCAMIENTO HISTÓRICO A LA FORMACIÓN DEL
CONCEPTO DE DERIVADA**

**RAMIRO E. MENDOZA MEDRANO
VÍCTOR HUGO TORRES SALCEDO**

**UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SINCELEJO
2003**

**UN ACERCAMIENTO HISTÓRICO A LA FORMACIÓN DEL
CONCEPTO DE DERIVADA**

**RAMIRO E. MENDOZA MEDRANO
VÍCTOR HUGO TORRES SALCEDO**

**Trabajo de grado presentado como requisito parcial para
obtener el título de Licenciado en Matemáticas**

**JAIRO ESCORCIA MERCADO
Director**

**UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SINCELEJO
2003**

Nota de aceptación

Presidente del jurado

Jurado

Jurado

Sincelejo, Septiembre de 2003

DEDICATORIA

A Dios, creador del universo.

A mis padres **FRANCISCO TORRES** y **GLORIA SALCEDO** quienes me apoyaron durante mis estudios universitarios.

A mis hermanos, en especial a **CARMEN** y **NEILA**, porque sin su incondicional ayuda, durante mis estudios no fuera quien soy hoy día.

A todos mis compañeros de estudio.

VÍCTOR

A Dios todopoderoso por darme la voluntad necesaria para sobrellevar los obstáculos presentados.

A mi madre querida **MARÍA MEDRANO** y a mi padre **URIEL MENDOZA** quienes siempre han estado en los momentos más difíciles.

A mi hermano **NAIN** quien de manera callada ha estado siempre dándome fuerza para seguir adelante.

A todos los amigos de la Universidad, en especial a **JOSÉ LUIS** y mi compañero de trabajo **VÍCTOR**.

A la familia **OQUENDO ROMERO**.

RAMIRO

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad de Sucre, por habernos brindado la oportunidad de formarnos profesionalmente.

Al profesor **JAIRO ESCORCIA MERCADO** por su valiosa asesoría.

Al profesor **MARCOS BETIN** por las sugerencias hechas para el mejoramiento del trabajo.

A todos nuestros amigos.

CONTENIDO

	Pág
INTRODUCCIÓN	11
CAPITULO 1	14
1. PROBLEMA	14
1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	14
1.2 JUSTIFICACIÓN	16
1.3 OBJETIVOS	19
1.3.1 OBJETIVO GENERAL	19
1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	19
CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO	20
2.1 ANTECEDENTES	20
2.2 BASES TEÓRICAS	25
TEORÍA SOBRE CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO	25
2.3 MARCO CONCEPTUAL	37
CAPITULO 3. MARCO METODOLÓGICO	65
3.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN	65
3.2 POBLACIÓN Y MUESTRA	65

3.3 RECURSOS	66
3.3.1 Recursos didácticos	66
3.3.2 Recursos humanos e institucionales	67
3.4 DESCRIPCIÓN DEL PROCESO METODOLÓGICO	67
3.5 FUENTES DE INFORMACIÓN	69
CAPITULO 4	70
4.1 ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	70
4.2 EXPERIENCIA DE LAS ORIENTACIONES PEDAGÓGICAS	70
CONCLUSIONES	83
RECOMENDACIONES	85
BIBLIOGRAFÍA	87
ANEXOS	

RESUMEN

Aportes de investigadores y educadores como Kline, Courant, Ernest, Thurton, etc., a cerca de la importancia de la historia de las ciencias en el aprendizaje de los conceptos ponen de manifiesto la necesidad de buscar estrategias de enseñanza que ayuden al estudiante a comprender conceptos, en particular el concepto de derivada, una posible estrategia que formulamos es desarrollar inicialmente actividades utilizando una metodología dinámica y participativa en donde el estudiante tenga un acercamiento intuitivo del concepto de derivada, que autores como Barrow, Fermat, Newton y Leibnitz hacen del mismo, a partir del cálculo de rectas tangentes, hallar valores máximos y mínimos, para luego darle un tratamiento técnico formal con el objetivo principal de posibilitar la comprensión del concepto de derivada.

Por último, se procede a dar las conclusiones del trabajo y las recomendaciones necesarias para quienes decidan abordar el concepto de derivada teniendo en cuenta la estrategia planeada.

ABSTRACT

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas son quizás de las ciencias más antiguas, y a lo largo de su desarrollo histórico se han dado acontecimientos de mucha importancia, como el que se dio a mediados del siglo XVIII, el inicio del cálculo diferencial o de la “matemática de los cambios”.

El Cálculo diferencial fue desarrollado por Newton (1642 – 1727) y Leibnitz (1646 – 1716) de manera simultánea e independiente, dando solución a problemas relacionados con el movimiento de los cuerpos (velocidad de un móvil en un instante de tiempo) y a problemas geométricos tales como el trazo de la recta tangente a una curva en un punto cualquiera de ésta, de otro lado se tenía la inquietud de hallar el máximo o mínimo valor de una función.

El Cálculo diferencial a través de los años ha influenciado el desarrollo científico en muchos campos del saber tales como: Física, Astronomía, Química, Biología, Estadística, Ciencias Económicas, entre otras. Además, este se ocupa del análisis de las derivadas de las funciones y sus aplicaciones respectivas.

Durante nuestro estudio de Licenciatura en Matemáticas entre los años de 1998 y 2001 recibimos muy poca información histórica sobre los orígenes de los conceptos matemáticos o sobre las motivaciones que condujeron a su creación.

“Sabemos que cualquier teoría matemática es el resultado de esfuerzos humanos en el pasado y algunas ideas, por lo menos de sus motivaciones originales, pueden tener un valor educativo,

pues los estudiantes podrían conseguir así una mejor comprensión de los conocimientos matemáticos”¹

La historia del desarrollo de una teoría matemática es como un vector que nos orienta acerca de la dirección que ha venido tomando dicha teoría, mostrándonos además, las dificultades y los tiempos de maduración de los nuevos enfoques, lo cual nos permite entender porqué hay procesos que requieren de mayor madurez matemática que otros; MORRIS KLINE afirma al respecto:

“Todo maestro de secundaria y universidad debería conocer la historia de la matemática, hay muchas razones para ello, pero quizás la más importante de todas es la de que es una excelente guía pedagógica”²

Apoyados en los resultados de las entrevistas realizadas a los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas en el segundo periodo del año 2001, como se describe en el planteamiento del problema, nos damos cuenta que de cierta forma es poca la comprensión del concepto de derivada en la mayoría de los estudiantes de los cursos de Cálculo Diferencial, por lo cual creemos necesario hacer un trabajo sobre estrategias metodológicas para su enseñanza y consideramos que una posibilidad para mejorar la comprensión es a través de un acercamiento histórico a la formación del concepto de derivada.

¹ ESCORCIA MERCADO, Jairo; OROZCO HERRERA, Bernardo; MORENO ÁLVAREZ, Wilson. Didáctica especial de las matemáticas. Universidad de Sucre, Sincelejo 1988

² CASTRO CHADID, Iván. Pasado, presente y futuro del cálculo en Colombia, Grupo Editorial Ibero – América de Colombia S.A. Bogotá 1997. pág 62.

Se llevarán a cabo actividades didácticas que relacionen el concepto con su desarrollo histórico basados en reflexiones de los métodos expuestos por Fermat, Barrow, Newton y Leibnitz para el estudio de la derivada.

El grupo de investigación pretende con la elaboración del trabajo:

Tener un acercamiento al desarrollo histórico de algunos elementos teóricos o conceptuales que incidieron en la formación del concepto de derivada, con el ánimo de comprender dicho proceso y sugerir una forma de cómo presentar el desarrollo de dicho concepto.

Para que el lector tenga una mayor claridad, el grupo de trabajo ha establecido el siguiente orden:

En el primer capítulo se comenta el origen de la propuesta, la justificación y los objetivos.

El segundo capítulo hace referencia al marco teórico en el cual se encuentran los antecedentes, las bases teóricas y el marco conceptual.

En el tercer capítulo se expone el diseño metodológico, donde se ubica el tipo de estudio, el proceso desarrollado para dar solución al problema planteado y la muestra seleccionada.

En el cuarto capítulo se ubican el análisis e interpretación de la información y por último se formulan las conclusiones y recomendaciones que se consideran pertinentes y necesarias.

CAPITULO 1

1. PROBLEMA

Dificultades en la comprensión de algunos conceptos e ideas relacionadas con la derivada en estudiantes de la Universidad de Sucre, del Programa de Licenciatura en Matemáticas.

1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Después de seis semestre académicos de haber cursado la asignatura Cálculo diferencial como estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas, durante el segundo periodo académico del año 1998, decidimos entrevistar a compañeros que se encontraban cursando la asignatura Cálculo diferencial para analizar sobre el cómo se está dando el proceso enseñanza – aprendizaje y si se ha utilizado elementos del desarrollo histórico del concepto de derivada en dicho proceso de enseñanza, pues esto es una necesidad en el desarrollo de la matemática escolar, tal como se plantea en los lineamientos curriculares emanados por el Ministerio de Educación Nacional en los cuales se propone que es necesario:

“El uso de la historia en el desarrollo de la matemática escolar para orientar la comprensión de ideas de forma significativa”³

³ MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos curriculares. Santa fé de Bogotá. MEN 1998. pág 30 – 31.

Del análisis del cuestionario diagnóstico aplicado se ha podido detectar ciertas dificultades en la comprensión de algunos conceptos e ideas relacionadas con la derivada, dado que de 95 estudiantes encuestados en el programa de Licenciatura en Matemáticas, 81 estudiantes que representan el 85.26%, manifiestan no haber tenido un acercamiento histórico sobre la formación del concepto de derivada.

De otro lado 67 estudiantes, manifiestan no conocer los problemas que originaron el desarrollo de la formación del concepto de derivada, los cuales representan el 70.5%.

Hay algunos que manifiestan no saber el concepto de derivada y los elementos conceptuales involucrados en él.

De los resultados arrojados por el cuestionario diagnóstico se puede apreciar que las dificultades en la comprensión de algunos conceptos e ideas relacionadas con la derivada que presentan estos futuros docentes lo consideramos un problema ya que tales dificultades en la comprensión del concepto de derivada puede repercutir en los estudiantes que estos tengan a su cargo más adelante cuando se encuentren laborando.

De ahí que consideramos necesario llevar a cabo un estudio para ver como se puede mejorar la presentación, estudio y la comprensión del concepto de derivada a través de un acercamiento histórico a la formación del mismo.

No obstante, el hecho que no se tenga conocimiento del proceso histórico de la formación del concepto de derivada, no influye en

la comprensión del mismo, sin embargo discutir el aspecto histórico durante el desarrollo del concepto puede favorecer la comprensión de dicho concepto de manera significativa.

Esta propuesta se concibe, con el soporte de teorías estudiadas (una nueva visión del conocimiento matemático en la escuela, estructura curricular, enfoques de la resolución de problemas...) como opción de solución para facilitar la comprensión del concepto de derivada y estará dirigida a explorar y meditar sobre el siguiente interrogante:

¿Cómo posibilitar la comprensión del concepto de derivada en los estudiantes de Cálculo diferencial, a través de un acercamiento histórico de la formación del concepto?

1.2 JUSTIFICACIÓN

Haciendo una revisión general en los textos de Cálculo Diferencial como: (Leithold, Apóstol, Stewart, entre otros) nos podemos dar cuenta, que estos presentan poco o nada de la relación entre los conceptos netamente matemáticos y la historia de estos, como es el origen y gestación de los mismos.

“Por otro lado el conocimiento de la historia proporciona además de una visión dinámica de las matemáticas y permite apreciar como sus desarrollos han estado relacionados con las circunstancias sociales y culturales e interconectados con los avances de otras disciplinas, lo que trae consigo importantes implicaciones didácticas: Posibilidad de conjeturar acerca de desarrollos futuros, reflexión, sobre limitaciones y alcances en el

pasado, apreciación de las dificultades para la construcción del nuevo conocimiento”⁴

Meditando lo anterior y teniendo presente que la mayor parte de los docentes de matemática imparten la enseñanza de los conceptos y para nuestro propósito el Cálculo diferencial sin una visión preliminar de la historia de esta rama de las matemáticas, es necesario establecer una estrecha relación entre los conceptos y su evolución histórica.

Con el desarrollo del presente trabajo se busca valorar la importancia que juega la historia para el desarrollo del Cálculo Diferencial, en especial el concepto de derivada de una función y el aprendizaje del mismo.

De esta forma buscaremos concientizar a educadores y educandos que se hace necesario hacer “un acercamiento histórico a la formación del concepto de derivada” porque:

- ☞ Las reflexiones que se hagan en torno al acercamiento histórico y a las actividades que se desarrollen en el trabajo de campo redundaran en el beneficio o mejoramiento en el proceso de la enseñanza – aprendizaje del concepto de derivada.
- ☞ Este estudio ayudaría a reorientar la enseñanza del Cálculo diferencial y en especial el concepto de derivada.

⁴MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos curriculares. Santa fé de Bogotá. MEN 1998. pág 30

- ☞ El estudiante adquiere diferentes contextualizaciones del concepto de derivada.
- ☞ El profesor contribuye a facilitar su labor pedagógica.

Es pertinente porque:

- ☞ En los lineamientos curriculares emanados por el MEN se plantea el uso de la historia en el desarrollo de la matemática escolar.
- ☞ Pocos trabajos han hecho aportes al estudio de la historia de la formación del concepto de derivada en la Universidad de Sucre.
- ☞ El desarrollo de las clases debe involucrar problemas provenientes de cualquier contexto como estrategias didácticas.

Es viable porque:

- ☞ Se cuenta con material bibliográfico especializado y rico en la temática que queremos tratar.
- ☞ Las actividades a realizar involucran a la geometría y al álgebra a las cuales se ha tenido acercamiento en semestres anteriores y se pueden poner en práctica en el desarrollo de ésta temática o este trabajo.

- ☞ Contamos con la disposición de colaboración de los docentes que dirigen la asignatura en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sucre.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo general

Contribuir a la comprensión del concepto de derivada impulsando formas de enseñanza basadas en el desarrollo histórico de su formación.

1.3.2 Objetivos específicos

- ☞ Concientizar a los futuros docentes del valor que tiene la historia para la dinamización de los procesos, de enseñanza de la matemática escolar.
- ☞ Plantear a los estudiantes de Cálculo diferencial del programa de Licenciatura en Matemáticas resolver algunos problemas aplicando los métodos socializados.
- ☞ Resolver o rediseñar algunos problemas, planteados por autores consultados.
- ☞ Organizar la presentación teórica de algunas proposiciones sobre la derivada de una función establecida por autores como: (Fermat, Barrow, Newton y Leibnitz)

CAPITULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1 ANTECEDENTES

Haciendo una revisión general de los trabajos o proyectos realizados en la Universidad de Sucre a nivel de pregrado presentados en el programa de Licenciatura en Matemáticas, alusivos a este tema; nos damos cuenta que son pocos los estudios hechos, entre los estudios realizados destacamos la monografía de grado titulada:

“Demostración gráfica del teorema el álgebra de derivadas”⁵ realizada por Leonardo Fabio Camargo y Jamis Pérez Pérez, los cuales opinan o sugieren que: “En la mayoría de textos de Cálculo elemental, las presentaciones que hacen de la derivada son de carácter geométrico, hallando la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto o aplicando la noción de límite en las cuales se presentan ambigüedades cuando se van a demostrar e interpretar los teoremas de la derivada, ya que estos se hacen con la ayuda del concepto de función y el álgebra de funciones.

Además, manifiestan que desde tiempos remotos, los matemáticos se fueron percatando gradualmente de los

⁵ CAMARGO, Leonardo Fabio y PÉREZ PÉREZ, Jamis. Demostración gráfica del teorema el álgebra de derivadas. Universidad de Sucre, Sincelejo 1998.

problemas que surgían de distintos tipos de movimientos, así como los problemas geométricos que no se habían podido solucionar con los métodos que existían, es decir con ellos no se podía calcular la velocidad de un móvil en cualquier instante y trazar una tangente a una curva en un punto dado.

Estas inquietudes condujeron a una rama del análisis que recibió el nombre de Cálculo diferencial.

Otro estudio que podemos tomar como antecedente en el aspecto histórico, es el titulado “Desarrollo histórico del teorema fundamental del álgebra”⁶ cuyo autor es Ubaldo Buelvas Solórzano quien nos expresa en este trabajo que:

“El estudio de la historia de las matemáticas contribuye a despertar inquietudes por muchos de sus temas y por lo mismo se convierte en una poderosa arma pedagógica para su enseñanza” y en este sentido también pretende el presente trabajo hacer un pequeño aporte.

Destacamos un trabajo titulado “Pasajes históricos del álgebra desde la herencia primitiva hasta la Al-jwarizmi”⁷, desarrollado por Pablo Elías Rodríguez Pacheco, el cual nos da un referente teórico en cuanto a lo importante y fundamental que es conocer la historia de un tema en cualquier ciencia.

El autor manifiesta que:

⁶ BUELVAS SOLÓRZANO, Ubaldo. Desarrollo histórico del teorema fundamental del álgebra. Universidad de Sucre, Sincelejo 1984

⁷ RODRÍGUEZ PACHECO, Pablo E. Pasajes históricos del álgebra desde la herencia primitiva hasta la Al-jwarizmi. Universidad de Sucre, Sincelejo 1989.

“Debemos reconocer los méritos de todos aquellos predecesores que han contribuido de una u otra forma al adelanto de la ciencia. Todo docente o persona dedicada a la enseñanza de la matemática, está ligado a la antigüedad por la naturaleza misma de esta área, es decir, que la universalidad y la independencia de los principios matemáticos respecto al tiempo hacen que éste (profesor) vea el pasado de esta ciencia con admiración. Saber de los aportes hechos a la ciencia de las matemáticas tratadas siglos atrás o en cualquier otra ciencia, es un privilegio para cualquier persona interesada en el conocimiento, y el hecho de mantener y despertar el espíritu investigativo en tales aportes, lo es con mucha más razón”

Existe otro trabajo titulado “Estudio exploratorio sobre algunas interpretaciones del concepto de derivada”⁸ a cargo de Sandra Judith Santos Mendoza y Rafael Augusto Vallestá Alfaro.

Con este trabajo los estudiantes buscaban:

Posibilitar la comprensión del concepto de derivada a través del tratamiento de las diferentes interpretaciones del concepto de derivada con situaciones problema que involucran razón de cambio de una variable con respecto a otra, pero haciendo poca alusión a la parte histórica.

⁸ SANTOS MENDOZA, Sandra J. y VALLESTA ALFARO, Rafael Augusto. Estudio exploratorio sobre algunas interpretaciones del concepto de derivada. Universidad de Sucre, Sincelejo 2002

Los estudiantes llegan a la conclusión que:

El tratamiento de algunas interpretaciones del concepto de derivada, a través de la solución de situaciones problema que involucran razón de cambio de una variable con respecto a otra, se perfilan como una estrategia didáctica para abordar el estudio de la derivada, ya que después de llevar esta experiencia al aula, se observó que los estudiantes se mostraron atentos y participativos a explorar y mostrar diferentes formas de concebir a la derivada y le encontraron más sentido al estudio de ésta.

A nivel internacional se encontraron varias investigaciones, entre ellas la de Cristólogo Dolores Flores, en su investigación “Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar”⁹ supone que el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (PLV) puede favorecer la comprensión de los conceptos de la matemática del cambio. Él afirma que los conceptos son el reflejo de una clase de cosas, procesos, relaciones de la realidad objetiva o de la conciencia.

Otra investigación de Cristólogo Dolores Flores pero en compañía de Alfonso Catalám Adame titulada “Formación del concepto de derivada a través de la variación”¹⁰ ellos introducen el concepto de derivada sobre la base de la formación por etapas

⁹ DOLORES FLORES, Cristólogo. Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar. Facultad de Matemática. Universidad Autónoma de Guerrero. Conaciyt, México “Resumen de Relme 12” 1998 pág 37

¹⁰ CATALAM ADAME, Alfonso y DOLORES FLORES, Cristólogo. Formación del concepto de derivada a través de la variación. Universidad Autónoma de Guerrero. Conaciyt, México “Resumen de Relme 12” 1998

de las acciones mentales (FEAM). Para la formación de dicho concepto inician con la cuantificación del cambio por medio de las diferencias.

Después estudian los cambios relativos como rapidez y velocidad media, y finalmente los cambios infinitamente pequeños, modelados por medio de los diferenciales. Bajo esta línea pretendían la formación de la derivada como cociente de diferenciales desarrollando principalmente las actividades de predicción, estimación, comparación y aproximación.

Por otro lado la investigación de Roberto González y Ricardo Cantoral titulada “Diseño de situaciones didácticas de resignificación: El caso de la derivada como un organizador de las derivadas sucesivas”¹¹ ellos utilizaron el concepto de situación variacional como el conjunto de problemas que requieren de un tratamiento variacional tanto desde el punto de vista de las funciones cognitivas de quienes las aborden como desde la perspectiva matemática y epistemológica.

Emplean el término de resignificación porque el concepto de derivada adquiere significaciones que evolucionan con el progreso del alumno en su estudio matemático. Ellos plantean que el concepto de derivada surge hasta que domine el concepto de “derivada sucesiva”; y para ellos diseñaron situaciones didácticas en las cuales aplicaron su planteamiento.

¹¹ GONZÁLEZ, Roberto y CANTORAL, Ricardo. Diseño de situaciones didácticas de resignificación: “El caso de la derivada como un organizador de las derivadas sucesivas” CINVESTAV. IPN. México “Resumen del Relme 12” 1998 pág 46

2.2 BASES TEÓRICAS

Para sustentar el presente trabajo contamos con teorías que hacen alusión a Construcción del Conocimiento, teoría del método genético y aspectos relacionados con el uso y el papel de la historia de las matemáticas en la formación del Concepto de derivada.

Entre las teorías de Construcción del Conocimiento que revisamos para la realización del presente trabajo está la teoría Constructiva de Piaget, la teoría del aprendizaje significativo de Ausbel, se tiene en cuenta a Paul Ernest en cuanto al Constructivismo matemático, por último se hace una pequeña reseña histórica del desarrollo de la derivada para conocer algunos problemas que originaron la formación del mismo

TEORÍA SOBRE CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

Constructivismo

Podemos decir que los orígenes del Constructivismo se encuentran en la psicología educativa a la cual le interesa el estudio de los procesos de aprendizaje. Se encuentra influenciada por corrientes del pensamiento psicológico ofrecidas por Kelly y Ausbel, sin embargo la esencia formal del Constructivismo se genera a partir de la epistemología genética de Piaget, en la cual se postula que no es posible referirse a la realidad en sí misma, si no a la Construcción que a partir de la interacción con el mundo cada persona pueda rehacer. Dentro del modelo constructivista esta definido que el conocimiento no

se adquiere pasivamente, ni por asimilación de aprendizajes anteriores, ni tampoco es copia de la realidad, por el contrario es una construcción que cada alumno realiza con sus propias estructuras cognitivas.

El desarrollo cognitivo debe comprenderse como la adquisición sucesiva de estructuras lógicas cada vez más complejas que subyacen a las distintas áreas y situaciones, que la persona es capaz de ir resolviendo a medida que crece.

Constructivismo matemático: Una nueva visión.

Son muchos los factores que han originado cambios profundos en las concepciones de las matemáticas escolares, entre las cuales tenemos los nuevos planteamientos de la filosofía de las matemáticas, el desarrollo de las matemáticas en términos de educación y los estudios de Sociología del Conocimiento, Paul Ernest “ha propuesto una reconceptualización del papel de la filosofía de las matemáticas, que tengan en cuenta la naturaleza, justificación y génesis tanto del conocimiento matemático como de los objetos de las matemáticas, las aplicaciones de ésta a la ciencia y en la tecnología y el hacer matemático a lo largo de la historia”¹²

¹² MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos curriculares. Santa fé de Bogotá. MEN 1998 pág 26

Aprendizaje significativo

Ausbel ha sido uno de los autores que más ha influido en la elaboración y divulgación de las ideas modificadoras de las formas de aprender y de suministrar el conocimiento. Ausbel tiene la concepción de que el aprendizaje debe ser una actividad significativa para el individuo que aprende y dicho significado está relacionado con la existencia de interrelaciones entre el conocimiento nuevo y el que ya posee el educando, para Ausbel la enseñanza tradicional es muy poco eficaz ya que consiste en la repetición mecánica de elementos que el alumno no puede estructurar como un todo.

Ausbel considera el aprender como sinónimo de comprender lo cual nos conlleva a decir que lo que el alumno comprenda será lo que aprende y lo que recordará mejor, puesto que queda en sus estructuras de conocimiento.

El aprendizaje significativo se ocupa principalmente, del problema de la enseñanza y de la adquisición y retención de las estructuras de significados en particular del surgimiento de nuevos significados en el alumno.

Una nueva visión del conocimiento matemático en la escuela.

Aceptar que el conocimiento matemático es resultado de una evolución histórica, de un proceso cultural cuyo estado actual no es, en muchos casos, la culminación definitiva del conocimiento

y cuyos aspectos formales constituyen sólo una faceta de este conocimiento.

“El conocimiento de la historia proporciona además una visión dinámica de las matemáticas y permite apreciar cómo sus desarrollos han estado relacionados con las circunstancias sociales y culturales e interconectados con los avances de otras disciplinas, lo que trae consigo importantes implicaciones didácticas:

Posibilidad de conjeturar acerca de desarrollos futuros, reflexión sobre limitaciones y alcances en el pasado, apreciación de las dificultades para la construcción del nuevo conocimiento.

Es importante resaltar que el valor del conocimiento histórico al abordar el conocimiento matemático escolar no consiste en recopilar una serie de anécdotas y curiosidades para presentarlas ocasionalmente en el aula. El conocimiento de la historia puede ser enriquecedor entre otros aspectos para orientar la comprensión de ideas en forma significativa”¹³

La historia de las matemáticas como instrumento didáctico, el método genético.

La forma de utilizar la historia de las matemáticas como un instrumento didáctico colaborador puede llevarse a cabo de muy diversas maneras, se puede por ejemplo: Proceder, o en el

¹³ MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos curriculares. Santa fé de Bogotá 1998 pág 29 – 30.

transcurso, mediante una introducción histórica, la exposición de cada tema, situando en la historia los problemas que se van a abordar.

Se puede añadir a los apuntes que se entregan a los alumnos, indicaciones breves, resúmenes o notas históricas. Se puede también a lo largo del desarrollo de la clase y en cualquier momento indicar brevemente a que matemático o corriente matemática se debe la introducción de un concepto nuevo, la demostración de un teorema o la resolución de un problema, etc.

Así mismo, se puede ensayar en algunos temas el método genético:

“El método genético, extraído de la Biología, intenta reconstruir el clima psicológico que envuelve a cada momento creador que haya supuesto un salto cualitativo en la historia de las matemáticas.

La aplicación de este método en la enseñanza, que ha sido reivindicado por grandes matemáticos y profesores de matemática, pretende demostrar que para una mejor comprensión de un concepto determinado el alumno ha de repetir a grandes rasgos el proceso histórico que se ha desarrollado hasta la formulación actual del concepto”¹⁴

¹⁴ GONZÁLES URBANEJA P.M. Historia de las matemáticas: Integración cultural de las matemáticas, Génesis de los conceptos de orientación de su enseñanza. Seminario permanente de la historia de las matemáticas. Ice de la Universidad Politécnica de Cataluña. 1B San José de Calssanc. San Quinti. Barcelona 1991, pág 286

Otto Toeplitz, es uno de los creadores del método genético, aplicándolo en uno de los textos más famosos sobre el cálculo infinitesimal y su historia, la obra *The Calculus, a genetic approach* en el prefacio de la edición alemana su discípulo Gkötthe describe la naturaleza del método genético (Toeplitz 1963):

“El método genético es la guía más segura para este ascenso suave (en el estudio del cálculo), que de otra manera no es fácil de encontrar. Seguid el curso genético que es el camino que ha seguido el hombre en su comprensión de las matemáticas, y veréis que la humanidad ha ido ascendiendo gradualmente desde lo más simple a lo más complejo. Los métodos didácticos pueden beneficiarse enormemente del estudio de la historia”¹⁵

Morris Kline afirma al respecto que:

“Cada persona debe pasar aproximadamente por las mismas experiencias por los que pasaron sus antepasados si quiere alcanzar el nivel de pensamiento que muchas generaciones han alcanzado”¹⁶

La aplicación del método genético consiste en contextualizar históricamente, realizando una reconstrucción de la historia que haga patente el conocimiento de las preguntas y necesidades que motivaron en su momento histórico la introducción de un concepto nuevo, así como las dificultades intrínsecas inherentes al alumbramiento de algunos conceptos y a la resolución de

¹⁵ Ibid

¹⁶ Ibid

algunos problemas, dificultades, que como señalaba Kline “se manifiestan así mismo de forma rotunda en el aprendizaje de los mismos conceptos y en la resolución de los mismos problemas”¹⁷

Courant manifiesta que “los maestros, estudiantes y los amantes del estudio en general, que quieran comprender realmente las fuerzas y las formas de las ciencias, han de tener alguna comprensión del estado presente del conocimiento como un resultado de la evolución histórica”¹⁸

ALGUNOS PROBLEMAS QUE DIERON ORIGEN AL CALCULO DIFERENCIAL¹⁹

Después de la difícil adopción del concepto de función llega el cálculo que junto a la geometría Euclidea, se constituyen en pilares de la matemática.

Aunque este fue alguna extensión de respuestas a problemas atacados ya por los griegos, el cálculo fue creado principalmente para tratar los mayores problemas del siglo XVII.

Se necesitaba ante todo poder interrelacionar las aceleraciones, velocidades y distancias recorridas por cuerpos en movimiento, de relacionar pendientes de curvas con las razones de cambio, de hallar valores máximos y/o mínimos que podía tomar una

¹⁷ Ibid, pág 286

¹⁸ Ibid, pág 283

¹⁹ KLINE Morris. Mathematical thought from ancient to modern times. Vol. I Oxford University Press, 1972. pág 356

función (por ejemplo, las distancias mayor y menor entre un planeta y el sol)

El cálculo es la matemática del movimiento y el cambio. Donde haya movimiento o crecimiento, donde actúen fuerzas variables para producir aceleración, el cálculo es el instrumento adecuado. Esto fue cierto en los principios de este tema y sigue siéndolo en la actualidad.

El primero de los problemas que dieron pie para la creación del cálculo diferencial fue: Dada la formula para la distancia de un cuerpo en función del tiempo, hallar la velocidad y la aceleración en cualquier instante.

Este problema originado directamente del estudio del movimiento, y la dificultad presentada fue el de que la velocidad y la aceleración variaba de instante en instante. En el cálculo de la velocidad instantánea, por ejemplo, en el caso de la velocidad promedio, uno no puede dividir la distancia recorrida por el tiempo de viaje, porque en un instante dado ambos, la distancia recorrida y el tiempo son cero, y $\frac{0}{0}$ es indefinido. Sin embargo, esto fue aclarado por grandes físicos, los cuales expresaron que el objeto móvil tiene una velocidad en cada instante de su recorrido.

El segundo tipo de problemas fue hallar la tangente a una curva, este fue un problema de geometría pura y fue de gran importancia para aplicaciones científicas. Como nosotros conocemos, la óptica, fue una de las mayores ocupaciones

científicas del siglo XVII; el diseño de lentes fue de inmediato interés para Fermat, Descartes, Huygens y Newton. Otro problema que implica la tangente a una curva se originó en el estudio del movimiento. La dirección de movimiento de un cuerpo móvil en cualquier punto de su camino es la dirección de la tangente al camino.

El tercer problema fue hallar el máximo y/o mínimo valor de una función. Cuando una bala es disparada por un cañón, la distancia alcanzada horizontalmente, depende del ángulo de inclinación del cañón. Un problema práctico fue hallar el ángulo que maximice el alcance. En el siglo XVII, Galileo determinó que (en el vacío) el máximo alcance se obtiene para un ángulo de tiro de 45° , él también obtuvo la máxima altura alcanzada por proyectiles disparados desde varios ángulos. El estudio del movimiento de los planetas también implicó problemas de máximos y mínimos, tales como hallar la mayor y menor distancia de un planeta al sol.

Los problemas del cálculo fueron atacados por lo menos por una docena de los grandes matemáticos del siglo XVII.

Sin embargo todas sus contribuciones fueron coronadas por los logros de Newton y Leibnitz.

El problema del cálculo de la velocidad instantánea a causa del conocimiento de la distancia recorrida como una función del tiempo, caso especial del cálculo instantáneo de razón de cambio de una variable con respecto a otra. En cuanto al primer

problema de razón de cambio su tratamiento general se debe a Newton.

Diversos métodos fueron propuestos para hallar la tangente a una curva.

En su "Traite des indivisible", el cual data de 1634 (sin embargo no fue publicada hasta 1693, Giles Persone de Roberval (1602 – 1675) generalizó un método que Arquímedes había usado para hallar la tangente en cualquier punto de su espiral. Igual que Arquímedes, Roberval pensó de una curva como el lugar de un punto moviéndose bajo la acción de dos velocidades. Así un proyectil de cañón es sometido por una velocidad horizontal y una velocidad vertical. La resultante de estas dos velocidades, es la diagonal del rectángulo que forma las velocidades horizontal y la vertical y la cual Roberval define como la tangente a la curva.

Torricelli aplicó el mismo método de Roberval para obtener tangentes a curvas cuyas ecuaciones eran de la forma $y = x^n$, la noción de una tangente como una línea tomando la dirección de la velocidad resultante fue más complicada que la definición de los griegos de una línea tocando una curva, este nuevo concepto aplicado a muchas curvas falló, porque enlazaba geometría pura y dinámica, lo cual ya en los trabajos de Galileo habían sido considerados como esencialmente distintos. De otro lado, esta noción de tangente fue censurable por razones matemáticas, porque esta definición de tangente se basaba en conceptos físicos. Por lo tanto otros métodos de hallar tangentes ganaban aprobación.

El método de Fermat, el cual ideó en 1629 y es fundado en su manuscrito *Methodus ad Disquirendam maximam et minimam* (Métodos para hallar máximos y mínimos) en 1637 (Ver página 40)

Para Descartes el problema de hallar una tangente a una curva fue importante porque este permitió obtener unas propiedades de la curva, por ejemplo, el ángulo de intersección de dos curvas. Él dice, "Este es el más útil, y el problema más general, no solo que yo conozco, pero todavía aún ese que yo tengo deseo de conocer en geometría. Él dio su método en el segundo libro de la geometría. Este fue puramente algebraico y no involucraba el concepto de límite.

De otro lado Isaac Barrow (1630 – 77) también dio un método de hallar la tangente (Ver página 50) Barrow fue un profesor de matemáticas en la Universidad de Cambridge. Versado en griego y árabe, él fue capaz de traducir algunos trabajos de Euclides, y mejorar un número de otras traducciones de los escritos de Euclides, Apolonio, Arquímedes y Teodosio. Su principal trabajo, la *Lectiones Geometricae* (1669), es una de las grandes contribuciones al cálculo.

El trabajo sobre la tercera clase de problemas, hallando el máximo y/o mínimos de una función, se puede decir que fue iniciado con una observación por Kepler, en su *Stereometria Doliorum* (1615) él demostró que, de todo paralelepípedo exacto inscrito en una esfera y que tiene base cuadrada, el cubo es el mayor.

Fermat en su *Methodus ad Disquirendan* dio su método de hallar máximos y mínimos de una función (ver pagina 40), el método es esencialmente uno de los que usó para hallar la tangente a una curva.

Por último, el cálculo que utilizamos hoy día se debe a la contribución de multitud de personajes. Sus raíces pueden rastrearse hasta la geometría clásica griega, pero su invención es obra sobre todo de los astrónomos, matemáticos y físicos del siglo XVII. Entre ellos se destacaron Rene Descartes (1596 – 1650), Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647), Pierre de Fermat (1601 – 1665), Jhon Wallis (1616 – 1703), Blaise Pascal (1623 – 1662), Isaac Barrow (1630 – 1677) y James Gregory (1638 – 1675) El trabajo culminó con las grandes creaciones de Newton y Leibnitz (1646 –1716)

Los esfuerzos de Newton y Leibnitz hicieron que el cálculo dejara de ser un apéndice de la geometría griega para convertirse en una ciencia independiente capaz de hacer frente a un amplio abanico de nuevos problemas científicos.

Newton y Leibnitz formularon los teoremas fundamentales del cálculo y detectaron en los trabajos particulares de sus colegas los métodos generales aplicables a todo tipo de funciones. Muchas de sus formulas operacionales, métodos de cálculo y símbolos matemáticos tienen aún plena vigencia.

“El cálculo fue el primer gran logro de la matemática moderna”, escribió John Von Newmann (1903 – 1957), uno de los más grandes matemáticos de este siglo; “y es difícil sobre estimar su

importancia. Pienso que define, de manera inequívoca, el comienzo de la matemática moderna; y el sistema de análisis matemático que en su desarrollo lógico, constituye el mayor avance técnico del pensamiento exacto”²⁰

Lo anterior nos da las bases para presentar el concepto de derivada por medio de un acercamiento histórico y que el aprendizaje del estudiante sea significativo debido a que se presenta una forma de redescubrimiento, tal como se plantea en los lineamientos curriculares emanados por el MEN en la cual se propone el uso de la historia en el desarrollo de la matemática escolar para orientar la comprensión de ideas en forma significativa.

2.3 MARCO CONCEPTUAL

Como tenemos necesidad de apoyar y enriquecer la enseñanza de las matemáticas con la implementación en didácticas en las cuales el aprendizaje se presente como un proceso de redescubrimiento, tal como se plantea en los lineamientos curriculares, además destacar la participación de los educandos en el proceso de construcción del conocimiento (como lo manifiesta Piaget) y la importancia del contexto en que esta se lleva a cabo, centramos nuestra mirada hacia resultados de investigaciones hechas en campos como el de la epistemología, psicología y la educación matemática.

²⁰ World of mathematics, Vol 4 (Nueva York: Simond and Schuster, 1966 “Mathematician” Por John Von Newmann, págs 2053 – 2063.

Con el propósito de llevar a cabo esta propuesta de aula en que además se reconoce la importancia en el desarrollo histórico del concepto de derivada, los talleres a desarrollar en el trabajo de campo se centran en una exploración de las ideas que traen los estudiantes sobre el tema y las actividades que se desarrollan en ellos tienen el objetivo de que los estudiantes con ayuda del docente lleguen a conceptualizaciones y formalización que posibiliten la comprensión del concepto de derivada.

De la teoría constructiva de Piaget se tendrán en cuenta aspectos como:

- ☞ El aprendizaje es un proceso constructivo interno autoestructurante.
- ☞ El grado de aprendizaje depende del nivel de desarrollo cognitivo.
- ☞ Los conocimientos previos como punto de partida para el aprendizaje.
- ☞ El aprendizaje se produce cuando entra en conflicto lo que el alumno ya sabe con lo que debería saber.

De la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel se tienen en cuenta aspectos como:

- ☞ El aprendizaje debe ser una actividad significativa para la persona que aprende.

- ☞ La interacción del conocimiento nuevo y el que ya posee el alumno.
- ☞ El alumno como procesador activo de la información.

De acuerdo con las interpretaciones que se pueden hacer de la derivada, Thurston²¹ señaló que las muchas maneras diferentes de entender la derivada, por ejemplo: Como una pequeña tasa de cambio (infinitesimal), como la derivada de X^n es nX^{n-1} , como definición formal, como pendiente de una recta, como velocidad instantánea, etc., es una lista interminable de todas las posibles maneras de pensar acerca de la derivada.

Teniendo en cuenta las diferentes maneras de interpretar la derivada señaladas por Thurston, a continuación presentaremos algunas definiciones y métodos del estudio de la derivada por distintos autores.

LAS DIFERENCIACIONES DE PIERRE DE FERMAT (1601 – 1665) “MÉTODO PARA HALLAR MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES”

Para los años de 1629, Fermat hizo dos importantes descubrimientos, el más importante de ellos lo dio a conocer años más tarde en un tratado titulado “Methodus ad disquerendan maximam et minimam” (Método para hallar

²¹ THURSTON: Tomado de: OLIVEROS, José Rodolfo. Aprendizaje de la derivada a través del flujo instantáneo. Universidad Autónoma Chapingo. CINVESTAV. IPN. México “Resumen de Relme 12” 1998

máximos y mínimos) Para curvas polinómicas de la forma $y = f(x)$, descubrió un método muy ingenioso para hallar los puntos en los que la función toma un valor máximo o un valor mínimo que se resume de la siguiente manera:

Fermat comparaba el valor de $f(x)$ en un cierto punto " x " con el valor de $f(x+\epsilon)$ en un punto muy próximo " $x+\epsilon$ " donde " ϵ " representa el incremento de la variable independiente.

De forma general estos dos valores serán claramente distintos pero en una <<CUMBRE>> o en el fondo de un <<VALLE>> de una curva <<LISA>> las diferencias serán casi imperceptibles (Ver Figura 1) por lo tanto para hallar los puntos que corresponden a los valores máximos o mínimos de la función, Fermat iguala $f(x)$ a $f(x+\epsilon)$, teniendo en cuenta que estos valores aunque no son exactamente iguales son <<CASI IGUALES>> y cuanto más pequeño sea el incremento " ϵ " entre los dos puntos, más cerca estará dicha pseudo – igualdad de ser una verdadera ecuación, Fermat después de dividir todo por " ϵ " y hacer " $\epsilon = 0$ ", el resultado le permite calcular las abscisas de los puntos máximos y/o mínimos de la función polinómica.

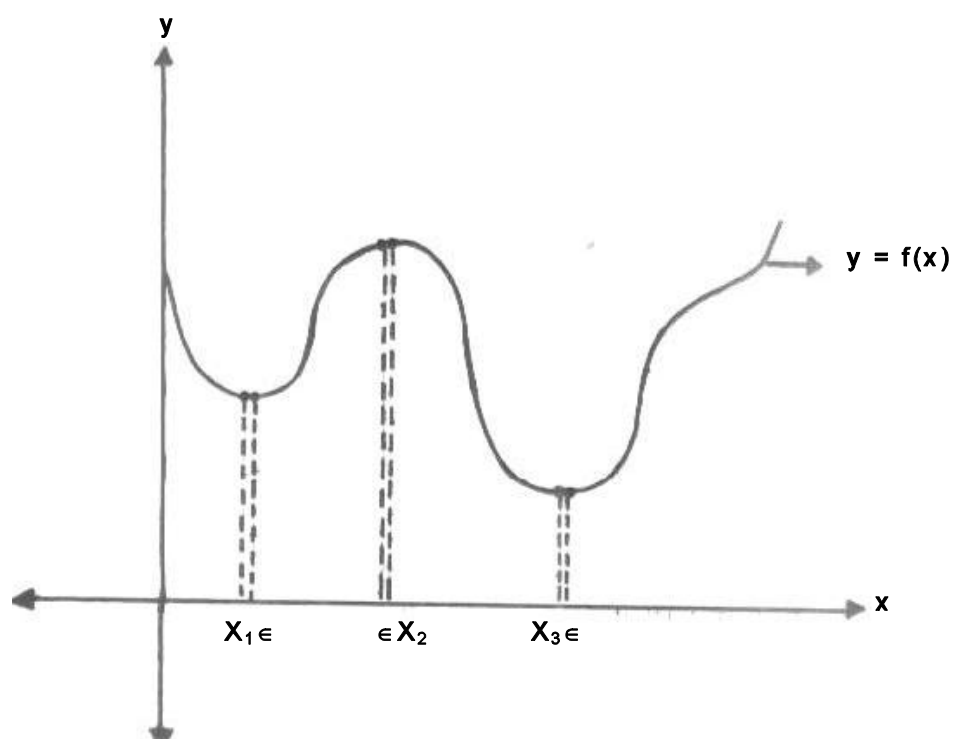


Figura 1.

Podemos apreciar que el método utilizado por Fermat para hallar máximos y mínimos de funciones polinómicas, nos permite conocer los valores de las abcisas en los cuales puede existir un valor máximo o un valor mínimo. Fermat no especifica cual de estos puntos teniendo como abcisas los valores calculados anteriormente corresponde al valor máximo y/o mínimo, de todo esto inferimos que para ver en que puntos de la función, teniendo como abcisas los valores calculados anteriormente, corresponde a un valor máximo o a un valor mínimo, evaluamos la función en puntos cercanos a cada valor de las abcisas y en consecuencia se pueden presentar los siguientes casos.

1. Si los valores de la función evaluados en estos puntos cercanos a cada abcisa son menores que el valor de la función evaluada en la abcisa se tiene un valor máximo.
2. Si los valores de la función evaluados en estos puntos cercanos a cada abcisa son mayores que el valor de la función evaluada en la abcisa se tiene un valor mínimo.
3. Si no se presentan los casos (1) y (2) la función no tiene valor máximo ni mínimo, es constante.

Vemos aquí en esencia el proceso que en matemáticas se conoce como “diferenciación”

El método de Fermat es equivalente a calcular $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$, e igualar este límite a cero.

Obviamente Fermat no disponía del concepto de límite como hoy se conoce, pero su método para determinar valores máximos y mínimos sigue un camino paralelo al que podemos ver actualmente en los libros de cálculo, excepto en el incremento de la variable independiente que hoy se suele utilizar “h” o “ Δx ” en vez de la “ ϵ ” de Fermat.

Por ejemplo para hallar los valores máximos y/o mínimos de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ siguiendo los lineamientos del método ideado por Fermat sería de la siguiente manera:

a. Incrementamos la función así:

$$\begin{aligned} f(x+\epsilon) &= \frac{1}{3}(x+\epsilon)^3 + (x+\epsilon)^2 - 3(x+\epsilon) + 1 \\ &= \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2\epsilon + 3x\epsilon^2 + \epsilon^3) + (x^2 + 2x\epsilon + \epsilon^2) - 3x - 3\epsilon + 1 \\ &= \frac{1}{3}x^3 + x^2\epsilon + x\epsilon^2 + \frac{1}{3}\epsilon^3 + x^2 + 2x\epsilon + \epsilon^2 - 3x - 3\epsilon + 1 \end{aligned}$$

b. Igualamos $f(x)$ a $f(x+\epsilon)$

$$\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1 = \frac{1}{3}x^3 + x^2\epsilon + x\epsilon^2 + \frac{1}{3}\epsilon^3 + x^2 + 2x\epsilon + \epsilon^2 - 3x - 3\epsilon + 1$$

reduciendo términos semejantes obtenemos:

$$x^2 \epsilon + x \epsilon^2 + \frac{1}{3} \epsilon^3 + 2x \epsilon + \epsilon^2 - 3 \epsilon = 0$$

c. Dividimos por “ ϵ ” cada término

$$\frac{x^2 \epsilon}{\epsilon} + \frac{x \epsilon^2}{\epsilon} + \frac{\frac{1}{3} \epsilon^3}{\epsilon} + \frac{2x \epsilon}{\epsilon} + \frac{\epsilon^2}{\epsilon} - \frac{3 \epsilon}{\epsilon} = 0$$

que simplificando tenemos que:

$$x^2 + x \epsilon + \frac{1}{3} \epsilon^2 + 2x + \epsilon - 3 = 0$$

d. Hacemos $\epsilon = 0$ para obtener

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad (1)$$

e. Hallamos los ceros de la ecuación (1) y estos corresponderán a las abcisas de los puntos máximos y/o mínimos, luego:

$$X^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$$

Donde $X_1 = -3$ y $X_2 = 1$ son abcisas en los puntos extremos de la función.

f. Verificamos cual de los ceros de (1) corresponde a abcisas de puntos extremos.

☞ Para $X_1 = -3$, evaluamos la función para $x < -3$ muy cercanos, así como para $x > -3$. así:

X	-3.4	-3.3	-3.2	-3.1	-3.0	-2.9	-2.8	-2.7	-2.6
f(x)	9.65	9.88	9.91	9.97	10	9.98	9.92	9.83	9.70

Ahora como los valores de la función, evaluados en estos puntos cercanos a -3 , tanto por la izquierda como por la derecha, son menores que el valor de la función en $X_1 = -3$, se tiene un valor máximo es decir $f(-3)$ es un valor máximo que tiene un valor de $f(-3) = 10$, así el punto $P_1 (-3, 10)$ es un punto extremo de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$.

☞ Para $X_2 = 1$, procedemos de manera análoga, así:

x	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
f(x)	-0.368	-0.49	-0.58	-0.64	-0.66	-0.64	-0.58	-0.47	-0.32

Como los valores de la función, evaluados en estos puntos cercanos a 1, tanto por la izquierda como por la derecha, son mayores que el valor de $X_2 = 1$, se tienen un valor mínimo en $f(1)$, que tiene un valor de $f(1) = -2/3$, así el punto $P_2 (1, -2/3)$ es un punto extremo de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$.

“ MÉTODO DE FERMAT PARA HALLAR RECTAS TANGENTES A UNA CURVA”

Para los años en que Fermat se encontraba desarrollando su geometría analítica, descubrió también como aplicar su procedimiento de los valores próximos de la variable para hallar

la recta tangente a una curva algebraica de la forma $y = f(x)$ como sigue:

Consideremos la figura adjunta.

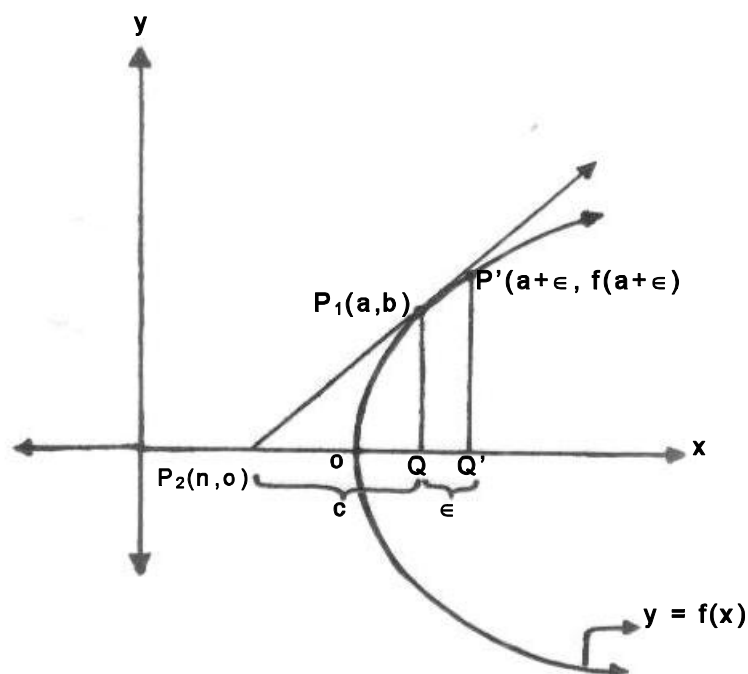


Figura 2

Si P_1 es un punto de la curva $y = f(x)$ en el que se desea hallar la recta tangente, y si las coordenadas de P_1 son (a, b) , entonces un punto próximo p' sobre la curva de coordenadas $x = a + \epsilon$, $y = f(a + \epsilon)$, estará tan próximo a la tangente que se puede considerar situado sobre la recta tangente y a la vez sobre la curva aproximadamente, por lo tanto si la subtangente en el punto P_1 es $\overline{P_2Q} = c$ (proyección del segmento de la recta tangente $\overline{P_2P_1}$, que es hipotenusa del triángulo rectángulo P_2QP_1 , sobre el eje x), entonces los triángulos rectángulos P_2QP_1 y $P_2Q'p'$ se pueden considerar como semejantes aproximadamente y de esta semejanza obtenemos la proporción:

$$\frac{b}{c} = \frac{f(a+\epsilon)}{c+\epsilon}$$

A partir de la cual, multiplicando en cruz tenemos que:

$$b(c+\epsilon) = cf(a+\epsilon)$$

Ahora por ser $b = f(a)$ tenemos

$$f(a)(c+\epsilon) = cf(a+\epsilon)$$

$$\Leftrightarrow cf(a) + \epsilon f(a) = cf(a+\epsilon)$$

Ahora dividiendo todo por " ϵ " obtenemos

$$\frac{cf(a)}{\epsilon} + f(a) = \frac{c}{\epsilon} f(a+\epsilon)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{\epsilon} f(a+\epsilon) - \frac{c}{\epsilon} f(a) = f(a)$$

$$\Leftrightarrow c \left[\frac{f(a+\epsilon)}{\epsilon} - \frac{f(a)}{\epsilon} \right] = f(a)$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{f(a)}{\frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon}} \quad (2)$$

En donde la igualdad (2) haciendo por último $\epsilon = 0$, se puede calcular fácilmente la subtangente " c " que nos determina unívocamente con el punto P_1 , la tangente buscada.

Dado que $P_1(a, f(a))$ y $P_2(n,0)$ son puntos por donde pasa la recta tangente y conocidos dos puntos por donde pasa una recta, podemos hallar su ecuación.

Nota: “n” es la abcisa del punto donde la recta tangente intercepta al eje x, además $n = a - c$ (Ver Figura 2).

El método de Fermat es equivalente a decir que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon}$ es la pendiente de la curva en el punto de la abcisa $x = a$.

Por ejemplo, para hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = -4x^2 + 8x + 1$ en el punto $P_1(2,1)$ por el método de Fermat procedemos así:

a. Calculamos el valor de la subtangente “c”, donde

$$c = \frac{f(a)}{\frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon}}, \text{ donde } a \text{ es la abcisa del punto de tangencia,}$$

así:

$$c = \frac{f(2)}{\frac{f(2+\epsilon) - f(2)}{\epsilon}} = \frac{1}{\frac{-4(2+\epsilon)^2 + 8(2+\epsilon) + 1 - 1}{\epsilon}}$$

$$= \frac{1}{\frac{-4(4+4\epsilon+\epsilon^2)+16+8\epsilon}{\epsilon}} = \frac{1}{\frac{-16-16\epsilon-4\epsilon^2+16+8\epsilon}{\epsilon}}$$

$$= \frac{1}{-8 \in -4 \in^2} = \frac{1}{\in (-8 - 4 \in)} = \frac{1}{-8 - 4 \in}$$

Haciendo $\in = 0$ tenemos que

$$c = -\frac{1}{8}$$

b. Calculamos el valor de la abcisa del punto donde la recta tangente intercepta al eje "x" donde $P_2(n,0)$ es dicho punto.

Sabemos que $n = a - c$, luego

$$n = 2 - \left(-\frac{1}{8}\right) = 2 + \frac{1}{8} = \frac{17}{8}$$

Así $P_2\left(\frac{17}{8}, 0\right)$

c. Hallamos la ecuación de la recta tangente ya que conocemos dos puntos $P_1(2, 1)$ y $P_2\left(\frac{17}{8}, 0\right)$.

Calculamos la pendiente de la recta tangente así:

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{0 - 1}{\frac{17}{8} - 2} = \frac{-1}{\frac{1}{8}} = -8$$

Ahora por la forma punto – pendiente tenemos que:

$$Y - Y_1 = m(X - X_1) \quad \Leftrightarrow Y - 1 = -8(X - 2)$$

$$\Leftrightarrow Y - 1 = -8X + 16$$

$$\Leftrightarrow Y = -8X + 17$$

donde $Y = -8x + 17$ es la ecuación de la recta tangente en $P_1(2, 1)$.

“MÉTODO DE ISAAC BARROW (1630 – 1677) PARA HALLAR RECTAS TANGENTES A UNA CURVA”

El método que expone Barrow para la determinación de rectas tangentes es prácticamente idéntico al que se usa hoy día en Cálculo diferencial, y se parece mucho al de Fermat, pero en él aparecen dos cantidades, en vez de la única cantidad representada por Fermat por la letra “ ϵ ”, cantidades que equivalen en términos modernos a “ Δx ” e “ Δy ”, Barrow explica su regla para la determinación de rectas tangentes de la siguiente manera:

Consideremos la figura adjunta.

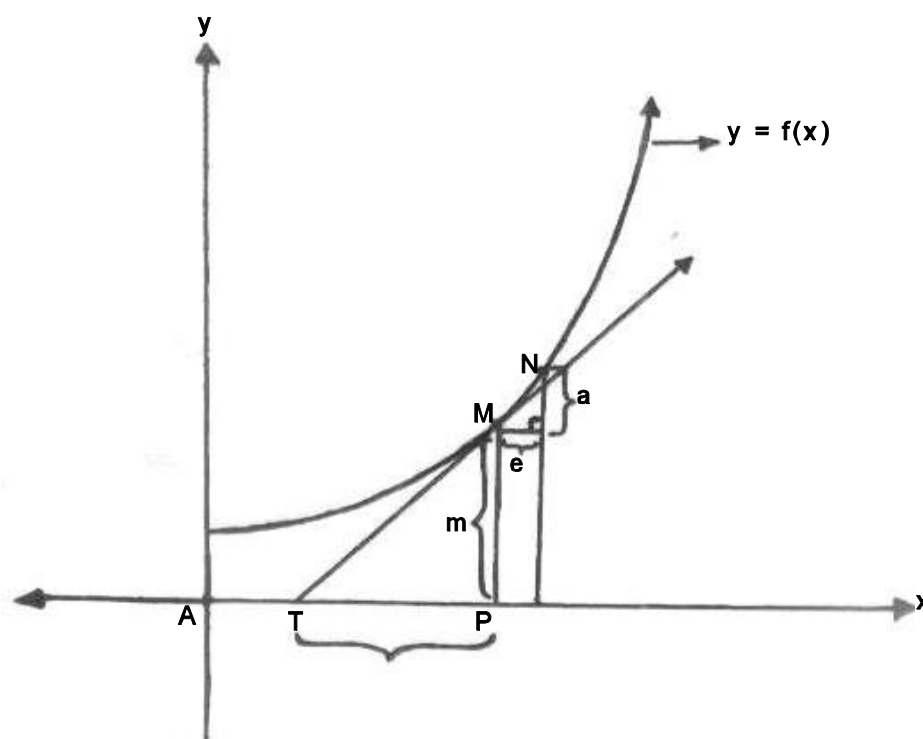


Figura 3.

Si M es un punto de una curva dada, que en notación moderna la representaríamos por una ecuación polinómica de la forma $f(x,y) = 0$ y si T es el punto de intersección de la tangente buscada MT con el eje x , entonces Barrow considera: <<un arco infinitamente pequeño MN de la curva>> Las ordenadas correspondientes a los puntos M y N y el segmento $\overline{MR}$ paralelo al eje x , llamemos “ m ” a la ordenada conocida de M , “ t ” a la subtangente buscada $\overline{TP}$ (proyección del segmento $\overline{TM}$, que es hipotenusa del triángulo rectángulo TPM sobre el eje x) y “ a ”, “ e ” a los catetos vertical y horizontal respectivamente del triángulo rectángulo MRN .

Barrow hace notar que la razón de “ a ” a “ e ” es igual a la razón de “ m ” a “ t ”, tal como lo expresaríamos nosotros hoy “la razón de “ a ” a “ e ” para dos puntos infinitamente próximos es la pendiente de la curva”

Para hallar esta razón, Barrow procede de manera muy parecida a como había hecho Fermat. Sustituye “ x ” e “ y ” en la ecuación $f(x,y) = 0$ por “ $x+e$ ” e “ $y+a$ ” respectivamente y en la ecuación resultante suprime todos los términos que no contengan “ a ” y “ e ” (ya que la suma de todos ellos es cero por la ecuación de la curva), así como todos los términos de grado mayor que “uno” en “ a ” o en “ e ” (por la sencilla razón de que tanto “ a ” como “ e ” son infinitamente pequeños y cualquier potencia de ellos de grado mayor o igual a dos es mucho más “infinitamente infinitamente pequeño” y estos multiplicados por cualquier término también lo hacen “infinitamente infinitamente pequeño” por lo que pueden

despreciarse) por último reemplaza “a” por “m” y “e” por “t”. A partir de este resultado puede calcularse la subtangente “t” en términos de “x” y de “m” y si “x” y “m” son conocidos la subtangente “t” queda determinada y como consecuencia la tangente TM.

“Analizando mejor el método de Barrow y centrando nuestra atención particularmente al triángulo rectángulo MRN de la figura 3 nos podemos dar cuenta que la razón “a” a “e” representa la pendiente de la recta tangente en el punto M, evitándose de esta manera hallar la subtangente, dado que cuando se conoce la pendiente y un punto de una recta, podemos hallar su ecuación

en la forma punto – pendiente, quedando así determinada la ecuación de la recta tangente en dicho punto, por ejemplo: La ecuación de la recta tangente a la curva $y^2 = x^3 + 2x$ en el punto $P_1 (1,3)$ se encontraría de la siguiente manera:

Incrementamos “x” e “y” en “x+e” e “y+a” respectivamente así:

$$(y+a)^2 = (x+e)^3 + 2(x+e)$$

que desarrollando obtendríamos

$$y^2 + 2ay + a^2 = x^3 + 3x^2e + 3xe^2 + e^3 + 2x + 2e$$

Ahora suprimiendo los términos que no contengan “a” y “e” así como todos los términos de grado mayor que uno en “a” o en “e” tenemos:

$$2ay = 3x^2e + 2e \Leftrightarrow 2ay = e(3x^2 + 2)$$

y como $\frac{a}{e}$ representa la pendiente tenemos que

$$\frac{a}{e} = \frac{3x^2 + 2}{2y} \text{ (pendiente en cualquier punto (x,y) de la curva)}$$

Ahora evaluada en $P_1(1,3)$ tenemos que:

$$\frac{a}{e} = \frac{3(1)^2 + 2}{2(3)} \Leftrightarrow \frac{a}{e} = \frac{5}{6}$$

Luego por la forma punto – pendiente la ecuación de la recta tendría por ecuación:

$$y - y_1 = \frac{a}{e}(x - x_1), \text{ donde } x_1 = 1, y_1 = 3 \text{ y } \frac{a}{e} = \frac{5}{6}$$

que reemplazando tenemos:

$$y - 3 = \frac{5}{6}(x - 1) \Leftrightarrow y - 3 = \frac{5}{6}x - \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5}{6}x + \frac{13}{6}$$

“MÉTODO DE DIFERENCIACIÓN POR SIR ISAAC NEWTON” (1642 – 1727)

El método desarrollado por Isaac Newton para la diferenciación no se distinguía mucho del que publicó Isaac Barrow en 1670, solo se necesitaba sustituir la “a” de Barrow por la “qr” de

Newton y la “e” de Barrow por la “pr” de Newton para tener la forma inicial que dio Newton al cálculo.

Newton consideró a “r” como un intervalo de tiempo muy pequeño y a “pr” y “qr” como los incrementos pequeños que experimentan “x” e “y” durante dicho intervalo, por lo tanto la razón q/p sería la razón entre las velocidades instantáneas del cambio de “y” y de “x” es decir la pendiente de la curva $f(x,y) = 0$; por ejemplo: La pendiente de la curva $y^n = x^m$ resultaría de $(y+qr)^n = (x+pr)^m$ y al desarrollarse ambos miembros por el teorema binomial, dividiendo por “r” y despreciando finalmente los términos que todavía contengan “r” se tiene que $\frac{q}{p} = \frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{y^{n-1}}$ o bien $\frac{q}{p} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$.

Para cálculos de pendientes de curvas con exponentes fraccionarios no preocupaban a Newton puesto que su método de series infinitas le ofrecían un algoritmo universal para manejarlos.

“Examinando con cuidado el método ideado por Newton para hallar la pendiente de una curva $f(x,y) = 0$, podemos ver que nos es útil para hallar la derivada (pendiente de una curva) definida de forma implícita, sin necesidad de hacer uso de la regla de la cadena, contrario a como se hace en los cálculos hoy día para hallar la derivada de una función definida de esta forma”.

Ejemplo: La pendiente en cualquier punto de la curva $x^2 + y^2 - 9 = 0$ siguiendo los lineamientos del método ideado por Newton se hallaría de la siguiente manera:

Incrementamos “x” e “y” en “x+pr” e “y+qr” respectivamente para tener:

$$(x+pr)^2 + (y+qr)^2 - 9 = 0$$

que desarrollando y simplificando tendríamos que:

$$x^2 + 2xpr + p^2r^2 + y^2 + 2yqr + q^2r^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2xpr + p^2r^2 + 2yqr + q^2r^2 = 0$$

ahora dividiendo por “r” y despreciando los términos que todavía contengan “r” tendríamos finalmente:

$$\frac{2xpr}{r} + \frac{p^2r^2}{r} + \frac{2yqr}{r} + \frac{q^2r^2}{r} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2xp + 2qy = 0$$

$$\Leftrightarrow 2yq = -2xp$$

$$\Leftrightarrow \frac{q}{p} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{q}{p} = \frac{-x}{y} \quad (3) \text{ (Pendiente de la curva en cualquier punto (x,y))}$$

La ecuación (3) corresponde en términos modernos el haber derivado implícitamente. Donde el lector lo puede verificar haciendo uso de la regla de la cadena.

“EL CÁLCULO DIFERENCIAL DE GOTTFRIED WILHELM LEIBNITZ” (1646 – 1716)

Para los años de 1676 Leibnitz llegó a la misma conclusión que había llegado Newton varios años antes, estaba en posesión de un método de gran importancia por su generalidad, independientemente del tipo de función, ya fuera racional o irracional, algebraica o trascendente y siempre se le podían aplicar sus operaciones de formación de sumas y diferencias.

Ante este nuevo concepto Leibnitz tuvo la necesidad de desarrollar un lenguaje y una notación adecuada para tratar estos nuevos problemas, ya que Leibnitz tuvo siempre una fina apreciación de la importancia que tiene una buena notación para ayudar a los procesos de pensamiento.

Las notaciones elegidas en el caso del cálculo, eran especialmente afortunadas, después de varios ensayos, Leibnitz decidió representar por “dx” y “dy” las diferencias pequeñas posibles o (diferenciales) de las “x” y las de “y” aunque inicialmente había usado en su lugar $\frac{x}{d} e \frac{y}{d}$ para indicar la disminución del grado.

“El origen de la notación diferencial fue un triángulo rectángulo infinitesimal con catetos “dx” y “dy” y como hipotenusa un pequeño segmento de la curva f(x), a esto se le llamó el triángulo característico. Leibnitz se refería a su cálculo como <<mi método del triángulo característico>>.

La clave de este descubrimiento fue ver que si “ dx ” y “ dy ” son suficientemente pequeños el segmento de la curva $y = f(x)$ y el segmento de la recta que une los puntos (x,y) con $(x+dx, y+dy)$ son virtualmente indistinguibles”

Veámoslo en la Figura 4.

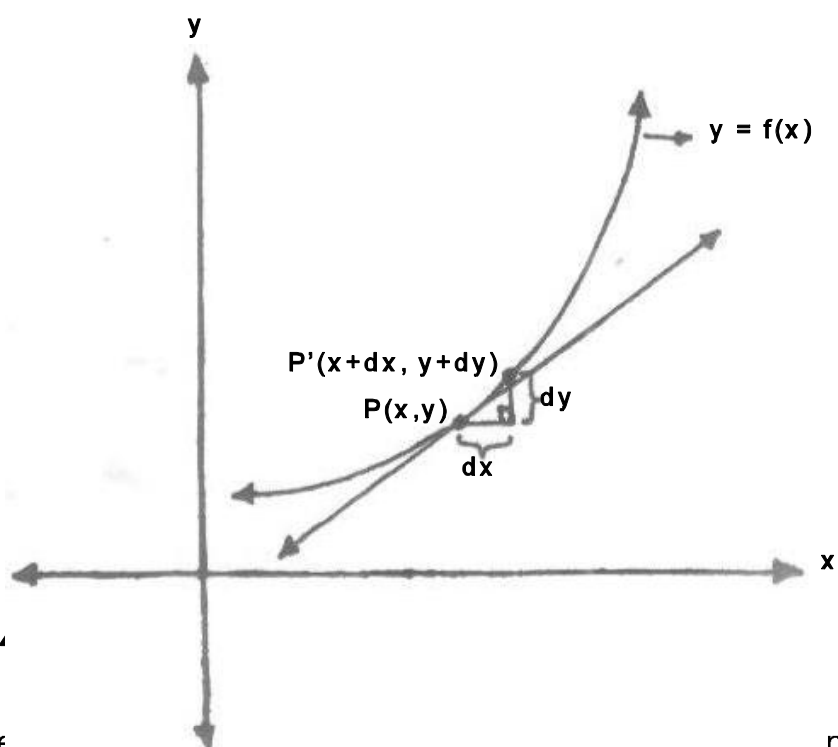


Figura 4

La detección de este fenómeno en un punto de la curva, exigía el uso de “Cálculus differentialis” de cuyo nombre latino proviene nuestra denominación en español <<Cálculo diferencial>>.

La primera exposición de Cálculo diferencial que hizo Leibnitz fue en el año de 1684, bajo el largo pero significativo título de “NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, ITEMQUE

TANGETIBUS, QUANEC FRACTAS NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR” (“Un nuevo método para máximos y mínimos y también para tangentes que no se ve obstruido por las cantidades fraccionarias ni por las irracionales”)

Aquí presenta Leibnitz las formulas $d(xy) = xdy + ydx$, $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xc'y}{y^2}$ así como las de $dx^n = nx^{n-1}dx$, para productos, cocientes y potencias (o raíces) junto con sus aplicaciones geométricas.

Las citadas formulas se obtienen despreciando los infinitésimos de orden superior. Por ejemplo: Si las diferencias mínimas de “x” e “y” son respectivamente “dx” y “dy” entonces d(xy) es decir la diferencia mínima de xy es $(x+dx)(y+dy) - xy$ que desarrollado y simplificado tenemos que $(x+dx)(y+dy) - xy = xy + xdy + ydx + dx dy - xy$ y como tanto “dx” como “dy” son infinitamente pequeños el término “dxdy” es <<infinitamente infinitamente pequeño>> y puede despreciarse, con lo que el resultado será $d(xy) = xdy + ydx$.

Para el caso de la diferencia mínima de $\frac{x}{y}$ podemos hacerlo de la siguiente manera:

Consideremos $u = \frac{x}{y}$ de aquí se infiere que $uy = x$ y $du = d\left(\frac{x}{y}\right)$

Ahora como $uy = x$, entonces $d(uy) = dx$ y por la diferencia mínima del producto tenemos que:

$d(uy) = udy + ydu$, para obtener

$udy + ydu = dx$ y como $u = \frac{x}{y}$ y $d\left(\frac{x}{y}\right) = du$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} c'y + y d\left(\frac{x}{y}\right) &= dx \Leftrightarrow \frac{xc'y + y^2 d\left(\frac{x}{y}\right)}{y} = dx \\ \Leftrightarrow xc'y + y^2 d\left(\frac{x}{y}\right) &= ydx \Leftrightarrow y^2 d\left(\frac{x}{y}\right) = ydx - xc'y \Leftrightarrow d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xc'y}{y^2} \end{aligned}$$

$$\text{Así } d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xc'y}{y^2}$$

También hubiésemos podido proceder de forma análoga como en el producto, es decir, la diferencia mínima de $\frac{x}{y}$ es $\frac{(x+dx)}{(y+dy)} - \frac{x}{y}$ que desarrollando llegamos a que

$$\frac{(x+dx)}{(y+dy)} - \frac{x}{y} = \frac{xy + ydx - xy - xdy}{y^2 + ydy} = \frac{ydx - xdy}{y^2 + ydy} \quad (4)$$

Ahora el denominador de la fracción (4) es la suma de $y^2 + ydy$, pero vemos que el sumando “ydy” puede ser omitido, dado que es infinitamente pequeño en comparación con y^2 , y como consecuencia se puede despreciar finalmente la diferencia mínima de $\frac{x}{y}$ la podemos escribir como $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xc'y}{y^2}$.

La diferencia mínima de x^n la demostramos de igual forma así:

La diferencia mínima de x^n es $(x+dx)^n - x^n$ que desarrollando por el teorema binomial tenemos que:

$$\begin{aligned}
 (x+dx)^n - x^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} dx^k - x^n \\
 &= \binom{n}{0} x^n dx^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} dx^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} dx^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x^1 dx^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 dx^n - x^n \\
 &= x^n + nx^{n-1} dx + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} dx^2 + \dots + nxdx^{n-1} + dx^n - x^n \\
 &= nx^{n-1} dx + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} dx^2 + \dots + nxdx^{n-1} + dx^n
 \end{aligned}$$

Nos podemos dar cuenta que cada término, excepto el primero tiene un factor “dx” cuyo exponente es mayor o igual a dos y como “dx” es infinitamente pequeño el término $(dx)^n$, para “n” mayor o igual a dos es <<infinitamente infinitamente pequeño>>, por lo que pueden despreciarse, luego el resultado será: $dx^n = nx^{n-1}dx$.

La formula que nos da la derivada n-ésima de un producto (en lenguaje actual) es decir:

$(uv)^n = u^{(n)} \cdot v^{(0)} + nu^{(n-1)}v^{(1)} + \dots + nu^{(1)}v^{(n-1)} + u^{(0)}v^{(n)}$, tiene un desarrollo análogo al de la potencia de un binomio $(u+v)^n$, donde

los exponentes con paréntesis en el desarrollo anterior indican ordenes de diferenciación y no de potencias recibe el nombre de “Formula de Leibnitz” que a continuación demostraremos por inducción, es decir, demostraremos que:

$$(u.v)^n = d^n(u.v) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (d^p u)(d^{n-p} v), \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Veamos que si: $[(p(1) \wedge p(k) \Rightarrow p(k+1))] \Rightarrow \forall n, p(n)$

$$\begin{aligned} (1) \quad p(1): \quad d^1(u.v) &= \sum_{p=0}^1 \binom{1}{p} (d^p u)(d^{1-p} v) \\ &= \binom{1}{0} (d^0 u)(d^1 v) + \binom{1}{1} (d^1 u)(d^0 v) \\ &= (d^0 u)(d^1 v) + (d^1 u)(d^0 v) \\ &= u dv + v du \end{aligned}$$

(2) Veamos que $p(k) \Rightarrow p(k+1)$, $\forall k, k \geq 1$

Supongamos que $p(k)$ es verdadera esto es:

$$d^k(u.v) = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (d^p u)(d^{k-p} v) \quad (5)$$

Por ver $d^{k+1}(u v) = \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} (d^p u)(d^{k+1-p} v)$

Derivando ambos lados (5) tenemos que:

$$\begin{aligned}
 d(d^k(u v)) &= d \left[\sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (d^p u)(d^{k-p} v) \right] \\
 &= d \left[\binom{k}{0} (d^0 u)(d^k v) + \binom{k}{1} (d^1 u)(d^{k-1} v) + \binom{k}{2} (d^2 u)(d^{k-2} v) + \binom{k}{3} (d^3 u)(d^{k-3} v) + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + \binom{k}{k-3} (d^{k-3} u)(d^3 v) + \binom{k}{k-2} (d^{k-2} u)(d^2 v) + \binom{k}{k-1} (d^{k-1} u)(d^1 v) + \binom{k}{k} (d^k u)(d^0 v) \right] \\
 &= \binom{k}{0} d[(d^0 u)(d^k v)] + \binom{k}{1} d[(d^1 u)(d^{k-1} v)] + \binom{k}{2} d[(d^2 u)(d^{k-2} v)] + \binom{k}{3} d[(d^3 u)(d^{k-3} v)] + \dots + \\
 &\quad + \binom{k}{k-3} d[(d^{k-3} u)(d^3 v)] + \binom{k}{k-2} d[(d^{k-2} u)(d^2 v)] + \binom{k}{k-1} d[(d^{k-1} u)(d^1 v)] + \binom{k}{k} d[(d^k u)(d^0 v)] \\
 &= \binom{k}{0} (d^0 u)(d^{k+1} v) + \binom{k}{0} (d^1 u)(d^k v) + \binom{k}{1} (d^1 u)(d^k v) + \binom{k}{1} (d^2 u)(d^{k-1} v) + \binom{k}{2} (d^2 u)(d^{k-1} v) \\
 &\quad + \binom{k}{2} (d^3 u)(d^{k-2} v) + \binom{k}{3} (d^3 u)(d^{k-2} v) + \dots + \binom{k}{k-3} (d^{k-2} u)(d^3 v) + \binom{k}{k-2} (d^{k-2} u)(d^3 v) \\
 &\quad + \binom{k}{k-2} (d^{k-1} u)(d^2 v) + \binom{k}{k-1} (d^{k-1} u)(d^2 v) + \binom{k}{k-1} (d^k u)(d^1 v) \\
 &\quad + \binom{k}{k} (d^k u)(d^1 v) + \binom{k}{k} (d^{k+1} u)(d^0 v)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{k+1}{0} (d^0 u)(d^{k+1} v) + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1} \right] (d^1 u)(d^k v) + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2} \right] (d^2 u)(d^{k-1} v) \\
&+ \left[\binom{k}{2} + \binom{k}{3} \right] (d^3 u)(d^{k-2} v) + \dots + \left[\binom{k}{k-3} + \binom{k}{k-2} \right] (d^{k-2} u)(d^3 v) \\
&+ \left[\binom{k}{k-2} + \binom{k}{k-1} \right] (d^{k-1} u)(d^2 v) + \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} \right] (d^k u)(d^1 v) + \binom{k+1}{k+1} (d^{k+1} u)(d^0 v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{k+1}{0} (d^0 u)(d^{k+1} v) + \binom{k+1}{1} (d^1 u)(d^k v) + \binom{k+1}{2} (d^2 u)(d^{k-1} v) + \binom{k+1}{3} (d^3 u)(d^{k-2} v) + \dots + \\
&+ \binom{k+1}{k-2} (d^{k-2} u)(d^3 v) + \binom{k+1}{k-1} (d^{k-1} u)(d^2 v) + \binom{k+1}{k} (d^k u)(d^1 v) + \binom{k+1}{k+1} (d^{k+1} u)(d^0 v)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} (d^p u)(d^{k+1-p} v), \text{ es decir } d^{k+1}(u v) = \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} (d^p u)(d^{k+1-p} v)$$

$$\text{Así } d^n(u v) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (d^p u)(d^{n-p} v), \quad \forall n, n \in \mathbb{Z}^+,$$

Por ejemplo: Sea $f(x) = (4x^5 - 3x^3 + x)e^{2x}$, Hallar $f^3(x)$

Solución

Consideremos $u = 4x^5 - 3x^3 + x$ y $v = e^{2x}$

Según la formula de Leibnitz tenemos que:

$$\begin{aligned}
f^3(x) &= (u \cdot v)^3 = \sum_{p=0}^3 \binom{3}{p} (d^p u)(d^{3-p} v) \\
&= \binom{3}{0} (d^0 u)(d^3 v) + \binom{3}{1} (d^1 u)(d^2 v) + \binom{3}{2} (d^2 u)(d^1 v) + \binom{3}{3} (d^3 u)(d^0 v) \\
&= [d^0(4x^5 - 3x^3 + x)] [d^3(e^{2x})] + 3[d^1(4x^5 - 3x^3 + x)] [d^2(e^{2x})] \\
&\quad + 3[d^2(4x^5 - 3x^3 + x)] [d^1(e^{2x})] + [d^3(4x^5 - 3x^3 + x)] [d^0(e^{2x})] \\
&= [4x^5 - 3x^3 + x] [8e^{2x}] + 3[20x^4 - 9x^2 + 1] [4e^{2x}] \\
&\quad + 3[80x^3 - 18x] [2e^{2x}] + [240x^2 - 18] [e^{2x}] \\
&= 8[4x^5 - 3x^3 + x]e^{2x} + 12[20x^4 - 9x^2 + 1]e^{2x} + 6[80x^3 - 18x]e^{2x} + [240x^2 - 18]e^{2x}
\end{aligned}$$

que desarrollando y simplificando tenemos que:

$$f^3(x) = (32x^5 + 240x^4 + 456x^3 + 132x^2 - 100x - 6)e^{2x}$$

CAPITULO 3

MARCO METODOLÓGICO

3.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN

Esta propuesta se fundamenta en un estudio cualitativo de tipo descriptivo ya que pretende describir avances y/o dificultades de los estudiantes en la comprensión del concepto de derivada que desarrollan los estudiantes a través de un acercamiento histórico del concepto por algunos elementos formulados por autores como Fermat, Barrow, Newton y Leibnitz los cual esta enmarcada en dos momentos, un primer momento que tiene por objeto la socialización de los métodos a estudiantes formulados por los autores consultados, y un segundo momento donde se aplica una pruebas que contienen interrogantes acerca de los métodos socializados, cuyo objetivo es conocer las apreciaciones que los alumnos tienen de estos.

3.2 POBLACIÓN Y MUESTRA

Las pruebas diseñadas para el trabajo de campo de esta propuesta fue aplicada a 18 estudiantes de la asignatura Historia de las Matemáticas impartida en el séptimo semestre del programa Licenciatura en Matemáticas, de la Universidad de Sucre, en la jornada vespertina del segundo periodo del año 2003.

3.3 RECURSOS

3.3.1 Recursos didácticos.

La comprensión del concepto de derivada en los estudiantes se determina por el conocimiento que demuestran tener y usar para la solución de algunos problemas o ejercicios que involucran conceptos tales como: Pendiente de una curva en un punto cualesquiera de esta, ecuación de rectas tangentes, valores máximos y/o mínimo de una función, así como derivadas de orden superior para un producto de funciones.

Con el propósito de desarrollar tal comprensión nos apoyamos en:

- ☞ Orientaciones pedagógicas dirigida a la población en estudio, por parte del grupo de trabajo respecto a los cuatro autores en estudio y su respectivo tratamiento que hacen del concepto de derivada.
- ☞ Un cuestionario N° 1, donde se estudian las aplicaciones de los métodos expuestos, desarrollados por Fermat y Barrow.
- ☞ Un cuestionario N° 2, donde se estudian las aplicaciones de los métodos expuestos, desarrollados por Newton y Leibnitz.
- ☞ Se cuenta con material bibliográfico especializado en los temas a tratar especialmente los libros de historia de las matemáticas de Carl Boyer y ...

3.3.2 Recursos humanos e institucionales.

Para el desarrollo de esta propuesta se contó con la participación activa de 18 estudiantes de la asignatura Historia de las Matemáticas del segundo periodo del año 2003 del programa Licenciatura en Matemáticas, de la Universidad de Sucre, además con la colaboración del docente titular de la asignatura antes mencionada, quien nos cedió espacios dentro de su intensidad horaria para llevar a cabo las orientaciones pedagógicas y aplicar los cuestionarios diseñados.

3.4 DESCRIPCIÓN DEL PROCESO METODOLÓGICO

Con el propósito de lograr los objetivos propuestos en nuestro trabajo, se planteó desarrollar las siguientes etapas:

Etapas 1

- ☞ Se llevó a cabo una revisión bibliográfica para estudiar y comprender los métodos desarrollados por los autores mencionados anteriormente.
- ☞ Orientaciones pedagógicas a los estudiantes de VII semestre del programa de Licenciatura en Matemáticas realizadas por el grupo de trabajo, donde se socializan algunos elementos formulados por Fermat y Barrow tales como métodos para hallar rectas tangentes a una curva en un punto de esta y valores máximos y/o mínimos de una función, los cuales se desarrollan en 2 horas.

- ☞ Diseño del Cuestionario N° 1, donde se presentan actividades para verificar las aplicaciones de los métodos expuestos en las orientaciones pedagógicas desarrolladas por Fermat y Barrow a través de interrogantes donde el alumno tenga la oportunidad de establecer ventajas y desventajas de estos con los métodos actuales en lo que respecta a los métodos para hallar rectas tangentes a curvas y valores máximos y/o mínimos de funciones.
- ☞ Aplicación del Cuestionario N° 1, en el segundo periodo del año 2003, a los 18 estudiantes seleccionados, el cual fue resuelto en un lapso de tiempo de 100 minutos.

Etapas 2

- ☞ Orientaciones pedagógicas a los estudiantes de séptimo semestre del programa de Licenciatura en Matemáticas realizadas por el grupo de trabajo donde se socializan algunos elementos formulados por Newton y Leibnitz tales como método para hallar pendientes de rectas tangentes a una curva en un punto cualesquiera de esta y método para el cálculo de derivadas de orden superior de un producto de funciones, las cuales se desarrollan en dos horas.
- ☞ Diseño del Cuestionario N°2, donde se presentan actividades para verificar las aplicaciones de los métodos expuestos en las orientaciones pedagógicas, desarrolladas por Newton y Leibnitz, a través de interrogantes para que de igual forma los estudiantes enuncien los pro y los contra de estos métodos con respecto a los que se estudian hoy día.

- ☞ Aplicación del Cuestionario N°2, en el segundo periodo del año 2003, a los 18 estudiantes seleccionados el cual fue resuelto en un lapso de tiempo de 100 minutos.
- ☞ Análisis e interpretación de los resultados obtenidos en los Cuestionarios N° 1 y N° 2.

3.5 FUENTES DE INFORMACIÓN

Las técnicas con las que se cuenta para la recolección de la información son:

- ☞ Los resultados dados por los estudiantes en el desarrollo de los cuestionarios.
- ☞ Observación directa en el aula.
- ☞ La comunicación y relación establecida entre el grupo de trabajo y los alumnos.

CAPITULO 4

4.1 ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

A continuación se hace una breve descripción de la experiencia en el aula con los estudiantes de Historia de las matemáticas del séptimo semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sucre a partir de las orientaciones pedagógicas y los cuestionarios 1 y 2 que hacen parte del trabajo de campo “Un acercamiento histórico a la formación del concepto de derivada”.

4.2 EXPERIENCIA DE LAS ORIENTACIONES PEDAGÓGICAS

De las orientaciones pedagógicas hicieron parte las socializaciones hechas, por parte del grupo de trabajo, de los cuatro autores: Fermat, Barrow, Newton y Leibnitz, las cuales se realizaron en dos sesiones, de dos horas cada sesión.

En estas orientaciones, el hecho de trabajar con historia fue fundamental pues los estudiantes se mostraron muy motivados con el tema, aún más por estar ellos cursando la asignatura Historia de las matemáticas.

Inicialmente se les dijo que el trabajo que íbamos a desarrollar trataba de los métodos de cuatro autores para hallar rectas tangentes a una curva en un punto dado, valores máximos y/o

mínimos de una función y cálculo de derivadas de orden superior para un producto de funciones.

Algunos estudiantes tuvieron expresiones como:

“Yo solo conozco los métodos actuales”

“Interesante conocer otros métodos para hacer estos ejercicios”

Después se procedió a socializar los métodos desarrollados por los cuatro autores, iniciando con Fermat (Método para hallar rectas tangentes y valores máximos y/o mínimos de una función) Interactuando hacia la comprensión de dichos métodos.

En el caso del método para hallar valores máximos y/o mínimos de una función polinómica los estudiantes se mostraron atentos y a medida que se les fue socializando el método y los pasos que seguía Fermat para hallar las abcisas de los puntos donde podía existir un valor máximo y/o mínimo de una función polinómica, los estudiantes se mostraron un poco escépticos dado que no existía una suficiente argumentación lógica del porqué de los distintos pasos que seguía Fermat, pero al resolver ejercicios de valores máximos y/o mínimos de una función por el método de Fermat y por el método estudiado en Cálculo Diferencial actualmente llegaban a la misma solución, expresando que el método resultaba efectivo y señalando que no se necesita conocer la teoría de Límites y Derivadas de función para el estudio de dicho concepto, afirmando que el método se puede ver como un tratamiento intuitivo del concepto de derivada.

Con respecto al método de Fermat para hallar rectas tangentes a una curva en un punto de esta, a los estudiantes les llamó la atención cuando se les presentó el valor de la subtangente

$$c = \frac{f(a)}{\frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon}}, \text{ muchos relacionaron el denominador de la}$$

fracción anterior con el valor de $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon}$ a lo cual ellos expresan que Fermat estaba muy cerca de la idea de límite de una función estudiada hoy día, obviamente Fermat no disponía de este concepto.

En cuanto a los métodos de Barrow y Newton para hallar rectas tangentes a una curva los estudiantes se mostraron expectativos por los pasos que se seguían, inquietándoles el hecho de que los dos métodos eran muy parecidos en el sentido de que despreciaban los términos que contenían incrementos con exponentes mayores o iguales a dos.

A los estudiantes se les preguntó el porqué creían ellos se despreciaban dichos términos, a lo que algunos dieron respuestas como esta:

“Eso debe ser porque el incremento es pequeño cualquier potencia de ellos con exponente mayor que la unidad lo hace cada vez más pequeño, tanto que se desprecia”

Al momento de abordar el estudio del método de Leibnitz y particularmente en lo que respecta al cálculo de derivada de orden superior de un producto de funciones utilizando su regla,

los alumnos expresaron que ellos solo conocían el método de derivación sucesiva y que este les parece muy tedioso y complicado, en cambio la regla de Leibnitz les proporciona una técnica eficaz y menos propensa a equivocaciones.

Muchos estudiantes resumen el método de Leibnitz para calcular derivadas de orden superior de un producto de dos funciones diciendo:

“Se hallan las derivada de las funciones por separadas hasta el orden de la derivada que se quiere hallar y luego se reemplaza en la formula general descubierta por Leibnitz para luego desarrollar los números combinatorios y simplificar la expresión resultante”

Se pudo apreciar de manera satisfactoria que los estudiantes al final comprendieron los métodos y esto se evidencia en el desarrollo de los cuestionarios, en donde la mayoría de los estudiantes respondieron positivamente en la solución de los ejercicios planteados. Desarrolladas las orientaciones pedagógicas por parte del grupo de trabajo se procedió a aplicar el Cuestionario N° 1, con el fin de que los estudiantes expresaran su opinión acerca de qué ventajas o desventajas presentan estos métodos con respecto al usado hoy día.

En la siguiente tabla se muestran las frecuencias de las respuestas dadas por parte de los estudiantes a los interrogantes del Cuestionario N° 1.

PREGUNTA	RESPUESTA	N° ESTUDIANTE
1. Calcúlese la recta tangente a la curva $y=x^3-3x+4$ en el punto (2,6) usando los métodos de Barrow y Fermat y el método de derivación formal utilizado hoy día.	☐ Soluciona el ejercicio correctamente por los métodos de Barrow y Fermat.	17
	☐ No resolvió de manera correcta el ejercicio	1
	☐ Soluciona el ejercicio correctamente por el método de derivación formal utilizado hoy día.	17
	☐ No resolvió de manera correcta el ejercicio.	1
2. Hallar los valores máximos y/o mínimos de la expresión $f(x) = x^3-3x^2+3$ por el método de Fermat y por el método utilizado hoy día.	☐ Soluciona el ejercicio correctamente por el método de Fermat	17
	☐ Olvidó el algoritmo a seguir para dar completa solución.	1
	☐ Soluciona el ejercicio correctamente por el método usual.	17
	☐ Presentó dificultades para su solución.	1
3. Resuelve utilizando el método de Fermat (método para hallar valores máximos y mínimos) Un rectángulo tiene perímetro de 140 m ¿qué largo y ancho dan el área máxima?	☐ Soluciona correctamente el ejercicio	15
	☐ Presentaron dificultad en la solución del ejercicio.	3
	VENTAJAS ☐ No se necesita conocer la teoría de límite de funciones y derivada para hallar rectas tangentes a una curva en un punto de esta.	15

rectas tangentes con respecto al actual y viceversa?	 Presentan de manera coherente los pasos que se realizaron para llegar a la formalización de los conceptos manejados hoy día con respecto a la derivada.	3
5. Expresa la opinión sobre ¿qué ventajas o desventajas crees que presenta el método de Fermat para hallar los valores máximos y/o mínimos con respecto al actual y viceversa.	DESVENTAJAS  Son un poco más largos los procesos.  Su uso está delimitado a funciones polinómicas	18
	VENTAJAS DEL MÉTODO DE FERMAT CON RESPECTO AL ACTUAL  No se necesita conocer la teoría del límite de funciones y derivada para hallar valores máximos y mínimos.  Se podía implementar su enseñanza en la secundaria donde se tenga un conocimiento sólido del álgebra y conceptos relacionados con funciones.	18
	DESVENTAJAS DEL MÉTODO DE FERMAT CON RESPECTO AL ACTUAL  Procesos muy extensos para su solución.  Su uso está limitado a funciones polinómicas.	18

Teniendo en cuenta los resultados en la tabla anterior se puede observar que la mayoría de los estudiantes manejan de manera correcta los métodos de derivación formal que se estudian actualmente, sin embargo los estudiantes ven otra opción de solución a los ejercicios planteados en los métodos estudiados desarrollados por Fermat y Barrow.

En particular algo que nos llamó la atención se presentó en el ejercicio 3 del Cuestionario N° 1, en donde a los alumnos se les pidió resolver el ejercicio por el método de Fermat, sin embargo, los estudiantes después de resolverlos por el método de Fermat, también los resolvieron por el método utilizado hoy día.

Cuando se les preguntó el porqué de la solución por el método formal muchos respondieron que lo hacían para corroborar la respuesta, lo que evidencia que los estudiantes se identifican con el método actual, no obstante, algunos expresan que el hecho de que con los dos métodos la respuesta sea la misma, justifica que el método de Fermat para hallar valores máximos y/o mínimos sea visto como otra opción de solución.

Algo en lo que insistieron los estudiantes fue en el tratamiento que se le dio al concepto a través de estos métodos y resaltaron que de esta manera a los alumnos se les hará más fácil el tratamiento formal, puesto que ya el estudiante tendrán unas bases fundamentales para cuando se les presente el concepto de derivada actual, de otro lado, muchos afirmaron que sería de gran utilidad esta parte intuitiva, ya que no estaríamos tan cerrados al concepto que conocemos y tendríamos otras opciones válidas para el tratamiento de estos temas.

Los estudiantes expresan de manera general que los métodos estudiados presentan ventajas en lo que respecta a su estudio en cursos donde no se ha estudiado la teoría del límite de funciones, concepto base para el estudio formal del concepto de derivada.

También encontramos que los estudiantes coinciden en que los procedimientos de los métodos desarrollados por Fermat y Barrow son mucho más largos, no obstante algunos manifiestan que estos muestran de manera coherente los pasos que se realizaron para llegar a la formalización de los conceptos manejados hoy día sobre la derivada de una función.

En lo que respecta al Cuestionario N° 2, los estudiantes se mostraron motivados ya que para ellos fue muy importante conocer otros métodos para hallar la pendiente de una recta tangente a una curva y el calcular la derivada de orden superior de un producto de dos funciones.

En la siguiente tabla se muestran las frecuencias de las respuestas dadas por parte de los estudiantes a los interrogantes del Cuestionario N° 2.

PREGUNTA	RESPUESTA	N° ESTUDIANTE
1. Calcúlese la pendiente de la recta tangente a la curva $y^2=x^3+6x-6$ en el punto $(1, 1)$ por el método de Newton, utilizando r, p y q. Calcúlese también por el método utilizado hoy día.	☐ Soluciona correctamente el ejercicio por el método de Newton.	15
	☐ Presenta dificultades en la solución del ejercicio por el método de Newton.	3
	☐ Soluciona correctamente el ejercicio por el método utilizado hoy día.	16
	☐ Presenta dificultad en la solución del ejercicio por el método utilizado hoy día.	2
2. El peso promedio (en libras) de un cerdo en un lote con alimentación especial, en el tiempo t (en semanas), se da por $y = (10+5t)^{2/3}$. Hallar la rapidez de crecimiento del peso del cerdo y evaluarla en t = 43. a. Por el método de Newton. b. Por el método utilizado hoy día. Ayudad: $y^3 = (10+5t)^2$	☐ Soluciona correctamente el ejercicio por el método de Newton.	14
	☐ Presenta dificultad en la solución del ejercicio utilizando el método de Newton.	4
	☐ Soluciona correctamente el ejercicio por el método utilizado hoy día.	14
	☐ Presenta dificultad en la solución del ejercicio por el método actual.	4

3. Expresa tu opinión sobre ¿qué ventajas o desventajas crees que presenta el método de Newton con respecto al actual y viceversa?.	VENTAJAS DEL MÉTODO DE NEWTON CON RESPECTO AL ACTUAL ☞ No se necesita conocer la teoría de límites y derivadas para la pendiente de la recta tangente a una curva. ☞ Se podría implementar en cursos donde el concepto de derivada no se halla estudiado de manera formal.	18
	DESVENTAJAS DEL MÉTODO DE NEWTON CON RESPECTO AL ACTUAL ☞ Procesos muy extensos cuando el grado del polinomio es mayor que tres. ☞ Su uso está limitado a funciones polinómicas.	18
4. Calcúlese la derivada cuarta de $y = x^2 e^{3x}$. a. Por derivación sucesiva. b. Por la regla de Leibnitz. Ayuda: Considere $u = x^2$ y $v = e^{3x}$. Expresa tu opinión sobre la conveniencia de los métodos para el cálculo de derivadas de orden superior de un producto de funciones.	Resuelven el ejercicio de manera correcta por ambos métodos En cuanto a la opinión de la conveniencia de los métodos los alumnos de manera general opinan que el método de Leibnitz es menos complicado y más práctico y que se hace más eficaz cuando el orden de la derivada que se tiene que hallar es cada vez mayor. Mientras que el método de derivación sucesiva es más largo y tiende a confundir.	18

Teniendo en cuenta los resultados de la tabla anterior vemos que los estudiantes aplican de manera correcta el método de derivación formal a los ejercicios planteados, además los estudiantes ven en el método de Newton otra forma de resolver los ejercicios propuestos sobre rectas tangentes.

En cuanto al método de Newton, expresan que lo único limitado del método es lo largo de sus procedimientos y su restricción a funciones polinómicas, no obstante permite que el estudiante trabaje de manera coherente sin brincar bruscamente de un paso a otro, y de esta manera tener una noción intuitiva de cómo se fue perfeccionando el concepto de derivada.

Los estudiantes opinan que el método se puede implementar en cursos donde los conceptos de límite y derivada no se han tratado de manera formal permitiendo avanzar en tal estudio más adelante.

Por otra parte, los estudiantes afirman que el método de Leibnitz es menos complicado y más práctico que el método de derivación sucesiva, pues este es más largo y tiende a confundir, insistiendo que cuando el orden de la derivada es cada vez mayor el método de Leibnitz es más eficaz, facilitando el trabajo y mostrando una nueva manera de tratar estos ejercicios.

Al momento de abordar las orientaciones pedagógicas y posteriormente el desarrollo de los cuestionarios, se encontraron aspectos positivos que hicieron posible un feliz termino de estas actividades, tales como:

- ☞ La predisposición que mostraron los alumnos, la motivación constante que reflejaron en el aula, en especial el trabajo con temas de historia de las matemáticas.
- ☞ Las intervenciones hechas por el profesor titular de la asignatura en momentos en que lo creía conveniente respecto a los infinitesimales incrementos pequeños, aspecto que tendió a mejorar la comprensión del concepto mismo, a través de los elementos tratados en los cuatro métodos socializados.
- ☞ El interés que mostraron los estudiantes hacia los temas, formulando preguntas y buscando posibles respuestas.

Una pregunta muy interesante que formula un alumno con respecto al estudio del método de Leibnitz.

Fue: "Si era posible hallar por ejemplo la derivada quinta de la función $f(x) = \ln x \cos x e^x$, es decir $f(x)$ expresada como el productos de tres funciones utilizando la formula de Leibnitz, proponiendo escribir $u = \ln x \cos x$ y $v = e^x$ donde el cálculo se

reduce a que $d^5(\ln x \cos x e^x) = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} [d^k(\ln x \cos x)] [d^{5-k} e^x]$, que

desarrollando el miembro derecho se tendría que volver a utilizar la formula de Leibnitz, para el cálculo de la derivada del término $d^k(\ln x \cos x)$ para $k = 1, 2, 3, 4, 5$ concluyendo de esta manera que la formula de Leibnitz es útil para el cálculo de la derivada n -ésima de una función definida como producto de un número finito de funciones.

Por último a medida que se realizaron las orientaciones pedagógica y se aplicaron los cuestionarios se fue logrando una conceptualización más comprensiva del concepto de derivada, a través de un acercamiento histórico realizado por lo socializado y reflexionado de cuatro autores estudiados, posibilitando de esta manera al estudiante un aprendizaje significativo y la oportunidad de hacer una pequeña construcción del conocimiento, aspectos fundamentales resaltados en los lineamientos curriculares.

CONCLUSIONES

A través del desarrollo de esta propuesta, tendiente a posibilitar la comprensión del concepto de derivada a través de un acercamiento histórico, podemos destacar los siguientes aspectos como fruto de la reflexión adelantada:

- ☞ El tratamiento del concepto de derivada a través de un acercamiento histórico se proyecta como una estrategia didáctica, ya que los alumnos se mostraron motivados por el estudio de los conceptos involucrados sobre la derivada y sus aplicaciones presentada de una manera diferente, por el fuerte tratamiento intuitivo del concepto de derivada que presentan los cuatro métodos estudiados, permitiéndoles conocer un poco sobre las causas o problemas que hicieron posible la aparición de los conceptos tratados.
- ☞ Con el estudio de la historia del concepto de derivada el alumno tiene la capacidad de argumentar sobre los avances logrados por parte de ciertos autores para la formalización de dicho concepto.
- ☞ A través del estudio de la historia del concepto de derivada se puede posibilitar una mayor participación e interacción de los estudiantes en el proceso de construcción del conocimiento sobre este.
- ☞ El uso de la historia de las matemáticas, como estrategia didáctica es un complemento importante del trabajo de aula,

que permite mostrar al alumno los tropiezos por los que pasan los conceptos en la matemática y al docente, permite comprender los procesos por los que atraviesa la formación de un concepto para de manera comprensiva plantear alternativas didácticas que tiendan a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos tratados en la matemática escolar y en particular del estudio del concepto de derivada.

- ☞ Con el estudio de la historia de las matemáticas el alumno participaría de un aprendizaje significativo, de una u otra forma le permitiría redescubrir los conocimientos que la enseñanza tradicional les proporciona ya elaborados.

RECOMENDACIONES

Atendiendo a los resultados obtenidos, el grupo de trabajo considera pertinente las siguientes recomendaciones al momento de diseñar actividades tendientes a posibilitar la comprensión de los conceptos matemáticos a través del uso de la historia de las matemáticas:

- ☞ Los docentes de matemáticas que desarrollen la asignatura Cálculo diferencial y particularmente cuando desarrollen lo referente a derivadas implemente en su metodología aspectos relevantes de la historia en cuanto a los conceptos a tratar, con el propósito de que dichos conceptos interesen al estudiante, generando importantes consecuencias didácticas, como enriquecer la práctica de la enseñanza logrando así una mejor comprensión de los mismos, inicialmente con su fuerte tratamiento intuitivo y posteriormente a través de su manejo técnico – formal hoy día.
- ☞ Para una mayor comprensión de un concepto matemático consideramos la posibilidad de dedicar mayor tiempo a la génesis de los conceptos para que los alumnos tengan un mayor acercamiento comprensivo de la formación de los conceptos, evitando en cierta forma que el alumno no este ceñido a la enseñanza tradicional que proporciona los conceptos de una forma acabada.

- ☞ Que los docentes se concienticen verdaderamente del papel fundamental que juega la historia en la comprensión significativa de los conceptos matemáticos.

BIBLIOGRAFÍA

BOYER, Carl. Historia de las matemáticas. Alianza Editorial.

BUELVAS SOLÓRZANO, Ubaldo. Desarrollo del teorema fundamental del álgebra. Universidad de Sucre. Sincelejo, 1984

CAMARGO, Leonardo Fabio y PÉREZ PÉREZ, Jamis. Demostración gráfica del teorema, el álgebra de derivadas. Universidad de Sucre. Sincelejo, 1998.

CASTRO CHADID, Iván. Pasado, presente y futuro del cálculo en Colombia. Grupo editorial Ibero-América de Colombia S.A.

CATALAM ADAME, Alfonso y DOLORES FLORES, Cristólogo. Formación del concepto de derivada a través de la variación. Universidad Autónoma de Guerrero. Conacyt. México "Resumen de Relme 12", 1998

DOLORES FLORES, Cristólogo. Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar. Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero. Conacyt. México "Resumen de Relme 12", 1998

GONZÁLEZ, Roberto y CANTORAL, Ricardo. Diseño de la derivada como un organizador de las derivadas sucesivas. CINVESTAV. IPN. México "Resúmenes de Relme 12", 1998

GONZÁLEZ URBANEJA, P.M. Historia de la Matemática: Integración cultural de las matemáticas, Genesis de los conceptos y orientaciones de su enseñanza. Seminario permanente de historia de las matemáticas. ICE de la Universidad Politécnica de Catalunya. IB < Sant Joseph de Calassanc. Sant Quinti. Barcelona, 191

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos curriculares. Santa fé de Bogotá. MEN, 1998

RODRÍGUEZ PACHECO, Pablo Elías. Pasajes históricos del álgebra desde la herencia primitiva hasta la Al-Jwarizmi. Universidad de Sucre. Sincelejo, 1989

SANTOS MENDOZA, Sandra Judith y BALLESTA ALFARO, Rafael Augusto. Estudio exploratorio sobre algunas interpretaciones del concepto de derivada. Universidad de Sucre. Sincelejo, 2002

THURSTON: Tomado de OLIVEROS, José Rodolfo. Aprendizaje de la derivada a través del flujo instantáneo. Universidad Autónoma Chapingo. CINVESTAV. IPN. México "Resúmenes de Relme 12", 1998

The word "ANEXOS" is displayed in a bold, sans-serif font. Each letter is filled with a different color from a rainbow spectrum: 'A' is pink, 'N' is red, 'E' is orange, 'X' is yellow, 'O' is green, and 'S' is blue. The letters have a slight 3D effect with a soft shadow cast to the right and slightly downwards.