Secuencia de enseñanza para facilitar la constitución del objeto mental número racional desde la relación parte-todo

Ingrid Tatiana Pérez Triviño

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Santiago de Cali

2018

Secuencia de enseñanza para facilitar la constitución del objeto mental número racional desde la relación parte-todo

Ingrid Tatiana Pérez Triviño

Director:

Mg. María Cristina Valencia Molina

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Santiago de Cali

2018

TABLA DE CONTENIDO

INDICE DE FIGURAS

A mi padre: en su memoria,

Por todo lo que en esta vida nos faltó por hacer juntos.

A mi abuela Martha, por su amor incondicional

Y su entrega permanente.

A mi familia, por su apoyo constante.

AGRADECIMIENTOS

El recuerdo más entrañable que me acercó al mundo de las matemáticas lo tengo con mi madre. A ella le agradezco que durante toda mi infancia hizo de las matemáticas un mundo maravilloso por descubrir, no sólo por su complejidad sino porque me hizo entender que existe una realidad perfecta en medio de tantos números y letras. Sin duda esta pasión por los números se hizo más fuerte en mi tránsito por la escuela y gracias al profesor Francisco Javier Valencia, quien me reto constantemente a convertirme en su par académico.

Mi gratitud inmensa con la Magister María Cristina Valencia, directora de esta tesis, por sus recomendaciones puntuales, sus orientaciones que fueron claves a la hora de construir esta propuesta de investigación y que sin ellas me habría perdido en la complejidad de escribir este trabajo de grado.

Agradezco a los profesores Evelio Bedoya y Wildebrando Miranda por el apoyo, por cada sugerencia dada y por cada duda aclarada.

A las directivas y docentes de la Institución Educativa Jorge Robledo del Municipio de Vijes quienes estuvieron atentos a las necesidades y sugerencias hechas.

A los alumnos, porque en el lapso de tiempo tan corto, consolidaron la pasión por mi profesión con sus alegrías y abrazos, también porque permitieron hacer de esta investigación un aporte significativo en la transformación de mis prácticas pedagógicas en el nivel de básica primaria.

A mi abuela que me impulsó a nunca rendirme. A mi madre y hermana, compañeras y motivo de lucha permanente, a toda mi familia por su compañía en medio de la distancia, sus palabras y apoyo han sido fundamentales en mi formación académica. A Mauricio Aragón, compañero y apoyo durante este camino, por su ayuda durante las largas jornadas de lectura, análisis y reflexión que dieron como resultado la presente investigación.

RESUMEN

Este trabajo de investigación se apoya en el modelo metodológico de Kemmis 1984 (citado en Latorre 2005), para la investigación-acción, que además de permitir la práctica dentro de la sociedad, también es una ciencia crítica y reflexiva, con el cual se intenta facilitar la constitución del objeto metal numero racional desde la relación parte-todo.

A partir del estudio de los números racionales vista desde tres componentes: matemática, practica de aula y fenomenología didáctica, se diseña una secuencia de enseñanza la cual es implementada en el grado tercero de la Institución Educativa Jorge Robledo, dicha secuencia se organiza en situaciones que incluyen contextos lúdicos y materiales manipulativos.

Finalmente, este trabajo presenta los análisis de los registros surgidos al implementar la secuencia de enseñanza con los estudiantes sujetos de estudio, aportando elementos para la reflexión sobre su enseñanza.

PALABRAS CLAVES

Secuencia de enseñanza, números racionales, aprendizaje, educación básica primaria, fracción, relación parte-todo, fenomenología didáctica, objeto mental.

ABSTRACT

This research work is based on the methodological model of Kemmis 1984 (cited in Latorre 2005), for action research, which in addition to allowing practice within society, is also a critical and reflective science, with which it is attempted facilitate the constitution of the metal object rational number from the part-whole relationship.

From the study of the rational numbers seen from three components: mathematics, classroom practice and didactic phenomenology, a teaching sequence is designed which is implemented in the third grade of the Jorge Robledo Educational Institution, this sequence is organized in situations that they contain ludic contexts and manipulative materials.

Finally, this paper presents the analysis of the records that emerged when the teaching sequence was implemented with the students under study, providing elements for reflection on their teaching.

KEYWORDS

Sequence of teaching, rational numbers, learning, primary basic education, fraction, part-whole relationship, didactic phenomenology, mental object.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo constituye una propuesta investigativa cuyo fin es facilitar a los estudiantes de grado tercero de educación básica, el aprendizaje del objeto mental número racional desde la relación parte-todo, como respuesta a la gran necesidad de que los estudiantes que se inician en el conocimiento de estos números, puedan acceder con mayor seguridad a la construcción de los mismos en los diferentes grados de la educación básica secundaria en Colombia. La decisión de tomar esta iniciativa surgió a partir de la identificación de las dificultades que tienen los estudiantes a nivel mundial en el proceso de aprendizaje de la fracción, tal como lo mencionan en su trabajo Fazio y Siegler (2010).

Es conveniente hacer la distinción de la manera en que los conceptos de fracción y numero racional son utilizados durante todo el trabajo; una primera diferencia se da al entender los números racionales como un campo infinito de cocientes de la forma $\frac{p}{q}$ definida en el conjunto de los números enteros Z, es decir que p y q pertenecen a dicho conjunto, siempre que $q \neq 0$, a partir de la relación de equivalencia usual, en el cual las fracciones serían los elementos de dichas clases de equivalencias. Tal como se sustenta a continuación:

Según Restrepo:

Sea H el conjunto de las parejas $(p,q) \in Z \text{x } Z$ tales que $q \neq 0$:

H = $\{(p,q) \in Z \text{x } Z : q \neq 0\}$

Sea la relación $(p,q) \sim (r,s)$ si $ps=qr$ una relación de equivalencia en H.

[…]

Denotaremos por $\mathbb{Q}$ al conjunto cociente H/~. Los elementos de $\mathbb{Q}$ se llaman números racionales (o números fraccionarios) y $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números fraccionarios. Denotamos por $\frac{p}{q}$ ó p/q ($q \neq 0$). (2003, p. 147-148).

De otro lado, se toman las fracciones como el viaducto o medio para acercarnos a los números racionales, esto con relación al número racional como objeto matemático (concepto abstracto) y la fracción como el medio por el cual dicho objeto matemático es manipulado o tratado dentro de su estructura matemática.

En este orden de ideas, se cree que la existencia de problemas en el aprendizaje de la fracción, supone dificultades en el proceso de constitución del objeto mental número racional.

Ahora, en los resultados del informe por colegio de las pruebas SABER de los años 2015 y 2016 de la IE Jorge Robledo del municipio de Vijes, en el departamento del Valle de Cauca se encontró que estudiantes de grado tercero presentaron dificultades en el proceso de aprendizaje de la fracción desde la relación parte-todo[1], para describir situaciones en contextos continuos y discretos[2], lo que llevó a proponer el diseño y la implementación de una secuencia de enseñanza.

Este documento se ha estructurado en cinco capítulos; en el primero de ellos, llamado “el problema” se presenta el planteamiento y formulación del problema, la justificación del mismo, los antecedentes de la investigación, los objetivos (general y específicos) y el referente contextual donde se encuentra el problema.

---

1 Se habla de la fracción desde relación parte-todo, toda vez que se considere la fracción como medio de representación simbólica de la comparación del todo y las partes de los números racionales.

2 Los contextos continuos o discretos se definen a partir de la naturaleza de unidad que se trata, cuando esta es continua se hace referencia a lo “medible” (longitudes, superficies, volúmenes, etc.), entre tanto, cuando la unidad es de naturaleza discreta, se refiere a lo contable, es decir a un conjunto de elementos que se pueden contar (ejemplo: canicas, personas, galletas, etc.)

En el segundo capítulo se expone el referente teórico-conceptual, que abarca tres apartados, en el primero de ellos, se ven los números racionales desde la matemática, en el que se documenta un poco sobre los orígenes de estos y sus diferentes interpretaciones, enfocándose específicamente en la relación parte-todo con sus respectivos sistemas de representación.

En el segundo apartado, se tratan los números racionales en la práctica de aula[3]; se presentan unas propuestas y variables importantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los mismos, además de la documentación de algunos obstáculos didácticos y dificultades en su aprendizaje.

En el tercer apartado, se miran los números racionales desde la *Fenomenología Didáctica*, la cual suministra herramientas relacionadas con la constitución de *objetos mentales*[4], además de tomar dicha teoría didáctica como complemento a los aportes de Llinares y Sánchez (1999).

Estos apartados permitieron diseñar una secuencia de enseñanza que fue implementada y validada en la Institución Educativa (IE).

En el tercer capítulo se presenta la estrategia metodológica investigación-acción desde el modelo de Kemmis 1984, (citado en Latorre, 2005), donde “la investigación-acción no sólo se constituye como ciencia práctica y moral, sino también como ciencia crítica[5]”. (Latorre, 2005. p. 24).

---

[3] Entendiendo practica de aula como el escenario donde se relacionan las acciones de enseñar y aprender.

[4] Partiendo del análisis realizado a la teoría de la fenomenología didáctica de Freudenthal, se dice que un estudiante ha constituido un objeto mental (entendiendo este como aquello que el estudiante percibe sobre algún concepto, aun sin saber que dicho concepto existe dentro de la disciplina matemática) cuando interpreta de forma afortunada tal objeto mental en diferentes situaciones.

[5] La estrategia metodológica de investigación-acción, fuera de ofrecer al investigador la posibilidad de trabajar dentro/con una sociedad, también le permite realizar una auto reflexión crítica sobre su práctica a partir del registro, análisis y balance continuo de sus acciones pedagógicas.

En el cuarto capítulo, se presenta el análisis de la implementación de la propuesta con un grupo de estudiantes de grado tercero de educación básica primaria.

Finalmente, en el quinto capítulo se encuentran expuestas las conclusiones del trabajo de investigación.

CAPÍTULO 1: EL PROBLEMA

1.1 Planteamiento y formulación del problema.

Un objeto matemático importante dentro del contexto escolar del niño desde los primeros grados son los números racionales, pues según Obando:

> Los números racionales […] constituyen un campo numérico de gran importancia, tanto desde el punto de vista matemático, como por su utilidad en el procesamiento e interpretación de situaciones de la vida cotidiana. […] También son importantes en los procesos escolares dado que los numero racionales constituyen una base fundamental no solo para el estudio de la matemática, sino también para la formación en otras disciplinas como la física, la química, la biología, etc. (2003, p. 158).

Ahora bien, diferentes estudios han manifestado la problemática que existe en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la fracción, entre los cuales sobresale el trabajo de Fazio y Siegler, en el cual afirman que:

> Estudiantes de todo el mundo tienen dificultades en el aprendizaje de fracciones. En muchos países el estudiante promedio jamás obtiene un conocimiento conceptual de fracciones. (2010, p. 6).

Lo anterior hace parte del problema que existe en Colombia, particularmente, en el caso de la Institución Educativa Jorge Robledo del municipio de Vijes-Valle del Cauca, esto lo demuestra los resultados de las diferentes pruebas externas, como por ejemplo, según el informe por colegio de los resultados de las pruebas Saber correspondientes a los años 2015 y 2016, indican que el 35% de los estudiantes de grado tercero “presentan dificultad en el uso de fracciones comunes para describir situaciones continuas y discretas”, (estas situaciones vistas a partir de los números racionales desde la relación parte-todo)

Es por esto que, al pensar en intentar contrarrestar estas dificultades que se hacen evidentes en algunos estudiantes de la IE. Jorge Robledo, surge la siguiente pregunta de investigación:

¿De qué manera el diseño e implementación de una secuencia de enseñanza[6] facilita a los estudiantes de grado tercero (3-1) de la Institución Educativa Jorge Robledo del Municipio de Vijes (Valle), la constitución del objeto mental número racional desde la relación parte-todo?

1.2 Justificación del problema

Son varias las razones que justifican la realización del presente trabajo y permiten entender la importancia del mismo, es por esto que a continuación se presenta una síntesis de estas.

1. Los números racionales son importantes dentro del contexto escolar del niño desde los primeros grados, donde según Llinares S y Sánchez M (1999) la relación parte-todo es

---

6 Según Llinares y Sánchez:
una secuencia de enseñanza es una serie de actividades dirigidas a la consecución de uno o varios objetivos de aprendizaje. Cada secuencia de enseñanza puede estar formada a su vez por otras secuencias de enseñanza diferentes. Además, las secuencias de enseñanza pueden tener una duración de horas, unas semanas e incluso de varios años como las caracterizadas por el objetivo a largo plazo. (1999, p. 90).

de las más intuitivas por el niño, por tanto, la convierte en el origen del trabajo con las demás interpretaciones de los números racionales.

Es lo anterior una de las razones por las cuales el trabajo se enfoca en el estudio de los números racionales, particularmente desde la relación parte-todo.

2. La IE Jorge Robledo no es ajena a las dificultades en el aprendizaje de los números racionales que se han identificado a nivel mundial, lo cual se ve reflejado en los resultados de las diferentes pruebas externas a los estudiantes de grados terceros realizadas en los años 2015 y 2016.

3. Existe una preocupación personal sobre las dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los números racionales, pues a pesar de ser introducidos desde los primeros años de escolaridad de los estudiantes, estos continúan presentando falencias durante toda su formación básica, e incluso cuando ya han finalizado la misma.

1.3 Antecedente de investigación

El interés y estudio en el campo de los números racionales, particularmente de la relación parte-todo fue privilegiada en el pasado, y aun encontramos gran cantidad de trabajos que se enfocan tanto en la enseñanza como en su aprendizaje, pues gracias a los avances tecnológicos y las diferentes teorías didácticas, las investigaciones relacionadas son desiguales en cuanto a objetivos, estrategia metodológica, etc., pero con el mismo enfoque, el de los números racionales desde la relación parte-todo.

A continuación, se presentan cinco trabajos de investigación, un **primer trabajo**, es una tesis doctoral que corresponde a Castro, E. (2015), denominada: “significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros”, cuya problemática de investigación surge a partir de la poca existencia de trabajos que resalten la importancia de la fracción desde la relación parte-todo para el pensamiento multiplicativo y mucho menos se ha profundizado desde el punto de vista del conocimiento del profesor. Por lo que surgen cuatro aspectos problematizadores, que a su vez dan lugar a cuatro objetivos generales, según Castro, estos son:

> OG1. Profundizar en los usos e interpretaciones de la relación parte-todo a través de su análisis conceptual para determinar con precisión el alcance del concepto objeto de estudio. […]
>
> OG2. Identificar, describir y analizar el conocimiento matemático escolar sobre fracciones que manifiestan un grupo de estudiantes del grado de Educación Primaria basado en la relación parte-todo, en términos de su estructura conceptual, sus sistemas de representación y otros contextos y usos. […]
>
> OG3. Identificar, describir y analizar el conocimiento didáctico que expresa un grupo de estudiantes del grado de Educación Primaria sobre cómo planificar la enseñanza de las fracciones basada en la relación parte todo. […]
>
> OG4. Identificar, describir y analizar el conocimiento didáctico que manifiestan un grupo de estudiantes del grado de Educación Primaria sobre el aprendizaje escolar de las fracciones basada en la relación parte todo. (2015, p. 19-20).

Con ayuda de un estudio teórico (fase 0), donde se basaron en el análisis conceptual, siendo este uno de los cinco análisis que organiza el proceso del análisis didáctico[7], por otro

[7] El análisis didáctico, según Castro:
[…] Se ha desarrollado la noción de análisis didáctico de las matemáticas escolares como

lado, un estudio empírico (fase 1, 2 y 3), el cual tiene una estructura combinada en el que realizan tres fases secuenciales para la recogida y análisis de datos, basadas en el análisis de contenido, análisis cognitivo y análisis de instrucción (las cuales también organizan el proceso de análisis didáctico). El quinto análisis, es el análisis de evaluación, el cual no se llevó a cabo, debido que, para ello era necesario que los participantes pusieran en práctica su trabajo de planificación, lo cual no sucedió, por tanto, no fue posible que valoraran en qué medida se logran sus expectativas sobre la enseñanza y aprendizaje de las fracciones.

Con relación al referente teórico-conceptual que maneja dicha investigación, esta gira desde la perspectiva teórica del análisis didáctico, entendiendo esta como "una técnica o secuencia estructurada para organizar y guiar el diseño de unidades didácticas en las matemáticas escolares, proporcionando criterios para estructurar los contenidos, el conocimiento sobre cognición, el conocimiento sobre instrucción y sobre evaluación de un tema específico". (2015, p. 60). Sin embargo, se profundiza desde el conocimiento de los futuros maestros sobre el contenido matemático escolar, relativo al concepto de fracción y su significado.

De los resultados se obtuvieron conclusiones que hacen relación a cada uno de los cuatro objetivos planteados inicialmente y se puede decir de manera general que concluyeron lo siguiente:

Del primer objetivo, concluyeron sobre el aporte original e importante del estudio teórico realizado acerca de las nociones básicas de la relación parte-todo, su naturaleza y sus diversas interpretaciones, ya que mostro la relevancia de la relación parte-todo como objeto que forma parte de los fundamentos de la matemática y de gran parte de sus conceptos.

Del segundo objetivo, concluyeron sobre la mejora en la comprensión del conocimiento de los profesores en formación a través del análisis de contenido, pues los resultados muestran que aquellos que participaron en este estudio, al inicio de sus estudios universitarios, consideraron diferentes significados para el concepto de fraccionar con base en la relación parte-todo multiplicativa y diferentes niveles de dominio en el uso de dicha relación.

Del tercer objetivo, observaron que los profesores que participaron en el estudio, asumieron con facilidad su papel de docente, expresando por medio de sus repuestas su conocimiento didáctico sobre el contenido de manera coherente para hacerlo más comprensible para los estudiantes, sin embargo, al presentar la planificación de secuenciación de los contenidos, tuvieron dificultad en mantener un orden lógico en estos.

Del cuarto y último objetivo, de manera global identificaron dos tendencias en el conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje de la fracción manifestado por los sujetos objetos de estudio, una es la tendencia procedimental, en la que el conocimiento se lleva a cabo por procedimientos, procesos o modos de actuación, y la otra, es la tendencia conceptual, donde el conocimiento manifestado pone énfasis en la comprensión funcional de las fracciones y sus relaciones.

Finamente, este trabajo de investigación es considerado como importante para el trabajo en curso debido que, interesan distintos asuntos tocados por la autora tales como: el concepto de totalidad, importancia de identificar el todo, distintos sistemas de representación para la relación parte-todo, influencia del profesor en el aprendizaje, la relación todo y parte, las cuales se encuentran expuestas de manera amplia a través del análisis del contenido de dicho concepto por la autora.

Un **segundo trabajo** es una tesis de maestría de Ruiz (2013), denominada: “la fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED” de la ciudad de Bogotá, donde su principal interés profundizar en el componente numérico especialmente el tema de las fracciones, de tal manera que se estudia desde la relación parte-todo y como cociente, dicho interés surgió después de analizar los resultados de las pruebas saber, donde se encontró que, de los componentes evaluados para Matemáticas, en grado quinto, del colegio Los Alpes IED, obtuvo los más bajos promedios en lo numérico.

Por otra parte, en las competencias de razonamiento, comunicación y formulación se notó como fortaleza el componente comunicativo. Así que, consideraron pertinente plantear propuestas didácticas para el aula, que enfaticen lo numérico y que aprovechen la fortaleza comunicativa que tiene la institución.

Con relación a las conclusiones, indican que es una secuencia de enseñanza que facilita la comprensión de la fracción en las formas de relación parte-todo y como cociente apuntando a mejorar los desempeños en las Pruebas Saber, la propuesta se encuentra en el tercer capítulo, donde la describen como un compuesto de 12 actividades en total, donde 9 de esas se refieren a guías de clase y 3 a actividades lúdicas que incluye las reglas del juego.

Además, resaltan la importancia que el profesor conozca acerca de la historia de las fracciones, como, por ejemplo, el rastro de la fracción de la unidad a través del tiempo y de culturas diversas, pues provee suficientes elementos para enriquecer el aula de clase, ya que le permite acercarse a la evolución de los conceptos matemáticos, facilitando entender el por qué se presentan algunas dificultades conceptuales en las aulas y brinda contextos para planear clases más amenas.

El trabajo de investigación resulta pertinente debido al amplio referente teórico-conceptual con relación a la historia de las matemáticas, pues dedican un capítulo completo a este, además, en el capítulo 2 tiene un apartado que habla de las fracciones como parte-todo y finalmente, son interesante las actividades propuestas, pues se utiliza variedad de material concreto y juegos, lo que llama la atención, pues aparte de la fenomenología didáctica como marco metodológico del trabajo en curso, interesa también el material concreto y actividades lúdicas.

Un **tercer trabajo** corresponde al trabajo de grado de Del Rio y Ramírez (2009) titulado "Las fracciones a partir de la fenomenología didáctica", cuyo problema surge por las dificultades que presentan los niños y niñas del grado quinto de la Institución Educativa Fe y Alegría Luis Amigó ubicado en Medellín, para reconocer las fracciones desde sus diferentes representaciones, su símbolo y las relaciones con sus contextos.

Es por lo anterior que, se plantean como objetivo general, facilitar la construcción del objeto mental fracción[8] partiendo de las relaciones que éste objeto mental tiene con los fenómenos del contexto para los cuales fueron creados, teniendo en cuenta el entorno de los estudiantes.

El trabajo se abordó desde la teoría de la fenomenología didáctica entendida desde Freudenthal 1983 (citado en Puig, 1997) como una manera de manifestarle al profesor los lugares donde el estudiante podría caminar en el proceso de aprendizaje de las fracciones, objeto mental que ha sido creado para organizar los fenómenos del mundo físico, social y mental. Es

---

[8] Es importante aclarar que, para Del Rio y Ramírez "Los enteros y las fracciones forman el conjunto de los números racionales" (2009, p. 81).

decir, la relación que establece el estudiante entre el objeto mental, el uso y el contexto que lo rodea.

Cabe aclarar aquí que, para Freudenthal (1983), "el objeto matemático que importa es el número racional más que la fracción […] las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional – una fuente que nunca seca". (Puig, 1997. p. 2).

Por otro lado, el método de investigación que se abordó en dicho trabajo según Del Rio y Ramírez:

> […] es el método de casos entendido como la descripción narrativa que hace un grupo de observadores sobre una situación real, estudiando características básicas y las relaciones de algunos individuos con el medio en el cual se desenvuelven. (2009, p. 28)

Con respecto a conclusiones, se presentan las que considerablemente son relevantes:

- ✓ La fenomenología didáctica posibilita a los alumnos la constitución del objeto mental fracción, donde el contexto es de gran importancia en el diseño y desarrollo de las actividades.
- ✓ "La fenomenología didáctica permite enseñar las fracciones de una manera contextualizada, ya que ésta va más allá de actividades prácticas y lúdicas, en las que el objetivo primordial es que el alumno construya con sentido y significado conocimientos matemáticos". (Del Rio y Ramírez, 2009, p. 64).
- ✓ Según la fenomenología didáctica, los alumnos pueden participar activamente, sin temor a cometer errores, ya que estos fortalecerán el pensamiento matemático, específicamente en los sistemas numéricos. (Del Rio y Ramírez, 2009, p. 64).

Este trabajo se relaciona con la investigación en curso, debido a que se usa la fenomenología didáctica como estrategia metodológica para el diseño de las actividades, además, comparten similitudes en relación a la estructura del marco teórico, particularmente en lo relacionado a las dificultades en el aprendizaje de la relación parte-todo, la importancia de la historia en la enseñanza de las fracciones y sus sistemas de representación, lo anterior nos permite hacer uso de los referentes teóricos de dicha investigación, para alimentar el referente teórico-conceptual de la investigación en curso.

Un **cuarto trabajo**, es de Escolano y Gairín (2005), publicado en la revista iberoamericana de educación matemática, la investigación trae por nombre "modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria", el trabajo se compone de dos partes, en la primera muestran los obstáculos didácticos provocados al priorizar la enseñanza de la fracción como relación parte-todo en España y una segunda parte donde presentan una propuesta didáctica alternativa para estudiantes de 4°, 5° y 6° de educación primaria. La propuesta alude al significado de la fracción como parte-todo, en la cual los referentes principales son la fenomenología y la epistemología del número racional.

Este trabajo en considerado de suma importancia para la investigación en curso, nos permiten alimentar el referente teórico-conceptual en el campo de los obstáculos didácticos y dificultades de los números racionales desde la relación parte-todo, además es relevante tenerlos en cuenta en el momento de realizar el diseño de las actividades que componen la secuencia de enseñanza, de tal forma que se intenta que estas superen o prevengan la aparición de los mismos.

Por otro lado, se tendrá en cuenta el capítulo 1.3, que habla de las consecuencias de la práctica docente, pues el hecho de que se considere "fácil" introducir a los estudiantes en el conjunto numérico de los números racionales desde la relación parte-todo, trae consigo los llamados obstáculos didácticos o dificultades y errores que se producen por el modo en que se presentan los conceptos matemáticos.

Un **quinto y último trabajo** considerado, es el de Obando, G. (1999), llamado “La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo”, cuyo problema central de investigación giró alrededor de los procesos de enseñanza y de aprendizaje relativos a los números racionales, centrando la atención en aquellos que conciernen a las relaciones parte-todo, de tal forma que la pregunta problema es: ¿Cómo organizar la enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte–todo?.

Con este trabajo, el autor esperaba contribuir a la comprensión del funcionamiento didáctico de la temática en el ámbito escolar como un paso necesario para realizar propuestas pedagógicas que mejoren el aprendizaje de los estudiantes.

Por otro lado, el trabajo gira alrededor de dos ejes centrales, el análisis histórico-epistemológico de los numero racionales y el análisis didáctico de los mismos; “Así, la metodología de investigación fue el resultado de enfoques teóricos propios de la Didáctica de las matemáticas, fuertemente influenciados por los trabajos de investigadores franceses como Guy Brousseau, Gerard Vergnaud, Régine Douady y Michèle Artigue, entre otros”. (Obando, 2003. p. 165).

Entre los enfoques teóricos se encuentra: el análisis didáctico desde la perspectiva de la ingeniería didáctica, elementos teóricos tomados de la psicología cognitiva y de la teoría de los campos conceptuales.

Obando (2003) concluye que, para organizar la enseñanza de los números racionales, es de suma importancia tener en cuenta los aspectos que tienen que ver con la medida, el tipo de unidad y tipo de magnitud, pues permite en los estudiantes:

- ✓ Desarrollar procesos de aprendizaje constructivos y autónomos.
- ✓ Desarrollar habilidades en lo concerniente a:
    - Las relaciones de orden.
    - La relación de equivalencia
    - La operación adictiva en los numero racionales.

Sin embargo, dicha perspectiva de las fracciones desde la relación parte-todo, mostró debilidad para conceptualizar los aspectos relativos a la estructura multiplicativa de los números racionales.

Finalmente, el presente trabajo es considerado selecto como antecedente de la investigación, debido a que la fracción es trabajada desde la relación cuantitativa entre las partes y el todo, además presentar el aspecto didáctico de los números racionales y la evolución histórica del mismo.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Diseñar e implementar una secuencia de enseñanza para la constitución del objeto mental número racional desde la relación parte-todo en los estudiantes de grado tercero (3-1) de la Institución Educativa Jorge Robledo del Municipio de Vijes (Valle del Cauca).

1.4.2 Objetivos específicos

O. E 1. Identificar y describir algunos elementos necesarios para el diseño de una secuencia de enseñanza.

O. E 2. Documentar sobre algunos obstáculos didácticos y dificultades en el proceso de constitución del objeto mental número racional, particularmente desde la relación parte-todo.

O. E 3. Determinar si el diseño e implementación de la secuencia de enseñanza en torno al objeto mental número racional desde la relación parte-todo facilita la constitución del mismo en los estudiantes de grado tercero (3-1) de la IE y de qué manera lo permite.

1.5 Referente contextual

La siguiente información es tomada del Proyecto Educativo Institucional (PEI) del año 2007 de la Institución Educativa Jorge Robledo.

Debido a que la Institución Educativa Jorge Robledo cuenta con cuatro sedes, se toma la información del contexto institucional y particularmente de la sede en la cual se va a intervenir (sede #2), pues es esta la sede en la que atienden la población objeto de estudio de la investigación en curso, cabe mencionar que, esta sede es la única que atiende a estudiantes de tercer grado de primaria.

Entorno Institucional

La Institución Educativa Jorge Robledo está ubicada en la localidad donde se concentran las autoridades administrativas del Municipio de Vijes. La comunidad para la que prestan el servicio educativo es de 12.000 habitantes aproximadamente en todo el municipio, incluyendo las veredas y corregimientos. Se caracteriza por situaciones de descomposición familiar, un bajo porcentaje de familias nucleares y es notable el número de madres solteras y madres y padres cabeza de familia, gran cantidad de estudiantes viven con abuelos y/o tíos.

En la zona urbana se presenta como una de sus problemáticas, con índices bajos pero que afecta el desempeño escolar, la violencia intrafamiliar (maltrato infantil y maltrato intrafamiliar); se encuentra un número significativo de familias desplazadas por la violencia provenientes de otros municipios del valle.

SEDE 2. POLICARPA SALAVARRIETA

La sede No. 2 de la Institución Educativa Jorge Robledo llamada Policarpa Salavarrieta, se encuentra ubicada en el barrio Plaza Principal, ofrece los grados primero a quinto de primaria en dos jornadas. Atiende a 473 estudiantes distribuidos en 17 grupos en la jornada diurna de 7:00 am a 12:00m y en la jornada de la tarde de 12:30pm. a 5:30 pm. También cuenta en sus instalaciones con la oficina de orientación escolar y profesor de aula de apoyo pedagógico.

Particularmente, la secuencia de enseñanza fue implementada en el grado tercero uno (3-1) de dicha institución educativa en jornada de la mañana, se contó con una cantidad de 28 estudiantes, los cuales se encontraban entre los 8 y 10 años de edad.

CAPÍTULO 2: REFERENTE TEORICO-CONCEPTUAL

2.1 Los números racionales desde la matemática.

En el presente apartado se presenta un poco sobre la historia de los números racionales, donde se hace una breve documentación sobre los orígenes de estos, las diferentes interpretaciones de los números racionales, enfocándose específicamente desde la relación parte-todo con sus diferentes sistemas de representación.

2.1.1 Un breve acercamiento a los orígenes de los números racionales y su importancia para el aprendizaje.

Aunque no se tiene una época exacta de cuando surgieron los números racionales, se cree que fueron los babilonios y egipcios los primeros en fraccionar lo que para ellos era considerada como unidad, pues como su estilo de vida y desarrollo era en gran parte la agricultura, les surgió la necesidad de medir magnitudes y repartir equitativamente, situaciones en las cuales los números naturales no eran suficientes y se hizo necesario ampliar el campo numérico, otro ejemplo relacionado con el origen de la fracción, es el cobro de impuestos en función de la tierra cultivada.

Es importante aclarar que en los griegos existían dos tipos de unidad, la unidad aritmética, y la unidad geométrica.

Obando (2003) menciona que la unidad aritmética se reconocía bajo la condición de la relación del número desde lo discreto, es decir, desde lo contable, esta unidad era reconocida como el "uno", aun sin ser este considerado como un número, pues por ser el principio generador de los demás números, debía tener una naturaleza distinta, donde el "uno" era único e indivisible.

Por el contrario, la unidad geométrica (la unidad de la que se habló al inicio del presente apartado) se reconocía bajo la condición de la relación de la magnitud ligado a lo continuo, es decir, a lo medible, pero esta no era única y universal como el número, pues la unidad dependía de lo que se iba a medir

En este orden de ideas, según Obando:

> […] para los griegos, sólo eran números los naturales mayores que uno. No existían las fracciones de la unidad, como números. Se aceptaba la fracción $\frac{1}{2}$. en tanto que ella expresaba el resultado de la cuantificación de dos magnitudes homogéneas, en las cuales sus medidas estuvieran en una razón de 1 a 2. Las demás mediciones inexactas, es decir aquellas que dieran como resultado otro tipo de fracciones, eran expresadas como razones homogéneas entre números naturales. Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ era pensado como una razón de 3 a 4, y representaba la conmensurabilidad de dos magnitudes homogéneas. De esta manera, al expresar las medidas como razones entre números, se establecía un contacto entre la aritmética y la geometría. (2003, p. 160).

También es conveniente hablar sobre uno de los papiros del antiguo Egipto más citados en fuentes históricas, es el llamado "papiro de Rhind", escrito en 1650 A.C., por el escriba Ahmes, pero descubierto por Henry Rhind en 1858 A.C.

Las principales características del papiro son: 550 cm de largo y 33 cm de ancho, contiene 87 problemas de matemáticas, entre los cuales se trabajan las fracciones. Otros papiros famosos son: "papiro de Moscú", "papiro de Kahun", "papiro de Berlin" y el "gran papiro Harris".

Por otro lado, a diferencia de los egipcios, los babilonios utilizaron las fracciones, donde su denominador era una potencia de 60, pues su sistema posicional tenía como base principal 60 y base secundaria 10, mientras que en los egipcios el numerador era 1, es decir, siempre utilizaron las fracciones que conocemos como fracciones unitarias[9], sin embargo, pronto se dieron cuenta que podían expresar cualquier fracción como suma de fracciones unitarias, tal como se aprecia en el "papiro Rhind", a estas se les llamó "fracción egipcia".

Veamos un ejemplo inferido de Hurtado (2012, p. 6): dividir 3 panes para 5 personas, entonces primero dividían cada pan en dos partes iguales, y daban un trozo a cada persona, es decir que le daban a cada uno $\frac{1}{2}$, luego, el medio pan restante lo dividían en 5 trozos iguales, lo que equivale a $\frac{1}{10}$, de tal forma que a la final cada uno había tomado $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$, lo que corresponde a $\frac{6}{10}$. Véase que el ejemplo anterior, es un problema de reparto donde la fracción representa la comparación del todo.

Ahora, es probable que la mayoría de profesores que inician el proceso de enseñanza de los números racionales, especialmente desde la relación parte-todo, lo hagan a través de las llamadas fracciones unitarias y no conozcan esta parte histórica, de modo que se considera importante que el profesor realice un breve recorrido histórico de los números racionales y reconozcan su origen, de tal forma que amplíe su conocimiento sobre el campo a enseñar.

Según el Ministerio de Educación Nacional (MEN):

> El conocimiento de la historia proporciona además una visión dinámica de las matemáticas y permite apreciar cómo sus desarrollos han estado relacionados con las

[9] La fracción unitaria es aquella cuyo numerados es 1 y el denominador es cualquier número entero positivo.

> circunstancias sociales y culturales e interconectadas con los avances de otras disciplinas. (1998, p. 15).

Sin embargo, aunque un profesor conozca la historia de un concepto matemático y lleve este conocimiento al aula, no quiere decir que ya sea algo positivo para la enseñanza, pues se debe tener en cuenta cómo sacar el máximo provecho del mismo, ya que no basta con relatar a los estudiantes una historia llena curiosidades, en otras palabras, según el MEN:

> Es importante resaltar que el valor del conocimiento histórico al abordar el conocimiento matemático escolar no consiste en recopilar una serie de anécdotas y curiosidades para presentarlas ocasionalmente en el aula. El conocimiento de la historia puede ser enriquecedor, entre otros aspectos, para orientar la comprensión de ideas en una forma significativa. (1998, p. 15).

2.1.2 Los números racionales y sus diferentes interpretaciones

Culturalmente, los números racionales son más distinguidos por el nombre de fracciones, es decir, es así como muchos los hemos conocido por primera vez y como por tanto tiempo se han enseñado, incluso, para Freudenthal (citado por Puig):

> [...] $\frac{2}{3}$, es solo el nombre más simple de cierto número racional, e incluso yo no podría decir de muchos números racionales bajo que nombre los conocí por primera vez. Esta es la razón, pues, por la que las distintas expresiones fraccionarias del mismo racional viven mucho más sus propias vidas, y por la que se les conoce con un nombre especial: *fracción*. (2001, p. 2).

El hecho de conocer los números racionales como fracciones conlleva a otro problema, el creer que estos números solo son vistos desde la relación parte-todo, puesto que la palabra fracción evoca términos como fracturar, romper dividir, entre otras.

Es por lo anterior que, se considera de suma importancia la manera en que los profesores y los libros de texto conciben los numero racionales, pues estos últimos son aquellos que orientan al profesor para la enseñanza de los mismos.

En este orden de ideas, los profesores deben tener en cuenta que la relación parte-todo no es la única interpretación de los números racionales, pues cuentan con otras, como, por ejemplo: medida, cociente, razón y operador, además, no olvidar que el proceso de aprendizaje de estas, se da a largo plazo, pues no se espera que el estudiante durante su formación en la educación básica primeria haya comprendido por completo los números racionales como sistema numérico, pero si un primer acercamiento a las diferentes interpretaciones del mismo.

Cuando el profesor no tiene en cuenta lo anterior, es posible que no se logre una buena enseñanza de los números racionales, pues, aunque muchas veces estos saben que dichos números implican varias interpretaciones, tienen el afán de llegar a la parte algorítmica, es decir, los profesores en su afán por cumplir con un cronograma que probablemente exijan en la institución donde desarrolle su vocación, deja de lado las demás interpretaciones de los números racionales y pasa directamente a las operaciones entre fracciones, y es aquí donde se generan algunas de las dificultades en el aprendizaje de los números racionales, pues los estudiantes operan mecánicamente entre fracciones, pero no comprenden lo que representa el resultado.

Por otro lado, tampoco se le debe dar prioridad a ninguna de las interpretaciones y casarse con una sola, pues es conveniente que para una mejor comprensión se abarquen todas.

Vasco (1988) en su metáfora del archipiélago fraccionario, de la cual, después de realizar un detenido análisis, se entiende como un archipiélago (sistema conceptual matemático), en el que se encuentran unas islas (interpretaciones de la fracción), de las que algunas están totalmente aisladas de las otras, sin embargo, hay muelles, puentes, “ferry”, viaductos, etc. que permite trasladarse de una isla a otra, entendiendo estos como medios por los cuales se logra pasar de una interpretación de los números racionales a otras, algunos de forma más fácil.

Sin embargo, Vasco (1988) también presenta una observación hecha a la teoría de Thomas Kieren, comentando que este considera más importante la isla de los partidores (número racional desde la relación parte-todo), sin siquiera distinguir entre los partidores de objetos y los de magnitudes, pues presenta el siguiente ejemplo: cuando se dice “medio vaso de agua” no se refiere a partir el vaso (objeto) en dos pedazos, sino que es la mitad del volumen (magnitud) de agua que cabe en ese vaso, pues la mitad no actúa sobre el vaso, sino sobre la magnitud del contenido.

En contraste a la consideración de Thomas Kieren, para el Ministerio de Educación Nacional (MEN), citado en Vasco:

> […] En el Ministerio de Educación consideramos que la isla principal es la de los operadores activos, de tal manera que a ella se puede llegar desde cualquier sistema concreto, y que a partir de ella pueden echarse los puentes a los demás. Consideramos además que la isla de los partidores es la más peligrosa por sus arenas movedizas: la confusión entre las operaciones físicas sobre objetos y los operadores conceptuales entre magnitudes. (1988, p.28).

A pesar que, existen diferentes consideraciones sobre cómo se debe introducir los números racionales, lo importante es que los estudiantes logren comprender las diferentes interpretaciones de este conjunto numérico.

En el presente trabajo se consideran las diferentes interpretaciones de los números racionales, presentados en los trabajos de Kieren 1976 y Dickson, et al. 1984 (citados en Llinares y Sánchez, 1999. p. 55)[10], estas son las siguientes:

- ✓ **La relación parte-todo y la medida**, en esta interpretación se encuentran las representaciones en contextos continuos y discretos, los números decimales y la fracción de la forma $\frac{a}{b}$ en la recta numérica.
- ✓ **La fracción como cociente**, donde se encuentra como división indicada y como elemento de una estructura algebraica.
- ✓ **La fracción como razón**, donde se encuentran en contextos de probabilidad y porcentajes.
- ✓ **La fracción como operador**, donde se concibe como una sucesión de multiplicaciones y divisiones, o a la inversa.

Cabe destacar que en el presente trabajo de investigación se tiene en cuenta tanto la unidad, como el tipo de magnitud involucrada en las situaciones desde la relación parte-todo de los números racionales.

---

[10] A diferencia del presente trabajo de investigación, Llinares y Sánchez (1999), usan los conceptos de fracción y numero racional para referirse a lo mismo.

Por otro lado, dichas interpretaciones se encuentran caracterizadas y descritas en el siguiente documento:

Llinares, S., y Sánchez, M, (1999). Las fracciones: diferentes interpretaciones. En: *Fracciones: la relación parte-todo.* (pp. 51-78), Madrid, España: Síntesis, S.A.

Es de aclarar que la lista anteriormente descrita no sigue ningún orden en particular para el proceso de enseñanza-aprendizaje.

2.1.3 Los números racionales desde la relación parte-todo, sus diferentes sistemas de representación en relación a los contextos de la misma.

El número racional desde la relación parte-todo se considera como un "todo" que corresponde a la unidad, esta relación no es nada simple, pues los términos parte y todo, presentan gran variedad de significados dentro del lenguaje cotidiano, sin embargo, para el presente trabajo de investigación, se tomaran de la siguiente manera:

Según Castro:

> […] consideramos como "todo" aquella cantidad que tomamos como dato de partida y "parte" a cada una de las cantidades P_i en que un todo puede romperse o fragmentarse real o metafóricamente […] (2015, p. 114).

La unidad puede ser continua o discreta, entendiendo que la **representación gráfica** de la unidad en un contexto continuo, pueden ser diagramas en forma de figuras geométricas, como, por ejemplo, circulares o rectangulares, sim embargo, no es necesario que sean estas figuras, pues es suficiente con que tenga una superficie (dos dimensiones), también pueden ser dibujos, mientras que, en un contexto discreto su representación gráfica es considerada como un conjunto global de objetos separados.

Esta interpretación es considerada por diversos autores como Llinares y Sánchez (1999), como aquella que permite la introducción al conjunto de los números racionales, además, una fuente para las demás interpretaciones (citado en el apartado de la justificación como: Llinares. S y Sánchez. M, 1999. p. 83).

A continuación, en la Figura 1, se observa que la unidad o el "todo" es representado a través de un diagrama circular, donde su superficie es divida en seis (6) partes iguales, de las cuales se tomaron cuatro (4) de ellas, mientras en la Figura 2, la unidad es representada por un conjunto de figuras circulares con igual área, de las cuales se han tomado dos (2) de ellas.

Figura 1. Ejemplo de representación gráfica de la fracción 4/6 (cuatro sextos); de las 6 partes se han tomado 4, en un contexto continuo

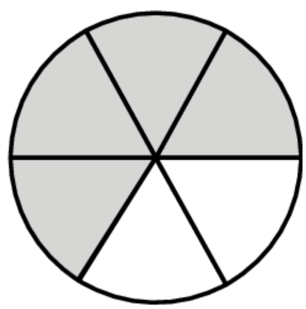
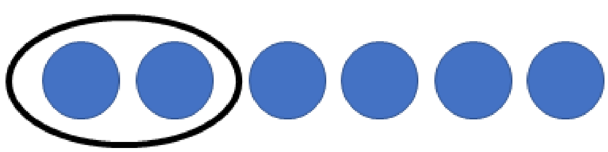
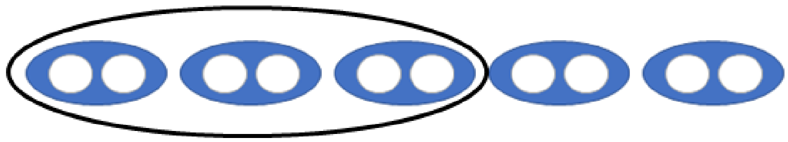


Figura 2. Ejemplo de representación gráfica de la fracción 2/6 (dos sextos); de las 6 partes se han tomado 2, en un contexto discreto



Es importante tener en cuenta, que el sistema de representación gráfico de la relación parte-todo en un contexto discreto, puede tornarse complejo para el estudiante cuando cada uno de los objetos que conforma el conjunto que representa a la unidad o el "todo" están formados por varios objetos.

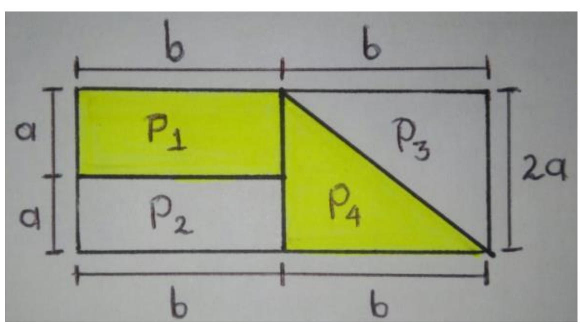
Figura 3. Ejemplo de la representación gráfica de la fraccion 3/5 en un contexto discreto



Sin embargo, "si se utilizan estos contextos discretos se fuerza a que el niño amplíe su esquema de la relación parte-todo" (Llinares y Sánchez, 1999. p. 37).

Otra característica a tener en cuenta, tiene que ver con la congruencia de las partes en que se divide la unidad, pues no necesariamente se refiere a que sean iguales en forma, pues lo que se divide es la magnitud, por lo tanto, se pueden considerar ejemplos como el siguiente en la figura 4:

Figura 4. Ejemplo de representación gráfica de la fracción 2/4



A continuación, se presenta la demostración de la congruencia entre las cuatro partes que conforman la unidad.

Demostración:

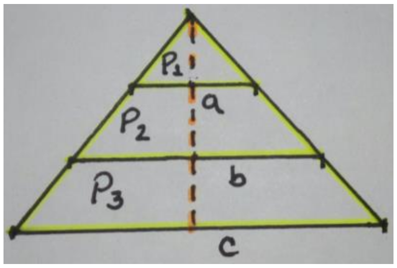
- ✓ Área del rectángulo (P1) = **b.a**

- ✓ Área del rectángulo (P2) = **b.a**
- ✓ Área del triángulo (P3) = $\frac{\mathbf{b.2a}}{\mathbf{2}} = \mathbf{b.a}$
- ✓ Área del triángulo (P4) = $\frac{\mathbf{b.2a}}{\mathbf{2}} = \mathbf{b.a}$.

Entonces, área de P1 = área de P2 = área de P3 = área de P4

Por otro lado, Llinares y Sánchez (1999) ofrecen un ejemplo de una unidad fraccionada en partes no congruentes, sobre la cual resulta muy común que los estudiantes no comprendan dicha propiedad o característica de congruencia en relación a las partes y acepten esta como la representación gráfica de la relación parte-todo.

Figura 5. Ejemplo de una representación gráfica que no cumple con la propiedad de congruencia de la relación parte-todo.



A continuación, se demuestra que el área de las tres partes (P1, P2 y P3) que componen la unidad no son congruentes.

Demostración:

Teniendo en cuenta que:

- ✓ $a < b < c$
- ✓ a, b y c pertenecen a los enteros positivos (1, 2, 3, …)
- ✓ h es la altura del triángulo que representa la unidad.

Entonces:

- ✓ Área de P1= $\frac{\boldsymbol{a}\times\frac{\boldsymbol{h}}{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}=\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{h}}{\mathbf{6}}$

- ✓ Área de P2= $\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\frac{\boldsymbol{h}}{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{h}}{\mathbf{6}}$

- ✓ Área de P3= $\frac{(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{C})\times\frac{\boldsymbol{h}}{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}=\frac{(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{C})\times\boldsymbol{h}}{\mathbf{6}}$

Ahora, suponiendo que el área de P1 = área de P2 = área de P3, entonces:

$a = (a+b) = (b+c)$

sin embargo, $(a+b) \neq (b+c)$, pues $a < c$

Por tanto, la suposición es falsa y las áreas no son iguales.

Por otro lado, algunas de las formas de representar la relación parte-todo son: escrita, verbal, simbólica y gráfica, cabe aclarar que las tres primeras son de igual forma para el contexto continuo y discreto, cambia en el momento de la representación gráfica, pues como se mencionó anteriormente, la unidad o el “todo” es concebida de diferente manera.

A continuación, se describe de modo general cada una de las formas de representar la relación parte-todo, en ambos contextos (continuo y discreto)

Sistema de representación escrita (SRE): entendido este como un conjunto de signos gráficos que tienen reglas que se deben respetar; estos signos gráficos son de tipo escritura alfabética, es decir, letras y signos de puntuación.

Sistema de representación verbal (SRV): este sistema de representación se encuentra vinculado al SRE. En este, el lenguaje organiza y condiciona la representación de la relación parte todo, pues según Castro:

> […] las fracciones y en concreto la relación parte-todo se expresa lingüísticamente con dos numerales, un cardinal en función adjetiva que designa el numerador del quebrado: un, dos, ocho y un ordinal en función sustantiva, que designa el denominador: quinto, sexto, decimo. (2015, p. 78).

Sistema de representación simbólica (SRS): entendido este como un conjunto de signos gráficos que tienen reglas que se deben respetar; estos signos gráficos son un sistema de cifras, es decir números, que podemos encontrar de la forma a/b.

Sistema de representación gráfico (SRG): se representa a través de diagramas o dibujos, tal como se mostraron en ejemplo anteriores presentados en este apartado.

2.2 Los números racionales desde la relación parte-todo en la práctica de aula.

En el presente apartado, se suministran algunas propuestas o variables importantes a tener en cuenta al momento de diseñar situaciones, actividades o secuencias para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Estas surgieron después de realizar un análisis de lo propuesto por Llinares y Sánchez (1999); y Fandiño (2009).

Para iniciar, se resalta que, aunque no todos los profesores realizan el diseño propio o autónomo de situaciones, actividades o secuencias para la enseñanza, es conveniente que, si siguen un libro de texto, sean capaces de realizar la estructuración de los contenidos del mismo.

Además, es importante que tenga en cuenta lo siguiente: normalmente, se suele encontrar en los libros de texto las representaciones gráficas de la relación parte-todo en figuras geométricas o figuras estándar como círculos, cuadrados y rectángulos, sin embargo, esto puede ser un grave error, pues este hecho genera en los estudiantes concepciones erróneas, como la de pensar que solo se puede representar un número racional en este tipo de figuras y no en otras.

No siendo ese el único error de los libros de texto, es conveniente ser precavido en la información que se va a extraer de ellos, por tanto, considerando esto como una limitación en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los números racionales, se recomienda al profesor que, en el momento de planificar las actividades de clase, tenga en cuenta las diferentes variables que involucra la relación parte-todo, entre esas, las formas de representarla gráficamente.

Por el contrario, para aquellos profesores que se toman el tiempo necesario para el diseño de tales actividades se sugieren las siguientes variables:

1. Como se mencionó en el apartado titulado "un breve acercamiento a los orígenes de los números racionales y su importancia para el aprendizaje", es considerada la historia de los números racionales como una variable importante en la enseñanza de los mismos, puesto que permite al profesor ampliar su campo de conocimiento y es pertinente para mostrar a los estudiantes que este es un tema de hace muchos años, el cual fue importante debido a que solucionaba y sigue solucionando necesidades reales, de tal forma que se atraiga la atención de los estudiantes y se logre una concepción positiva por parte de estos sobre los números racionales.

2. Otra variable, como estrategia inicial, se propone entender el conocimiento informal de los niños del concepto a enseñar, es decir, es el conocimiento del cual ellos no son conscientes y que es aprendido o tomado del hecho de sumergirse en una sociedad que contiene unas necesidades, pues es normal escuchar hablar a los niños de «la mitad», «un cuarto», «un trozo», etc.

Según Llinares y Sánchez (1999), este tipo de información del conocimiento informal de los niños, se puede extraer a través de la interacción verbal entre estudiantes y estudiante-profesor, hecho que se puede dar con el diseño de una situación que le motive al estudiante a comunicar sus experiencias para una posible solución; como consecuencia de los anterior, el profesor toma esta información para corregir los errores y mostrar o "hacer caer en cuenta" al estudiante de sus contradicciones o conocimientos erróneos, además, la interacción verbal puede ser el camino a la conceptualización o institucionalización de los números racionales.

De forma general, para el diseño de actividades o secuencias de enseñanza sobre la relación parte-todo en contextos continuos o discretos, se considera de suma importancia tener en cuenta siete atributos o «habilidades» necesarias, propuestos por Piaget, Inhelder y Szeminska 1960, (citado en Llinares y Sánchez, 1999, p. 80), los cuales permiten conocer o tener en cuenta cada uno de los conocimientos implícitos en la enseñanza de la relación parte-todo, pues de olvidar o faltar a uno de ellos, tiene como consecuencia que los estudiantes presenten concepciones erradas, que implique la presencia de diversas dificultades y errores, veamos:

1. Un todo está compuesto por elementos separables. Una región o superficie es vista como divisible.

2. La separación se puede realizar en un número determinado de partes. El «todo» se puede dividir en el número de partes pedido.

3. Las subdivisiones cubren el todo; ya que algunos niños cuando se les pedía dividir un pastel entre muñecos, cortaban tres trozos e ignoraban el resto.

4. El número de partes no coincide con el número de cortes.

5. Los trozos —partes— son iguales. Las partes tienen que ser del mismo tamaño —congruentes—.

6. Las partes también se pueden considerar como totalidad (un octavo de un todo se puede obtener dividiendo los cuartos en mitades).

7. El «todo» se conserva.

Es de gran importancia aclarar varios puntos con relación a los atributos anteriormente mencionado para la investigación en curso:

- ✓ Desde la perspectiva de Llinares y Sánchez (1999), la relación parte-todo se enmarca en un contexto meramente de superficies, dejando de lado otro tipo de magnitudes como por ejemplo el volumen, e incluso, algunas como peso, longitud, tiempo, entre otras.

Es por lo anterior que, en el presente trabajo se toman los atributos de manera general para cualquier tipo de magnitud, por ejemplo, en el primer atributo, se podría decir que: un todo está compuesto por elementos separables, esto sin importar que, el todo o cantidad que se toma como referencia, se presente mediante una o varias figuras geométricas, objetos o a través de una cantidad de alguna magnitud.

- ✓ Con relación al atributo 4 (el número de partes no coincide con el número de cortes), el término “cortes” parece muy ambiguo y subjetivo, puesto que el autor no presenta una definición clara de este, por lo que conlleva a una gran limitación en la comprensión del atributo. Es por lo anterior que, en el presente trabajo no se le da relevancia a dicho atributo para evitar errores al momento del diseño de situaciones, ya que se puede presentar distorsión entre lo que se entiende del mismo con lo que en autor desea expresar.

✓ Cuando se habla de trozos (o partes) iguales (o congruentes), se presenta una gran limitación, pues debemos preguntarnos en qué sentido se toma la congruencia, es decir, ¿las partes deben ser congruentes en qué?, desde Linares y Sánchez (1999) no se hace una especificación sobre esta cuestión, sin embargo, es claro que, no hacen referencia a las partes iguales con relación a la forma de las mismas, (recordemos que solo atienden «el todo» como una superficie o región), pues en algunos de sus ejemplos se observa superficies dividas en partes iguales, las cuales no tienen la misma forma, pero sí la mismas área, como por ejemplo (véase figura 4).

Por lo tanto, en el presente trabajo de investigación, se consideran las partes iguales con relación a la cantidad de la magnitud que se encuentre en juego, es decir, la magnitud que se trabaje en dicha situación en la que se hace uso en la relación parte-todo.

Por otro lado, es posible que si se diseñan y se les presentan situaciones a los estudiantes, donde se falte a uno de los siete atributos propuestos por Piaget (1960), podrían dar buenos resultados, por ejemplo, la representación gráfica o pictórica de la relación parte-todo, donde no aplica el atributo cinco (este también se puede apreciar en la *Figura 5. Ejemplo de una representación gráfica que no cumple con la propiedad de congruencia de la relación parte-todo*), sin olvidar los puntos anteriormente expuesto con la intención de superar algunas limitaciones de dicha teoría.

3. Cuando el estudiante de cuenta del paso de un sistema de representación a otro de la relación parte-todo sin ninguna dificultad, se puede decir que este conoce y domina los sistemas de representaciones (simbólica, gráfica, escrita y verbal), sin embargo, hay que ser cuidadoso, pues muchas veces los estudiantes “engañan” en que lo comprenden, cuando realmente lo que está haciendo es un proceso mecánico o de memorización.

4. Una variable a tener en cuenta, o más bien una propuesta en el trabajo con la representación gráfica, a través de dibujo o diagramas de la relación parte-todo, es utilizar las representaciones gráficas sencillas, como las figuras geométricas hasta que el estudiante las domine, sin embargo, como se dijo anteriormente, no es conveniente quedarse únicamente con estas, ya que es posible representar la relación parte-todo con otro tipo de figuras o dibujos, esto permite al estudiante ampliar su conocimiento y desarrollar habilidades.

En este apartado se considera no solo la relación parte-todo, también la relación de orden de las fracciones, un primer acercamiento a estas, puede ser cuando se quiere saber qué fracción es más pequeña o más grande que otra, es decir, en la comparación de estas.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de las fracciones equivalentes, igualmente se propone iniciar estas con las diferentes representaciones de la relación parte-todo en contexto continuo, una vez tenga el dominio sobre esta, es posible pasar a los contextos discretos, también es posible el diseño de situaciones donde se tengan en cuenta algunos atributos de Piaget (1960), por ejemplo, el atributo 6 (Las partes también se pueden considerar como totalidad).

Es de notar que en el trabajo con estas fracciones, al estudiante se le facilita más pasar un numerador y denominador pequeños a unos más grandes, mientras que en el caso contrario es un poco complejo, por ejemplo: $\frac{1}{2}$ es una fracción equivalente a $\frac{2}{4}$, en este primer caso el estudiante actúa de forma más tranquilo respecto a su paso, pero para hallar una fracción equivalente a $\frac{3}{9}$ que sea más pequeña, es decir, que represente una parte (cantidad) más pequeña que otra, con relación a un mismo «todo», como $\frac{1}{3}$, se les hace más complicado, esto puede deberse a que los estudiantes utilizan estrategias empíricas para llegar a establecer o denominar fracciones equivalentes.

5. Finalmente, aunque en general se suele decir que las fracciones se encuentran en la vida cotidiana y que a través del estudio de los fenómenos de ésta se pueden diseñar situaciones donde el estudiante comprenda su uso y logre solucionarla con mayor facilidad gracias al contexto, resulta interesante que también se les presenten situaciones de la vida cotidiana, donde la relación parte-todo no tiene sentido.

Un posible ejemplo de lo anterior es: en una institución educativa, se tienen tres monitores y siete estudiantes, de los cuales, cada monitor[11] se encuentra encargado de un mismo número de estudiantes; es claro que esta situación está sumergida en un contexto discreto, pues el todo es el conjunto de los siete niños, la solución es la siguiente: dos niños y un tercio de niño, pero también es evidente que no es una respuesta válida, pues no se va a partir un niño en tres partes iguales para repartirlo a los tres monitores.

Ahora, aunque se ha venido enfatizando en las ventajas del uso de material concreto (materiales que le permiten al estudiante manipular y explorar) para la enseñanza, es importante que no se vaya a hacer un abuso de este, es decir, que no se diseñen todas las preguntas de las actividades para responder a través de la manipulación del material, pues puede crear una dependencia del conocimiento del niño sobre el material.

2.2.1 Algunos obstáculos didácticos y dificultades en el aprendizaje de los números racionales desde la relación parte-todo.

A continuación, se presentan algunos obstáculos didácticos y dificultades en el aprendizaje de los números racionales desde la relación parte-todo, a partir del análisis de lo propuesto por Llinares y Sánchez (1999); Escolano y Gairín (2005); y Fandiño (2009).

[11] Persona encarga de ayudar y guiar en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Los obstáculos didácticos son entendidos como aquellos que se encuentran relacionados con el maestro y sus elecciones, pues durante el proceso de planeación de clase de un profesor, se tiene en cuenta un currículo, un método, un proyecto, unas creencias respecto a la forma de construcción del conocimiento de los estudiantes, etc. Los cuales él cree que son los mejores, la mejor elección y que serán efectivos para la enseñanza de un tema en particular, sin embargo, no garantiza que sea efectivo en el aprendizaje de todos los estudiantes, pues quizás solo entiendan unos o tal vez no entienda ninguno.

Lo anterior puede estar relacionado a una falla o error durante el proceso de planeación, ya sea porque no domina a profundidad el tema, la metodología no fue la más adecuada, entre otras, y son a estos, a los que se les llamara obstáculos didácticos.

Veamos entonces una serie de obstáculos didácticos:

- ✓ Muchas veces, se enseña un tema sin tener el dominio de este, por ejemplo, en el caso de la relación parte-todo, al no tener en cuenta que el todo o unidad no es solo una superficie, sino que esta puede presentarse mediante cualquier magnitud, esto lleva a que los estudiantes resuelvan las actividades sin comprender lo que significa e implica dicha partición del "todo" o la unidad.
- ✓ Otro obstáculo se produce por las creencias respecto a la forma de construcción del conocimiento de los estudiantes, pues se presentan algunos casos donde profesores creen que introducir los números racionales desde la relación parte-todo es tarea fácil, esto implica que, al momento de enseñar, lo haga de la forma incorrecta, pues se olvida de diferentes características y conocimientos que esta implica, como por ejemplo el tipo de unidad y magnitud que involucre la situación.

✓ Nuevamente, un obstáculo por el insuficiente conocimiento del tema a enseñar, en este caso, se presenta en el momento en que el profesor decide enseñar a sus estudiantes los números racionales como un par ordenado de dos números naturales de la forma $\frac{a}{b}$ donde a es el numerador y b es el denominador, afirmando, que es esa su definición, lo cual trae consigo múltiples dificultades al momento de enseñar sus otras interpretaciones, pues el estudiante cree que el número racional es únicamente aquella que se expresa como cociente, y se les dificulta entender que, por ejemplo, 50%; 0,5; también son representaciones de los números racionales.

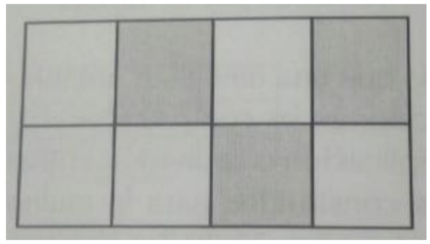
✓ Un obstáculo didáctico ocasionado por la metodología empleada para la enseñanza del tema: utilizar frecuentemente durante todo el proceso de enseñanza (de la relación parte-todo en contextos continuo o discretos) materiales concretos, puede ocasionar una dependencia de los estudiantes con relación al conocimiento, lo ideal del trabajo con este tipo de material, es ayudar a la imaginación y manipulación de lo que implica el concepto.

✓ Uno de los obstáculos más conocidos, que manifiestan en gran medida dificultades en el aprendizaje, es iniciar rápidamente el trabajo algorítmico con las fracciones, sin que los estudiantes hayan comprendido las diferentes interpretaciones de los números racionales, normalmente estos suelen pasar por la presión del tiempo sobre los profesores por querer seguir un plan de área.

Por otro lado, se exponen algunas dificultades en el aprendizaje de los números racionales, las cuales son posibles de determinar por medio de manifestaciones de errores cometidos por los estudiantes al momento de enfrentarse a situaciones donde este conjunto numérico se encuentra involucrado:

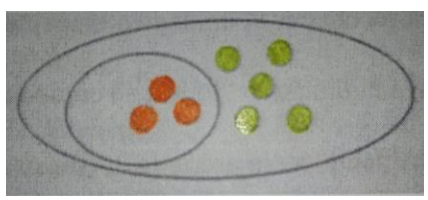
✓ Una dificultad es, no poder reconocer la fracción sin importar cuales fueron las partes sombreadas o tomadas, un ejemplo de esta en el contexto continuo, es cuando se le presenta la siguiente situación al estudiante (figura 6) y no es capaz de determinar que la fracción $\frac{3}{8}$ es aquella que representa la parte sombreada con relación a la unidad.

Figura 6. Ejemplo de representación gráfica de la fracción 3/8 en un contexto continúo. Tomado de Fandiño (2009)



Este mismo error, se presenta en un contexto discreto; la figura 7 es un ejemplo de una situación en la cual el estudiante no interpreta el esquema desde la relación parte-todo, de tal forma que se le dificulta expresar la fracción que representa, confundiendo si es $\frac{3}{8}$ ó $\frac{3}{5}$, esto puede deberse a la tendencia de ver esta como un par de números naturales que no guardan relación entre sí o en su defecto al interpretarla como una razón, donde por cada tres bolas de color naranja hay cinco bolar de color amarillo.

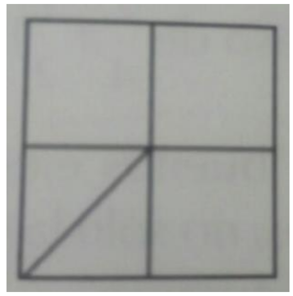
Figura 7. Ejemplo de representación gráfica de la fracción 3/8 en un contexto discreto. Tomado de Fandiño (2009)



✓ Gran dificultad en reconocer que las partes del todo deben ser congruentes en magnitud y no iguales en forma.

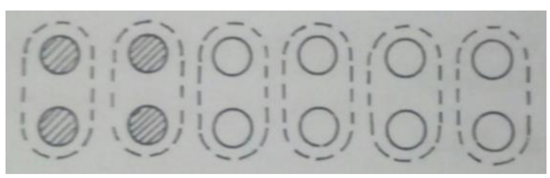
✓ Cuando se suele enseñar la representación gráfica de la relación parte-todo con figuras geométricas, donde la unidad siempre se encuentra fraccionada o dividida canónicamente, se presentan dificultades en el estudiante en el proceso de representación gráfica de la relación parte-todo. Por ejemplo, en la figura 8 se observa un posible error del estudiante al dividir la unidad o el “todo” (cuadrado) en cinco partes iguales.

Figura 8. Ejemplo de error al dividir la unidad en cinco partes iguales. Tomado de Fandiño (2009)



✓ Dificultad para reconocer la unidad en un contexto discreto, cuando cada elemento del conjunto que corresponde a la unidad o “todo”, se compone a su vez por otros elementos. Esta dificultad se ve reflejada cuando se le presenta la situación de la figura 9 al estudiante, y se le pide representa simbólicamente la parte sombreada con relación al todo, lo cual se les hace muy complejo.

Figura 9. Ejemplo de representación gráfica de la fracción 2/6 en un contexto discreto. Tomado de Llinares y Sánchez (1999)



✓ Dificultad en la transitividad del signo igual en el trabajo con fracciones equivalentes. Ejemplo: teniendo en cuenta la figura 10.

Figura 10. Ejemplo de situación que implica equivalencia de fracciones. Tomado de Llinares y Sánchez (1999)

$$\frac{2}{3} = \frac{\bigcirc}{12} = \frac{14}{\square}$$

Según Llinares y Sánchez:

> Los estudiantes tienen mayor dificultad en calcular □, ya que una vez calculado el 8 para el numerador de la segunda fracción comparan 8/12 con 14/□ lo que resulta más difícil que hacerlo con 2/3. El no utilizar 2/3 = 14/□ puede ser debido a que solo se fijan en la igualdad de las dos últimas fracciones. (1999, p. 159).

- ✓ Dificultad para reconocer la unidad en fracciones mayores a uno, esto se debe a que muchas veces en la enseñanza se les da mayor énfasis a las fracciones entre cero y uno. Ejemplo: un error que cometen los estudiantes al presentar tal dificultad. En la figura 11, los estudiantes suelen indicar que la fracción es $\frac{5}{8}$ en vez de $\frac{5}{4}$.

Figura 11. Ejemplo de representación gráfica de la fracción 5/4. Tomado de Llinares y Sánchez (1999)

Finalmente, el objetivo de nombrar algunos obstáculos didácticos y dificultades en el aprendizaje de los números racionales desde la relación parte-todo, es que sirva en el diseño de situaciones, actividades o secuencias de enseñanza e intentar evitar la presencia de las mismas.

2.3 Los números racionales desde la fenomenología didáctica

El presente apartado se construye a partir de distintos aportes sobre la fenomenología didáctica, en particular se tienen en cuenta los aportes hechos por Freudenthal, que se puede extraer de la traducción de dos capítulos de su libro *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* realizada por Luis Puig (Capitulo 2, El método; Capitulo 5, Fracciones), también se recoge un capítulo escrito por él mismo, sobre el análisis fenomenológico partiendo de lo que este entiende o logra abstraer de la obra de Freudenthal y finalmente, se aborda el documento sobre *Unidades didácticas. Organizadores* por Luis Rico e Isidoro Segovia.

No es posible entrar a dar una definición exacta sobre lo que son cada uno de los términos o conceptos que involucra la teoría, sin embargo, se hace un análisis de ellos y se trata de explicar, con el fin de contextualizar al lector.

Ahora, el análisis fenomenológico es un componente del análisis didáctico, este último consiste en el análisis de los contenidos matemáticos, cuyo objetivo es la organización de la enseñanza en los sistemas educativos, por consiguiente, según Puig:

> El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuales son los fenómenos[12] para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos. (2000, p. 63).

Además, "el análisis fenomenológico de Freudenthal tiene como objetivo servir de base para la organización de la enseñanza de las matemáticas y no pretende elaborar una explicación de la naturaleza de las matemáticas" (Puig, 2000, p. 63).

Por otro lado, Freudenthal diferencia varias clases de fenomenología, estas son: fenomenología pura, fenomenología didáctica, fenomenología genética y fenomenología histórica, "en el caso didáctico intervienen los fenómenos presentes en el mundo de los alumnos y los que se proponen en las secuencias de enseñanza" (Puig, 2000. pp. 64-65)

En otras palabras, en la fenomenología didáctica los fenómenos que se toman en consideración son los que están presentes en el mundo en que viven los estudiantes a los que se

[12] Entendiendo por fenómenos como los modos de uso o situaciones del mundo físico, social y cultural que dan sentido al concepto matemático.

pretende enseñar y en la fenomenología histórica, los fenómenos que se toman en consideración en el análisis son aquellos para los que el concepto en cuestión fue un medio de organización en la historia.

En el desarrollo, también se habla de los objetos matemáticos, los cuales se construyen en la práctica como medio de organización de objetos del mundo, es decir que la actividad matemática precede dichos objetos de la matemática.

En otras palabras, los objetos matemáticos son creados e incorporados por medio al mundo a través de nuestra experiencia e interacción con el mundo de las matemáticas, es decir toda actividad o situación que necesite de las matemáticas.

Así, describir un objeto matemático en relación a los medios que organiza, es hacer el análisis fenomenológico del mismo, es decir, cuando se realiza un análisis didáctico matemático, lo que se hace es analizar el concepto dentro del contexto real y su uso.

En un intento por hablar en términos freudenthalianos sería: los conceptos matemáticos son medios de organización de fenómenos del mundo real, en el que dichos fenómenos se pueden entender como aquellas situaciones del mundo real, para las cuales hacemos uso de dichos conceptos, a su vez, estos conceptos son organizados por otros conceptos matemáticos, donde este proceso siempre se va a repetir.

Por ejemplo, el concepto de numero racional organiza fenómenos de repartición en cantidades iguales de cualquier magnitud, pero este concepto es a su vez organizado por conceptos como números enteros, división, etc., los cuales a su vez están organizados por otros conceptos, y así sucesivamente.

Es importante que el lector reconozca otra característica de los conceptos matemáticos, según Puig:

> los conceptos matemáticos se crean en el proceso fenómenos / medios de organización, pero esto no significa que una vez creados permanezcan inmutables. Por el contrario, los conceptos matemáticos se modifican en la historia como consecuencia de su uso y de los nuevos sistemas matemáticos de signos en que se describen. (2000, p. 70).

Sin embargo, es de aclarar que el hecho de que algunos conceptos matemáticos se modifiquen con el pasar de los años, no quiere decir que originalmente este haya sido erróneo.

Continuando, pasando a un ámbito educativo, donde se presenta la toma de partido didácticas de Freudenthal, pasando a aclarar lo que se entiende por objeto mental y luego se expone una propuesta realizada por el MEN sobre el aprendizaje de las matemáticas, para finalmente desarrollar un párrafo donde se explicite la relación entre ambos aportes.

Veamos entonces, según Puig:

> […] Freudenthal adopta una toma de partido didáctica: el objetivo de la acción educativa en el sistema escolar ha de ser básicamente la constitución de objetos mentales y sólo en segundo lugar la adquisición de conceptos. (2000, p. 75)

Se puede entender el objeto mental como aquello que está en la cabeza de las personas, es decir, la concepción o forma de ver un concepto, esta es la diferencia entre objetos mentales y conceptos, pues el concepto, como se dijo anteriormente, es lo que está en las matemáticas como disciplina. Por ejemplo: desde Freudenthal, el objeto mental número, es la concepción que una persona tiene de número". (Puig, 2000. p. 77)

En este orden de ideas, el MEN propone: "reconocer que, si bien el aprendizaje de las matemáticas se inicia en las matemáticas informales de los estudiantes en contextos del mundo real y cotidiano escolar y extraescolar, se requiere entretejer los hilos de aprendizaje para construir. contextos y situaciones que permitan avanzar hacia las matemáticas formales" (MEN, 2006. p. 78)

De lo anterior se puede percibir, la relación de lo que debe ser en objetivo de la educación desde Freudenthal, con la propuesta del MEN, pues la enseñanza de un concepto matemático, debe partir de los conocimientos informales de un estudiante sobre ese concepto (es decir, partiendo desde el objeto metal) y en un segundo lugar, la contextualización del mismo (adquisición del concepto), cabe recordar, que una vez el estudiante adquiere el concepto y logra su uso dentro de situaciones que se presentan en el mundo real, este ha logrado la constitución del objeto mental.

Ahora, Freudenthal en el capítulo 5, llamado *fracciones*, del libro *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, presenta las fracciones en su completa riqueza fenomenológica.

Para el caso de la fracción como *todo y parte* (esta es la interpretación que se asocia a la de parte-todo), Freudenthal intenta una clasificación de fenómenos, ilustrando con algunos ejemplos. Esta clasificación la hace de la siguiente manera: dice que el *todo* puede ser discreto o continuo (es decir, que la atención puede ser dirigida a una parte, un numero de partes o todas las partes), definido o indefinido (es decir, que las partes pueden estar todas conectadas o todas desconectadas) y estructurado o carente de estructura (es decir, que el modo de dividir poder ser estructurado o no estructurado), donde muchos de estos ejemplos son tomados para el diseño de la secuencia de enseñanza.

Con el fin de no introducir tal cantidad significativa de ejemplos, solo se mostrarán algunos aportes aquellos ejemplos que se tomaron para el diseño de las actividades que conforman la secuencia de enseñanza del presente trabajo.

Estos son:

"De una bolsa de canicas —todo definido discreto—, he sacado una décima parte […] De las mismas canicas que tengo frente a mí, quietas o rodando, estructuradas como una secuencia, tome arbitrariamente una décima parte […]". (Puig, 2001. p. 8)
"[…] para dividir sustancias, medidas por magnitudes, hay muchos métodos disponibles: fracturar puede ser […] comparar y corregir desempeña su papel si en general una sustancia medida por magnitudes tiene que ser distribuida; por ejemplo, un líquido en un numero de vasos congruentes en los que se compara las alturas del líquido." (Puig, 2001. p. 9).
"las figuras u objetos planos y espaciales, así como cantidades grandes, se distribuyen respecto al área o volumen mediante el uso de congruencias y simetrías". (Puig, 2001. p. 9).
"Lo mismo sucede con un disco circular —continuo, definido, estructurado cíclicamente, dividido en sectores, que separadamente o tomados juntos representan partes (ruleta, spinner, diagrama de sectores)". (Puig, 2001. p. 11).
"[…] Como modelos didácticos para fracciones son especialmente efectivos si se ha de tomar conjuntamente varios sectores, con el fin de decir cosas sobre "m de n partes" o "p partes de esto contra q partes de aquello" […]". (Puig, 2001. p. 21).
"[…] la distribución del pastel; por no mencionar otros más recientes, tales como las cajas de fracciones. Ciertamente en la práctica didáctica no deben ser omitidos. La

distribución del pastel es la predecesora de divisiones generales del circulo que son aplicadas a diagramas de sectores estadísticos, en ruletas y en spinners […]" (Puig, 2001. p. 21).

Es de resaltar la gran importancia que Freudenthal le da a la magnitud en el contexto de la relación parte-todo, pues como se había mencionado anteriormente, las partes son iguales en cantidad de cualquier magnitud.

Además, para Freudenthal, la repartición en partes equivalentes es un eslabón importante para la constitución mental de todas las clases de magnitudes, pues cuenta que ha observado a niños de 7 a 8 años, capaces de estimar una parte de un área irregular, la cual es una habilidad que permite dominar un componente importante de objeto mental "área".

Observemos aquí las distintas perspectivas entre los aportes de Freudenthal y los de Llinares y Sánchez con relación a la repartición equitativa, pues dentro de los aportes realizados por los dos últimos autores, se encuentra la limitación de ¿Qué sucede si la unidad o todo es representada gráficamente de manera irregular?, ¿Cómo sabría un niño que las partes son iguales?, o aún mejor, ¿Cómo un estudiante de educación primaria debería repartir equitativamente un área irregular?

2.3.1 La fenomenología didáctica de Freudenthal como complemento necesario a la teoría de Llinares y Sánchez (1999) sobre los números racionales desde la relación parte-todo.

Durante el desarrollo de la fundamentación teórico-conceptual del presente trabajo de investigación, se ha venido hablando de algunas limitaciones encontradas en los aportes de Llinares y Sánchez (1999), sobre todo con respecto a la relación parte-todo, es por tanto que, se toma la decisión de presentar un apartado donde se exponga de manera general algunas de estas limitaciones, las cuales desde enfoque del presente trabajo, obliga a complementar dichos aportes con algunos de la fenomenología didáctica por Freudenthal.

A continuación, se presenta un cuadro con tres columnas, donde la primera no guarda una relación directa con las otras dos, pues en la primera columna se muestran algunos de los aportes más relevantes de la teoría de Llinares y Sánchez (1999), mientras que en la tercera columna se muestran los aportes de la teoría de Freudenthal con relación a los números racionales que se cree permiten superar de alguna manera las limitaciones más evidentes de la teoría de Llinares y Sánchez (1999) que son expuestas en la segunda columna.

Aportes de la teoría de Llinares y Sánchez (1999) al presente trabajo de investigación.	**Limitaciones que se perciben del trabajo de Llinares y Sánchez (1999).**	**Aportes de la teoría freudenthaliana sobre el número racional desde la relación parte-todo.**
✓ Consideración de la relación parte-todo como el origen y fuente para las demás interpretaciones de los números racionales, es decir que a partir de esta se introduce a los estudiantes al conjunto de los números racionales. ✓ Las diferentes interpretaciones de los números racionales.	Considerar el todo o la unidad solo como superficies y regiones, es decir que no considera otro tipo de magnitudes.	Se considera todo tipo de magnitud.
	Representación gráfica de la unidad, pues no considera ningún caso donde esta tiene forma irregular.	Considera situaciones donde la unidad tiene forma irregular con el fin de desarrollar la habilidad de estimación en los niños.
	No considerar la estimación con relación a la repartición equitativa.	Consideran la habilidad de estimación para los casos donde la unidad o el todo tienen forma irregular, ya que “la igualdad de partes se

✓ Errores producidos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la relación parte-todo. ✓ Consideración sobre lo que se entiende por secuencia de enseñanza. ✓ La relación parte-todo como generadora de lenguaje y símbolos. ✓ Contextos de la relación parte-todo (continuo y discreto).		estima a ojo o por tacto, o por métodos más sofisticados. Uno de ellos es doblarlo en dos para partirlo por la mitad […]”. (Freudenthal, 1983/2001, p. 8)
	No considera la fracción como la representación de la cantidad de alguna magnitud desde la comparación de las partes con relación al todo.	Considera la fracción desde la comparación donde la magnitud en juego es importante.

CAPÍTULO 3: ESTRATEGIA METODOLÓGICA

Inicialmente, debido a que la institución cuenta con tres grados tercero (3-1, 3-2 y 3-3) y solo se iba a intervenir uno de estos, se realiza la delimitación de la población objeto de estudio a través del análisis de los resultados del primer y segundo periodo en el área de matemáticas de los estudiantes, con el fin de seleccionar el grupo con menor rendimiento académico en dicha área, además, se complementan estos con una entrevista realizada a las profesoras de grado tercero.

La entrevista abordó las siguientes tres variables:

1. El diagnóstico del grupo: esta variable hace referencia a una pregunta abierta que se le realizó en la entrevista a la profesora encargada de cada grupo, donde esta describe al mismo, teniendo en cuenta el rendimiento académico (en el área de matemáticas) y disciplinar del mismo, esta variable hace relación a las dos primeras preguntas de la entrevista.

2. La formación académica de la profesora: aunque esta variable no presentó gran relevancia para la delimitación de la población, permitió conocer la importancia de la formación de las profesoras en el área de matemáticas para el proceso de enseñanza. Esta variable hace relación a las preguntas 3, 4 y 5 de la entrevista.

3. Enseñanza de los números racionales: hace relación a la percepción del maestro con relación al proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes, sobre los números racionales. Esta variable hace relación a las preguntas 6 y 7 de la entrevista.

Una vez se realizó el análisis de tal conglomerado de resultados, se tuvo los argumentos necesarios para delimitar la comunidad estudiantil objeto de estudio, de la cual se concluyó que el grupo con menor rendimiento académico fue el grado tercero uno (3-1).

Por otro lado, debido a que la entrevista realizada a las profesoras arrojó datos importantes, se presenta en el apartado 4.1 un breve análisis de la misma.

Ahora, con relación a la orientación metodológica del presente trabajo, es la investigación-acción desde el modelo de Kemmis 1984 (citado en Latorre, 2005), donde no sólo es una ciencia que permite la práctica dentro de la sociedad, sino que también es crítica y reflexiva, pues según Latorre, para Kemmis (1984), la investigación-acción es:

> [..] una forma de indagación autoreflexiva realizado por quienes participan (profesorado, alumnado, o dirección, por ejemplo) en las situaciones sociales (incluyendo las educativas) para mejorar la racionalidad y la justicia de: a) sus propias prácticas sociales o educativas; b) su comprensión sobre las mismos; y c) las situaciones e instituciones en que estas prácticas se realizan (aulas o escuelas, por ejemplo). (2005, p. 24).

Las fases de la espiral del modelo tomado sobre la investigación-acción son cuatro:

1. Planificación.

2. Acción.

3. Observación

4. Reflexión.

Esta orientación metodológica tiene como finalidad proporcionar los elementos y directrices para poder realizar un proyecto de investigación.

En la primera fase, se identifica y formula el problema, se plantea la hipótesis acción, que es la propuesta de cambio o mejora, es decir, la propuesta que se hace para intentar mejorar dicho problema, para ello se hace necesario determinar un objetivo general y desglosarlo en unos objetivos específicos.

La segunda fase, es llevar a cabo dentro de la práctica docente la hipótesis establecida en la planificación.

La tercera fase, la recogida de datos relacionados con algún aspecto de la práctica profesional, las técnicas se agrupan en cuatro categorías: técnicas basadas en la observación, técnicas basadas en la conservación, análisis de documentos y medios audiovisuales.

TÉCNICAS BASADAS EN LA OBSERVACIÓN	TÉCNICAS BASADAS EN LAS CONSERVACIÓN	ANÁLISIS DE DOCUMENTOS	MEDIOS AUDIOVISUALES
✓ La observación participante ✓ Notas de campo ✓ Diario del investigador ✓ Registros anecdóticos ✓ Memorandos analíticos ✓ Los perfiles ✓ Escala de medida	✓ El cuestionario ✓ La entrevista ✓ Pruebas objetivas ✓ Grupos de discusión	✓ Documentos oficiales ✓ Documentos personales ✓ Los diarios	✓ Fotografías ✓ Grabaciones de video ✓ Grabaciones de audio

Por último, la cuarta fase, constituye la fase que cierra el ciclo y da paso a la elaboración del informe, consiste en interpretar los datos recogidos en la observación.

De esta manera se puede decir que la investigación se realiza en cuatro fases:

1. Fase I: planificación

En el primer capítulo “el problema”, se presenta el planteamiento y formulación del problema, su respectiva justificación, antecedentes, objetivos y referente contextual.

2. Fase II: acción.

En la fase II se pone en práctica las hipótesis, por lo que la investigación inicia con un proceso de análisis, teniendo en cuenta un referente teórico-conceptual, la cual permitió documentar sobre los números racionales desde diferentes campos que involucra la propuesta, tales como, el campo de las matemáticas, en el cual se aborda los orígenes de los números racionales, se analiza la relación parte-todo y las respectivas formas de representación.

Posteriormente, los números racionales desde la práctica de aula, donde se vincula su enseñanza y aprendizaje, además de documentar algunas dificultades que se presentan en dicho proceso.

Finalmente, los números racionales desde la relación parte-todo desde la fenomenología didáctica, siendo esta la estrategia metodológica para el diseño de la secuencia de enseñanza, ya que se toman en cuenta algunos fenómenos expuesto por Freudenthal (1983) para el diseño de las actividades que la componen.

Lo mencionado hasta el momento de la segunda fase, se encuentra en el capítulo 2 del presente trabajo de investigación y nos permitió cumplir con los dos primeros objetivos específicos planteados inicialmente. Posteriormente se realizó el diseño de la secuencia de enseñanza la cual se compone de cinco actividades.

Para el diseño de cada una de las cinco actividades que componen la secuencia de enseñanza, se tuvo en cuenta una ficha para el estudiante (anexos 1, 2, 3, 4 y 5) y una ficha para el profesor (al final del presente capítulo se encuentra la ficha del profesor de cada una de las actividades realizadas).

En la ficha del estudiante se encuentran las preguntas y acciones que se le piden al estudiante que haga y en la ficha del profesor se encuentra: los Estándares Básicos de Competencias y Derechos Básicos de Aprendizaje (versión 1) que sustentan la actividad, objetivos de la misma, posible duración (tiempo) de implementación, materiales, conocimientos previos del estudiante, conceptualización y fundamentación matemática/teórica de la actividad, propósito de cada pregunta que compone la misma y referencias bibliográficas.

Es este orden de ideas, cabe decir que, durante el diseño de la ficha del estudiante se hizo uso del término “fracción”, más que de numero racional, pues como se había mencionado anteriormente, los números racionales son más conocidos culturalmente por la palabra fracciones, pues incluso es así como se ha venido enseñando dicho concepto, por tanto, considerando el nivel de escolaridad del niño (tercero de primaria), no se le habló de numero racional, sino de fracción.

Por otro lado, para el diseño de la secuencia de enseñanza, se tuvo en cuenta lo siguiente:

✓ Lo propuesto y referido por la teoría de Freudenthal sobre la fenomenología didáctica, además, algunos trabajos y documentos que también lo toman como referencia, pues es de suma importancia que, en el momento en que un profesor se encuentre planificando o diseñando una propuesta o actividad para desarrollar un tema en clase, tenga en cuenta el contexto de los estudiantes, es decir, que toda aquella actividad se encuentre relacionada con situaciones a las que los estudiantes se enfrentan en la vida cotidiana o al menos guarde relación con los fenómenos que lo rodean.

✓ Los siete atributos propuestos por Piaget y Szeminska (1960), estos sin olvidar las aclaraciones que se hicieron en el apartado 2.2 “los números racionales desde la relación parte-todo desde la práctica de aula”, sobre las limitaciones de los mismos.

✓ Las diferentes formas de representar la relación parte-todo y algunas recomendaciones que ofrece Llinares y Sánchez (1999) para el diseño y desarrollo de una secuencia de enseñanza.

En relación a la metodología para dar solución y respuesta a las preguntas que componen cada actividad, que a su vez estas últimas componen la secuencia de enseñanza espera que el estudiante inicialmente lo haga a partir de la observación (observar la situación o material concreto, este último en caso de que la actividad lo haga necesario), exploración y manipulación (como por ejemplo la superposición), conceptualización (comprenda el concepto dentro de la matemática) y experimentación (una vez haya conceptualizado, pase por un nivel de experimentación con la cual busque explicar o demostrar lo conjeturado).

Una vez se desarrolló la delimitación de la población de estudio, el referente teórico-conceptual y el diseño de la secuencia de enseñanza, se implementó esta con los estudiantes de tercero uno (3-1) de la Institución Educativa Jorge Robledo del Municipio de Vijes.

3. Fase III: observación

Esta fase corresponde al momento en el que se implementa la secuencia de enseñanza y la prueba final o evaluativa (esta última se encuentra en el anexo 6), para la cual, la recolección de información se hace inicialmente a partir del diario del investigador, técnica basada en la observación y finalmente con una prueba objetiva, técnica basada en la conservación.

Según Latorre:

> El diario del investigador recoge observaciones, reflexiones, interpretaciones, hipótesis y explicaciones de lo que ha ocurrido. Aporta información de gran utilidad para la investigación. Como registro, es un compendio de datos que pueden alertar al docente a desarrollar su pensamiento, a cambiar sus valores, a mejorar su práctica. El diario es una

> técnica narrativa que reúne sentimientos y creencias capturados en el momento en que ocurren o justo después, proporcionando así una «dimensión del estado de ánimo» a la acción humana. (2005, pp. 60-61).

Por otro lado, las pruebas objetivas son un recurso que permite evaluar conocimientos, capacidades, destrezas, rendimiento, etc., las cuales son utilizadas en gran medida para la evaluación diagnóstica.

Así las cosas, se obtiene la información necesaria de la implementación de la secuencia de enseñanza a partir del diario del investigador y finalmente se hace la prueba objetiva o evaluativa.

4. Fase IV: reflexión

Esta fase se evidencia en todo el capítulo 4 del presente trabajo de investigación, donde se exhibe el análisis de: la entrevista realizada para la delimitación de la población objeto de estudio, la implementación de la secuencia de enseñanza y la prueba final o evaluativa.

Cabe decir que el tercer objetivo específico del presente trabajo de investigación, se relaciona con esta fase de reflexión, pues es aquí donde se determinó de qué manera el diseño e implementación de la secuencia de enseñanza permitió facilitar la constitución del objeto mental número racional desde la relación parte-todo.

A continuación, se presenta la ficha del profesor de cada una de las cinco actividades que componen la secuencia de enseñanza.

Ficha del profesor de la primera actividad:

FICHA DEL PROFESOR:

Grado: 3º

Esta actividad se propone para grado tercero, pues en lo que respecta a la fracción, el estudiante al terminar tercer grado "describe situaciones de medición utilizando fracciones comunes" (Estándares Básicos de Competencias, 2006. p. 80); además, "comprende el uso de fracciones para describir situaciones en las que una unidad se divide en partes iguales" y "compara fracciones sencillas y reconoce fracciones que, aunque se vean distintas, representan la misma cantidad" (Derechos Básicos de Aprendizaje, 2015. p. 57)

Objetivos de la primera actividad / puntos que apuntan al objetivo:

- ✓ Que el estudiante comprenda la propiedad de conservación para la magnitud de área / punto 5.
- ✓ Que el estudiante reconozca la expresión «partes iguales» de la relación parte-todo de los números racionales/ puntos 3, 4, 5 y 6.
- ✓ Que el estudiante establezca la comparación entre las dos áreas / puntos 3 y 5 apuntan a la comparación entre partes, mientras que los puntos 8 y 9 apuntan a la comparación entre las partes y el todo.
- ✓ Primer acercamiento al sistema de representación gráfico de la relación parte-todo de los números racionales / puntos 8 y 9.

Duración de actividad "doblando y cortando la cartulina": 120 minutos.

Materiales por cada grupo de trabajo:

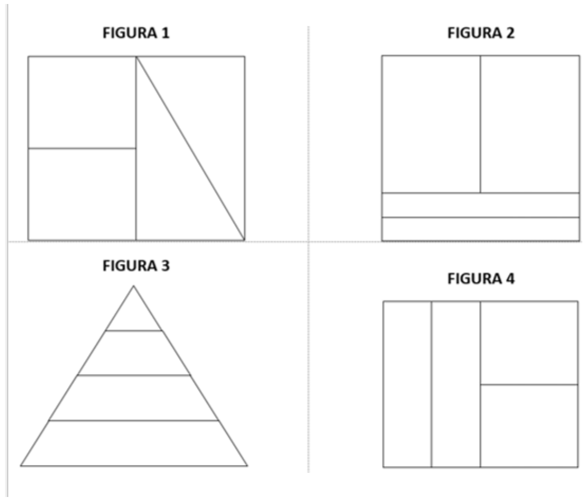
- Cuatro cartulinas cuadradas de diferente color (amarillo, azul, verde y blanco), los cuadrados de cartulina amarillo, verde y blanco deben de ser de igual tamaño y el cuadrado de cartulina azul debe ser un poco más grande.

- Tijeras, lápiz, borrador y sacapuntas.

- Un palo de madera de aproximadamente 20 cm. En este caso, el palo reemplaza a la regla, debido a que se necesita una herramienta de medida no estandarizada, con el fin de evitar ambigüedades en los estudiantes.

- Hoja de respuestas (hoja de block cuadriculada, el revés de la fichas o cuaderno de matemática), esto ya queda a criterio del profesor.

- Hoja (si es posible, sacarlas en un material más fuerte, como, por ejemplo, el papel Kimberly) con las siguientes figuras, para que cada grupo de trabajo pueda responder la pregunta 6.



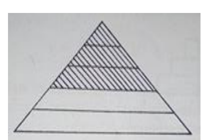
Conocimientos previos: para el desarrollo de esta actividad se necesita que el estudiante tenga conocimientos previos del concepto de número entero positivo en el contexto de medida y reconocer figuras tales como: cuadrados, triángulos, etc.

Cabe mencionar, que en esta actividad no existe una solución matemática general, todo depende de las estrategias (en este caso el tipo de doblez) que el estudiante utilice para el desarrollo de la misma.

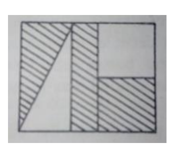
Conceptualización y fundamentación matemática/teórica: En consonancia con los aportes de Llinares. S y Sánchez. M (1997), para que el dominio de la relación parte-todo es necesario que el estudiante desarrolle algunas habilidades, las cuales fueron estudiadas por Piaget, Inhelder y Szeminka (1960) los cuales llaman a estas habilidades como atributos, entre estos está el atributo 5 "los trozos -partes- son iguales. las partes tienen que ser del mismo tamaño -congruentes-"

Pero, ¿que se está entendiendo por congruente?

Desde Llinares y Sánchez (1997), la noción de <<partes congruentes>> es de vital importancia para poder justificar que en la siguiente figura



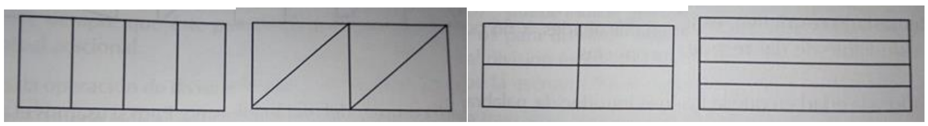
no podemos indicar por 3/5 (tres quintos) la parte sombreada, al no estar formada por partes congruentes, pues esto no indica necesariamente partes de la misma forma, por lo que propone la introducción por parte del profesor de divisiones <<no normales>>, como, por ejemplo:



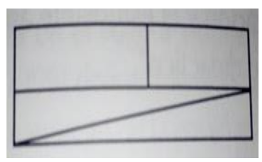
Ahora, cuando se dice que las partes de la figura deben de ser iguales entre ellas, para Fandiño (2009) el considerar el término "iguales" como congruentes en forma, constituye un serio obstáculo a la construcción de conocimiento.

Por lo que propone la estrategia didáctica de trabajar con modelos concretos sin abusar de estos, pues cuando el estudiante vaya a trabajar sin este tipo de material, se le dificultara la comprensión.

También menciona que los profesores tienen gran responsabilidad en estos casos, pues muchos maestros de, primaria y de secundaria interpretan el término «iguales», como igual en forma como las siguientes:



Por lo anterior, Fandiño (2009) menciona que se han encontrado profesores que, respetuosos de ese <<iguales>>, no admitían el siguiente hecho:



Además, la actividad se propone con base a la fenomenología didáctica de Freudenthal, puesto que "la igualdad de partes se estima a ojo o por tacto, o por métodos más sofisticados. Uno de ellos es doblarlo en dos para partirlo por la mitad […]". (Freudenthal, 1983/2001, p. 8)

Propósitos de cada pregunta que compone la actividad:

Al inicio de la actividad se pide que se desarrollen está en grupos de tres integrantes, sin embargo, el propósito de la misma es llevar a cabo la interacción entre los estudiantes de toda el aula de clase, es decir, que se dé la oportunidad de socializar las respuestas o estrategias de solución.

Por otra parte, se recomienda que el profesor realice una intervención después que el estudiante termine de responder una pregunta, es decir antes de pasar a responder otra, esto con el fin de ir resolviendo las dudas en cada una y de esta manera se tengan mayor comprensión de las preguntas o puntos.

Ahora, para la primera pregunta **(punto 1)** de la actividad (*dobla en cuatro partes iguales la cartulina de color amarillo)* el propósito de esta, es introducir al niño en la familia de mitades, tercios, cuartos, etc., por otro lado, al decirle al niño que "*cada integrante del grupo debe realizar dobleces diferentes a los de su compañero del lado",* lo que se busca es que ellos mismos observen que de un mismo «todo» o unidad, pueden salir partes de diferentes formas y poder dar paso al **punto 2**.

Punto 2 *(usa el palito de madera para trazar líneas por donde hiciste los diferentes dobleces),* se espera que esta sea una ayuda que le permita al estudiante visualizar mejor las partes en las que ha dividido la cartulina (unidad), además, como se mencionó en los materiales a utilizar, el palo reemplaza a la regla, debido a que se necesita una herramienta de medida no estandarizada, con el fin de evitar ambigüedades en los estudiantes.

Punto 3 (*observa cada parte que se te formó al trazar las líneas, ¿Cómo podríamos saber que las partes de la cartulina cuadrada de color amarillo son iguales entre ellas?)*, esto le permite al profesor identificar sobre aquello que entienden por la expresión «partes iguales» y sobre la comparación entre las dos áreas, de las cuales, en ocasiones estos conocimientos pueden ser erróneas, lo cual a su vez le permite corregirlos.

Por otro lado, es probable que el niño éntre a justificar que las partes son iguales al realizar la superposición de las mismas, lo cual es válido dentro del presente contexto de la situación. esta nos permite dar paso a los **puntos 4 y 5,** para ampliar la noción anterior.

Luego, se le entrega otra cartulina cuadrada de color azul al niño, se le pide doblarla y trazar las mismas líneas como lo hizo con la cartulina amarilla.

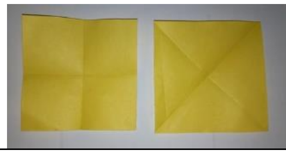
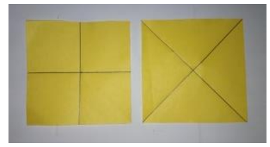
Pasando al **punto 4** *(será que las partes de la cartulina amarilla son iguales con las partes de la cartulina azul)* es posible que el estudiante responda que las partes de la cartulina azul son más grandes que las partes de la cartulina amarilla, por lo que se les puede pedir que justifiquen por qué una es más grande que la otra, de esta manera lo estamos acercando más a la noción de «partes iguales» no por forma, sino en <u>cantidad de alguna magnitud</u>, pues a los niños no se les puede hablar de magnitud o área, ya que estos términos aún son desconocidos para ellos. Es por lo anterior que, en este punto, se aprovecha para decirle a los estudiantes que no es suficientes con que las partes tengan la misma forma o figura.

Por otro lado, en este punto, se les puede pedir que peguen los dos cuadrados de cartulina para evidenciar en su hoja de respuesta que estas no son iguales, sin embargo, no es obligatorio, pues se debe tener en cuenta que este proceso en los niños se va a tomar su tiempo.

A continuación, se les pide recortar por las líneas que trazaron en la cartulina amarilla e intercambiar una de las partes con la de su compañero de la derecha. Aquí es necesario que sea su compañero de la derecha, pues recordemos que los grupos de trabajo son de tres estudiantes y en caso de no poner la restricción, podría quedar un compañero sin intercambiar su parte de la cartulina con otro compañero del grupo de trabajo.

En el **punto 5,** *(¿crees que tus partes de la cartulina amarilla son iguales a la que te entrego tu compañero?, ¿por qué?),* el propósito de esta pregunta es el acercamiento por parte de los estudiantes a la noción de «partes iguales» por cantidad de alguna magnitud, pues teniendo en cuenta la justificación que dio en el punto tres al superponer las partes, es posible que intentare hacer lo mismo en este punto, en la cual, como ayuda puede pasar a contar los "pedacitos" restantes de la una con la otra y tratar de acomodarlos para que queden de la misma forma. Lo cual, corresponde al razonamiento de demostrar que las dos partes, aunque tengan diferente forma, tiene la misma cantidad de cartulina.

Por ejemplo:

Paso 1 	**Paso 2** 
Paso 3 	**Paso 4** 
Paso 5 	**Paso 6** 
Paso 7 	**Paso 8** 

Una vez el estudiante realiza los pasos anteriormente mostrados, es posible que este comprenda la propiedad de conservación para la magnitud de área.

Para finalizar, también sería bueno que pegaran las dos figuras en su hoja de respuestas o cuaderno, pues es de gran ayuda para que ellos al verlo lo puedan recordar fácilmente.

Antes de continuar, se pasa por cada uno de los puestos de los estudiantes, para que estos depositen ahí todos los pedazos de cartulina sobrantes, esto se hace con el fin de evitar ambigüedades y malos entendidos en los estudiantes, pues el punto 6 es una nueva actividad y no se necesitara ninguna de las cartulinas anteriores, solo se hará uso del palito de madera, las tijeras, lápiz, borrador y sacapuntas.

Luego, se les hará entrega a los estudiantes de la hoja con las figuras para que den respuesta al punto seis, pero primero deben obsérvalas y luego responder

En el **punto 6**, *(¿crees que la figura 1 tiene todas sus partes iguales?, ¿Por qué? ¿será que las figuras 2, 3, y ,4 también tienen sus partes iguales?)* se tiene como propósito verificar o conocer si el estudiante reconoce la expresión «partes iguales» de la relación parte-todo.

Para esta actividad, se les propone a los estudiantes qué para ganar tiempo se dividan las figuras y cada uno responda la pregunta solo para una figura, es decir, el integrante 1, que responda la pregunta para la figura 1, el integrante 2 para la figura 2 y así sucesivamente.

Posteriormente, se les entrega dos cartulinas cuadradas del mismo tamaño, una de color verde y otra de color blanco para que desarrollen el **punto 5**.

El **punto 7** *"dobla la cartulina cuadrada de color verde en dos partes iguales, traza una línea con el palito de madera por donde hiciste el doblez y luego recórtala"* es un proceso que realiza el estudiante, de tal forma que esta nos permite dar paso a los **puntos 8 y 9.**

Respecto a la advertencia "OJO: Cada integrante del grupo debe realizar dobles diferentes a los de su compañero del grupo", se hace con la intención de observar las diferentes particiones que pueden salir y que, además, entre ellos no se copien y cada uno desarrolle su respectivo proceso cognitivo.

Los **puntos 8 y 9** tienen como propósito que el estudiante establezca la comparación entre las dos áreas, además se les pide que dibujen lo que hicieron, para acércanos un poco al sistema de representación gráfico de la relación parte-todo en un contexto continuo.

Finalmente, el propósito de la frase que aparece al final de la ficha del estudiante (¡Hemos terminado de responder todas las preguntas!, pero para no olvidar lo que aprendimos, cada uno en su cuaderno va a escribir lo que aprendió en el día de hoy) es acarrear al estudiante a que copie en su cuaderno lo que se le quedo de todo el trabajo realizado, de tal forma que permite saber si estos han captado o se ha podido cumplir con los objetivos de la actividad, además de que queda como insumo para el estudiante que le permitirá recordar al momento de leer lo que escribió.

Referencias bibliográficas:

Fandiño. M, (2009). Dificultades en el aprendizaje de las fracciones y didáctica de la matemática. *Las fracciones aspectos conceptuales y didácticos.* Colombia: Magisterio.

Llinares, C. & Sánchez, M. (1999). *Las fracciones: la relación parte-todo.* Madrid, España: Editorial Síntesis.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias.* (p. 80). Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2015). Derechos Básicos de Aprendizaje. Recuperado de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

Puig, L. (2001). Fracciones. En: *fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* [Didactical Phenomenology of Mathematical Structures]. Recuperado de: http://www.uv.es/puigl/cap5fracciones.pdf

Ficha del profesor de la segunda actividad:

FICHA DEL PROFESOR:
Grado: 3º

Esta actividad se propone para grado tercero, pues en lo que respecta a la fracción, el estudiante al terminar tercer grado "describe situaciones de medición utilizando fracciones comunes" (Estándares Básicos de Competencias, 2006. p. 80); además, "comprende el uso de fracciones para describir situaciones en las que una unidad se divide en partes iguales" y "compara fracciones sencillas y reconoce fracciones que, aunque se vean distintas, representan la misma cantidad" (Derechos Básicos de Aprendizaje, 2015. p. 57)

Objetivos de la segunda actividad / puntos que apuntan al objetivo:

- ✓ El estudiante reconozca que, las subdivisiones cubren el todo, es decir, la unión de las partes conforma el todo / pregunta 8 de las cartas de la ruleta.
- ✓ Que el estudiante comprenda que, el número de partes no coinciden con el número de dobleces o cortes (en el caso de la figura circular, los cortes o dobleces son por los diámetros de la misma). Esto sucede como caso particular en la partición equitativa de áreas o superficies / puntos 1, 2 y 3 de la ficha del estudiante.
- ✓ Un primer acercamiento por parte de los estudiantes a los diferentes sistemas de representaciones de la relación parte-todo, tales como: diagramas o dibujos, forma verbal, simbólica y escrita para la relación parte-todo de los números racionales en contexto continuo / preguntas 2, 3, 5, 6 y 7 de las cartas de la ruleta.
- ✓ Evaluar si el estudiante reconoce las partes de la unidad y la misma, también llamado como "el todo" / preguntas 1 y 4 de las cartas de la ruleta.

Duración de actividad "Ruleta matemática": 210 minutos. (primera sesión de 90 minutos y segunda sesión de 120 minutos)

Materiales por cada grupo de trabajo:

- Cartulina de color (para que la ruleta les quede con diferentes colores, se les hace entrega de una cartulina de diferente color a cada grupo.
- Un trozo de cartulina de color blanco (este trozo debe de ser 1/8 de la cartulina de color).
- Un palo de madera de aproximadamente 20 cm. En este caso, el palo reemplaza a la regla, debido a que se necesita una herramienta de medida no estandarizada, con el fin de evitar ambigüedades en los estudiantes.
- Tijeras.
- Base de icopor circular (esta base debe tener el mismo diámetro de la cartulina de color, la función de la misma es solo de servir como soporte para la ruleta).

- Ega.
- Número del 1 al 8 (estos números tienen dos funciones, la primera es para numerar cada una de las partes y la segunda es que permita ver al estudiante que el “todo” está compuesto por ocho partes) estos números se encuentra en el **Anexo** de la presente actividad.
- Gancho de cabeza redonda (este tipo de gancho tiene forma de mariposa y se consigue en papelerías).
- Flecha (esta flecha se puede hacer en cartón y para una mayor resistencia se puede envolver en cinta y pintarse, por otro lado, su medida de largo debe ser menor al radio de la base circular de icopor).
- Tapa (esta tapa puede ser de agua, gaseosa, jugo, etc. Para una mejor estética, se puede pintar del color de la flecha).
- 8 cartas con preguntas (estas cartas deben tener por un lado la pregunta y por el otro lado el número). Las preguntas son las siguientes:

    1. ¿En cuántas partes iguales está dividida la ruleta?
    2. ¿con qué diagrama o dibujo pueden representar la cantidad de partes de cartulina de color verde en comparación con la ruleta?
    3. ¿Cómo podrían representar simbólicamente la cantidad de partes de cartulina de color amarillo comparada con todas las partes de la ruleta?
    4. ¿Qué es el todo? ¿Qué otro nombre le podrían dar?
    5. ¿creen que cada una de las partes de cartulina es un octavo comparado con el todo?
    6. Completen la frase:
       hay ____ cartulinas de color azul, de un total de ____ partes que componen el todo.
    7. Si la cantidad de partes de cartulina de color rojo es $\frac{1}{8}$ del todo, ¿Cómo se lee esa fracción? Escríbanlo en letras.
    8. ¿Cuántas partes conforman el todo, o sea, la ruleta?

- Hoja de respuestas, esta puede ser una hoja de block cuadriculada, el revés de la ficha o responder en el cuaderno de matemática (ya queda a criterio del profesor o profesora).
- Lápiz, borrador y sacapuntas (son útiles escolares que el estudiante debe cargar, sin embargo, no está de más que el profesor cargue estos por si algún grupo de trabajo no tiene).
- Pistola de silicona con silicona.

Conocimientos previos: para el desarrollo de esta actividad se necesita que el estudiante tenga conocimientos previos del concepto de número entero positivo en el contexto de medida, reconocer figuras tales como: cuadrados, triángulos, círculos, etc., comprenda la propiedad de conservación para la magnitud de área, reconozca la expresión «partes iguales» en la relación parte-todo y que tenga la capacidad para establecer comparaciones entre dos áreas.

Conceptualización y fundamentación matemática/teórica: En consonancia con los aportes de Llinares. S y Sánchez. M (1997), para que el dominio de la relación parte-todo es necesario que el estudiante desarrolle algunos atributos, los cuales fueron estudiados por Piaget, Inhelder y Szeminka (1960), entre estos están los atributos 3 y 4 "las subdivisiones cubren el todo" y "el número de partes no coincide con el número de cortes"

Fuera de esos atributos, es de gran importancia la enseñanza de las diferentes representaciones de la fracción, según Llinares y Sánchez:

> Al plantearse una situación de enseñanza aprendizaje se introduce la cuestión de realizar el diseño de sus secuencias […]
> Tenemos identificados los atributos a conseguir, a través de un contexto continuo, en un primer momento, para integrar posteriormente en contextos discretos.
> Otra cuestión a tener en cuenta es la «representación» de las ideas, desde el plano intuitivo […] al plano simbólico pasando por la utilización de diagramas y formas verbales y escritas (1997. p. 90).

Por lo anterior, cada uno de los puntos de la presente actividad planteada (Ruleta matemática) tiene unos propósitos, de tal forma que se busca que los estudiantes logren comprender los atributos 3 y 4, además de adentrarlo a los diferentes sistemas de representación de la relación como parte-todo.

Además, la actividad "Ruleta matemática" se diseña pensando en una de las propuestas de Freudenthal para la división del círculo, puesto que "[…]la distribución del pastel; por no mencionar otros más recientes, tales como las cajas de fracciones. Ciertamente en la práctica didáctica no deben ser omitidos. La distribución del pastel es la predecesora de divisiones generales del circulo que son aplicadas a diagramas de sectores estadísticos, en ruletas y en spinners […]" (Freudenthal, 1983/2001, p. 21)

Por otro lado, la ruleta se diseña teniendo en cuenta por lo menos cinco colores, debido a que "[…]Como modelos didácticos para fracciones son especialmente efectivos si se ha de tomar conjuntamente varios sectores, con el fin de decir cosas sobre "m de n partes" o "p partes de esto contra q partes de aquello" […]". (Freudenthal, 1983/2001, p. 21)

Este ejemplo de un todo definido también es propuesto por Freudenthal, pensando en estos como una situación que permite representar las partes, pues "lo mismo sucede con un disco circular —continuo, definido, estructurado cíclicamente, dividido en sectores, que separadamente o tomados juntos representan partes (ruleta, spinner, diagrama de sectores)". (Freudenthal, 1983/2001, p. 11).

Finalmente, las divisiones en ocho partes iguales se hicieron a través de los dobles, puesto que esta hace relación al uso de simetrías, ya que "las figuras u objetos planos y espaciales, así como cantidades grandes, se distribuyen respecto al área o volumen mediante el uso de congruencias y simetrías". (Freudenthal, 1983/2001, p. 9).

Propósitos de cada pregunta que compone la actividad:

PRIMERA SESIÓN (90 MINUTOS)

Para empezar, se les dice a los estudiantes que la actividad del día de hoy se llamara la "ruleta matemática" y que en la primera sesión se construye la ruleta, de tal forma que en la segunda sesión se juega con ella, posteriormente, se les indica que para dar inicio a la actividad deben organizarse en grupos de cuatro. Una vez hayan formado los grupos de trabajo, se le pasa a cada uno de los estudiantes *la ficha del estudiante,* el propósito de pasarles a cada uno la ficha, es para evitar que solo uno lea y los otros no sepan de que trata la actividad.

Es importante decirles a los estudiantes que se leerá la ficha en conjunto, es decir, entre todos los estudiantes y la profesora, pues debemos evitar que algún grupo se adelanten y que otros se pierdan, pues es mejor llevar un mismo ritmo entre todos, poder dar la explicación a todos y aclarar dudas que estos tengan.

Ahora, proseguimos a leer los materiales que aparecen en la ficha del estudiante y les vamos mostrando cuales son estos materiales.

Posteriormente se les hará entrega de la hoja de respuestas (una por grupo, en la cual se les indica que ponga como título *"primera sesión"*), un trozo de cartulina blanca y una cartulina circular de cualquier color (una cartulina de diferente color por grupo, en este caso se utilizan los colores: amarillo, azul, rojo, verde y naranja), para que respondan la pregunta 1)

El propósito de la pregunta o **punto 1** *(¿cuántas veces creen que cabe la cartulina blanca, en la cartulina del otro color?)* es poder observar y determinar la habilidad y el conocimiento informal que el estudiante posee acerca de la comparación de áreas. Pues la idea es que este estime cuántas veces cabe la parte de cartulina de color blanca, en el todo de cartulina de color, por lo que una de las posibles soluciones del estudiante será superponer una sobre la otra y empezar a mirar cuantas veces caben, de tal forma que dirán que *la cartulina blanca cabe ocho veces en la de* color o que *la cartulina blanca es una parte de ocho que componen la cartulina de color*.

Una vez todos los grupos hayan respondido la pregunta del punto 1, se pasa a hacer la socialización y percatarse que lo hayan hecho correctamente.

Ahora se les pide que "*doblen la cartulina de color las veces que sea necesaria para obtener ocho partes iguales",* en caso de que algún grupo de trabajo no lo logre, se hace este proceso en conjunto con ellos, indicándoles que se doble primero por la mitad y luego esa mitad por la mita y una vez más por la mitad, de esta manera obtendremos los ocho pastes iguales (es importante que en cada doblez se abra la cartulina para que los estudiantes cuenten cuantas partes van saliendo).

Ahora, deben responder el **punto 2** *(¿cuántas veces tuvieron que doblar la cartulina para obtener las ocho partes iguales?),* el cual tiene como propósito que, los estudiantes tengan claro la cantidad de veces que debieron doblar la cartulina para tener un número determinado de partes, de tal forma que les permita responder con claridad el **punto 3** (si quiero obtener ocho partes iguales, ¿debo doblar ocho veces la cartulina? ¿Por qué?), el cual a su vez se realiza con la intensión de que el estudiante de cuenta que el número de dobleces es diferente al número de partes, el cual hace relación a uno de los atributos propuestos por Piaget anteriormente mencionado. Esto le permite al estudiante comprender que cuando se les pide o desean dividir el todo en una cantidad de partes determinadas, no se deben doblar o cortar el todo en ese mismo número de partes, pues este (cortes o dobleces) siempre será menor al número de partes deseados.

Una vez hayan respondido las preguntas 2 y 3, se hace la socialización para que nuestro propósito se cumpla, pues si alguno de los grupos tiene alguna respuesta errónea, se debe pasar a corregirla y explicar porque estaría mala.

Se espera que hasta este momento de la implementación de la actividad solo hayan pasado 30 minutos.

Ahora si se puede pasar a construir la ruleta, para ello, se le hace entrega a cada uno de los grupos de trabajo los siguientes materiales: el palito de madera, tijeras, la base de icopor, ega y los números de 1 al 8.

Se les pide que cada uno de los integrantes del grupo se enumere del 1 al 4, pues para realizar los primeros cuatro pasos de la construcción de la ruleta, es conveniente que cada uno cumpla una función, de esta manera lograr que todos trabajen y colaboren en la elaboración de la misma sin ningún problema.

Ahora se delegan las funciones y se siguen en el orden en el cual aparecen en la ficha del estudiante.

Entonces, el integrante número 1 es el encargado de trazar las líneas con el palito de madera por los dobleces que le hicieron a la cartulina de color. esta se hace con la intención de facilitar al estudiante a la hora de recortar, pues así ven por exactamente por donde deben cortar, además que también les permite observar más explícitamente la cantidad de partes en las que se dividió la cartulina.

El integrante número 2, recortará con las tijeras por donde el compañero trazó las líneas, con la idea de poder tener las partes separadas.

Una vez todos las tengan recortadas, se les pide entregarlas, la idea es que el profesor o profesora las combine para que cada grupo de trabajo tenga partes de diferentes colores, pues por un lado está la estética de la ruleta y, por otro lado, le permite al estudiante aclarar que se habla de partes iguales en cantidad o magnitud y no en color.

Posteriormente, el integrante número 3 pega cada una de las partes en la base de icopor, si desea, puede pedir ayuda a sus compañeros del grupo de trabajo. El propósito de este paso, es que el estudiante de manera implícita vuelva a obtener el todo a través de la composición de todas sus partes.

Por último, el integrante número 4 pega cada uno de los números en cada una de las partes de cartulina como lo indicará la profesora, este último paso tiene dos propósitos, el primero es por estética y parte del juego, y la segunda es para que el estudiante de manera implícita percate que el todo está compuesto de ocho partes, puesto que cada parte está numerada.

Para continuar, se les hará entrega de un gancho de cabeza redonda, una fecha y una tapa de tal forma que introduzcan la flecha y la tapa por el gancho.

Una vez lo hayan logrado, se le pide a los integrantes número 1 de cada grupo de trabajo para que se acerquen con la ruleta y el gancho con los otros materiales, que hagan una fila donde el profesor se encuentre, pues este debe acomodarse cerca de una toma corriente donde pueda conectar la pistola de silicona.

Cuando ya estén en fila, con la fecha y la tapa adentro del gancho, se le echa silicona a rededor de la tapa por la parte de abajo y se introduce por el centro del icopor con las cartulinas. Una vez el gancho salga al otro lado del icopor, se deja un espacio prudente entre la tapa y la cabeza del gancho para que la fecha pueda girar con facilidad.

Al otro lado del icopor, por donde haya salido el gancho, se doblan las “patas” del mismo y se les echa silicona para darle un mayor soporte a estas. Y finalmente la ruleta está lista para jugar.

Finalmente, el propósito de la frase que aparece al final de la ficha del estudiante (¡Han terminado de responder todas las preguntas!, pero para no olvidar lo que aprendieron, cada uno en su cuaderno va a escribir lo que aprendió en el día de hoy) es acarrear al estudiante a que copie en su cuaderno lo que se le quedo de todo el trabajo realizado, de tal forma que permite saber si estos han captado o se ha podido cumplir con los objetivos de la actividad, además de que queda como insumo para el estudiante que le permitirá recordar al momento de leer lo que escribió.

Hasta aquí se espera que hayan pasado como máximo los 90 minutos.

Antes de empezar a jugar con la ruleta se les debe hacer una breve explicación a los estudiantes sobre los diferentes sistemas de representación, para ello, la fase de institucionalización del conocimiento se puede llevar de la siguiente manera:

SEGUNDA SESIÓN: (120 MINUTOS)

fase de institucionalización del conocimiento.

Debido a que hasta el momento se han trabajado dos tipos de diagramas (cuadrado y circular), la idea es trabajar con lo que ellos se relacionan hasta ahora, por ello, primero debemos dejar claro que es lo que estamos entendiendo por “partes” y “todo”.

Entonces, para empezar, le mostramos la ruleta a los estudiantes y les preguntamos ¿Qué entienden por “partes” ?, de ahí se parte para acercar al estudiante al significado de “partes” en cualquier situación y posteriormente recordar lo que son “partes iguales”, pues en la actividad “doblando y cortando la cartulina” se les hablaba que no necesariamente se debían fijar en la forma para decir si eran iguales o no, sino por la “cantidad” y que, por ejemplo, para esta situación de la ruleta, el color no nos interesa.

De igual forma se pregunta por el “todo” en el contexto de la ruleta, de tal forma que, al finalizar, los estudiantes hayan comprendido que el “todo” está compuesta por todas sus “partes”, sin embargo, es probable que ningún estudiante de cuenta de estas dos nociones para cualquier tipo de situación, pero es suficiente que hasta el momento de cuenta de éstas en el contexto o situación de la actividad “ruleta matemática”.

Posteriormente se les informa que en la clase de hoy se va a trabajar con fracciones, no está de más escribirlo en el tablero para que todos los estudiantes lo copien en su cuaderno.

Se les dice que estos números se pueden representar de diferentes formas.

Entonces, la idea es tratar de construir un tipo de cuadro donde se encuentren los distintos sistemas de representación de la relación parte-todo y al menos dos situaciones distintas.

Ahora, un ejemplo de ello sería el siguiente:

De forma horizontal vamos a poner los distintos sistemas de representación de la relación parte-todo en un contexto continuo:

- diagramas o dibujos
- forma verbal
- escrita en letras
- escrita en símbolos o simbólicamente

y en forma vertical vamos a poner dos ejemplos o situaciones

1. punto 8 y 9 de la guía anterior, es decir, de la actividad “doblando y cortando la cartulina”, ya que en esa situación se trabaja con diagramas rectangulares.
   Nota: es recomendable llevarles nuevamente las dos cartulinas (cartulina verde y blanca).
2. La ruleta matemática, ya que en esta se trabaja con diagramas circulares.

Es importante especificar qué tipo de comparación se va a representar, es decir, en la primera situación se va a representar una parte de la cartulina verde comparada con toda la cartulina blanca, en relación a la cantidad y en la segunda situación, se va a representar la cantidad de cartulinas de color amarillo comparadas con el “todo”, es decir, con la ruleta.

Ahora, iniciamos en la columna de los **diagramas o dibujos**, para ello, cabe recordarles las diferentes representaciones que hicieron en la actividad anterior a la presente, llamada “doblando y cortando la cartulina”. Para esta parte, es importante que se les muestre a los estudiantes las diferentes formas de representarlas a través de diagramas, pues recordemos que la posición en la que se haga la parte a comparar en el diagrama no es de gran relevancia y que todas esas representaciones son válidas.

Pasando a la columna de la **forma verbal**, se les escribe en el tablero que: *"se debe decir en voz alta: una parte de la cartulina verde es la mitad de toda la cartulina blanca"*

Para continuar, en la representación **escrita en letras,** se escribe: *"la mitad"* o *"uno-medio*".

Además, se les hacen dos columnas, es una se escribe como se les llama (expresión lingüística) en esta representación al número de arriba, es decir:

1. Una o un
2. Dos
3. Tres
4. Cuatro
5. Cinco
6. Seis
7. Siete
8. Ocho
9. Nueve
10. Diez
11. ….

Es decir que el número se trabaja como un cardinal en función adjetiva.

Y para el número de abajo, es:

1. Uno
2. Medio
3. Tercio
4. Cuarto
5. Quinto
6. Sexto
7. Séptimo
8. Octavo
9. Noveno
10. Decimo
11. …

Es decir que en este caso el número se trabaja desde un sentido ordinal.

Para finalizar con las representaciones para esta situación, pasamos a la **representación simbólica,** en la que se les escribe en el tablero $\frac{1}{2}$, recordándoles que estamos haciendo la comparación de la parte de la cartulina verde con toda la cartulina blanca.

El anterior proceso o secuencia se puede hacer para la situación de la ruleta.

Es importante dejar intervenir a los estudiantes en la medida en que sea posible y ellos lo deseen, de tal forma que se pueda construir el conocimiento en conjunto.

Ahora, una vez que todos hayan entendido la explicación, se puede pasar a jugar con la ruleta matemática, para ello se les hace entrega a cada grupo de trabajo de ocho cartas con preguntas, las cuales deberán tenerlas "boca abajo".

Se les lee lo que dice en la ficha sobre el juego, es decir, en lo que consiste el juego de la ruleta matemática.

Para la hoja de respuesta, se trabaja con la misma de la primera sesión, solo que, para hacer la diferencia entre estas dos secciones, se les dice que coloquen "segunda sesión" como título y debajo de este pueden responder las preguntas de la ruleta matemática.

Debido a que en el juego cada grupo debe responder ocho preguntas, las cuales no tienen una estructura entre ellas (pues el número que señala la fecha es aleatorio), se presenta a continuación el propósito con cada una de ellas. Por otro lado, es conveniente que el profesor este pasando por cada mesa de trabajo para orientar a los estudiantes sobre la actividad y las preguntas, además debe tener claridad del manejo del tiempo.

Para la pregunta o **punto 1** (¿En cuántas partes iguales está dividida la ruleta?), el propósito es que el estudiante de cuenta de la cantidad de partes iguales y que estas componen la ruleta (el "todo") de una manera implícita.

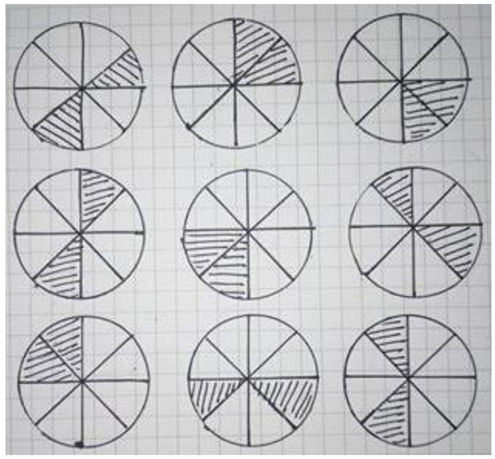
En el **punto 2** (¿con que diagrama o dibujo pueden representar la cantidad de partes de cartulina de color verde?), lo que se busca es que los estudiantes den cuenta de la representación por medio de diagramas o dibujos de la situación que se les plantea.

Para las preguntas en las que tienen que representar gráficamente, sería conveniente entregar a cada grupo un objeto redondo, como por ejemplo una tapa, para que se les facilite hacer el círculo.

EJEMPLO

En el caso de ser la siguiente ruleta:

Recordemos que la posición en la que se ubiquen las dos partes a representar comparadas con el todo no es de gran relevancia, y si "pinta" dos partes cualesquiera de las ocho que conforman la ruleta, es válido. Por lo anterior, hay 48 formas. Veamos unos ejemplos:



Para el **punto 3** (¿Cómo podrían representar simbólicamente la cantidad de partes de cartulina de color amarillo?), el propósito es que los estudiantes den cuenta de la representación simbólica.

EJEMPLO: para el mismo caso de la ruleta anterior, la representación simbólica seria $\frac{3}{8}$

Continuando, para el **punto 4** (¿Qué es el todo? ¿Qué otro nombre le podría dar?), el propósito es mirar si el estudiante comprende lo que significa y representa al "todo", con relación a la segunda pregunta, en esta los estudiantes probablemente no vayan a decir *unidad*, pero puede dar nombres como *círculo, total, completo, etc*. Lo cual no permite saber si el estudiante percibe de alguna manera el significado del "todo" en cualquier situación.

Por otro lado, el propósito de el **punto 5** (¿creen que cada una de las partes de cartulina es un octavo comparado con el todo?), en este caso se quiere mirar si los estudiantes son capaces de pasar de la representación escrita en letras al material concreto, puesto que en el resto de la actividad siempre se ha trabajado las diferentes representaciones partiendo del material concreto.

En el **punto 6** (Completen la frase: hay ____ cartulinas de color azul, de un total de ____ partes que componen el todo), lo que se busca es que el estudiante de cuenta de la representación verbal, pues en la parte de la socialización ellos deben leerla, y es aquí donde se logra cumplir con el propósito de la pregunta.

Para el **punto 7** (Si la cantidad de partes de cartulina de color rojo es $\frac{1}{8}$ del todo, ¿Cómo se lee esa fracción? Escríbanlo en letras), de igual forma que en la pregunta 6, el estudiante debe dar cuenta de la representación verbal, sin embargo, con esta pregunta el estudiante debe hacer el paso de la representación simbólica a la representación de forma verbal, mientras que en la anterior era el paso del material concreto a la representación de forma verbal.

El propósito del **punto 8** (¿Cuántas partes conforman el todo, o sea, la ruleta?), es el mismo propósito de la pregunta 1, solo que en esta parte se da de forma más explícita, pues de antemano se le dice al estudiante que todas las partes componen el todo.

Para la parte de la socialización de todas las preguntas, se escucha y se escriben en el tablero las diferentes respuestas, de tal forma que, si hay errores, o conocimientos errados, se puedan corregir en ese espacio.

Finalmente, el propósito de la frase que aparece al final de la ficha del estudiante (¡Han terminado de responder y socializar todas las preguntas!, pero para no olvidar lo que aprendieron, cada uno en su cuaderno va a escribir lo que aprendió en el día de hoy) es acarrear al estudiante a que copie en su cuaderno lo que se le quedo de todo el trabajo realizado, de tal forma que permite saber si estos han captado o se ha podido cumplir con los objetivos de la actividad, además de que queda como insumo para el estudiante que le permitirá recordar al momento de leer lo que escribió.

Antes de dar por terminada la actividad, se les deja la inquietud ¿será que los objetos del mundo tienen formas de figuras geométricas? Y se les propone que en caso de que su respuesta sea afirmativa, para la próxima clase traigan un objeto y que digan que figuras son. Esta nos ayuda a dar paso para la próxima actividad para trabajar con otro tipo de figura y mostrar que cualquier superficie o región puede ser dividida en un número determinado de partes.

Referencias:

Llinares, C. & Sánchez, M. (1999). *Las fracciones: la relación parte-todo.* Madrid, España: Editorial Síntesis.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias.* (p. 80). Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2015). Derechos Básicos de Aprendizaje. Recuperado de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

Puig, L. (2001). Fracciones. En: *fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* [Didactical Phenomenology of Mathematical Structures]. Recuperado de: http://www.uv.es/puigl/cap5fracciones.pdf

Ficha del profesor de la tercera actividad.

FICHA DEL PROFESOR:

Grado: 3º

Esta actividad se propone para grado tercero, pues en lo que respecta a la fracción, el estudiante al terminar tercer grado “describe situaciones de medición utilizando fracciones comunes” (Estándares Básicos de Competencias, 2006. p. 80); además, “comprende el uso de fracciones para describir situaciones en las que una unidad se divide en partes iguales” y “compara fracciones sencillas y reconoce fracciones que, aunque se vean distintas, representan la misma cantidad” (Derechos Básicos de Aprendizaje, 2015. p. 57)

Objetivos de la tercera actividad / puntos que apuntan al objetivo:

- Que el estudiante comprenda que, un «todo» está compuesto por elementos separables / enunciados de la columna derecha de la ficha del estudiante y punto 1.
- Que el estudiante comprenda que el «todo» se puede dividir en un número de partes pedido / enunciados de la columna derecha de la ficha del estudiante y punto 1.
- Que el estudiante reconozca fracciones equivalentes / puntos 2, 3, 4 y 5.

Duración de actividad “Rompecabezas fraccionario”: 120 minutos.

Materiales por cada grupo de trabajo:

- Objetos con formas geométricas que se les pidió llevar a los estudiantes en la ficha o actividad llamada “Ruleta matemática” en la sesión dos (estos objetos fácilmente se pueden encontrar en el aula de clase, sin embargo, es mejor llevarlas desde casa).

- Los siguientes recursos geométricos, al que puedes acceder copiando y pegando el link en la barra de direcciones web de tu explorador de preferencia:

    1. https://www.geogebra.org/m/AMJsXsYD
    2. https://www.geogebra.org/m/Qz7C3bfU
    3. https://www.geogebra.org/m/rnQXa7AW

- Rompecabezas fraccionario, el cual tiene la misma estructura del “diagrama de Freudenthal”, como se observa en el **ANEXO** de la presente actividad.

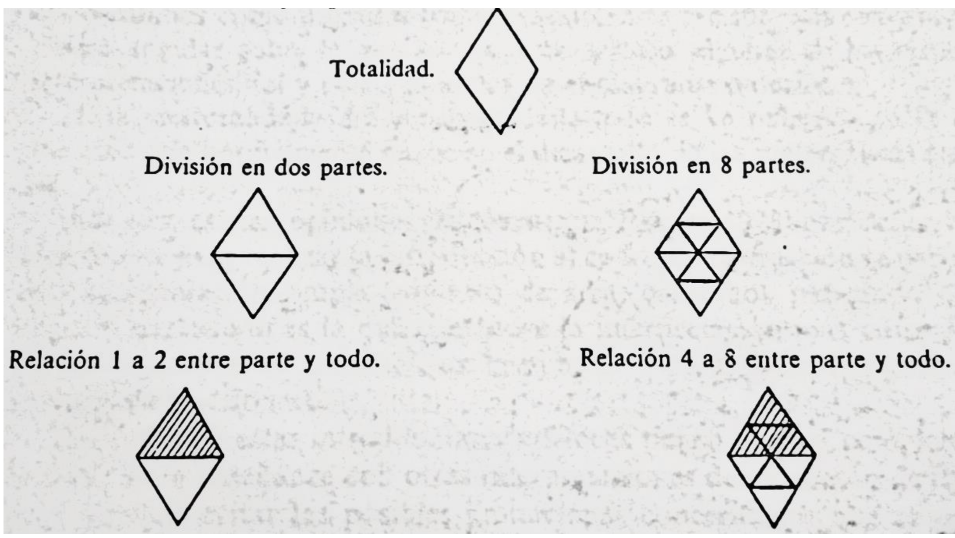
- Hoja de respuestas u hoja de block cuadriculada.

- Lápiz, borrador y sacapuntas (son útiles escolares que el estudiante debe cargar, sin embargo, no está de más que el docente cargue estos por si algún grupo de trabajo no tiene).

Conocimientos previos: para el desarrollo de esta actividad se necesita que el estudiante tenga conocimientos previos del concepto de número entero en el contexto de medida, reconocer figuras tales como: cuadrados, triángulos, círculos, etc., reconozca la expresión «partes iguales» de la relación parte-todo de los números racionales y que tenga la capacidad para establecer comparaciones entre dos áreas.

Conceptualización y fundamentación matemática/teórica: En consonancia con los aportes de Payne (1976), para el aprendizaje inicial de las nociones relacionadas con los números racionales desde la relación parte-todo, es necesario que el estudiante esté familiarizado con la noción de subdivisiones equivalentes.

Por lo anterior, la segunda sesión de la actividad "Rompecabezas fraccionario" se diseña pensando en el manejo de las fracciones equivalentes, es decir, según Llinares y Sánchez:

> […] «habilidad» de reconocer cuando distintas partes de un mismo todo, obtenidas con diferentes divisiones, nos dan la misma parte de la totalidad, lo cual nos lleva a admitir una misma relación parte-todo a través de «nombres equivalentes». Veámoslo en un ejemplo:
>
> 
>
>
> en ambos casos tengo igual parte del total. Distintas relaciones parte-todo pueden expresar la misma parte de un objeto total. En este caso las relaciones se refieren al mismo objeto físico, y por ello se dicen equivalentes. (1999, p. 81-82). Este ejemplo como caso particular para situaciones de superficies, pues hasta el momento se ha venido trabajando solo con área.

Propósitos de cada pregunta que compone la actividad:

Para empezar, se les dice a los estudiantes que la actividad del día de hoy se llama "Rompecabezas fraccionario" y que se trabajará en dos sesiones de trabajo individual. Seguido, se le pasa a cada uno de los estudiantes *la ficha del estudiante.*

Es importante decirles a los estudiantes que se leerá la ficha en conjunto, es decir, entre todos los estudiantes y la profesora, pues se debe evitar que algunos se adelanten y que otros se pierdan, pues es mejor llevar un mismo ritmo entre todos, poder dar la explicación a todos y aclarar dudas que surjan.

Ahora, se prosigue a leer las instrucción y materiales, posteriormente se les hará entrega de la hoja de respuestas o en su defecto, que respondan en la parte de atrás de la hoja.

Posteriormente se continúa leyendo la ficha, la siguiente parte:

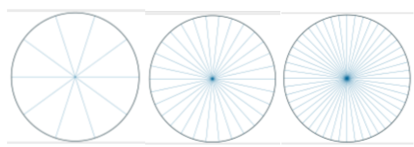
¿Te has fijado que en el mundo encontramos objetos con formas de figuras geométricas? Pues mira, en todas partes los podemos encontrar, ahora mismo, frente a nuestros ojos tenemos un objeto con forma de figura geométrica, ¡es un rectángulo! 	***Hasta aquí se intenta ir a través de lo percibido por ellos para llegar a mostrarles que toda superficie puede ser dividida, pero que estas no son simplemente figuras, sino que guarda relación con el entorno y sobre todo con el contexto real de los mismos estudiantes.***

¡Miremos otros objetos con formas de figuras geométricas! Ahora, observemos que todos los objetos tienen caras. 	***Aunque ya se les había pedido con anterioridad a los estudiantes que llevaran al menos un objeto cada uno a esta clase, por precaución el profesor debe llevar algunos objetos con diferentes formas de figuras geométricas, como por ejemplo una caja, la cual se puede desarmar y que los estudiantes vean con mayor facilidad las caras (dos dimensiones), de esta manera nos vamos acercando más a lo que es una superficie.***
Además, todas esas caras son posibles de dividir en un número elegido de partes.	***aquí se les relacionar a los estudiantes lo que es superficie con caras, para que de esta manera sea más comprensible para ellos el hecho del primer y segundo atributo por Llinares y Sánchez antes mencionado, que habla sobre un todo***

	***que está compuesto por elementos separables, las cuales se pueden realizar en un número determinado de partes.***

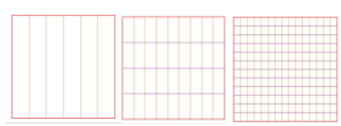
Antes de continuar, es recomendable preguntar a los estudiantes en cuántas partes creen que se puede dividir una cara o superficie, de esta manera los estudiantes realizaran conjeturas, las cuales estarán asociadas a responder el número más grande (cantidad) que ellos conozcan o simplemente den un número al azar, puesto que para ellos aún no está definida la noción de infinito, de tal manera que es poco probable que respondan que una superficie es posible dividirla en el número de partes que se desee, sin importante que tan grande sea la cantidad de partes.

Una vez que hayan dicho diferentes números de partes en las que ellos consideran que posiblemente es el máximo de partes en las que se pueda dividir una cara o superficie, sin responder si es correcto o no el número de partes que estimaron, se continúa leyendo la ficha y se dice: “**A continuación, la profesora mostrará algunos ejemplos:”** y se pasa a mostrarles el primer link (https://www.geogebra.org/m/AMJsXsYD), el cual corresponde a las divisiones en «partes iguales» de una superficie circular, tal como se muestra en la ficha del estudiante.



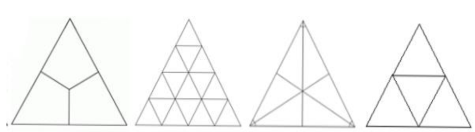
Debido a que el recurso solo llega hasta el número 96 de partes, se les pregunta si ¿es posible poder seguir dividiendo la superficie?, también pregunta como ¿Qué pasa cuando aumenta el número de partes?, este tipo de preguntas permite al estudiante hacer conjeturas que posteriormente pueda validar o corroborar él mismo.

Luego se les dice que también podemos hacerlo con superficies cuadradas, y se les muestra el segundo link (https://www.geogebra.org/m/Qz7C3bfU), tal como se muestra en la ficha del estudiante.



Este ejemplo si tiene un numero de divisiones más grande, pues este llega hasta 400 «partes iguales».

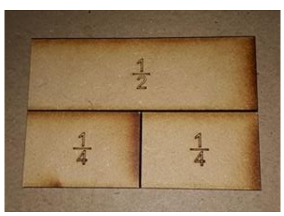
Seguidamente se muestra el tercer link (https://www.geogebra.org/m/rnQXa7AW), tal como aparecen algunos ejemplos en la ficha.



Debido a que este último recurso no le permite a los estudiantes visualizar la división en partes iguales de una superficie triangular a partir de cortes o trazos de líneas paralelas a los lados de la misma, como por ejemplo lo que pasó en el caso del cuadrado, se puede aprovechar para preguntar a los estudiantes ¿por qué creen que no se puede dividir el triángulo vertical u horizontalmente como se hizo con el cuadrado?, por lo que los estudiantes deben de dar cuenta de la noción de «partes iguales».

Finalmente se lee la pregunta o **punto 1**, la cual tiene como propósito que los estudiantes piensen, den cuenta y escriban lo relacionado a los dos primeros atributos de Llinares y Sánchez antes mencionados, estos en las propias palabras del estudiante, del cual se debe abrir un espacio para que se comparta o socialice lo escrito por cada uno.

Para la segunda sesión se procede de forma similar, pues se inicia leyendo los materiales y se hace entrega de los mismos para que respondan las preguntas.

<table>
<tr>
<td>2) Toma la ficha $\frac{1}{2}$ y dos fichas de $\frac{1}{4}$ ¿crees que la primera ficha tiene la misma cantidad que las otras dos fichas juntas? ¿Por qué?</td>
<td>Las posibles estrategias de los estudiantes para esta pregunta serán, poner las dos fichas de $\frac{1}{4}$ sobre la ficha $\frac{1}{2}$ y sustentar que tienen la misma superficie porque “no sobra ningún pedacito”, también es posible que dibujen el contorno de las fichas, de tal forma que comparan sus áreas y afirman que son iguales, esto aun sin que el mismo conozca o este apropiado del concepto de área. Tal como se puede apreciar en las siguientes imágenes:
<table><tr><td>


</td><td>

</td></tr></table>
El propósito de la misma, es lograr un primer acercamiento a lo que son las fracciones equivalentes.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Pues mira, a estas fracciones se les llama fracciones equivalentes. Dos fracciones son equivalentes cuando representan la misma cantidad comparado con el mismo «todo», es por esto que las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son fracciones equivalentes.</td>
<td>el propósito de este enunciado es hacer un proceso de institucionalización donde el estudiante comprenda la noción de fracciones equivalentes.</td>
</tr>
</table>

A continuación, se les lee: **“Haciendo uso del material que la profesora te entregó, responde las preguntas 3 y 4.”**

<table>
<tr>
<td>3) Encuentra y representa simbólicamente otra fracción que sea equivalente a $\frac{1}{2}$</td>
<td> La posible estrategia de solución de los estudiantes para esta pregunta es que empiecen a comparar grandes cantidades de fichas, pero es de gran importancia que al menos en este punto se les explique que si se va a tomar más de una ficha para compararla con $\frac{1}{2}$, estas deben de ser iguales en tamaño. Por consiguiente, una vez los estudiantes tengan claro lo anterior, es posible que este empiece a bajar la ficha $\frac{1}{2}$ a lo largo del “rompecabezas” para ver con cuales de “las fichas tienen la misma cantidad” como, por ejemplo: $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$ o $\frac{5}{10}$.
Por otro lado, lado el propósito de esta es acercar al estudiante a la comprensión de las fracciones equivalentes, pues este ya hizo el proceso de institucionalización, lo cual se espera que desarrolle este punto teniendo en cuenta tal proceso realizado anteriormente. </td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>4) Encuentra otras fracciones equivalentes, por ejemplo, encuentra fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$ y escríbelas simbólicamente.
NOTA: puedes ayudarte haciendo el borde de las fichas que creas que representan fracciones equivalentes o si no, puedes superponer unas sobre otras.</td>
<td> En este punto puede pasar que el estudiante no intente buscar otras fracciones equivalentes, puesto que se le dio un ejemplo, en este caso el $\frac{1}{3}$, lo que implica una gran probabilidad que el estudiante realice la misma estrategia que usó en el punto o pregunta dos.
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>
Por otro lado, el propósito de la misma es que el estudiante haga uso de lo aprendido hasta el momento para salir de la fracción $\frac{1}{2}$ a otras. </td>
</tr>
</table>

5) Une con una línea cuáles de las siguientes fracciones son equivalentes: $\frac{2}{3}$ $\frac{8}{8}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{1}{2}$	***En este punto o pregunta, los estudiantes podrán manipular y observar las fracciones que se encuentra escritas en las fichas de manera simbólica y la relación con la cantidad (tangible) del material o espacio que ocupa la ficha, la cual representa la fracción descrita en cada una de ellas, lo que le permite al estudiante comparar e identificar cuáles de esas fracciones son equivalentes.*** ***El propósito de la misma, es poder evaluar si la noción de fracciones equivalentes es comprendida por los estudiantes o no.***

Finalmente se lee la frase: **¡Ya has terminado de responder todas las preguntas, pero para no olvidarlo, vas a escribir lo que aprendiste en tu cuaderno!** El objetivo de la misma es que los estudiantes piensen, den cuenta y escriban lo relacionado a las fracciones equivalentes, esto en las propias palabras del estudiante, del cual se puede abrir un espacio para que se comparta o socialice lo escrito por cada uno.

Referencias:

Llinares, C. & Sánchez, M. (1999). *Las fracciones: la relación parte-todo.* Madrid, España: Editorial Síntesis.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias.* (p. 80). Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2015). Derechos Básicos de Aprendizaje. Recuperado de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

ANEXO. Rompecabezas fraccionario.

Ficha del profesor de la cuarta actividad.

FICHA DEL PROFESOR:

Grado: 3º

Esta actividad se propone para grado tercero, pues en lo que respecta a la fracción, el estudiante al terminar tercer grado “describe situaciones de medición utilizando fracciones comunes” (Estándares Básicos de Competencias, 2006. p. 80); además, “comprende el uso de fracciones para describir situaciones en las que una unidad se divide en partes iguales” y “compara fracciones sencillas y reconoce fracciones que, aunque se vean distintas, representan la misma cantidad” (Derechos Básicos de Aprendizaje, 2015. p. 57)

Objetivos de la cuarta actividad / puntos que apuntan al objetivo:

- ✓ Reforzar nociones como «partes», «partes iguales» y «todo» / puntos 1, 2, 3, y 4 de la primera parte y los puntos 1 y 2 de la segunda parte.
- ✓ Afianzar en los diferentes sistemas de representaciones de la relación parte-todo de los números racionales, como: diagramas o dibujos, forma verbal, simbólica y escrita para la relación parte-todo de los números racionales en contexto continuo / puntos 3, 4 y 5 de la segunda parte.
- ✓ Que el estudiante comprenda que el «todo» se conserva, es decir, que la cantidad sigue siendo la misma sin importar que esta se haya dividido / puntos 5 y 6 de la primera parte.

Duración de actividad “Torre de arco iris”: 130 minutos.

Materiales por cada grupo de trabajo:

- Un tetero.
- Seis vasos pequeños (mínimo de 3 onzas) y cinco vasos grandes (mínimo de 5 onzas).
- Una botella de agua, mínimo de 600 ml.
- Colorantes vegetales (azul y rojo). No es necesario darle a cada grupo los tres tarritos de colorante, pues por cada grupo, solo se necesita aproximadamente de dos a tres gotitas por color, entonces, tal como se indican en las guías del estudiante, la o el docente, debe tener los tres tarritos de colorante y pasar por cada grupo repartiendo las gotitas.
- Cuchara plástica (esta debe ser lo suficientemente grande para que le permita al estudiante mezclar bien los líquidos que se les indica).
- Hoja de respuestas (hoja de block cuadriculada, el revés de la fichas o cuaderno de matemática), esto ya queda a criterio del docente.

- Lápiz, borrador y sacapuntas (son útiles escolares que el estudiante debe cargar, sin embargo, no está de más que el docente cargue estos por si algún grupo de trabajo no tiene).
- Aceite de cocina, jabón líquido, miel, alcohol.

  NOTA: *Para los casos del aceite de cocina, jabón líquido, miel y alcohol, debido a que cada grupo de trabajo necesita 2 onzas o 60 ml, es posible que el docente compre el tarro que tenga como mínimo la cantidad de líquido suficiente para repartir las 2 onzas del mismo a cada uno de los grupos de trabajo.*

Conocimientos previos: para el desarrollo de esta actividad se necesita que el estudiante tenga conocimientos previos del concepto de número entero positivo en el contexto de medida, maneje las operaciones básicas, reconozca la expresión «partes iguales» y «todo» en la relación parte-todo de los números racionales, que reconozca que las subdivisiones cubren el todo y que tenga por lo menos un primer acercamiento a las diferentes representaciones como: diagramas o dibujos, forma oral, y forma escrita para la fracción como parte-todo en contexto continuo.

Conceptualización y fundamentación matemática/teórica: En consonancia con los aportes de Llinares. S y Sánchez. M (1997), para el dominio de la relación parte-todo es necesario que el estudiante desarrolle algunos atributos, los cuales fueron estudiados por Piaget, Inhelder y Szeminka (1960), entre estos está el atributo 7 "el «todo» se conserva".

Además, la actividad "Torre de arco iris" fue diseñada teniendo en cuenta que desde la fenomenología didáctica "[..] para dividir sustancias, medidas por magnitudes, hay muchos métodos disponibles: fracturar puede ser […] comparar y corregir desempeña su papel si en general una sustancia medida por magnitudes tiene que ser distribuida; por ejemplo, un líquido en un numero de vasos congruentes en los que se compara las alturas del líquido." (Freudenthal, 1983/2001, p. 9).

Propósitos de cada pregunta que compone la actividad:

En general, se puede decir que la presente actividad "Torre de arco iris" está compuesta por dos momentos; El primer momento es una situación que consta de 6 preguntas o puntos, que permitan a los estudiantes recordar y fortalecer temas ya vistos como, por ejemplo: las expresiones «partes iguales» y «todo» en la relación parte-todo de los números racionales, además que las subdivisiones cubren el todo, y, por último, como propósito principal, que el estudiante reconozca que el «todo» se conserva.

Por otro lado, el segundo momento consta de construir una "torre de arco iris", la cual tiene como propósito fortificar los diferentes sistemas de representación de la relación parte-todo en un contexto continuo a través de 5 preguntas.

Antes de empezar, no está de más recordar al docente que debe mencionarles a los estudiantes que la actividad a trabajar se llama "Torre de arco iris", que para llevarse a cabo se deben organizar en grupos de tres integrantes, y una vez organizados, se les lee en voz alta la lista de materiales que van a necesitar y a continuación las indicaciones que aparecen en la ficha del estudiante antes del punto uno. Es importante aclarar a los estudiantes, que no solamente se pueden trabajar las fracciones con figuras, sino que también se pueden trabajar con líquidos, como en este caso.

NOTA: es importante que antes que los estudiantes intenten responder a la pregunta o punto uno, se les explique a qué hace referencia la palabra "onza" o "onzas", como, por ejemplo:

"Muchos de nosotros hemos tomado tetero, o tenemos un hermanito o un primito recién nacido que toma tetero y por lo general estos traen estas rayitas (se les muestra las rayitas de alguno de los teteros), esas rayitas indican la medida de leche que el niño toma varias veces al día, la cual va cambiando de acuerdo a lo sugerido por el médico dependiendo de la edad del bebé o niño"

Ahora sí, el propósito del **punto 1** *(Si pensamos en dividir las seis onzas de agua entre los seis vasos pequeños de agua, ¿Cuál sería el todo?)* es recordar la noción de «todo», pues en este caso, el «todo» o la unidad ya no es una superficie, es decir que la magnitud a trabajar implícitamente ya no es área, pues debido a que se trabajara con líquidos, la magnitud seria el volumen, es decir que el contexto o situación es diferente, lo que nos permitirá a su vez concretar si los estudiantes comprendieron lo que significa tal noción, en caso de que ningún niño logre determinar cuál es el todo, se debe pasar a explicarles.

En el **punto 2** *(¿Cuántas onzas de agua que hay en el tetero tendrían que echar en cada uno de los seis vasos para que estos tengan la misma cantidad?)* el propósito es recordar la noción de «partes iguales» desde la división (como operación básica).

Para el **punto 3** *(¿Cuáles son las partes del todo?)* el propósito es dar cuenta que el estudiante comprende y cuáles son las partes en tal contexto o situación.

Ahora, el propósito del **punto 4** *(¿Será que todas las partes están iguales?, ¿Por qué?)* es retomar nuevamente la noción de «partes iguales» desde la percepción y la manipulación de los objetos contenidos en el contexto o situación.

En el **punto 5** *(¿Qué creen que pasa si vuelven a echar el agua que hay en los vasos pequeños al tetero?, ¿será que vuelven a formar el todo, es decir, vuelven a obtener la misma cantidad de agua que se tenía inicialmente?, ¿Por qué?)* el propósito es dar cuenta desde lo que ellos creen o piensan sobre si las partes conforma el «todo».

Para el **punto 6** *(¿Al echar el agua de los vasitos al tetero pasó lo que ustedes respondieron en la pregunta 5?, ¿volvimos a obtener el todo?, ¿Por qué?)* el propósito también es dar cuenta del cubrimiento del «todo» a partir de la unión de todas partes, sin embargo, este ya se da a partir de la manipulación de los objetos contenidos en el contexto o situación.

No olvidar que cada punto debe ser socializado antes de pasar al siguiente, pues es importante que todos vayan a un mismo ritmo y poder aclarar todas las dudas que se vayan generando. Una vez se termine de socializar y resolver las dudas de los estudiantes, se puede pasar al segundo momento, donde se construye una "torre de arco iris", se deben seguir cada uno de los pasos que se mencionan en la guía del estudiante, por otro lado, para saber cuánto son dos onzas en los vasos grandes, se echan dos onzas de agua en el tetero y luego pasarlo al vaso, marcando con el Sharpie por donde queda el agua, indicándole a los estudiantes lo que se ha hecho, de esa forma se puede dar cuenta de la conservación de la magnitud, en este caso del volumen, este se puede hacer solo con un vaso (con el fin de mostrar a los estudiantes), pero, por cuestiones de tiempo invertido en este paso, es preferible que la profesora lleve todos los vasos ya marcados.

A continuación, se mencionan cada uno de los propósitos de los cinco puntos que componen el segundo momento.

El propósito del **punto 1** *(¿Cuál es el todo?),* es dar cuenta del reconocimiento por parte del estudiante del «todo» en la presente situación o contexto.

En el **punto 2** *(¿en cuántas partes lo dividieron?)* se busca dar cuenta de las partes por parte de los estudiantes en la situación "Torre de arco iris".

Para el **punto 3** *(¿cómo podrían representar por medio de diagramas o dibujos la cantidad de onzas de jabón líquido comparado con el todo?)* el propósito es fortalecer la representación gráfica de la relación parte-todo en el presente contexto.

Continuando, en el **punto 4** *(*con relación a todo el contenido en el tetero, ¿cuántas onzas hay de miel? *y ¿Cómo podrían representar esto en letras?),* el propósito es vigorizar la representación escrita de la relación parte-todo en el presente contexto, la cual a su vez permite afianzar la representación verbal en el momento de la socialización.

Ahora, en el **punto 5** *(Representa simbólicamente la cantidad de onzas de alcohol*), el propósito es reforzar la representación simbólica de la relación parte-todo en el presente contexto.

No está de más mencionar que cada uno de los puntos debe ser socializado.

NOTA: en los últimos cuatro puntos el profesor puede aprovechar la situación para retomar la equivalencia de fracciones, puesto que, por ejemplo, en el punto dos, el estudiante puede percibir que el «todo» se ha dividido en 10 «partes iguales», puesto que son 10 «partes» de una onza cada uno, sim embargo, también lo pueden percibir como que el «todo» se ha dividido en 5 «partes iguales», donde cada una de las «partes» tiene dos onzas cada uno, esto hace que en los distintos registros de representación existan dos posibilidades, pues todo parte de cómo percibe el estudiante cada una de las «partes», ya sea como $\frac{2}{10}$ o $\frac{1}{5}$

Finalmente, el propósito de la frase que aparece al final de la ficha del estudiante (¡Hemos terminado de responder todas las preguntas!, pero para no olvidar lo que aprendimos, cada uno en su cuaderno va a escribir lo que aprendió en el día de hoy) es acarrear al estudiante a que copie en su cuaderno lo que se le quedó de todo el trabajo realizado, de tal forma que permite saber si estos han captado o se ha podido cumplir con los objetivos de la actividad, además de que queda como insumo para el estudiante que le permitirá recordar al momento de leer lo que escribió.

Referencias:

Fandiño. M, (2009). Dificultades en el aprendizaje de las fracciones y didáctica de la matemática. *Las fracciones aspectos conceptuales y didácticos.* Colombia: Magisterio.

Llinares, C. & Sánchez, M. (1999). *Las fracciones: la relación parte-todo.* Madrid, España: Editorial Síntesis.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias.* (p. 80). Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2015). Derechos Básicos de Aprendizaje. Recuperado de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

Puig, L. (2001). Fracciones. En: *fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* [Didactical Phenomenology of Mathematical Structures]. Recuperado de: http://www.uv.es/puigl/cap5fracciones.pdf

Ficha del profesor de la quinta actividad.

FICHA DEL PROFESOR:

Grado: 3º

Esta actividad se propone para grado tercero, pues en lo que respecta a la fracción, el estudiante al terminar tercer grado "describe situaciones de medición utilizando fracciones comunes" (Estándares Básicos de Competencias, 2006. p. 80); además, "comprende el uso de fracciones para describir situaciones en las que una unidad se divide en partes iguales" y "compara fracciones sencillas y reconoce fracciones que, aunque se vean distintas, representan la misma cantidad" (Derechos Básicos de Aprendizaje, 2015. p. 57)

Objetivo de la actividad:

- ✓ Incorporar en la perspectiva de los estudiantes otro contexto, en este caso, la relación parte-todo de los números racionales desde un contexto discreto.

Además, un primer acercamiento en:

- ✓ Que el estudiante reconozca la unidad y las partes en un contexto discreto.
- ✓ Que el estudiante considere la separación y composición del todo en un contexto discreto.
- ✓ Que el estudiante registre las distintas representaciones de la relación parte-todo en un contexto discreto.

Duración de actividad "juego de canicas": 120 minutos.

Materiales por cada grupo de trabajo:

- 16 canicas (4 amarillas, 4 azules, 4 rojas y 4 blancas).
- Una tiza, preferiblemente blanca.
- Bolsa con papeles numerados del 1 al 4.
- Hoja de respuestas (hoja de block cuadriculada, el revés de la fichas o cuaderno de matemática), esto ya queda a criterio del docente.
- Es importante que el docente tenga en cuenta que al momento de los estudiantes jugar, deben estar en un campo abierto que les permita jugar libremente; este lugar puede ser el patio del colegio.

Conocimientos previos: para el desarrollo de esta actividad se necesita que el estudiante haya desarrollado los siete atributos propuestos por Piaget, Inhelder y Szemiska (1960) en un contexto continuo para la relación parte-todo de los números racionales, además manejar y poderse mover de un registro de representación a otro, teniendo en cuenta la representación por medio de diagramas o dibujo, forma oral, escrita y simbólica.

Conceptualización y fundamentación matemática/teórica: El diseño de la presenta actividad "juego de canicas" se hizo a partir del menester e importancia de incluir en un determinado momento de la secuencia de enseñanza al menos una actividad en contexto discreto, como consecuencia de incorporar en la perspectiva de los estudiantes otro contexto, en la relación parte-todo fuera de un contexto continuo, sin embargo no se deja de lado que dentro del mismo se pueden presentar algunas dificultades en los estudiantes.

Por lo anterior, la actividad se da a partir de un juego con canicas donde cada parte del «todo» o la unidad es un objeto discreto, puesto que, al considerar estas como un conjunto de objetos, se le hace más complicado al estudiante poder reconocerlas.

Finalmente, se hace uso de las canicas como material concreto teniendo en cuenta algunos ejemplos propuestos por Freudenthal en los que intenta clasificar los fenómenos de la relación parte-todo de los números racionales en un contexto discreto, entre estos una bolsa de canicas o con boles, que también son conocidas como las chaquiras para el cabello, pues la ventaja de estos materiales es que vienen de diferentes colores, lo que nos permite tomar ciertas cantidades de diferentes colores que conformen el todo.

"De una bolsa de canicas —todo definido discreto—, he sacado una décima parte […] De las mismas canicas que tengo frente a mí, quietas o rodando, estructuradas como una secuencia, tome arbitrariamente una décima parte […]" (Freudenthal, 1983/2001, p. 8)

Propósitos de cada pregunta que compone la actividad:

Al igual que todas las actividades precedentes a esta, se inicia mencionando a los estudiantes el nombre de la actividad, en este caso "juego de canicas".

Se leen las instrucciones y se les pide que en orden se organicen en grupos de cuatro participantes, además es importante que, para darle un orden a la posterior participación de cada una de las preguntas a seguir, se enumeren los grupos, es decir, grupo 1, grupo 2 y así sucesivamente.

Una vez que todos estén organizados por grupo y enumerados, se les lee los materiales que necesitan y a su vez se les hace entrega de las canicas, las cuales es recomendable entregárselas a todo el grupo en una cajita, tal como lo dice el enunciado que se encuentra después de las ilustraciones de los materiales que se mencionan en la ficha del estudiante (La profesora les hará entrega de una cajita con cuatro canicas de cada color para que las repartan como se mencionó anteriormente), por otra parte no olvidar el momento de socializacion de cada punto con los estudiantes.

Ahora, el propósito de la pregunta o **punto 1** (¿Cuál creen que es el todo?) es que el estudiante intente reconocer la <u>unidad o el «todo»</u> en otro contexto, es decir, en el contexto discreto.

En el **punto 2** (¿Cuántas partes componen el todo?) se tiene dos propósitos, que el estudiante reconozca las partes y comprenda que aun siendo en un contexto discreto, el todo está compuesto por elementos separables.

Para el **punto 3** (si separamos las canicas por color, ¿Cuántos subgrupos o grupitos saldrían?), el propósito es que el estudiante reconozca de manera implícita que un todo se puede dividir en un número determinado de partes sin importar que la unidad sea un conjunto de elementos u objetos discretos.

El **punto 4** (¿Cuál sería la fracción (simbólicamente) que representa la cantidad de canicas amarillas en comparación al todo?) tiene como propósito que el estudiante comprenda que, aunque los contextos son diferentes, es decir, el contexto continuo y el que se trabaja en esta actividad (contexto discreto), donde la unidad es vista y percibida de diferente forma, la representación simbólica es la misma. Para que el propósito anterior se cumpla, no es suficiente que el estudiante responda la pregunta 4, puesto que tal vez no sea visible para ellos, por lo que es deber del docente guiar la construcción de tal conocimiento, en la cual, una estrategia es mostrar el contraste entre dos situaciones donde los contextos son diferentes pero su representación simbólica es la misma, como el que se muestra a continuación:

	
He consumido tres partes de una torta, la cual he divido en 13 partes iguales.	He consumido tres golosinas de un paquete que traía un total de 13 golosinas.
En ambas situaciones la fracción (simbólicamente) es $\frac{3}{13}$, la cual representa la cantidad consumida en comparación al todo.	

A continuación, el docente se dirige junto con los grupos de trabajo hacia el campo abierto o patio del colegio; posteriormente se leen los pasos del juego a seguir. En el primero (cada participante mete la mano a la bolsa y saca un papelito. OJO: se saca sin ver) se les hace entrega a cada grupo de la bolsita con los papelitos para que cada estudiante ejecute la acción mencionada.

El propósito de números los estudiantes de cada grupo, es darle un orden a la actividad, puesto que es necesario realizar una distribución de tareas y evitar una discusión entre los estudiantes debido a que no se deciden quién hace qué cosa.

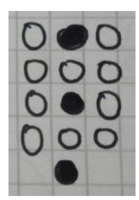
En el paso 2 (el participante que saque el número 1, trazara con la tiza el cuadrado en el piso) se les hace entrega de la tiza.

Y así sucesivamente se lee junto con los estudiantes los 5 pasos restantes, sin embargo, en este último paso (el participante número 4 leerá en voz alta la siguiente instrucción del juego: …) se le da un lapso de tiempo máximo de 5 minutos para que el estudiante lea la primera instrucción que aparece en la ficha del estudiante, una vez este tiempo haya transcurrido, es necesario que el docente la lea nuevamente, de tal forma que los estudiantes ejecuten la primera instrucción, sin embargo, antes de que el participante numero 2 la ejecute, el docente debe leer la instrucción 2 y posteriormente se da la orden para que los tres participantes restantes lo hagan. Una vez todos hayan ejecutado la instrucción 2, el docente lee la instrucción 3.

Antes de continuar leyendo, se les dice a los estudiantes que avisen cuando hayan terminado de jugar, es decir, cuando sepan cual es el ganador del grupo.

Una vez que se hayan determinado el ganador o los ganadores de cada grupo, se pasa a leer los dos párrafos que aparecen después de la instrucción 3.

Ahora, el propósito del **punto 5** (representa por medio de diagramas o dibujos la cantidad de canicas de color amarillo con las que quedaste comparado con las 16 canicas que se les entregó al inicio del juego.
SUGERENCIA: Si no quedaste con ninguna canica de ese color, entonces solo escribes “no tengo canicas de ese color”) es que el estudiante comprenda la forma de representación por medio de diagramas o dibujos en el contexto discreto, por ejemplo, continuando con la situación del paquete de 13 golosinas de las cuales he consumido 3, es posible realizarlas de la siguiente manera, sin embargo, es deber del docente analizar las representaciones de los estudiantes, pues todo depende de la creatividad de cada uno de ellos, ya que algunas pueden ser válidas:



Para el **punto 6** (escribe como se lee fracción que representa la cantidad de canicas de color rojo con las que quedaste comparado con las 16 canicas que se les entregó al inicio del juego) se tiene como propósito que el estudiante comprenda y desarrolle la representación escrita, la cual para ambos contextos (continuo y discreto) es el mismo.

En el **punto 7** (¿Será que si unen todas las canicas de cada uno de los cuatro participantes que componen el grupo, obtendremos nuevamente el todo?, ¿por qué?) el propósito es que el estudiante comprenda que el todo o la unidad siempre se conserva.

Finalmente, el propósito de la frase que aparece al final de la ficha del estudiante (**¡Han terminado de responder todas las preguntas!, pero para no olvidar lo que aprendieron, cada uno en su cuaderno va a escribir lo que aprendió en el día de hoy**) es impulsar al estudiante a que copie en su cuaderno lo que se le quedo de todo el trabajo realizado, de tal forma que permite saber si estos han captado o se ha podido cumplir con los objetivos de la actividad, además de que queda como insumo para el estudiante, que le permitirá recordar al momento de leer lo que escribió.

Referencias:

Fandiño. M, (2009). Dificultades en el aprendizaje de las fracciones y didáctica de la matemática. *Las fracciones aspectos conceptuales y didácticos.* Colombia: Magisterio.

Llinares, C. & Sánchez, M. (1999). *Las fracciones: la relación parte-todo.* Madrid, España: Editorial Síntesis.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias.* (p. 80). Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2015). Derechos Básicos de Aprendizaje. Recuperado de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

Puig, L. (2001). Fracciones. En: *fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* [Didactical Phenomenology of Mathematical Structures]. Recuperado de: http://www.uv.es/puigl/cap5fracciones.pdf

CAPÍTULO 4: ANALISIS DE LA IMPLEMENTACION DE LA PROPUESTA

El presente capítulo se compone de dos apartados: el primero, llamado "análisis de los resultados de la prueba final o evaluativa", y otro denominado "secuencia de enseñanza", en el cual se determina la manera en que el diseño e implementación de la secuencia de enseñanza facilitó a los estudiantes de grado tercero (3-1) de la Institución Educativa Jorge Robledo del Municipio de Vijes (Valle), la constitución del objeto mental número racional desde la relación parte-todo.

4.1 Análisis de la implementación de la entrevista

Para la delimitación de la población objeto de estudio, se diseñó una entrevista, la cual fue implementada o realizada a las profesoras de los grados terceros de la Institución Educativa Jorge Robledo del municipio de Vijes, esta corresponde al segundo momento de tal delimitación, donde su análisis arroja que el grupo con bajo nivel de desempeño académico y disciplinar en el grado tercero uno (3-1), sin embargo, en el presente apartado se expone el análisis de dicha entrevista con el fin de mostrar algunos patrones encontrados en las respuestas de las profesoras entrevistadas.

En correspondencia a la variable "diagnóstico del grupo" que corresponde al rendimiento académico y disciplinar de los estudiantes, particularmente, las profesoras a cargo de los grupos 3-1 y 3-2 relacionaban los bajos desempeños de estos estudiantes con la poca formación de ellas en el área de matemáticas, además, por ser una población con necesidades educativas, discapacidades sensoriales, motoras y cognitivas, también, por la poca escolarización de los padres de familia y su compromiso con la educación de sus hijos.

Con respecto a la variable "formación académica de la profesora", las encargadas de los grados 3-1 y 3-2 son licenciadas en educación básica con énfasis en orientación escolar y no tiene una formación en relación al área de matemáticas, sin embargo, la estrategia que manejan, según la profesora encargada del grado 3-1 es: *"lo que hacemos nosotras en los grados terceros, tenemos un equipo de trabajo con las profesoras, entonces tenemos una compañera que es magister en matemática*[13]*, que ella es la que nos orienta a las otras dos profesoras que estamos en el grado tercero en la parte de cómo trabajar matemáticas y tratamos de ir a la par"*.

Ahora, en relación a la tercera variable "la enseñanza de los números racionales", cabe resaltar que no hablan de números racionales, sino de fracciones, donde las profesoras encargadas de los grados 3-1 y 3-2, la enseñan únicamente la relación parte-todo para pasar a las operaciones de suma y resta de fracciones. Por ejemplo, la profesora encargada grado 3-1 ve la importancia de su enseñanza de la siguiente manera: *"las veo importantes como en esa parte, en la parte de repartir, en la parte de entender eso, allí las veo importantes, mas no necesarias en matemáticas", "¿son importantes?, sí, pero no relevantes, ni esenciales, las veo yo así, puede ser que yo este errada, por lo mismo, porque yo no tengo formación en esa parte, puede ser eso"*.

Por otro lado, la profesora encargada del grado 3-2 las ve importantes en el siguiente sentido: *"sí, son muy importantes, porque las encontramos en toda nuestra realidad, en todo nuestro contexto, y así tenemos que mostrárselo a los niños para que ellos le vean la importancia, cuando van a la tienda e inconscientemente la mamá le dice vaya traiga media de sal, entonces que él asocie sus conocimientos y lo que adquiere en la clase y los lleve a su contexto y allí se va a dar cuenta que los fraccionarios le van a servir para muchísimas cosas, no solo ahora pequeños, sino en todo el transcurso de su vida".*

---

[13] La profesora encargada del grado 3-3 es la única de esta que es licenciada en educación matemáticas y tiene una maestría en la misma.

Ahora, en relación al momento de enseñar “las fracciones” tal como se refieren las profesoras, hay que “*entender que hay un todo y que yo tomo una parte de ese todo, antes de meterme a decirles, esto se llama así, que numerador, que denominador, entonces como que entiendan que eso es un todo que lo conforma y que yo lo puedo dividir, que yo puedo tomar de esas partes*” (dice la profesora encargada del grado 3-1), así mismo, menciona que se hace mayor énfasis al colorear, “*tantas de tantos*”, es decir, con relación al sistema de representación gráfico de la relación parte-todo y luego pasan a suma y resta de fracciones homogéneas.

> […] *que a ellos les quede claro el concepto, lo que son, de donde salen, como nacen, como salieron, que ellos puedan identificar una fracción, la puedan representar, que ellos la puedan sumar, la puedan restar y paremos allí, ya el siguiente hace el otro paso en los otros grados.* (Entrevista a profesora encargada del grado 3-1).

Luego, por el lado de la profesora encargada del grado 3-3, reconoce que al abordar la relación parte-todo, es la primera forma de entrar a los números racionales y que además es posible verlos en la recta numérica, de la forma que este conjunto numérico “*no se aborda solamente en una clase, no hay una secuencia para dar cuenta realmente y llegar a las operaciones a través de apartados anteriores”.*

Así las cosas, en este apartado es posible observa las distintas creencias que tienen las docentes de matemáticas en relación al proceso de enseñanza-aprendizaje de los numero racionales.

4.2 Secuencia de enseñanza

Se diseñó una secuencia de enseñanza con el propósito de facilitar a los estudiantes de tercero uno (3-1) de la Institución educativa Jorge Robledo, la constitución del objeto mental número racional desde la relación parte-todo, para ello, se diseñaron cinco actividades que componen la misma.

Cada actividad diseñada, está orientada hacia unos objetivos, sin embargo, cada pregunta que compone a estas, va dirigida con respecto a un propósito, además, es importante resaltar que cada una contiene tanto la ficha del estudiante, como la del profesor.

La ficha del estudiante (en los anexos del presente trabajo de investigación de encuentra cada una de las fichas del estudiante) es aquella donde se encuentran las preguntas y ordenes (acciones que se le pide al estudiante que realice), esta va dirigida al estudiante, mientras que la ficha del profesor (al final del capítulo 3 del presente trabajo se encuentra cada una de las fichas del profesor), va dirigida únicamente al profesor, en la cual, este encontrará: los Estándares Básicos de Competencias y Derechos Básicos de Aprendizaje (versión 1) que sustentan la actividad, objetivos de la misma, posible duración (tiempo) de implementación, materiales, conocimientos previos del estudiante, conceptualización y fundamentación matemática/teórica de la actividad, propósito de cada pregunta que compone la misma, referencias y algunas presentan anexos.

En consecuencia, cada actividad diseñada se analiza a través del siguiente cuadro:

<table>
<tr><td>Actividad n°:</td><td colspan="4">Nombre de la actividad:</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">N° de la pregunta o punto de la Actividad.
Propósito de la pregunta o punto de la actividad</td><td colspan="3">N° DE ESTUDIANTES POR RESPUESTA</td></tr>
<tr><td>Respuesta válida</td><td>Respuesta inválida</td><td>Sin respuesta</td></tr>
<tr><td colspan="2">Punto 1.
(propósito)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">…</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Con relación a la valoración de las distintas formas de respuesta de los estudiantes, se considera lo siguiente:

- ✓ Respuesta válida: solo son aquellas cuya respuesta y argumentación son correctas.
- ✓ Respuesta inválida son aquellas que:
  - Respuesta correcta con argumento incorrecto.
  - Respuesta incorrecta con argumento correcto.
  - Respuesta incorrecta con argumento incorrecto.
- ✓ Sin respuesta: son aquellas donde no aparece la respuesta ni argumentación.

Es así como, en el siguiente apartado se presentan los resultados de la implementación de la secuencia de enseñanza con su respectivo análisis.

4.1.1 Análisis de los resultados de la implementación de la secuencia de enseñanza

PRIMERA ACTIVIDAD:

Se encuentra diseñada para trabajar en grupos de tres participantes, sin embargo, cada uno debía dar su respuesta.

Esta actividad está compuesta por nueve puntos, de los cuales, tres de ellos son acciones que se le piden a los estudiantes que realicen y seis son preguntas (preguntas 3, 4, 5, 6, 8 y 9), de las cuales, una vez los estudiantes las responden, se pasa a un momento de socialización entre los distintos grupos de trabajo.

En la implementación de la presente actividad se contó con la asistencia de 27 estudiantes, por lo que se formaron nueve grupos de tres participantes.

Objetivos de la primera actividad / puntos que apuntan al objetivo:

✓ Que el estudiante comprenda la propiedad de conservación para la magnitud de área / punto 5.

✓ Que el estudiante reconozca la expresión «partes iguales» de la relación parte-todo de los números racionales / puntos 3, 4, 5 y 6.

✓ Que el estudiante establezca la comparación entre las dos áreas / puntos 3 y 5 apuntan a la comparación entre partes, mientras que los puntos 8 y 9 apuntan a la comparación entre las partes y el todo.

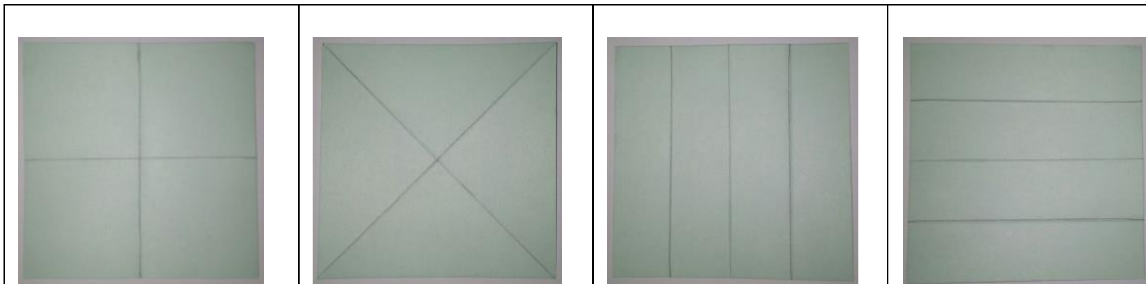
✓ Primer acercamiento al sistema de representación gráfico de la relación parte-todo de los números racionales / puntos 8 y 9.

Sugerencia: tener a mano la primera actividad al mismo momento de leer los análisis para comprender sobre lo que se habla en cada punto, pues en el siguiente cuadro no aparecen las preguntas, solo el propósito de cada una.

Actividad n°: 1	**Nombre de la actividad:** Doblando y cortando la cartulina.		
N° de la pregunta o punto de la Actividad. / Propósito de la pregunta o punto de la actividad	**N° DE ESTUDIANTES POR RESPUESTA**		
	Respuesta válida	**Respuesta inválida**	**Sin respuesta**
Punto 3. Permitir al profesor identificar que entienden los estudiantes por la expresión «partes iguales» y sobre la habilidad para comparar "áreas".	12	15	0
Punto 4. Acercar al estudiante a la noción de «partes iguales» no por forma, sino por cantidad de alguna magnitud.	18	7	2

Punto 5. Acercar al estudiante a la noción de «partes iguales» por cantidad de alguna magnitud y desarrollar habilidad en la comparación de áreas, del tal forma que comprenda la conservación de las mismas.	0	24	3
Punto 6. verificar o conocer si el estudiante reconoce la expresión «partes iguales» de la relación parte-todo	18	5	4
Punto 8. Comparación de áreas por parte del estudiante y primer acercamiento al sistema de representación gráfico de la relación parte-todo en un contexto continuo.	18	5	4
Punto 9. Comparación de áreas por parte del estudiante y primer acercamiento al sistema de representación gráfico de la relación parte-todo en un contexto continuo.	18	5	4

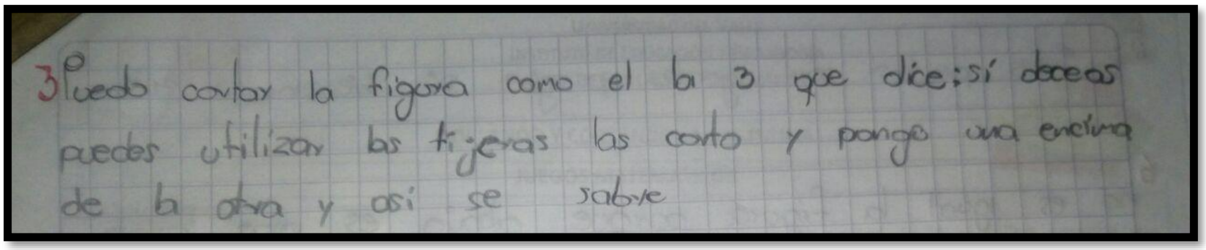
Teniendo en cuenta que, antes del punto 3, se les había pedido a los estudiantes que doblaran en cuatro partes iguales una cartulina cuadrada de color amarillo y trazaran líneas por los dobles, donde los más comunes fueron los siguientes:



Es por esto que, en la **interpretación de resultados del punto 3,** se tomaron como válidas de manera general las siguientes respuestas:

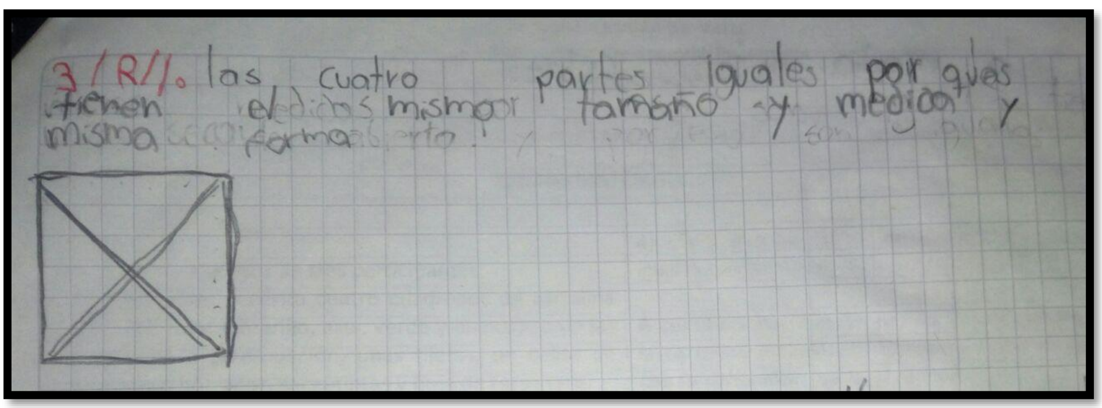
Tres estudiantes hacen relación a las cuatro partes iguales por superposición de las mismas, dado que se les permitió hacer uso de la tijera si la necesitaban, véase ejemplo en la figura 12.

Figura 12. Ejemplo de respuesta válida del punto 3 de la primera actividad.



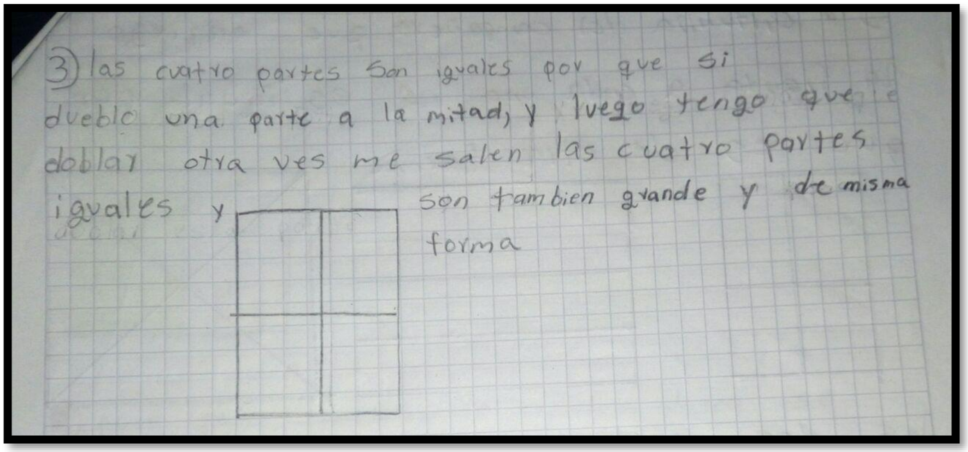
Cuatro de estudiantes hacen relación a las cuatro partes iguales porque tienen mismo tamaño, medidas y forma, como se aprecia en la figura 13.

Figura 13. Ejemplo de respuesta válida del punto 3 de la primera actividad.



Tres estudiantes hacen relación a las cuatro partes iguales porque doblaron a la mitad y de esa manera vuelven y doblan a la mitad. Veamos la figura 14.

Figura 14. Ejemplo de respuesta válida del punto 3 de la primera actividad.



Por último, dos estudiantes hacen relación a las cuatro partes iguales porque todas tienen iguales medidas de ancho y altura, algunos se ayudaron con la regla, aun sin ser este un instrumento de medición que se les hubiera sugerido para dar respuesta a esta pregunta.

Por otro lado, se consideró la respuesta de 15 estudiantes como inválidas, debido que tenían respuestas como:

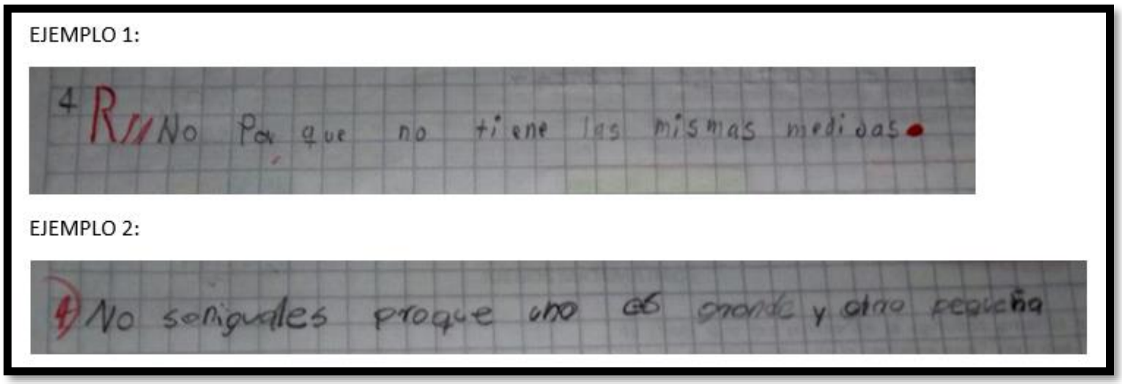
las cuatro partes son iguales porque:

- ✓ Tienen igual forma.
- ✓ Tienen igual figura.
- ✓ Tienen el mismo color.
- ✓ Tienen el mismo grande.

En relación a lo anteriormente expuesto, se puede decir que, aproximadamente el **44,4%** de los estudiantes tienen una idea más acertada sobre lo que significa “partes iguales” de una misma unidad, puesto que atienden en primera instancia a los relacionado con la cantidad de magnitud, mientras que, aproximadamente el **55,6%** de los estudiantes prestan atención es a la forma o figura de las partes.

Interpretación de resultados del punto 4: 18 estudiantes afirmaron que las partes de la cartulina azul no eran iguales a las partes de la cartulina amarilla, porque las primeras eras más grandes que las segundas respectivamente. Veamos dos ejemplos en la figura 15.

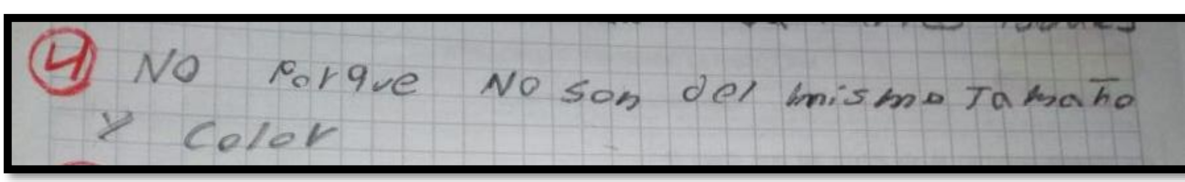
Figura 15. Ejemplo de respuesta válida del punto 4 de la primera actividad.



También es de notar que 5 de estos 18 estudiantes, se les acepta sus respuestas como válidas, sin importar que dentro de sus argumentos tengan en cuenta, el color de cada una de las partes de las unidades. (Ejemplo en la figura 16).

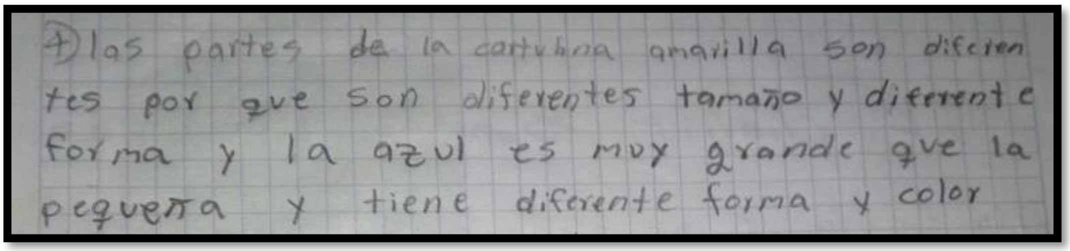
Es posible que lo anterior se deba a que estos estudiantes consideran dos cosas iguales solo si tienen las mismas características cualitativas y cuantitativas iguales, es decir, que sean idénticas, sin embargo, en el presente contexto, no se habla de cualquier cosa, se habla de partes iguales de la unidad en términos de las características de la relación parte-todo, es por esto que al final de la socialización de este punto, se les dijo a los estudiantes que en este caso, no se tenía en cuenta el color para determinar si las partes eran iguales y que más adelante veríamos el porqué.

Figura 16. Ejemplo de respuesta válida del punto 4 de la primera actividad (caso especial).



Por otro lado, a siete del total de estudiantes, se les considero su respuesta inválida, puesto que dentro de sus argumentos dicen que las formas de las partes no son la misma, lo cual es totalmente falso, pues ambas unidades (cartulina azul y cartulina amarilla) eran cuadradas y se les pidió que hicieran los mismo dobles con cada una, por lo tanto, sus partes si iban a ser iguales. Véase el siguiente ejemplo:

Figura 17. Ejemplo de respuesta inválida del punto 4 de la primera actividad.

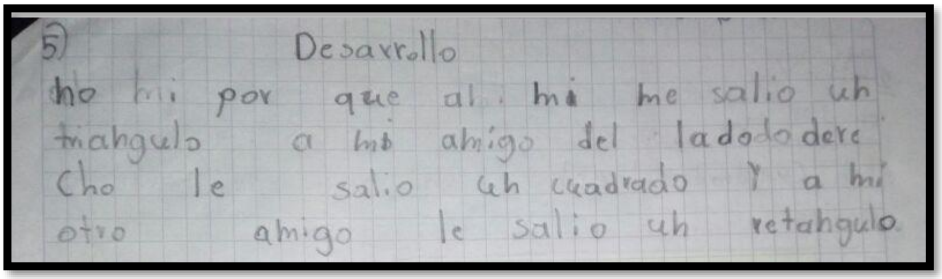


A los dos estudiantes restantes, no se les encontró respuesta del presente punto.

En este orden de ideas, se puede decir que: el **66,7%** de los estudiantes comprende que las partes no necesariamente deben de ser iguales al tener estas de igual forma o figura, esto a través de la comparación de áreas, el **25,9%** de los estudiantes afirman que las partes de ambas unidades son diferentes, pero su argumento es erróneo, por último, el **7,4%** de estos, no presenta respuesta alguna.

Interpretación de resultados del punto 5: 24 de 27 estudiantes respondieron en el punto 4 de la primera actividad que, sus partes no eran iguales con las de su compañero del lado (véase ejemplo en la figura 18), puesto que no tenían la misma forma, ni tamaño y a los otros 3 estudiantes no se les encontró ninguna respuesta.

Figura 18. Ejemplo de respuesta inválida del punto 5 de la primera actividad.



Lo anterior se observó después de socializar las respuestas entre todos los estudiantes, por lo que se pasó a proponerles que intentaran cortar una de las partes suyas para que quedara como una de las partes de su compañero o viceversa y se les mostró un ejemplo.

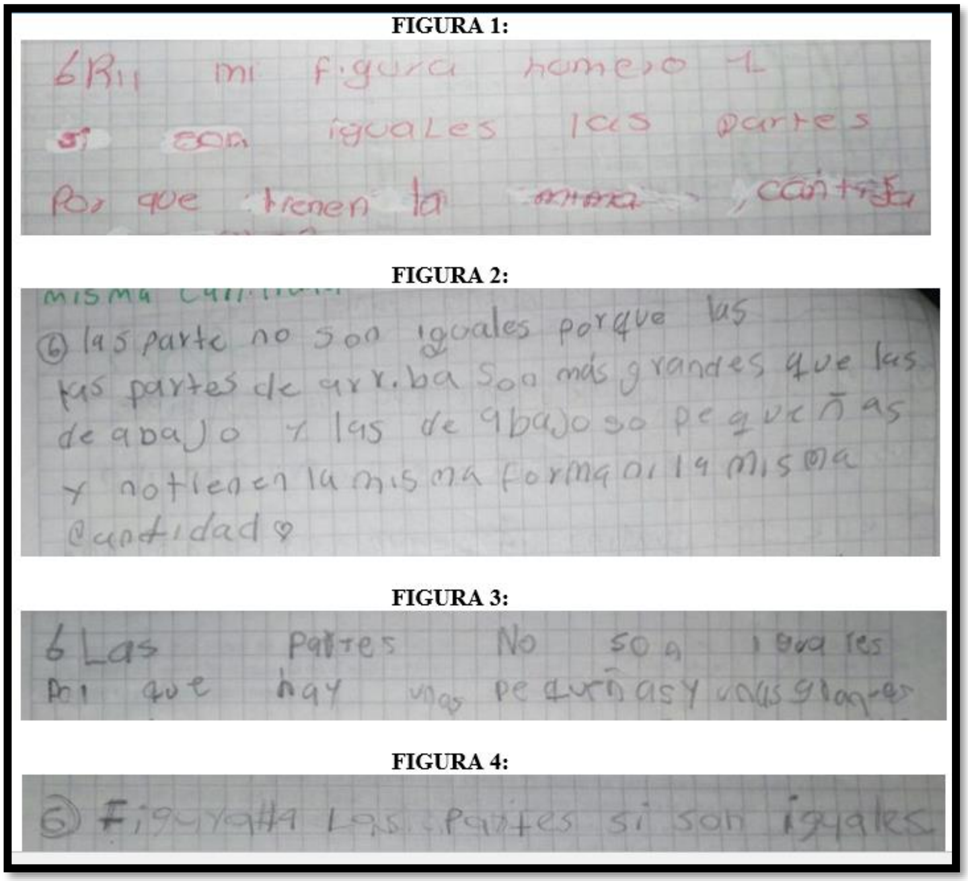
Una vez todos los estudiantes lograron hacerlo, empezamos a sacar conclusiones respecto a la forma, figura, tamaño y color, donde los estudiantes llegan a la conclusión que las «partes son iguales» cuando tienen la misma cantidad, porque cuando recortaron una de las partes para que quedara como la otra, se dieron cuenta que tenían la misma cantidad.

En este orden de ideas, se puede decir que el **88,9%** de los estudiantes no comprendía que las partes de la unidad eran iguales por cantidad de alguna magnitud. En este caso, de área. El otro **11,1%** de los estudiantes no presentaba respuesta alguna para este punto de la actividad.

Siguiendo con los resultados del punto 6, por cuestiones de tiempo se tuvo que entregar solo una figura (unidad) por estudiante, procurando que dentro de los grupos de trabajo formados no fueran a tener las mismas figuras, donde se obtuvo los siguientes resultados:

18 de 27 estudiantes respondieron correctamente con una argumentación considerada como correcta, véase en la figura 19 un ejemplo de respuesta por cada una de las figuras del punto 6 de la actividad.

Figura 19. Ejemplos de respuestas válidas del punto 6 de la primera actividad.



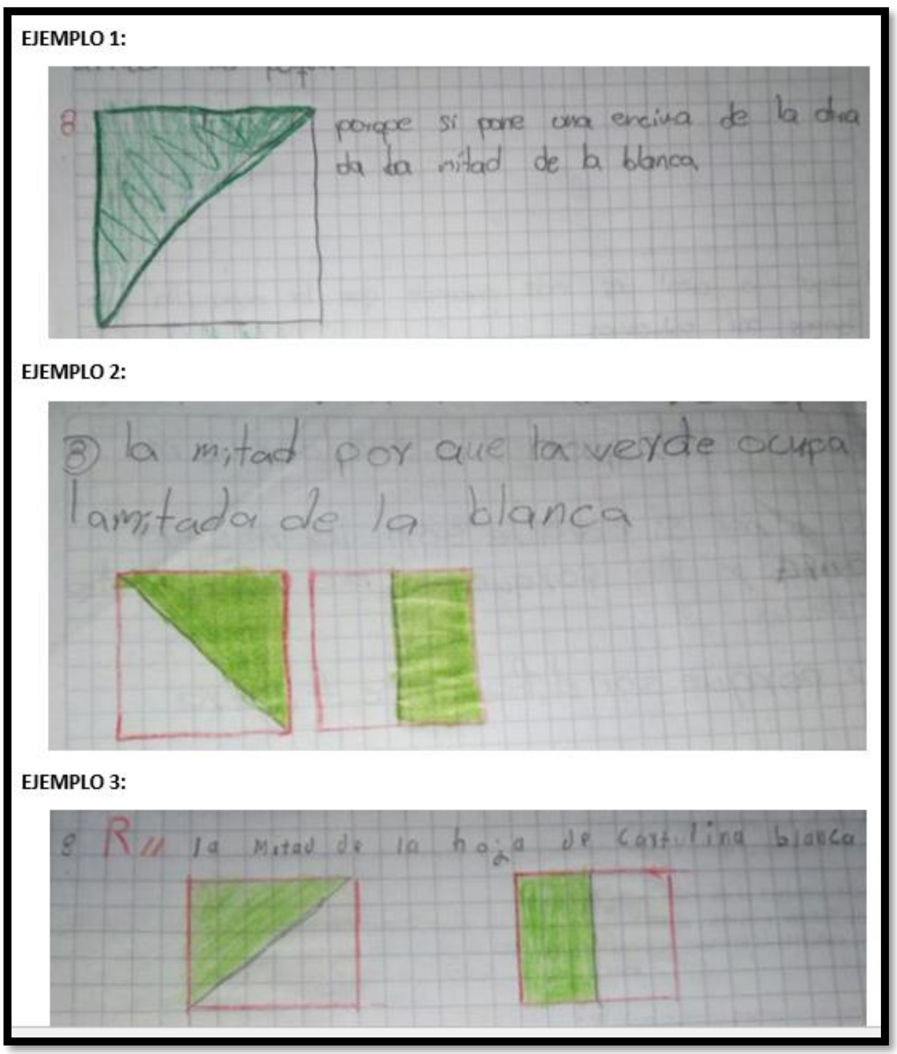
Por otro lado, 5 del total de estudiantes, respondieron incorrectamente, pues seguían hablando de figuras, formas e incluso de lados y a 4 estudiantes no se le encontró respuesta alguna a este punto.

Interpretación de resultados del punto 6: es posible afirmar que, de alguna manera, aproximadamente el **66,7%** de los estudiantes comprendieron que las partes de una unidad son iguales cuando tienen la misma cantidad de alguna magnitud, todo lo contrario, al **18,5%** de los estudiantes, pues al parecer no lo comprendieron y el resto, **14,8%** de estos, no presenta respuesta alguna.

Pasando **interpretación de resultados del punto 8:** se puede decir que aproximadamente el **66,7%** de los estudiantes, es capaz de estimar para hacer la comparación de las dos áreas, en este caso, comparando parte con el todo y también su representación gráfica.

Es de notar que, para este caso donde la respuesta correcta de todos los estudiantes fue: “la mitad”, se pudo observar que esta expresión ya hacia parte del conocimiento informal del estudiante, la cual, es posible que use con más frecuencia que “un tercio” o “un cuarto”, etc. (véase algunos ejemplos de respuestas válidas para este punto en la figura 20).

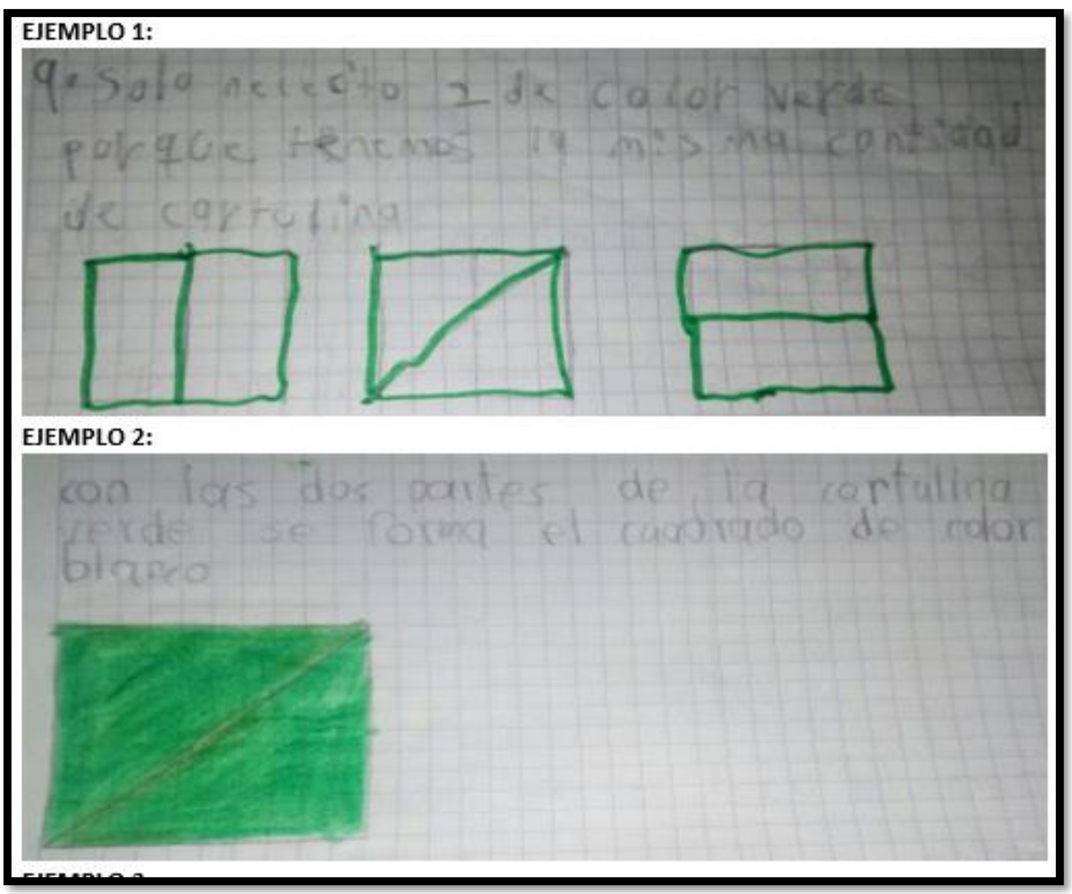
Figura 20. Ejemplos de respuestas válidas para el punto 8 de la primera actividad.



Por otro lado, aproximadamente el **18,5%** de los estudiantes presentaron respuestas incoherentes a lo que se les preguntaba, hablaban de partes sin especificar que partes, de cantidades, figuras, entre otras y el restante **14,8%** no presentaron respuesta alguna para este punto.

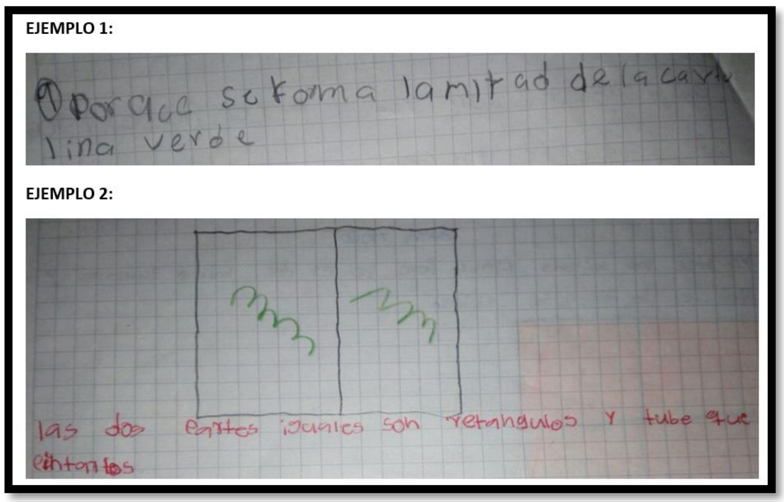
Finalmente, la **interpretación de resultados del punto 9:** según la información en el cuadro sobre los resultados de este punto, se puede decir que el **66,7%** de los estudiantes, es capaz de estimar para hacer la comparación de las dos áreas, en este caso, comparando en dirección contraria al punto 8, es decir, comparando el todo con las partes y también su representación gráfica. Véase un ejemplo de este en la figura 21.

Figura 21. Ejemplo de pregunta válida del punto 9 de la primera actividad.



Por otra parte, aproximadamente el **18,5%** de los estudiantes respondieron con argumentos incoherentes a lo que se les preguntaba, tal como se pueden apreciar algunos ejemplos en la figura 24. Además, al restante **14,8%** no se les encontró respuesta alguna sobre este punto.

Figura 22. Ejemplo de respuestas inválidas del punto 9 de la primera actividad.



Observaciones generales:

Durante la implementación y análisis de la presente actividad, se pudo percatar que alrededor de cinco estudiantes (de manera individual) usaron la misma terminología en todas las respuestas de los puntos de la misma, algunos de estos términos son: forma, tamaño, figura, entre otras, las cuales hacían que sus respuestas fueran inválidas dependiendo de la pregunta que se les hacía, pues esta terminología no era la más correcta.

Sin embargo, siempre que se socializaban las respuesta con los estudiantes se percató que estos corrigieran sus ideas erróneas, pero al socializar la respuesta de la pregunta siguiente se notaba que seguían usando esta misma terminología inadecuada, por lo que queda en incognito el motivo por el cual estos estudiantes seguían repitiendo el mismo error, pues es probable que no tenga relación alguna con la complejidad del concepto, el diseño de la actividad o con el modo de enseñanza, sino que se puede encontrar más relacionado con un problema de distracción, comprensión, desinterés, o por indisciplina, como también es posible que sea por otra razón no mencionada.

Por otro lado, con respecto al diseño de la actividad, se tenía previsto para la implementación de la misma un tiempo máximo de 120 minutos, sin embargo, debido a la indisciplina de algunos estudiantes, se tardó un poco su ejecución, por lo que en ultimas, la actividad fue implementada completamente en un tiempo de 140 minutos.

A pesar de estos vacíos con relación a los bajos resultados y rendimiento académico durante el desarrollo de la actividad de algunos estudiantes, se estima que alrededor del **67%** de los 27 estudiantes cumplieron con los objetivos planteados de manera afortunada.

SEGUNDA ACTIVIDAD:

Se encuentra diseñada para trabajar en grupos de cuatro participantes (estudiantes), para dar única respuesta a cada punto entre todos.

Esta actividad está compuesta por once preguntas, de las cuales, tres de estas se encuentran en la ficha del estudiante y las otras ocho se encuentran en las cartas que se les entregó para que jugaran con la ruleta que habían construido (estas preguntas se encuentran escritas en la ficha del profesor, en la parte de los materiales), las cuales una vez los estudiantes las responden, se pasa a un momento de socialización entre los distintos grupos de trabajo.

En la implementación de la presente actividad se contó con la asistencia de los 28 estudiantes, por lo que se formaron siete grupos de cuatro participantes.

Objetivos de la segunda actividad / puntos que apuntan al objetivo:

✓ El estudiante reconozca que, las subdivisiones cubren el todo, es decir, la unión de las partes conforma el todo / pregunta 8 de las cartas de la ruleta.

✓ Que el estudiante comprenda que, el número de partes no coinciden con el número de dobleces o cortes (en el caso de la figura circular, los cortes o dobleces se hace por cualquiera de los **diámetros** de la misma. OJO: diámetro, no radio). Esto sucede como caso particular en la partición equitativa de áreas o superficies / puntos 1, 2 y 3 de la ficha del estudiante.

✓ Un primer acercamiento por parte de los estudiantes a los diferentes sistemas de representaciones de la relación parte-todo, tales como: diagramas o dibujos, forma verbal, simbólica y escrita para la relación parte-todo de los números racionales en contexto continuo / preguntas 2, 3, 5, 6 y 7 de las cartas de la ruleta.

✓ Evaluar si el estudiante reconoce las partes de la unidad y la misma, también llamado como “el todo” / preguntas 1 y 4 de las cartas de la ruleta.

Sugerencia: tener a mano la segunda actividad al mismo momento de leer los análisis para comprender sobre lo que se habla en cada punto, pues en el siguiente cuadro no aparecen las preguntas, solo el propósito de cada una.

Actividad n°: 2	**Nombre de la actividad:** Ruleta matemática		
N° de la pregunta o punto de la Actividad. / Propósito de la pregunta o punto de la actividad	**N° DE ESTUDIANTES POR RESPUESTA**		
	Respuesta válida	**Respuesta inválida**	**Sin respuesta**
PREGUNTAS DE LA FICHA DEL ESTUDIANTE			
Punto 1.	28	0	0

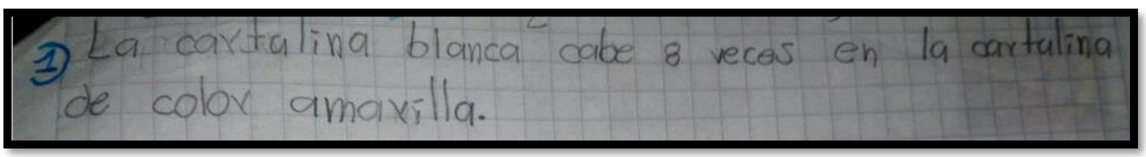
Observar y determinar la habilidad y el conocimiento informal que el estudiante posee acerca de la comparación de áreas.			
Punto 2. Tiene como propósito que, los estudiantes tengan claro la cantidad de veces que debieron doblar la cartulina para obtener un número determinado de partes, de tal forma que les permita responder con claridad el punto 3.	28	0	0
Punto 3. Que el estudiante de cuenta que el número de dobleces o cortes es diferente al número de partes que se desea obtener de la unidad o todo.	16	12	0
PREGUNTAS DE LAS CARTAS DEL JUEGO DE LA RULETA			
Pregunta 1. Evaluar que el estudiante reconoce las partes de la unidad o todo.	28	0	0
Pregunta 2. Evaluar si el estudiante domina la representación gráfica de la relación parte-todo.	20	8	0
Pregunta 3. Evaluar si el estudiante domina la representación simbólica para la relación parte-todo.	24	4	0
Pregunta 4. Evaluar que el estudiante reconoce la unidad o el todo.	28	0	0
Pregunta 5. Evaluar la capacidad de comparar las partes con el todo a través de la representación escrita.	20	4	4
Pregunta 6. Que el estudiante de cuenta de la representación verbal, pues en la parte de la socialización ellos deben leerla, y es aquí donde cumple con el propósito de la pregunta.	12	8	8
Pregunta 7. Evaluar la capacidad de los estudiantes para pasar del sistema de representación simbólica al sistema de representación de forma verbal.	28	0	0
Pregunta 8.	28	0	0

Que el estudiante de cuenta que la unión de las partes cubre el todo o la unidad.			

Interpretación de resultados de puntos de la ficha del estudiante:

Interpretación de resultados del punto 1: en este punto, el **100%** de los estudiantes logró realizar la estimación de las veces que cabía la cartulina blanca en la de color de manera satisfactoria. Durante la implementación se pudo percibir como los estudiantes estimaron a través de la superposición, dando la respuesta correcta. Véase un ejemplo de respuesta válida a este punto en la figura 23.

Figura 23. Ejemplo de respuesta válida del punto 1 de la segunda actividad.



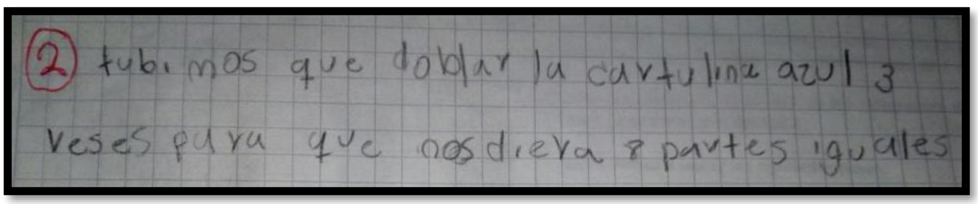
Interpretación de resultados del punto 2: para esta pregunta, se les explicó a los estudiantes una manera de hacer los dobleces, se les dijo que doblaran a la mitad, abrieran y contaran las partes que les había salido, si era menos de ocho, volvieran a cerrarlo por la mitad como la tenían y de esa forma volvieran a doblar nuevamente por la mitad, hasta ahí habrían doblado dos veces, volvían a contar las partes y si era menor a ocho, repetían en mismo procedimiento hasta obtener las ocho partes. Véase la explicación en el siguiente cuadro.

NUMERO DE DOBLECES	COMO SE OBSERVA LA CARTULINA	NUMERO DE PARTES
1		2

2		4
3		8

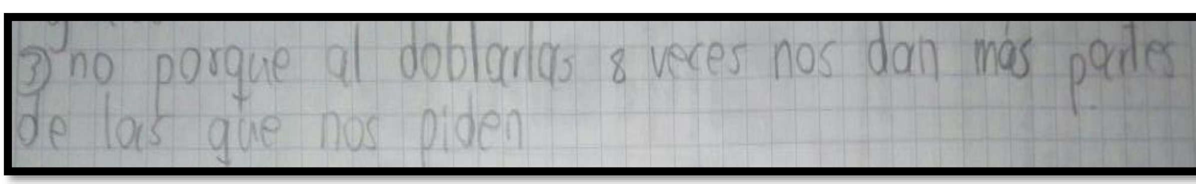
De esta manera, pasaron a hacerlo los estudiantes, donde todos estos respondieron correctamente, es decir, el **100%** de los estudiantes cumplió con el propósito planteado. Véase un ejemplo de respuesta válida para este punto en la figura 24.

Figura 24. Ejemplo de respuesta válida del punto 2 de la segunda actividad.



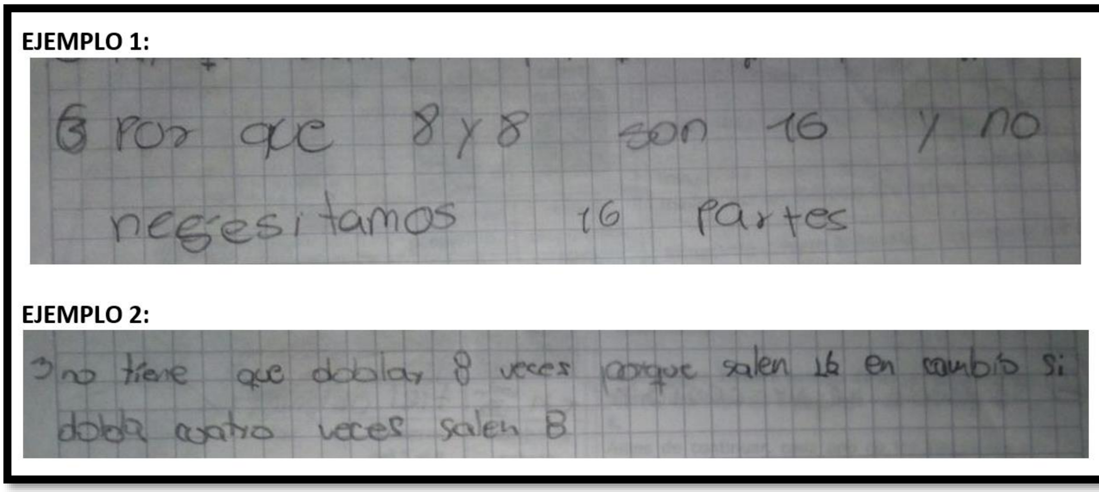
Interpretación de resultados del punto 3: en este punto, solo 16 de 28 estudiantes, es decir, aproximadamente en **57 %** de estos, lograron dar una respuesta válida para este punto (véase ejemplo de respuesta válida para este punto en la figura 25), puesto que el restante **43%**, respondieron correctamente, pero sus argumentos tenían errores.

Figura 25. Ejemplo de respuesta válida del punto 3 de la segunda actividad.



A pesar de lo anterior, se puede decir que posiblemente este 43% de estudiantes, comprendían que el número de dobleces era distinto al número de partes, pero su error radica al estimar una cantidad errónea de partes iguales de la unidad para una cantidad de 8 dobleces de la misma. Véase algunos ejemplos de este tipo de respuestas en la figura 26.

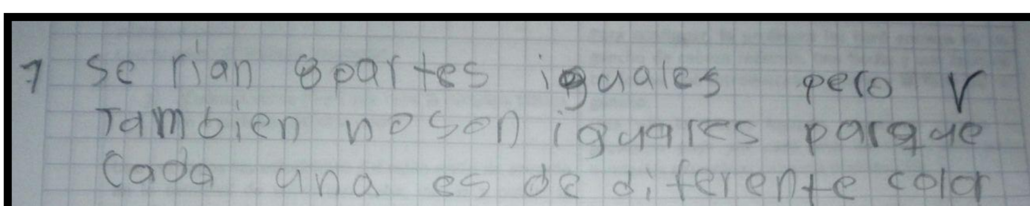
Figura 26. Ejemplos de respuestas inválidas del punto 3 se la segunda actividad.



Interpretación de resultados de preguntas de las cartas del juego de la ruleta matemática:

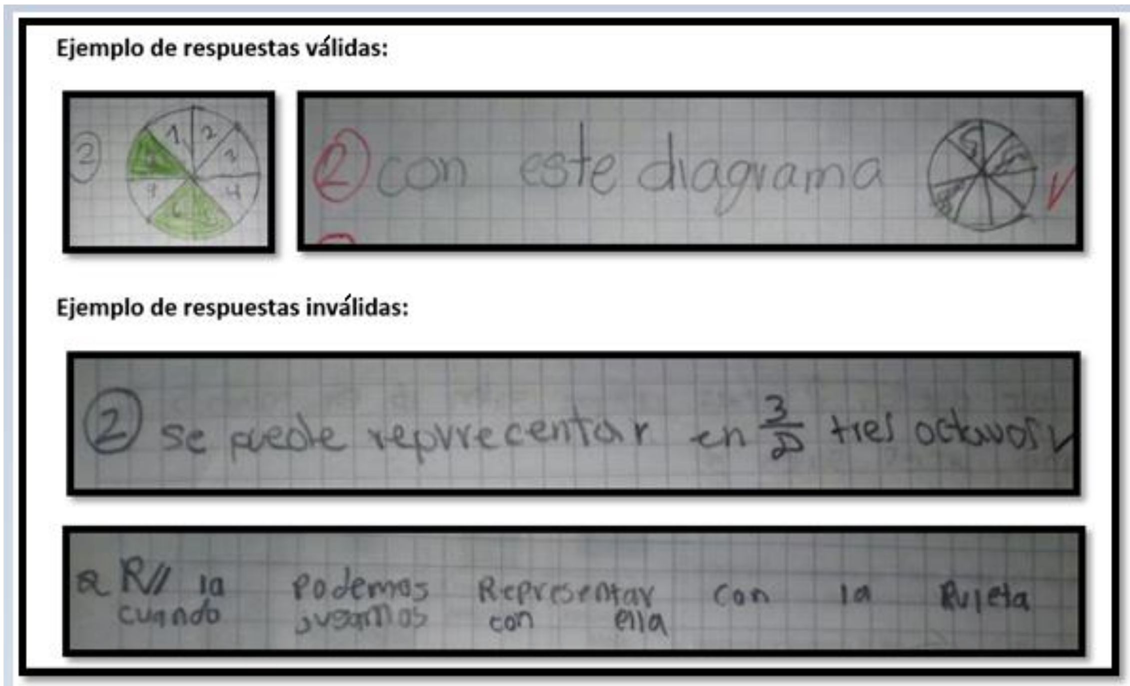
Interpretación resultados de la pregunta 1: se puede decir que el **100%** de los estudiantes reconoce cuales son las partes de la unidad, pues sus respuestas son totalmente válidas, sin embargo, cabe destacar un grupo de 4 estudiantes, de los cuales se puede evidenciar que aún no comprenden a lo que se refiere “partes iguales”, puesto que siguen insistiendo que no son iguales porque no tienen el mismo color (véase figura 27).

Figura 27. Ejemplo de respuesta que evidencia falta de comprensión de la expresión “partes iguales” en la relación parte-todo de los números racionales.



Interpretación de resultados de la pregunta 2: se puede decir que el **71%** de los estudiantes domina la representación gráfica, mientras que el **29%** presenta falencias para representar a través de dibujos o diagramas (véase ejemplos de respuestas en la siguiente figura).

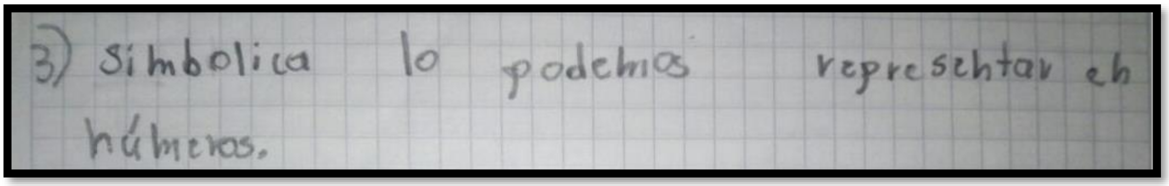
Figura 28. Ejemplos de respuestas válidas e inválidas de la pregunta 2 de la segunda actividad.



Interpretación de resultados de la pregunta 3: es posible de decir que, de alguna manera, aproximadamente el **86%** de los estudiantes, es capaz de representar simbólicamente la relación parte-todo, pues en sus respuestas no se encontró ninguna inconsistencia.

Por otro lado, el restante **14%** no muestra la representación simbólica pedida en su respuesta, sin embargo, reconoce que esta hace alusión a una representación a través de números. Es posible que la respuesta de este grupo de estudiantes se deba a una mala formulación de la pregunta, ya que, desde otro punto de vista, su respuesta parece ser desde un razonamiento lógico. Véase el ejemplo en la siguiente figura.

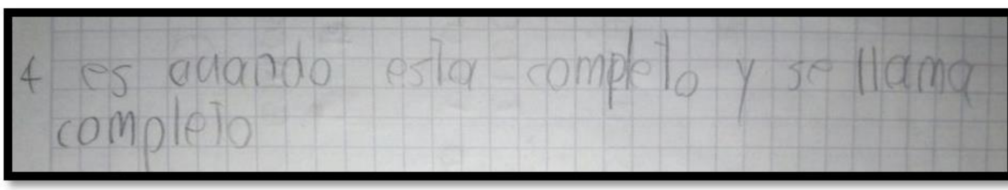
Figura 29. Ejemplo de respuesta inválida de la pregunta 3 de la segunda actividad.



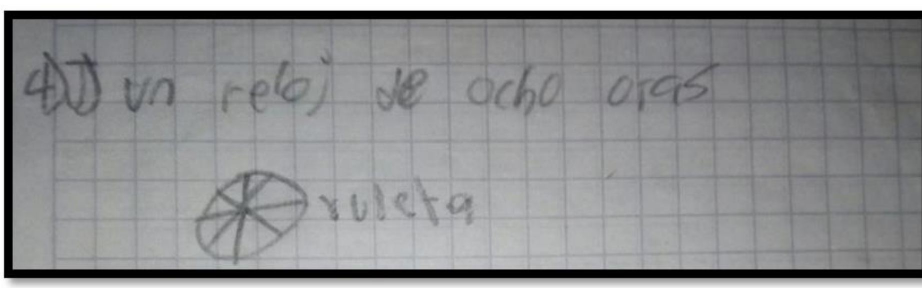
Interpretación de resultados de la pregunta 4: las respuestas del **100%** de los estudiantes en este punto, fue considerada válida, pues de alguna manera, en el contexto de la ruleta, los estudiantes reconocen sin ningún problema cual es la unidad o el todo. Véase algunos ejemplos de respuestas válidas en la figura 30.

Figura 30. Ejemplos de respuestas válidas de la pregunta 4 de la segunda actividad.

EJEMPLO 1:



EJEMPLO 2:



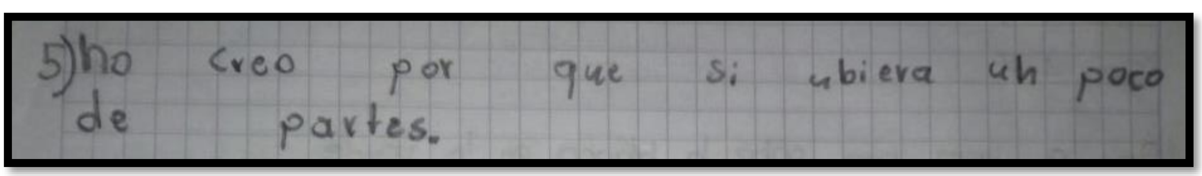
En el primer ejemplo se percibe que el estudiante entiende el todo como la unión de todas las partes, es por esto que lo llama completo y en el segundo ejemplo, el todo en la situación es la ruleta, y el otro nombre que le podrían dar es un reloj de ocho horas, puesto que esta unidad estaba compuesta por ocho partes iguales.

Interpretación de la pregunta 5: según la información obtenida en el cuadro donde se sintetizan los resultados de la presente actividad, se puede decir que, aproximadamente el **71,4%** de los estudiantes es capaz de comparar las partes con el todo a través de la representación escrita.

Es probable que, de alguna manera, dentro de un proceso cognitivo hayan tenido que hacer primero el paso de la representación escrita, a una representación simbólica, para posteriormente hacer contraste con el material concreto que se les suministró y poder responder correctamente esta pregunta.

Por otro lado, un grupo (cuatro estudiantes) equivalente al **14,3%** aproximadamente, no dieron una respuesta considerada como válida, debido a que se percibe una inconsistencia con respecto a una de las características de la relación parte-todo en correspondencia al número determinado de partes, es decir que el estudiante no considera la situación como un caso particular donde la unidad solo ha sido separada o dividida en ocho partes iguales (véase respuesta en la siguiente figura).

Figura 31. Ejemplo de respuesta inválida de la pregunta 5 de la segunda actividad.

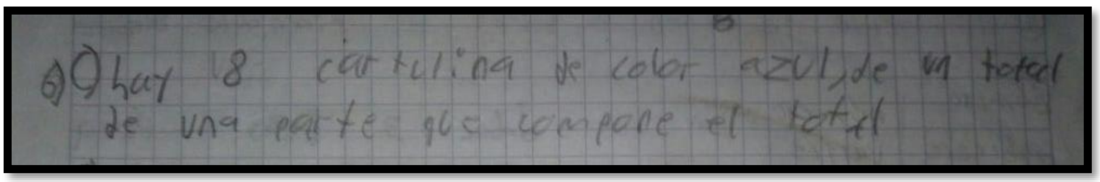


Finalmente, el restante **14,3%** de los estudiantes no presenta respuesta alguna para esta pregunta de las cartas administradas para la presenta actividad.

Interpretación de resultados de la pregunta 6: aproximadamente el **43%** del total de los estudiantes completó correctamente la frase, de tal forma que evidencian representación escrita de la situación, además, en la socialización, también se pudo evidenciar el manejo de la representación verbal de la misma.

Por otra parte, el **28,5%** de los estudiantes respondió erróneamente, puesto que no consideran la situación que se está trabajando como un caso particular para responder la pregunta, es decir, no hacen uso del material concreto (la ruleta) para completar la frase respecto a este. Véase ejemplo de respuesta en la siguiente figura:

Figura 32. Ejemplo de respuesta inválida de la pregunta 6 de la segunda actividad.

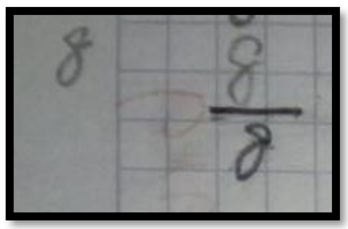


Interpretación de resultados de la pregunta 7: con respecto a las respuestas de los siete grupos, que corresponde al **100%** de los 28 estudiantes, se puede decir que todos estos, fueron capaces de representar la relación parte-todo tanto verbalmente como escrita de manera satisfactoria. En este punto no se encontró ningún tipo de dificultad por parte de los estudiantes, tampoco ninguna inconsistencia en sus respuestas, pues la respuesta de todos estos fue: "un octavo".

En este mismo orden, en la **interpretación de resultados de la pregunta 8**, se puede decir que: todos los estudiantes, es decir, el **100%** de estos, da cuenta de la cantidad de partes iguales que componen la superficie de la ruleta, en este caso, son ocho partes, lo cual indica que sus respuestas son válidas, donde a su vez nos permite decir que el estudiante comprende que la unión de las partes cubre el todo.

Por otro lado, llama la atención la respuesta proporcionada por el **14%** de los estudiantes que se encuentra en el 100% anteriormente descrito, pues si se observa la pregunta (la cual se encuentra en la ficha del profesor, como ya se había mencionado al inicio), es posible que cuando estos estudiantes respondieron con la fracción $\frac{8}{8}$, se hayan referido a 8 partes de las 8 que componen la ruleta. Sin embargo, esto queda en duda, pues en el momento de la socialización, los estudiantes respondieron verbalmente "ocho partes". Véase respuesta en la figura 33.

Figura 33. Caso particular de respuesta válida de la pregunta 9 de la segunda actividad.



Observaciones generales:

Durante la implementación, se pudo notar la felicidad, el ánimo, diversión y empeño de los niños (estudiantes) durante toda la actividad, tanto en la construcción de la ruleta, como el momento en que jugaron con ella.

Por lo anterior, es posible decir que a los estudiantes les gusta cuando aprenden a través de material concreto (material manipulativo), donde las matemáticas y el juego son el dúo perfecto para que los niños le "cojan amor" a esta área, y dejen atrás el mito de "las matemáticas son muy difíciles y aburridas".

El análisis realizado de los resultados de esta segunda actividad, nos permite decir que en un promedio de aproximadamente el **86%** de los estudiantes, logro cumplir con el propósito de cada una de las preguntas que compone la actividad, lo que a su vez conlleva al cumplimiento de los objetivos propuestos para la misma.

Por otro lado, con relación al tiempo de implementación, fue posible realizar tal ejecución en un tiempo máximo de 210 minutos como se tenía escrito en la ficha del profesor de la presente actividad, sin embargo, este tiempo se distribuyó en 3 días, donde cada día se trabajó 70 minutos con los niños, de la cual, la primera sesión (construcción de la ruleta) se hizo en un día y la segunda sesión se llevó a cabo en los dos días siguientes. (véase en la siguiente figura, algunos registros fotográficos tomados durante la implementación de la misma).

Figura 34. Registros fotográficos tomados durante la implementación de la segunda actividad.

TERCERA ACTIVIDAD:

La tercera actividad se encuentra diseñada para trabajar de manera individual, además está compuesta por cinco puntos, los cuales se encuentran en la columna derecha de la ficha del estudiante, los cuales, una vez los estudiantes responden a las preguntas o puntos, se pasa a un momento de socialización entre todos los estudiantes.

Por otro lado, antes de interpretar los resultados de las respuestas de los cinco puntos que se encuentran en la columna izquierda, primero se menciona sobre cómo se llevó a cabo unos enunciados que proporcionan información y ayudan al estudiante a poder responder la pregunta del punto 1 de mejor manera, estos enunciados se encuentran en la columna derecha de la ficha del estudiante.

Cabe mencionar que, en la implementación de la presente actividad se contó con la asistencia de 25 estudiantes.

Objetivos de la tercera actividad / puntos que apuntan al objetivo:

- ✓ Que el estudiante comprenda que, un «todo» está compuesto por elementos separables / enunciados de la columna derecha de la ficha del estudiante y punto 1.
- ✓ Que el estudiante comprenda que el «todo» se puede dividir en un número de partes pedido / enunciados de la columna derecha de la ficha del estudiante y punto 1.
- ✓ Que el estudiante reconozca fracciones equivalentes / puntos 2, 3, 4 y 5.

Sugerencia: tener a mano la tercera actividad al mismo momento de leer los análisis para comprender sobre lo que se habla en cada punto, pues en el siguiente cuadro no aparecen las preguntas, sólo el propósito de cada una.

Actividad n°: 3	**Nombre de la actividad:** Rompecabezas fraccionario.			
N° de la pregunta o punto de la Actividad. / Propósito de la pregunta o punto de la actividad		**N° DE ESTUDIANTES POR RESPUESTA**		
		Respuesta válida	**Respuesta inválida**	**Sin respuesta**

Punto 1. Tiene como propósito que el estudiante de cuenta que toda unidad se puede dividir, además, que esta misma puede hacerse en un número determinado de partes, en el caso de las superficies.	25	0	0
Punto 2. Lograr un primer acercamiento a lo que son las fracciones equivalentes**.**	19	5	1
Punto 3. Acercar al estudiante a la comprensión de las fracciones equivalentes, pues este ya hizo el proceso de institucionalización, lo cual se espera que desarrolle este punto teniendo en cuenta tal proceso realizado anteriormente.	15	9	1
Punto 4. Evaluar la capacidad del estudiante para encontrar otras fracciones equivalentes.	9	14	2
Punto 5. Evaluar la capacidad del estudiante para encontrar fracciones equivalentes a través de la comparación de áreas, haciendo uso del material concreto.	24	0	1

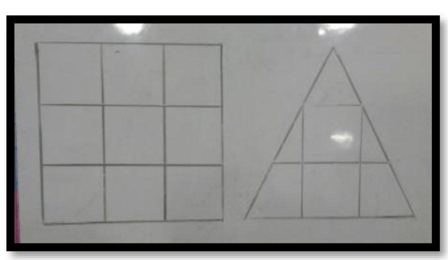
Debido a que el propósito del punto 1 es que el estudiante de cuenta que toda unidad o todo (como caso particular, una superficie) es posible dividirla, además, que esta misma puede hacerse en un número determinado de partes, se propusieron unos enunciados donde se muestra y explica de alguna manera a los estudiantes sobre qué es una superficie o "cara" de un objeto, mostrando algunos ejemplos donde estas (ejemplo: superficie circular, cuadrada y triangular) son divididas en un número grande de partes a través del software matemático interactivo, llamado geogebra.

Antes de mostrar dichos ejemplos en el software, se les preguntó a los estudiantes en cuantas partes creen que se puede dividir una cara o superficie, por lo que empezaron a dar números al azar, donde el número con mayor valor fue 982, es posible que esto haya sucedido por la siguiente razón, los estudiantes solo dominaban los números enteros positivos hasta el 999 (números con tres cifras).

Posteriormente, sin decirle a los estudiantes si sus respuestas eran correctas o no, se pasa a mostrarles los recursos dinámicos. El proceso de implementación de la actividad se llevó a cabo tal como se tenía propuesto en la ficha del profesor de la misma, es por esto que, al mostrarles el ejemplo de la división en partes iguales de una superficie circular, se les pregunta si es posible seguir dividiendo el mismo, puesto que el recurso solo mostraba su división hasta 96 partes, por lo que todos se quedaron callados pensando y alguno de los estudiantes afirmaban que sí y que las partes se iban poniendo más pequeñas.

Una vez se llegó a la presentación de los últimos ejemplos sobre la división en partes iguales de superficies triangulares, se les pregunto ¿por qué creen que el triángulo no se puede dividir como el cuadrado en líneas verticales y horizontales?, mostrándoles en el tablero, tal como aparece en la figura 35 (es importante mostrarles a los estudiantes las figuras con sus respectivas divisiones tal como aparece en la figura 35, puesto que la pregunta puede interpretarse de varias formas), donde varios de los estudiantes decían “porque las partes no quedarían iguales”, lo cual permite aseguran de alguna manera que estos dan cuenta de las “partes iguales” para cualquier tipo de superficie o área.

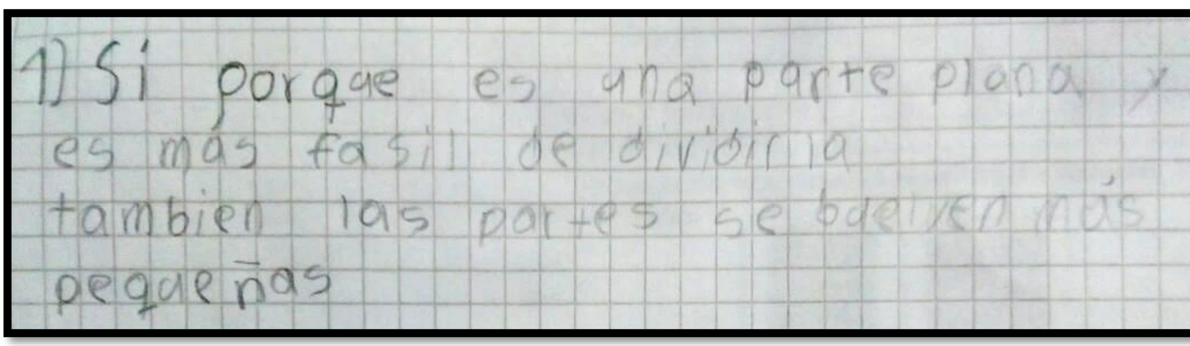
Figura 35. Ejemplo de división en partes no iguales de una superficie triangular en comparación a una superficie cuadrada dividida en partes iguales.



Una vez se terminaron de mostrar todos los ejemplos, se pasó al punto 1, cuyos resultados se encuentran en el cuadro donde se sintetizan los resultados de la actividad, cuya **interpretación de resultados del punto 1** es: se puede decir que el **100%** de los estudiantes comprenden que cualquier superficie puede ser dividida, y que además esta puede hacer en una cantidad de partes pedidas, ya que todos los estudiantes respondieron correctamente.

Por otro lado, cabe decir que, aunque todos los estudiantes respondieron afirmativamente, llama la atención los diferentes argumentos como: "se puede dividir porque tiene medidas", "se puede dividir porque puedo coger la superficie y partirla en pedacitos iguales", "si, porque puedo coger cualquier cosa y dividirla en muchas partes", entre otros argumentos. Véase un ejemplo particular de la respuesta del presente punto en la siguiente figura.

Figura 36. Ejemplo de respuesta válida del punto 1 de la tercera actividad.

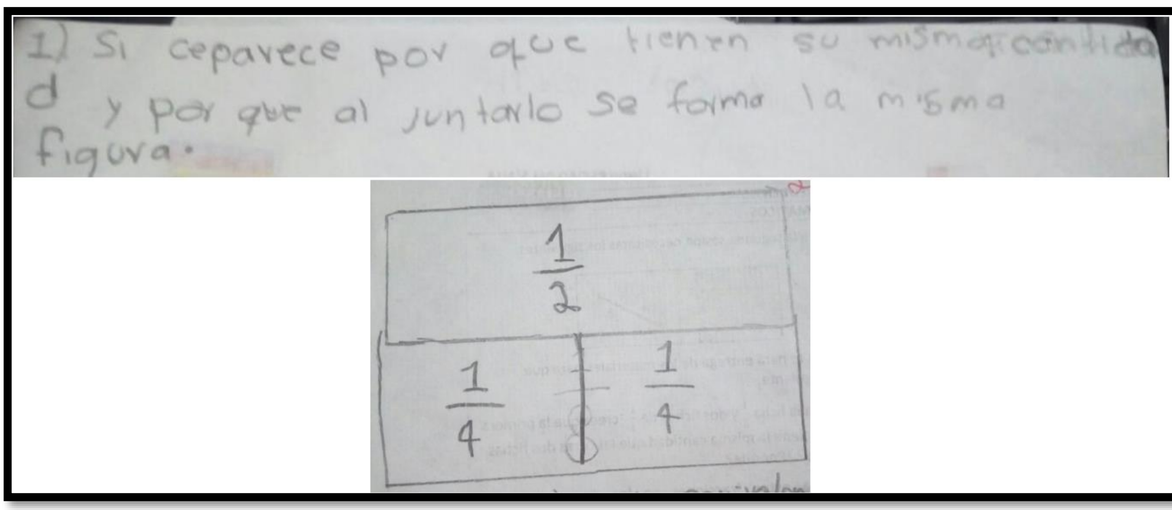


De este ejemplo particular se percata lo siguiente: es evidente que la respuesta del estudiante es afirmativa, en su argumento relaciona una superficie con una parte plana que es posible de dividir, además, se puede creer que cuando el estudiante dice que esta es **más fácil** de dividir, es porque considera que hay otras "cosas" fuera de lo que él considera como superficie, las cuales también son posibles de dividir pero que no tan fácilmente.

Por otro lado, dentro de dicha respuesta, el estudiante adiciona una observación sobre aquello que sucede cuando el número de partes empieza a hacerse mayor, ya que dice que dichas partes se vuelven más pequeñas.

Ahora, en la **interpretación de los resultados del punto 2** se puede decir que, el **76%** de los estudiantes tuvo un primer acercamiento a las fracciones equivalentes satisfactoriamente, pues sus respuestas eran afirmativas y sus argumentos partían de la superposición de las dos fichas de $\frac{1}{4}$ sobre la de $\frac{1}{2}$ para decir que estas tenían la misma cantidad. Véase un ejemplo de respuesta válida para el punto dos en la figura 37.

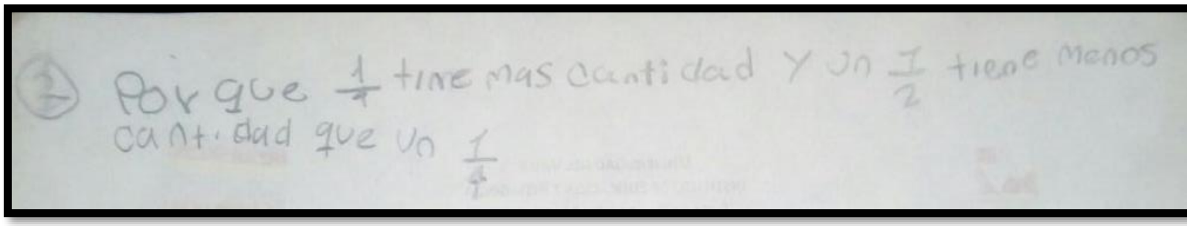
Figura 37. Ejemplo de respuesta válida del punto 2 de la tercera actividad.



Sin embargo, la segunda parte de la respuesta del estudiante (*"porque al juntarlo se forma la misma figura"*) puede dar origen a un obstáculo, pues no siempre es posible dicho proceso en términos de la figura.

Por otro lado, el **20%** de los estudiantes suministró respuestas consideradas como inválidas, puesto que, aunque todos respondieron afirmativamente, sus argumentos eran erróneos, como por ejemplo (ver figura 38):

Figura 38. Ejemplo de respuesta inválida del punto 2 de la tercera actividad.



Finalmente, al **4%** de los estudiantes no se le encontró respuesta alguna de este punto.

En este orden, en la **interpretación de resultados del punto 3**: el **60%** de los estudiantes comprenden y encuentra fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$, dando como respuesta fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$ tales como: $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{1}{2}$ e incluso, algunos anotaron que $\frac{8}{16}$ también lo era (ver figura 39), mientras que el **36%** de los estudiantes daban respuestas erróneas como, por ejemplo, la de la figura 40, por otro lado, el restante **4%** no presentó ningún tipo de respuesta a este punto.

Figura 39. Ejemplo de respuesta válida del punto 3 de la tercera actividad.

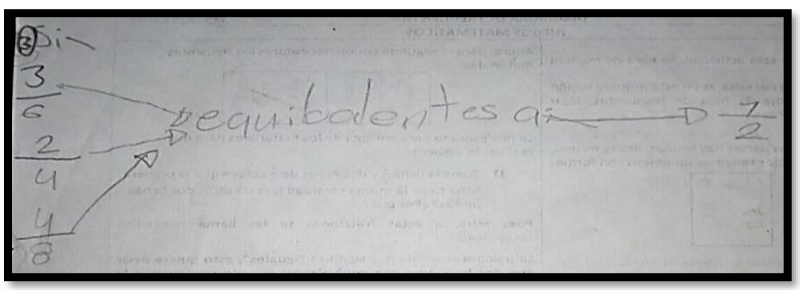
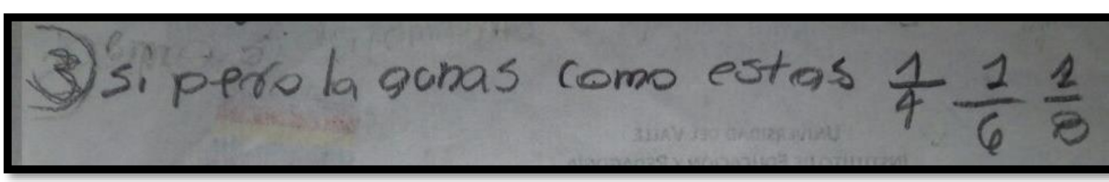


Figura 40. Ejemplo de respuesta inválida del punto 3 de la tercera actividad.



Ahora, en la **interpretación de resultados del punto 4**, se obtuvo que, tan solo el **36%** de los estudiantes logró encontrar fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$ como, por ejemplo, se les dijo que encontraran fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$, dando como respuesta las siguientes fracciones $\frac{2}{6}$ y $\frac{3}{9}$, mientras que, de la mitad de los estudiantes, puntualmente el **56%** de estos, no lo lograron, puesto que suministraban fracciones que no eran equivalentes.

Finalmente, el restante **8%** no dieron ningún tipo de respuesta a este punto.

En vista de los bajos resultados de los estudiantes hasta el momento de la presente actividad, se les explica detenidamente las fracciones equivalente y como hallarlas a través del material que se les había entregado, posteriormente se pasa a desarrollar el punto 5, de tal forma que los resultados fueron altos y satisfactorios.

Interpretación de resultados del punto 5: de manera afortunada, se puede decir que el **96%** de los estudiantes encontró fracciones equivalentes a través de la comparación de áreas, haciendo uso del material concreto, a diferencia del restante **4%** que no presento respuesta alguna a este punto.

Observaciones generales:

Como ya se había mencionado anteriormente, los resultados del punto 4 no fueron satisfactorios, debido que muy pocos de los estudiantes evaluados a través de la pregunta de dicho punto proporcionaron una respuesta válida.

Por lo anterior, se tomó un tiempo de 20 a 30 minutos aproximadamente para explicar cómo podían hacer uso del material concreto que se les había suministrado para responder las preguntas de la presente actividad, cuyas consecuencias con relación al tiempo, se vieron reflejadas en un futuro con relación a la actividad cinco, ya que no pudo ser implementada.

Es posible que los bajos resultados del punto 4 (punto evaluativo) de la presente actividad, se deban al poco énfasis que se dedicó a las fracciones equivalentes.

A pesar de lo anterior, en últimas se puede decir que, en promedio, el **72%** de los estudiantes logró cumplir con los objetivos propuestos de la presente actividad.

A continuación, se presentan algunos registros fotográficos tomados durante la implementación de la tercera actividad.

Figura 41. Registros fotográficos tomados durante la implementación de la tercera actividad.

CUARTA ACTIVIDAD:

La cuarta actividad se encuentra diseñada para trabajar en grupos de tres participantes, la cual está compuesta por seis puntos en la primera parte y por cinco puntos la segunda parte, donde una vez los estudiantes las responden, se pasa a un momento de socialización entre los distintos grupos de trabajo.

En la implementación de la presente actividad se contó con la asistencia de 18 estudiantes para la primera parte, por lo que se formaron seis grupos de tres participantes y para la segunda parte se contó con la asistencia de 25 estudiantes.

Objetivos de la cuarta actividad / puntos que apuntan al objetivo:

✓ Reforzar nociones como «partes», «partes iguales» y «todo» / puntos 1, 2, 3, y 4 de la primera parte y los puntos 1 y 2 de la segunda parte.

✓ Afianzar en los diferentes sistemas de representaciones de la relación parte-todo de los números racionales, como: diagramas o dibujos, forma verbal, simbólica y escrita para la relación parte-todo de los números racionales en contexto continuo / puntos 3, 4 y 5 de la segunda parte.

✓ Que el estudiante comprenda que el «todo» se conserva, es decir, que la cantidad sigue siendo la misma sin importar que esta se haya dividido / puntos 5 y 6 de la primera parte.

Sugerencia: tener a mano la cuarta actividad al mismo momento de leer los análisis para comprender sobre lo que se habla en cada punto, pues en el siguiente cuadro no aparecen las preguntas, solo el propósito de cada una.

Actividad n°: 4	**Nombre de la actividad:** Torre de arco iris		
N° de la pregunta o punto de la Actividad. / Propósito de la pregunta o punto de la actividad	**N° DE ESTUDIANTES POR RESPUESTA**		
	Respuesta válida	**Respuesta inválida**	**Sin respuesta**
Puntos de la primera parte de la actividad			
Punto 1. Recordar la noción de todo o unidad.	18	0	0
Punto 2. Recordar la noción de «partes iguales» desde la división (como operación básica).	18	0	0
Punto 3. Que el estudiante de cuenta de cuáles son las partes en dicha situación a trabajar.	15	3	0

Punto 4. Retomar la noción de «partes iguales» desde la percepción y la manipulación del material concreto.	18	0	0
Punto 5. El propósito es que el estudiante de cuenta desde su conocimiento informal que el «todo» o la unidad se conserva.	18	0	0
Punto 6. El propósito es evaluar si el estudiante comprende que el todo o la unidad se conserva.	15	0	3
Puntos de la segunda parte de la actividad			
Punto 1. Que el estudiante de cuenta de cuál es el todo o la unidad en dicha situación a trabajar.	25	0	0
Punto 2. Que el estudiante de cuenta de cuáles son las partes en dicha situación a trabajar.	25	0	0
Punto 3. El propósito es fortalecer la representación gráfica de la fracción en el presente contexto.	19	3	3
Punto 4. El propósito es vigorizar la representación escrita de la fracción en el presente contexto, la cual a su vez permite afianzar la representación verbal en el momento de la socialización.	22	3	0
Punto 5. El propósito es reforzar la representación simbólica de la fracción dentro de la situación a trabajar.	25	0	0

Teniendo en cuenta los resultados del cuadro anterior, donde se sintetizan las respuestas de los estudiantes que asistieron durante la implementación de la presente actividad, se hace a continuación el respectivo análisis de dichos resultados.

Interpretación de los puntos de la primera parte de la actividad cuatro:

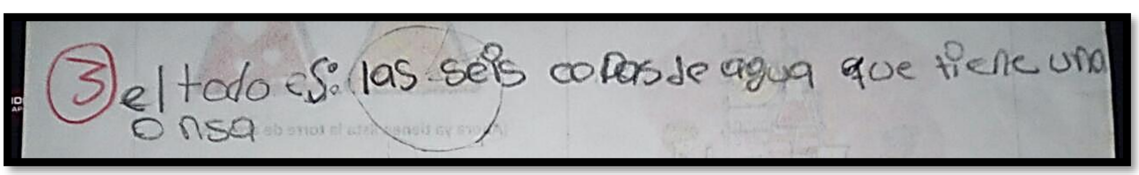
Interpretación de resultados del punto 1: el **100%** de los estudiantes dieron una respuesta válida a esta pregunta, pues todos respondieron que el todo eran las seis onzas de agua, lo cual permite decir que estos estudiantes comprenden la noción de “todo” (unidad).

Interpretación de resultados del punto 2: el **100%** de los estudiantes dieron una respuesta válida a esta pregunta, pues todos respondieron que debían echar una onza de agua a cada vaso para que quedaran iguales, lo cual permite decir que estos estudiantes comprenden la noción de partes iguales.

Interpretación de resultados del punto 3: aproximadamente el **83%** de los estudiantes suministraron respuestas válidas, pues estos mencionan que cada parte del todo es una onza de agua, lo cual permite decir que estos estudiantes comprenden la noción de partes del todo o de la unidad.

Por otro lado, el restante **17%** de los estudiantes, dieron su respuesta con relación al todo, es posible que se hayan confundido de pregunta o no hayan leído e interpretado bien la pregunta. Véase respuesta en la siguiente figura:

Figura 42. Ejemplo de respuesta inválida del punto 3 de la primera parte de la cuarta actividad.



Interpretación de resultados del punto 4: el **100%** de los estudiantes dieron una respuesta válida, pues todos estos decían que las partes eran iguales porque todas tenían una onza de agua, esto nos permite decir que, todos los estudiantes que participaron en la presente actividad dan cuenta de la noción “partes iguales” a través de la percepción y manipulación del material concreto.

Interpretación de resultados del punto 5: el **100%** de los estudiantes dieron una respuesta válida, pues todos estos argumentaban su afirmación diciendo que sí, porque cada vaso tenía una onza y si las echaban, volvían a ser las 6 onzas, es decir, que volvían a obtener el todo.

Lo anterior permite decir que, dichos estudiantes comprenden que el todo o la unidad se conserva.

Interpretación de resultados del punto 6: aproximadamente el **83%** de los estudiantes respondieron de manera adecuada y válida a este punto, pues respondían "sí, porque volvimos a obtener las 6 onzas" o también "si, porque cada vaso tenía una onza", la mayoría daba el mismo argumento que dieron en el punto 5, lo cual es válido.

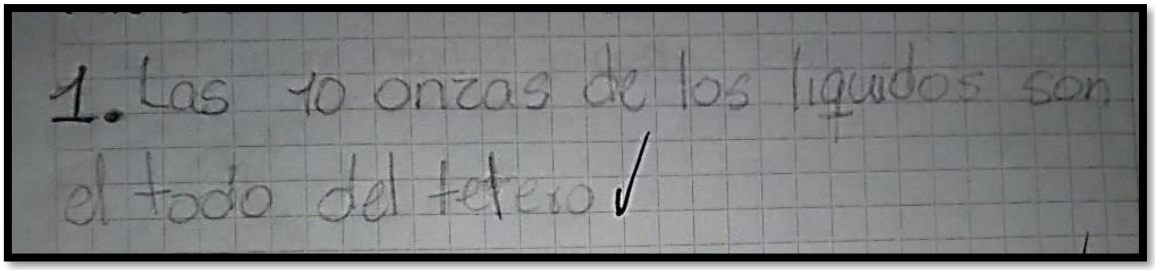
Lo anterior permite decir que, dicho porcentaje de estudiantes, comprenden que el todo se conserva, a partir de la manipulación del material concreto, sin embargo, este hecho también se debe a que los estudiantes comprenden correctamente cuales son las partes y cuál es el todo, de tal forma que al sumar la cantidad que determina cada una de las partes, obtienen la misma cantidad que corresponde al todo.

Al restante **17%** no se le encontró respuesta alguna a este punto, se desconoce las razones.

Interpretación de los puntos de la primera parte de la actividad cuatro:

Interpretación de resultados del punto 1: el **100%** de los estudiantes dieron una respuesta válida a esta pregunta, pues todos respondieron que el todo eran las diez onzas de líquido en el tetero, lo cual permite decir que estos estudiantes comprenden la noción de "todo" (unidad). Véase ejemplo en la siguiente figura:

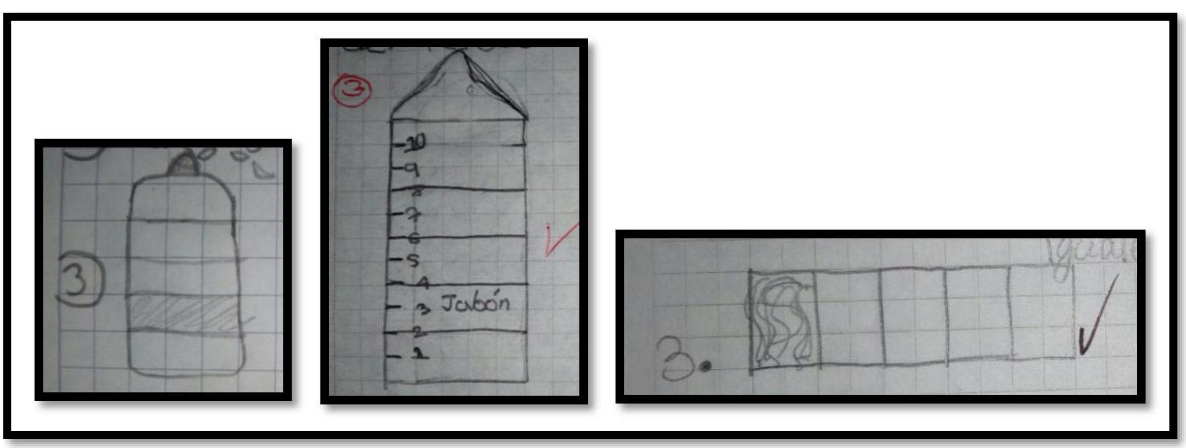
Figura 43. Ejemplo de respuesta válida para el punto 1 de la segunda parte de la cuarta actividad.



Interpretación de resultados del punto 2: el **100%** de los estudiantes suministraron respuestas válidas, pues estos mencionan que dividieron el todo en cinco partes de 2 onzas cada una, lo cual permite decir que estos estudiantes comprenden la noción de partes y partes iguales del todo o de la unidad.

Interpretación de resultados del punto 3: el **76%** de los estudiantes lograron representar gráficamente la cantidad de onzas de jabón líquido comparado con el todo, correctamente. Véase algunos ejemplos en la figura 44.

Figura 44. Ejemplos de respuestas válidas del punto 3 de la segunda parte de la cuarta actividad.



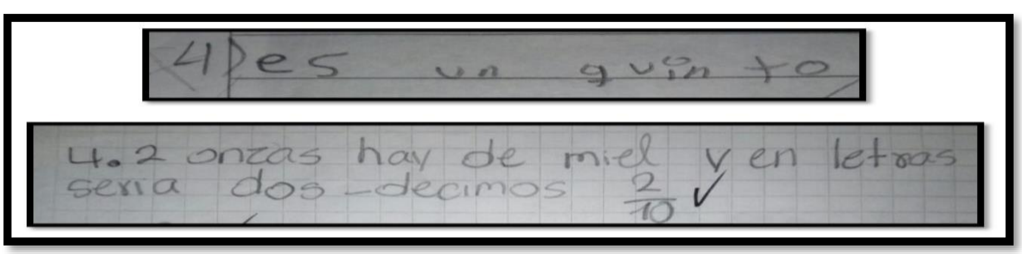
Por otro lado, el **12%** los estudiantes respondieron mal dicho punto, pues al realizar la representación gráfica, no tuvieron en cuenta los líquidos aceite y alcohol (véase figura 45), y el restante **12%** no presentaron respuesta alguna a este punto.

Figura 45. Ejemplo de respuesta inválida del punto 3 de la segunda parte de la cuarta actividad.

Interpretación de resultados del punto 4: el **88%** de los estudiantes, logró representar de manera escrita la cantidad de miel con relación al todo o la unidad de manera adecuada, lo cual, permite decir que estos dominan de alguna manera la representación escrita de la fracción, mientras que el restante **22%** de los estudiantes no lo lograron.

Por otro lado, durante la socialización de las respuestas de los estudiantes sobre el presente punto, se notó que algunos estudiantes habían dado la respuesta "un quinto", mientras que otros dijeron que "dos décimos" (ver figura 46), las cuales se aprovecharon para hablar nuevamente sobre las fracciones equivalente, en ese momento se percibió que los estudiantes entendían por qué las dos respuestas eran válidas.

Figura 46. Ejemplos de respuestas válidas para el punto 4 de la segunda parte de la cuarta actividad.



Interpretación de resultados del punto 5: el **100%** de los estudiantes, logró representar simbólicamente la cantidad de alcohol comparado con el todo o la unidad de manera adecuada, lo cual, permite decir que estos dominan de alguna manera la representación simbólica de la relación parte-todo.

Por otro lado, cabe mencionar que sucedió lo mismo que en el punto anterior con relación a las fracciones equivalentes.

Observaciones generales:

En relación al tiempo predeterminado en la ficha del profesor para la implementación de la actividad, se puede decir que fue suficiente, pues la actividad pudo ser culminada en un tiempo máximo de 180 minutos.

Por otro lado, con relación a los resultados, se puede decir que no presentaron ningún tipo de inconveniente al trabajar con otra magnitud, en este caso, con volumen.

También se puede decir que, un promedio del **93%** de los estudiantes cumplieron con los objetivos propuestos de la presente actividad, lo cual es satisfactorio, pues comparando con las otras tres actividades anteriores a esta, los resultados fueron mejorando notoriamente.

A continuación, se presentan algunos registros fotográficos tomados durante la implementación de la cuarta actividad.

Figura 47. Registros fotográficos tomados durante la implementación de la cuarta actividad.

QUINTA ACTIVIDAD:

La presente actividad no pudo ser implementada debido a cuestiones de tiempo que dispuso la Institución Educativa Jorge Robledo para la implementación de la secuencia de enseñanza, sin embargo, el principal objetivo de esta actividad era introducir al estudiante en un contexto discreto de relación parte-todo.

Además, en vista que dicha actividad no se pudo implementar, se tomaron 20 minutos para explicarle a los estudiantes y acercarlos un poco a este contexto a través de un ejemplo, sin embargo, como no hace parte de la secuencia de enseñanza, no se entra en detalle del mismo.

4.2 Análisis de los resultados de la prueba final o evaluativa

Se diseñó una prueba final o evaluativa (anexo 6), se encuentra compuesta de 8 preguntas, a la cual asistieron 27 estudiantes.

Se sintetizan los resultados de la prueba final en el siguiente cuadro:

N° de la pregunta / Propósito de la pregunta	**N° DE ESTUDIANTES POR RESPUESTA**		
	Respuesta válida	**Respuesta inválida**	**Sin respuesta**
Punto 1. Evaluar si el estudiante comprende que el número de partes es distinto al número de dobleces o cortes, (únicamente para el caso de la circunferencia)	26	1	0
Punto 2. Evaluar paso de la representación gráfica a la representación simbólica de la relación parte-todo.	26	1	0
Punto 3. Evaluar si el estudiante domina la representación gráfica, simbólica y escrita.	22	5	0
Punto 4. Evaluar si el estudiante comprende que las partes cubren el todo.	27	0	0
Punto 5. Evaluar si el estudiante comprende que el todo es divisible, el cual puede ser en cualquier número de partes y que el todo se conserva.	22	2	3
Punto 6. Evaluar si el estudiante comprende que las partes deben ser iguales (noción de partes iguales y todo).	22	5	0
Punto 7. Evaluar si el estudiante comprende las fracciones equivalentes o relación de orden de las fracciones para determinar cuál representa mayor, menor o igual cantidad.	13	14	0
Punto 8. Evaluar si el estudiante puede representar una cantidad (se deja en libertad el tipo de representación que desee utilizar el estudiante) en un contexto discreto.	12	13	2

Interpretación de resultados de la pregunta 1: el **96%** de los estudiantes comprende que el número de partes es distinto al número de dobleces o cortes, mientras que el restante **4%** no lo hace, sin embargo, se puede decir que este es un resultado significativo, ya que en el punto 3 de las preguntas de la ficha del estudiante de la segunda actividad, se evaluó lo mismo, obteniendo como resultado un **57%** de estudiantes que lograron dar una respuesta válida.

De los anterior podemos decir que, el porcentaje de estudiantes que logro comprender que el número de partes es distinto al número de dobleces o cortes, subió en un **39%**.

Interpretación de resultados de la pregunta 2: aunque el paso del sistema de representación gráfico (SRG) al sistema de representación simbólico (SRS) no fue evaluado con anterioridad en la secuencia de enseñanza, a través de los resultados de la prueba final, se puede decir que el **96%** de los estudiantes lograron realizar dicho paso del SRG al SRS de manera satisfactoria, sin embargo, el **4%** que corresponde a un estudiante, no lo logro (se desconoce la razón).

Interpretación de resultados de la pregunta 3: de manera general, se puede decir que el **81%** de los estudiantes lograron cumplir completamente con el propósito de la presente pregunta, sin embargo, si analizamos los resultados de forma particular el dominio del SRG, SRS y del SRE por parte de los estudiantes, en este punto de la prueba evaluativa, se tiene que:

✓ Con respecto al dominio del **SRG**, se puede decir que el **100%** de los estudiantes lo domina, lo cual evidencia una mejora significativa con relación a los resultados de la secuencia de enseñanza, pues en la primera, segunda y cuarta actividad se evaluó lo mismo.

En la primera actividad, en los puntos 8 y 9, se obtuvo que solo un **67%** de los estudiantes hubieran dado respuestas válidas para dichas preguntas.

Posteriormente, en la segunda actividad, en el punto 2 (pregunta de las cartas del juego de la ruleta), se obtuvo como resultado, que el **71%** de los estudiantes logró realizar la representación gráfica de la situación que se les daba.

Luego, los resultados del punto 3 (segunda parte) de la cuarta actividad, arrojan que un **76%** el estudiante domina el SRG.

En este orden de idea, se puede decir que, desde la implementación de la primera actividad de la secuencia de enseñanza, hasta la prueba evaluativa, el porcentaje de estudiantes que comprenden y dominan el SRG aumentó en un **33%.**

- ✓ Con respecto al dominio del **SRS**, se puede decir que el **100%** de los estudiantes lo domina, lo cual evidencia una mejora significativa con relación a los resultados de la secuencia de enseñanza, pues en la segunda y cuarta actividad se evaluó lo mismo.

En la segunda actividad, en el punto 3 (pregunta de las cartas del juego de la ruleta), se obtuvo que un **86%** de los estudiantes habían dado respuestas válidas para dichas preguntas y posteriormente, en la cuarta actividad, punto cinco (segunda parte), sus resultados arrojan que un **100%** de los estudiantes dominan el SRS.

Así, se puede decir que, desde la implementación de la segunda actividad de la secuencia de enseñanza, hasta la prueba evaluativa, el porcentaje de estudiantes que comprenden y dominan el SRS aumentó en un **14%.**

- ✓ Ahora, con relación al dominio del **SRE,** la interpretación de los resultados del punto 3 de la prueba evaluativa, arroja que solo el **81%** de los estudiantes dominan tal sistema de representación.

Lo anterior, representa una mejora significativa en los estudiantes, pues esto mismo que evaluó en el punto 5 (pregunta de las cartas del juego de la ruleta) de la segunda actividad, obteniendo como resultado que un **71%** de los estudiantes dominaban el SRE.

En este orden de ideas, se puede decir que, desde la implementación de la segunda actividad de la secuencia de enseñanza, hasta la prueba evaluativa, el porcentaje de estudiantes que comprenden y dominan el SRE aumentó en un **10%.**

Interpretación de resultados de la pregunta 4: el **100%** de los estudiantes comprende que la unión de todas las partes cubre el todo, el cual es un resultado significativo, pues el porcentaje no bajó, ya que con relación a los resultados del punto 8 (pregunta de las cartas de la ruleta) de la segunda actividad, donde se evaluó lo mismo, se obtuvo igualmente un **100%** de estudiantes que lograron dar una respuesta válida.

Interpretación de resultados de la pregunta 5: el **81%** de los estudiantes comprende que el todo es divisible, el cual puede ser en cualquier número de partes, además que el todo se conserva, mientras que el **4%** no lo hace y al restante **12%** no se le encontró ningún tipo de respuesta a esta pregunta.

Interpretación de resultados de la pregunta 6: el **81%** de los estudiantes comprende cuándo las partes del todo o la unidad son iguales, mientras que el **7%** no lo hace, pues sus respuestas son inválidas, y el restante **12%** no presenta ningún tipo de respuesta para la presente pregunta.

A pesar de lo anterior, se puede decir que dichos resultados son significativos, ya que en el punto 6 de la primera actividad, se les evaluó a los estudiantes lo mismo, obteniendo aproximadamente como resultado un **67%** de estudiantes que lograron dar una respuesta válida, de la tal forma que cumplieron con el propósito del mismo.

De los anterior podemos decir que, el porcentaje de estudiantes que logro comprender cuando las partes del todo o la unidad son iguales, aumentó en un **14%**.

Interpretación de resultados de la pregunta 7: el **48%** de los estudiantes resuelve problemas con relación a las fracciones equivalentes o relación de orden, mientras que el restante **52%** no lo logró.

Los resultados anteriores no representan una cantidad significativa, puesto que se encuentra por debajo de la mitad del total de los estudiantes, sin embargo, también se puede percibir que el problema en gran medida radica en la falta de interpretación de las situaciones problemas por parte del estudiante.

Si en lugar de haber diseñado la pregunta 7 de la prueba evaluativa como se hizo, se hubiera preguntado, ¿qué fracción es más grande, $\frac{2}{4}$ o $\frac{4}{8}$?, era más probable que la cantidad de estudiantes que respondieran bien, fuera mayor.

Lo anterior es posible debido a que, si bien es cierto, en el punto 5 de la tercera actividad, se evalúa a los estudiantes la capacidad para encontrar fracciones equivalentes a través del uso del material concreto suministrado, donde se obtuvo que el **100%** de los estudiantes lograron cumplir con el propósito de la misma, por tanto, es claro que este proceso contiene un nivel menor de complejidad para los estudiantes, que resolver problemas que involucre fracciones equivalentes.

Interpretación de resultados de la pregunta 8: a pesar que la resolución de problemas de situaciones en un contexto discreto no haya sido enseñada y mucho menos evaluada con anterioridad en la secuencia de enseñanza, debido que la quinta actividad no pudo ser implementada, es posible decir a través de la interpretación de los resultados de la presente pregunta de la prueba final, que el **45%** de los estudiantes lograron resolver dicho problema de manera satisfactoria, lo cual, teniendo en cuenta las condiciones de los estudiantes antes mencionadas, se consideran estos resultados como satisfactorios y significativos.

Por otro lado, el **48%** de los estudiantes suministró respuestas inválidas de la presente pregunta, y al restante 7% no se le encontró contestación alguna.

A continuación, se presentan algunos registros fotográficos tomados durante el desarrollo e implementación de la prueba final o evaluativa.

Figura 48. Registros fotográficos tomados durante el desarrollo e implementación de la prueba final o evaluativa.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

Durante el desarrollo del presente trabajo, en especial mientras se realizaron algunas documentaciones, se concluyó acerca de la importancia de tener presente que los números racionales surgieron a partir de las necesidades humanas, donde dicho concepto ha venido evolucionando a tal punto que hoy los conocemos con ese nombre y con una estructura matemática bien definida, es lo anterior parte del motivo por el cual la secuencia de enseñanza se propuso a partir de la fenomenología didáctica, donde la presencia del material concreto fue fundamente para hacer de cada actividad un momento lúdico, de tal manera que los estudiantes jugaban y comprendían cada situación de manera espontánea.

Por otro lado, los resultados de las actividades evidencian una evolución en los procesos de representación escrita, donde claramente esta se encuentra vinculada a la representación verbal, pues es a partir del lenguaje natural que a los estudiantes se les facilitó la comprensión y el paso de un sistema de representación a otro, así las cosas, los estudiantes lograron ver la fracción como la representación de la conmensurabilidad de magnitudes homogéneas como un solo número.

Con relación a la estrategia metodológica, esta permitió realizar un análisis auto-crítico sobre la práctica profesional, dando cuenta de la importancia de toda una suma de variables para el diseño de actividades, de tal forma que se genere una buena práctica y un buen proceso de enseñanza-aprendizaje.

Ahora, debido a que el propósito de investigación del presente trabajo, fue facilitar a los estudiantes de grado tercero (3-1) de la Institución Educativa Jorge Robledo del Municipio de Vijes (Valle del Cauca), la constitución del objeto mental número racional desde relación parte-todo, a través del diseño e implementación de una secuencia de enseñanza, se plantearon unos objetivos específicos a seguir con el fin de alcanzar dicho propósito.

En relación al primer objetivo específico (O. E 1), en el apartado 2.2 “los números racionales desde la relación parte-todo en la práctica de aula”, se encuentran descritos algunos elementos (propuestas y variables) necesarios, identificados para el diseño de situaciones, actividades o secuencias de enseñanza de la relación parte-todo, las cuales permitieron el diseño de cada una de las cinco actividades que componen la secuencia de enseñanza del presente trabajo.

Algunas de los elementos tenidos en cuenta fueron:

- ✓ Conocimiento informal de los niños y habilidad para estimar partes iguales.
- ✓ Dominio de los distintos sistemas de representación de la relación parte-todo.
- ✓ Recomendaciones acerca del uso excesivo de figuras geométricas como representación gráfica de la relación parte-todo.
- ✓ Atributos (citados en Llinares y Sánchez, 1999, p. 80), estos sin olvidar las consideraciones tomadas a partir de las limitaciones que presentan tales atributos, las cuales se encuentran mencionadas en el apartado 2.2.

Ahora, con respecto al segundo objetivo específico (O. E 2), en el apartado 2.2.1 se encuentran, como bien lo dice su nombre, “algunos obstáculos didácticos y dificultades en el aprendizaje de los números racionales desde la relación parte-todo”, que fueron documentados a partir del análisis de los aportes de Llinares y Sánchez (1999); Escolano y Gairín (2005); y Fandiño (2009), permitiendo tenerlos en cuenta al momento de diseñar cada una de las preguntas de las actividades que componen la secuencia de enseñanza, donde el propósito era no reproducir dichos obstáculos didácticos y evitar así dificultades en el aprendizaje por parte de los estudiantes en el momento de implementación de dicha secuencia.

Finalmente, referente al tercer objetivo específico (O. E 3), para determinar de qué manera el diseño e implementación de la secuencia de enseñanza facilitó en la constitución del objeto mental número racional en los estudiantes de 3-1 de la I.E Jorge Robledo, se realizó el análisis de los resultados obtenidos en la implementación de la propuesta, los cuales se encuentran en el capítulo 4, así las cosas, la secuencia de enseñanza facilitó la constitución del objeto mental número racional en los estudiantes de 3-1 de la Institución Educativa Jorge Robledo del municipio de Vijes-Valle, con un mayor énfasis en contextos continuos.

Referencias

Castro, E y Torralbo, M. (2008). *Fracciones en el currículo de la Educación Primaria* (pp. 285-314). En E. Castro (Ed.) Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Castro, E. (2015). Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros. (Tesis Doctoral). Universidad de Granada. Granada.

Corbetta, P. (2007). Investigación cuantitativa e investigación cualitativa. En: Corbetta, P. Metodología y técnicas de investigación social. (pp. 31-63), Madrid, España: McGraw-Hill/Interamericana de España, S. A. U.

Cuapanteca, A. (2007). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en tercer año de primaria.* (Tesis de Maestría en Educación con Campo en Planeación Educativa), Universidad Pedagógica Nacional, México. Recuperado de: http://200.23.113.51/pdf/25002.pdf

Del Rio, K. y Ramírez, L. (2009). *Las fracciones a partir de la fenomenología didáctica.* (Trabajo de grado para optar el título de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas), Universidad de Antioquia, Medellín. Recuperado de: http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/744/1/JC0583.pdf

Escolano, R y Gairín, J. (2005, marzo). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Revista iberoamericana de educación matemática*, (1), 17-35. Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2005/1/Union_001_006.pdf

Fandiño, M. (2009). Dificultades en el aprendizaje de las fracciones y didáctica de la matemática. *Las fracciones aspectos conceptuales y didácticos.* Colombia: Magisterio.

Fazio, L. y Siegler, R. (2010). *Enseñanza de las fracciones.* Recuperado de: http://www.ibe.unesco.org/sites/default/files/resources/edu-practices_22_spa.pdf

Hincapié, C. (2011). *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la institución educativa san Andrés de Girardota.* (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales), Universidad Nacional de Colombia, Medellín. Recuperado de: http://www.bdigital.unal.edu.co/6084/1/43701138.2012.pdf

Hurtado, M. (2012). *Una propuesta para la enseñanza de fracciones en el grado sexto*. (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales), Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. Recuperado de: http://www.bdigital.unal.edu.co/8573/1/01186688.2012.pdf

ICFES, Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Resumen Ejecutivo, Colombia en PISA 2015.* Recuperado de: http://www.icfes.gov.co/docman/institucional/home/2785-informe-resumen-ejecutivo-colombia-en-pisa-2015

Kieren, T. (1980), "The rational number constructs. Its elements and mechanisms", en T. Kieren (ed.), Recent Research on Number Learning, Columbus, OH, eric/smeac, pp. 125-149.

Latorre, A. (2005). *La investigación-acción: conocer y cambiar la práctica educativa*. Barcelona, España: Editorial Graó, de IRIF, S.L.

Llinares, S y Sánchez, M. (1999). *Fracciones: la relación parte-todo.* Madrid, España: Síntesis, S. A.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (1998). *Serie lineamientos curriculares de matemáticas.* Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias.* Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2015). Derechos Básicos de Aprendizaje. Recuperado de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

Niss, M. (1997). ¿Por qué enseñamos matemática en la escuela? En: Puig, L. *investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática.* (pp. 7-16), Bogotá, Colombia: Editorial Iberoamérica.

Obando, G. (1999). *La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo*. (Tesis de Maestría en Educación, con énfasis en Educación Matemática), Universidad del Valle, Santiago de Cali.

Obando, G. (2003). *La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo*. Revista EMA, 8(2). (pp. 157-182)

Puig, L. (1997). *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática.* 1 ed. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Puig, L. (2000). Análisis fenomenológico. En: Rico, L. *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona, España: Editorial Horsori.

Puig, L. (2001). El método. En: *fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* [Didactical Phenomenology id Mathematical Structures]. Recuperado de: http://www.uv.es/puigl/cap2metodo.pdf

Puig, L. (2001). Fracciones. En: *fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* [Didactical Phenomenology of Mathematical Structures]. Recuperado de: http://www.uv.es/puigl/cap5fracciones.pdf

Rico, L., y Segovia, I. (2008). *Unidades didácticas. Organizadores.* (pp. 83 -101). En E. Castro (Ed). Didáctica de la matemática en la Educación Primaria. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Ruiz, C. (2013). *La fracción como relación parte-todo y como cociente: propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED.* (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales), Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. Recuperado de: http://www.bdigital.unal.edu.co/40057/1/01186860.2013.pdf

Restrepo, G. (2003). Números reales. En: *Los fundamentos de la matemática.* (pp. 147-157). Cali: Programa Editorial Universidad del Valle.

Sánchez, A. (2015). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en alumnos de 5° grado de educación primaria.* (Trabajo de grado para optar el título de Licenciada en Educación Primaria), Universidad Pedagógica Nacional, México. Recuperado de: http://200.23.113.51/pdf/31689.pdf

ANEXOS

Anexo 1. Ficha del estudiante de la primera actividad.

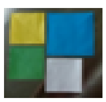
UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DOBLANDO Y CORTANDO LA CARTULINA

JUEGOS MATEMÁTICOS

INSTRUCCIONES:

Es un juego para grupos de tres participantes.
Cada participante necesita los siguientes materiales:

cuatro cuadrados de cartulina de diferente color 	Tijeras 
un palito de madera 	lápiz, borrador, sacapuntas y hoja de respuesta 

¡Ten en cuenta que antes de pasar de una pregunta a otra, debes socializar tu respuesta en el salón y esperar la orden de tu profesora para seguir!

A continuación, tu profesora te hará entrega de una cartulina cuadrada de color amarillo y unas tijeras.

JUGUEMOS:

1) Dobla en cuatro partes iguales la cartulina de color amarillo. Cada integrante del grupo debe realizar dobleces diferentes a los de su compañero del lado.

2) Ahora, usa el palito de madera para trazar líneas por donde hiciste los diferentes dobleces.

3) Observa cada parte que se te formó al trazar las líneas, ¿Cómo podríamos saber que las partes de la cartulina cuadrada de color amarillo son iguales entre ellas?
NOTA: puedes utilizar las tijeras si deseas.

Luego, tu profesora te va a entregar otra cartulina cuadrada de color azul, dóblala y traza las mismas líneas como lo hiciste con la cartulina amarilla.

4) ¿Será que las partes de la cartulina amarilla son iguales con las partes de la cartulina azul?, ¿por qué?

A continuación, recorta por las líneas que trazaste en la cartulina amarilla e intercambia una de las partes con tu compañero de la derecha.

5) ¿Crees que tus partes de la cartulina amarilla son iguales a la que te entrego tu compañero?, ¿por qué?

Antes de continuar, la profesora pasará con una bolsa para que depositen ahí todos los pedazos de cartulina restantes.

Luego, tu profesora te hará entrega de una hoja donde se encuentran cuatro figuras.

6) ¿crees que la figura 1 tiene todas sus partes iguales?, ¿Por qué? ¿será que las figuras 2, 3, y ,4 también tienen sus partes iguales?

Ahora tu profesora te hará entrega de dos cartulinas cuadradas del mismo tamaño, una de color verde y otra de color blanco

7) Dobla la cartulina cuadrada de color verde en dos partes iguales, traza una línea con el palito de madera por donde hiciste el doblez y luego recórtala.

8) ¿Qué parte de la cartulina blanca cubre una de las partes de la cartulina verde? ¿por qué?, realicen un dibujo que muestre la cartulina verde sobre la cartulina blanca.

9) ¿Con cuántas partes de la cartulina verde formaría la cartulina cuadrada de color blanco? ¿por qué? ¿podrías dibujar lo que hiciste?

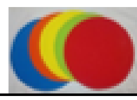
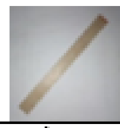
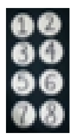
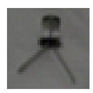
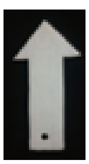
¡Hemos terminado de responder todas las preguntas!, pero para no olvidar lo que aprendimos, cada uno en su cuaderno va a escribir lo que aprendió en el día de hoy.

Anexo 2. Ficha del estudiante de la segunda actividad.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

RULETA MATEMATICA
PRIMERA SESIÓN (90 MINUTOS)
JUEGOS MATEMÁTICOS

INSTRUCCIONES:
Es un juego para grupos de cuatro participantes.
Cada grupo de trabajo necesitará los siguientes materiales:

Un trozo de cartulina blanca 	Una cartulina de color 	Un palito de madera 	Tijeras 
Base circular de icopor 	Ega 	Números del 1 al 8 	Gancho de cabeza redonda 
Flecha 	Tapa 	8 cartas con preguntas 	Hoja de respuestas, lápiz, borrador y sacapuntas 

¡Vamos a empezar!

Su profesora les hará entrega de una hoja de respuestas, un trozo de cartulina blanca y una cartulina circular de cualquier color.
Con tu grupo de trabajo, responde:

1) ¿Cuántas veces creen que cabe la cartulina blanca, en la cartulina del otro color?

Una vez todos los estudiantes del salón estén de acuerdo en la cantidad de veces que cabe, vamos a doblar la cartulina de color las veces que sea necesaria para obtener ocho partes iguales.

2) ¿Cuántas veces tuvieron que doblar la cartulina para obtener las ocho partes iguales?

3) Si quiero obtener ocho partes iguales, ¿debo doblar ocho veces la cartulina? ¿Por qué?

¡Después de que hayan respondido las preguntas 1, 2 y 3, pueden pasar a construir la ruleta matemática!

Su profesora les hará entrega de un palito de madera, tijeras, una base de icopor, ega y los números de 1 al 8. Antes de continuar, cada uno de los integrantes del grupo se va a numerar del 1 al 4.

Ahora van a seguir los siguientes pasos:

Integrante número 1: Traza líneas con el palito de madera por los dobleces que hicieron.

Integrante número 2: Recorta con las tijeras por donde tu compañero trazo las líneas.

Integrante número 3: Pega cada una de las partes en la base de icopor, si deseas **puedes pedir ayuda a tus compañeros del grupo.**

Integrante número 4: pega cada uno de los números en cada una de las partes de cartulina como lo indicará la profesora.

Para continuar, la profesora les hará entrega de un gancho de cabeza redonda, una flecha y una tapa de tal forma que introduzcan la flecha y la tapa por el gancho. Una vez lo hayan logrado, esperaran a que la profesora pase por cada uno de los grupos para ayudarles a terminar su ruleta matemática.

¡Ya la ruleta está lista para jugar!

¡Han terminado de responder todas las preguntas!, pero para no olvidar lo que han aprendido, cada uno en su cuaderno va a escribir lo que aprendió en el día de hoy.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

RULETA MATEMATICA

SEGUNDA SESIÓN (120 MINUTOS)

JUEGOS MATEMÁTICOS

¡Ya la ruleta esta lista para jugar!

Pero antes de empezar, deben poner mucha atención a lo que la profesora les va a explicar a continuación.

Si tienes alguna duda con lo que la profesora está explicando, no tengas miedo ni pena en preguntar, solo debes levantar la mano para pedirle la palabra.

Una vez que todos hayan entendido la explicación de la profesora, podremos pasar a jugar con nuestra ruleta matemática, para ello se les hará entrega de ocho cartas con preguntas, las cuales deberán tenerlas sobre la mesa y "boca abajo".

El juego consiste en que cada estudiante hace rodar la flecha de la ruleta, levanta la tarjeta que tenga el número que te señala la flecha y responde la pregunta en tu hoja de respuestas.

Por ejemplo: si giras la flecha y esta te indica el número 3, debes coger las tarjetas "boca abajo" y buscar cual es la tarjeta número 3, la volteas y respondes la pregunta en la hoja de respuesta que te ha entregado tu profesora.
Una vez se responda, se saca la carta y sigue el compañero de la derecha y así sucesivamente hasta que ya no queden más cartas.

De esta manera lo hará cada uno de los integrantes del grupo, hasta que se hayan respondido todas las preguntas.

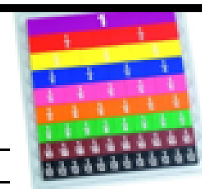
OJO: *si tu compañero no sabe la respuesta de la pregunta que le tocó, entre todos deben ayudarle para que la responda.*

Luego de que hayan respondido todas las preguntas, deben esperan la orden de la profesora para pasar a socializar sus respuestas.

¡Han terminado de responder y socializar todas las preguntas!, pero para no olvidar lo que aprendieron, cada uno en su cuaderno va a escribir lo que aprendió en el día de hoy

Como ustedes son unos niños muy inteligentes, les propongo que pensemos en la siguiente pregunta:

Anexo 3. Ficha del estudiante de la tercera actividad:



UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

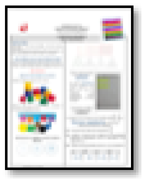
ROMPECABEZAS FRACCIONARIO

JUEGOS MATEMÁTICOS

INSTRUCCIONES:
Esta actividad, se realizará de manera individual.
Los materiales que necesitaras en esta primera sesión son, además de esta guía, la hoja de respuestas, lápiz borrador y sacapuntas.

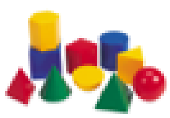
¿Te has fijado que en el mundo encontramos objetos con formas de figuras geométricas?

Pues mira, en todas partes los podemos encontrar, ahora mismo, frente a nuestros ojos tenemos un objeto con forma de figura geométrica, ¡es un rectángulo!

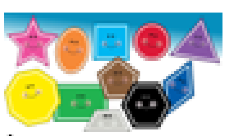


¡Miremos otros objetos con formas de figuras geométricas!

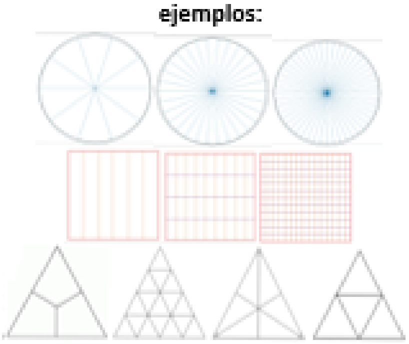
Ahora, observemos que todos los objetos tienen caras.



Además, todas esas caras son posibles de dividir en un número elegido de partes.

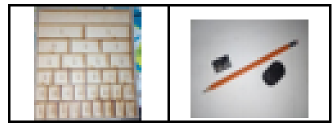


A continuación, la profesora mostrará algunos ejemplos:



1) ¿crees que es posible dividir una superficie en cualquier número de parte que quieras?, ¿por qué?

Ahora, para la segunda sesión necesitaras los siguientes materiales:



La profesora te hará entrega de los materiales para que realices lo siguiente.

2) Toma la ficha $\frac{1}{2}$ y dos fichas de $\frac{1}{4}$ ¿crees que la primera ficha tiene la misma cantidad que las otras dos fichas juntas? ¿Por qué?

Pues mira, a estas fracciones se les llama *fracciones equivalentes*. Dos fracciones son equivalentes cuando representan la misma cantidad comparado con el mismo «todo», es por esto que las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son fracciones equivalentes.

Haciendo uso del material que la profesora te entregó, responde las preguntas 3 y 4.

3) Encuentra y representa simbólicamente otra fracción que sea equivalente a $\frac{1}{2}$

4) Encuentra otras fracciones equivalentes, por ejemplo, encuentra fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$ y escríbelas simbólicamente.

NOTA: *puedes ayudarte trazando el borde de las fichas en la hoja las cuales creas que representan fracciones equivalentes o si no, puedes superponer unos sobre otros.*

5) Une con una línea cuáles de las siguientes fracciones son equivalentes:

$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{8}$
$\frac{3}{3}$	$\frac{6}{8}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{6}$
$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{2}$

¡Ya has terminado de responder todas las preguntas, pero para no olvidarlo, vas a escribir lo que aprendiste en tu cuaderno!

Anexo 4. Ficha del estudiante de la cuarta actividad:

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TORRE DE ARCO IRIS

JUEGOS MATEMÁTICOS

INSTRUCCIONES:

Es un juego para grupos de tres participantes.
Cada grupo de trabajo necesitará los siguientes materiales:

Un tetero	Seis vasos pequeños	Una botella de agua	cinco vasos grandes
			
Colorantes (azul y rojo) 	Cuchara plástica 	Aceite de cocina 	Jabón líquido 
Miel 	Alcohol 	Hoja de respuesta 	Lápiz, borrador y sacapuntas 

¡Tengan en cuenta que antes de pasar de una pregunta a otra, deben socializar su respuesta en el salón de clases y esperar la orden de la profesora para seguir!

El día de hoy van a construir una torre de arco iris, pero antes tienen que desarrollar una actividad para recordar algunas cosas que ya han visto.

Entonces, su profesora les hará entrega de un tetero, seis vasos pequeños, una botella de agua y la hoja de respuestas.

Ahora, van a echarle agua al tetero hasta que llegue a las 6 onzas y luego dejan la botella de agua en el suelo.

1) Si pensamos en dividir las seis onzas de agua entre los seis vasos pequeños de agua, ¿Cuál sería el todo?

2) ¿Cuántas onzas de agua que hay en el tetero tendrían que echar en cada uno de los seis vasos para que estos tengan la misma cantidad?

ahora, van a echar de a una onza en cada uno de los seis vasos pequeños y respondan:

3) ¿Cuáles son las partes del todo?

4) ¿Será que todas las partes están iguales?, ¿Por qué?

5) ¿Qué creen que pasa si vuelven a echar el agua que hay en los vasos pequeños al tetero?, ¿será que vuelven a formar el todo, es decir, vuelven a obtener la misma cantidad de agua que tenían inicialmente?, ¿Por qué?

Van a echar el agua de los vasitos al tetero.

6) ¿Al echar el agua de los vasitos al tetero pasó lo que ustedes respondieron en la pregunta 5?, ¿volvieron a obtener el todo?, ¿Por qué?

Después de haber socializado todas las preguntas, ¿tienen alguna duda de todo lo que se ha hecho y dicho?

Si ya no quedan dudas, ahora si podemos pasar a construir una torre de arco iris.

Entonces, su profesora les hará entrega de un vaso grande y del aceite de cocina.

Deben verter dos onzas de aceite en el vaso, **luego deben revolver muy bien la mezcla.**

TORRE DE ARCO IRIS

Ahora, con mucho cuidado van a verter en el tetero el líquido que se les formó en el vaso.

Luego, su profesora les entregará otro vaso y van a echar ahí dos onzas de agua y deben esperar a que la profesora pase por cada uno de los grupos de trabajo para echarles dos gotas de colorante rojo en el vaso.
Luego, deben revolver muy bien la mezcla.

A continuación, con mucho cuidado van a echar en el tetero el nuevo líquido que se les formó en el vaso.

Después, su profesora les hará entrega de otro vaso donde les echará dos onzas de jabón líquido y de igual manera, con mucho cuidado van a echarlo en el tetero.

Ahora, la profesora les hará entrega de otro vaso, con dos onzas de miel. Deben revolver muy bien y verter con mucho cuidado el nuevo líquido en el tetero.

Finalmente, la profesora les entregará el último vaso, les echará dos onzas de alcohol y 3 gotas de colorante azul, deben revolver muy bien y verterlo con mucho cuidado en el tetero.

¡Ahora ya tienen lista la torre de arco iris!

POR ULTIMO, SOLO FALTA PONERLE LA TAPA AL TETERO Y TENER PRECAUCIÓN DE NO AGITARLO

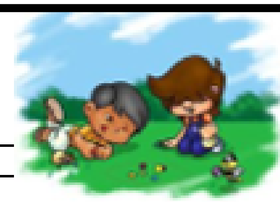
A continuación, van a responder las siguientes preguntas, pero no se olviden que antes de pasar de una pregunta a otra, deben socializar su respuesta en el salón de clases y esperar la orden de la profesora para seguir.

1) ¿Cuál es el todo en el tetero?
2) ¿En cuántas partes lo dividieron?
3) ¿Cómo podrían representar por medio de diagramas o dibujos la cantidad de onzas de jabón líquido comparado con el todo?
4) Con relación a todo el contenido en el tetero, ¿cuántas onzas hay de miel? y ¿Cómo podrían representar esto en letras?
5) Representa simbólicamente la cantidad de onzas de alcohol.

¡Hemos terminado de responder todas las preguntas!, pero para no olvidar lo que aprendimos, cada uno en su cuaderno va a escribir lo que aprendió en el día de hoy.

Anexo 5. Ficha del estudiante de la quinta actividad:

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática

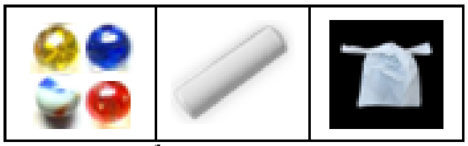


JUEGO DE CANICAS

JUEGOS MATEMÁTICOS

INSTRUCCIONES:

Es un juego para grupos de cuatro participantes.
Cada participante necesita cuatro canicas (una amarilla, una azul, una roja y una blanca) y por grupos, una tiza y una bolsita con cuatro papelitos numerados del 1 al 4.



La profesora les hará entrega de una cajita con cuatro canicas de cada color para que las repartan como se mencionó anteriormente, pero antes de hacerlo, obsérvenlas y respondan:

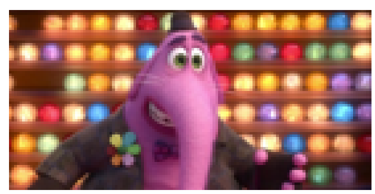
1. ¿Cuál creen que es el todo?
2. ¿Cuántas partes componen el todo?
3. Si separamos las canicas por color, ¿Cuántos subgrupos o grupitos saldrían?
4. ¿Cuál sería la fracción (simbólicamente) que representa la cantidad de canicas amarillas en comparación al todo?

¡Vamos a jugar!

- ✓ Cada participante mete la mano a la bolsa y saca un papelito. OJO: se saca sin ver.
- ✓ El participante que saque el **número 1**, trazará con la tiza el cuadrado en el piso.
- ✓ Luego, el participante con el **número 2**, cuanta 12 pasos a partir del cuadrado para trazar la raya de partida.
- ✓ Cada participante entregará tres de sus canicas al participante con el **número 3** y este las pondrá dentro del cuadrado junto con las tres canicas del mismo.
  A la canica sobrante le llamaremos, **canica de lanzamiento.**
- ✓ El participante **número 4** leerá en voz alta la siguiente instrucción del juego:
  - Cada participante en el orden que les salió el número, debe lanzar la canica de lanzamiento hacia el grupo de canicas que se encuentra en el cuadrado para sacarlas, haciéndose atrás de la raya de partida. Esto quiere decir que primero tira el número 1, luego el número 2, numero 3 y por último el número 4.
  - Si el jugador al lanzar la canica al grupo de canicas del cuadrado saca alguna de estas, la recoge y la toma para él, pero si a alguno le queda la canica de lanzamiento dentro del cuadrado, pierde un turno.
  - Una vez que todos los participantes hayan lanzado su canica de lanzamiento desde la raya de partida, volverán a lanzar desde el lugar donde quedaron, así repetidamente hasta que no queden canicas en el cuadrado y gana el jugador con más cantidad de canicas.

Una vez que hayan terminado de jugar y sepan cual es el ganador del grupo, cada uno responderá las siguientes preguntas en su cuaderno.

Pero antes, ¡ten en cuenta que antes de pasar de una pregunta a otra, debes socializar tu respuesta en el salón y esperar la orden de tu profesora para seguir!



5. Representa por medio de diagramas o dibujos la cantidad de canicas de color amarillo con las que quedaste comparado con las 16 canicas que se les entregó al inicio del juego.
   SUGERENCIA: Si no quedaste con ninguna canica de ese color, entonces solo escribes "no tengo canicas de ese color"
6. Escribe como se lee fracción que representa la cantidad de canicas de color rojo con las que quedaste comparado con las 16 canicas que se les entregó al inicio del juego.
7. ¿Será que si unen todas las canicas de cada uno de los cuatro participantes que componen el grupo, obtendremos nuevamente el todo?, ¿por qué?

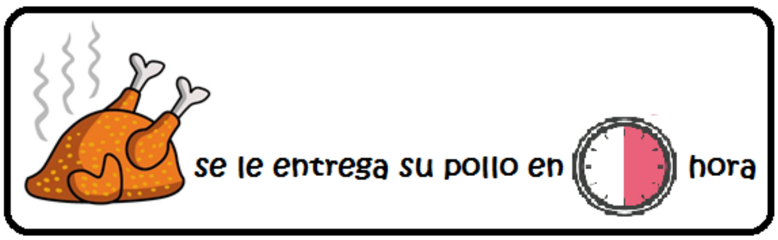
¡Han terminado de responder todas las preguntas!, pero para no olvidar lo que aprendieron, cada uno en su cuaderno va a escribir lo que aprendió en el día de hoy.

Anexo 6. Prueba final o evaluativa.

NOMBRE:
FECHA:
GRADO:

1. Marca con una X la respuesta correcta:
Si debe dividir un circulo de cartulina en 8 partes iguales, ¿cuántas veces debes doblar?
   A. Se debe doblar 8 veces
   B. Se debe doblar menos de 8 veces
   C. Se debe doblar más de 8 veces

2. Observa el aviso.



¿en cuánto tiempo entregan el pollo?

   A. En $\frac{1}{4}$ de hora

   B. En $\frac{1}{2}$ de hora

   C. En 1 hora

   D. En 2 horas

3. Completa la tabla teniendo en cuenta el siguiente enunciado:
Se parte una torta en **ocho partes iguales**, de las cuales **me como tres**.

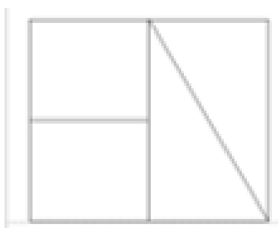
Representa la cantidad de partes que fueron consumidas comparadas con la torta completa

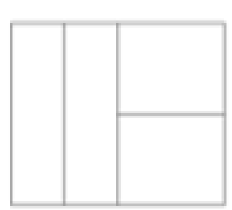
Representación por medio de diagrama o dibujo	Representación simbólica	Representación escrita

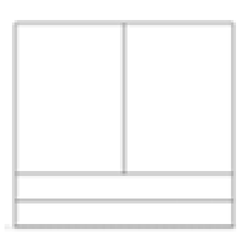
4. Si tengo una galleta y la quiero repartir entre tres niños, ¿Cómo lo haría?

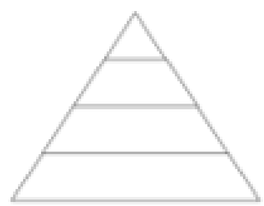
5. Nicolás tiene una gaseosa de 50 onzas y decide repartir de a 5 onzas de gaseosa para sus 10 amigos que habían invitado a su fiesta, pero desafortunadamente ninguno de los amigos pudo ir, por lo que a Nicolás le tocó volver a vaciar las gaseosas a la botella
¿Cuántas onzas debe de haber en la botella después de vaciarlas?

6. Marque con una X, aquellos diagramas o dibujos que tengan todas sus partes iguales:

a) 

c) 

b) 

d) 

7. Juan y María compraron una pizza de igual tamaño para cada uno, la pizza de Juan es hawaiana y la de María es de champiñones.
La pizza de Juan estaba dividida en 4 partes iguales, de las que se comió 2, mientras que la pizza de María estaba dividida en 8 partes iguales, de las que ella se comió 4. ¿Quién habrá comido más pizza? ¿Por qué?

8. En una reunión de amigos, hay 3 niños y 4 niñas. Escribe la fracción que representa la cantidad de niños (hombres) con respecto al total de amigos que asistieron a la fiesta.