RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS. UNA RUTA EN EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES

Abel Corpus Quimboa
Código: 1552046

Samuel Corpus Quimboa
Código: 1458355

UNIVERSIDAD DEL VALLE

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA SEDE NORTE DEL CAUCA

2020

RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS: UNA RUTA EN EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES

Abel Corpus Quimboa
Código: 1552046

Samuel Corpus Quimboa
Código: 1458355

Dirección de la investigación
Mg. Johnny Alfredo Vanegas Díaz

UNIVERSIDAD DEL VALLE

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA SEDE NORTE DEL CAUCA

2020

AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer primeramente a Dios por permitirnos haber llegado hasta este momento de nuestras vidas, y poder culminar con un ciclo más en nuestra formación como profesionales.

A nuestros padres por su apoyo constante, quienes nos inculcaron desde muy niños la importancia del estudio, por su amor incondicional y porque creyeron siempre en nosotros.

A los dos estudiantes de séptimo semestre de licenciatura en matemáticas quienes nos colaboraron.

Nuestros más sinceros agradecimientos al profesor Johnny Alfredo Vanegas Díaz, quien a pesar de sus múltiples ocupaciones decidió compartir su tiempo, conocimiento y paciencia para acompañarnos y orientarnos en la consolidación de este trabajo.

A los profesores Ronald Andrés Grueso y Joan Sebastián Ordoñez, quienes aceptaron evaluar el trabajo de grado, quienes con sus comentarios y sugerencias nos permitieron enriquecer nuestro conocimiento. Y a la Universidad del Valle por habernos brindado la oportunidad de creer profesionalmente.

TABLA DE CONTENIDO

INDICE DE TABLAS

TABLA DE ILUSTRACIONES

Resumen

La presente investigación se interesa por el estudio y caracterización de *niveles de razonamiento covariacional* configurados por dos estudiantes de VII semestre de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle, sede Norte del Cauca. Para ello, se realizó una búsqueda, selección e implementación de un conjunto de tareas relativas a las funciones lineales y no lineales, las cuales se analizaron desde una aproximación al *marco conceptual del razonamiento covariacional* propuesto por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2003). La metodología adoptada consideró algunos elementos de un *estudio de casos* haciendo especial énfasis en la entrevista y las producciones de los estudiantes como instrumentos de recolección de datos. Los resultados obtenidos permiten constatar que los estudiantes, objeto de estudio, configuran acciones mentales correspondientes al *nivel 4* de *razonamiento covariacional* y ciertos indicios al *nivel 5* que, entre otros aspectos, destaca la potencialidad del rediseño de la situación de aprendizaje.

Palabras claves: niveles de razonamiento covariacional, funciones lineales y no lineales, pensamiento variacional, estudiantes de licenciatura en matemáticas.

Introducción

La presente investigación se inscribe en la línea de formación Didáctica de las Matemáticas del Programa de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle, sede Norte del Cauca. Surge como resultado del creciente interés por el desarrollo de investigaciones que incluyan el *razonamiento covariacional* en los procesos formativos, lo cual se puede ver reflejado en diversos estudios nacionales (e.g., Grueso y González 2016) e internacionales (e.g., Zeytun, Çetinkaya, & Erbaş 2010). Al igual que dichas investigaciones, el presente trabajo se inscribe al interior del marco conceptual de Carlson et al., (2003) pero con un objetivo particular: Analizar la configuración de los niveles de razonamiento covariacional en un grupo de estudiantes de VII semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, sede Norte del Cauca a partir del trabajo con una situación enmarcada en el concepto de función desde una perspectiva dinámica.

El marco conceptual para el *razonamiento covariacional* de Carlson et al., (2003) es útil para clasificar las actuaciones de los estudiantes cuando abordan situaciones de covariación; particularmente, las que tienen que ver con una relación funcional. Sin embargo, gran parte de estos trabajos en el marco nacional colombiano se han realizado con estudiantes de educación secundaria encontrándose muy poca documentación relacionada con estudiantes de licenciatura en matemáticas, pese a que su estudio resulta necesario como futuros profesores en el área.

En el marco de las discusiones previas, la pregunta que orientó esta investigación fue:

¿Cómo son los niveles de razonamiento covariacional que se configuran en un grupo de estudiantes de VII semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, sede

Norte del Cauca al trabajar con situaciones enmarcada en el concepto de función desde una perspectiva dinámica?

Dentro de la amplia gama de tipos de funciones, en la presente investigación se toma como principal referente las funciones lineales y no lineales como objetos matemáticos que permiten modelar algunas situaciones relativas al llenado de recipientes. Si bien, las tareas implementadas y analizadas no fueron una producción propia, el proceso de búsqueda y selección fue complejo, dado que se requería poner en correspondencia las preguntas problemáticas y las posibles acciones mentales correspondientes con los niveles de razonamiento covariacional.

Para efectos de organización, la presente investigación se estructura en cuatro capítulos.

En un primer capítulo, se discuten los aspectos generales de la investigación, los cuales abordan algunos antecedentes, presentación del problema, la justificación, y los objetivos. En este sentido, debido a que el estudio del pensamiento variacional no siempre implica el uso del razonamiento covariacional de Carlson et al., (2003), se hace un rastreo tanto de los estudios que lo han tenido en cuenta como de los que han prescindido de él, para finalmente delimitar una problemática específica.

En el segundo capítulo, se discute a grandes rasgos los aspectos que se consideraron importantes para fundamentar teóricamente la investigación. Inicialmente, se presentan los elementos representativos del *marco conceptual del razonamiento covariacional* desarrollado por Carlson et al. (2003). En segunda instancia, se examinan las directrices del Ministerio de Educación Nacional en torno al estudio de la función en la educación media (10° y 11°) haciendo especial énfasis en los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) por su cercanía con la educación superior. Además, se expone la idea de función como una relación de dependencia enmarcada en el trabajo con procesos de modelación matemática de eventos dinámicos y se especifican las tipologías matemáticas de interés, a saber: lo lineal y lo no lineal. El capítulo cierra con una pequeña reflexión sobre la articulación y relación existente entre los tres aspectos conceptuales (didáctico, curricular y matemático).

En el tercer capítulo, se exponen los aspectos metodológicos de la investigación, especialmente los instrumentos asociados con un *estudio de casos de tipo descriptivo*, debido a las posibilidades para describir características de cada momento particular, como el contexto y las variables que definen la situación. En este sentido, se presentan los instrumentos de recolección de datos, el contexto del caso, los sujetos participantes, las tareas consideradas y las categorías de análisis. El capítulo finaliza con un análisis previo de las situaciones implementadas.

Finalmente, **en el cuarto capítulo,** se presentan los resultados de los estudiantes en términos de sus producciones escritas y verbales, así como el análisis de los resultados durante la puesta en escena de las situaciones implementadas, teniendo en cuenta las categorías de análisis previamente diseñadas en consonancia con el marco conceptual del razonamiento covariacional propuesto por Carlson et al., (2003). Adicionalmente, se exponen algunas reflexiones finales y conclusiones respecto al cumplimiento de los objetivos que se derivan de las evidencias del análisis y de lo aprendido en la investigación.

Capitulo I. Aspectos generales de la investigación

1.1 Antecedentes

En este apartado se discuten algunos aspectos relevantes de un conjunto de estudios (artículos, tesis, libros) asociados al pensamiento matemático teniendo a la variación y el cambio como protagonistas. A partir de estos estudios se espera identificar, documentar y justificar la problemática de interés, así como reconocer elementos teóricos y metodológicos para fundamentar la presente investigación.

Para efectos de organización, inicialmente se presentan algunas investigaciones que hacen referencia a la variación como eje central y posteriormente se discuten aquellas que ponen el énfasis en la covariación. Es importante añadir que se han revisado tanto investigaciones locales como internacionales, con el objetivo de reconocer similitudes y diferencias entre la variación y la covariación, así como conseguir una visión más amplia del panorama de intereses que demanda actualmente el campo de la Educación Matemática.

1.1.1 Desde el pensamiento Variacional

Dentro de las investigaciones en el marco nacional se destaca la realizada por Posada & Villa (2006) quienes presentan el trabajo de maestría titulado "propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional" el cual deja entrever el diseño e implementación de una propuesta didáctica para aproximarse al concepto de función lineal a partir de la articulación de diferentes referentes conceptuales, a saber: la noción de variación, el proceso de modelación matemática y los registros semióticos de representación.

Por un lado, la noción de variación se enmarcó en la visión proporcionada por los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y los Estándares Curriculares de Matemáticas (2003). Por otra parte, la modelación matemática se interpreta como un proceso cíclico que involucra 4 etapas: fenómeno del mundo-real, construir un modelo, conclusiones del modelo y conclusiones del fenómeno. En particular, se basan en la postura didáctica de Bassanezi (2002) y los elementos cognitivos propuestos por Lesh et al. (2003).

En cuanto a los registros semióticos de representación retoman las ideas de Duval (1999, 2004) al considerar las tres actividades cognitivas (formación, tratamiento y conversión) pero toman distancia al definir como única unidad significante la noción de variación y razón de cambio para caracterizar el concepto de función lineal, en lugar de la visión de Duval quien entiende la función como una correspondencia punto a punto entre dos conjuntos.

El marco metodológico se corresponde con la ingeniería didáctica, la cual se caracteriza por la realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza, que incluyen análisis a priori y análisis a posteriori. En el diseño de la secuencia se consideraron 3 situaciones y una prueba diagnóstica. En particular, la prueba diagnóstica evidenció la necesidad de hacer un trabajo previo en cuanto a la proporcionalidad directa. Dicha secuencia fue implementada en tres sesiones de tres horas cada una, con 15 estudiantes de décimo grado con edades comprendidas entre los 15 y 17 años.

Uno de los resultados de la investigación reveló que, en el trabajo con situaciones de variación lineal, los estudiantes avanzaron en la comprensión de la razón de cambio. En general, los autores indican que el desarrollo de las situaciones dotó a los estudiantes de herramientas para reconocer, calcular y representar razones de cambio constantes como aspecto fundamental en el reconocimiento de la función lineal desde una perspectiva variacional.

Así, lo propuesto por Posada & Villa (2006) aporta algunos elementos teóricos que servirán como herramientas para la presente investigación, entre ellos se rescatan aspectos de carácter metodológico tales como la realización de un análisis a-priori y a-posteriori en las situaciones que se llevarán a cabo. Además, se tendrá en cuenta la importancia que tiene la construcción de modelos en el desarrollo del pensamiento variacional. Igualmente, permite constatar que al enfrentar a los estudiantes con situaciones de modelación se promueve el uso de algún modo de representación que va desde el lenguaje verbal hasta sofisticados sistemas simbólicos matemáticos. Finalmente, deja entrever que el estudio de la función puede hacerse a partir de una vía dinámica tomando la razón de cambio y la modelación matemática como el centro de trabajo matemático de los estudiantes.

En el marco de la perspectiva variacional, se encuentra lo desarrollado por Caballero & Cantoral (2013) titulado: "dificultades en el desarrollo del pensamiento variacional en profesores de bachillerato", el cual está enmarcado en el estudio de las dificultades que tienen los profesores al momento de abordar situaciones de variación y cuyo propósito es el estudio de las estrategias a las cuales recurre un grupo de profesores de matemáticas de bachillerato, que impartían cursos de cálculo, al momento de desarrollar un conjunto de actividades relacionadas con la variación.

En tal investigación se considera el estudio de la variación como un elemento fundamental para el cálculo, opuesto a la postura tradicional donde tiene protagonismo el formalismo en la cual prima el aprendizaje basado en recursos memorísticos (Reséndiz y Cantoral, 2003). En dicha investigación se adoptó el marco de la Teoría Socio-epistemológica de la Matemática Educativa (TSME) como lente teórico para analizar las producciones de los profesores. La TSME se fundamenta sobre las prácticas como eje fundamental para el conocimiento matemático (Cantoral, Farfán, Lezama & Martínez, 2006), tomando las prácticas sociales como normativas de cada sociedad. Desde esta investigación se asume el proceso de cambio como un elemento central que incluye: la situación variacional, argumentos variacionales, códigos variacionales, estrategias variacionales, estructura variacional específica y tareas variacionales.

La metodología empleada en dicha investigación es de tipo descriptiva y exploratoria, puesto que permite describir algunas estrategias que utilizan los profesores al momento de enfrentarse a actividades enmarcadas con el Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar) al tiempo que se reconocen las actividades que tienen mayor incidencia en el desarrollo del pensamiento variacional.

Dentro los resultados obtenidos se resaltan las diversas estrategias que los profesores emplearon, las cuales se dividieron en dos grupos, a) las que hacen uso del pensamiento variacional para responder a las actividades y b) las que no hacen uso del pensamiento variacional. De esta manera, se pudo apreciar que aquellas del primer grupo respondían a estrategias, tales como: los argumentos variacionales, para posteriormente articularlo con los códigos variacionales apreciables en las frases. En relación con las estrategias que se ubican en el grupo número dos, se evidenció el establecimiento de las expresiones de carácter más analítico, las cuales le sirven para dar una respuesta, aun cuando se haga de supuestos que no son válidos. De esta manera, se evidencia que este tipo de respuestas permite que no sea necesario recurrir al estudio de la variación, pues el profesor solo se apoya en sus “hechos”. Además, se observó que algunas propiedades empleadas por los profesores no siempre eran válidas y en muchas ocasiones tales propiedades resultaban siendo incorrectas.

En consecuencia, con lo anterior se logra evidenciar que las estrategias de carácter analíticas que los profesores emplean en el grupo dos eran más recurrentes y dichas estrategias se catalogan como forzadas debido a que, ya que se asumían datos que no siempre eran válidos, por ende, la centración en este tipo de tareas no permite adaptarse a las características de cada situación, lo que no propicia analizar la variación de los fenómenos en juego.

Finalmente, la propuesta desarrollada por Caballero & Cantoral (2013) permite reconocer la importancia que tiene el trabajo con profesores respecto al desarrollo del pensamiento variacional, tomando en consideración las dificultades que habitualmente ellos presentan al momento de abordar situaciones de variación. Además, permite dilucidar algunos de los orígenes de las dificultades en el desarrollo del pensamiento variacional. Así, y en concordancia con los propósitos de la presente investigación, se toma en cuenta las posibles dificultades que los docentes presentan en el desarrollo de la variación a través de actividades de covariación y cómo tales dificultades obstaculizan el efectivo desarrollo de los niveles de razonamiento covariacional.

En esta perspectiva, López & Fiallo (2015) presentan su investigación titulada: “aproximación a las concepciones usadas en la resolución de problemas de variación y cambio” el cual plantea la identificación de estrategias las cuales pueden ser desarrolladas tanto con procedimientos algorítmicos como heurísticos, siendo estos últimos más abiertos.

Desde su investigación, incorporan aspectos teóricos del pensamiento variacional, las herramientas tecnológicas y la resolución de problemas como marco conceptual anidado con las directrices curriculares de matemáticas en Colombia (MEN, 1998, 2006) y los estándares para la educación matemática del NCTM (2003) los cuales promocionan el trabajo escolar desde la modelación matemática.

Por consiguiente, para realizar el análisis de las concepciones de los estudiantes, toman en consideración el modelo ckc propuesto por (Balacheff, 2005) el cual analiza los conocimientos que movilizan los estudiantes en la resolución de problemas estudiando las estrategias que son fructíferas y las que no lo son.

En función de lo mencionado anteriormente, se adopta una metodología de orden cualitativa de tipo descriptivo-exploratoria la cual, permitió la recolección de los datos en un curso de 30 estudiantes que ingresaban a diferentes carreras de ingeniería de la facultad de ciencias de la UIS en el segundo semestre de 2013. La información se recolectó en dos sesiones de trabajo, la cual fue examinada a través de una rejilla de análisis, sustentada en el modelo ckc, que posibilitó la explicación e interpretación de las estrategias empleadas por los estudiantes.

Los resultados revelan que las estrategias de los estudiantes en la resolución de problemas siempre están mediadas por las concepciones que cada uno de ellos tiene, es por ello que en algunos momentos las estrategias suelen funcionar y darles resultados, pero por el contrario los puede llevar a errores debido a la validez, coherencia y eficacia de la concepción utilizada por cada uno; así mismo, se consideran las concepciones como un factor a tener en cuenta ya que, si un estudiante tiene una concepción errada de los conocimientos matemáticos tendrá pocas posibilidades de resolver los problemas. Por otro lado, el uso de Geogebra genera un gran aporte, ya que permite la exploración del problema para después buscar métodos de solución que posteriormente permitirá plantear la estrategia.

Así pues, lo desarrollado por López & Fiallo (2015) permite reconocer la importancia que trae consigo las concepciones de cada estudiante respecto a una temática en particular y más aún en los ámbitos matemáticos. Además, pone de manifiesto que la conjugación entre la resolución de problemas, las herramientas tecnológicas y los procesos de desarrollo del pensamiento variacional pueden generar un buen sustento para trabajar con la modelación matemática.

Finalmente, dentro de este marco variacional se destaca la investigación de Cabezas & Mendoza (2016), quienes presentan su investigación titulada: "Manifestaciones Emergentes del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Cálculo Inicial" la cual se centra en la caracterización y categorización de las producciones de un grupo de estudiantes universitarios frente a tareas que pretenden dar cuenta de las diversas formas y manifestaciones del pensamiento variacional.

Las tareas se sitúan en el contexto del estudiante y en los procesos de variación que vive a diario, partiendo de un lenguaje verbal y puramente cotidiano apartándose un poco del ambiente matemático usual del escenario de conceptos y técnicas. Adicionalmente, le imprimen importancia al proceso de visualización matemática desde lo propuesto por Arcavi (2003), quien retoma la visualización como una primera instancia de comprensión de las situaciones vinculadas a la variación.

En función de lo mencionado anteriormente toman como marco de referencia el enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática (EOS), ya que permite reflexionar sobre las prácticas matemáticas generadas por las experiencias del individuo cuando son comprendidas; de manera que el objeto emergente adquiere un estatus derivado de las practicas que lo preceden. Por consiguiente, el análisis didáctico del EOS propone unos elementos primarios en los cuales se encuentran el lenguaje, situaciones problema, conceptos, procedimientos y argumentos.

En dicha investigación, optan por una metodología de carácter cualitativo de orden interpretativo, pues buscan reconocer las significaciones que grupos de estudiantes manifiestan en las respectivas sesiones, quienes hacen parte de un curso regular de cálculo de un programa académico de ingeniería. Como resultado destacado revelan que los estudiantes hacen un buen uso del lenguaje previo a la variación, lo que les permite crear formas de visualización para interpretar procesos de construcción. Así pues, dejan entrever la pertinencia de conceptos pre variacionales al momento de describir fenómenos de variación. Por otro lado, logran evidenciar que los estudiantes presentaban diversas maneras para solucionar el conjunto de tareas propuestas, tales como: afirmaciones relacionadas al proceso de crecimiento y decrecimiento, formas de representación gráfica, textual y funcional, así como la descripción de la figura y su forma de construcción.

Por otra parte, los investigadores no descartan las herramientas tecnológicas como una herramienta hábil y útil para el desarrollo del pensamiento variacional, señalando que las formas de argumentación de sus afirmaciones son más visuales y están en un nivel básico que incluye algunos elementos dinámicos.

Para finalizar, la investigación realizada por Cabezas & Mendoza (2016) destaca algunos aspectos los cuales se consideran pertinentes para el desarrollo de la presente investigación. Entre ellos se destaca la población de estudio pues se trata de estudiantes universitarios. Además, en el diseño de las tareas se logra reconocer el papel que juega tanto los conocimientos previos de los estudiantes como sus procesos de visualización. Por otro lado, se puede entrever, al igual que en otras investigaciones precedentes, que el trabajo con tareas asociadas a la covariación aporta sustancialmente al desarrollo del pensamiento variacional.

1.1.2 Desde el razonamiento Covariacional

Una investigación clave en el contexto del razonamiento covariacional fue desarrollada por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2003), titulada “Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio”. Dicha investigación propone un marco analítico para atender la noción de razonamiento covariacional[1]. Así, emplean el término *razón de cambio promedio* en el caso de considerar un intervalo y *razón de cambio instantáneo* para referirse a la función sobre todo su dominio. Dicho marco describe las acciones mentales involucradas en la resolución de tareas asociadas a la interpretación y representación de funciones en contextos dinámicos. De esta manera, postulan cinco acciones mentales las cuales proporcionan un medio para clasificar los comportamientos de los estudiantes en diversos niveles de razonamiento.

La investigación se realizó con una población de estudiantes que habían terminado recientemente un curso de cálculo de segundo semestre y quienes debían desarrollar una prueba con cinco ítems. Una vez finalizada la prueba, se seleccionaban estudiantes con respuestas diversas para realizar una entrevista clínica que buscaba precisar las soluciones de los estudiantes a partir de la descripción y justificación de lo realizado.

La investigación destaca las dificultades que presentan los estudiantes de cálculo al momento de construir imágenes de una razón de cambio de manera continua y, en particular, dificultades para representar e interpretar imágenes de una razón decreciente o creciente para una situación física (AM5). Además, los investigadores indican que dicho marco conceptual puede servir para explicar las acciones cognitivas implicadas en el razonamiento de los estudiantes cuando interpretan y representan funciones asociadas a eventos dinámicos, puesto que se logró categorizar cada producción en correspondencia con las acciones mentales y los niveles correspondientes.

---

[1] El razonamiento covariacional se entiende como el conjunto de actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atienda a la forma en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra

Finalmente, es evidente que esta investigación provee un marco de interpretación teórico muy potente que puede resultar útil para abordar el estudio del razonamiento covariacional. Además, proporciona un marco metodológico importante para trabajar con estudiantes universitarios y que se pondrán de manifiesto en el desarrollo de la presente investigación.

Otra investigación destacada fue desarrollada por Zeytun, Çetinkaya, & Erbaş (2010), denominada "niveles de razonamiento covariacional de los profesores de matemáticas y sus predicciones sobre las capacidades de razonamiento covariacional de los estudiantes". Estos autores reconocen que el estudio del razonamiento covariacional es necesario e importante para comprender los conceptos básicos de los cursos de cálculo y para mejorar las habilidades asociadas con el modelado de situaciones dinámicas.

La investigación tiene como objetivo determinar los niveles de razonamiento covariacional de un grupo de profesores de matemáticas, como también hasta qué punto estos profesores pueden predecir las habilidades de razonamiento covariacional de sus estudiantes. De esta manera, se utilizó el marco teórico desarrollado por Carlson (1998) y Carlson et al. (2002) para definir y analizar el razonamiento covariacional.

En lo que refiere a la recolección de los datos, se realizaron varias entrevistas a los cinco profesores de matemáticas utilizando métodos de investigación de tipo cualitativo. De esta manera, seleccionaron los profesores bajo tres criterios sustentados en el método de muestreo de casos de fácil acceso: (a) al menos cinco años de experiencia docente, (b) explicar el tema de la función a los estudiantes de último año de bachillerato y (c) ofrecerse como voluntario para participar en el estudio. En las entrevistas se realizaron preguntas relacionadas con el modelado del llenado de una botella hueca haciendo énfasis en cómo entendían la relación de (covarianza) entre las dos variables.

Para el análisis de los datos, se transcribieron las entrevistas y se consideraron los dibujos mientras trabajaban en la actividad de modelado. Seguidamente, se examinaron las explicaciones verbales de los profesores y las representaciones gráficas en las hojas de trabajo de acuerdo con las actividades mentales definidas en el marco teórico y los comportamientos correspondientes, para después determinar el nivel de razonamiento covariacional de cada profesor.

Finalmente, los resultados revelaron que los niveles de razonamiento covariacional de los profesores eran bajos y las predicciones de los profesores sobre las habilidades de razonamiento covariacional de sus estudiantes eran insuficientes. Además, muestran que los profesores tienen algunas dificultades serias e ideas erróneas sobre este tema y es difícil mostrar e interpretar gráficamente la relación funcional.

La investigación realizada por Zeytun et al. (2010) realiza aportes importantes que contribuyen a la fundamentación de la presente investigación. Por un lado, permite ampliar y profundizar sobre el marco conceptual del razonamiento covariacional proporcionado por Carlson et al. (2002). También proporciona elementos metodológicos para explorar y reconocer las actividades mentales de los participantes, tales como, el uso de la entrevista. Adicionalmente, permite reconocer una estrategia de trabajo clara para analizar las producciones de los participantes en términos del marco teórico adoptado.

En relación con el estudio de la covariación se encuentra la investigación realizada por Grueso & González (2016) quienes presentan el trabajo de maestría titulado “el concepto de función como covariación en la escuela”. En dicha investigación diseñan e implementan una propuesta de aula para el estudio de la función por medio de situaciones dinámicas de covariación, con el propósito de potenciar el desarrollo del pensamiento variacional a través de tareas covariacionales. Dentro de dichas tareas se busca estudiar el concepto de función a través del uso y la articulación de diferentes registros de representación.

De este modo, los autores toman en consideración la visión del pensamiento variacional proporcionada por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006). En el marco metodológico toman en consideración los Modelos Teóricos Locales (MTL) propuestos por Filloy (1999), asimismo, se hace uso de los niveles de covariación desarrollados por Carlson et al. (2003).

De esta manera se implementó una propuesta de aula que involucra situaciones problema de covariación a un grupo de estudiantes de grado 9º. Dentro de los resultados se logró constatar que se tiene una comprensión significativa del estudio de la función a través de situaciones problema de covariación, así como la importancia que tiene la enseñanza de la función desde una perspectiva de dependencia y cambio sin la necesidad de acudir directamente al uso de fórmulas o definiciones, aspectos que son centrales para el desarrollo de la presente investigación.

Lo desarrollado por Grueso & González (2016) resulta útil para justificar el papel de la función desde una visión dinámica en el desarrollo del pensamiento variacional. Además, proporciona elementos claves para entender cómo se usa el marco conceptual de Carson et al (2002) en la configuración de categorías de análisis que permitan situar los participantes en uno u otro nivel de razonamiento.

Finalmente, se destaca la investigación desarrollada por Paoletti & Moore (2017) denominada: “la naturaleza paramétrica del razonamiento covariacional de dos estudiantes”. Estos autores presentan el razonamiento covariacional como un aspecto fundamental para comprender una variedad de temas matemáticos fijando la mirada en el desarrollo de las relaciones entre cantidades covariantes. Así, buscan caracterizar las acciones mentales de dos estudiantes de pregrado de una licenciatura en matemáticas cuando construyen modelos matemáticos asociados con el uso de las funciones paramétricas con el objetivo de evaluar cómo conciben, razonan y representan relaciones entre cantidades covariantes.

El estudio de las cantidades covariantes se realizó sobre las funciones paramétricas debido a la importancia que juega en los planes de estudio de cálculo y precálculo en instituciones internacionales y de EE. UU, dado que son fundamentales para comprender ideas matemáticas avanzadas como la interpretación de soluciones de ecuaciones diferenciales.

Los investigadores decidieron trabajar con estudiantes del pre-servicio (licenciatura) por dos razones, a) el estudio como extensión natural de una serie de investigaciones sobre el razonamiento cuantitativo y covariacional de los profesores en servicio, b) para responder a los llamados de los investigadores para que presten más atención a los significados que los docentes pueden aportar a sus aulas.

De esta manera, el informe se sitúa dentro de un experimento de enseñanza el cual consta de 16 episodios emparejados (Steffe y Thompson, 2000) y dos entrevistas clínicas semiestructuradas (Clement, 2000) por estudiante. Las dos entrevistas clínicas semiestructuradas ocurrieron antes del primer episodio de enseñanza y después del último episodio. Cada entrevista clínica y episodio docente duraron aproximadamente 1.25 horas. Se grabaron en video y audio las sesiones para posteriormente digitalizar los registros del trabajo escrito de los estudiantes al final de cada sesión.

En conclusión, los autores indican que los estudiantes expresan conciencia de la naturaleza paramétrica de su razonamiento dentro de tareas dinámicas, debido a que ellos estaban familiarizados con la construcción y representación de relaciones entre cantidades covariantes en varios contextos y representaciones (es decir, sistemas de coordenadas cartesianas y polares) durante los episodios de enseñanza. Además, indican que los estudiantes exhibieron actividad consistente con las acciones mentales descritas por Carlson et al. (2002) y el razonamiento sobre las magnitudes de covariación como lo describen Thompson (1994).

Finalmente, el trabajo llevado a cabo por Paoletti & Moore (2017) permite constatar que se puede hacer un trabajo eficiente con una muestra pequeña (2 estudiantes) al involucrar además de las situaciones de variación, las entrevistas semiestructuradas; aspectos que metodológicamente aportan sustancialmente a la presente investigación. Además, es posible adoptar y ajustar algunas estrategias para el análisis de los datos debido a la articulación y tratamiento que hacen al marco conceptual de Carlson et al (2002).

1.2 Contextualización y planteamiento del problema

La revisión de literatura, en el marco nacional y en el internacional, sobre el *pensamiento variacional*[2] permitió constatar que el estudio de la variación y el cambio es una alternativa de trabajo potente en el aula, al promover procesos de modelación matemática en los que intervienen desarrollos de conceptos, métodos y procedimientos contrarios a la visión tradicionalista, que prioriza el aprendizaje de algoritmos que únicamente generan conocimientos vacíos en los estudiantes.

Ahora bien, dentro de la amplia gama de objetos matemáticos, la función representa una herramienta fundamental para lograr que los estudiantes comprendan los modelos matemáticos que conjugan la variación y el cambio de magnitudes (Posada & Villa 2006), pero se requiere, tal

[2] Para el MEN (2006) "este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas" (p. 66).

como lo reporta Del Castillo & Montiel (2007) que el trabajo matemático escolar alrededor de la función se introduzca y desarrolle desde una perspectiva dinámica (que sitúa la función como la correlación entre dos cantidades de magnitud de la misma o de diferente naturaleza), en lugar de la perspectiva tradicional que alude a una regla de correspondencia y que ha sido tan cuestionada por su carácter estático, algebraico y algorítmico[3].

A partir de lo mencionado hasta el momento, se puede notar que un buen desarrollo del pensamiento variacional estará mediado por un buen desarrollo de la función desde una perspectiva dinámica, por tal motivo, se considera importante trabajar la función desde su perspectiva dinámica y la relación que tiene la función con la variación.

En el marco local colombiano, el Ministerio de Educación Nacional, a través de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas MEN (2006), sugiere que el estudio del cambio se organice a partir del análisis de fenómenos de variación, que seguidamente pueden ser representados en gráficas y tablas promoviendo así, la construcción del concepto de función que es objeto de estudio del razonamiento covariacional. Además, mencionan la importancia de tal estudio desde diferentes contextos, tales como; el de la vida cotidiana, el de otras ciencias y el de la propia matemática.

A partir de los planteamientos anteriores, algunos investigadores (e.g., Posada & Villa, 2006; López & Fiallo, 2015; Cabezas & Mendoza, 2016) reconocen la necesidad de acercar a los estudiantes al concepto de función como una relación de dependencia, que puede ser tratada por medio de tareas de orden dinámico. De hecho, en el marco curricular colombiano (MEN, 2006)

---

[3] Al respecto Grueso y González (2016) indican que la visión tradicional para la enseñanza de la función se corresponde con la idea conjuntista de asignación de valores caracterizada por su carácter estático desligado del verdadero contexto de interpretación y análisis.

el pensamiento variacional no se encuentra distante del *razonamiento covariacional*[4], ya que ambas retoman el estudio del cambio que presentan las variables en cualquier fenómeno. En otras palabras, el el objeto del pensamiento variacional es precisamente la covariación, por su enfasis sobre las variaciones de cantidades de magnitud y por su propósito rector al tratar de modelar patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad (Calderón & Obando, 2019).

Ahora bien, en la actualidad el énfasis en torno a los procesos de enseñanza de la función se viene inclinando hacia una visión dinámica, sin embargo, algunos estudiantes siguen presentando dificultades para comprender este concepto, quizás porque persiste el tipo de enseñanza estática y procedimental que margina las potencialidades que trae consigo la covariación.

De hecho, diferentes investigaciones (e.g. Grueso & González, 2016; Gómez, 2015; Paoletti & Moore 2017; Zeytun, Çetinkaya, & Erbaş 2010; Carlson et al. 2003) han considerado un acercamiento al concepto de función desde su naturaleza covariacional (perspectiva dinámica) proporciona una oportunidad para que los estudiantes adquieran la habilidad de interpretar, describir y representar un evento dinámico.

En el marco de las consideraciones anteriores, parece pertinente ahondar sobre la enseñanza de la función desde la covariación como una alternativa potente para ayudar a los estudiantes a comprender dicho concepto, al tiempo que se promueve el desarrollo del pensamiento variacional. Entre las investigaciones del campo de la Educación Matemática que

[4] Según Carlson et al., (2003) el razonamiento covariacional puede entenderse como las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atienden a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p. 124).

coinciden con tal perspectiva de trabajo, se destacan las realizadas por Carlson et al. (2003), a partir de lo que ellos definen como razonamiento covariacional, el cual entienden como actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían una respecto a la otra. En general, hay un consenso de que el trabajo con situaciones dinámicas enmarcadas en procesos de modelación matemática representa un eje organizador del razonamiento covariacional que puede resultar fundamental para que los estudiantes construyan significativamente el concepto de función (Gómez, 2015 y Grueso & González, 2016).

Tomando en consideración las dificultades relacionadas con los conceptos, métodos y procedimientos que presentan los estudiantes al momento del desarrollo de situaciones relacionadas con la variación, que al mismo tiempo genera inconvenientes al momento de abordar el cálculo, se fija la mirada en el estudio del pensamiento variacional , ya que se han reportado que tanto los estudiantes de bachillerato como de carreras universitarias presentan dificultades al momento de enfrentarse a situaciones relacionadas con la variación y el cambio en los cursos de cálculo (e.g., Carlson et al. 2003, López & Fiallo, 2015; Cabezas & Mendoza, 2016; Paoletti & Moore 2017).

Por otro lado, se han realizado trabajos centrados en analizar las estrategias empleadas por profesores ante situaciones de variación (Caballero & Cantoral 2013), así como actividades de covariación (e.g., Zeytun, Çetinkaya, & Erbaş 2010; Paoletti & Moore 2017), encontrándose con dificultades que tienen los profesores al momento de abordar situaciones dinámicas.

Así, Caballero & Cantoral (2013), mencionan que los profesores no tienen desarrollado un pensamiento variacional ya que no son capaces de decidir sobre el signo de la tercera derivada a partir de la gráfica de una función, por ello no recurren al estudio de la variación para dar respuesta. De la misma manera González (1999) y Reséndiz (1997) citado en Caballero &

Cantoral (2013), mencionan que “se observan dificultades en profesores de matemáticas para abordar situaciones de variación, lo que nos indica la existencia de dificultades para desarrollar un pensamiento variacional” (p. 1584).

Así, los profesores manifiestan ciertas dificultades al modelar situaciones que impliquen el uso de la variación, por lo cual se hace pertinente ahondar un poco más sobre lo que pasa por la mente de los profesores cuando se enfrentan a situaciones dinámicas y tener en cuenta que, los procesos que realizan los profesores en las aulas de clases es producto de lo que piensan y como lo piensan (Gómez, 2008).

Tomando en consideración los aspectos mencionados, se cree pertinente explorar las actividades cognitivas de los estudiantes que están siendo formados como profesores de matemáticas, pues ellos representan una pieza clave para orientar mejores procesos de enseñanza al dar cuenta de competencias y habilidades que emergen al trabajar con situaciones que promueven el concepto de función como una relación de dependencia.

En síntesis, la problemática descrita se plantea en términos de: *¿Cómo son los niveles de razonamiento covariacional que se configuran en un grupo de estudiantes de VII semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, sede Norte del Cauca al trabajar con situaciones enmarcada en el concepto de función desde una perspectiva dinámica?*

Hipótesis:

Situaciones de aprendizaje que involucren el concepto de función desde una perspectiva dinámica, favorecerá el avance de los estudiantes hacia niveles de razonamiento covariacional cada vez más sofisticados.

1.3 Justificación

El MEN (1998) a través de los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas presenta el pensamiento variacional como:

> Un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos inter estructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas. (p.49)

Desde esta perspectiva se amplía la visión de la variación, al poner de manifiesto la importancia que tienen los contextos de dependencia entre variables, donde una misma cantidad varía asociada con fenómenos de cambio de la vida práctica, para darle sentido y significado al estudio de la función como dependencia y los modelos de función, así como al registro y utilización del lenguaje matemático de la variación (enunciados verbales, representaciones tabulares, gráficas, expresiones analíticas).

En concordancia con lo anterior, el MEN (2006), a través de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, acentúa que el pensamiento variacional "tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos" (p. 66). En este sentido, sobresale el proceso de modelación matemática como una forma de introducir y promover el desarrollo del pensamiento variacional a través de situaciones dinámicas que implican el uso de la función y sus conceptos relacionados. De hecho, algunas investigaciones (e.g., Villa, 2012; Gómez, 2015; Grueso & González, 2016) reconocen la importancia de introducir en la enseñanza el concepto dinámico de función desde su naturaleza covariacional como oportunidad para que los estudiantes adquieran la habilidad de interpretar, describir y representar un evento dinámico.

Por otra parte, la realización de la presente investigación permite reconocer que el estudio de la función va más allá de las letras o de los símbolos que lo representan y revela la necesidad de abordar nuevos enfoques opuestos a la perspectiva estática donde se priorizan habilidades en la sintaxis y en los procesos algorítmicos. Así, López & Sosa (2004) afirman que, la forma en que se transmite el concepto de función en la escuela no es la más adecuada debido a que no se aprecia la naturaleza y funcionalidad de este, provocando así dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas en los estudiantes. De este modo, aprender y enseñar este concepto no es para nada fácil debido a que gira alrededor del registro algebraico, además, de que no se tienen claro lo que es variación.

Ahora bien, el trabajo con los futuros profesores de matemáticas es necesario debido a que se han encontrado ciertas dificultades cuando abordan situaciones dinámicas, incluso dificultades similares a las reportadas en los estudiantes, tales como: la limitación en el uso de habilidades procedimentales, algorítmicas y memorísticas (Caballero & Cantoral, 2013). Además, es sabido que los profesores en formación inicial no tienen éxito en sus predicciones sobre las materias y situaciones en las que sus estudiantes pueden tener dificultades y esta situación dificulta significativamente la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Zeytun, Çetinkaya, & Erbaş 2010). De este modo, se considera conveniente fijar la mirada hacia los futuros profesores quienes fungirán como mediadores entre sus estudiantes y el conocimiento matemático, lo cual implica además tener un buen dominio del concepto y sus significados asociados para poder presentar actividades más enriquecedoras que posibiliten predecir y enfrentar las dificultades que se presenten en el desarrollo de la temática.

Uno de los componentes más importantes en el desarrollo del razonamiento covariacional, son las situaciones de aprendizaje, al ser consideradas como un elemento de gran potencialidad en la enseñanza y posibilitar que los estudiantes actúen como sujeto activo capaces de lograr una autonomía al momento de aprender. De manera que es importante identificar, (re)diseñar e implementar este tipo de situaciones que involucran actividades de tipo cognitivo que llevan al estudiante a aprender mediante el uso óptimo de su tiempo, recursos y disponibilidad.

Finalmente, esta investigación intenta incorporar situaciones dinámicas para trabajar el concepto de función con profesores en formación inicial a través de una propuesta alejada de la forma tradicional, donde el estudiante pueda poner en contexto los conocimientos matemáticos construidos durante su formación profesional.

1.4 Objetivos

1.4.1 General

Analizar la configuración de los niveles de razonamiento covariacional en un grupo de estudiantes de VII semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, sede Norte del Cauca a partir del trabajo con una situación enmarcada en el concepto de función desde una perspectiva dinámica

1.4.2 Específicos

- Identificar algunas tareas que involucren el concepto de función desde una perspectiva dinámica para su articulación en un (re)diseño de una situación de aprendizaje.
- Diseñar una secuencia de aprendizaje que incluya varias tareas que posibiliten la identificación de los niveles de razonamiento covariacional en un grupo de estudiantes

del VII semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, sede Norte del Cauca.

- Caracterizar los niveles de razonamiento covariacional, en el grupo de estudiantes seleccionados, a partir del trabajo con la situación de aprendizaje diseñada.

Capitulo II. Marco de referencia conceptual

2.1 Referente didáctico

Se exponen los aportes de Carlson et al. (2003) sobre el razonamiento covariacional, al guardar estrecha relación con las directrices establecidas por el MEN (1998, 2006) en relación con el pensamiento variacional

Carlson et al. (2003) definen el razonamiento covariacional como “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atienden a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p. 124).

Este marco conceptual reflexiona sobre la importancia del análisis por parte de los estudiantes de las situaciones dinámicas en diferentes contextos, para que así comprendan los fenómenos en los que está implícito el concepto de variación. Desde tales consideraciones, proponen un marco conceptual que involucra un conjunto de cinco acciones mentales y cinco niveles, el cual intenta describir la manera en que los estudiantes razonan cuando se enfrentan a eventos dinámicos (ver tabla 1).

Saldanha y Thompson (citado por Carlson et al. 2003) describen la covariación como “mantener en la mente, de manera simultánea, una imagen sostenida de dos valores de cantidades (magnitudes)” (p.123). En otras palabras, es estar en la capacidad de coordinar los cambios de una cantidad de magnitud en función de otra y, además, crear una sola imagen donde dichos valores persisten en el tiempo.

Desde esta mirada, es de notar la gran relevancia que tiene el concepto de imagen al momento de concebir una idea de covariación, a partir de una estructura dinámica, a través de la cual se hacen perceptibles las operaciones mentales que efectúa una persona.

Con respecto a la noción de imagen, Thompson (citado por Carlson et al. 2003) la especifica como: “dinámico, que se origina en acciones corporales y movimientos de la atención, y como la fuente y el vehículo de operaciones mentales” (p.124).

Vinner y Dreyfus (citado por Carlson et al. 2003) afirman que el concepto de imagen tiene que ver con todas las representaciones visuales, cuadros mentales, experiencias, propiedades e impresiones que un individuo en un contexto dado asocia con el nombre de un concepto.

De acuerdo con las dos definiciones dadas del concepto de imagen, esta se puede comprender como la representación de los procesos mentales que se dan lugar en la cognición de un individuo, es decir, que manifiesta los razonamientos y pensamientos de un sujeto en torno a una situación en particular.

La primera acción mental (AM1) es la más sencilla y corresponde a la identificación de lo que está cambiando, utilizando lenguaje verbal. La segunda (AM2) hace referencia a la dirección de cambio, es decir, si lo que cambia aumenta o disminuye. La tercera (AM3) corresponde a la concientización de las medidas, esta concientización está muy asociada a la necesidad de medir. La cuarta (AM4) corresponde a la construcción de un esbozo de lo que presume será la respuesta. Finalmente, en la acción mental AM5 se espera que el estudiante tenga una imagen madura, así como una apropiación del tema, centrado en la coordinación del cambio instantáneo.

Las acciones mentales mencionadas anteriormente permiten clasificar a los individuos en unos determinados niveles (ver tabla 2). Es importante aclarar que un individuo ha alcanzado un determinado nivel de razonamiento covariacional si sustenta las acciones mentales asociadas con ese nivel y con los niveles precedentes.

Acción Mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables. (e.g., cambia con cambios en)
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra.	Localización de puntos / construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos)

Tabla 1. Acciones mentales del marco conceptual del razonamiento covariacional

Nota: tomado de Carlson et al. (2003).

Para caracterizar el razonamiento covariacional de un estudiante, este debe estar sustentado bajo las acciones mentales de ese nivel y además a las acciones mentales que están por debajo, siendo el nivel 1 el menor y, el nivel 5 el mayor. Decimos que un estudiante se encuentra en un N3 (Coordinación cuantitativa) si evidencia o da cuenta de las acciones mentales AM1, AM2 y AM3. Así un estudiante se clasifica en N5 de razonamiento covariacional (Razón de cambio instantánea), si es capaz de razonar utilizando AM5 y además es capaz de descomponer esa acción mental para razonar a través de niveles que van de AM1 a AM4.

Niveles	Características
Nivel 1 (N1) Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con los cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2) Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 Y AM2 son sustentadas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes N3.
Nivel 4 (N4) Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio De la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes N4.
Nivel 5 (N5) Razón de cambio instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o, al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por las imágenes de N5.

Tabla 2. Marco conceptual para los niveles del razonamiento covariacional

Nota: tomado de Carlson et al. (2003).

Es importante resaltar que en la tabla 2., se habla de unas imágenes de covariación para describir los niveles del marco conceptual. Aquí, la noción de imagen se corresponde con la caracterización hecha por Thompson (citado por Carlson 2003) quien indica que: una imagen es aquello que *se enfoca en la dinámica de las operaciones mentales*. Así, a medida que la imagen de covariación que posee un individuo se desarrolla, esta sustenta un razonamiento covariacional más sofisticado Carlson (citado por Carlson 2003)

Por otro lado, para la clasificación de los estudiantes, Carlson menciona que hay que tener cuidado con los pensamientos pseudo-analíticos ya que estos derivan comportamientos pseudo-analíticos. Un comportamiento pseudo-analíticos se entiende como un comportamiento que no está ligado a características propias de un concepto, sino que está ligado a procesos mecánicos o algorítmicos. Entonces, puede que un estudiante muestre elementos de AM5 sin aplicar razonamiento covariacional de N5.

Así, en algunos casos puede suceder que un estudiante de la impresión de que está entendiendo, y eso lo ubica en un determinado nivel, pero a la hora de preguntarle (a través de lenguaje verbal o entrevista) dicho estudiante no evidencia un nivel de comprensión asociado a la acción mental en la que se le había clasificado.

Los comportamientos son los que permiten la clasificación en un nivel determinado, estos comportamientos pueden ser evidentes a través de la producción de cada estudiante, estas producciones pueden ser por escrito (lenguaje natural, formal o gráfico) o discursivo (lenguaje vernáculo). Dependiendo de la respuesta que proporcione cada estudiante, los enunciados son los que conllevan la información que permite ver de qué manera se está entendiendo dicha situación, así las explicaciones permiten evidenciar qué está pensando, cómo interpreta y organiza su discurso para poder dar respuesta.

2.2 Perspectiva Curricular

De acuerdo con el MEN (1998) es importante considerar tres grandes aspectos en la organización curricular de las matemáticas, a saber: procesos generales, conocimientos básicos y el contexto. El razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración y, la comparación y ejercitación de procedimientos son cincos procesos generales que suelen estar presentes en toda la actividad matemática que explicita lo que significa ser *matemáticamente competente* (MEN, 2006). Los conocimientos básicos tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas.

Estos procesos específicos se relacionan con el desarrollo del pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional, junto con sus respectivos sistemas que les son propios para abordar su desarrollo. Finalmente, los contextos tienen que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que les dan sentido a las matemáticas que aprende. Estos tres aspectos son especialmente útiles en el diseño, gestión e implementación de situaciones de aprendizaje y, por lo tanto, fundamentales para los intereses de este trabajo.

Ahora bien, sobresale el pensamiento variacional al estar íntimamente conectado con el estudio de la función, como concepto matemático que permite la modelación matemática de fenómenos de variación y cambio; incluso, la covariación y correlación de magnitudes cuantificadas numéricamente (Villa, 2012). Literalmente, el MEN (1998) indica que,

> El propósito del pensamiento variacional es construir un camino y acercamiento significativo para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del Cálculo diferencial e integral (p.66).

De esta manera se puede apreciar que la principal característica del pensamiento variacional es su relación con el estudio sistemático de la variación y el cambio. Este pensamiento se trabaja directamente con el estudio de las funciones puesto que éstas permiten modelar fenómenos de variación y cambio. De hecho, al promover el desarrollo del pensamiento variacional el concepto de función no aparece aislado, al contrario, se presenta desde diferentes caminos (conceptos relacionados) y significados que apoyan su comprensión y uso para organizar y modelar matemáticamente situaciones de diferente índole.

Adicionalmente, es importante citar los siguientes núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrada la variación, según el documento de los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas (MEN, 1998, 49-50)

- Continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad.
- La función como dependencia y modelos de función.
- Las magnitudes.
- El álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo.
- Modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo. La proporcionalidad cobra especial significado.

En síntesis, se reconoce el papel que juega la modelación matemática en el desarrollo del pensamiento variacional[5]. Además, es evidente la idea sobre la puesta en escena de situaciones de aprendizaje enmarcadas en eventos dinámicos que hagan referencia a la vida cotidiana, las matemáticas u otras ciencias. Así, se considera a la modelación matemática como una

[5] Un aspecto importante de este proyecto es la relación de la problemática con el pensamiento variacional, el cual "tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos" (MEN, 2006, p. 66).

herramienta potenciadora al momento de abordar conceptos matemáticos, favoreciendo la construcción y uso de modelos, especialmente los que emergen a partir del trabajo con la función.

2.3 Perspectiva Matemática

Inicialmente, se caracterizan dos aproximaciones matemáticas para abordar el concepto de función. Si bien, ambas líneas son importantes dentro del trabajo matemático escolar, es importante recordar que en concordancia con el objetivo de investigación interesa destacar la perspectiva dinámica como punto de partida para introducir y promover formas de razonamiento covariacional desde los procesos de modelación matemática. Seguidamente, se discriminan las dos relaciones funcionales lineales de interés (proporcional y no proporcional) y su contraste con funcionales no lineales.

2.3.1 Dos aproximaciones al estudio de la función

A partir de la revisión de literatura se pueden evidenciar, al menos, dos grandes perspectivas para abordar el estudio de la función en el contexto escolar. A continuación, se exponen ambas perspectivas con base a lo expuesto por Valoyes y Malagón (2006).

La perspectiva conjuntista tiene su fundamento teórico en la teoría de conjuntos, de tal manera que la correspondencia entre los elementos de dos conjuntos dados, o regla de asignación definida entre ellos, son los aspectos centrales que estructuran el concepto de función. Desde esta perspectiva, nociones como el de magnitud o el de relación de dependencia no hacen parte del dominio teórico en el cual se estructura el concepto matemático función, y entonces, la correspondencia o regla de asignación puede establecerse entre elementos de conjuntos sin importar su naturaleza.

Ejemplos de definiciones que se corresponden con esta perspectiva suelen aparecer en los libros de texto. Algunas de las más comunes son:

1. "Sean X y Y colecciones de objetos, posiblemente conjuntos. Una función de X en Y es una relación entre los elementos de X y los elementos de Y. Pero es una relación con una característica muy especial: cada $x \in X$ se relaciona con uno y solo un $y \in Y$"

2. "Una función es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento de un conjunto (llamado el dominio de la función) exactamente un valor de otro conjunto. El conjunto de todos los valores asignados se llama rango de la función"

Al examinar con detenimiento las definiciones enmarcadas en esta perspectiva se puede reconocer que el énfasis está puesto sobre la correspondencia entre elementos de conjuntos, excluyendo una característica central en la constitución histórica de la función, como es el movimiento y la alusión a la relación de dependencia entre dos magnitudes que varían.

Otra perspectiva es la dinámica, la cual se caracteriza principalmente por tres aspectos:

1) La existencia de dos magnitudes variables

2) Una relación en la cual los cambios producidos en una de las variables determinan cambios en la otra, lo que implica que dicha relación es de dependencia

3) A cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente.

En coherencia con los objetivos de investigación, la presente investigación adopta como principal referente matemático, la función desde una perspectiva dinámica sin considerarla más importante que su versión conjuntista, sino más conveniente para abordar el estudio de niveles de covariación. De hecho, tal como afirman Grueso y Gonzáles (2016), un tratamiento escolar de la función desde la perspectiva conjuntista no parece coherente desde un punto de vista histórico, puesto que:

"está alejado de todas las concepciones clásicas mencionadas en cada periodo de la historia y oculta los obstáculos que hicieron posible su construcción; las ideas de variación, continuidad, variación como parámetro temporal, dependencia, entre otros" (p. 87)

En síntesis, la función desde una perspectiva dinámica permite otorgar un papel protagónico a la variación y el cambio, particularmente a la consideración de la variación entre magnitudes y la relación de dependencia entre ellas. Además, permite aproximarse a la dinámica del proceso de constitución histórico-epistemológico del concepto mismo al promover procesos de modelación matemática en contextos cotidianos, de las matemáticas y de otras ciencias.

2.3.2 La función lineal y no lineal

A continuación, se presentan los elementos matemáticos asociados a la función lineal (proporcional y no proporcional) y a la función no lineal, los cuales son objeto de estudio. Es importante mencionar que la presentación formal de estos objetos es necesaria para pensar mejores diseños que promuevan, a partir de situaciones contextualizadas, la introducción y desarrollo de *niveles de razonamiento covariacional*.

Función lineal

Una función lineal es una función polinómica de grado 1, cuya expresión algebraica puede ser representada como: $y = f(x) = mx + b$ con $m, b \in \mathbb{R}$. Al graficar esta función en el plano cartesiano siempre se obtiene una línea recta, debido a que la razón de cambio entre diferencias es constante (ver tabla 3).

Cabe mencionar que m representa la pendiente de la recta y b el valor donde la recta corta el eje de las ordenadas (eje y). La pendiente es un aspecto característico de la recta porque indica su inclinación respecto al eje de las abscisas (eje x)

En términos algebraicos, la pendiente (m) puede calcularse al tomar dos puntos correspondientes $P_1(x_1,\ y_1)$ y $P_2(x_2,\ y_2)$ y efectuar el cociente de la diferencia entre dos valores de cada variable. Así:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

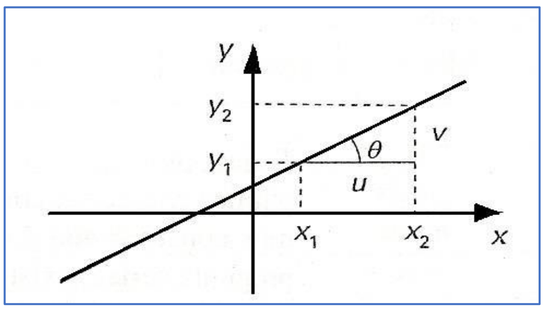


Ilustración 1. Representación gráfica de la pendiente (Hitt, 2002)

A continuación, en la Tabla 3 se precisan las principales características y diferencias entre la función lineal proporcional y no proporcional. Si bien, la representación gráfica de ambas funciones es una línea recta y en ambos casos la razón entre diferencias es constante e igual a la pendiente m, hay dos diferencias importantes. En primer lugar, en la expresión algebraica de una función lineal no proporcional se aprecia que b (la ordenada del punto de corte con el eje y) es distinto de 0, mientras que en la función lineal proporcional $b = 0$. Por último, cabe resaltar que, en una función lineal proporcional, la razón entre variables siempre permanece constante, lo cual no sucede en una función lineal no proporcional.

	Función lineal no proporcional	Función lineal proporcional
Expresión algebraica	$y = mx + b, \quad b \neq 0$	$y = mx$
Razón entre diferencias	Constante $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$	Constante $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$
Razón entre variables	No constante $\frac{y}{x} = m + \frac{b}{x}$	Constante $\frac{y}{x} = m$

Tabla 3. Función lineal proporcional y función lineal no proporcional

Función no lineal

Tanto la función lineal proporcional como la función lineal no proporcional tienen como característica diferencial el hecho que la variación entre las diferencias es constante, lo cual se puede apreciar en una gráfica cuyos puntos están alineados. Sin embargo, cuando el crecimiento de la función no es constante, se habla de funciones no lineales, cuya gráfica corresponde a una curva en el plano.

Entre la diversidad de funciones no lineales en este apartado se presenta la función de proporcionalidad inversa, a partir de discusiones desarrolladas por Azcarate & Deulofeu (1990) quienes la definen como una curva simétrica respecto a la bisectriz llamada hipérbola equilátera desde su forma gráfica y desde la parte algebraica como $xy = k$ o $y = k/x$ donde k es la razón de proporcionalidad inversa y x, y son distintos valores que tienen las magnitudes. Se pueden encontrar muchas situaciones que correspondan a este modelo de función como por ejemplo en el caso de la física, como la ley de la palanca o en situaciones de proporcionalidad directa en las que se toma la variable como constante y la constante como variable.

Una situación matemática que permite ilustrar la función de proporcionalidad inversa es la siguiente: si 10 personas realizan un trabajo en 10 horas, ¿cuánto tiempo tardarán 20 personas en realizar el mismo trabajo? Un análisis rápido permite constatar que el modelo matemático que responde a esta situación no es una función de proporcionalidad directa, puesto que cuando la variable aumenta (se dobla o se multiplica por n), la segunda disminuye (se divide por 2 o por n). Al hacer una tabla de valores de las dos variables, se cumple que $xy = 100$ (ver Tabla 4).

Nº de personas	10	20	5	2	1	25	50
Nº de horas	10	5	20	50	100	4	2

Tabla 4. Función de proporcionalidad inversa

2.3.3 Consideraciones para articular lo didáctico, curricular y matemático

Este apartado pretende destacar algunos aspectos de lo didáctico, curricular y matemático que pueden resultar útiles para la búsqueda y selección de tareas que promuevan el razonamiento covariacional.

En primera instancia, es importante anotar que dentro del estudio de las funciones lineales deben aparecer situaciones que no lo sean, especialmente aquellas que en principio y antes de una pequeña reflexión puedan parecerlo, como en el caso de las funciones de proporcionalidad inversa (Azcarate & Deulofeu, 1990), es decir que el trabajo con una determinada función debe contemplar a comparación con otras funciones.

Desde un punto de vista didáctico y curricular parece apropiado y pertinente centrarse en el tratamiento de las representaciones del cambio a partir de las tablas, gráficas y expresiones orales y algebraicas, analizando las regiones de crecimiento y decrecimiento de funciones lineales y no lineales. En este sentido, las tareas a seleccionar además de problematizar la variación y el cambio deben considerar la significación del comportamiento de las regiones de crecimiento y decrecimiento mediante escenarios de confrontación entre lo lineal y lo no lineal.

Capitulo III. Aspectos metodológicos de la investigación

3.1 Enfoque metodológico

Definido el problema de investigación, planteados los objetivos y explicitado el marco teórico de la presente investigación, se expone en este capítulo las características sobre el tipo de investigación, el diseño metodológico, la definición de las variables, la selección de los sujetos participantes y los instrumentos adoptados para la captación y sistematización de la información, entre otros aspectos, como el diseño de las categorías de análisis y el análisis preliminar de las situaciones propuestas.

En concordancia con el objetivo general *Analizar la configuración de los niveles de razonamiento covariacional en un grupo de estudiantes de VII semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, sede Norte del Cauca a partir del trabajo con una situación enmarcada en el concepto de función desde una perspectiva dinámica* y teniendo en cuenta que se buscan alternativas metodológicas prácticas que permitan dilucidar los procesos de razonamiento covariacional en dos sujetos específicos se considera apropiado adoptar un *enfoque cualitativo* de investigación.

El enfoque cualitativo de investigación es apropiado porque a) permite explorar los fenómenos a profundidad y b) se desarrolla en un ambiente natural. Además, a diferencia de un enfoque cuantitativo o mixto desde este enfoque tiene lugar las múltiples realidades subjetivas y se promueve la riqueza interpretativa. De esta manera, se caracteriza por la conversión de un conjunto de prácticas que se transforman y convierten en una serie de representaciones a partir de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos (Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

Es evidente que esta aproximación metodológica se promociona un proceso de observación profundo en escenarios particulares con mejores perspectivas para comprender e interpretar las dinámicas de los grupos de personas, comunidades e individuos y, por tanto, de los dos sujetos de interés en la presente investigación.

Así pues, el enfoque metodológico destaca dos aspectos. El primero es reconocer y caracterizar la actividad matemática de razonamiento covariacional configurada por los dos estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, sede Norte del Cauca, cuando se enfrentan a la modelación de situaciones dinámicas. Especialmente, el reconocimiento de las actividades cognitivas consistente con el marco conceptual de Carlson et al., (2003). El segundo aspecto es que la caracterización de tales aspectos se debe hacer en un contexto natural que vincule su entorno, como una problemática real que se describe cualitativamente. Por lo tanto, la presente investigación adopta elementos de un *estudio de casos*, como uno de los métodos enmarcados en el enfoque cualitativo, orientados a la comprensión.

3.2 Diseño del estudio de caso

Un estudio de casos, según (Hernández et al., 2014) "(…) es un método para aprender respecto a una instancia compleja, basado en un entendimiento comprehensivo de esta instancia como un "todo" y su contexto, mediante datos e información obtenidos por descripciones y análisis extensivos" (p. 223). En este sentido, se constituye en una herramienta valiosa, al permitir obtener información de las personas en el medio natural donde ocurre el fenómeno o fenómenos que se desean estudiar.

Además, en un estudio de casos se le otorga un lugar protagónico a los investigadores para que puedan realizar un estudio detallado mediante la observación, descripción e interpretación de la información recolectada; elementos necesarios y pertinentes para el alcance de los objetivos específicos trazados.

3.3 Contexto del estudio y sujetos participantes

La investigación se lleva a cabo en la Universidad del Valle, sede Norte del Cauca, ubicada en el municipio de Santander de Quilichao, Cauca, Colombia. Este centro de formación universitaria ofrece carreras tecnológicas y profesionales en jornada diurna y nocturna. Dentro de las carreras profesionales se oferta el programa de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas.

La mayor parte de la población universitaria de la Universidad del Valle, sede Norte del Cauca, pertenece a la clase socioeconómica de nivel medio y bajo, con residencia en Santander de Quilichao y municipios aledaños tanto del departamento del Valle del Cauca (e.g., Jamundí) como del Cauca. La ilustración 2 permite apreciar uno de los bloques principales de la Universidad citada, con dirección Carrera 13 No. 19 - 231 Vía Cali-Popayán.

Ilustración 2. Universidad del Valle, sede Norte del Cauca

Para el proceso de selección de los sujetos participantes se realizó una consulta a través de la coordinación del programa de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas alrededor de los promedios semestrales relativos al VI semestre de los estudiantes que estaban cursando el VII semestre de la Licenciatura en mención. Se escogió este semestre porque los estudiantes habían cursado cálculo diferencial y entre ellos, los que aprobaron y tenían los dos mejores promedios fueron los seleccionados.

Los dos sujetos participantes del estudio tenían 19 y 24 años. Además, se mostraron interesados en participar voluntariamente durante las sesiones de trabajo para desarrollar las situaciones de aprendizaje planteadas.

3.4 Instrumentos para la recolección de datos

En concordancia con los elementos constitutivos de un estudio de casos, en este apartado se presentan las técnicas que permiten recoger la información y definir los datos. Entre estos: las producciones escritas, la entrevista y los recursos tecnológicos.

3.4.1 Las producciones escritas

Las *producciones escritas* de los estudiantes representan una de las fuentes principales de recolección de la información, dado que a partir de la actividad matemática consignada en la resolución de las tareas es posible reconocer y caracterizar los niveles de razonamiento covariacional configurados en la mente de los estudiantes. Esta técnica se considera como generadora de ventajas, ya que el material es producido por los participantes y se encuentra escrito en su “lenguaje”; aspectos que suelen ser muy importantes para ellos (Hernández Sampieri et al., 2010).

3.4.2 La entrevista

En conjugación con las producciones escritas, *la entrevista* toma un papel central ya que establece una relación más íntima entre el entrevistador y entrevistado. Este instrumento puede definirse de manera general como una reunión para conversar e intercambiar información con las personas con el fin de profundizar sobre las interpretaciones y soluciones dadas por los sujetos participantes. Las entrevistas semi estructuradas se basan en una guía de asuntos o preguntas previamente pensadas, pero que permiten al entrevistador la realización de preguntas similares o adicionales para obtener más información sobre el tema deseado (Hernández Sampieri et al., 2010) por lo que se considera apropiada como instrumento metodológico en la presente investigación.

En general, la entrevista semiestructurada se caracteriza por incluir una serie de preguntas que van surgiendo de los temas que se quieren abordar. Además, permiten obtener información consistente de lo que dice el entrevistado y que no necesariamente guía su práctica.

Por otra parte, es importante mencionar que otras investigaciones relativas al estudio del razonamiento covariacional también han adoptado este instrumento metodológico (e.g., Carlson et al. (2003), Zeytun et al. (2010), Paoletti & Moore (2017). Las preguntas que integran la entrevista aquí diseñada han considerado los tipos de respuesta recurrentes antes las tareas planteadas (ver análisis preliminar) de modo que permitan indagar sobre el desarrollo de las acciones mentales que ponen en juego a los estudiantes y la relación entre los niveles de razonamiento covariacional. A continuación, se presentan las preguntas y la intención de cada una de ellas.

1. Describa en sus propias palabras ¿cómo es el comportamiento del líquido durante el llenado del recipiente? ¿Por qué consideras correcto dicho comportamiento?

2. ¿Por qué las formas de los recipientes influyen en el llenado?
3. ¿Por qué consideras constante el llenado de los dos recipientes? ¿son iguales los comportamientos de sus gráficas? ¿Por qué?
4. En el llenado de los dos recipientes con el líquido ¿consideras los comportamientos crecientes o decrecientes?
5. ¿Por qué consideras correcta la construcción de las gráficas en el llenado de los dos recipientes? ¿A qué se deben dichos comportamientos?
6. ¿Por qué la razón de cambio en el llenado de cada recipiente permanece constante?
7. ¿Por qué consideras el llenado del recipiente G como constante? ¿Por qué los demás no lo son?
8. Al relacionar las tres tablas que representan el llenado de recipientes distintos ¿Por qué crees que el llenado del recipiente G es proporcional? ¿qué tipo de proporcionalidad presenta?
9. ¿Qué aspectos consideras necesarios para que el bosquejo del recipiente sea lo más esbelto posible? ¿Por qué?

La pregunta 1 atiende a la Tarea 1-Situación 1 y tiene como propósito indagar sobre la elección del comportamiento que el estudiante considera correcto. Así, se espera que el estudiante describa de manera detallada cómo logró la identificación de las variables involucradas en el contexto y cuáles fueron las consideraciones que tuvo en cuenta. Adicionalmente, se espera ganar información sobre la puesta en escena de la AM1 y del correspondiente N1 del razonamiento covariacional.

La pregunta 2 se asocia con la Tarea 2-Situación1 y pretende reconocer hasta qué punto el estudiante considera las dimensiones de los dos recipientes como un factor clave al momento de desarrollar la tarea. Además, con esta pregunta se busca enriquecer la información sobre las acciones mentales AM1 y AM2 configuradas por los estudiantes.

La pregunta 3 se relaciona con la Tarea 2-Situación 1 y pretende ampliar la explicación de "lo constante" en el llenado de un recipiente, dado que algunos estudiantes suelen referirse a un movimiento constante sin especificar las características que permiten que se comporte de esa manera.

La pregunta 4 se relaciona con la Tarea 3-Situación 1 y busca caracterizar los comportamientos del líquido dentro de los dos recipientes al momento de su llenado, de esta manera permite analizar el concepto de crecimiento o decrecimiento que tiene el estudiante al momento de explicar el llenado del líquido en el recipiente. Además, esta pregunta busca generar información más detallada en el desarrollo de la AM1, AM2, AM3 y su relación con el N3 de razonamiento covariacional. Bajo esta misma intención se plantea la pregunta 5 con el fin de justificar el comportamiento gráfico que presenta el llenado del líquido en ambos recipientes. Por ello, pretende que el estudiante dé cuenta del comportamiento de las gráficas en el llenado de ambos recipientes, al tiempo que busca ganar información sobre la configuración del N3 de razonamiento covariacional.

La pregunta 6 se relaciona con la Tarea 1-Situación 2. En esta pregunta se busca indagar sobre el significado de las magnitudes constantes en el comportamiento tabular de los dos recipientes que se están llenando a flujo constante. De esta manera, se espera ganar información acerca de los argumentos dados por los estudiantes frente al por qué consideran constante el llenado de los recipientes y en qué se diferencian. Así, la pregunta busca profundizar sobre las acciones AM1-AM4 y el correspondiente desarrollo del N4 de razonamiento covariacional.

Las preguntas 7 y 8 se relacionan con la Tarea 2-Situación 2 y pretenden ganar información sobre los argumentos dados por los estudiantes para justificar cuándo y por qué un recipiente se considera constante y el resto de los recipientes no. Además, busca que los estudiantes tipifiquen las características de un comportamiento constante y revelen la comprensión adquirida sobre la proporcionalidad, por ejemplo: si sabe diferenciar entre los tipos de proporcionalidad (directa o inversa). Dichas preguntas pretenden aportar información más detallada acerca del N4 de razonamiento covariacional.

Finalmente, la pregunta número 9 se encuentra relacionada con el inciso (c) de la Tarea 3- Situación 2 y busca que el estudiante amplíe la información sobre los comportamientos de la gráfica.

3.4.3 Los recursos tecnológicos

Los instrumentos tecnológicos usados para la recolección y posterior análisis de la información fueron: dos grabadoras de audio y dos cámaras de video. Estos instrumentos se fijaron en un único lugar y posición de tal manera que permitían captar tanto imágenes de los estudiantes como producciones orales durante el desarrollo de las tareas y la puesta en escena de la entrevista.

A continuación, en la figura 1 se muestra la disposición de los recursos tecnológicos implementados.

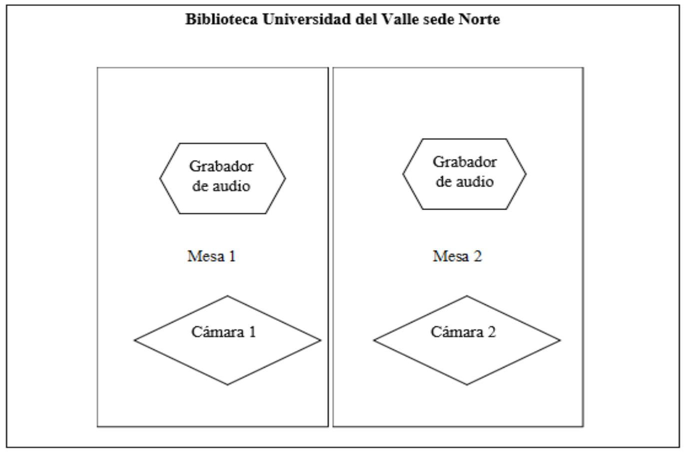


Ilustración 3. Disposición de los recursos tecnológicos

3.5 Los momentos de intervención con los estudiantes

Una vez definidos los elementos metodológicos que direccionaron la investigación, se describe a continuación los diferentes momentos de intervención con los estudiantes. En un apartado previo se mencionó la selección de los dos sujetos participantes. En este apartado, se da a conocer la manera en la cual se organizaron los tiempos de implementación de las situaciones planteadas. Es importante aclarar que cada uno de los participantes tendrá que realizar las tareas de manera individual mientras que los investigadores acompañan el proceso. Se hace el siguiente convenio de letras y números para representar a los participantes y a los investigadores: E1 para el primer estudiante, E2 para el segundo estudiante y P1, P2 para el primer y segundo investigador, respectivamente.

El desarrollo de la secuencia de aprendizaje se llevó a cabo en dos sesiones. Cada estudiante desarrolló la secuencia en un día distinto, el primer día E1 y al día siguiente E2. La puesta en acto para E1 se llevó a cabo en la sala de lectura de la biblioteca de la Universidad del

Valle, sede Norte del Cauca, en horas de la tarde entre las 2:00 pm y 3:30 pm; mientras que E2 desarrolló la secuencia en un aula de clases de la misma Universidad, la cual fue acondicionada para la implementación y gestión de la secuencia de aprendizaje. Cabe anotar que a cada uno de los estudiantes se le proporcionó el material en hojas impresas.

Durante el desarrollo de cada una de las situaciones que integran la secuencia, los investigadores realizaron un acompañamiento, de tal manera que P1 acompañó a E1 de la misma manera que P2 a E2. Es preciso mencionar que P1 y P2 permanecieron atentos al proceso de gestión, promoviendo pequeñas intervenciones a través de las preguntas consignadas en la entrevista semiestructurada. Así, se pretendía indagar un poco más acerca de los procesos cognitivos de E1 y E2, al tiempo que se orientaba la presentación de los argumentos expresados en lenguaje escrito y verbal frente a la resolución de las situaciones.

3.6 Categorías de análisis

En este apartado se expone la construcción de unas categorías de análisis asociadas con cada nivel de razonamiento covariacional, para lo cual fue fundamental revisar con detenimiento el marco conceptual del razonamiento covariacional propuesto por Carlson et al., (2003) además de diferentes investigaciones que habían empleado este marco para analizar las producciones de estudiantes (ver antecedentes). La idea con estas categorías es, básicamente, poder poner en correspondencia las acciones y modelos de los estudiantes con los niveles de razonamiento covariacional.

Para la consolidación de estas categorías fue necesario proponer un análisis preliminar de cada una de las tareas que integra la secuencia de aprendizaje. A partir de esto, tales categorías enriquecen tanto los elementos teóricos como aspectos prácticos derivados de posibles acciones que podrían poner en juego los estudiantes durante la resolución de las tareas.

Adicionalmente, se pretendió articular aspectos del marco conceptual: lo didáctico, curricular y matemático para mejorar las categorías de análisis. De esta manera, lo presentado en este apartado incluye las reflexiones sobre los aspectos matemáticos tratados, los niveles de razonamiento covariacional e incluso, la modelación matemática desde el marco curricular. A continuación, se presenta la Tabla 4 como una alternativa para explicitar las categorías y los criterios de análisis para interpretar la actividad matemática desplegada por los estudiantes.

Acciones Mentales	Comportamientos	Niveles de Razonamiento	Secuencia
AM1: coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Verbalizar que a medida que el tiempo cambia la altura cambia (Designar ejes).	**N1** Coordinación: sustenta la acción mental de coordinar el tiempo con los cambios en la altura.	**Situación 1** Tarea 1 a)
AM2: Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Verbalizar que a medida que se aumenta la cantidad de tiempo la altura del agua en el recipiente crece (Construir una línea recta creciente).	**N2** Dirección: sustenta a AM1 como la acción mental de coordinar la dirección (aumento) del cambio de la altura mientras se considera cambios en el tiempo	b) c) Tarea 2 a) b)
AM3: Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Verbalizar la conciencia del valor de entrada (tiempo) mientras se considera cambios en el valor de salida (altura).	**N3** Coordinación cuantitativa: sustenta a AM1, AM2 y la acción mental de coordinar la cantidad de cambio de la altura con la cantidad de cambio en el tiempo.	Tarea 3 a) b) c)
AM4: Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Comparación entre razones de cambio. Verbalización de la conciencia de la razón de cambio del valor de entrada mientras se considerar cambios en el valor de salida.	**N4** Razón promedio: sustenta a AM1, AM2, AM3 y acción mental de coordinar la razón de cambio promedio de la altura con respecto al tiempo para ciertos intervalos de tiempo.	**Situación 2** Tarea 1 a) b) c)
AM5: Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	De acuerdo con los cambios de una gráfica, reconozcan, interpreten y construyan recipientes que correspondan a cada una de ellas.	**N5** Razón instantánea: sustenta AM1 hasta AM4 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio instantáneo	Tarea 2 a) b) c)

Tabla 4. Rejilla de Análisis

3.7 Diseño de la secuencia de aprendizaje

3.7.1 Fundamentación teórica

La secuencia de aprendizaje es el resultado de una adaptación de la *situación de aprendizaje* (SA) denominada: llenado de recipientes. Dicha SA se implementó en el marco de un programa de profesionalización docente, que tenía como objetivo central potenciar las fortalezas de un grupo de profesores de matemáticas a través de la *problematización del saber matemático escolar* (psme). Si bien, dicha SA fue diseñada para trabajar con profesores en ejercicio fue posible adaptarla para poder desarrollar los objetivos propuestos; puntualmente, caracterizar y promover el desarrollo del razonamiento covariacional de profesores en formación inicial.

La base teórica que fundamenta la SA es la Teoría Socio-epistemológica de la Matemática Educativa (TSME). Desde esta perspectiva el diseño se enmarca en una unidad socio epistémica conformada por cuatro dimensiones: a) *social, b) epistemológica, c) cognitiva y d) didáctica*[6], las cuales permiten reconocer, a) las prácticas sociales que producen o favorecen la necesidad del concepto matemático (lo lineal y lo no lineal), b) la naturaleza de la variación y el cambio c) la forma como los sujetos analizan las regiones de crecimiento y decrecimiento de una función y d) las dificultades de la enseñanza y el aprendizaje asociadas a la situación de llenado.

Adicionalmente, en el diseño de la SA se incorpora la visión curricular a través de las directrices dadas por la Secretaría de Educación Pública (SEP), tales como: aprendizaje esperado, contenido específico y contenido central. Como consecuencia, la SA considera variables de control para generar en el tratamiento del aprendizaje esperado.

Dichas variables se encuentran divididas en cuatro directrices: a) la elección de variables en contextos cercanos a los estudiantes donde se use el conocimiento y a la vez propicien el estudio de regiones de crecimiento, b) significado del comportamiento de crecimiento por medio de la confrontación, crecimiento lineal vs crecimiento no lineal, la cual estudia la relación lineal

[6] Reyes-Gasperini y Cantoral (2014)

proporcional y la no proporcional, c) el desarrollo de actividades siguiendo la evolución de las prácticas en el análisis del crecimiento y, d) la consideración del tratamiento de las dificultades reportadas.

Por último, la SA presenta una transversalidad la cual plantea el estudio de otras nociones matemáticas con elementos de la misma situación, por ejemplo, el uso de la variación lineal, el llenado de recipientes, la distinción entre el cambio y la variación, la distinción entre tipos de variación, así como tratar los usos de la primera y segunda derivada. En general, aspectos que permiten contribuir en el estudio de otros aprendizajes relacionados con la función, razón por la cual se proyectó su selección y rediseño como objeto de estudio del razonamiento covariacional, destacando el uso de representaciones gráficas, tabulares y verbales.

3.7.2 La secuencia de aprendizaje y el análisis preliminar

En este apartado se exponen las dos situaciones que configuran la secuencia de aprendizaje al tiempo que se discuten algunas estrategias que pueden emerger de la actividad matemática de los estudiantes y que representan tan sólo una de las posibilidades asociadas a cada uno de los niveles de razonamiento covariacional definido en el marco conceptual de Carlson et al. (2003).

La **secuencia de aprendizaje**[7] fue rediseñada en coherencia con las categorías de análisis (ver tabla 4) con el propósito de poder identificar los niveles de razonamiento covariacional configurados en los estudiantes al momento de enfrentarse a las situaciones propuestas. A continuación, se describen las situaciones y cada una de las tareas.

---

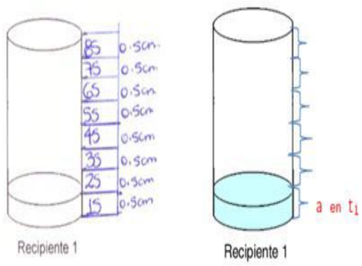
[7] Ver anexo 1.

La situación 1 está conformada por tres Tareas enmarcadas en los primeros niveles de razonamiento covariacional (N1, N2, N3). En particular, la Tarea 1 plantea una predicción con base en la información proporcionada por el dibujo y favorece la identificación y significación de las variables involucradas en la situación, así como la caracterización de la variación constante en fenómenos lineales. Así, el no proporcionar datos para la altura y el tiempo, busca que el estudiante se apropie de la situación y logre la identificación de las variables involucradas, es decir que reconozca que a medida que una variable cambia, la otra variable también lo hace (cuando el tiempo cambia, la altura cambia). Así mismo, se espera que el estudiante reconozca que a medida que aumenta la cantidad de tiempo esto va a generar cambios en la altura del agua, de este modo, al reconocer estos tipos de variables podrá plasmar la gráfica de tiempo vs altura. Finalmente, podrá ver si el comportamiento de la gráfica es creciente o decreciente. La Tarea 2 se enmarca exclusivamente en N2, al pretender que los estudiantes dieran cuenta de la coordinación de la dirección del cambio en el llenado a flujo constante de recipientes cilíndricos de diferente ancho, pero con la misma capacidad, favoreciendo así la confrontación de comportamientos lineales con diferente razón de cambio. La Tarea 3 se enmarca exclusivamente en N3 y pretende favorecer la caracterización del crecimiento no lineal a partir del análisis del llenado de recipientes cónicos. La tarea no involucra medidas específicas porque interesa analizar cómo el estudiante construye las gráficas al identificar una variación particular para el crecimiento de la altura en cada recipiente.

La situación 2 está conformada por dos Tareas enmarcadas en el desarrollo de los últimos dos niveles (N4, N5) del razonamiento covariacional. En este orden de ideas, la Tarea 1 se enmarca exclusivamente en N4 y busca que los estudiantes identifiquen y caractericen, a través de tablas de datos, aquellos comportamientos que presenta cada uno de los recipientes dados. Como consecuencia se espera que los estudiantes recurran a estrategias y procedimientos que conduzcan a la identificación de las razones de cambio de forma cuantitativa para predecir el comportamiento gráfico y el llenado de cada uno de los recipientes. La Tarea 2 está enmarcada exclusivamente en N5 y pretende favorecer la articulación de los tres tipos de crecimiento caracterizados en las actividades anteriores. Así, se espera por parte del estudiante una interpretación de los comportamientos gráficos en el plano cartesiano, que posteriormente le permita realizar bocetos de las formas que presenta cada uno de los recipientes. Como consecuencia se espera que el estudiante identifique si el comportamiento se asocia a la forma de un cilíndrico, cono, cono invertido o la combinación de todas, permitiéndole relacionar los comportamientos del gráfico con una forma específica del recipiente.

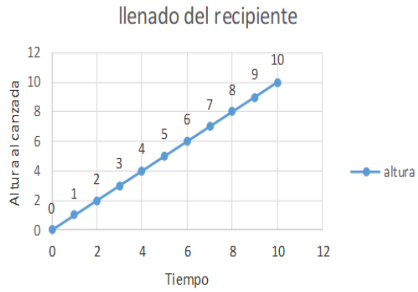
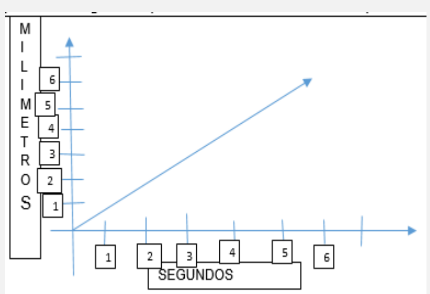
El **Análisis preliminar** se construye con base en la actividad matemática asociada con cada uno de los niveles de razonamiento covariacional. Cabe resaltar que la anticipación asociada con cada uno de los niveles está articulada con las categorías de análisis, de manera que es importante durante la lectura hacer efectivo el paralelismo entre ambas. Adicionalmente, es importante señalar que las intenciones de cada pregunta y las estrategias que aquí se presentan son el resultado de estudios previos, tales como: Caballero (2018) y Reyes-Gasperini y Cantoral (2014).

- **Anticipación asociada con N1**

<table>
<tr><td colspan="2">Situación 1-Tarea 1a ¿Cuántos segundos tardará en llenarse el recipiente? Justifique su respuesta</td></tr>
<tr><th>Soluciones</th><th>Justificaciones</th></tr>
<tr><td>Solución 1

</td><td>Las marcas de manera consecutiva en el lado del recipiente indican múltiples comparaciones entre la longitud total y la unidad de medida, hasta cubrir la longitud total.</td></tr>
<tr><td>Solución 2
“Considero que faltarían datos, tanto la altura del recipiente como la altura alcanzada por el agua, sin embargo, observando la figura se calcula que el recipiente tardará 7 segundos en llenarse, eso es 7 unidades iguales a la mostrada en azul en la figura”</td><td>Esta estrategia consiste en una apreciación visual de la medida, tanto de la altura total como de la altura que toma en un segundo. Con base en esta medición, se efectúa un cociente de estos valores para determinar el tiempo total que se requiere para llenar el recipiente.</td></tr>
</table>

- **Anticipación asociada con N2**

<table>
<tr><td colspan="2">Situación 1-Tarea 1b ¿Cómo crece la altura del cuerpo del líquido al paso del tiempo?</td></tr>
<tr><th>Soluciones</th><th>Justificaciones</th></tr>
<tr><td>Solucione 1
“El crecimiento es constante, ya que al paso de otro segmento volverá a subir la misma altura y así hasta llegar a la altura de llenado”</td><td>Esta estrategia alude al crecimiento usando la seriación al resaltar que cada segundo tiene el mismo incremento, no limitándose a señalar un subintervalo del llenado sino el proceso completo.</td></tr>
<tr><td>Solucione 2
“Es proporcional o lineal ya que cada segundo se obtiene la misma cantidad”</td><td>Esta estrategia también alude al crecimiento usando la seriación. Además, alude a la proporcionalidad como sinónimo de linealidad (argumento frecuente). En este caso no es incorrecto el argumento, pero como veremos más adelante, no todos los comportamientos lineales son proporcionales.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Situación 1-Tarea 1c Bosqueje la gráfica que muestre la altura del cuerpo del líquido al paso del tiempo.</td></tr>
<tr><th>Soluciones</th><th>Justificaciones</th></tr>
<tr><td>solución 1

</td><td rowspan="2">Dado que no se provee de datos específicos de la situación, este inciso tiene la intención de propiciar la construcción de un sistema de referencia para expresar el tipo de crecimiento que identificó el estudiante en los incisos anteriores.
Ambas estrategias consisten en construir un sistema coordenado en donde se plasme valores de la altura (de acuerdo con la unidad de medida utilizada) y el tiempo en segundos.</td></tr>
<tr><td>solución 2

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Situación 1-Tarea 2a ¿En qué se diferencia el crecimiento de la altura del cuerpo del líquido en el recipiente B respecto del recipiente A? Justifique su respuesta.</td></tr>
<tr><th>Soluciones</th><th>Justificaciones</th></tr>
<tr><td>Solución 1
“En el recipiente B se va a observar que se llena más rápido, pero esto solo será perceptivo por la altura mayor que tiene este último. Pero al final se llenarán igual en el mismo tiempo”</td><td>Esta estrategia alude a una comparación entre el cambio que sufrirán las alturas en cada recipiente (no explicita que es debido a lo angosto del recipiente B). Además, reconoce que tardarán el mismo tiempo (no explicita que es debido a que ambos tienen la misma capacidad).</td></tr>
<tr><td>Solución 2
“En el recipiente B el crecimiento es más rápido que en el recipiente A ya que es un recipiente más esbelto y por consiguiente se llena más rápido, si fueran iguales cantidades de flujo de agua en ambos.

Representadas las gráficas de los dos recipientes A y B, el tiempo sería el mismo para ambos, pero la altura sería mayor para el recipiente B”</td><td>Esta estrategia alude a una comparación entre el cambio en las alturas que sufrirá cada recipiente (sí es explicito que es debido a lo angosto del recipiente B).

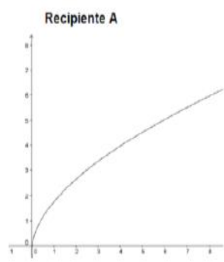
En la descripción de la gráfica, notamos que reconoce que tardarán el mismo tiempo (no explicita que es debido a que ambos tienen la misma capacidad) y que las alturas serían diferentes.</td></tr>
</table>

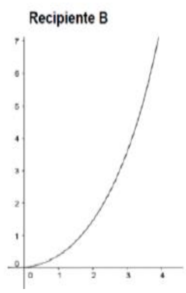
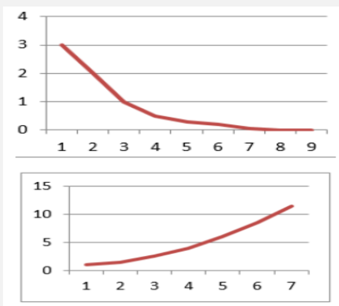
Situación 1-Tarea 2b Bosqueje la gráfica que represente el llenado de cada recipiente, en el mismo sistema coordenado.
Estrategias-Argumentos
Se espera que se construyan dos líneas rectas con diferente pendiente (partiendo del origen), donde la pendiente mayor corresponda al recipiente B. Es importante que, en las gráficas, el tiempo total de llenado sea el mismo para ambos recipientes y que las alturas que alcanzan sean diferentes.

- ## Anticipación asociada al N3

Situación 1-Tarea 3a Para el recipiente A, ¿cómo es el crecimiento de la altura en la parte inferior respecto a la parte superior?	
Soluciones	**Justificaciones**
Solución 1 “En el recipiente A se aprecia un llenado rápido con respecto al B, ya que comienza esbelto y se amplía conforme se llena. Irá disminuyendo su rapidez de llenado, a diferencia del recipiente B, que se inicia llenando lentamente, para terminar, llenándose rápido, o sea lo contrario del A”	En esta estrategia se toma en consideración la diferencia de ancho en la parte inferior de ambos recipientes, así como la superior. Observamos el uso de la *comparación* para diferenciar el tipo de rapidez de la parte inferior del recipiente A respecto del B, al igual que al diferenciar la parte superior.
Solución 2 “En el recipiente A, la altura del agua cada que pasa el tiempo será más lento el llenado ya que se observa mayor volumen. En el recipiente B, inicia lento por la razón del volumen, pero al pasar el tiempo se llenará más rápido por la misma situación que debe cubrir menos volumen”	En esta estrategia se relaciona el incremento de la altura con el volumen que corresponde a cada sección del recipiente. De esto, se utiliza la *seriación* para determinar que conforme aumenta la altura del recipiente A, se requiere más volumen de líquido, lo que implica que la altura crecerá cada vez menos. Caso contrario para el recipiente B donde la altura aumentará cada vez más.

Situación 1-Tarea 3b Para el recipiente B, ¿cómo es el crecimiento de la altura en la parte inferior respecto a la parte superior?
Soluciones – Justificaciones
Se esperan estrategias similares a las del inciso a.

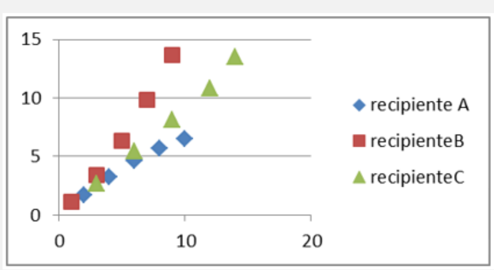
<table>
<tr><td colspan="2">Situación 1-Tarea 3c Para cada recipiente, proporcione la gráfica que muestre la altura del cuerpo del líquido al paso del tiempo.</td></tr>
<tr><th>Soluciones</th><th>Justificaciones</th></tr>
<tr><td>solución 1



</td><td>Esta estrategia consiste en utilizar una curva creciente cóncava hacia abajo para indicar un crecimiento que cada segundo es menor. Mientras que, una curva creciente cóncava hacia arriba se relaciona con un crecimiento que cada segundo es mayor.</td></tr>
<tr><td>solución 2

</td><td>Para estas gráficas, se utilizó la seriación para argumentar que la rapidez del crecimiento del agua es grande al principio del llenado del recipiente A, pero al paso del tiempo la rapidez va disminuyendo.
De modo que, las gráficas no contemplan la altura respecto al tiempo, sino la razón de cambio de la altura del cuerpo del líquido al paso del tiempo. Aunque no responde a la pregunta planteada, la respuesta deja ver un uso de prácticas y el reconocimiento de comportamientos no lineales, tanto crecientes como decrecientes.</td></tr>
</table>

- ## Anticipación asociada al N4

Situación 2-Tarea 1a Analizando las tablas, ¿qué diferencias observa entre el llenado del recipiente C y el recipiente D? Justifique su respuesta.
Solución - Justificación
Se espera que se argumente que los recipientes tienen razones de cambio diferentes (el recipiente C cambia 1.3 cm cada segundo, mientras que el recipiente D cambia 1.8 cm cada segundo). Con esto, se reconoce que el recipiente C contiene una cantidad inicial de líquido antes del llenado (2 cm).

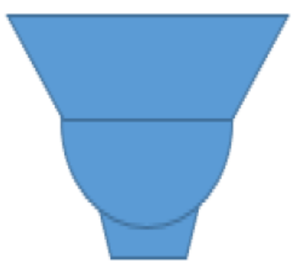
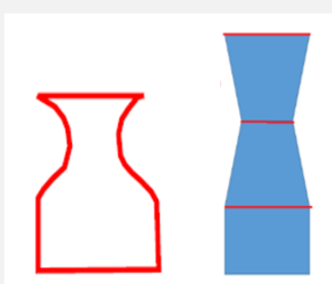
Situación 2-Tarea 1 b Si ambos recipientes miden 15 cm de alto, ¿cuál de los dos se llenará primero? Justifique su respuesta.	
Soluciones	**Justificaciones**
Solución 1 “Se llena primero el recipiente B si seguimos con las tablas anteriores podemos observar que el recipiente A va aumentando de 1.3 cm en cada segundo y aun cuando tenía más líquido al inicio (t=1), por otro lado, el recipiente B va aumentando con respecto a la altura 1.8 cm por cada segundo que pasa. Al pasar 8 segundos el recipiente A alcanzaba una altura de 12.4 cm y el recipiente B 14.4 cm, y al siguiente segundo el recipiente A 13.7 y el B 16.2 cm ya se llenó”	En esta estrategia se presenta el uso de la *seriació*n para determinar la razón de cambio en el incremento de la altura. Esto se logra al *comparar* entre si el incremento segundo a segundo en cada recipiente, además de *comparar* entre si las razones de cambio para determinar en qué recipiente el incremento es mayor. Por otra parte, una vez determinadas las razones de cambio se sigue calculando las alturas en diferentes valores de tiempo hasta encontrar el momento en el que uno se llena. Es decir, se hace un análisis numérico del crecimiento.
Solución 2 “Los dos recipientes se llenan en el mismo tiempo, ya que tienen la misma altura y el tiempo al final es el mismo, aunque el tiempo en un inicio es mayor en el recipiente A, al final se llenan en el mismo tiempo”	En esta estrategia se analiza el último dato de las dos tablas y se *compara* entre sí. No se considera el incremento de la altura segundo a segundo. Este tipo de análisis no usa la *seriación* como práctica para determinar la razón de cambio en el incremento de la altura.

Situación 2-Tarea 1c ¿cuál de los tres recipientes es un cilindro? Justifique su respuesta.	
Soluciones	**Justificaciones**
Solución 1 “El recipiente G es el recipiente que cuenta con un llenado constante, al pasar cada unidad de tiempo aumenta 0.9 cm. Como ya se había establecido con anterioridad si se trata de un cilindro el llenado del recipiente debe ser constante o dicho de otra forma por cada segundo que pasa la altura del cilindro aumenta de manera creciente en 0.9 cm. Las otras dos opciones presentan un crecimiento irregular por cada instante de tiempo”	El uso de la seriación permitió la comparación de tipos de crecimiento en diferentes intervalos. De manera que, se identificó en las tres tablas un crecimiento en la altura, pero el crecimiento de las tablas E y F no es constante, mientras que el crecimiento de la tabla G es constante.
Solución 2  “Se observa que el recipiente B se llena más en menos tiempo que el recipiente C, en lo que va del recipiente A tiene una tendencia que va más lento el llenado del líquido. Creo que el flujo del líquido aumenta conforme aumenta el tiempo, esto es para cada uno de los recipientes”	Para esta estrategia se construye una gráfica con base en las tres tablas presentadas. De esta manera se tiene una apreciación visual de los comportamientos de la altura para cada recipiente. Un argumento consiste en *comparar* el intervalo de tiempo que corresponde al llenado de cada recipiente con el incremento total de altura que se alcanza. En el análisis no se distingue entre formas de crecimiento.

- **Anticipación asociada al N5**

Situación 2-Tarea 2 a ¿Cómo es el crecimiento de la altura si llenamos un cilindro?
Solución- Justificación
Se espera que se realice una síntesis con base en tareas previas. Tal síntesis pudiera incorporar argumentos orales, numéricos o gráficos sobre el crecimiento constante que sigue el llenado de un cilindro bajo las condiciones de flujo constante y en el análisis de la altura contra tiempo.

Situación 2-Tarea 2 b ¿Cómo es el crecimiento de la altura si llenamos recipientes con forma de “cono” y “cono invertido”?
Solución – Justificación
Se espera que se articulen los resultados de las actividades anteriores, de modo que se argumente de manera oral, numérica o gráfica, que en los recipientes “cónicos”, el crecimiento de la altura no es constante, siendo rápido y después lento o bien, lento y después rápido, dependiendo del tipo de “cono”.

Situación 2-Tarea 2 c. Bosqueje un recipiente que corresponda a cada una de las siguientes gráficas que representan el fenómeno de su llenado.	
Soluciones	**Justificaciones**
Solución 1 **Recipiente A** 	En esta estrategia se analiza el recipiente en tres secciones con características diferentes: la parte inferior corresponde a un recipiente con forma de “cono” similar a los trabajados anteriormente, la sección central tiene una forma similar, pero con lados curvos, y la sección superior tiene la misma forma, pero con lados rectos y un ancho marcadamente mayor. Si bien, se recurrió a la idea de seccionar el recipiente y corresponder una forma específica de esa sección para el comportamiento correspondiente de la gráfica, en este caso únicamente la parte superior (tercera sección) corresponde con el tipo de comportamiento en la gráfica, un crecimiento cada vez menor.
Solución 2 **Recipiente A** 	Para esta estrategia nuevamente se analiza el recipiente en tres secciones. El recipiente en rojo tiene en la parte inferior una sección con paredes verticales que corresponde a una sección cilíndrica y al crecimiento constante del principio del intervalo de crecimiento de la altura, la parte central muestra una sección cuyo ancho es cada vez menor y corresponde al intervalo de crecimiento cada vez mayor. Es de resaltar que esta sección está conformada por lados curvos y rectos, pero en ambos casos se mantiene la característica de presentar un ancho cada vez menor, en la parte superior, el ancho del recipiente es cada vez mayor, lo que corresponde con el intervalo de crecimiento cada vez menor. El recipiente azul tiene las mismas características que el rojo, con la diferencia de que los lados son completamente rectos, así como algunas diferencias en cuanto a las dimensiones del recipiente en general.

Capitulo IV. Resultados y conclusiones

4.1 Introducción

El presente capítulo expone los resultados y análisis obtenidos durante la implementación de las tareas a los dos estudiantes que configuran el caso. Dicho análisis se sustenta en las categorías construidas previamente y en el análisis preliminar sobre las posibles actuaciones de los estudiantes. En conjunto, estos instrumentos permitieron reconocer ciertas características de los niveles de razonamiento covariacional y de sus respectivas acciones mentales durante la resolución de cada situación.

Adicionalmente, se presentan las conclusiones de la investigación articuladas con el alcance sobre los tres objetivos específicos propuestos. Finalmente, y como parte de las reflexiones y cuestionamientos que surgieron al desarrollar la presente investigación se postulan algunas recomendaciones para trabajos posteriores y nuevas rutas para seguir investigando.

4.2. Resultados y análisis posteriori de las situaciones

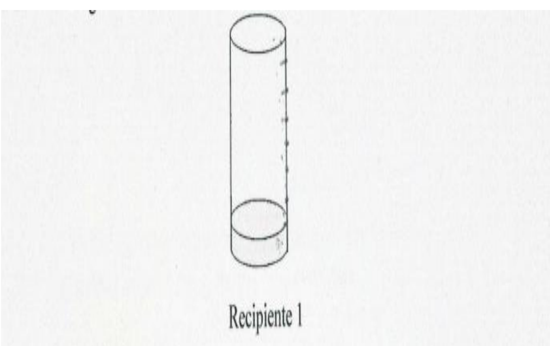
Para efectos de organización de los resultados se considera la exposición de estos en correspondencia con el orden de las situaciones y las tareas. De esta manera, inicialmente se presentan las producciones del estudiante 1 (E1) y seguidamente las del estudiante 2 (E2). Cabe mencionar que cada tarea tenía como propósito específico alcanzar un nivel de razonamiento determinado. Así, mientras se analizan las tareas se va considerando el progreso de cada estudiante hacia un nivel de razonamiento más sofisticado.

Durante la intervención con los estudiantes fue fundamental el uso de la entrevista semiestructurada a través de las preguntas diseñadas, pues estas permitieron indagar un poco más acerca de las acciones mentales configuradas en cada estudiante. Además de la codificación para cada estudiante, se definieron formas abreviadas de remitirse a las situaciones (S1, S2) y a las tareas (T1, T2, T3).

4.2.1 Resultados de las situaciones

- **Resultados de la situación 1-Tarea 1 (S1T1)**

La ilustración 4 permite evidenciar el tratamiento de E1 frente a la tarea propuesta. Tomando en cuenta la franja de color azul como una unidad inicial de medida, repite consecutivamente el espacio que ocupa la franja desde la parte inferior hacia la superior realizando marcas en el borde derecho del recipiente; comparando la longitud total y la unidad de medida. Así, identifica que al transcurrir el tiempo el flujo de agua aumenta, señalado la relación de variación presente entre el tiempo y la altura; así mismo, expresa afirmaciones relacionadas con la tarea (ver afirmación de E1).



***Transcripción**: E1: Tomo como unidad de medida el pedazo de color azul que aparece en el ejemplo [señala el recipiente], mido cuántas veces está el pedazo de color azul en el recipiente. Y luego cuento cuantas veces cabe, y así me doy cuenta de que tardará en llenarse 8 segundos, calculando [pausa], calculando, heee [pausa], como unidad de medida esta [señala el pedazo azul que es el llenado en un minuto], la primera el ejemplo que dan ahí, de un segundo a cómo se va llenando al transcurrir el tiempo, a los 8 segundos el ya estaría lleno, debido a los espacios. (Afirmación)*

Ilustración 4. Tipo de respuesta del estudiante E1 a la S1T1

Al igual que E1, E2 inicia subdividiendo la altura total del recipiente en segmentos iguales a la franja inicial, al mismo tiempo asigna la letra “h” para señalar la altura que alcanza el líquido en un segundo (ver ilustración 5). Posteriormente, procede a repetir la franja inicial de forma consecutiva hasta alcanzar el llenado total e identifica que cada segundo transcurrido implica un cambio en la altura. Dicho proceso le permite calcular un tiempo aproximado. Así pues, identifica las variables que intervienen en la tarea, reconociendo al tiempo como variable independiente y la altura como dependiente.

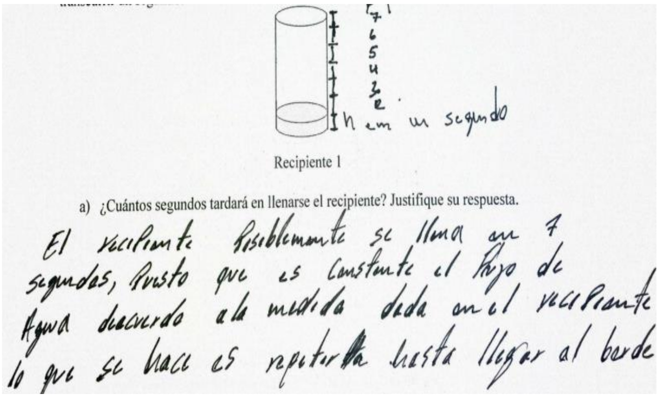
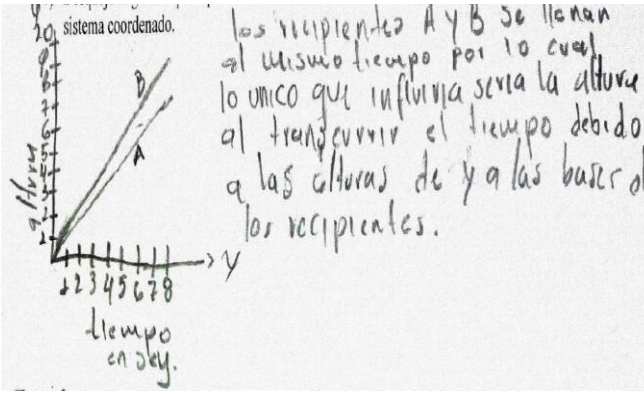


Ilustración 5. Tipo de respuesta del estudiante E2 a la S1T1

***Transcripción**: El recipiente posiblemente se llena en 7 segundos, puesto que es constante el flujo de agua de acuerdo con la medida dada en el recipiente lo que se hace es repetir hasta llegar al borde.*

- **Resultados de la situación 1-Tarea 2 (S1T2)**

Durante el desarrollo de la tarea E1 realiza la comparación de un recipiente respecto al otro, centrándose en el cambio en las alturas a medida que se da el llenado. Ello condujo a reconocer que comparten la misma capacidad y que la diferencia radica en las alturas, tal como se puede ver en la ilustración 6. Por otro lado, afirma que los recipientes presentan diferentes dimensiones destacando el recipiente A como aquel con mayor amplitud respecto al B. Así, señala que entre más amplia sea la base de un recipiente cilíndrico el crecimiento en la altura se presentará de manera lenta. A su vez, toma la misma escala métrica adoptada de T1 asignándole valores al tiempo y la altura. Toma el tiempo como variable independiente y la altura como dependiente para afirmar que uno de los recipientes tendrá diferente altura al finalizar el llenado, aunque manejen el mismo flujo constante. De esta manera, indica que en la parte gráfica el recipiente B tendrá mayor inclinación por el tamaño de la base.



***Transcripción**: Los recipientes A y B se llenan al mismo tiempo por lo cual lo único que influirá será la altura al transcurrir el tiempo debido a las alturas y a las bases de los recipientes.*

Ilustración 6. Tipo de respuesta del estudiante E1 a la S1T2

De manera similar, E2 diferencia el crecimiento del recipiente B respecto al A identificando la variación presente en las alturas, destacando los comportamientos gráficos que lo llevan a señalar que sin importar sus dimensiones ambos comparten igual capacidad. Así mismo, deduce que desde el ámbito gráfico las alturas presentan comportamientos diferentes, aunque les tome el mismo tiempo en llenarse. Para la graficación de cada uno de los comportamientos construye dos planos cartesianos con el propósito de detallar los cambios y halla en las alturas la principal diferencia asignando valores distintos a los ejes. Además, construye el comportamiento del recipiente A con un grado de inclinación mayor respecto al B conservando el comportamiento lineal de cada uno.

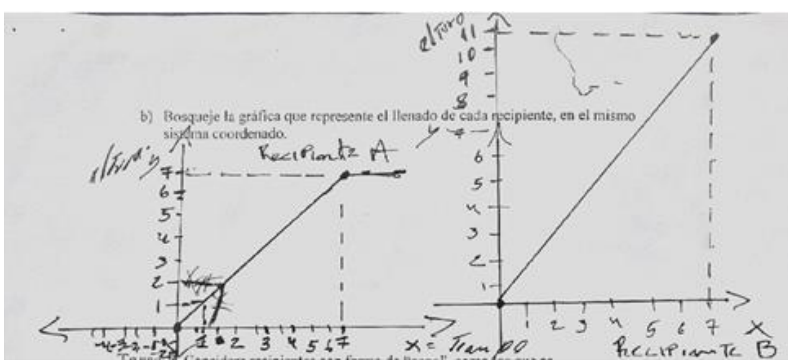


Ilustración 7. Tipo de respuesta del estudiante E2 a la S1T2

- **Resultados de la situación 1-Tarea 3 (S1T3)**

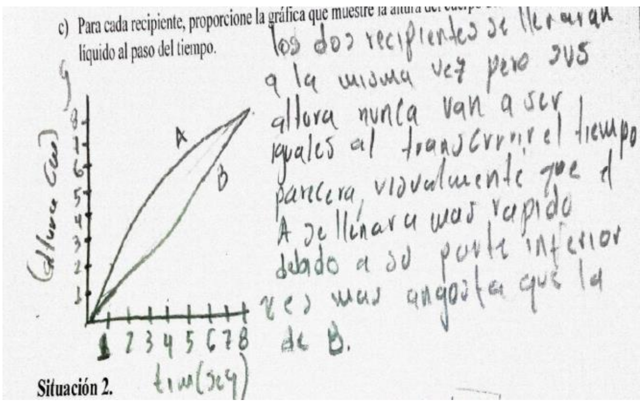
E1 relaciona los cambios de la altura con la forma del recipiente y así reconoce que al iniciar el llenado en la parte inferior del recipiente A, la altura presenta un crecimiento acelerado; comportamiento atribuido a su forma angosta que irá ampliándose al paso del tiempo obteniendo como resultado un crecimiento más lento en la altura. Así mismo, identifica la parte exacta donde se presenta el cambio en el cual el crecimiento acelerado empieza a disminuir, tal como se evidencia en la siguiente afirmación:

> *E1: El crecimiento de la altura con el flujo del agua va a ser más rápido al transcurrir el tiempo, va a crecer más rápido el flujo del agua en la parte inferior respecto a la parte superior, pero, hasta cierto punto crece rápido, pero llega un punto donde el flujo del agua se hace lento. (Afirmación).*

Para el recipiente B recurre a la misma estrategia aplicada en el recipiente A. Así, señala que en este caso la parte inferior inicia con crecimientos leves en la altura que son producto de la forma amplia del recipiente, que posteriormente empezará a reducirse al paso del tiempo. Para evaluar los comportamientos de cada recipiente los divide con una línea horizontal calculando la mitad, obtiene como resultado las partes inferiores, superiores y un punto intermedio, todo esto con el fin de comparar de forma paralela cada una de las partes de los recipientes. Como resultado indica que uno es el revés del otro, de tal manera que si en un segundo en el recipiente A el crecimiento en la altura se presenta de forma rápida en el recipiente B el crecimiento será lento hasta llegar al punto intermedio en que se invierten los comportamientos del llenado pasando a llenarse más rápido el B y más lento el A. La siguiente afirmación constata este hecho:

> *E1: Emm, Aquí [señala el plano que bosquejo]. En el recipiente A se iría llenando más rápido, la altura del líquido iría aumentando más rápido hasta llegar a la mitad del*

recipiente…entonces…este recipiente que se iría llenando más lento (recipiente B) sería al contrario…se llena más lento hasta cierto punto y después al llegar a la mitad sería más rápido. (Afirmación).



***Transcripción**: Los dos recipientes se llenarán a la misma vez, pero sus alturas nunca van a ser iguales al transcurrir el tiempo, parecerá visualmente que el A se llenará más rápido debido a su parte inferior es más angosta que el B.*

Ilustración 8. Tipo de respuesta del estudiante E1 a la S1T3

Por otro lado, E2 identifica las variables implicadas en la tarea (tiempo y altura); al igual que E1 divide ambos recipientes a la mitad con una línea horizontal destacando las partes superiores de las inferiores, prosigue comparando de forma paralela la parte inferior del recipiente A con la del B, identificando cambios acelerados en la altura de A y cambios leves en B hasta llegar al punto intermedio donde se invierten los comportamientos presentando cambios acelerados en B y leves en A. Para hacer evidentes dichos comportamientos recurre a la elaboración de un bosquejo gráfico en planos distintos, tal como se aprecia en las ilustraciones 9 y 10.

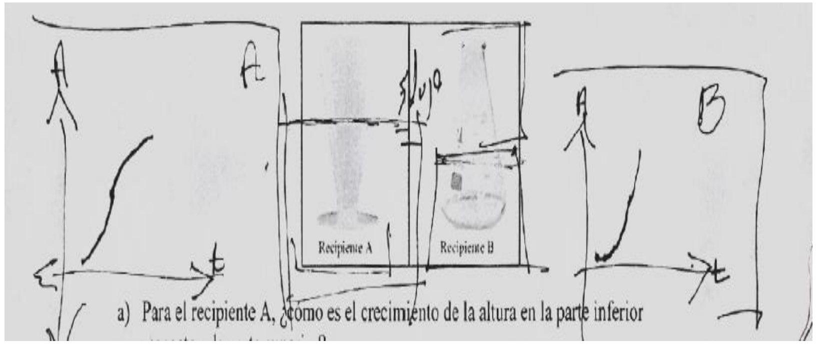


Ilustración 9. Tipo de respuesta del estudiante E2 a la S1T3

Durante la graficación no recurre a la asignación de valores para representar cada uno de los cambios, solamente opta por tomar un único valor para la altura y el tiempo (8 unidades). Además, modela el comportamiento gráfico de ambos recipientes en planos distintos con la finalidad de presenciar con mayor detalle los cambios. De igual manera, representa los cambios en las alturas reconociendo que no se presentan de forma lineal, realizando curvas con comportamientos específicos que son producto del llenado de cada recipiente (ver ilustración 10).

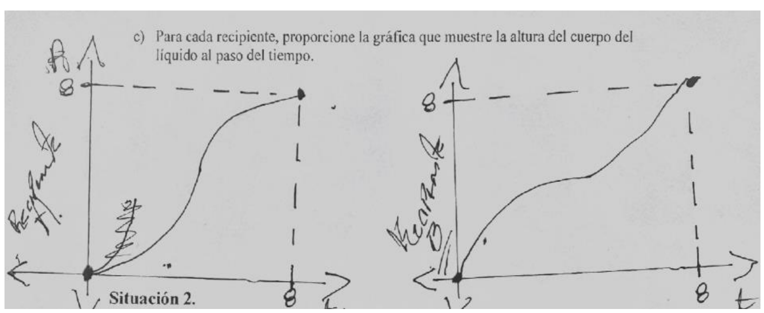
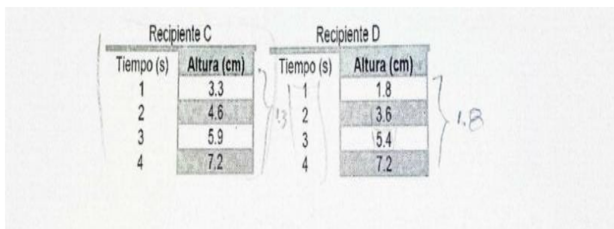


Ilustración 10. Tipo de respuesta del estudiante E2 a la S1T3

- **Resultados de la situación 2-Tarea 1 (S2T1)**

E1 reconoce la cantidad de líquido presente en cada recipiente afirmando que son distintos, aunque aclara que finalizando el llenado tendrán la misma altura debido a que conservan las mismas capacidades. Además, relaciona el tiempo y la altura transcurrida en un segundo identificando las diferencias entre sus razones de cambio. Para obtener las razones E1 emplea un proceso algorítmico que le permite hallar el valor exacto, dicha operación inicia con la sustracción del primer valor al segundo valor de la columna de las alturas; el resultado obtenido lo toma como una diferencia entre cada uno de los valores presente en dicha columna. Por tanto, concluye que los valores obtenidos son las razones de cambio que se presentan a cada segundo. Es así como el recipiente A presenta una razón de cambio de 1.3 y el recipiente B de 1.8 (ver ilustración 11). Como resultado concluye que el recipiente D tiene una razón de cambio mayor respecto al recipiente C, tal como se evidencia en su afirmación.



Recipiente C

Tiempo (s)	Altura (cm)
1	3.3
2	4.6
3	5.9
4	7.2

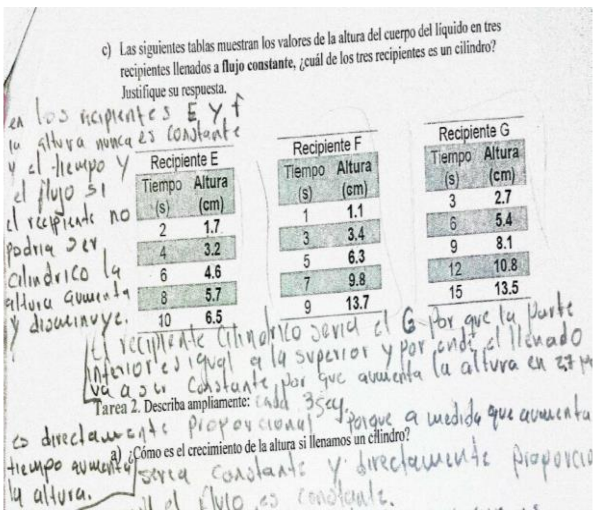
Recipiente D

Tiempo (s)	Altura (cm)
1	1.8
2	3.6
3	5.4
4	7.2

Ilustración 11. Tipo de respuesta del estudiante E1 a la S2T1

E1: ósea que el recipiente C empieza con una altura mayor, es decir el flujo del agua empieza a aumentar su altura más rápido que el recipiente D que empieza con una menor altura. (Afirmación).

En segunda instancia, reconoce las características de un recipiente cilíndrico a partir de la información proporcionada en las tablas de datos (E, F y G). Para deducir este hecho, inicialmente señala que los comportamientos en cada una de las tablas dan cuenta de formas distintas en los recipientes. Así, caracteriza cada uno de los recipientes, afirmando que E y F no presentan un llenado constante y como resultado señala que no habría posibilidad de que fuera un cilindro ya que ambos recipientes presentan una variación en las alturas específicamente en las razones de cambio, lo que impide que sean constantes debido que al sumar consecutivamente cada una de las razones de cambio de los recipientes E y F no coinciden con cada valor presente en la tabla en la columna de las alturas, descartando así estos recipientes. Sin embargo, reconoce el recipiente G como aquel que cumple las características de un recipiente cilíndrico, indicando un comportamiento lineal, reflejado en la razón de cambio (crecimiento constante de 2.7 cm por cada 3 segundos) la cual no cambia hasta alcanzar el llenado total. Así, concluye que el crecimiento es directamente proporcional al existir una relación directa entre la cantidad de tiempo y la altura (ver ilustración 12).

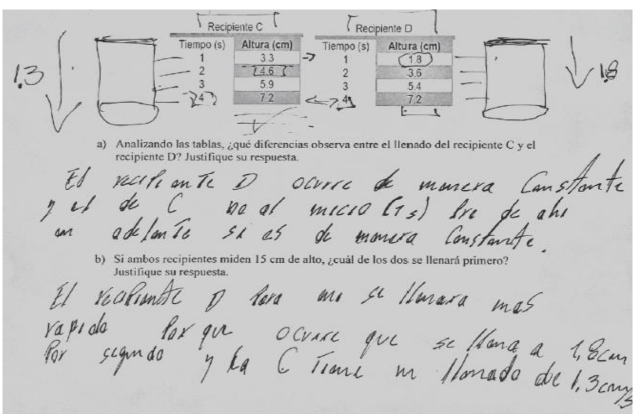


Transcripción: En los recipientes E y F la altura nunca es constante pero el tiempo y el flujo sí, el recipiente no podría ser cilíndrico la altura aumenta y disminuye. El recipiente cilíndrico sería el G por que la parte inferior es igual a la superior y por ende el llenado va a ser constante porque aumenta la altura en 2.7 cm cada 3 seg. Es directamente proporcional porque a medida que aumenta el tiempo aumenta la altura.

Ilustración 12. Tipo de respuesta del estudiante E1 a la S2T1

Ahora bien, E2 identifica el flujo constante de cada recipiente basándose en la información proporcionada en el enunciado. Así, distingue las variables independiente y dependiente. Seguidamente, realiza una operación matemática con el fin de hallar el valor cuantitativo de cada una de las razones de cambio presentes en las tablas. Las razones obtenidas lo llevan a inferir el comportamiento que presenta cada recipiente, indicando que uno de los recipientes se llenará más rápido que el otro. Posteriormente, dibuja cada uno de los cilindros (al lado de su respectiva tabla) y relaciona cada uno de los cambios con una parte específica de los cilindros, tal como se evidencia en la ilustración 13. De lo anterior E2 afirma que el recipiente D se llenará más rápido debido a que presenta una razón de cambio de 1.8 cm/s respecto al recipiente C cuya razón es 1.3 cm/s. Como consecuencia señala que, aunque el recipiente C inicie con una altura mayor ello no implica que se llene más rápido ya que la razón de cambio es menor respecto al reciente D, tal como se aprecia en la siguiente afirmación:

> *E2: si se llenan todos dos al mismo tiempo entonces el recipiente C es más pequeño porque la altura es más grande, entonces los recipientes de las dos tablas considero constante el llenado del recipiente D porque a cada segundo va sumando 1.8 segundos, pero el recipiente C empieza a ser constante a partir del primer segundo por eso los dos serían constantes solo que varía el crecimiento…*
>
> *- Entonces los recipientes no serían iguales si no que [pensando] Asumo que el recipiente C al iniciar el llenado va a ser más pequeño por que tuvo un llenado de 3.3 cm y de ahí en adelante subió otra medida que sería 1.3 cm. (Afirmación).*



Transcripción:

a. *el recipiente D ocurre de manera constante y el de C no al inicio (1 seg) pero de ahí en adelante si es de manera constante.*
b. *El recipiente D para mí se llenará más rápido porque ocurre que se llena a 1.8 cm por segundo y el C tiene un llenado de 1.3 cm/s.*

Ilustración 13. Tipo de respuesta del estudiante E2 a la S2T1

Posteriormente, cuando se le planteó diferenciar una figura cilíndrica tomando en consideración la información proporcionada por tres tablas de datos las cuales manejaban datos distintos correspondientes a una figura en particular incluyendo al cilindro, E2 parte hallando las razones de cambio de cada uno de los recipientes con el objetivo de encontrar las características correspondientes a las de un cilindro. Ahora bien, inicia evaluando los datos del recipiente E dividiendo la altura inicial por la cantidad de tiempo inicial obteniendo como resultado un cociente que representa la cantidad de tiempo recorrida durante un segundo, seguidamente procede en multiplicar el cociente con cada uno de los valores presentes en el tiempo de manera ordenada iniciando por el primer valor, posteriormente compara cada resultado obtenido con cada uno de los valores presente en la altura llevándolo a concluir que los resultados obtenidos no coinciden con los valores en la altura por lo tanto el recipiente no es lineal, tal como se evidencia en la afirmación realizada durante solución de la tarea.

> *E2: entonces vamos a hacerlo así, 1.7 cm lo divido para hallar la unidad en segundos y sería (1.7/2) y eso me daría 0.85 por segundo. Ahora vamos a mirar el recipiente E, entonces multiplico 0.85 x 1sg ahora 0.85 x 4 que tendría que darme 3.2 y me da 3.4, por eso el E por ahora no, voy descartando. (Afirmación).*

Retoma el mismo proceso para evaluar el recipiente F, hallando la razón de cambio y multiplicándola con cada uno de los valores del tiempo. De manera ordenada inicia por el primer valor, seguidamente compara cada valor obtenido con aquellos valores presentes en la tabla donde esta los valores de la altura y finalmente, afirma que los valores no coinciden puesto que el segundo resultado obtenido en la multiplicación del cociente con el segundo valor del tiempo no se corresponde con el segundo valor de la altura. Concluye así que el recipiente F no es un cilindro. Hecho que se puede evidenciar en la siguiente afirmación realizada durante el desarrollo de la tarea.

> *E2: Y aquí es 1.1 [recipiente F] por segundo, entonces a los tres segundos debería de sumarle (1.1x 3 seg) que sería 3.3 entonces este para mí, el F ya no sería un cilindro porque no cumple la condición de que cada uno de los momentos de la altura y del tiempo tenga la misma cantidad de llenado entonces se logra ver que el recipiente F no cumple con eso. (Afirmación).*

Para evaluar la forma del recipiente G, E2 utiliza la misma forma de proceder que con los recientes anteriores. Así, halla la razón de cambio y la multiplica con cada valor presente en el tiempo. A diferencia de los casos anteriores, al comparar cada uno de los valores obtenidos con aquellos presentes en la altura, se encuentra que coinciden, y concluye que aquel recipiente es un cilindro ya que presenta un comportamiento lineal que es creciente y constante. Este hecho se puede constatar en la ilustración 14 acompañada de la siguiente afirmación:

> *E2: entonces 2.7/3 que sería 0.9 entonces 0.9 x 6 entonces para mí el recipiente G cumple las expectativas en los primeros 6 segundos ahora vamos a mirar en los 15sg, entonces hago la multiplicación de 15 por la unidad en la unidad de la altura del llenado por segundo. Entonces, a los tres segundos tiene una altura de 2.7 busco la unidad. En un segundo me dice que es de 0.9 entonces yo me agarro a comparar ese 0.9 por cada segundo y tomó los valores que se presentan en la gráfica. (Afirmación).*

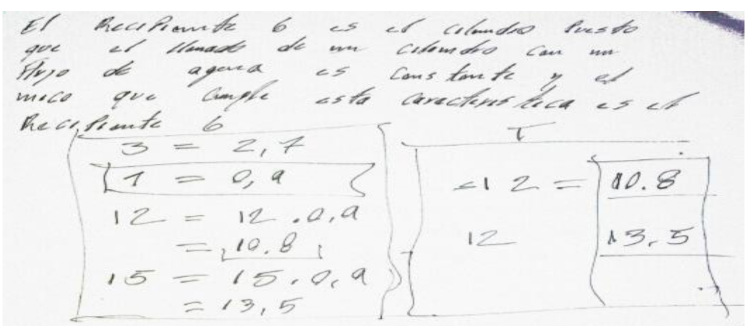


Ilustración 14. Tipo de respuesta del estudiante E2 a la S2T1

> ***Transcripción****: El recipiente G es el cilindro puesto que el llenado de un cilindro con un flujo de agua es constante y el único que cumple esta característica es el recipiente G*

- **Resultados de la situación 2-Tarea 2 (S2T2)**

Durante el desarrollo de esta tarea, E1 relaciona conceptos y aprendizajes de las tareas previas al bosquejar el recipiente en intervalos con el objetivo de hallar un comportamiento específico. Afirma que el recipiente A inicia con un comportamiento lineal similar al cilindro lo que implica un llenado a mayor velocidad y asegura, respecto al recipiente B, que este inicia su llenado en forma lenta, como si se tratara del comportamiento en un cono invertido. La siguiente afirmación constata este hecho:

E1: En este recipiente al inicio sería en forma de cono invertido [señala el recipiente B], mientras que el recipiente A al inicio sería en forma de cilindro y se llenaría más rápido. (Afirmación).

También afirma que el recipiente A se divide en tres comportamientos distintos, uno de manera lineal (en correspondencia con la forma cilíndrica), otro con poca altura y mucho tiempo (similar al comportamiento en un cono) y por último un comportamiento con un aumento en la altura en periodos de tiempo muy cortos (similares al cono invertido). Aspectos que se pueden evidenciar en la ilustración 15 y en las siguientes afirmaciones:

E1: Pues iniciado es constante pero la altura no aumenta mucho, pero mira que aquí [señala donde el recipiente comienza a cambiar la concavidad] la altura empieza a comportarse diferente y aumenta considerablemente.
Entonces al inicio empezaría como si fuera un cilindro, después pasaría a ser en forma de cono y después sería como un cono invertido. (Afirmación).

Ilustración 15. Tipo de respuesta del estudiante E1 a la S2T2

Tal como se puede apreciar en la ilustración 15, E1 considera comportamientos lineales y no lineales. De hecho, al momento de representar el gráfico relacionado con el recipiente B (ver ilustración 16) retoma estrategias similares a las del recipiente A. Así, relaciona la forma de cono con el primer comportamiento, seguidamente señala que la figura presenta un cambio semejante a la forma del cono invertido presentando poca altura a medida que pasa el tiempo y finalmente, asocia un nuevo cambio el cual está relacionado con un cilindro siendo constante y creciente, tal como se evidencia en la siguiente afirmación:

E1: Mientras que en el recipiente B iniciaría como si fuera en forma de cono, después de cono invertido y finaliza en forma de cilindro. (Afirmación).

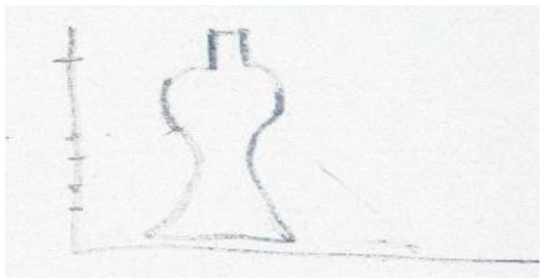


Ilustración 16. Tipo de respuesta del estudiante E1 a la S2T2

En lo que respecta a E2, identifica y diferencia las variables implicadas en la tarea (tiempo y altura). Esto lo condujo a reconocer la forma de cada recipiente a través de los patrones de cambio de cada una de las gráficas. Por otro lado, afirma que la forma del recipiente presenta diferentes comportamientos lo que implica cambios en la altura que a su vez son consecuencia de las concavidades que presente en la gráfica, aspectos que se evidencian en la siguiente afirmación:

E2: El llenado de ambos recipientes no serían constantes porque en ciertos momentos van a tomar unas concavidades, dependiendo del tiempo y la altura. También el tamaño del recipiente, entonces si es más angosto va a tener una mayor altura en un corto tiempo, pero, por el contrario, si el recipiente es grande en la parte de abajo va a iniciar con una muy pequeña altura y muy largo el tiempo entonces va a ser diferente cuando son de cono no son de forma constante no maneja lo constante. (Afirmación).

Como resultado de sus afirmaciones, E2 representa cada uno de los cambios en intervalos (a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, f), tal como se evidencia en la ilustración 17. Así, le asigna un intervalo a cada uno de los cambios: al intervalo (*a, b*) le asigna un comportamiento lineal, mientras que relaciona con un comportamiento de cono invertido de diferentes dimensiones a los intervalos *(b, c), (c, d) y (d, e)* como si se ubicara uno encima del otro. Finalmente, le atribuye la forma cilíndrica al intervalo *(e, f)* al presentar un comportamiento lineal.

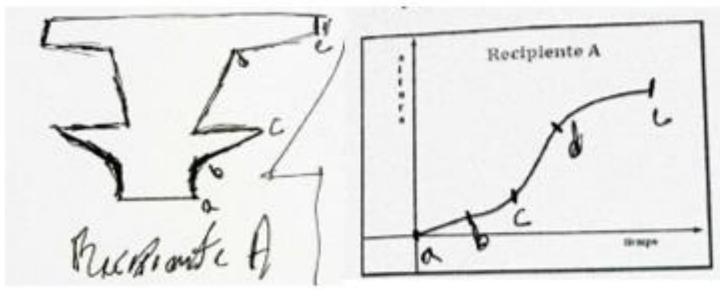


Ilustración 17. Tipo de respuesta del estudiante E2 a la S2T2

Para el recipiente B nuevamente secciona cada cambio de comportamiento en la gráfica, aunque para este caso no asigna letras para diferenciarlos. Inicialmente, relaciona la parte inferior con un comportamiento similar al cono invertido que empieza con un crecimiento acelerado en la altura que irá disminuyendo a cada instante; seguidamente relaciona el siguiente cambio con la forma de cono reconociendo un crecimiento leve en la altura que a cada momento irá en aumento, por último, atribuye la forma cilíndrica a los dos últimos cambios presentes en la gráfica.

E2 argumenta que durante el bosquejo de los recipientes fue necesito dibujarlo con el fin de visualizar de manera más detallada cada uno de los cambios, aunque reconoce que la forma correcta al dibujar cada recipiente es aplicando curvaturas que le permita verse más estético. Estos aspectos pueden apreciarse en la ilustración 18, así como en la siguiente afirmación realizada durante el desarrollo de la tarea.

> *E2: en verdad quedan un poquito curvo y no quedan con tantas esquinas y la idea es que quede algo curvo y tome una curva, pero no tan geométrica si no, algo más leve.*

-Esa era mi idea fue lo primero que se me vino a la mente para poder darle forma a los recipientes dependiendo las gráficas que se encuentran ahí, se hizo con tantas esquinas con el objetivo de que viera el cambio, que se notara bastante el cambio porque a veces en un recipiente bien estético no se le logra ver el cambio de una parte a la otra, por ejemplo; el llenado de una vasija si, donde la vasija presenta dos comportamientos uno inicia. (Afirmación).

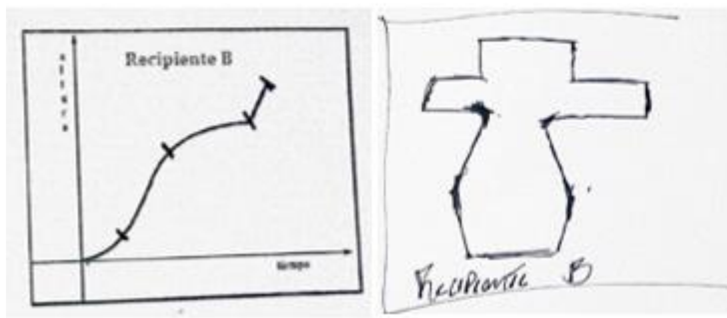


Ilustración 18. Tipo de respuesta del estudiante E2 a la S2T2

4.2.2 Análisis de los resultados

- **Análisis de la situación 1**

En la S1T1 se puede inferir que E1 recurre a la comparación y la seriación como estrategias para dar solución a la problemática en el llenado del recipiente. Así, recurre a estrategias que habían sido previstas en la anticipación presentada en la ilustración 4. Logra identificar cómo es el proceso de variación y cómo está relacionado con el llenado. Aspecto que se evidencia cuando reconoce al tiempo como variable independiente y a la altura como variable dependiente. En consecuencia, reconoce que por cada segundo transcurrido aumenta una unidad en la altura. Además, se evidencia que generaliza el proceso de variación al ser consciente que, pese a la ausencia de medidas en el recipiente, es posible determinar las variables implicadas en la tarea. De hecho, la ilustración 6 refleja este asunto que también se sustenta a través del siguiente fragmento de la entrevista.

E1: Porque al transcurrir un segundo…¡¡hemmm!!… hay una misma unidad de medida, en la altura…[AM1] ¡¡no! yo no conozco los centímetros que mide la unidad de medida de… pero basándome en la altura y en el bosquejo de ahí, entonces calculo una unidad de medida que sería uno y le asignó el valor, y a medida que transcurre un segundo aumenta uno allá (señala el recipiente de la pregunta uno). (Entrevista)

Por otro lado, en lo que respecta a E2 se encontró que recurre a estrategias similares que E1 como la seriación, tomando la franja inicial como punto de referencia, la cual simboliza el crecimiento en la altura al transcurrir un segundo. De esta manera, reconoce las variables tiempo, altura y la manera como estas se relacionan (a medida que transcurre el tiempo se irán presentando cambios en la altura). Así logra calcular el tiempo estimado, tal como se evidencia en la ilustración 7 y en el siguiente fragmento:

E2: Ahora, segundo por segundo me crece esa unidad [altura], eso es lo que logró notar. En otro segundo me crece una unidad más y en el siguiente segundo me crece una unidad más arriba de la unidad que me dio anteriormente. (Entrevista)

En consecuencia, tanto E1 como E2 tienen claro las variables involucradas y dejan entrever que ambos *coordinan* los cambios de una variable con los cambios en la otra (Carlson et al., 2003). Esto es así porque identifican cómo la franja de color azul (llenado en un segundo) realiza un cambio cada vez que transcurre un determinado tiempo y logran identificar cómo dos magnitudes covarían un respecto a la otra dando cuenta de la **AM1**. Como consecuencia, los estudiantes identifican *¿Qué es lo que cambia?* y puede afirmarse que dan cuenta del **N1** de razonamiento covariacional.

Durante el desarrollo correspondiente a la S1T2 se encontraron evidencias de la **AM2** por parte de E1. Ello se evidencia cuando el estudiante recurre a la aplicación de una estrategia de asignación de coordenadas en el plano cartesiano (al definir las variables tiempo y altura), tal como se puede ver en la ilustración 6 y en los siguientes fragmentos de la entrevista, al reconocer el ¿cómo cambia?

E1: El flujo del agua crece de manera constante… ¡ha! es... ¡creciente! [AM2]., porque a medida que transcurre el tiempo crece el flujo del agua.

-La gráfica partía desde uno, entonces sería porque es constante. (Entrevista)

En relación con lo anterior, se puede afirmar que E2 es consciente de la dirección del cambio (AM2), identificando que el comportamiento gráfico es creciente ya que al transcurrir el tiempo se presentan cambios en la altura. Además, afirma que presenta un comportamiento constante debido al flujo de agua, y menciona que es lineal aclarando que los comportamientos lineales son distintos, ya que presentan distintas inclinaciones que son producto de la forma que maneja cada recipiente. Finalmente, reconoce de manera implícita la pendiente de cada gráfica (ver ilustración 6). Aspectos que se pueden corroborar con el siguiente fragmento de la entrevista.

> *E1: Entonces como aquí en la altura del recipiente B es más alto, entonces la altura sería la máxima, porque se llenan al mismo tiempo, entonces este tendría más altura (señala el recipiente B), pero este (señala el recipiente B), lo único que influye es en la altura, por eso lo coloco más inclinado. Por un efecto visual va a parecer que uno se llena más rápido que otro, pero no es así, porque ambos tardan lo mismo en llenarse porque están a flujo constante. (Entrevista).*

Al igual que en el análisis de los resultados de E1, en E2 se destaca el reconocimiento de las variables que intervienen en la situación (tiempo y altura) el cual da cuenta de la **AM1**. Tal hecho, permitió que E2 empleara un sistema de coordenadas que lo condujeron a trazar una línea recta creciente, como representación del llenado en cada recipiente (comportamiento asociado con la **AM2**). Dicho aspecto se puede evidenciar en la ilustración 7 y en los siguientes argumentos derivados de la entrevista:

> *E2: Los comportamientos son iguales solo que se grafican de manera diferente porque uno va a estar un poquito más adelantado que el otro recipiente, pero se llenan al mismo tiempo solo que la altura va a variar en términos de distancia. (Entrevista)*

Se evidencia la consciencia que presenta E2 sobre la dirección del cambio, puesto que identifica y reconoce que, aunque ambos recipientes comparten el mismo comportamiento (lineal) presentan cierta particularidad: una recta está más inclinada que la otra, reconociendo así de forma implícita la pendiente de las gráficas. Adicionalmente, se puede infiere que la altura es la variable que cambia y provoca los comportamientos en las gráficas a medida que transcurre el tiempo. Hecho que se pone de relieve en los siguientes argumentos:

> *E2: Es decir, me doy cuenta de que la gráfica de la altura va a ser diferente, es decir van a tener la misma cantidad de agua en cada segundo ambos recipientes, pero la altura si va a variar, porque la altura del recipiente B es más grande. (Entrevista)*

En conjunto, tanto E1 como E2 son conscientes de la dirección del cambio reconociendo aquellas características de orden cualitativo que permiten que la gráfica se comporte de forma creciente al tiempo que ayudan a comparar diferencias y particularidades en cada comportamiento. Incluso, relacionan el comportamiento de las gráficas con las dimensiones de cada uno de los recipientes y distinguen de manera implícita las razones de cambio como responsables de que una gráfica este más inclinada que la otra. Como consecuencia, ambos estudiantes responden acertadamente al interrogante ¿Cómo cambia? y es posible situarlos en el **N2** de razonamiento covariacional.

En lo que respecta al desarrollo de la S1T3 se puede constatar que E1 elabora un análisis de la variación. Para ello, realizar una división de cada recipiente en la mitad con una línea horizontal tal como fue previsto en la anticipación asociada con el **N3** de razonamiento covariacional. Así, empieza identificando las variables involucradas (**AM1**) y es consciente del comportamiento gráfico al señalar que no son lineales, argumentando la presencia de crecimientos y decrecimientos no constantes (**AM2**), tal como se evidencia en la ilustración 8 y en la siguiente verbalización efectuada durante la entrevista.

> *E1: los dos comportamientos son crecientes, pues sí…pues a medida que transcurre el tiempo aumenta la altura [AM2]. Aquí afectaría de pronto [piensa], no afectaría porque de todos modos va a crecer, ósea sería creciente las dos, porque en ninguno va a disminuir, porque a lo que transcurre el tiempo el flujo siempre va a ser constante y se va a llenar siempre. Entonces no creo que afecte. (Entrevista)*

Es posible inferir que E1 presenta consciencia de aquellos cambios que presenta la altura al transcurrir el tiempo, la cual le permite realizar una comparación en el llenado de ambos recipientes entre la parte inferior y superior, dividiéndolos a la mitad, reconociendo así cambios distintos en las alturas de cada recipiente en un mismo instante de tiempo. Al realizar una comparación entre el tiempo y la altura concluye que existe una relación en la cual, a cada una de las partes de los recipientes le corresponde cierto comportamiento en la altura. Como consecuencia es clara la diferencia que establece entre el recipiente A y B (comportamiento asociado con la AM3). Además, realiza afirmaciones durante la entrevista que dan cuenta de ello.

> *E1: En el recipiente A se iría llenando más rápido, la altura del líquido iría aumentando más rápido en poco tiempo, hasta llegar a la mitad del recipiente, entonces este recipiente se iría*

llenando más lento [recipiente B] sería, al contrario, se llena más lento y tendrá poca altura tardando más tiempo en llenarse, pero hasta cierto punto y después al llegar a la mitad sería más rápido [AM3]. (Entrevista)

Al igual que E1, E2 identifica las variables que intervienen en la situación (AM1) así como los cambios que presenta la altura en los recipientes, dando cuenta de la variación y la dirección del cambio. Además, identificando el comportamiento creciente no lineal de las gráficas, presentando una curvatura (AM2), como se evidencia en la ilustración 10 y en el siguiente fragmento de la entrevista:

E2: Hablando del recipiente A inicia creciente [AM2] pero luego tiene un cambio en la mitad casi similar que el recipiente B solo que, es por cómo están ubicados los recipientes, tienen el mismo comportamiento, pero uno es como el revés del otro, como si tuvieran el mismo comportamiento, pero en diferente sentido, es decir uno inicia creciente y el otro decreciente [AM2] y cuando llegan a la mitad cambian, el que era creciente pasa a decreciente y el decreciente pasa a creciente. (Entrevista)

La comparación de aquellos comportamientos presentes en cada recipiente le permitió identificar la dependencia de las variables reconociendo que para determinados instantes de tiempo hay cierta altura. Este hecho se evidencia cuando compara ambos comportamientos y observa los cambios en las alturas (ver ilustración 9) como se aprecia en la siguiente afirmación:

E2: Altura Vs tiempo [pensando], mucho tiempo poca altura, mucho tiempo poca altura, mucha altura poco tiempo, mucha altura poco tiempo [recipiente B][AM3]. para el recipiente A mucha altura poco tiempo, mucha altura poco tiempo, entonces llega a un punto en el que poca altura mucho tiempo, poca altura mucho tiempo [AM3]. […] yo diría que el crecimiento del recipiente B en el ejercicio de los conos es creciente [AM2] (Entrevista)

En lo que respecta al desarrollo de la **AM3**, tanto E1 como E2 presentaron respuestas aproximadas que les permitieron coordinar la cantidad de cambio de la altura al transcurrir el tiempo. Se puede evidenciar como ambos estudiantes realizan una sustentación de carácter cualitativo relacionando la forma de los recipientes con el comportamiento gráfico. De la misma manera dieron cuenta de N1 y N2 identificando la dependencia y la dirección de cambio, al presentar comprensión de aquellos procesos de dependencia implicados, ayudando a reconocer comportamientos crecientes y decrecientes. De acuerdo con los comportamientos proporcionados por los estudiantes los cuales se asocia con la AM3, se puede afirmar que dan cuenta del N3 del razonamiento covariacional.

- **Análisis de la situación 2**

Durante el análisis de la **S2T1** se encontró que E1 basa sus respuestas en procesos algorítmicos identificando las diferencias a través de las razones de cambio, al considerar el comportamiento de las variables. Además, se evidencia cómo logra interpretar una serie de datos presentes en una tabla para comprender los cambios y así identificar a qué recipiente corresponde los datos y comportamientos de cada una de las tablas. Lo anterior ayuda al E1 a reconocer como las razones de cambio son necesarias para diferenciar comportamientos, de esta manera al identificar los valores precisos a través de aquellos valores cuantitativos de las razones permite imaginar y recrear el momento del llenado creando una imagen mental, como se aprecia en el argumento proporcionado durante la entrevista.

> *E1: ósea que el recipiente C empieza con una altura más alta, que diga con un flujo del agua empieza a aumentar la altura más rápido que el recipiente D. Empieza con una dimensión más angosta. (Entrevista)*

Por otro lado, E1 relaciona la forma de los recipientes con la razón de cambio, asignando comportamientos específicos correspondientes a un cilindro destacando la relación directamente proporcional y aquello constante, características propias de una relación lineal. Tal como se evidencia en la ilustración 12 y en el siguiente fragmento de entrevista.

> *E1: el cilindro sería este [señala el recipiente G], porque aumenta 2.7 cm, por cada 3 segundos [AM4]. Es proporcionalidad directa por que a medida que aumenta el tiempo, la altura también aumenta, ósea que es directamente proporcional. (Entrevista)*

Al igual que E1, E2 reconoce las razones de cambio como un aspecto fundamental que permite comparar las posibles diferencias. De igual manera, identifica las variables y el tipo de comportamiento asociado con la forma cilíndrica, diferenciando lo lineal de lo no lineal. Por otro lado, identifica la relación de dependencia entre las variables argumentando que a cada instante de tiempo se generan cambios en las alturas, tal como se evidencia en la siguiente afirmación.

> *E2: El recipiente D tiene un llenado de 1.8 cm en un primer segundo y de ahí en adelante es de manera constante, el recipiente C inicia con un llenado de 3.3 cm de ahí en adelante se llena a 1.3 cm cada segundo [AM4]. (Entrevista)*

El reconocimiento de cada razón de cambio fue tomado como un factor fundamental para establecer diferencias entre los recipientes. Así, identifica y caracteriza comportamientos propios de los recipientes cilíndricos, favoreciendo las comparaciones entre las razones con la intención de comprender cada comportamiento. Por otro lado, reconoce que durante el análisis de las razones se pueden destacar características, tales como: comportamientos constantes para los recipientes cilíndricos. Además, es consciente de la importancia que tiene la razón de cambio, tal como se evidencia en la ilustración 13.

Lo anterior deja entrever que tanto el E1 como E2 acuden a las razones de cambio para distinguir los comportamientos, reconociendo el valor específico de cada una de las razones que permitirá identificar el comportamiento gráfico y la forma del recipiente, esto se evidencia al momento en que cada estudiante realiza comparaciones entre las razones llegando a diferenciar aquellas que presentan un comportamiento lineal y no lineal. Dentro de las lineales se resaltan características como lo constante aludiendo al cambio repetitivo de un mismo valor en la razón de cambio, la proporcionalidad directa aludiendo al cambio que presenta la altura por cada unidad de tiempo transcurrida, representando un comportamiento lineal. De lo anterior se puede afirmar que tanto E1 como E2 dan cuenta de la **AM4** alcanzando el **N4** del razonamiento covariacional.

En cuanto a la S2T2 se logra reconocer una construcción aceptable de los recipientes por parte de E1, configurando indicios de la **AM5**. Inicialmente, E1 reconoce aquellos cambios presentes en las gráficas y los recipientes, lo que lo condujo a la identificación y caracterización de cada comportamiento. Así, relaciona cada una de las formas que presenta el recipiente con cada comportamiento de las gráficas, comprendiendo que en un recipiente no cilíndrico se pueden presentar distintos comportamientos.

Durante el desarrollo de cada actividad correspondiente con T2 se logra identificar como E1 aborda las problemáticas con los conocimientos previos de los comportamientos asociados con las tareas anteriores; esto lo condujo a identificar el comportamiento lineal caracterizado por una razón de cambio constante. También reconoce los comportamientos no lineales, relacionándolos con el cono y el cono invertido, como característica principal de curvaturas en sus gráficas. Lo anterior condujo a relacionar las concavidades hacia arriba con el recipiente en forma de cono, que presenta crecimientos leves en la altura al transcurrir el tiempo durante el llenado, así mismo, las concavidades hacia abajo las relaciona con el cono invertido presentando un crecimiento acelerado al transcurrir el tiempo, tal como se evidencia en la ilustración 15. El reconocimiento de los tres tipos de comportamientos le permite bosquejar el recipiente con la mayor precisión posible. Durante el proceso de construcción del recipiente identifica aquellos instantes donde ocurre un cambio representado con una forma distinta, por ejemplo, pasar de una forma cilíndrica a una forma de cono. Esto se evidencia en el siguiente fragmento de entrevista.

> *E1: Me guio por la altura y el tiempo, esto me sirve para graficar la altura, pues yo miraría los cambios que va teniendo en cada lapso de tiempo, inicia con la forma cilíndrica, luego pasa a ser cónica y viceversa, así como el bosquejo que realice. De esta manera fue que logré hacer los recipientes, otro lapso de tiempo, otro aspecto serio si es constante o creciente. (Entrevista)*

De la misma manera, E2 inicia con el reconocimiento de cada uno de los comportamientos en la gráfica; este proceso condujo a dividir la gráfica en intervalos para caracterizar cada uno de los cambios (ver ilustración 17 y 18). Durante la caracterización reconoce e identifica cada particularidad que presenta los intervalos, razonamiento que lleva a identificar comportamientos lineales con los recipientes cilíndricos y aquellos no lineales con el cono y cono invertido que presentan una curvatura en sus gráficas. Esto se evidencia en los argumentos proporcionados en el siguiente fragmento de entrevista.

> *E2: Ahora con el B sabemos, este también va por momentos en los cuales aquí también va a tener un cambio y aquí otro cambio [señala los cambios presentes en la gráfica], entonces vemos… A, B, C, D. Entonces comencemos donde va a tener muy poca altura y el tiempo también va a ser corto, no va a ser tan inclinado y va a tener una cierta abertura, pero no mucho y va a seguir con mucha altura y poco tiempo [recipiente en forma de cono], mucha altura y poco tiempo y será un poquito ajustadita a medida que crece. Ahora va a tener mucho tiempo y poca*

> *altura. Y después viene algo constante y ahí va a ser constante el llenado y digo que va algo como así [señala la gráfica] e ira algo como un cilindro y estos serían como los momentos del recipiente B. (Entrevista)*

Lo anterior deja ver de manera detallada como E2 trata de realizar un boceto del recipiente dividiendo los comportamientos en secciones, pero a pesar de ello no logra bosquejar la construcción adecuada con cada gráfica, ya que ambos recipientes no son del todo "aceptables". Se observa que los momentos en que las gráficas presentan un comportamiento lineal no existe mayor dificultad para representar y le atribuye un boceto en forma de cilindro debido al crecimiento constante, mientras que al momento de representar los comportamientos no lineales se evidencia que existe confusión al no poder bosquejar la forma adecuada del recipiente; en la parte inferior le atribuye un recipiente en forma de cono invertido que representa un intervalo de crecimiento que cada vez es menor, seguido de un crecimiento que cada vez es mayor (ver ilustración 18), debido a ello no logra realizar el bosquejo de la mejor manera.

Aunque E1 realiza una construcción aceptable se evidencia que no presenta una postura clara sobre la comprensión de la razón de cambio instantánea debido a que, evalúa la gráfica de forma parcial caracterizando cada uno de los comportamientos por separado conduciendo a analizar cada momento del cambio por separado y no como una única gráfica que presenta distintos comportamientos en la dirección del cambio, esto impidió comprender la implicación de los puntos de inflexión en las gráficas y condujo a realizar un análisis parcializado que es producto del trabajo con las actividades anteriores que planteaban el análisis de un comportamiento en específico. Como consecuencia de lo anterior se puede clasificar el comportamiento de E1 como *Pseudo analítico* y no logra evolucionar al N5 del razonamiento covariacional.

En contraste con E1, E2 inicia comprendiendo y explicitando cómo se presenta cada comportamiento en las gráficas, identificando tres tipos de comportamientos y exponiendo sus particularidades, conduciendo a explicar el comportamiento gráfico. Aunque al momento en que debía hacer uso de esa comprensión para argumentar y bosquejar la forma adecuada de los recipientes, se encontró que fue incapaz de relacionar el comportamiento de la gráfica y la forma de los recipientes expresando conceptos erróneos; tratando de justificar su construcción con procedimientos mal realizados como se puede evidenciar en el bosquejo de cada recipiente (ver ilustración 17 y 18) apreciándose una construcción muy geométrica que no detalla adecuadamente las curvaturas de las gráficas. Por ello, no se puede clasificar a E2 en el N5 del razonamiento covariacional ya que no logra desarrollar la AM5.

4.3 Conclusiones generales

En relación con el objetivo del presente trabajo, *Analizar la configuración de los niveles de razonamiento covariacional en un grupo de estudiantes de VII semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, sede Norte del Cauca a partir del trabajo con una situación enmarcada en el concepto de función desde una perspectiva dinámica*, y como consecuencia del análisis realizado, se detallarán aspectos cruciales y concluyentes. Para esto, se hace una valoración sobre en qué medida se han conseguido los objetivos específicos de investigación.

En primer lugar, se planteó *Identificar algunas tareas que involucren el concepto de función desde una perspectiva dinámica para su articulación en un (re)diseño de una situación de aprendizaje.* Durante el desarrollo de este primer objetivo específico fue fundamental reconocer al menos dos acercamientos no excluyentes para abordar el estudio del concepto de función en el ámbito escolar. Por un lado, se reconoció la perspectiva conjuntista como una idea de base para trabajar la función a partir de la correspondencia entre elementos de dos conjuntos dados. Por otra parte, se identificó la perspectiva dinámica, en la cual el concepto de función se aborda desde la variación y el cambio como idea de base. Si bien, ambas perspectivas son útiles para el trabajo matemático escolar en torno a la función, los intereses particulares de la presente investigación llevaron a indagar sobre diferentes propuestas de aula (tareas, situaciones, problemas, unidades didácticas, etc.) para trabajar el concepto de función desde la base de la variación y el cambio.

La selección de las tareas no fue un asunto inmediato, porque implicó la toma de decisiones alrededor de los conceptos matemáticos que integrarían el diseño y porque se buscaba coherencia con el marco conceptual del razonamiento covariacional. Pese a las dificultades, se destaca el hecho de que el diseño propuesto favoreció el desarrollo de las acciones mentales y sus correspondientes niveles, tal como se evidencia en el análisis realizado. Cabe mencionar que un aspecto central en el diseño fue la consideración de contextos cercanos a escenarios prácticos hasta definir, acertadamente, el llenado de recipientes como el contexto ideal donde la variación y el cambio son verdaderos protagonistas.

En relación con el segundo objetivo específico, *Diseñar una secuencia de aprendizaje que incluya varias tareas que posibiliten la identificación de los niveles de razonamiento covariacional en un grupo de estudiantes del VII semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, sede Norte del Cauca.*, cabe mencionar que desde una perspectiva didáctica se hizo un (re)diseño precavido y bien fundamentado, el cual se postulaba como un instrumento teórico adecuado para reconocer los comportamientos de los estudiantes y clasificarlos en un determinado nivel de razonamiento. Además, desde lo curricular se destacaron los procesos variacionales presentes en el estudio de la función, al abordar el estudio de fenómenos de variación y cambio a través de procesos de modelación matemática. No obstante, durante la puesta en acto de las situaciones se reconoció que, pese al potencial de las situaciones, las dos últimas tareas no fueron suficientes para reconocer los niveles previstos o bien, requieren un ajuste que posibilite una mejor indagación sobre las acciones mentales configuradas en los procesos de solución de los estudiantes. En cuanto a las otras tareas su (re)diseño y articulación fue útil para identificar y apoyar el desarrollo de las acciones mentales, tal como se evidenció en el análisis de las producciones. De manera que se construyó un instrumento (conjunto de tareas) que posibilitó el estudio de los niveles de razonamiento covariacional y el avance hacia niveles de razonamiento más sofisticados.

En términos del tercer objetivo, *Caracterizar los niveles de razonamiento covariacional, en el grupo de estudiantes seleccionados, a partir del trabajo con la situación de aprendizaje diseñada*, los resultados de los estudiantes, en torno a las preguntas de las tareas y sus respectivos análisis, pusieron de manifiesto la forma que toman los niveles de razonamiento covariacional de los dos estudiantes, así como sus avances durante el trabajo con las situaciones de aprendizaje. A continuación, se explicitan algunas conclusiones respecto a ello:

- ❖ El marco conceptual propuesto por Carlson et al. (2003) sirvió no solo para categorizar a los estudiantes en unos determinados niveles de razonamiento covariacional para la situación presentada, sino para determinar de manera detallada el avance del razonamiento al afrontar tareas de covariación. En dicho razonamiento fue evidente algunas nociones asociadas al concepto de función tales como: variables independientes, variables dependientes, comportamiento creciente o decreciente de la función, la pendiente desde la razón de cambio y puntos de inflexión. Dicha conclusión se infiere a partir de los resultados de las actuaciones de los estudiantes con cada una de las tareas, las cuales permitieron analizar elementos presentes en el discurso de sus explicaciones y obtener información detallada sobre sus procesos de comprensión. Así mismo, los comportamientos observados en los estudiantes dieron cuenta del porqué se clasifican en el nivel 4 de razonamiento covariacional del marco conceptual propuesto por Carlson.

- La situación de aprendizaje rediseñada fue un medio potente en cuanto al estudio de la covariación, dado que en cada una de las actividades estuvo presente una relación funcional (lineal y no lineal). Además, el uso de una situación fácilmente imaginable y familiar para los estudiantes, como lo es el llenado de recipientes, favoreció la búsqueda de significados matemáticos y, como consecuencia la caracterización de los niveles de razonamiento covariacional.
- Un asunto notable en la interpretación de las respuestas tanto escritas como orales, tiene que ver con el avance que tuvieron los estudiantes en cada uno de los niveles de razonamiento. Si bien, dicho avance se evidenció de manera casi directa en los primeros niveles, también se reconoció un avance aceptable del nivel 3 al nivel 4. Cabe resalta que hubo cierto acercamiento al nivel 5 de razonamiento covariacional (la AM5 se configuro en E1), aunque ambos estudiantes presentaron dificultades para sustentar la presencia de dicho nivel. Particularmente, porque no lograban sustentar desde el boceto aquellos

comportamientos presentes en la gráfica y las relaciones entre ésta y el recipiente bosquejado.

- El diálogo a través de preguntas fue fundamental para caracterizar y promover la evolución en el razonamiento de cada uno de los estudiantes, puesto que favorecía la reflexión constante de sus procesos de razonamiento, a través, por ejemplo, del análisis continuo de sus respuestas y la búsqueda de justificaciones para validarlas.
- Los diferentes tipos de representación utilizados en la situación de aprendizaje lograron crear un ambiente rico y variado de significados, favoreciendo la emergencia de la covariación. Además, la situación de aprendizaje propuesta permitió el estudio de las funciones de forma más contextualizada y dinámica.

4.4 Reflexiones finales y recomendaciones

Aunque esta investigación se centró en analizar la configuración de los niveles de razonamiento covariacional, el diseño de la situación de aprendizaje y los resultados obtenidos se convierten en insumos importantes para posibles rediseños de secuencias didácticas cuyo objetivo sea el estudio de la función desde una perspectiva dinámica. Además, es importante señalar que si bien, dicha perspectiva no es más importante que la perspectiva conjuntista, esta favorece el avance en los niveles de razonamiento covariacional, al ser la variación y el cambio los principales protagonistas.

Pese a que el (re)diseño de la situación fue potente, se recomienda que futuros trabajos incorporen las TIC´S en los procesos de diseño e implementación buscando mayor dinamismo en las tareas, así como mejores articulaciones entre los variados registros de representación para las funciones. Quizás de esta manera se logre generar un desarrollo más inmediato de las acciones mentales y sus categorizaciones a través de los niveles. Por otro lado, como resultado de esta investigación, se recomienda que en la formación de futuros profesores se introduzcan más actividades de modelación matemática, ya que estas son necesarias para promover la comprensión de los principales conceptos del cálculo, tales como: la identificación de las variables, sus relaciones de dependencia y el reconocimiento del cambio.

Frente a nuevas rutas para seguir investigando se considera fundamental el fortalecimiento de los procesos matemáticos relativos a la variación y cambio en los futuros profesores de matemáticas. Esto conlleva a analizar cómo están aprendiendo estos profesores y qué tantos conocimientos han logrado consolidar en sus procesos de formación, así como cuáles son las estrategias de intervención en el aula que están considerando implementar en sus eventuales clases.

Finalmente, queda abierta la ruta de investigación hacia trabajos que se interesen por el estudio concreto del desarrollo del nivel 5 de razonamiento covariacional, el cual podría efectuarse en el contexto de un curso de cálculo, puesto que el proceso de comprensión de la razón de cambio instantánea desde lo cuantitativo se relaciona directamente con los problemas de la derivada.

Referencias Bibliográficas

Azcárate, C., & Deulofeu, J. (1990). Funciones y gráficas. Matemáticas: culturas y aprendizaje. *Síntesis: Madrid*.

Caballero, M. P., & Cantoral, R. U. (2013). El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre profesores de bachillerato. Clame, pp. 1585–1593.

Caballero-Pérez, M. A. (2018). Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. la construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. (Tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México. **"Cinvestav"**

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. Revista EMA, 8 (2), pp. 121–156.

Calderón, J & Ovando, O. (2019). Estudio de elementos matemáticos que subyacen al concepto de función desde una perspectiva covariacional en estudiantes de grado quinto de primaria. (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Cabezas, C., & Mendoza, M. R. (2016). Manifestaciones Emergentes del Pensamiento Variacional en Estudiantes de cálculo inicial. *Formación universitaria*, *9*(6), 13-26.

Del Castillo, A., & Montiel, G. (2007). El concepto de función en un ambiente geométrico dinámico bajo el enfoque covariacional. Yucatán: Memoria electrónica de la XI escuela de invierno, pp. 568-579.

Gómez, O. (2015). Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno. (Tesis de maestría). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Gómez, L. F. (2008). Las teorías implícitas de los profesores y sus acciones en el aula. *SINECTICA*, *Revista Electrónica de Educación*, (30), 1- 14.

Grueso, R., & González, G. (2016). El concepto de función como covariación en la escuela. (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). Metodología de la investigación. México: McGraW-Hill

Hernández Sampieri, R., & Fernández Collado, C. (2010). Baptista Lucio MDP. *Metodología de la investigación*, *6*.

López, J. C., & Sosa, L. M. (2004). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *21*, 308–318.

López, E., & Fiallo, J. (2015). Aproximación a las concepciones usadas en la resolución de problemas de variación y cambio. XIV CIAEM-IACME.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. Serie Lineamientos curriculares. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas. En MEN, Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: MEN.

Paoletti, T., & Moore, K. C. (2017). The parametric nature of two students ’ covariational reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, *48*(October), 137–151. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.003

Posada, F., & Villa-Ochoa, J. A. (2006). Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Reyes-Gasperini, D., & Cantoral, R. (2014). Socio epistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 360-382.

Valoyes, L. & Malagón, M. (2006). *Formación del pensamiento algebraico en la educación escolar*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Villa Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (31), pp. 9-25.

Zeytun, A. Ş., Çetinkaya, B., & Erbaş, A. K. (2010). Matematik Öğretmenlerinin Kovaryasyonel Düşünme Düzeyleri ve Öğrencilerinin Kovaryasyonel Düşünme Becerilerine İlişkin Tahminleri. *Turkish Online Journal of Educational Technology*, *10*(3), 1573–1612. https://doi.org/10.1016/j.ijedu

ANEXOS

UNIVERSIDAD DEL VALLE-SEDE NORTE DEL CAUCA
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Universidad del Valle
Sede Norte del Cauca

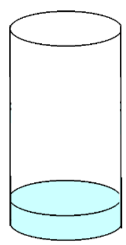
instituto de educación y pedagogía

Nombre:____

Semestre:____

SITUACIÓN 1.

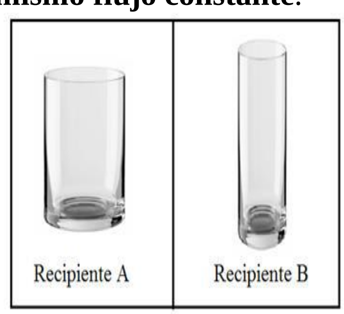
Tarea 1. Un recipiente vacío de forma cilíndrica es llenado mediante una llave a **flujo constante**. En la imagen siguiente se muestra la altura que alcanza el cuerpo del líquido al transcurrir un segundo.



Recipiente 1

a) ¿Cuántos segundos tardará en llenarse el recipiente? Justifique su respuesta.
b) ¿Cómo crece la altura del cuerpo del líquido al paso del tiempo?
c) Bosqueje la gráfica que muestre la altura del cuerpo del líquido al paso del tiempo.

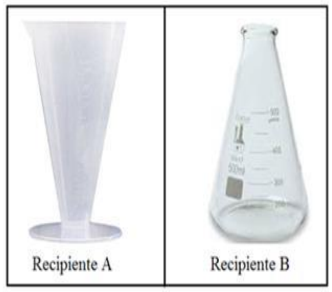
Tarea 2. Considere recipientes cilíndricos con diferentes **dimensiones** y con la misma **capacidad**, que serán llenados con **el mismo flujo constante**.



a) ¿En qué se diferencia el crecimiento de la altura del cuerpo del líquido en el recipiente B respecto del recipiente A? Justifique su respuesta.

b) Bosqueje la gráfica que represente el llenado de cada recipiente, en el mismo sistema coordenado.

Tarea 3. Considere recipientes con forma de "cono", como los que se Muestran a continuación, que son llenados al **mismo flujo constante**.



a) Para el recipiente A, ¿cómo es el crecimiento de la altura en la parte inferior respecto a la parte superior?
b) Para el recipiente B, ¿cómo es el crecimiento de la altura en la parte inferior respecto a la parte superior?
c) Para cada recipiente, proporcione la gráfica que muestre la altura del cuerpo del líquido al paso del tiempo.

SITUACIÓN 2.

Tarea 1. Durante el llenado a **flujo constante** de dos recipientes cilíndricos **con las mismas dimensiones** se registraron los siguientes valores de la altura del cuerpo del líquido.

Recipiente C

Tiempo (s)	Altura (cm)
1	3.3
2	4.6
3	5.9
4	7.2

Recipiente D

Tiempo (s)	Altura (cm)
1	1.8
2	3.6
3	5.4
4	7.2

a) Analizando las tablas, ¿qué diferencias observa entre el llenado del recipiente C y el recipiente D? Justifique su respuesta.

b) Si ambos recipientes miden 15 cm de alto, ¿cuál de los dos se llenará primero? Justifique su respuesta.

Tarea 2. Las siguientes tablas muestran los valores de la altura del cuerpo del líquido en tres recipientes llenados a **flujo constante**, ¿cuál de los tres recipientes es un cilindro? Justifique su respuesta.

Recipiente E	
Tiempo (s)	Altura (cm)
2	1.7
4	3.2
6	4.6
8	5.7
10	6.5

Recipiente F	
Tiempo (s)	Altura (cm)
1	1.1
3	3.4
5	6.3
7	9.8
9	13.7

Recipiente G	
Tiempo (s)	Altura (cm)
3	2.7
6	5.4
9	8.1
12	10.8
15	13.5

Tarea 3. Describa ampliamente:

a) ¿Cómo es el crecimiento de la altura si llenamos un cilindro?

b) ¿Cómo es el crecimiento de la altura si llenamos recipientes con forma de “cono” y “cono invertido”?

c) Bosqueje un recipiente que corresponda a cada una de las siguientes gráficas que representan el fenómeno de su llenado.