UN ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DEL CONCEPTO DE CARDINAL EN LA OBRA DE GEORGE CANTOR

SEBASTIÁN ORTIZ USUGA

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Lic. En educación básica con énfasis en matemática.

Santiago de Cali

2018

UN ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DEL CONCEPTO DE CARDINAL EN LA OBRA DE GEORGE CANTOR

SEBASTIÁN ORTIZ USUGA

Código: 1324229

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Lic. En educación con énfasis en matemática.

DIRECTORA

YASMIN JOHANNA GARCIA

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Lic. En educación básica con énfasis en matemática.

Santiago de Cali

2018

Dedico este trabajo a:

Mis padres, Argemiro Ortiz y Anna Milena Usuga, por su entrega, sacrificio y esfuerzo durante mi proceso de formación.

A mis hermanos, Oscar Iván y Santiago, por su vos de aliento y comprensión.

A mi novia, Karen porque siempre estuvo apoyándome cuando más lo necesitaba.

Agradecimientos:

En primer lugar, al Dios el cual yo sé que me dio la fuerza para seguir.

Agradezco a mis Padres, Argemiro y Anna Milena, por el afecto y sacrificio que hicieron para que yo continuara con mis estudios. A mis hermanos, porque de alguna u otra manera, me ayudaron con mi proceso académico. A mi novia, la cual hizo parte de todo este proceso y me dio la fuerza frente a la adversidad para continuar.

Agradezco a la profesora Jazmín Johanna García, por emprender este proyecto conmigo y juntos hacerlo realidad. Por su trabajo, dedicación y tiempo para cada una de mis inquietudes y reuniones en post de mi trabajo de grado.

Finalmente, a mis evaluadores la profesora Maribel Anacona y al profesor Celimo, por haber leído este trabajo y por cada una de sus recomendaciones para poder culminar con éxito este trabajo de grado.

UN ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DEL CONCEPTO DE CARDINAL EN LA OBRA DE GEORGE CANTOR

Resumen

En este trabajo de grado se hace un análisis histórico-epistemológico del desarrollo del concepto de número cardinal, a través de tres autores, hasta llegar a su formalización: Aristóteles, Galileo y Bolzano, pasando por la última etapa, G. Cantor. Se comienza por la etapa del infinito potencial, hasta refutarlo y luego formalizar el infinito actual. Este trabajo se centra en identificar obstáculos epistemológicos, los cuales en alguna parte de su desarrollo tuvieron una no-continuidad o ruptura de su concepción; centrándose en el concepto de número cardinal. Además, se hará un estudio sobre la importancia de los axiomas de Zermelo-Fraenkel para la teoría abstracta de conjuntos de Cantor. Por último, se caracterizarán algunos de los obstáculos epistemológicos y se hará una reflexión sobre la importancia de hacer un estudio histórico para los docentes en formación, en este caso, un estudio de número cardinal en la teoría de G. Cantor.

Palabras claves: Obstáculo epistemológico - Número cardinal – Infinito potencial – Infinito actual – Transfinito – Alephs

Abstract

In this work of degree a historical-epistemological analysis of the development of the concept of the cardinal number is done, through three authors, until it reaches its formalization: Aristotle, Galileo and Bolzano; and going through the last stage, G. Cantor. Beginning with the stage of potential infinity, to refute it and then formalize the current infinity. This work focuses on the identification of epistemological obstacles, those in which a part of their development is included has no continuity or rupture of its conception; focusing on the concept of cardinal number. Also, on the other hand, a study has been done on the importance of Zermelo-Fraenkel's axioms for the abstract theory of Cantor's sets. Finally, some of the epistemological obstacles will be characterized and a reflection will be made about the importance of doing a historical study for the teachers in formation; in this case, a study of cardinal number in G. Cantor's theory.

Keywords: Epistemological Obstacle - Cardinal number - Potential Infinity - Current Infinity - Transfinite – Alephs

Uno de los aspectos centrales para el desarrollo de las matemáticas, fue estudiar el concepto del infinito, ya que desde la antigüedad griega fue objeto de mucha polémica, con la aceptación únicamente de un infinito; el potencial. Además, su proceso de estudio perduró muchos años, hasta quizá, en la actualidad; pasando por su instauración y formalización en el siglo XIX con G. Cantor.

Históricamente el infinito se ha formalizado con el paso del tiempo, y también se ha evidenciado una transformación de dicha concepción. Ejemplo de ello, se evidenció en los transfinitos de Cantor, descubriendo que hay infinitos más grandes que otros, por ejemplo, el conjunto de los reales ($\mathbb{R}$) es más grande que el conjunto de los naturales ($\mathbb{N}$).

Muchos autores han trabajado en la idea del infinito, como es el caso en este trabajo; se evidencian aportes y obstáculos que se dieron en la formalización del concepto de número cardinal. Entre ellos están, Aristóteles, Galileo, Bolzano y Cantor. Cada uno de estos hicieron aportes significativos y algunos provocaron limitaciones o problemas, como se dijo anteriormente. Para ello se analizó a cada autor, dependiendo la época a la cual pertenecían.

En el capítulo 2, se busca hacer un estudio de corte histórico sobre los antecedentes que se ha tenido de la noción del número cardinal; avances y retrocesos que hubo en su formalización, y la conexión que tiene dicho concepto con el infinito. Ha sido esta la razón, por la cual se encuentra una importancia en la línea histórica de Aristóteles, Galileo y Bolzano. Esta línea nos permite ver el desarrollo de la noción del número cardinal.

En este capítulo presentaremos y analizaremos a Aristóteles, quien postuló la idea del infinito en potencia. Para él, el infinito crecía indefinidamente y carecía de limites; es por ello que negaba la idea de que el infinito se pudiera contar. Además, refutaba toda idea que se tuviera de un infinito en acto y también la de cardinalidad, ya que, para Aristóteles el infinito era imposible numerarlo.

Luego, se analiza a Galileo, quien fue el que aportó la idea de biyectar conjuntos infinitos, refutando así, toda concepción que se tenía del infinito en potencia, con la cual se venía ligada desde Aristóteles. Para esto, se mostrará la paradoja de la rueda y la paradoja de los cuadrados, la cual consiste en hacer biyecciones entre dos círculos concéntricos y polígonos concéntricos, uno más grande que otro, y también entre un conjunto y un subconjunto propio, llegando a la conclusión que hacen el mismo recorrido ambos círculos y que ambos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos, respectivamente.

Por último, en el capítulo 2 se trata a Bolzano, quien fue el primero en instaurar la concepción del infinito en acto, según (Ortiz, 1994), sin embargo, no logró ir más allá de formalizar dicho infinito. Ya que trabajó con la misma idea que Galileo, la cual fue la biyección. No obstante, tuvo un confrontamiento conceptual del tipo parte-todo, pues hacía biyecciones entre conjuntos y subconjuntos propios, para determinar la numerosidad de ambos conjuntos, sin embargo, llegó a la conclusión de que la biyección sea un buen criterio para ello (Waldegg, 1996).

De esta manera y finalmente, en el capítulo 3, se evidenciará la formalización del concepto del número cardinal, y por supuesto la teoría de conjuntos moderna, desarrollada por G. Cantor. Sin embargo, con la ayuda de Dedekind, se logró desarrollar de manera concreta dicha teoría. En el capítulo 3, también se analiza cómo y cuál fue el aporte de Dedekind a la teoría de los transfinitos y a la teoría de conjuntos moderna, y también la influencia que tuvo en Cantor, para poder constituirla.

También, se analiza la génesis de cómo se instauró el concepto de número cardinal y cardinal transfinito, el cual fue gracias a Cantor. Con ello, se presentan algunas de sus demostraciones y definiciones, como la de los números algebraicos; la correspondencia biunívoca de los conjuntos naturales ($\mathbb{N}$), con el conjunto de los enteros ($\mathbb{Z}$) y racionales ($\mathbb{Q}$), entre otros; además, del continuo de los números reales. Todo esto, seguido con la aritmetización del infinito.

Sin embargo, Cantor tuvo algunos problemas en algunas de sus definiciones, como la definición de conjunto, entre otras, las cuales dieron surgimiento a contradicciones y paradojas en su teoría. Es por ello, que en el capítulo 4 se aborda la axiomática de *Zermelo-Fraenkel*. Ya que los axiomas son principios de existencia y con ello se va construyendo una red más compleja de conjuntos; para que de esta forma se eviten las paradojas (Recalde, 2017).

En este orden de idea, se hace un análisis a fondo, de los obstáculos que surgieron en cada una de estas etapas o épocas de aquellos matemáticos que trataron el infinito, tanto potencial, como actual. Todo esto encaminado a conceptualizar el número cardinal; aquel proceso que tuvo en su desarrollo para poder legitimarse. Viendo un obstáculo epistemológico como el proceso que tuvo dicho concepto a través de la historia, y éste tuvo un cambio radical o una no-continuidad del mismo concepto (D´Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sbaragli, 2010).

Por último, se hace una reflexión a profesores en formación, la cual consta de la importancia de un estudio histórico-epistemológico del “porqué”, “para qué” y “cuál” es el valor que tiene hacer este tipo de estudios.

Capítulo 1: Proyecto

1.1 Planteamiento del problema

El proceso histórico de la noción de cardinal no solo lleva consigo mismo un obstáculo epistemológico, entendiendo como "obstáculo epistemológico la no continuidad o cambio radical de algún concepto" (D´Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sbaragli, 2010) en este caso la concepción del infinito en acto; ya que en la obra de George Cantor la Teoría de conjuntos la generalizó y desarrolló bajo la idea de que los conjuntos son colecciones infinitas y con esto se desarrollaron ciertos axiomas para evitar no llegar a muchas contradicciones o paradojas en su misma teoría como: la llamada paradoja de Burali-Forti, paradoja de Cantor o la conocidísima paradoja de Russell, entre otras.

A partir de algunos obstáculos que se presentarán en el proceso de formalización del concepto de infinito actual y del número cardinal, se pondrán en reflexión la importancia de una fundamentación en la teoría de conjuntos para poder enfocarnos en el cardinal y el poder que tiene el infinito en ella.

Lo anterior conlleva al cardinal como aspecto epistemológico y de cómo se ha ido desarrollando a través de su historia a partir que se construyó la teoría de conjuntos con base en los infinitos de Cantor.

La finalidad de este estudio histórico-epistemológico será construir y formalizar el concepto de cardinal tal y como lo realizo Cantor. Analizar cómo fue su construcción, luego cómo se fundamentó y finalmente cómo se formalizo tal concepto. También analizar los obstáculos que se presentaron a través de la historia, hasta llegar a la postmodernidad, respectivamente en cada una de esas etapas mencionadas anteriormente. Teniendo en cuenta la teoría de George Cantor y de Zermelo.

De esta manera, lo que tratamos de preguntarnos, lo ajustamos de la siguiente manera:

¿Cuáles son los obstáculos que se presentaron en el proceso de la formalización del concepto de número cardinal?

A lo largo de la historia, el infinito se ha tomado como un concepto un poco aislado de la realidad o dándole propiedades que no son los verdaderos significados. Habitualmente la idea que se tiene de infinito en la sociedad, lo asocian a algo imaginario, poético o filosófico, sentimientos u objetos que tal vez no se podrían clasificar de manera fácil. Estas definiciones o estos atributos que le dan al infinito o lo asocian a él, aleja al verdadero concepto del infinito matemático.

Por lo general la idea de infinito que aparece en el imaginario colectivo es poética o filosófica, relacionado a amores u odios inconmensurables, a sentimientos y sensaciones y descripciones de objetos que exceden la posibilidad de ser puestos en palabras, algo infinito suele ser algo indescriptible, para lo cual, todos los adjetivos resultan escasos. Y de esta manera ha aparecido también en la historia de la ciencia (Lestón, 2007, p.53).

Desde la antigüedad griega, pasando por la edad del renacimiento y terminando en la postmodernidad; dado esto, se pondrá la atención en George Cantor quien fue pionero en la Teoría de Conjuntos y que, de una u otra manera, construyó tanto la idea del infinito actual, como la teoría de los transfinitos y, por supuesto la teoría de conjuntos. Teniendo en cuenta lo anterior, se centrará en el concepto de número cardinal, sobre el cual vamos a poner todas nuestras miradas y sobre todo en su construcción histórica.

En principio, la teoría cantoriana de conjuntos infinitos tuvo mucha resistencia. Se le criticaba fundamentalmente la poca rigurosidad de sus presentaciones, las cuales se tildaban de ligeras, demasiado intuitivas y repletas de matices psicológicos. Como respuesta a sus detractores, Cantor escribe Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinitos). En esta obra, publicada en dos partes (la primera en 1895 y la segunda en 1897), Cantor formaliza una teoría intuitiva de conjuntos (Recalde, 2017, p. 341-342). Para esto Cantor tuvo que definir lo que es un conjunto y con las definiciones que da sobre conjunto, se analizarán aquellos obstáculos que derivan de ello.

Mencionado lo anterior buscamos en este trabajo estudiar la obra de George Cantor sobre el infinito para, finalmente, formalizar el concepto de cardinal, de manera que se vea explícito el trabajo del autor sobre dicho concepto. Se busca, también, ver de manera precisa cómo tomaban tal concepto en el siglo XIX y rastrear la actualización del concepto cardinal desde entonces hasta la actualidad. Se quisiera, con este estudio, que los docentes vean necesario el punto de vista histórico-epistemológico del concepto de cardinal al momento de dar el curso de Teoría de Conjuntos y ver también la importancia que tiene el infinito en tal curso. Es decir, que después de este trabajo se logre una reflexión docente al momento de abordar tales conceptos y analizar por ejemplo qué conceptos previos deben de tener los estudiantes antes de comenzar a abordar el concepto de número cardinal o tener en cuenta los obstáculos que se presentaron a través de la historia para poder formalizar dicho concepto y poder identificarlos para no volverlos a cometer.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general:

Identificar y caracterizar algunos obstáculos epistemológicos que se presentan en la formalización del concepto de cardinal en la teoría de conjuntos de George Cantor.

1.3.2 Objetivos específicos:

¶ Hacer un análisis histórico-epistemológico de cómo surgió el concepto de Cardinal. desde la mirada de diferentes autores.

¶ Estudiar sobre la importancia de los axiomas dentro de la teoría de conjuntos y cómo formalizan el concepto de cardinal.

¶ Hacer una reflexión dirigida a docentes en formación de la Lic. En matemáticas sobre los posibles obstáculos histórico-epistemológicos que deben tener en cuenta al momento de poner en práctica la teoría de conjuntos y sobre todo el concepto de cardinal.

1.4 Antecedentes

El concepto de número cardinal es relativamente nuevo a comparación del surgimiento de la matemática. Tal concepto en la actualidad ya ha tenido un proceso de construcción y es formalizado, con la ayuda de George Cantor, quién fue el pionero de la teoría de conjuntos y por ende del número cardinal, entre otros muchos autores que trabajaron tal concepto; cada uno de estos autores ha aportado materiales para la sociedad científica como libros, artículos, revistas y para la fundamentación de hoy día en materia de trabajos de grado, etc. Particularmente muchos de estos trabajos se desarrollaron en un momento histórico, como son los trabajos de Aristóteles, Galileo Galilei, Zenón de Elea, Bolzano, Dedekind, Cantor, entre otros. Nuestro estudio de investigación es histórico-epistemológico del concepto de cardinal en la teoría de conjuntos de George Cantor. A continuación, se describen aquellas fuentes que contribuirán al soporte de nuestro estudio y que formalizará el concepto de cardinal.

En Recalde (2017), se presenta cronológicamente un desarrollo histórico de las matemáticas, teniendo en cuenta los autores y sus épocas más representativas que contribuyeron en el desarrollo de las matemáticas y lo que son ahora; autores como Euclides, Pitágoras, Descartes, Cauchy, Dedekind, Cantor, entre otros. El libro expone cierta cantidad de capítulos, presentando en cada uno de ellos desde el nacimiento o la construcción de las matemáticas hasta como se ha formalizado actualmente dicha ciencia. Esta investigación del libro de Recalde nos permite analizar nuestro objeto matemático, sobre todo desde el surgimiento del concepto del número cardinal, hasta su formalización con miradas de diferentes autores, y el principal, Cantor. Claro está, que este estudio lo abordamos desde una mirada histórica-epistemológica para poder ir formalizándolo desde el concepto de infinito, para luego establecer la teoría de conjuntos, junto con el concepto de número cardinal. Por lo cual, este libro nos sirve como antecedente para poder abordar nuestro objetivo como una mirada histórica-epistemológica.

Por otra parte, en Aponte (2014) se realiza un estudio acerca de la noción del infinito en George Cantor para poder estudiar el tamaño de las colecciones infinitas y poder trabajar con una aritmética infinita, que sirvió para la generalización de una aritmética ordinaria, de esta manera es como se puede sustentar el desarrollo del pensamiento matemático a través del desarrollo de fundamentos axiomáticos como los que se trabajan en la teoría de conjuntos actualmente. Con base a esto podremos dar algunos sustentos de la axiomatización que se utiliza en George Cantor y poder mirar la teoría de conjuntos desde sus raíces, la cual es el infinito, resaltando que este trabajo fue un estudio histórico-epistemológico de tal noción, la cual es uno de nuestros propósitos.

Este estudio histórico-epistemológico de la noción del infinito se aborda del lado educativo y nos da cabida para poder brindar algunas reflexiones educativas para el curso de teoría de conjuntos de la Universidad del Valle, por lo que lo consideramos un documento de suma importancia para nuestra investigación.

García (2014), hace un estudio basado del "horror al infinito" desde la antigüedad griega, y con esto hace una búsqueda exhaustiva de obstáculos epistemológicos propios de la tensión entre el infinito actual y potencial en la objetivación del concepto de límite. Para este estudio tiene en cuenta autores referentes como Pitágoras, Zenón de Elea, Demócrito, Platón, Aristóteles, Euclides, Arquímedes, entre otros.

A partir de esto, vemos cómo el infinito o las distintas concepciones del infinito se vuelven un obstáculo epistemológico, teniendo en cuenta que tal concepto fue la raíz o el nacimiento de la teoría de conjunto y con esto, el concepto de número cardinal. Es por esta razón, por la cual vemos pertinente el estudio a la teoría de conjuntos y sobre todo a nuestro objeto matemático a observar, el cual es el número cardinal.

Por otra parte, en un sentido más intuitivo del concepto infinito tenemos a Lestón (2007), la cual hace un estudio de ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares, e intenta detectar la forma en que dichas ideas surgen y cómo se comportan como parte del modelo mental que el estudiante forma para el infinito, afectando la construcción del infinito matemático. La autora expone ciertas ideas en las que son generados el concepto del infinito en el ámbito de lo social[1] y lo cultural. Evidencia tal concepto de infinito desde distintas perspectivas en diferentes culturas como los Jainas, los griegos, la religión, hasta llegar a la actualidad, y todo esto lo asocia al infinito fuera de la escuela y desde diferentes experiencias como lo son el infinito intuitivo, el infinito en la literatura, y por último el infinito en la escuela, fuera de la clase de matemáticas y dentro de ella. En cada una de estas experiencias la autora expresa situaciones y circunstancias de contextos social, y nos dice que estas determinan la necesidad de un concepto como lo es el infinito.

Lestón (2011), hace un estudio sobre la noción del infinito abordándolo al contexto escolar como un discurso matemático en el aula desde un ambiente socioepistemológico[2], a raíz de esto detectó procesos, significados y preguntas que provocaron el surgimiento de esta noción. Evidencia dos infinitos en este estudio, uno vinculado con el álgebra y el otro con el análisis. Es un estudio el cual aporta mucho en dar reflexiones a la formación de docentes y en pro de mejorar la escuela media.

[1] Línea de investigación a la que adhiere es a la construcción social del conocimiento, entendiendo a toda construcción de conocimiento como el resultado de las interacciones que se dan dentro de un grupo social, que comparte un bagaje cultural común (Lestón, 2007, p.1)
[2] que entiende la construcción del conocimiento matemático como el resultado de acciones situadas en un escenario particular que se analizan de manera sistémica.

1.5 Marco teórico

El desarrollo histórico-epistemológico y la aprehensión del número cardinal son el objeto de estudio de nuestra investigación, desde el punto de vista de diferentes autores con la mirada siempre puesta en formalizar el concepto de número cardinal; la formalización es abordada como la teoría que sostiene definiciones, teoremas, axiomas, etc., que se pueden establecer luego de un estudio riguroso.

A través de la historia el concepto de número cardinal se fue construyendo, dado al descubrimiento implícito que hizo Bernard Bolzano del infinito actual y luego formalizado por George Cantor. En una cultura donde solo se aceptaba el infinito potencial, fue Bolzano el primero en tratar de fundamentar el infinito actual (Ortiz, 1994).

Cuando pensamos en los avances y retrocesos que han tenido cada uno de los conceptos matemáticos, es inevitable pensar en los fundamentos filosóficos de la cultura griega, y nuestro trabajo no es la excepción, se pretende entender el pensamiento griego que permite concebir las bases para formalizar el infinito actual a través de la noción de cardinal.

Para entender el pensamiento griego antiguo en relación con la manera en que se entendían y manejaban los procesos infinitos es conveniente revisar las concepciones de algunos filósofos como Aristóteles y Platón, y estudiar los planteamientos teóricos desarrollados por Euclides en los *Elementos*. En el libro I de esta obra se plantean 10 principios fundamentales: 5 nociones comunes y 5 postulados (Euclides, 1991),[3] los cuales sirven de base para establecer una teoría axiomática

[3] Tomado. (Euclides, 1991)

de la geometría euclidiana y una teoría intuitiva de números. Podemos identificar un primer acercamiento a lo infinitamente grande con el postulado 2 del libro I, al establecer que *un segmento de línea recta se puede extender indefinidamente en una línea recta*, y lo infinitamente pequeño con la proposición X.1: D*adas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite sucesivamente este proceso, quedara una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas.*[4]

Los problemas con los procesos infinitos empiezan a hacerse evidentes con los desarrollos de Zenón de Elea (450 a.c), quien intenta controvertir la idea de espacio, tiempo y movimiento en 4 planteamientos, que han pasado a la posteridad como "las paradojas de Zenón." En estos argumentos podemos observar que los procesos de divisibilidad infinita nos llevan a contradicciones con la experiencia empírica puesto que con ellas se concluye que el movimiento no existe.

Analicemos dos de estas paradojas con el propósito de entender el "horror al infinito" de los antiguos griegos al plantear un razonamiento que guarda, de manera implícita, una idea primigenia del concepto de límite.

> ***Aquiles y la tortuga***
> *Aquiles, llamado "el de los pies ligeros" y el más hábil guerrero quien mató a Héctor, decide salir a competir en una carrera contra una tortuga. Ya que corre mucho más rápido que ella, y seguro de sus posibilidades, le da una gran ventaja inicial. Al darse la salida, Aquiles recorre en poco tiempo la distancia que los separaba inicialmente, pero al llegar allí descubre que la tortuga ya no está, sino que ha avanzado, más lentamente, un pequeño trecho. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, ésta ha avanzado un poco más. De este modo, Aquiles no ganará la carrera, ya que la tortuga estará siempre por delante de él. (Aristóteles, Fisica, 1995)*

[4] Tomada de (Euclides, 1991)

Esta paradoja nos muestra el hecho de que Aquiles no alcanzará a la tortuga, que ha sido símbolo de lentitud a lo largo de la historia, con lo que Zenón desea mostrarnos que no podemos confiarnos en lo que percibimos del mundo, que puede ser una ilusión y en particular esta paradoja tiene como intención mostramos que el movimiento no existe, pero lo que más nos llama la atención es que quería mostrar que cualquier distancia es infinita.

Veamos como confirma esta hipótesis con una versión de la paradoja de la dicotomía

> ***La dicotomía***
> *Zenón está a ocho metros de un árbol. Llegado un momento, lanza una piedra, tratando de dar al árbol. La piedra, para llegar al objetivo, tiene que recorrer antes la primera mitad de la distancia que lo separa de él, es decir, los primeros cuatro metros, y tardará un tiempo (finito) en hacerlo. Una vez llegue a estar a cuatro metros del árbol, deberá recorrer los cuatro metros que le quedan, y para ello debe recorrer primero la mitad de esa distancia. Pero cuando esté a dos metros del árbol, tardará tiempo en recorrer el primer metro, y luego el primer medio metro restante, y luego el primer cuarto de metro... De este modo, la piedra nunca llegará al árbol. (Aristóteles, Física, 1995)*

Es Aristóteles en su libro *Física* que hace un análisis de estas paradojas dando una definición de la noción del continuo y una explicación a partir de él, la cual, consideraba característica de todo movimiento. Para Aristóteles el continuo es divisible en partes que no son divisibles porque si fuese divisible en partes indivisibles, un indivisible estaría en contacto con un indivisible, ya que los extremos de las cosas que son continuas entre sí son uno y están en contacto.

Intuitivamente la continuidad es una unión de los extremos de las cosas que constituyen la misma cosa y se mantiene siempre unido, por tanto, para Aristóteles no había existencia del infinito actual, dedicó así los capítulos 7 y 8 de su libro III de *Física* la refutación de dicha inexistencia. Solo aceptaba el infinito como algo no terminado, algo que no lograba su ser y al que siempre le puedo hallar algo fuera de él, es decir, el infinito potencial. Aristóteles demanda a un infinito potencial: *suponer un momento inicial sería suponer que una división infinita pueda alcanzar términos últimos indivisibles*. (Aristóteles, Fisica, 1995)

Para Aristóteles resultaba razonable pensar que no hay un infinito por adición tal que pueda superar toda magnitud, pero en la división sí puede haberlo; porque, como la materia, el infinito está dentro de algo que lo contiene, y lo que lo contiene es la forma. Le parecía también razonable pensar que en los números el más pequeño sea el límite, pero que en la dirección del más grande toda cantidad siempre puede ser superada. El infinito, para Aristóteles, no es el mismo para las magnitudes que para el tiempo ni el movimiento, son de naturaleza distinta. Tomando el ejemplo de Aquiles y la Tortuga, Zenón concluye que "el movimiento es imposible", es decir, que toma el espacio como infinitamente divisible, que parte de un punto a otro y por ende tendrá que siempre recorrer la mitad de la trayectoria, pero entonces tendría que alcanzar antes, la mitad de la mitad y así sucesivamente. Por lo tanto, García (2014) Aristóteles hace la diferencia por lo que es un infinito por división y otro por añadidura y refuta a Zenón diciendo que no se puede correr en un tiempo finito un número infinito de puntos.

Posteriormente Arquímedes quien, a través del método exhaustivo, el cual ya había sido trabajado por Eudoxo en la primera mitad del siglo XVII, intenta dar una primera aproximación al tratamiento de magnitudes con procesos infinitos. Las magnitudes inconmensurables eran un claro ejemplo de ello, también sucedía algo similar con el cálculo de áreas y volúmenes como lo mostró Arquímedes. Algunos matemáticos intentaron encontrar una solución al problema, pero apareciendo en estas contradicciones como las paradojas de Zenón, demostrando que no era la salida y es así como aparece el método exhaustivo como respuesta a las paradojas surgidas bajos los procesos infinitos.

Eudoxo y Arquímedes hallarían que para encontrar la cuadratura de una figura debían encontrar su razón con otra figura que se conociera previamente.

El método exhaustivo se soporta en la proposición X1 de los *Elementos* de Euclides

> ***Proposición X1.*** *Dadas dos magnitudes desiguales, si la de mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite continuamente este proceso, quedara una magnitud menor que la magnitud dada. (Euclides, 1991)*

El trabajo de Arquímedes trató de determinar áreas y volúmenes de figuras, obteniéndolos a través de comparaciones. Su técnica fue la demostración por combinación del procedimiento llamado reducción al absurdo y el llamado método de exhausión. En términos generales la demostración consiste en una aproximación de figuras geométricas conocidas, inscritas y circunscritas sobre otra figura por conocer de manera que la diferencia entre una y otra *sea tan pequeña como se quiera*, de tal suerte que en el **límite** se considera que es equivalente. Esta frase corta pero contundente *"sea tan pequeña que se considere equivalente"* es la iniciación del cálculo con el llamado límite de una sucesión, porque precisamente en el infinito se pueden hacer afirmaciones como, "*tan cercano como se desee*".

Figura 1. Método exhaustivo aplicado a una figura en general.[5]

En el siglo XIV se hace necesario establecer un método de cálculos de áreas y volúmenes sin hacer uso del método exhaustivo presentado por Arquímedes, ya que este método presentaba limitaciones en figuras más complejas. Una propuesta es conocida por Cavalieri. En su libro *geometría, indivicibilus continuorum nova quadam ratione promota,* de la Geometría del siglo XVII, el matemático italiano Bonaventura Cavalieri establece el desarrollo teórico de lo que se conoce como el **método de los indivisibles**. El hace uso de diferentes niveles de indivisibles para instaurar los objetos geométricos. Por ejemplo: los puntos son los indivisibles de la recta, la recta de los planos y los planos de los volúmenes (*Ver figura 2*). Cavalieri plantea el principio que lleva su nombre de la siguiente manera: *"si dos volúmenes tienen igual altura y si secciones hechas por planos paralelos a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en una razón fija, entonces los volúmenes de los sólidos también están en esa misma razón* "Es con este principio que se fundamenta la geometría de los indivisibles y que se pueden calcular el volumen de algunos sólidos importantes.

Figura 2. Indivisibles de Cavalieri

[5] Haciendo cierta transposición y sea una región R no rectilínea. Tomado de (Moran, 2014)

Históricamente Cavalieri tenía una posición muy ambigua, pues mientras acepta que la naturaleza no está constituida por indivisibles, fundamenta su cálculo de volúmenes sobre ellos. Por lo que en un escrito le aclara a Galileo que los indivisibles no son más que un instrumento para el cálculo de cuadraturas y su tratamiento es independiente del continuo. Cavalieri se adhiere al concepto de infinito y continúo que trabajó Aristóteles, intentando dar un tratamiento algebraico de los procesos infinitos a través del proceso de "suma de todas las líneas" que lo simboliza como *omn,* haciendo un tratamiento aritmético y estableciendo una generalización de lo finito a lo infinito. (Recalde, El cálculo y la solución de las cuadraturas, 2012)

Desde su visión, Cavalieri hace la suma a partir del proceso del *ominus* que *supone* la convergencia de una suma de una cantidad no numerable de indivisibles. Su método no se basa en el uso de proceso de paso al límite en la manera como se fue dando en el proceso evolutivo que llegó a nuestro concepto de límite, pero en este proceso podemos encontrar indicios de cómo fue surgiendo la necesidad de formalizar la noción de límite y su directa relación con lo que ocurre con las magnitudes infinitas.

Luego nos encontramos con otro obstáculo asociado al infinito visto como número cardinal, el cual lo vemos en el *Libro v de Elementos* de Euclides, que nos dice que "el todo es más grande que sus partes"[6]. Implícitamente, esto nos muestra un cierto obstáculo epistemológico del concepto de número cardinal, ya que intuitivamente podemos ver la concepción del cardinal en esa proposición. En *Las paradojas del infinito* de Bernard Bolzano, él se plantea comparar conjuntos infinitos y ordenarlos, por medio de la biyección, tomando dos de ellos cuando uno es subconjunto propio del otro, por lo que Bolzano tiene como consecuencia la proposición X, ya que a partir de la correspondencia uno a uno (biyección) se puede establecer una igualdad con la parte

[6] Proposición X.

y el todo. “Ante esta disyuntiva, Bolzano niega que la biyección sea un buen criterio para determinar la numerosidad de los conjuntos infinitos, cuando está presente una relación del tipo parte-todo” (Waldegg, 1996, p.105). Veamos la siguiente paradoja de Aristóteles:

Se considera dos ruedas formadas por circunferencias concéntricas con diferente radio (*Ver figura 3*). Dado esto, si las ruedas dan una vuelta completa, la longitud del segmento donde se apoya la circunferencia exterior es mayor a la longitud del segmento donde se apoya la circunferencia interior, sin embargo, ambas circunferencias, tanto la interior como la exterior han dado una vuelta completa, con lo que se concluye que cada circunferencia se apoya sobre un solo punto y con esto se establece una correspondencia uno a uno entre los puntos de ambas circunferencias.

Con esto se vuelve a negar el axioma “el todo es más grande a sus partes”, ya que, desde el punto de vista de la paradoja de las ruedas, vemos cómo ambas circunferencias tienen el mismo número de elementos, en otras palabras, la misma cardinalidad.

Figura 3. Paradoja de la rueda de Aristóteles

Si no queremos extraviarnos en nuestros cálculos con el infinito, no debemos considerar nunca como iguales (o a una como mayor o menor que la otra) a dos cantidades infinitamente grandes que resultan de sumar los términos de dos series infinitas basándonos únicamente en el hecho de que cada término en una de ellas es igual (o mayor, o menor) que el término correspondiente de la otra (Bolzano, 1991, p. 88). Para esto Bolzano plantea la siguiente situación, como es el caso de los números cuadrados y los números naturales, más precisamente de los términos de las series infinitas

$$S1 = 1 + 2 + 3 + 4 +\ldots \text{ etc. } \quad y \; S2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 +\ldots \text{ etc.}$$

De esto se deduce, la igualdad del conjunto de sus términos, ya que también se puede poner en correspondencia de uno a uno cada uno de los términos de la serie S1 como de la serie S2.

Ciertamente no todas, como dice Kästner, pero sin duda si la mayoría de las afirmaciones paradójicas que surgen en el ámbito de las matemáticas, tienen que ver con el concepto de infinito (Bolzano, 1991, pág. 39).

1.6 Metodología

La metodología del trabajo consiste en hacer un estudio histórico-epistemológico Hermenéutico, donde se tomarán fuentes primarias y secundarias, esto con el objetivo de enriquecer nuestra mirada a la luz de la formalización del concepto de cardinal.

Esto se llevará a cabo en tres momentos:

1. Un estudio de corte histórico donde nos vamos a centrar en momentos importantes y determinar cómo los avances y retrocesos de la formalización del concepto de cardinal enriquecen nuestro trabajo. Para ello estudiaremos *Física* (1995) de Aristóteles, *Paradojas del infinito (1991)* de Bernard Bolzano*, Fundamentos (2006) y Contribuciones* de Cantor.
2. Se realizará un estudio exhaustivo sobre la forma como se presenta el concepto de cardinal a partir de la teoría axiomática y como dichos axiomas

fundamentan la matemática. Para ello se estudiará el *libro Introduction to Set Theory* De Tomas Jech.

3. A la luz de los hallazgos, se hará un análisis y se pondrá en reflexión algunos de los obstáculos epistemológicos que surgieron sobre el proceso del concepto de cardinal. Con esto, se centrará en algunas concepciones, teniendo en cuenta cómo la abordaban cada uno de los autores antes mencionados y estudiados. Para ello se hará un estudio de (Waldegg, 1996) y artículos y tesis de docentes de la Universidad del Valle.

Capítulo 2: Génesis y antecedentes del concepto de Cardinal

En este capítulo se trazará una línea histórica de la noción de cardinal y de cómo se instauró dicho concepto desde sus orígenes. Se comienza con la mirada de distintos autores como, Aristóteles, Galileo Galilei y se termina en Bernard Bolzano, para ello se tiene en cuenta sus obras principales, como *Física*, *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias* y *Las paradojas del infinito*, respectivamente; en este sentido, se habla del concepto o del surgimiento del número cardinal o potencia, dicho de otra manera, en algunos de los autores antes mencionados, abordaremos el infinito actual, el cual fue y es, un concepto demasiado riguroso, ya que dicho concepto fue muy polémico en su momento, por su aceptación. Ortiz (1994), decía que, en ese entonces, solo se aceptaba el infinito potencial y fue Bernard Bolzano el primero en fundamentar el infinito actual.

Comenzando por Aristóteles, quien fue uno de los más grandes pensadores de la antigüedad griega que refutaba la idea de que existiese un infinito actual; ya que para él no había cabida para ello, pues esto generaría contradicciones o paradojas y solo existía un infinito en potencia, el cual no tenía un límite o siempre crecía infinitamente.

Más adelante, en una época en la cual no se podían poner en tela de juicio, concepciones acerca de la ciencia, las cuales refutara a la iglesia, aparece Galileo Galilei, refutando la idea que tenía Aristóteles del infinito actual y el axioma parte-todo de Euclides.

Y, por último, a quien trataremos en este capítulo es a Bolzano, quien además de refutar las ideas aristotélicas, empieza por dar una noción cercana a lo que ahora se le llama infinito actual y se acerca un poco a las ideas de George Cantor.

En este sentido y dejándolo claro, se trabajará en este capítulo, con la noción del infinito actual, desde la mirada de los distintos autores que se van a tomar en cuenta, para poder hacer el análisis histórico del concepto o del surgimiento del cardinal.

Aristóteles (383 - 322 a.C.), discípulo de Platón, fue un filósofo y amante a la ciencia. No continuó con la idea que tenía su maestro del mundo de los sentidos y difirió un poco en ello, dejando a un lado el mundo de las ideas eternas e inmutables. Con esto empezó por interesarse en la ciencia de la naturaleza, y comenzó su camino hacia el estudio del infinito potencial.

> *Puesto que la ciencia de la naturaleza estudia las magnitudes, el movimiento y el tiempo, y cada uno de éstos es por necesidad o infinito o finito, aunque no toda cosa es o infinita o finita (como, por ejemplo, una afección o un punto, pues quizás no sea necesario que estas cosas tengan que ser o infinitas o finitas), convendrá entonces que quien se ocupe de la naturaleza investigue si el infinito es o no es; y, si es, qué es (Aristóteles, 1995, pág. 88).*

Para él solo existe la idea de un infinito, el cual era en potencia, y de esto nos daremos cuenta en su libro III de la *Física*, en donde dedica esta hipótesis en todo su capítulo B. En este libro, Aristóteles analiza la existencia del infinito actual, refutándolo de una manera un poco tímida, ya que planteaba un infinito acabado. No obstante, según la hipótesis que planteaba Aristóteles, también estaría negando el concepto de cardinalidad en los conjuntos infinitos, por lo tanto, en cualquier conjunto. De esta manera, Aristóteles (1995) afirma:

Tampoco puede haber un número infinito separado[7]*, pues un número, o lo que tiene número, es numerable; y si fuese posible numerar lo que es numerable, entonces sería posible recorrer el infinito (p.94-95).*

Con esto podremos darnos cuenta cómo Aristóteles está negando la idea de numerar los conjuntos infinitos (cardinalidad), aunque no necesariamente estaría negando la cardinalidad de conjuntos finitos, es decir, para Aristóteles no hay infinitos más grandes que otros, como lo dijo Cantor, pero si conjuntos “finitos” más grandes que otros. Para Aristóteles, no existía otro infinito que no fuera el infinito potencial, por lo que enumerar conjuntos finitos era un proceso con fin y lo único que no se podía numerar era el infinito potencial, puesto que es algo inacabado. De la siguiente manera Aristóteles contradecía la existencia del infinito actual:

Es imposible que los múltiples infinitos sean lo mismo; porque, así como una parte de aire es aire, también una parte de lo infinito sería infinita, si lo infinito fuera una sustancia o un principio. Luego lo infinito tiene que carecer de partes y ser indivisible. Pero es imposible que un infinito actual sea así, pues tiene que ser una cantidad. Luego lo infinito existe como un atributo. Pero, si así fuera, ya se ha dicho antes que no se lo puede llamar principio, sino más bien a aquello de lo cual es atributo, como el aire o lo Par. De ahí que sea absurdo lo que dicen cuántos hablan a la manera de los pitagóricos, pues hacen de lo infinito una substancia y lo dividen en partes (Aristóteles, 1995, p. 94).

[7] «Número separado» significa aquí una totalidad numérica actual, separada de la mera potencialidad, es decir, lo que se niega es que pueda haber un número numerado que sea actualmente un todo infinito. Tomado de (Aristóteles, 1995)

Como se dijo anteriormente, Aristóteles solo aceptaba la idea del infinito en potencia y no en acto, la razón era que se podría llegar a contradicciones, matemáticamente hablando del infinito actual, por ejemplo, García (2014) afirma que: "La proposición IX de los *Elementos* de Euclides "Hay más números primos que cualquier conjunto de primos", claramente se puede concluir que no existe un número primo que sea mayor a otros, el máximo; por lo que los primos son potencialmente infinitos" (p.44).

Para Aristóteles, la idea de que hay infinitos más grandes que otros, era inconcebible, y con esto llegaba a algunas contradicciones como: La magnitud no es actualmente infinita, aunque sea divisible, y de ser divisible, cualquier parte que se tomara sería también infinita; como de no existir el infinito, se derivan algunos absurdos, en consecuencia, el tiempo tendría principio y fin (Aristóteles, 1995). Con esto, es cuando Aristóteles acepta la existencia del infinito potencial o la de un infinito por adición; y niega en su totalidad la existencia del infinito en acto, sin embargo, cuando habla de las magnitudes y su divisibilidad, pone en ejemplo, que las divisibilidades de una recta resultaban rectas y con esto concluía que las partes de una magnitud nunca serán mayores al todo. De esta manera, vemos uno de los obstáculos epistemológicos del infinito de los antiguos filósofos griegos y matemáticos posteriores.

2.1.2 La paradoja de Galileo Galilei y la refutación a las ideas Aristotélicas sobre el infinito actual

Galileo Galilei (Pisa 1564; Arcetri, 1642), astrónomo, filósofo, matemático y físico italiano, perteneciente a la época del renacimiento y revolucionario de la ciencia. *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias* fue uno de sus libros más destacado en la historia de la matemática y física. Este libro, fue escrito en forma de dialogo, los cuales interviene: SALVIATI, que representa a

Galileo; SAGREDO, espíritu culto de su época; y SIMPLICIO, filósofo peripatético, quien hace el rol de Aristóteles.

Galileo, tuvo muchas refutaciones en contra de Aristóteles, tanto en la física como en la matemática, por eso en sus escritos hay mucha polémica en contra de él. Es por ello que se considera a Galileo como uno de los científicos anti-Aristotélicos.

Dicho lo anterior, lo que se concebirá es ver cómo con la teoría o ideología Aristotélica, se forma uno de los obstáculos histórico-epistemológicos sobre la concepción que se tenía del infinito actual, y con ello se pasa a dar un salto en la historia con Galileo para analizar cuáles fueron sus refutaciones anti-Aristotélicas con respecto a la concepción del infinito actual.

La concepción que tenía Aristóteles, como se planteaba en el capítulo anterior, de que el todo es mayor a sus partes; la refutaba Galileo, al decir que "la magnitud es divisible en partes divisibles": Si se coge una magnitud finita, las partes son la composición o los resultados de sus elementos que la integran. A estos últimos elementos es a lo que Galileo llamaba indivisibles. La razón que da Galileo para sostener que el continuo está formado por indivisibles, lo saca de las mismas ideas Aristotélicas de una divisibilidad indefinida.

> *«[…] siendo que la línea y todo continuo son divisibles en (partes) siempre divisibles, no veo cómo se pueda eludir que su composición sea de infinitos indivisibles, porque una división y subdivisión que se pueda proseguir perpetuamente supone que las partes sean infinitas, ya que de otro modo la subdivisión sería terminable; y de ser las partes infinitas se saca en consecuencia que son inextensas, porque (partes) extensas infinitas hacen una extensión infinita: y así tenemos al continuo compuestos por infinitos indivisibles»[8] (García, 2006, p.114).*

[8] «[…] stante che la línea ed ogni continuo sian divisibili in sempre divisibili, non veggo come si possa sfuggire, la composizione essere di infiniti indivisibili, perché una divisione e» Tomado de (García, 2006).

Para Aristóteles, el infinito era algo que no tenía fin, que carecía de límites; tenía la idea que, si se concebía la idea de un infinito distinto al potencial, es decir, en acto, por ende, las cosas infinitas se podrían contar, y era algo con lo cual no concebía en su ideología. De esta manera y refutando a Aristóteles, Galileo aparecía introduciendo una pequeña noción de infinito actual. También con él, se empieza a dar muy de lejos la noción de los transfinitos de Cantor, aunque sin nombrarlos, pero si asemejándose a tal idea.

Galileo para refutar lo precedentemente mencionado, retoma el siguiente ejemplo de la paradoja de las ruedas. Supone la (Fig. 4): Se tiene un círculo AB y esta gira en torno a su centro A sobre una base horizontal, y al cabo de una vuelta entera, éste termina volviendo a tocar la base en F. Ahora imaginemos una circunferencia menor AC, como lo muestra la figura, análogamente haciendo los mismos pasos que la circunferencia mayor, la base de la circunferencia menor vuelve a terminar de dar la vuelta entera en E, es decir, a la misma distancia que la circunferencia mayor. Sin embargo, al ser dos circunferencias distintas y una más grande que la otra, nos damos cuenta que CE, es igual a BF, es decir, que la longitud mayor AB recorre la misma distancia que la longitud menor AC.

Figura 4. Paradoja de la rueda[9]

[9] Tomado de García (2006)

Citando a García (2006), quien explica la forma de cómo Galileo resuelve la paradoja anterior:

> *Para resolver la paradoja, Galileo comienza suponiendo dos polígonos regulares concéntricos, en su ejemplo hexágonos. Tal como se ve en la Fig. 5, los lados del polígono mayor se supondrán sucesivamente sobre AS, mientras que los lados, más pequeños, del polígono menor, se "imprimirán" sucesivamente sobre HT dejando entre ellos espacios IO, PY, etc.; asimismo el centro G tocará a la línea GV en una sucesión de puntos a intervalos GC, CR, etc. (p.121).*

Figura 5[10]

Cabe resaltar que este ejemplo, el cual nos desglosa Manuel Sellés García, de cómo Galileo resuelve la paradoja haciendo uso de un hexágono regular, también es posible hacerlo con un polígono de n lados. De esta manera, usando un polígono de mil lados, al cabo de una revolución el polígono menor habrá recorrido una distancia aproximadamente igual al polígono mayor, pero discontinua y formada por mil segmentos pequeños a sus lados. De esta misma manera, si se toma dos círculos concéntricos, se haría un procedimiento análogo al de los polígonos, ya que un circulo es un polígono de infinitos lados, aunque, García (2006) afirma que hay que tener en cuenta que no se llega a ello aumentando el número de lados de un polígono al infinito.

[10] Tomado de García (2006)

Esto nos hace pensar en cómo veía Galileo el infinito. Nos hace pensar que Galileo entiende el espacio como un conjunto de lugares inextensos. Para García (2006), Galileo hacía todo convencional, de manera como lo hizo con el ejemplo de los dos círculos concéntricos. Entonces surge la duda de ¿cómo puede haber infinitos más grandes que otros? para Galileo son incomparables, y para esto muestra como ejemplo una correspondencia biunívoca de los elementos del conjunto de los números naturales y el de sus cuadrados. Galileo notó que el conjunto de los números cuadrados perfectos coordina con el conjunto de los números naturales, ($\mathbb{N}$, n^2) de tal forma que haya una relación de correspondencia de un conjunto con el otro; así, el conjunto de los números cuadrados perfectos sea una parte del conjunto de los números naturales, es decir, un subconjunto propio del conjunto de los números naturales. Por lo tanto, se dice que tienen el mismo número cardinal. Es de aquí que Galileo atribuye que los adjetivos de mayor, menor o igual, en el infinito no tienen lugar, (García, 2006):

> *«Y sin embargo cuando el Sr. Simplicio me propone líneas desiguales, y me pregunta cómo puede ser que en la mayor no haya más puntos que en la menor, yo le respondo que no hay más, ni menos, ni los mismos, sino en cada una infinitos: o si yo le respondiese que los puntos en una son tantos como en los números cuadrados, en otra mayor tanto como todos los números, y en aquella pequeña tanto como el número de los cubos, ¿no podría darle satisfacción al poner más en una que en la otra, y en cada una infinitos ?» pag 124*

Claro está, que esta idea que tenía Galileo, luego sería refutada por Bolzano y Cantor. Lo importante aquí, es que Galileo nos da una idea clara de que el infinito se puede contar, aunque aún no le atribuye la idea de mayores o menores, como en el capítulo 3 se formaliza con Cantor.

2.1.3 El surgimiento del infinito actual, una obra de Bolzano

Bernard Bolzano (Praga, 1781; 1848), matemático, filósofo y teólogo, quien hizo grandes contribuciones a las matemáticas. *Las paradojas del infinito* libro en el cual fundamenta la concepción del infinito actual, teniendo en cuenta que en su época se venía de una cultura la cual solo se acepta el infinito potencial, Bolzano fue el primero en concebir una forma distinta al infinito potencial (Ortiz, 1994). Por lo que defendió rotundamente la idea del infinito actual y enfatizó la idea de que es posible hacer una correspondencia uno a uno en conjuntos finitos e infinitos.

Para Bolzano es importante ocuparse del infinito, ya que como dice Kastner, la mayoría de las afirmaciones paradójicas de las matemáticas, provienen o surgen del concepto de infinito (Bolzano, 1991). Por lo tanto, es posible determinar si dichas afirmaciones son paradójicas o no.

Bolzano nos presenta la preocupación en su tratado de las *Paradojas del infinito*, manifestándolo de la siguiente manera: si el estudio del infinito tiene cabida dentro de las matemáticas y si objetos que carecen de realidad se podrían considerar como infinitos, además enuncia ejemplos como: los números y el conjunto de todas las verdades absolutas (Bolzano, 1991, pág. 57). Luego de esto, Bolzano prosiguió a comparar conjuntos infinitos, sin duda, esta fue la noción más cercana que se dio hasta el momento de cardinal en los conjuntos infinitos trabajada por Cantor en su teoría de los transfinitos, sin embargo, Bolzano tuvo un gran obstáculo para esto, y radicó en los subconjuntos propios del conjunto dado, donde en su párrafo ş20 afirma que:

> *Dos conjuntos pueden estar relacionados entre sí de tal manera que resulte posible*
>
> *(1) Que cada uno de los elementos de cualquiera de ellos se encuentre asociado con un elemento del otro; y (2) que uno de esos conjuntos incluya al otro como una parte propia, por lo que las*

multiplicidades que ambos conjuntos representan pueden encontrarse en las relaciones más variadas entre sí. (Bolzano, 1991, págs. 64-65).

Para ejemplificar lo anterior, Bolzano toma dos cantidades abstractas arbitrarias: los números del 0 al 5 y del 0 al 12. Claramente el intervalo (0, 5) es infinito y está contenido en el intervalo (0, 12), luego crea una relación entre ellos, afirmando que, si toma una cantidad cualquiera "x" entre 0 y 5 variable y otra cantidad "y" entre 0 y 12 variable, determina la relación entre *x* y *y* por medio de la ecuación "5y=12x". De esto se puede concluir que a todo valor de *x* le corresponde un único valor de *y* y viceversa. También queda claro que a toda cantidad de x entre el intervalo (0, 5) le corresponde una cantidad en el intervalo (0, 12) por lo que se podría concluir que a ningún objeto de cada intervalo quedaría sin ser relacionado con uno del otro intervalo (Bolzano, 1991).

Bolzano hace un segundo ejemplo para clarificar más la idea que se tiene de subconjunto propio y esta vez lo hace con un objeto espacial, haciendo uso de una recta y de una proporción. Tal como se ve en la Fig. 6. Bolzano (1991) "Sean entonces *a, b, c* tres puntos cualesquiera en una recta y considérese que la razón ab: ac es del todo arbitraria, excepto en que *ac* es mayor que *ab*" (p.66).

a b c

Figura 6.

En tal caso, es claro que los puntos que hay en ac, es más grande que los puntos que hay en *ab*, ya que los puntos que hay en ac es igual a la cantidad de puntos que hay que *ab* más *bc* (y que no aparecen por supuesto en *ab*).

Por lo que Bolzano, hace de este segundo ejemplo, análogo al del segundo, como a continuación lo veremos. Bolzano (1991), sea, en efecto, *x* un punto cualquiera en *ab*. Tenemos entonces, considerando como dada *ax* y especificando *y* por medio de la proporción

$$ab: ac \; = \; ax: ay, \text{ (p.66).}$$

qué *y* es también un punto en ac.

De aquí se puede concluir que dada la relación $\boldsymbol{ax}: \boldsymbol{ay}$ a cada punto de ab le corresponde un punto de ac y viceversa y que no habrá ningún elemento de ac que no aparezca en algún par ni tampoco habrá ningún elemento que se parezca en más de un par. Vemos cómo claramente Bolzano trabaja con la biyección en estos dos ejemplos dados.

Esto significa que dos conjuntos pueden tener el mismo tamaño, incluso si uno es subconjunto propio del otro, sin embargo, Bolzano se ve detenido por esta paradoja, ya que su intuición sigue dogmatizada con que “el todo es más grande que sus partes”, aunque en su libro de *las paradojas del infinito* trabaja con la biyección entre conjuntos los números naturales, y un subconjunto propio de él, como lo son los números cuadrados.

Fue sin duda Cantor, el primero en formalizar la teoría de conjuntos moderna y su teoría de los transfinitos. No obstante, Bolzano fue quien inició el trabajo con el infinito actual y la idea de biyección en conjuntos infinitos; teniendo en cuenta este último como un problema o un obstáculo para Bolzano. Ya que Bolzano establecía biyecciones entre conjuntos cuando uno era subconjunto propio (completamente contenido) del otro. Esta característica, tenía como consecuencia la negación del axioma *El todo es mayor que la parte*, como se vio en el capítulo dedicado a Galileo. “Ante esta disyuntiva, Bolzano niega que la biyección sea un buen criterio para determinar la numerosidad de los conjuntos infinitos, cuando está presente una relación del tipo parte-todo” (Waldegg, 1996, p.110).

En este capítulo vemos claramente, el obstáculo que se presenta con la biyección entre conjuntos y esto es uno de los obstáculos epistemológicos que se presentan para poder, en esta ocasión, contar o saber el cardinal de los conjuntos infinitos.

Capítulo 3: Formalización del concepto de Cardinal

3.1 Los trabajos de George Cantor y el surgimiento de la teoría de conjuntos.

George Cantor (San Petersburgo, 1845; Halle, 1918) fue un matemático nacido en Rusia, aunque de descendencia alemana y judía. Fue uno de los grandes pensadores matemáticos del siglo XIX, época en la que hasta antes de dicho siglo, no se había trabajado formalmente la noción de conjunto, y mucho menos la de cardinal; recién fue a finales del año 1890 donde se empezaron a formalizar las bases para una teoría de conjuntos, y a quien le debemos esta maravillosa obra es a este científico, llamado George Cantor.

Se debe resaltar, como lo hemos dicho anteriormente, Cantor fue el pionero de la teoría de conjuntos moderna y especialmente en la introducción del concepto de infinito actual en el campo de las matemáticas; aunque esto no termina con Cantor, ya que él se ve influenciado por la obra de Bolzano (1851) como se vio en el capítulo anterior, afirmando que en esta "se encuentra el más firme defensor del infinito propio en muchos aspectos" (Cantor, 1882). También a la contribución de Richard Dedekind, a quien se le dedicará un apartado en este capítulo sobre la correspondencia que hubo entre Cantor- Dedekind, ya que tuvo grandes aportes a la teoría de conjuntos de Cantor y a sus números transfinitos.

En este sentido, se hará un estudio exhaustivo de las obras de George Cantor, *Fundamentos* y el artículo I de *Contribuciones,* por otro lado, también se tomará *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*, como una obra selecta, para poder formalizar el concepto de cardinal y poder analizar la correspondencia de Cantor-Dedekind, respectivamente. Claro está, que Cantor no era el único ni el primero en trabajar aspectos relacionados con conjuntos. Aponte (2014) afirma que, “en la década de 1870 y 1880 ya se tenían varios trabajos sobre álgebra, teoría de números y análisis, en los cuales se destacaron cuestiones conjuntistas, principalmente los trabajos de R. Dedekind, H. Weber, G. Peano, Bois-Reymond, U. Din y J. Harnack” (p.36). No obstante, este capítulo solo se dedicará a los aportes y estudios de Cantor, y se profundizará en algunos aspectos de Dedekind.

3.1.1 Correspondencia Cantor – Dedekind

> *Hasta que no me dé usted su aprobación, solo puedo decir: lo veo, pero no lo creo.*
>
> *(Cantor a Dedekind, 1877).*

La correspondencia Cantor-Dedekind, fue sin duda uno de los documentos más atractivos de las matemáticas del siglo XIX, es por ello, que en este apartado me ocuparé por analizar y describir los aportes más importantes que hicieron ambos, para la construcción de la teoría abstracta de conjuntos y específicamente el concepto o la noción de cardinal o potencia. Cabe resaltar que pese a la ayuda o contribución que tuvo Dedekind en ello, quien tuvo las ideas claras fue Cantor, y el empujón para el desarrollo de este vino únicamente de él (Ferreirós, 1991).

Como lo dijimos anteriormente la correspondencia que hubo entre ambos, fue tal porque Cantor se lo pedía, y entre ambos se podría decir que se sentían reconfortados uno con el otro y se complementaban, algo así como un alma gemela en el campo de las matemáticas. *“Veremos cómo Cantor es en general quien propone las cuestiones fundamentales y ofrece demostraciones, mientras que Dedekind localiza errores, propone simplificaciones de las pruebas o precisa el alcance de los resultados” (Ferreirós, 1991, p.206).*

Para comenzar con este análisis, comenzaremos con la pregunta que se hacía Cantor en 1873 y era: ¿si los conjuntos como $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, podían ponerse en correspondencia biunívoca con $\mathbb{N}$? este tipo de cuestiones le preocupaban desde tiempo atrás, y ya en el seminario de Weierstrass había demostrado la numerabilidad de $\mathbb{Q}$ (Ferreirós, 1991). Es por ello que Cantor, le planteo en una de sus cartas, de 29.11.1873 uno de los tantos problemas a Dedekind, el cual fue uno de sus problemas más importantes y tal vez uno de los que más contribuyó a su teoría abstracta de conjuntos, el cual dice lo siguiente:

> *Tomemos la colección de todos los individuos enteros positivos n y designémosla por (n); además pensemos en la colección de todas las magnitudes reales positivas x y designémosla por (x); la cuestión es simplemente, ¿resulta posible coordinar (n) con (x) de tal modo que a cada individuo de una colección le corresponda uno y solo uno de la otra? A primera vista uno se dice a sí mismo, no, no es posible, ya que (n) consta de partes discretas mientras que (x) forma un continuo; mas con esta objeción nada se gana, y por más que me inclino a la opinión de que (n) y (x) no admiten ninguna coordinación univoca, no logro encontrar la razón tal como se pretende, pero quizá sea muy simple.*
>
> *¿No nos inclinaríamos también, a primera vista, a firmar que (n) no puede ser coordinado unívocamente con la colección (p/q) de todos los números racionales positivos p/q? Y sin embargo no resulta difícil mostrar que (n) puede coordinarse unívocamente no solo con aquella colección, sino también con el más general*
>
> $$(a_{n1,n2,\ldots nv})$$
>
> *Donde* n_1, n_2, ..., n_v *son una cantidad cualquiera v de índices enteros positivos tan grandes como se quiera. (Ferreirós, 2006, págs. 166-167).*

Esta carta fue uno de los inicios a la no numerabilidad de los números reales; al no ser numerable, como Cantor lo suponía diciendo que (*x*) forma un continuo. A lo que Dedekind respondió a su carta diciendo que no se atrevía a decidir en la primera cuestión puesta; sin embargo, formuló y demostró completamente el teorema de la colección de todos los números algebraicos podía ser coordinada con la colección de (n) (Ferreirós, 2006). Esta demostración fue también enviada por Dedekind, con todos los detalles.

> ***Teorema 1 (Dedekind):*** *El conjunto **A** de los números algebraicos es numerable (Cantor 1874, 116). Los números algebraicos son por definición raíces de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$ –o realizando una transformación trivial, en $\mathbb{Z}$-. Por tanto, podemos considerar asociado a cada número algebraico w un polinomio con coeficientes enteros y primos entre sí,*
>
> $$p(\omega) = a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$
>
> *Si consideramos polinomios irreducibles, y hacemos a_0 y n positivos, a cada número algebraico w le corresponde un único polinomio. Ahora, llamamos altura de p (w) al número entero positivo*
>
> $$N = n - 1 + |\, a_0 \,| + |\, a_1 \,| + \cdots + |\, a_n \,|$$ *(Ferreirós, 1991, 210).*

De esta manera Cantor, le asigna N a la altura para todo número real algebraico ω, un cierto entero positivo e inversamente, pasa lo mismo para cada valor entero positivo de N, así, habría solo una cantidad finita de números reales algebraicos que tengan altura N (Ferreirós, 2006). Esto Cantor lo hace con el fin de numerar los números reales algebraicos; colocándolos en una sucesión de manera ascendente y ordenando los de igual altura sin criterio alguno.

> *Y así se habrá obtenido toda la colección (ω) de los números reales algebraicos bajo la forma:*
>
> $$\omega_1, \omega_2, \ldots\ \omega_v, \ldots$$
>
> *Resultando posible hablar, por relación a este ordenamiento, el n-ésimo nuero real algebraico, sin que se haya olvidado uno sólo de la colección (ω) (Ferreirós, 2006, pág. 181).*

Esta fue la demostración dada por Cantor en 1874, expresada o dada por los números algebraicos reales; por lo que Cantor podía presentar los números de igual altura ordenarse de acuerdo con el orden usual de $\mathbb{R}$. No cabe duda en su demostración que a Cantor le faltó generalidad. No obstante, en la correspondencia del 7.12.1873 Cantor comunica que había encontrado una demostración rigurosa del teorema: la colección de todos los números reales del intervalo (0,1) no puede ser coordinada unívocamente con la colección (*n*) (Ferreirós, 2006)

La demostración dada por Cantor la establecía mediante reducción al absurdo y también era algo compleja, lo cual Dedekind le envió en una carta una versión simplificada (Ferreirós, 1991). A continuación, se presenta dicha versión de la demostración publicada por Cantor, lo cual no es la prueba habitual actual, basada en el método de la diagonalización; la cual la presentaremos más adelante.

Estando dada, según la ley cualquiera, una sucesión infinita de cantidades reales distintas entre sí

$$\omega_1, \omega_2, \dots\ \omega_v, \dots \qquad \text{(I)}$$

Es posible determinar en todo intervalo prescrito (α…β) un número η (y por lo tanto, infinitos números) que no consta en la sucesión (I); esto es lo que hemos de demostrar.

Con ese fin, partimos del intervalo (α…β), que se nos habrá prescrito a voluntad, y sea α < β; denótese por α’, β’ los primeros números de nuestra sucesión (I) que caen dentro del intervalo (excluyendo sus extremos), y sea α’ < β’; del mismo modo, denótese por α’’, β’’ los dos primeros números de nuestra sucesión que caen dentro del intervalo (α’… β’), y sea α’’< β’’; y de acuerdo con esta misma ley, constrúyase a continuación un intervalo (α’’’… β’’’), y así sucesivamente. Así pues, por definición, α’, α’’, … son números bien determinados de nuestra sucesión (I), cuyos índices son siempre crecientes, y lo mismo vale de los números β’, β’’, …; además, los números α’, α’’, … van creciendo en magnitud; entre los intervalos (α…β), (α’… β’), (α’’… β’’), … cada uno de ellos incluye a todos los siguientes. En estas condiciones, cabe pensar dos casos.

O bien el número de los intervalos así formados es finito. Sea el último de ellos ($\alpha^{(v)}$ ... $\beta^{(v)}$); como en el interior del mismo puede encontrarse a lo sumo un número de la sucesión (I), es posible tomar en este intervalo un número ɳ que no está contenido en (I), con lo cual el teorema está demostrado para este caso.

O bien el número de los intervalos que se han formado es infinitamente grande. Entonces los números α', α'', α''', …, dado que van creciendo siempre en magnitud, sin crecer al infinito, tienen un cierto límite α^{∞}; y los mismo vale para los números β', β'', β''', …, dado que va decreciendo siempre en magnitud, siendo su límite β^{∞}. Si α^{∞}=β^{∞} (lo cual sucede siempre que se trate de la colección (ω) de todos los números reales algebraicos), es fácil convencerse de que el número ɳ=α^{∞}=β^{∞} no puede estar contenido en nuestra sucesión, con solo recordar la definición de los intervalos;[11] más si α^{∞}≠β^{∞}, entonces todo número en el interior del intervalo (α^{∞} ... β^{∞}) o incluso en los límites del mismo satisface la condición descrita, de no estar contenido en la sucesión (I) (Ferreirós, 2006, págs. 181-182).

Con la demostración anterior dada por Cantor, quedaba resuelta la cuestión inicial, pero al mismo momento Cantor abría un campo de investigaciones acerca del infinito y de la teoría abstracta de conjuntos (Ferreirós, 1991).

Al comprobar Cantor lo dicho anteriormente, demostraba también que había infinitos más grandes que otros, por lo que comprobaba la diferente cardinalidad de conjuntos infinitos; hasta el momento la de ℕ y la continuidad de ℝ**,** lo cual quedaba abierta la cuestión si existían diferentes potencias infinitas.

Fue en 1874 donde Cantor introduce la noción de potencia o cardinalidad de conjuntos y es donde hace la distinción de la existencia de potencias transfinitas (Ferreirós, 1991); hasta intentó establecer una relación biunívoca con $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ y ℝ, la cual trata en su artículo de *Contribuciones*. El

[11] Si el número ɳ estuviera contenido en nuestra sucesión, tendríamos que ɳ= ω_p siendo p un determinado índice; mas esto no resulta imposible, dado que ω_p no cae dentro del intervalo ($\alpha^{(p)}$ ... $\beta^{(p)}$); mientras que el número ɳ por definición está situado dentro de dicho intervalo. Tomado de (Ferreirós, 2006).

cual se lo cuestiona a Dedekind en su correspondencia, y lo plantea en la carta de Halle, 5.1.1874. Ferreirós (2006):

> *En lo tocante a los problemas con los que me he ocupado en los últimos tiempos, se me ocurre que siguiendo la misma línea de pensamiento se nos plantea lo siguiente:*
> *¿Es posible hacer corresponder unívocamente una superficie (digamos un cuadrado incluyendo su frontera) con una línea (digamos un segmento de recta incluyendo sus puntos extremos), de manera univoca tal que a cada punto de la superficie le corresponda un punto de la línea, e inversamente a cada punto de la línea un punto de la superficie?*
> *En este momento tengo la impresión de que la respuesta a esta pregunta –si bien uno se ve aquí tan inclinado al no, que podría parecerle casi superflua la demostración— ofrece graves dificultades (p.176).*

Cantor, se obsesionaba tanto por la cardinalidad de conjuntos infinitos que llegó a ésta cuestión, queriendo saber o deducir potencias infinitas mayores que $\mathbb{R}$. Por lo que Cantor, a raíz de todas estas investigaciones de las potencias de los continuos y sus subconjuntos, llega a conjeturar la famosa hipótesis del continuo (Ferreirós, 2006). Así pues, Cantor había logrado que todos los conjuntos considerados por él, fuera posible ser numerables o de la potencia del continuo.

Como lo hizo también con el conjunto de los números naturales y el de los racionales. Por medio de la biyección, puso en correspondencia cada elemento de $\mathbb{N}$ con un elemento de $\mathbb{Q}$. Véase en la figura 7.

Figura 7*: Se puede poner en correspondencia a cada número de la forma n/m con n, m* ϵ ***N*** *y m* $\neq 0$*. Se concluye que hay la misma cantidad de números naturales como de racionales.*[12]

Ahora bien, se podría representar un conjunto que tenga como cardinal alephs-cero, el cual abarcaría al conjunto de los números naturales, racionales, enteros, entre otros subconjuntos propios, de la siguiente forma (ver figura 8):

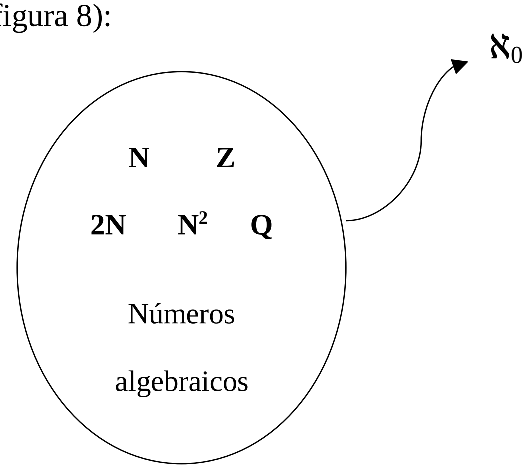

Figura 8*: Cardinal transfinito* $\aleph_0$

[12] Tomado de (Tamariz, 2002)

3.1.2 El análisis de *Los Fundamentos* para la introducción del concepto de cardinal

Cantor, tenía un sello particular en el sentido en el cual trabajaba el infinito en acto, ya que buscaba soluciones de aspectos filosóficos y matemáticos; es por esta razón, que a Cantor se le cuestionaba tanto en su momento, y fue Dedekind y Kronecker unos de los responsables de ciertas críticas a sus obras y al desarrollo de su teoría de conjuntos.

En su obra *Fundamentos*, Cantor comienza por definir a lo que él llama infinito propio e infinito impropio, es decir, en conceptos modernos, infinito potencial e infinito actual, respectivamente. Por su parte, define al infinito impropio como una cantidad variable, que puede hacerse tan pequeña o tan grande como se desee, pero que siempre continuará siendo finita (Cantor, 1882); y define al infinito propio, como un infinito completamente determinado (Cantor, 1882).

En este sentido, Cantor define los nuevos números infinitos determinados, con la ayuda de *dos principios de generación* e interpone un tercer principio, al cual lo denota como *principio de restricción* o *limitación.* Con esto, obtiene segmentos naturales en la secuencia absoluta infinita de enteros, los cuales los llamó *clases numéricas*.

Ahora bien, el *principio de restricción* surge a través del concepto de potencia. Tomado de una correspondencia Cantor-Dedekind del 5 de noviembre de 1882. Ferreirós (2006):

> *(…) Si aplico a ω la adición de una unidad, igual que antes a v, obtengo un nuevo número $\omega+1$, el cual expresa que primero se ha puesto ω, luego se ha añadido la unidad y se ha reunido con ω en un nuevo número. Llamo a la transición del nuevo número v o ω al inmediatamente siguiente el primer momento de generación; por el contrario, la transición de un conjunto sucesivo de números enteros, que no tiene ningún máximo, al inmediatamente mayor que todos ellos, la llamo el segundo momento de generación.*

La formación del número ω sucede pues gracias al segundo momento de generación, la del número ω+1 gracias al primero.

Si ahora se aplica repetidamente ambos momentos de generación, se llega a una extensión de nuestra serie numérica que avanza en sucesión determinada: $1, 2, 3, \dots\ \nu, \dots\ \omega, \omega + 1, \dots, 2\omega, 2\omega + 1, \dots,$ $\mu\omega + \nu, \dots \lambda\, \omega 2\ +\ \mu\, \omega\ +\ \nu, \dots, \sigma\, \omega k\ +\ \rho\omega k - 1 \dots + \mu\omega\ +\ \nu, \dots$ *Etc. (p.226).*

En el proceso de caracterización de conjuntos infinitos hechos por Cantor, el concepto de potencia fue sin duda alguna, uno de sus baluartes y aportes más importantes en la teoría de conjuntos moderna; como lo vemos en el surgimiento del *principio de restricción*, el concepto de potencia es la generalización de los números de elementos de un conjunto, o el cardinal de dicho conjunto. Pensaba que a todo conjunto bien definido le corresponde una potencia determinada. Más adelante en este capítulo, analizaremos de dónde tomó Cantor, el concepto de potencia.

La primera clase numérica (I) es el conjunto de los números enteros finitos 1, 2, 3, …, *v*, …; le sigue la segunda clase numérica (II), consistente en ciertos números infinitos que se siguen unos a otros en una determinada sucesión; tan pronto como la segunda clase numérica ha sido definida, se llega a la tercera, luego a la cuarta, y así sucesivamente (Cantor, 1882, pág. 87)

Parafraseando a Aponte (2014), la teoría de conjuntos Cantoriana, es una teoría de las colecciones que pueden ser contadas utilizando índices, también es muy peculiar cómo Cantor trata a sus colecciones infinitas como si fueran finitas. Es esta, una de las razones por la cual lo criticaban de alguna manera muchos autores de la época en el campo de las matemáticas. No obstante, era Dedekind quien lo sacaba de estos apuros muchas veces, como se verá más adelante.

Analizando cómo planteaba Cantor las clases numéricas, notamos que, a cada clase numérica, (tomándola como un conjunto bien definido de los nuevos números enteros por Cantor) le corresponde una potencia determinada, así, de esta manera dos conjuntos tienen la misma potencia, si cada elemento de un conjunto coordina con solo, y solo un elemento del otro, biunívocamente (Ferreirós, 2006). De esta manera, se ve una noción de lo que es el número cardinal en los conjuntos finitos, en este caso, una clase de números enteros finitos, determinada por Cantor; aunque decía que se le podría adscribirle una potencia determinada, a un conjunto infinito, independientemente de su orden, ya que no había trabajado numerabilidad en conjuntos infinitos. Ferreirós (2006) afirma, "con todo, incluso para conjuntos infinitos existe una cierta conexión entre la *potencia* del conjunto y la *enumeración* de sus elementos determinada por una sucesión dada" (p.90).

Para Cantor, cuando hablamos de una aritmética en el infinito; en la suma y en la multiplicación, la ley conmutativa no tiene en general ninguna validez, por el contrario, la ley asociativa, sí (Cantor, 1882). Aquí vemos una de las distinciones que tiene Cantor entre lo infinito y lo finito.

También hace aclaraciones respecto al producto, Cantor (1882): "Téngase en cuenta también que en un producto $\beta.\alpha$ entiendo por multiplicador β, y por multiplicando α. Inmediatamente surgen para ω las dos siguientes expresiones: $\omega = \omega.2$ y $\omega = 1 + \omega.2$" (p.102). De acuerdo con lo que dice Cantor, ω puede ser considerado un número par o impar. Aunque si se toma al 2 como multiplicador, se podría decir que ω no es par ni impar, y de esta forma se presenta otra distinción que hay entre lo infinito y lo finito.

Las clases numéricas presentadas por Cantor, en su obra de *Fundamentos* no es más que el surgimiento de las nociones de enumeración (ordinal) y potencia (cardinal) en su teoría de los infinitos, la cual la clase numérica (I) es el conjunto de todos los números naturales, los cuales pueden ser ordenados mediante omega (ω) los cuales son de la clase numérica (II) como lo hemos visto anteriormente; y pueden ser contados por Aleph ( ), el cual lo analizaremos y comprenderemos con su obra de *Contribuciones.*

En su obra de *Fundamentos,* Cantor refuta algunos de los capítulos presentados por Bolzano en su obra de *Las paradojas del infinito,* ya que no conceptualiza en general el concepto de potencia, ni el concepto de enumeración, en los números propiamente infinitos (Cantor, 1882). Esto que dice Cantor, en su obra, fue una de las imperfecciones que tuvo Bolzano en su obra, ya que, sin estos conceptos, no se podría avanzar en la teoría de conjuntos. Como se ha dicho anteriormente, el concepto de potencia (cardinal) y ordinal fueron uno de sus baluartes para la construcción en su teoría, es decir, que la teoría de conjuntos está sustentada o basada en su teoría de cardinales (trasnfinitos) y ordinales infinitos.

Dicho todo lo anterior hasta el momento de clases numéricas, enumeración, potencia, entre otras distinciones o conceptualizaciones que se tomaron en cuenta, ha sido como dice Cantor (1882) que el concepto de numero entero, en lo finito, tiene como trasfondo la enumeración, aunque al ascender a lo infinito se parte en dos conceptos, los cuales son el de *potencia* que es independientemente del orden de su conjunto y el de *enumeración*, el cual éste sí va ligado al orden de su conjunto, y en su virtud se convierte en un *conjunto bien ordenado.* Y cuando de nuevo pasa de lo infinito a lo finito, ambos conceptos se unen y forman nuevamente el concepto de número entero finito.

Como se observa también, las diferentes clases numéricas con las que trabaja Cantor, cada una de ellas, sería representantes de potencias. Cantor tomó de Steiner el término de potencia, como lo vemos en la siguiente cita.

> *Si dos variedades bien definidas M y N se pueden coordinar entre sí unívoca y completamente, elemento a elemento (lo que, si es posible de una manera, siempre puede suceder de muchas otras), permítase que empleemos en lo que sigue la expresión de que estas variedades tienen igual potencia, o también que son equivalentes. (Ferreirós, 1991, p. 236).*

Hasta el momento, Cantor lo que ha tratado de hacer con las clases numéricas es tratar de enumerar cada clase, con la clase siguiente y así sucesivamente, ya que todo conjunto bien definido de la potencia de la clase numérica (I) es numerable mediante la segunda clase numérica, y los de la segunda clase, es numerable mediante la tercera, y así sucesivamente.

Sin embargo, Cantor necesitaba definir el concepto del continuo, ya que, sin este no habría lógica en la teoría de conjuntos para su comprensión, aunque no es nuestro objetivo introducirnos en esto, ya que Cantor toma este concepto para poder enumerar el continuo de los números reales. Para esto toma, con la ayuda del concepto de número real definido, un concepto puramente aritmético de continuo de puntos, y lo hace tan general como sea posible.

3.1.3 La formalización del concepto de cardinal. Análisis de *Contribuciones* de George Cantor

Es precisamente en su obra de *Contribuciones* donde Cantor se atreve a formalizar y aritmetizar la teoría de los transfinitos, por lo tanto, la de cardinal. Sin embargo, ésta fue un poco criticada por muchos autores de su época y de la modernidad, y fue con los axiomas o descripciones de otros autores que le dieron salida a esta problemática; entre algunos autores que hicieron ello, están Richard Dedekind—apartado 3.1.1. -- quien fue, junto con Cantor, los más grandes contribuidores a la teoría de conjuntos moderna y la teoría de los transfinitos. En el próximo capítulo, se verá qué otros autores hicieron participe para la mejora de dicha teoría.

Ya que en este capítulo nos dedicaremos a analizar su obra de *Contribuciones,* se verá cómo Cantor aborda las concepciones que son necesarias para poder formalizar el concepto de número cardinal.

Dicho lo anterior, se da cabida al primer concepto abordado en el artículo número uno de *Contribuciones,* el concepto de conjunto, Cantor (1895) afirma: "Por un "conjunto" entendemos toda agrupación *M* en un todo de objetos determinados y bien diferenciados *m*, de nuestra intuición o de nuestro pensamiento (que son llamados los "elementos" de *M*). En signos expresamos esto así: $M = \{m\}$" (p.1). Cabe resaltar, que esta fue una de las definiciones que dio de conjunto, en comparación con otras que dio en obras anteriores. También nos damos cuenta con esta definición que, para Cantor, no se admite en los conjuntos, elementos repetidos.

> *"COMENTARIO: Poner de manifiesto la naturaleza extensional de los conjuntos; interpretar: (1) "agrupación en un todo", en el sentido de que se consideran sistemas acabados; (2) "objeto determinado" en el sentido de que no se admite la imprecisión; (3) "diferenciado" en el sentido de que hay un criterio que permite discernir a los objetos entre sí; (4) diferencia entre "intuición" y "pensamiento" en Cantor"*[13]

De esta manera, para Cantor un conjunto viene implícitamente con una relación de equivalencia, lo cual sirve para determinar la igualdad[14] de los elementos de un conjunto, entre otras cosas, como estructuras de orden o algebraicas.

---

[13] Tomado de (Cantor, 1895), comentario hecho por J. Bares & J. Climent.

[14] Cantor distingue entre igualdad e identidad, la igualdad viene dada por una relación de equivalencia. Citado de los comentarios del primer artículo de Contribuciones de los autores J. Bares & J. Climent, p.3.

En las cartas de correspondencia que hay entre Cantor-Hilbert, en particular las del año de 1898, donde se centra en hacer referencia a un conjunto acabado y con estas cartas de dicho año, se da una descripción del concepto de un conjunto. Además, dichas cartas de correspondencia entre ambos, son importantes, ya que nos habla acerca de la totalidad de los alephs; citando la carta del 26 de septiembre de 1897, donde nos dice Ferreirós (2006) "la totalidad de todos los alephs es tal que no puede ser concebida como un conjunto disponible (determinado), bien definido y concreto (acabado)" (p.251). y por otra parte dice Ferreirós (2006) "Hace ya muchos años que denominé, a las *totalidades* que no podemos concebir como "conjuntos", totalidades "absolutamente infinitas" (ejemplo de ellas es la totalidad de los alephs, según demostramos arriba), y las diferencié nítidamente de los *conjuntos transfinitos*" (p.252). Y es aquí en estas premisas, donde no es consecuente con lo que dice, en los trabajos de *Contribuciones* de 1895 y 1897, acerca de los conjuntos de las potencias.

No obstante, Cantor a principios de 1897 se daba cuenta de lo dicho anteriormente:

> *"Cantor había descubierto la paradoja del "conjunto" de todos los alephs, y se dio cuenta de que contradecía la concepción habitual de conjuntos como extensiones conceptuales (es decir, el principio de comprensión). Su reacción a las paradojas no fue para nada desesperante. De hecho, este hallazgo parecía apoyar su concepción platónica de conjuntos como opuesto a los puntos de vista logísticos de Dedekind y Frege. Además, se dio cuenta de que la paradoja podría convertirse en una prueba del Buen orden, un gran logro que constituiría una conclusión adecuada para su nueva serie de papeles. De hecho, parece probable que él haya encontrado las paradojas al reflexionar sobre el teorema de ordenar bien"*[15] *(Ferreirós, 2000, págs. 290-291)*

[15] By early 1897 Cantor had discovered the paradox of the "set" of all alephs, and realized that it contradicted the usual conception of sets as concept-extensions (i.e., the principle of comprehension). His reaction to the paradoxes was not at all despairing. In fact, this finding seemed to support his Platonistic conception of sets as oppesed to the logicistic views of Dedekind and Frege. Furthermore, he realized that the paradox could be turned into a proof of Well-Ordering, a crowning achievement that would constitute an adequate conclusión for his new series of papers. Indeed, it seems likely that he may have found the paradoxes by reflecting about the Well-Ordering theorem.

Donde después de esto, pasa a dar el concepto de número cardinal, mediante el ejemplo de un conjunto M, ya que a todo conjunto M le corresponde una *potencia* que también se le denomina *número cardinal*. Cantor (1895) el cual conceptualiza de la siguiente manera:

> *"Llamamos "potencia" o "número cardinal" de M al concepto general, que con la ayuda de nuestra capacidad activa del pensamiento surge del conjunto M, al hacer abstracción de las características de sus diferentes elementos m y del orden en que se dan". (p.3)*

El número cardinal o potencia de M, lo detona con:

$$\bar{\bar{\boldsymbol{M}}}$$

Continúa diciendo

> *"Puesto que a partir de cada elemento particular m, si se prescinde de sus características, se tendrá una "unidad", el número cardinal $\bar{\bar{\boldsymbol{M}}}$ es él mismo un conjunto determinado compuesto solo de unidades, que tiene existencia en nuestra mente como imagen intelectual o proyección del conjunto M dado". (p.3).*

Es indispensable decir que Cantor toma este concepto o definición, intuitivamente, al terminar diciendo que "tiene existencia en nuestra mente como imagen intelectual o proyección del conjunto M dado". Posteriormente Cantor pasa a usar lo que utilizó Galileo implícitamente y Bolzano intuitivamente, la biyección, el cual hace uso de ello, mediante una "equivalencia" entre conjuntos M y N, y lo denota de la siguiente manera:

$$M \sim N \text{ o } N \sim M$$

Y lo define así: Cantor (1985)

"si es posible poner a los mismos en una relación tal que cada elemento de uno de ellos corresponda a uno y solo un elemento del otro. A cada parte M_1 de M le corresponde entonces una determinada parte equivalente N_1 de N y viceversa" (p.3).

Como lo dije anteriormente, Cantor en esta definición usa la biyección entre conjuntos y también, lo que actualmente llamamos, sus conjuntos de partes. Por otra parte, esta notación cumple las propiedades formales de una relación de equivalencia, las cuales son: la reflexiva, la que indica que cada conjunto es equivalente así mismo M ~ M; la transitiva, si dos conjuntos son equivalentes a un tercero, entonces son también equivalentes entre sí: M ~ P y N ~ P se sigue M ~ N. Y dos conjuntos tienen el mismo número cardinal si, y sólo si, son equivalente: de M ~ N ↔ $\overline{\overline{M}}$ = $\overline{\overline{N}}$. Por lo tanto, la esencia de equivalencia conforma el criterio necesario para la igualdad de número cardinal.

Con esto tenemos una relación coordinada de M a N y viceversa, de manera univoca y es gracias a la relación de equivalencia que nos define Cantor, y también por ello un elemento *m* de M le corresponde un elemento *n* de N, y si se generaliza tendríamos la igualdad del número cardinal de ambos conjuntos M y N ($\overline{\overline{M}}$ = $\overline{\overline{N}}$).

Esto también se da para el inverso de dicho teorema, dado de la siguiente manera, Cantor (1895) "entre los elementos de *M* y las diferentes unidades de su número cardinal *M* se mantiene [subsiste] una relación de coordinación recíproca y univoca. Pues M surge en cierto modo, como hemos visto, de M, de manera que entonces de cada elemento *m* de *M* surge una unidad particular de $\overline{\overline{M}}$." (p.5). Es por ello que se puede decir que M ~ $\overline{\overline{M}}$.

Ahora bien, Cantor habla de lo "mayor" y "menor" en potencias, lo cual aclara y es explicito que para dos números cardinales ***a*** y ***b*** sean mayor, menor o de igual ($a = b$; $a < b$; $b < a$) potencia; como la aritmética en lo finito.

Asimismo, Cantor define la suma, el producto y la potenciación de cardinales en términos de conjuntos representantes. La suma la presenta como una unión disjunta entre conjuntos A y B, y el producto es el cardinal del conjunto de pares AxB. Ahora bien, para Cantor poder introducir la potenciación, presenta la noción de 'recubrimiento'[16] de B con elementos de A (Ferreirós, 1991).

"Denota la potencia del continuo lineal X (i.e., del agregado *X* de todos los números reales *x*, que son ≥ 0 y ≤ 1) con ***o***; entonces es fácil convencerse de que esta puede ser representada, entre otras, por la fórmula

$$\boldsymbol{o} = 2^{\aleph_0}\text{" (Cantor, 1895, p.11)}$$

Con esto Cantor, trabajaba la potencia mediante cálculos básicos, de la siguiente manera

$$\boldsymbol{o}.\boldsymbol{o} = 2^{\aleph_0}.\, 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \boldsymbol{o}. \text{ También } \boldsymbol{o}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \boldsymbol{o}$$

Todo esto Cantor logró fundamentarlo sobre la base de una aritmética de lo transfinito, formada por teoremas, formulas y propiedades más generales.

Para finalizar, Cantor se basa en la cardinalidad de los conjuntos finitos para dar un ejemplo inmediato de un conjunto transfinito, lo cual denota "alephs cero", en simbología $\aleph_0$, como el primer o mínimo número cardinal transfinito[17] (Cantor, 1895). Dicho esto, se puede deducir que $\aleph_0 > \boldsymbol{u}$, donde ***u*** es cualquier número finito; también que, si $\aleph_0$ es el mínimo número cardinal transfinito, entonces se da que, si ***a*** es cualquier número cardinal transfinito diferente de $\aleph_0$, $\aleph_0 < \boldsymbol{a}$.

Donde apoya esto con los siguientes teoremas, Cantor (1895):

[16] No es otra cosa que una aplicación cualquiera –no necesariamente inyectiva—de B en A (Ferreirós, 1991, p.238).
[17] i.e., que no es *igual a ningún número finito (Cantor, 1895, p.16).*

"A. Todo conjunto transfinito T tiene subconjuntos con el número cardinal $\aleph_0$" (p.16)

"B. Si S es un conjunto transfinito con el número cardinal $\aleph_0$, y S_1 cualquier subconjunto transfinito de S, entonces tenemos también que $\overline{\overline{S1}} = \aleph_0$" (p.17)

"C. Todo conjunto finito E está constituido de modo tal, que no es equivalente a ninguno de sus subconjuntos."

A este teorema se le opone frontalmente el siguiente para conjuntos transfinitos:

"D. Todo conjunto transfinito está constituido de tal modo, que tiene subconjuntos T_1 que son equivalentes a él" (p.18).

En los teoremas C y D se deduce y se concluye la distinción que hay entre conjuntos finitos y transfinitos.

También al momento en que Cantor formaliza a $\aleph_0$ como el mínimo o el primer transfinito, se abría el interrogante si había potencias transfinitas mayores que $\aleph_0$, lo cual lo mostramos en el apartado –3.1.1— el cual es la potencia del continuo, aceptando con esto la famosa hipótesis del continuo, no obstante, Cantor se le seguían abriendo interrogantes como: ¿hay potencias intermedias entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$? y ¿si hay potencias mayores que $\aleph_1$? Cantor no logró avanzar en las soluciones de estos interrogantes, hasta que se le ocurrió la idea de los ordinales transfinitos (Ferreirós, 1991).

Capítulo 4: Teoría de conjuntos y Cardinal: el inicio del edificio matemático

4.1 Sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel: Salida a las paradojas y contradicciones en la teoría de conjuntos de Cantor

En este capítulo se matematizará la teoría de conjuntos la cual construyó Cantor, mediante el sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel, con el fin de evitar ciertas paradojas o contradicciones que hay en él, como la paradoja de Russell, entre otras; y poder darle un soporte teórico de otros autores. Este análisis nos permitirá también comprender por qué el sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel ha sido una propuesta como marco fundacional de la teoría de conjuntos moderna. "Como es ampliamente conocido, este sistema inicialmente propuesto por Zermelo fue complementado con los aportes de Fraenkel, Skolem, Mirimanoff y von Neumann" (Anacona, 2017, p.7).

Para ello se presentará cada uno de los axiomas compuestos por Zermelo y Fraenkel, y con ello se analizará aquellos axiomas que salvaron a Cantor de paradojas, contradicciones y fundamentación en su teoría, tanto conjuntista como transfinita. "El conjunto de axiomas conforman los sistemas más empleados como piso fundacional de la teoría de conjuntos y de las matemáticas en general" (Anacona, 2017, p.7).

Se tomará como marco fundacional de este capítulo, el libro *Introduction to set theory* de Thomas Jech y la tesis de doctorado de Maribel Anacóna: "*Los números reales en el estructuralismo Borbakista: Un análisis histórico-epistemológico con fines educativos"*. Esto, con el fin de poder fundamentar el sistema axiomático de ZFC y poder dar un orden epistemológico a ello.

4.1.1 El sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel

A través de la historia el infinito actual fue condenado al ostracismo, por la misma génesis que le era ligado y porque constituía una cadena de paradojas que le eran propia del campo de la matemática; visto desde la antigüedad griega con Aristóteles, hasta llegar a la formalización con Cantor y Dedekind en el siglo XIX, con su definición de conjunto infinito: Cantor (Citado en Recalde, 2017, p.353).

> [3]***Definición:*** *Un conjunto es infinito si se puede poner en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio".*

Sin embargo, abrirle la puerta a un conjunto actualmente infinito, verbigracia el conjunto de los números naturales como un todo, significó darle cabida a una cantidad incontrolable de ellos (Recalde, 2017, p.354). Con esto habría paso a las paradojas como la de Russell, la paradoja del mentiroso, la paradoja de Richard y la paradoja de Berry, entre otras. Creando obstáculos o vacíos en la base de la teoría de conjuntos; es esta una de las razones por la que aparece la axiomatización de la teoría de conjuntos por Zermelo-Fraenkel.

Una de las contradicciones que aparecía hacía 1891, fue por la definición que Cantor daba de conjunto, se presentaba como una colección arbitraria de elementos discernibles por nuestra intuición

> *La principal paradoja aparecía al tomar la colección U de todos los conjuntos como un conjunto, y asignarle un número cardinal α, pues si designamos como β al cardinal de partes de U, $\wp(U)$, por la inecuación fundamental de la teoría de conjuntos tenemos que $\alpha < \beta$. Por otro lado, $\wp(U) \subseteq U$, entonces $\alpha \geq \beta$, que contradice lo anterior (Recalde, 2017, p.354).*

Y en 1895 Cantor se preveía a la paradoja de Burali-Forti,[18] al darse cuenta que la colección Δ de todos los números ordinales lleva a una contradicción: “El conjunto bien ordenado Δ tiene asociado un número ordinal δ, el cual debe ser mayor que cualquier ordinal en Δ; pero como $\delta \in \Delta$, entonces $\delta < \delta$” (Recalde, 2017, p.354).

Cantor se dio cuenta de estos problemas y comenzó por restringir la definición de conjunto para aquellas multitudes que eran consistentes, ya que estos problemas que surgieron en su teoría los catalogó en las multitudes inconsistentes. “Su noción de multitud inconsistente, ligada al infinito absoluto era poco precisa y, además, tenía connotaciones místicas que nada tenían que ver con estructuras y teorías matemáticas rigurosas” (Recalde, 2017, p.354).

Como se mencionaba, las paradojas evidencian errores en la teoría de Cantor y es por eso que, para darle salida a esas problemáticas, como herramienta teórica se utilizó la lógica y la axiomática; claramente, este capítulo se enfoca en aquellas soluciones que se dieron por la vía de la axiomática. “A partir de los axiomas, que son principios de existencia, y una serie de procedimientos, no necesariamente lógicos, se va construyendo una red cada vez más compleja de conjuntos. El proceso mismo se autoregula, evitando paradojas” (Recalde, 2017, p.356). Cabe resaltar que las investigaciones que se realizaron en este campo fueron hechas por Zermelo y Fraenkel, y también aportaron a las mismas Skolem y Von Neumann, entre otros.

En 1900/01 Zermelo trabajó en la teoría de conjuntos de Cantor y descubrió de manera independiente la paradoja de Russell (Anacona, 2017, p.8). Con esto se da inicio al desarrollo de este apartado; ya que la paradoja de Russell es una de las más conocidas en el campo de las

[18]Cesare Burali-Forti fue quien primero publicó una antinomia de la teoría de conjuntos en su artículo Una questione sui numeri transfiniti, Rend. Cir. Mat. Palermo, 11(1897), 154-164 (Recalde, 2017, p.354).

matemáticas y específicamente, en la teoría de conjuntos. Para ello, se iniciará por dar un ejemplo de dicha paradoja:

> *Yo afeito a todos los hombres de Sevilla que no se afeitan a sí mismos y únicamente a ellos, dice el barbero de Sevilla. ¿Quién afeita al barbero de Sevilla? Si se afeita él mismo, es uno de los hombres que se afeitan a sí mismos y por tanto no puede afeitarse él mismo. Si le afeita otra persona, de acuerdo con la declaración del barbero, esa persona debe ser el mismo. Nadie afeita al barbero (Sáenz Andrade, 2015, pág. 34)*

Dicha paradoja, conocida modernamente como la paradoja del Barbero de Bertrand Russell, fue una de las paradojas encontradas por las falencias de la teoría de conjuntos de Cantor, ya que se llega a una contradicción. Consiste en relacionar un elemento del conjunto con aquellos elementos que no están relacionados consigo mismo; denotado de la siguiente manera:

$$M = \{x: x \notin X\}$$

Desde luego, hay una contradicción notablemente, ya que si nos preguntáramos si $M \in M$ o $M \notin M$, en consecuencia, tendríamos que, si se da que $M \in M$ entonces por definición también se daría que $M \notin M$, y viceversa. Se concluye por tanto que

$$M \in M \leftrightarrow M \notin M$$

Cabe resaltar que Zermelo, para poder erradicar las paradojas o contradicciones de la teoría de Cantor, tuvo que restringir la definición de “conjunto” de Cantor; el cual lo considera como un término indefinido (Anacona, 2017). Con esto, se da la presentación a los axiomas de Zermelo (citado en Anacona, 2017):

En el presente artículo pretendo mostrar cómo toda la teoría creada por G. Cantor y R. Dedekind puede ser reducida a unas pocas definiciones y siete "principios", o "axiomas" los cuales parecen ser mutuamente independientes[. . .] Yo no tengo aún una prueba rigurosa de que mis axiomas sean "consistentes", aunque esto es ciertamente muy esencial; por tanto tengo que limitarme a señalar que las "antinomias" descubiertas hasta ahora se desvanecen, si todos y cada uno de los principios aquí propuestos son adoptados como base (p. 10).

Como se analizó en el capítulo 3 dedicado a Cantor, Zermelo aquí también da el reconocimiento de la teoría creada por Cantor a Dedekind, quienes fueron los pioneros de dicha teoría. De esta manera, como se expresó anteriormente, Zermelo enuncia los siguientes axiomas[19], para poder darle una buena base a la teoría de Cantor:

Axioma I *(Axioma de extensionalidad). Si todo elemento de un conjunto* M *es también elemento de* N *y viceversa, es decir, si* $M \subseteq N$ *y* $N \subseteq M$*, entonces se tiene que* $M = N$*; o más brevemente: todo conjunto está determinado por sus elementos.*

En este axioma, Zermelo nos dice que dos conjuntos que tienen los mismos elementos son iguales, por lo tanto, este axioma también nos ayudaría a darnos cuenta cuándo dos conjuntos son diferentes. No obstante, Anacona (2017), nos dice que Zermelo hasta el momento no había introducido lo que era un conjunto; los cuales son: el conjunto vacío, el conjunto unitario y el conjunto formado por dos elementos.

Axioma II *(Axioma de los conjuntos elementales). Existe un conjunto (ficticio), el "conjunto nulo",* $\emptyset$*, el cual no contiene ningún elemento. Si* a *es cualquier objeto del dominio, existe el conjunto* $\{a\}$

[19] Los axiomas son tomados de la tesis doctoral de (Anacona 2017). Lo cual la toma del artículo de Zermelo (1908, pp.193-201); versión publicada por Ebbinghaus (2010).

que contiene sólo a a como elemento; si a y b son dos objetos del dominio, entonces existe el conjunto $\{a, b\}$ que contiene a a y a b, pero a ningún objeto x distinto a ellos.

Fue con este axioma que introduce los primeros conjuntos. En el libro de *Introduction to set theory* aparece este axioma dado por Zermelo, dividido en 2 axiomas diferentes y de aplicar el axioma de extensionalidad a un conjunto para concluir que es unitario, en este caso el {a}, que aparece en la segunda parte del axioma II. Luego, en la primera parte, Zermelo presenta el "conjunto nulo", el cual en la actualidad se presenta

***Axioma de existencia**: Existe un conjunto que no tiene elementos*[20] *(*Hrbacek, & Jech, 1999).

Y por último en la tercera parte, Zermelo presenta lo que actualmente se conoce como el *axioma de pares*

***El axioma del par:** Para cualquier A y B, hay C tal que x ϵ C si y solo si x = A o x = B*[21] *(*Hrbacek, & Jech, 1999).

Luego de que Zermelo ya tenía los conjuntos elementales, plantea un tercer axioma, el cual restringe la posibilidad de formar un conjunto cualquiera (Anacona, 2017). También cabe resaltar que el tercer axioma dado por Zermelo, estuvo atado a varios cambios, ya que dicho axioma presentaba la paradoja de Richard y el problema de lo "definible"; y Fraenkel, Skolem, el mismo Zermelo y von Neumann contribuyeron a la precisión del axioma años más tarde (Anacona, 2017).

[20] **The Axiom of Existence:** There exists a set which has no elements (Hrbacek, & Jech, 1999)
[21] **The Axiom of Pair:** For any A and B, there is C such that x ϵ C if and only if x=A or x=B (Hrbacek, & Jech, 1999)

El tercer axioma que a continuación se presentará, es la penúltima versión del axioma; el cual se estableció con la ayuda de los autores antes mencionados, especialmente por Skolem, Zermelo (Citado por Anacona, 2017):

> ***Axioma de separación**: Toda función proposicional (x) separa de todo conjunto m un subconjunto m_f que contiene todos aquellos elementos x para los cuales (x) es verdadero. Es decir, para cada parte de un conjunto existe a su vez un conjunto que contiene todos los elementos de esta parte (p.17).*

Dicho axioma, como se mencionaba anteriormente, estuvo atado a varios cambios y entre ello, estaba el problema de lo "definible" ya que era un poco ambiguo al mencionarlo, por lo que finalmente, gracias a Ebbinghaus (como se citó en Anacona, 2017), se sabe que la penúltima versión del axioma de separación fue la siguiente: "Toda parte (definida categóricamente) de un conjunto es en sí misma un conjunto" (p.18). Y esto fue reformulado de manera más simple así: "Cada *parte* de un conjunto es en sí mismo un conjunto" (Anacona, 2017).

Para ese entonces, como lo menciona Anacona (2017) dicho axioma había perdido interés, por lo que el axioma de separación se deriva del axioma de reemplazo.

Para ese entonces también ya había hecho su aparición los axiomas IV, V y VI, los cuales son los de conjunto potencia, unión y elección, respectivamente; y dichos axiomas encuentran conjuntos nuevos, dado un conjunto.

> ***Axioma IV** (Axioma del conjunto potencia). Para todo conjunto T existe un conjunto correspondiente $\boldsymbol{U}T$, el "conjunto potencia" de T, que contiene como elementos precisamente todos los subconjuntos de T.*

Axioma V *(Axioma de la unión). Para todo conjunto T existe un conjunto correspondiente $\boldsymbol{G}T$, la "unión" de T, que contiene como elementos precisamente todos los elementos de los elementos de T.*

Axioma VI *(Axioma de elección). Si T es un conjunto cuyos elementos son todos conjuntos diferentes de $\emptyset$ y mutuamente disjuntos, su unión $\boldsymbol{G}T$ incluye al menos un subconjunto S_1 que tiene uno y solo un elemento en común con cada elemento de T.*

El axioma IV es muy importante para la cardinalidad de los conjuntos finitos, ya que, si tenemos un conjunto T, existe el conjunto $\wp(T)$ el cual contiene a todos los subconjuntos del conjunto T; y más tarde con el axioma de infinitud, se muestra lo mismo para los conjuntos infinitos.

Por parte del axioma de unión, no hubo mayor discusión, y afirma que, dado una familia de conjuntos T, existe un conjunto formado por los elementos de los elementos de T (Anacona, 2017).

Por último, el axioma de elección, como se dijo anteriormente es apto de formar un conjunto a partir de uno dado. Anacona (2017) afirma: "La diferencia con los dos anteriores es que no hay un método específico de construcción" (p.13). Como lo explicita Anacona (2017) en el siguiente parágrafo: Para la conformación del subconjunto S_1 se ha "elegido" un elemento de cada uno de los elementos (conjuntos) de T. No se explicita el criterio ni la forma de elección, sólo se garantiza su existencia.

Ahora bien, con el siguiente axioma se dará paso a los conjuntos infinitos, el cual Zermelo lo garantiza con su ultimo axioma.

Axioma VII *(Axioma del infinito). Existe en el dominio al menos un conjunto Z que contiene el conjunto nulo como elemento y se constituye de tal forma que a cada uno de sus elementos a le* *corresponde un elemento más de la forma {a}; es decir, para cada uno de los elementos a también se tiene el correspondiente conjunto {a} como elemento.*

Con este axioma se da paso a la construcción de los números naturales, teniendo el siguiente conjunto infinito $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots\}$ ordenado por inclusión. Con este axioma, además de obtener $\mathbb{N}$, con el axioma del conjunto potencia, me garantiza obtener más conjuntos infinitos, sacando a cada uno de estos, sus partes ($\mathbb{N}$, $\wp(\mathbb{N})$, $\wp(\wp(\mathbb{N}))$).

Si tenemos entonces el conjunto vacío $\emptyset$, del cual es el único que podemos garantizar su existencia por el axioma del vacío, ahora se construye un conjunto cuyo único elemento es el conjunto vacío $\{\emptyset\}$, este es un conjunto diferente al conjunto $\emptyset$, y se representa a conveniencia a partir del cardinal, en otras palabras $\mathbf{1} = \{\emptyset\}$**.** Claramente $1 \neq \emptyset$

Se considera ahora un conjunto cuyos elementos son

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0,1\}$$

Es decir, un conjunto cuyo cardinal es dos; a este conjunto lo representamos con el número

$$2 = \{0,1\}$$

Si se continua con el mismo procedimiento tenemos que

$$3 = \{0, 1, 2\} = \left\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\right\}$$

$$4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\ldots$$

Por definición se tiene que el **sucesor** del conjunto $x\ es\ S(x) = x\ U\ \{x\}$ por tanto los números naturales se pueden ver como:

$$1 = 0\ \cup \{0\}$$

$$2 = 1\ \cup \{1\}$$

$$3 = 2\ \cup \{2\}$$

$$4 = 3\ \cup \{3\}$$

$$\dots$$

Es así como se define lo que es un conjunto inductivo:

Un conjunto **X** es llamado inductivo si

a. $0 \in X$
b. Si $z \in X\ entonces\ z\ U\ \{z\}\ \in X$

Por tanto, un conjunto inductivo es aquel que contiene al conjunto vacío (0) y que el sucesor de todo elemento del conjunto pertenece al conjunto.

Ahora, Si analizamos las siguientes proposiciones:

i. 0 es un número natural
ii. Si n es número natural entonces n+1 es también un número natural
iii. Todo natural se obtiene de operar 0 y 1 es decir, 0, 0+1=1, 0+1+1= 2 …

Podemos afirmar entonces que si $\boldsymbol{N}$ es el conjunto de todos los números naturales entonces $\boldsymbol{N}$ es un conjunto inductivo

$N = \{x :\ \ x \in X\ para\ \ cada\ conjunto\ inductivo\ X\ \}$

Además N es el menor conjunto inductivo posible y sus elementos son llamados números naturales. Por axioma de infinitud; existe un conjunto inductivo.

Sin embargo, estos siete axiomas presentados hasta ahora, no fueron suficiente para fundamentar la teoría de conjuntos. Como es el caso de los conjuntos inductivos y recursión transfinita. Es por eso que surge el axioma de reemplazo, y éste tiene su génesis en una carta que le plantea Fraenkel a Zermelo el 6 de mayo de 1921, la cual dice lo siguiente, Ebbinghaus (como se citó en Anacona, 2017):

> *Sea Z_0 un conjunto infinito (por ejemplo, el conjunto que lleva el nombre Z_0) y $U(Z_0) = Z_1$, $U(Z_1) = Z_2$, etc. ¿Cómo puede usted mostrar en su teoría […] que $\{Z_0, Z_1, Z_2, ...\}$ es un conjunto, y, por tanto, que la unión de este conjunto existe? Si su teoría resulta insuficiente para permitir una prueba como ésta, entonces obviamente la existencia de conjuntos de cardinalidad $\aleph_\omega$ no puede ser probada (p.20).*

A esta carta, respondió Zermelo, claro está. Sin embargo, Fraenkel verbigracia aquí un "hueco" como dice Anacona (2017), en la teoría de axiomática de Zermelo. Donde Z_0 corresponde al conjunto $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},,...\}$, y gracias a los axiomas del conjunto potencia y del infinito se pueden obtener $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ aunque nada garantiza que ellos formen un conjunto. Como se presentó en el apartado 3.1.3.

Con esto Fraenkel presenta formalmente el axioma de reemplazo en un artículo "Los fundamentos de la teoría de conjuntos de Cantor-Zermelo" publicado en los *Mathematische Annalen* en 1922 (Anacona, 2017).

Fraenkel (como se citó en Anacona, 2017):

Axioma de reemplazo: *Si M es un conjunto y cada elemento de M es reemplazado por [un conjunto o un átomo[22]] entonces M se convierte en un nuevo conjunto (p.21).*

Dicho axioma se construye, por la necesidad de garantizar la existencia de algunos conjuntos grandes como $\{Z_0, Z_1, Z_2,\ldots,\}$, y esto implica que así ya se haya probado la existencia de algunos cardinales como $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$,.... $\aleph$,..., aún no se ha probado la existencia del cardinal de todos los alephs $\aleph_\omega$.

Para esto Skolem introduce la noción de nivel (como se citó en Anacona, 2017): "Yo llamo conjuntos de *primer nivel* aquellos caracterizados por el hecho de que existe un número entero no negativo n, tal que $S^nM = \emptyset$"(p.22). También define los conjuntos de segundo nivel, con el fin de considerar un dominio B el cual satisface todos los axiomas de Zermelo y un dominio parcial *B'* que estaría formado por todos los conjuntos de B que son de primer y segundo nivel.

Como cada elemento de Z_0 está relacionado con un único elemento en el dominio B' y Z_0 es un conjunto, el axioma de reemplazo garantiza la existencia del conjunto $M = \{Z_0, \wp(Z_0), \wp^2(Z_0),....\}$ Con este conjunto y gracias al axioma de las uniones, se tiene garantizada la presencia de conjuntos de cardinalidades no-numerables muy grandes; lo cual era imposible de establecer con los axiomas de 1908. (Anacona, 2017, pág. 25).

Y como se analizó en los párrafos anteriores sobre el conjunto inductivo de los números naturales $\mathbb{N}$, que gracias al axioma de reemplazo y el axioma del infinito, se tiene dicho conjunto

[22] La palabra original es "urelement"; una expresión en alemán para representar un "elemento primordial" de un conjunto que no es un conjunto. Es decir, un elemento que no tiene partes. Se conoce también como "individuo" o "invidisible". Se usará la expresión "átomo" por ser una de las más frecuentes en la literatura de la teoría de conjuntos (Anacona, 2017, p.21).

ℕ con su estructura de generación. Así pues, ℕ sería el conjunto inductivo más pequeño. Como afirma Anacona (2017):

> *Sobre este conjunto se establecen legítimamente los principios de inducción y recursión, necesarios para el desarrollo de la aritmética de los naturales. Pero, además, cuando se introducen los números ordinales de Cantor por von Neumann en 1923, se formalizan los procesos de inducción y recursión transfinita; lo que hace más evidente la importancia de este axioma en el desarrollo de las matemáticas (p.25)*

Luego, para muchos matemáticos, era algo inconcebible que un conjunto pertenezca a él mismo, como había otros que no les parecía una idea tan absurda. Sin embargo, pensar en ello, sería pensar en sucesiones infinitas de conjuntos. "El axioma que garantiza la posibilidad de estos conjuntos es llamado por Aczel como *axioma de anti-fundamentación*, contrario al *axioma de fundamentación* que confina la posibilidad de estos conjuntos en la teoría de Zermelo-Fraenkel" (Anacona, 2017, pág. 30). El cual el axioma de fundamentación se presenta en términos modernos, de la siguiente manera:

> $(\forall A)\ (A \neq \emptyset) \rightarrow \exists m\ (m \in A \wedge m \cap A = \emptyset)$. Es decir, todo conjunto A tiene un elemento m que no tiene elementos comunes con A; lo cual evita el regreso *ad infinitum*[23]
>
> (Anacona, 2017, pág. 30)

Lo que quiere decir que, todo conjunto A tiene un elemento *m*, tal que *m* no tiene elementos en comunes con A, y este axioma es lo que evita el *ad infinitum.*

[23] Such a set has an infinite descending membership sequence; i.e. an infinite sequence of sets, consisting of an element of the set, an element of that element, an element of that element of that element and so on ad infinitum (Definición tomada de un pie de página de Anacona (2017))

De manera tal que Zermelo presenta este axioma de manera explícita en su artículo de 1930 (citado por Anacona, 2017):

> ***Axioma de fundamentación****: Toda cadena (decreciente) de elementos, en la cual cada término es un elemento del anterior, termina con un índice finito en un átomo (p.31).*

Zermelo (como se citó en Anacona, 2017) afirma lo siguiente: “Con este axioma se garantiza lo siguiente: i) no existe ningún conjunto a tal que $a \in a$; ii) no existen conjuntos a y b tales que $a \in b \in a$; iii) no existen cadenas infinitas descendientes de la forma antes mencionada” (p.31).

La definición de conjunto fue uno de los grandes obstáculos que se tuvo para poder darle sentido a la teoría abstracta de conjuntos moderna, y con ello se empezaron a descubrir antinomias, contradicciones y paradojas en la teoría de cantor. Gracias a la axiomática de Zermelo-Fraenkel, fue posible dar salida a cada uno de estos problemas y con ello, la paradoja de Russell; la que se mencionó al comienzo de este apartado.

Capítulo 5: Conclusiones

Algunas de las afirmaciones paradójicas de las matemáticas, surgen de la noción que se tiene del infinito; es por ello que desde la génesis del infinito se ha asociado a diferentes perspectivas; como la teológica, la filosófica, la matemática y más aún, lo asocian a afectos emocionales, entre otras. Durante más de dos mil años el “horror al infinito” había perdurado, hasta finales del siglo XIX con Cantor, quien instauró y conceptualizó el infinito actual, y logró construir una teoría de conjuntos, a partir del estudio del infinito en acto.

No obstante, tuvo que pasar mucho tiempo para que se formalizara el concepto del infinito actual, puesto que existía una cultura que habría instaurado Aristóteles. Él había hecho la distinción entre el infinito potencial y el infinito actual. Como lo analizamos en el capítulo 1, donde se evidenciaba que, desde la antigüedad griega con Aristóteles, se constituyó solamente el infinito potencial, y que para él no había ni podría darse otro infinito distinto al potencial.

Por lo tanto, desde la época de los griegos, con Aristóteles se presentó un rechazo al infinito actual y por supuesto al concepto de cardinal. Al negar la existencia del infinito en acto, se niega toda posibilidad de establecer la cardinalidad en conjuntos infinitos, ya que al infinito en potencia se le atribuye la concepción de que crece o decrece indefinidamente, sin ningún límite, y por ello sería imposible establecer una cardinalidad a algo que no se puede contar; no obstante, con Cantor nos damos cuenta de lo contrario y que hay infinitos más grandes que otros.

Con Galileo se vislumbra la posibilidad de establecer biyecciones entre infinitos, la cual lo hacía mediante polígonos concéntricos, uno más grande que otro, y biyectando un conjunto de números con un subconjunto propio. De esta manera, Galileo se piensa la posibilidad de establecer comparaciones entre infinitos, lo cual era imposible con el pensamiento aristotélico, la idea que le era ligada de un infinito en potencia. No obstante, Galileo hace un gran aporte a la comunidad matemática al trabajar con biyecciones, aunque negaba que se le podía atribuir al infinito, acepciones como de mayor, menor o igual tamaño.

Ahora bien, la idea del cardinal no se logra concebir ante estas disyuntivas; como la de no poder formalizar el infinito actual, también la acepción que se tenía del axioma parte-todo y la de biyección. Ante el primer dilema expuesto, aparece Bolzano, quien fue el primero en defender rotundamente la idea del infinito actual.

El aporte que Bolzano hace a la construcción del concepto de cardinal fue la de comparar conjuntos infinitos. La única dificultad que encontró fue la de subconjuntos propios de un conjunto dado. Sin embargo, Bolzano logra ponerlos en correspondencia biunívoca; esto significó para esa época, conjuntos numéricos infinitos podían tener el mismo tamaño o cardinalidad, así uno sea subconjunto propio de otro; conceptualización la cual llegó a formalizar Cantor con su teoría de los transfinitos.

Bolzano se ve detenido ante esta paradoja, ya que su intuición le muestra que “el todo es más grande que sus partes” aunque en su tratado él da algunos ejemplos particulares con los números naturales y biyecciones con algunos subconjuntos propios de él, como los cuadrados. Por ejemplo, como se observa en la siguiente figura 9:

Figura 9*:* $\mathbb{N}$, ***2n*** *y* $\mathbb{Z}$ *tienen la misma cantidad de elementos*[24]

[24] Tomado de (Tamariz, 2002)

Con esto, se niega toda posibilidad de aceptar que la biyección sea la única forma de comparar dos conjuntos. Para Bolzano lo que le permite realizar operaciones (limitadas) con los conjuntos infinitos, es la relación parte-todo y no la biyección. (Waldegg, 1996, pág. 110). Esto hace indudablemente que Bolzano se vea limitado en su trabajo para llegar a la aritmetización del infinito, sin embargo, para algunos estudiadores del tema como (Ortiz, 1994) es Bolzano quien introduce la idea de infinito actual la cual con el tiempo es Cantor quien la trabaja. Esto es considerado como el mayor obstáculo epistemológico a portas del paraíso de los transfinitos.

Por su parte, los trabajos de Cantor evidencian la fundamentación del infinito actual, hecho que condujo a la concepción que se tenía al infinito como único concepto, pues abrió la puerta a la construcción de infinitos. Además, al igual que Dedekind, Cantor trata al infinito como una aritmética generalizada, en contraposición al geométrico que tenía desde la antigüedad griega.

Algunos de los aportes de Cantor fueron los siguiente: Conceptualizó y formalizó el infinito actual; puso en correspondencia a $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ y $\mathbb{R}$, a $\mathbb{N}$ con $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$**;** y dedujo que tenían el mismo cardinal transfinitos y los llamó alephs cero ($\aleph_0$), a los conjuntos de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ y la de los números algebraicos; definió el concepto del continuo; dedujo que $\mathbb{R}$ era continuo; aritmetizó los números infinitos; comparó conjuntos infinitos; y sobre todo fue el fundador de la teoría de conjuntos moderna, entre otras cosas.

Cantor con la ayuda de Dedekind, como se analizó en el apartado 3.1.1 fueron sin duda los más grandes contribuidores a la teoría de conjuntos moderna y a la teoría de los transfinitos. Fue gracias a Dedekind que se pudo desarrollar cada una de las cuestiones que se planteaba Cantor, y gracias a él, muchas de las demostraciones de ciertas generalidades de la teoría de los infinitos, fue que se pudieron resolver. Por ejemplo, la correspondencia que hay entre $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ y $\mathbb{R}$ se pudo resolver gracias a las contribuciones de R. Dedekind; además del continuo de $\mathbb{R}$, y entre otros aportes que hicieron en sociedad. Con esto, Cantor demostró que con el uso de correspondencias biunívocas se podía diferenciar entre infinitos: Existen conjuntos *contables* y conjuntos que tienen la potencia del *continuo*.

Cantor, llamó al mínimo número cardinal transfinito: $Alephs - cero$. Y es este el primer cardinal transfinitos, quien tiene como cardinal al conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$), los números enteros ($\mathbb{Z}$) y los números racionales ($\mathbb{Q}$), entre otros subconjuntos propios de $\mathbb{N}$**,** como los números pares, etc.

Luego de esto, prosiguió con manejar una aritmética en el infinito parecida a la aritmética en los números finitos, lo cual fue uno de los aportes más significativos en la matemática. También definió el concepto del continuo, de tal forma que en la actualidad dicho concepto se ha convertido en una herramienta matemática muy útil. Además, dijo que $\mathbb{R}$ era un perfecto "continuo", lo cual contribuyó para decir que $\mathbb{R}$ tiene la potencia del continuo y también que es el siguiente cardinal transfinitos a alephs-cero, es decir, alephs-uno ($\aleph_1$). En particular, una de las propiedades características de los números reales, es que los puntos de una recta forman un continuo sin agujeros.

En este orden de ideas, Cantor llegó a cuestionarse sobre si ¿hay potencias intermedias entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$? y ¿si hay potencias mayores que $\aleph_1$?, y fue con estas cuestiones donde llegó a conjeturar a lo que en la actualidad se le conoce como la "hipótesis del continuo", la cual no llegó a resolver.

No obstante, la teoría que Cantor desarrolló tuvo muchas falencias, sobre todo en la definición de conjunto, como se analizó en el apartado 4.1.1. Falencias, las cuales conducían a contradicciones, paradojas o antinomias, y con ello hacía un "hueco" en la base de la teoría de conjuntos moderna de Cantor.

Así que, con ello aparecieron Zermelo y Fraenkel, para darle la base necesaria a la teoría de conjuntos moderna, con el fin de que ciertas definiciones que Cantor atribuía no entraran en contradicciones o paradojas matemáticas. Es por ello que, este fue uno de los aportes más importantes para que la teoría de Cantor en post de algunos errores conceptuales, con el fin de que se pudieran formalizar. Los axiomas de Zermelo-Fraenkel evitaron paradojas como la del barbero y contradicciones como las que ponía en tela de juicio la definición de conjunto.

Para Cantor, las paradojas de su teoría no eran contradicciones, como lo manifestaba Ferreirós (2006) "simplemente mostraban que ciertas cosas que otros, ingenuamente, estaban dispuestos a llamar conjuntos no lo eran ni podían serlo" (p.274). Es tal vez que por ello no se ocupaba de esos asuntos, ya que le preocupaba más que su teoría estuviera más ligada a aspectos de la realidad física o la conjuntista, que a aspectos lingüísticos o lógicos. Sin embargo, Cantor si se dio cuenta antes que ningún otro lo hiciera, de que su teoría tenía "huecos" (Ferreirós, 2006).

Por ejemplo, Zermelo a través del axioma de *separación* resolvió la paradoja de Russell, ya que dicho axioma permite formar un conjunto por *comprehensión*, solo a partir de un conjunto previamente establecido, por lo que este axioma imposibilita la formación libre de conjuntos y evita que se dé la paradoja. No obstante, cabe resaltar la importancia de cada uno de los axiomas compuestos por Zermelo-Fraenkel, ya que estos dieron soporte teórico a la teoría de conjuntos moderna de Cantor, como también a los cardinales transfinitos.

Ahora bien, para caracterizar algunos de los obstáculos epistemológicos que se presentaron en la formalización del concepto de cardinal., se identificarán algunos de ellos, sin embargo, se tomará un solo obstáculo el cual se abordará en Aristóteles, Galileo, Bolzano y por su puesto en Cantor. Con el fin de analizar cómo se presenta dicho concepto como un obstáculo histórico-epistemológico aportas de formalizar el infinito actual y, por ende, el concepto del cardinal.

Para recordar cómo se tomará la concepción que se va a analizar como obstáculo histórico-epistemológico, se cita a (D´Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sbaragli, 2010) donde lo explicita de la siguiente manera: "*cuando en la historia de la evolución de un concepto se encuentra una no-continuidad, una fractura, un cambio radical de la concepción, entonces se asume que este concepto tiene en su interior obstáculos de carácter epistemológico ya sea para ser concebido, ya sea para ser aceptado por la comunidad matemática, ya sea de ser aprendido*" (p.53).

Obstáculo histórico-epistemológico: *"El todo es mayor que sus partes"*			
Aristóteles	**Galileo Galilei**	**Bernard Bolzano**	**George Cantor**
Fue quien trabajó con dicha concepción como algo que va amarrado al sentido común, la cual se sigue teniendo dicha percepción. También fue el inventor del infinito potencial, como único infinito matemático. No obstante, al afirmar dichos acontecimientos, se estaba negando a la idea del infinito actual y, por ende, al concepto de cardinal. Ahora bien, para poder dar un ejemplo del obstáculo que se crea con esto, tomaremos la proposición IX de los	Es justo con él y en esta época, donde se hace una ruptura de esta concepción. Sobre todo, porque Galileo se considera como uno de los científicos anti-Aristotélicos. Para refutar la idea del infinito potencial, Galileo lo demuestra mediante la paradoja de las ruedas, de la siguiente manera: toma dos ruedas concéntricas, una menor que la otra, y concluye que las dos recorren la misma distancia, es decir, que ambas ruedas tienen la misma cantidad de puntos,	Con Bolzano fue con quien se instauró la idea de infinito actual y algunas nociones de lo que Cantor trabajó en su teoría. Aquí, también se sigue dando esa ruptura de la concepción Aristotélica, sobre todo por pasar de la idea de un infinito en potencia, a un infinito en acto. Además, Bolzano trabajó con biyecciones entre conjuntos y subconjuntos propios de un conjunto; por ejemplo, toma al conjunto de los números naturales (**N**) y al conjunto de los	El fundador de la teoría de conjuntos moderna y el formalizador del infinito actual. Con Cantor se desprende toda idea infinita en potencia y se empieza a trabajar con el infinito en acto. Trabaja con conjuntos de números infinitos y sobre todo, haya cardinales transfinitos más grandes que otros, es decir, cardinales de conjuntos infinitos distintos. Por ejemplo, haya el primer cardinal transfinito y lo nombre alephs-cero ($\aleph_0$), el cual encierra a

Elementos de Euclides, como ejemplo, ya que Euclides siguió con la misma concepción Aristotélica. Dicha proposición dice lo siguiente: "Hay más números primos que cualquier conjunto de primos". Aquí, claramente hace alusión a conjuntos infinitos, como lo son el conjunto de los números primos y claramente está afirmando que no existe un número primo que sea mayor a otros; ya que Aristóteles y por lo tanto Euclides, seguían la concepción de ver un infinito en potencia, que nunca tiene fin. En este entonces, tal vez no haya sido un obstáculo epistemológico, ya que se seguía con esta concepción y en la época la aceptaban con normalidad. No obstante, en los siguientes autores, se verá cómo hay una no-continuidad y una ruptura este concepto, y es justo ahí, donde se construye un obstáculo epistemológico.	sin importar que una sea mayor que la otra. Lo cual concluye y niega rotundamente la idea que se tenía *"El todo es mayor que sus partes"*, y por supuesto al infinito potencial. Esto se toma como un obstáculo histórico-epistemológico, aportas del infinito actual. Al tratar esta concepción aportas del infinito en acto, se estaría abriendo paso a la noción de cardinal, ya que Galileo da una idea, aunque no la concluye y es por eso que no se le otorga a él como la persona la cual formaliza la concepción del infinito actual, como se verá con Bolzano.	números cuadrados, teniendo en cuenta que los toma como series infinitas, claro está; y teniendo estos conjuntos infinitos, hace una corresponde uno a uno con cada uno de sus elementos, y llega a la conclusión, que a pesar de que uno es un subconjunto propio del otro, es decir, que está contenido en el conjunto de los números naturales, en el infinito, ambos conjuntos tienen la misma cardinalidad, es decir, que tienen la misma cantidad de elementos. Por lo tanto, aquí se sigue viendo un cambio de concepción al *"El todo es mayor que sus partes"*.	conjuntos numéricos infinitos como el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$), el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) y el conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$), entre otros. Además, haya a alephs-uno ($\aleph_1$) el cual es el cardinal transfinito del continuo, es decir, el número transfinito del conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$). Con esto, se termina de refutar totalmente toda concepción que se tuviera de que todo es mayor que sus partes. es por esto, que esta concepción se considera como un obstáculo histórico-epistemológico de la formalización del concepto de número cardinal.

En la tabla propuesta, se evidencia cierta debacle en la concepción que se tenía *del todo es mayor que la parte*, y claramente se demuestra cómo la teoría del infinito no cumple esa proposición. Además, en la tabla solo se presenta un obstáculo, entre muchos otros que hay; por ejemplo, los de *generalización*, que también para la teoría transfinitos no se cumple. Como se mostró en el apartado 3.1.3., donde se presenta la siguiente generalidad: sea $\boldsymbol{o} = 2^{\aleph_0}$, *se tiene que:* $\boldsymbol{o}.\boldsymbol{o} = 2^{\aleph_0}.\,2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \boldsymbol{o}$. También $\boldsymbol{o}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \boldsymbol{o}$. Claramente aquí no se pueden utilizar las concepciones de la aritmética finita, ya que se presentaría dicha ruptura en cierta concepción.

Este trabajo nos permite dar cuenta de la importancia que tiene la teoría de conjuntos desde sus inicios, y además la obtención teórica que nos brinda para el desarrollo de la matemática. Evidenciando esto último, para la introducción y comprensión del concepto de número cardinal, la teoría del infinito actual y el desarrollo de los números cardinales transfinitos.

De esta manera, hacer un análisis histórico fue esencial para poder revelar o hacer evidente de cómo fue el proceso de instauración del concepto de numero cardinal y para que los docentes matemáticos en formación tengan un conocimiento mayor que el de sus estudiantes, para que de esta forma puedan construir un conocimiento a sus estudiantes de forma correcta. Como dice Sfard (citado en Guacaneme, 2016) “El conocimiento de la historia de las matemáticas es imprescindible para el profesor”.

En este orden de ideas, lo que se busca es dar una reflexión muy general, de para qué es importante saber de historia matemática un docente en formación, especialmente del concepto de número cardinal. Ya que como dice Furinghetti (citado en Guacaneme, 2016) “La historia de las matemáticas es fuente de reflexiones histórico-epistémicas sobre el conocimiento matemático”. Así, la historia de las matemáticas nos abre a un mundo de ideas distintas a las de la actualidad, y tal vez ver cómo los grandes matemáticos de siglos pasados percibían las matemáticas.

Por último, los docentes matemáticos en formación deberán entender con exactitud de que el papel del infinito es crucial para nuestra cultura profesional, y que el concepto de cardinal no es ajeno a ello tampoco. Por lo tanto, deberán ser conscientes de cada uno de aquellos obstáculos con los cuales se pueden topar al momento de enseñar algún concepto matemático; ya que, con ayuda de la historia y epistemología, nos darán herramientas para trabajar en un aula de clase. Como afirma (Arboleda, 2011):

> *La historia es un medio para tomar conciencia del funcionamiento de la investigación en matemática (...) y puede ser utilizada a favor de la formación matemática de quienes enseñarán las matemáticas sin jamás proponerse una investigación en matemática (p.2)*

Bibliografía

Anacona, M. (2017). *Los números reales en el estructuralismo bourbakista: Un análisis histórico-epistemológico con fines educativos.* Tesis doctoral, Universidad de Cádiz, Cádiz.

Aponte Marín, M. A. (2012). *La noción de infinito en George Cantor: un estudio histórico-epistemológico en la perspectiva de la Educación Matemática.* Tesis de maestría, Universidad del Valle, Cali.

Arboleda, L. C. (2011). Objetividad matemática, historia y educación matemática. En *Los números reales como objeto matemático: una perspectiva histórico epistemológica.* Cali: Universidad del Valle.

Aristóteles. (1995). *Fisica.* (G. R. ECHANDIA, Trad.)

Aristóteles. (1995). *Física.* Madrid: Gredos.

Bolzano, B. (1991). *Las paradojas del infinito.* (L. F. Segura, Trad.) Mexico: Servicios editoriales de la Facultad de ciencias UNAM.

Cantor, G. (1882). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Una investigación matemático-filosófica sobre la teoría del infinito.* Halle.

Cantor, G. (1895). Contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinitos. En G. Cantor. Halle: Math. Annalen.

D´Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2010). *La didáctica y la dificultad en matemática.* Bogotá: Magisterio.

Euclides. (1991). *Elementos.* Madrid: Gredos .

Ferreirós, J. (1991). *El nacimiento de la teoría de conjuntos, 1854 - 1908.* Madrid: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

Ferreirós, J. (2000). *Labyrinth of Thought. A history of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics* (second edition ed.). Basel: Birkhauser Verlag AG.

Ferreirós, J. (2006). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta* (José Ferreiros ed.). Barcelona: Crítica, S.L.

García Gaviria, J. J. (2014). *Del" horror al infinito" de los antiguos griegos a la noción de límite moderno.* Tesis de pregrado, Universidad del Valle, Cali.

García, M. S. (2006). La paradoja de Galileo. *Historia de la Medicina y de la Ciencia*, 113-148.

Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas.* Tesis doctoral, Universidad del Valle, Cali.

Hrbacek, K., & Jech, T. (1999). *Introduction to Set Theory, Revised and Expanded* (Third Edition ed.). Boca Raton: Crc Press.

Leston , P., & Crespo , C. (2009). El infinito matemático: la escuela, Cantor y Bolzano. *Aspectos epistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar*, 879-888.

Lestón, P. (2007). *Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares.* Tesis de maestria, Instituto Politecnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México D.F.

Lestón, P. (2011). *El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología.* Tesis doctoral, Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología de Avanzada, México D.F.

Lestón, P., & Crespo, C. (2010). El infinito matemático: la escuela, Cantor y Bolzano. *CLAME*.

Morán Pizarro, D. S. (2014). *De la integral como herramienta a la integral como noción formal: De las cuadraturas a la integral de Cauchy*. Tesis de pregrado, Universidad del Valle, Cali.

Ortiz, J. R. (1994). El concepto del infinito. *Matemàtica y Ciencia, 1*(2), 59-81.

Recalde, L. (2012). El cálculo y la solución de las cuadraturas. *Lectura 7*, 19-21.

Recalde, L. (2017). *Lecturas de historia de las matemáticas.* Cali: Notas de clase Universidad del Valle.

Sáenz Andrade, R. (2015). Las paradojas matemáticas: Una introducción para estudiantes y maestros de educación media. *ANALES de la Universidad Central del Ecuador*, *1*, 31-41.

Tamariz, Á. (2002). Los infinitos: El paraíso de Cantor. *Revista ciencias*, 66-67.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *1*(1), 107-122.