Análisis geométrico de las traslaciones y reflexiones presentes en los diseños que tienen las manillas elaboradas por la cultura Kamëntsá

Angela Milena Obando Arteaga

Código: 1331253

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

Santiago de Cali, 2018

Análisis geométrico de las traslaciones y reflexiones presentes en los diseños que tienen las manillas elaboradas por la cultura Kamëntsá

Angela Milena Obando Arteaga

Trabajo de grado para optar el título de

Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Director:

Mg. Fabián Porras Torres

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

Santiago de Cali, 2018

Resumen

Este trabajo de grado nace del interés de aportar un análisis geométrico de una artesanía que está presente en el diario vivir de los estudiantes de la Institución Educativa Fray Bartolomé de Igualada del municipio de Sibundoy, con el fin de constituir una base para elaborar propuestas de aula que permitan integrar los aspectos culturales con algunos conceptos geométricos que se imparten en la escuela. Se pretende realizar una investigación a los diseños que se encuentran en un producto artesano de la comunidad indígena Kamëntsá, en específico las manillas elaboradas con chaquiras, con el fin de encontrar características que permitan utilizar este medio para la enseñanza de las transformaciones isométricas, teniendo en cuenta algunas nociones geométricas que se identifiquen en aquellos diseños, como también el significado cultural y/o ancestral que tiene ciertas figuras presentes en ellas.

Palabras claves: Transformaciones isométricas, traslación, reflexión axial, comunidad indígena, Kamëntsá, manillas, diseños, simbología, etnomatemáticas.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se inscribe en la línea de investigación conocida como Etnomatemática, en él se busca de aportes a la poca integración de los contextos culturales en el trabajo de la geometría, para la cual se realizó un análisis geométrico de una artesanía la comunidad indígena Kamëntsá.

Específicamente el trabajo se contextualiza en la intención de aportar a la Institución Educativa Fray Bartolomé de Igualada unos elementos fundamentales para la elaboración de propuestas de aula que vinculen el contexto de los estudiantes con la enseñanza de la geometría.

El presente informe se organiza en seis capítulos, así: El primero presenta el diseño del estudio; en este se encuentra la problemática y la justificación, las cuales dan a conocer la pertinencia y relevancia del estudio. Además, se encuentra los objetivos, que son las metas para dar solución a la problemática planteada. Y por último, se ordenó en algunas categorías de interés el campo a trabajar, es decir, se planteó unos antecedentes que den sustento al trabajo.

El segundo capítulo, presenta el marco referencial que sustenta este Trabajo de Grado. En este se encuentra una contextualización geográfica, cultural, social y educativa de la comunidad indígena que hará parte del estudio, al igual como lo algunos aspectos educativos de la misma. Luego se conocerá un poco sobre algunos aspectos culturales que tienen los estudiantes que se encuentran en la Institución Educativa Fray Bartolomé de Igualada; también sobre el campo de la etnomatemática, sus pioneros y algunas teorías que apoyan el análisis geométrico.

El tercer capítulo presenta la metodología que se siguió durante la investigación, en esta se encuentra las tres fases (búsqueda, trabajo de campo y análisis) y las técnicas usadas para la recolección de información.

El cuarto capítulo explica el sentido cultural, los materiales para la elaboración y la simbología de las figuras que se encuentran en las manillas Kamëntsá. En este capítulo, se da a conocer la información obtenida de las entrevistas a artesanas y familias que pertenecen a la comunidad indígena Kamëntsá.

El quinto capítulo presenta un análisis geométrico que evidencia la presencia de transformaciones isométricas en los diseños de las manillas elaboradas por la comunidad indígena, además, se explicitan las categorías de análisis aplicadas en dicho análisis.

El sexto y último capítulo, se muestra las nociones geométricas encontradas en el capítulo anterior. Finalmente, se presentan unas conclusiones que surgieron desde del desarrollo del trabajo, presentando algunos aportes a la Institución Educativa para una posible elaboración de propuestas de aula que integren el contexto cultural de la comunidad Kamëntsá y la geometría.

CAPÍTULO 1: Diseño de la investigación

1.1 Planteamiento del problema

En Colombia existen 87 etnias indígenas reconocidas por el DANE[1], lo que hace que sea un país pluricultural por su diversidad étnica. Por ello, el Estado en la Constitución Política de Colombia (1991) reconoce que esta es una característica relevante, como se evidencia en los siguientes artículos:

> Artículo 7: El Estado reconoce y protege la diversidad étnica y cultural de la Nación colombiana.
>
> Artículo 10: Las lenguas y dialectos de los grupos étnicos son también oficiales en sus territorios, y en las comunidades con tradición lingüística propia la educación será bilingüe.
>
> Artículo 63: Los bienes de uso público, los parques naturales, las tierras comunales de grupos étnicos, las tierras de resguardo, el patrimonio arqueológico de la Nación y los demás bienes que determine la ley, son inalienables, imprescriptibles e inembargables.
>
> Artículo 68: … Los integrantes de los grupos étnicos tendrán derecho a una formación que respete y desarrolle su identidad cultural.
>
> Artículo 70: El Estado tiene el deber de promover y fomentar el acceso a la cultura de todos los colombianos en igualdad de oportunidades, por medio de la educación permanente y la enseñanza científica, técnica, artística y profesional en todas las etapas del proceso de creación de la identidad nacional.
>
> La cultura en sus diversas manifestaciones es fundamento de la nacionalidad. El Estado reconoce la igualdad y dignidad de todas las que conviven en el país. El Estado promoverá la investigación, la ciencia, el desarrollo y la difusión de los valores culturales de la nación.

[1] Censo general 2005. Colombia una Nación multicultural. Tomado de https://www.dane.gov.co/files/censo2005/etnia/sys/colombia_nacion.pdf

> Artículo 72: El patrimonio cultural de la Nación está bajo la protección del Estado. El patrimonio arqueológico y otros bienes culturales que conforman la identidad nacional, pertenecen a la Nación y son inalienables, inembargables e imprescriptibles. La ley establecerá los mecanismos para readquirirlos cuando se encuentren en manos de particulares y reglamentará los derechos especiales que pudieran tener los grupos étnicos asentados en territorios de riqueza arqueológica. (República de Colombia, 2015, pp. 14-25)

Por lo anterior, es un deber del Estado reconocer y proteger la diversidad étnica que posee; además estas características de los grupos étnicos fueron bases importantes para la formulación de la Ley General de Educación, Ley 115 de 1994, la cual deja explícito que la educación en las comunidades indígenas, definida como *etnoeducación*, "es la que se imparte a los grupos étnicos que tienen nacionalidad y que poseen una cultura, una lengua, unos fueros propios y autóctonos. Por tanto, la educación que se imparte a grupos étnicos debe estar ligada a su entorno, a su proceso productivo, social y cultural, respetando sus creencias y costumbres". (2005, p. 38)

La Ley General de Educación además promueve aspectos relevantes para brindar educación a estos grupos indígenas, por esta razón se deben tener en cuenta:

- La formación de los docentes para estas comunidades,
- Unos criterios específicos que aporten a su reconocimiento y su protección,
- Apoyo a estas comunidades para la elaboración de sus recursos didácticos y el desarrollo curricular, con el fin de que los procesos de enseñanza estén estrechamente vinculados con su entorno y sus creencias.

Para cumplir con estos aspectos es necesario que los docentes tengan una formación amplia de la cultura en la que están inmersos y sobre la etnoeducación, en particular en etnomatemática. Así, estos conocimientos podrán favorecer el desarrollo de una propuesta de enseñanza que vincule la cultura y sus características con las matemáticas occidentales que se presentan en los Estándares en Competencias Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN).

Esta preocupación por la educación para los grupos étnicos también está presente en los Lineamientos Curriculares del MEN, en particular los de Matemáticas, los cuales dicen en uno de sus apartados que “... una consecuencia fundamental de esta perspectiva cultural de la educación matemática debería conducir al estudiante a la apropiación de los elementos de su cultura y a la construcción de significados socialmente compartidos, desde luego sin dejar de lado los elementos de la cultura matemática universal construidos por el hombre a través de la historia durante los últimos seis mil años”. (MEN, 1998, p. 30). Es decir, en la educación matemática la cultura cumple un papel importante para el aprendizaje de los estudiantes, puesto que esta puede aportar aspectos significativos de su entorno.

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas presentan una estructura curricular que permite satisfacer las necesidades particulares de los grupos étnicos, ya que el documento describe aspectos importantes para la elaboración de un currículo de matemáticas como un todo armonioso, pues no solo considera los contenidos matemáticos sino su vínculo con el entorno, por ello, es fundamental que las Instituciones que brinden educación a estudiantes que pertenezcan a grupos étnicos analicen profundamente el carácter curricular que se va a manejar, ya que se debe tener en cuenta sus necesidades particulares, para promover la protección y reconocimiento de la cultura.

La necesidad de tener en cuenta las características especiales de las comunidades indígenas también fue foco de reflexiones en el Primer Simposio de Ciencias Ancestrales y Primer Congreso de Etnomatemáticas que se realizó en Quito, Ecuador del 21 al 24 de Junio de 2015, en él se presentaron diferentes trabajos de investigación realizados por la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. (Avendaño et al, 2016, p. 85). En este evento, se presentaron las investigaciones que se han realizado en torno a la Etnomatemática y la Educación Matemática, desde las perspectivas epistemológicas, curriculares y metodológicas, siendo de nuestro interés la perspectiva curricular, puesto que hay aspectos a considerar en la elaboración del plan de estudios y la organización de los contenidos matemáticos, según Avendaño et al. (2016):

> El currículo en estas investigaciones está relacionado con: pensar la formación de maestras y maestros en contextos indígenas; reinventar el papel de la escuela; identificar otras formas de producción de conocimientos y saberes coherentes con las apuestas políticas comunitarias del ser indígena; buscar otras construcciones del plan de estudios que posibiliten transgredir la estructura de contenidos lineales, dando paso a la centración en prácticas culturales. Prácticas que posibiliten un diálogo interdisciplinar e indisciplinar; y que reconocen tiempos y espacios diferentes a los planteados por la escuela. (p. 95).

Los anteriores aspectos, identificados por diversas investigaciones, evidencian una preocupación por mejorar el sistema escolar actual, el cual prioriza la educación matemática occidental sobre una educación que atienda las necesidades particulares de las comunidades, propiciando aprendizajes realmente significativos, en particular a aquellos individuos que están en las instituciones educativas oficiales y que pertenecen a grupos étnicos.

Por ello, cabe decir que la enseñanza de las matemáticas muchas veces es alejada de la realidad, al presentársele al estudiante en contextos ajenos al entorno en el que se encuentra.

Vázquez (2004) afirma lo siguiente:

> Es necesario contextualizar los contenidos escolares mostrando su proceso de construcción y su importancia desde el punto de vista sociocultural y ambiental. Se trata, en definitiva de mostrar la ciencia desde un contexto cercano a la vida de los

> alumnos y que pueda responder a sus necesidades; es decir, la enseñanza de la ciencia debe darse de manera contextualizada (p. 216)

De manera que es pertinente contextualizar los conceptos matemáticos, es decir, vincular el contenido matemático con la realidad en la que se encuentra el estudiante. Por tanto, los docentes tienen un papel fundamental, el cual consiste en reconocer y proteger nuestra cultura, como puede ser el conocimiento matemático que poseen algunos grupos indígenas. Dicho conocimiento matemático ancestral hace parte de lo que es llamado *etnomatemática;* según Ubiratan D´Ambrosio ésta es "la matemática que se practica entre grupos culturales identificables, tales como sociedades de tribus nacionales, grupos laborales, niños de cierto rango de edades, clases profesionales, entre otros" (citado en Blanco, 2008a, p. 2).

Ahora bien, un caso particular de la ausencia de dicha contextualización de los contenidos en el currículo de matemática se puede constatar en el plan de estudios del área de matemáticas de la Institución Educativa Fray Bartolomé de Igualada, ya que no se evidencia de manera explícita el trabajo con contextos cercanos a la realidad de los estudiantes, como podría ser, la ganadería, la agricultura, las artesanías, entre otras. En el Anexo 1 se muestra una parte de este plan de estudios, en la cual quedan reflejados los desempeños y eje *¿Cómo enseñar?* asociados al pensamiento espacial y métrico de todos los ciclos escolares.

El plan de estudios de esta institución está estructurado curricularmente por grados y dividido por períodos, los cuales presentan tanto los pensamientos matemáticos como los estándares de cada pensamiento que se van a trabajar, así como las competencias, saberes y desempeños necesarios para desarrollar dichos pensamientos. Se evidencia que se trabaja en base a lo propuesto por los dos documentos que propone el Ministerio de Educación Nacional, a saber, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares básicos de competencias en matemáticas (EBCM). Además, la estructura del plan de estudios permite afirmar que es un trabajo en equipo entre todos los profesores del área, pues deja en evidencia cual es naturaleza de las matemáticas con la que ellos trabajarán y se enfocarán, los propósitos que se plantean para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como también la relevancia que tienen las matemáticas para las pruebas nacionales (Pruebas Saber).

Sin embargo, no se evidencia el reconocimiento de los estEscriba aquí la ecuación.udiantes a los que la institución les impartirá la educación académica, pues podría ser importante explicitar algunos aspectos socioculturales de la comunidad educativa. Además, al revisar la malla curricular, se observa que el pensamiento espacial y los sistemas geométricos se abordan en poca medida, y se le da más peso a otros pensamientos, lo cual debería ser equilibrado en cada periodo académico o durante cada año escolar.

Finalmente, se pretende abordar tal problemática a través de un análisis geométrico que permita ser el puente para poder dar respuesta al siguiente interrogante:

¿Qué elementos geométricos de los diseños de las manillas Kamëntsá podrían aprovecharse en la formulación de posibles propuestas de aula para el desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes de la Institución Educativa Fray Bartolomé de Igualada del municipio de Sibundoy?

1.2 Justificación

La comunidad indígena Kamëntsá presente en el municipio de Sibundoy, plasma su cosmología, sus creencias y visiones del mundo en sus artesanías, las cuales se han ido aprendiendo de generación en generación y hacen parte de su identidad como comunidad étnica. Una de estas artesanías son las manillas elaboradas con chaquiras (ver figura 1), en las cuales se podrían encontrar algunos elementos relacionados con la geometría. Pero, existen aspectos que, pese a su potencialidad como elementos a usar en la enseñanza del pensamiento espacial, están ausentes en las propuestas didácticas existentes en los colegios de la zona que apoyan la educación de los jóvenes que pertenecen a esta comunidad.

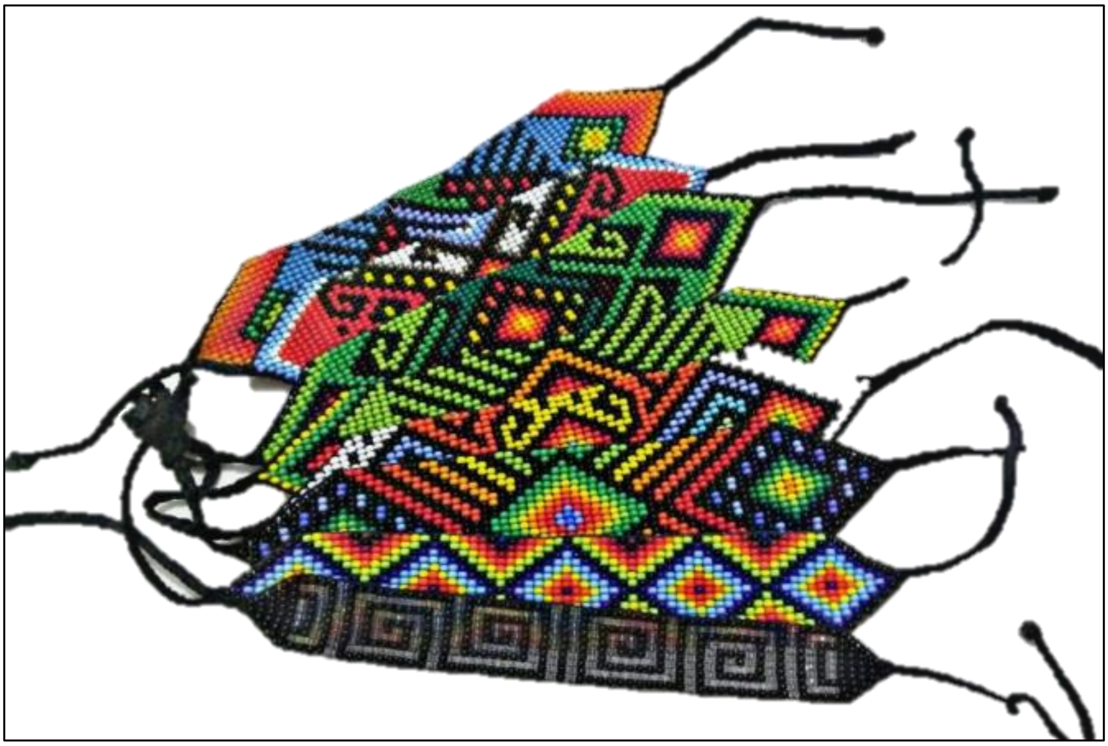


Figura 1. Manillas en chaquira Checa, elaboradas por la comunidad indígena Kamëntsá. Fuente: Imagen propia.

Al respecto, Blanco (2008b) afirma lo siguiente:

> Se hace necesario integrar elementos matemáticos ancestrales de la comunidad en el currículo escolar. Sin olvidar que éstos están permeados o que están íntimamente relacionados con la cosmovisión de los pueblos. Así mismo, se hace un llamado a los programas de Licenciatura en Matemáticas que incorporen espacios académicos en sus programas donde se reflexione sobre la etnoeducación. Por otra parte, es fundamental que los investigadores universitarios acompañen de manera más cercana y comprometida a los docentes etnoeducadores en este proceso de recuperación y conservación del patrimonio matemático autóctono de nuestras comunidades indígenas y afrodescendientes. (p. 3).

Por lo anterior, es esencial promover investigaciones en etnomatemática, con el fin de integrar las matemáticas universales con los aspectos culturales que estén presentes en nuestra realidad, para que sean material de trabajo o apoyo para la formulación de las clases de matemáticas en las instituciones educativas, ya que serían un recurso para la enseñanza de las matemáticas, así como también un medio para reconocer y proteger los conocimientos propios de los grupos étnicos.

En este sentido, es relevante considerar el papel que cumplen las instituciones educativas oficiales de la población en que está inmersa la comunidad indígena, pues estas deben poseer un plan de área de matemáticas que considere la inclusión de aspectos socioculturales vinculados con los contenidos matemáticos, es decir, relacionar los conocimientos propios de la comunidad con las matemáticas occidentales; además disponer de propuestas de aula para la práctica docente, que evidencien la puesta en escena de estos aspectos socioculturales en la enseñanza de las matemáticas.

Por otro lado, al ver la poca relevancia que se le da a algunos de los tipos de pensamiento matemático en el aula, es necesario que se busquen estrategias para potencializar su desarrollo en los estudiantes. Tal es el caso del pensamiento espacial, el cual pese a su fuerte presencia en pruebas nacionales e internacionales, se suele dedicar poco tiempo a su estudio.

Al respecto, se resaltan las **Pruebas Saber[2] de 3°, 5° y 9°**, las cuales evalúan competencias que se han desarrollado en cada ciclo escolar, siendo esta una manera de evaluar las características fundamentales que debe poseer un estudiante en su aprendizaje en las instituciones educativas. En estas pruebas, un área fundamental a evaluar es matemática; dentro de esta se aprecia que el componente geométrico asume aproximadamente un 40% del total de la prueba. (Ver figuras 2, 3 y 4)

COMPONENTE	COMPETENCIA			
	Razonamiento y argumentación	Comunicación, representación y modelación	Planteamiento y resolución de problemas	Total
Numérico-Variacional	11 %	11 %	12%	34 %
Geométrico-Métrico	11 %	11 %	11 %	33 %
Aleatorio	11 %	11 %	11 %	33 %
Total	**33 %**	**33 %**	**34 %**	**100 %**

Figura 2. Estructura de la prueba de matemáticas. Prueba saber 3° para el año 2017. Fuente: tomado de la guía de orientación saber 3 del año 2017.

COMPONENTE	COMPETENCIA			
	Razonamiento y argumentación	Comunicación, representación y modelación	Planteamiento y resolución de problemas	Total
Numérico-Variacional	10 %	15 %	15%	40 %
Geométrico-Métrico	19 %	10 %	11 %	40 %
Aleatorio	6 %	10 %	4 %	20 %
Total	**35 %**	**35 %**	**30 %**	**100 %**

Figura 3. Estructura de la prueba de matemáticas. Pruebas saber 5° para el año 2017.

[2] Estas pruebas las desarrolla el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES, 2017).

COMPONENTE	COMPETENCIA			
	Razonamiento y argumentación	Comunicación, representación y modelación	Planteamiento y resolución de problemas	Total
Numérico-Variacional	11 %	13 %	11%	35 %
Geométrico-Métrico	15 %	11 %	9 %	35 %
Aleatorio	11 %	10 %	9 %	30 %
Total	**37 %**	**34 %**	**29 %**	**100 %**

Figura 4. Estructura de la prueba de matemáticas. Pruebas saber 9° para el año 2017

De lo anterior, es preciso afirmar que el estudio de la geometría no puede pasarse por alto, y es necesario empezar a poner la mirada en este campo para así aportar estrategias en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Otro elemento que justifica la pertinencia de este estudio son los resultados de las Pruebas saber 3°, 5° y 9° de la Institución Educativa Fray Bartolomé de Igualada, correspondientes a los componentes evaluados en la prueba de matemáticas. (Ver figuras 5, 6 y 7[3])

Estos resultados indican que los estudiantes poseen dificultades en relación al componente geométrico- métrico, pues en los tres grados se observa que los estudiantes se acercan al umbral que divide los niveles de debilidades y fortalezas. Por ello, se puede afirmar la necesidad por parte de los docentes, de plantear actividades que apunten al desarrollo del pensamiento especial y sistemas geométricos.

[3] Estos resultados fueron tomados de la página oficial del ICFES. www.icfesinteractivo.gov.co/resultados-saber

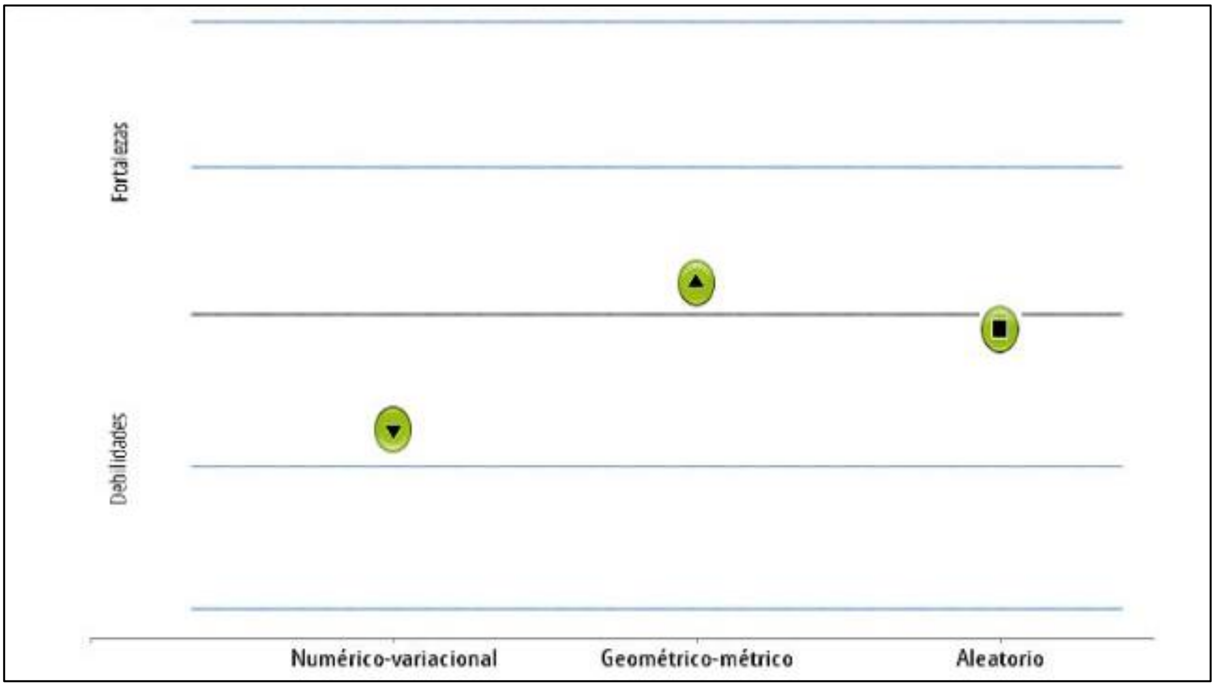


Figura 5. Resutados Prueba Saber 3°, Institución Educativa Fray Bartolome e Igualada.

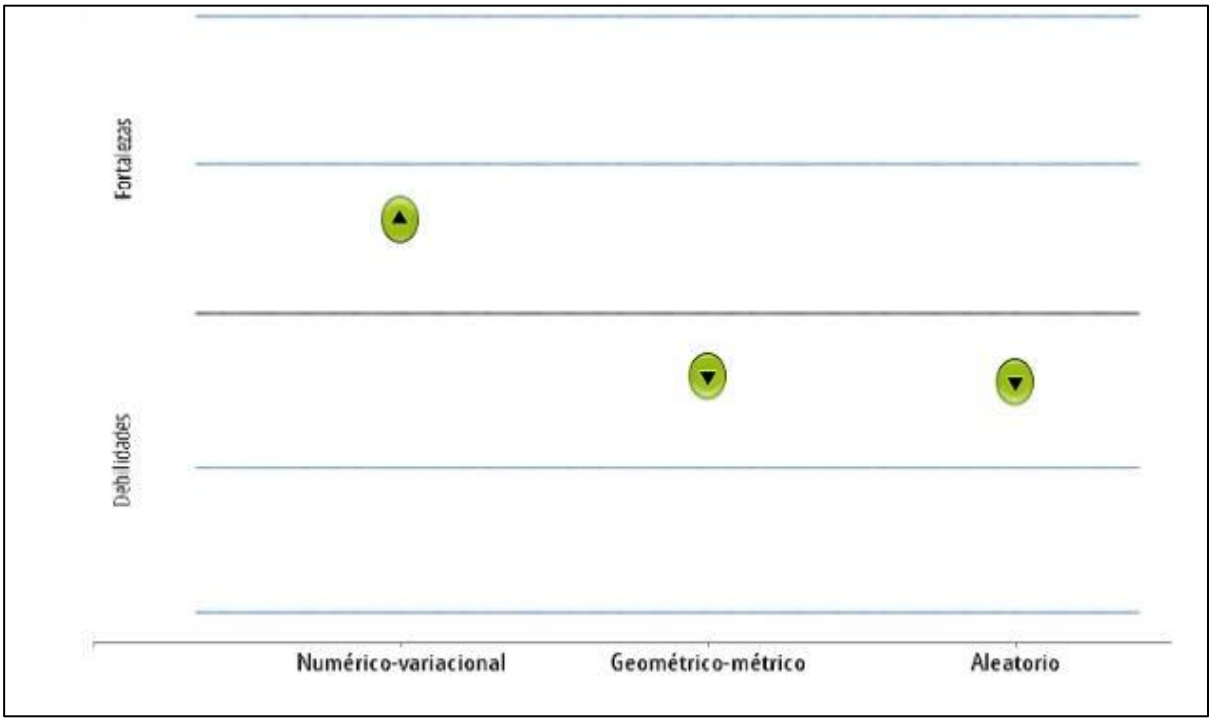


Figura 6. Resutados Prueba Saber 5°, Institución Educativa Fray Bartolome e Igualada.

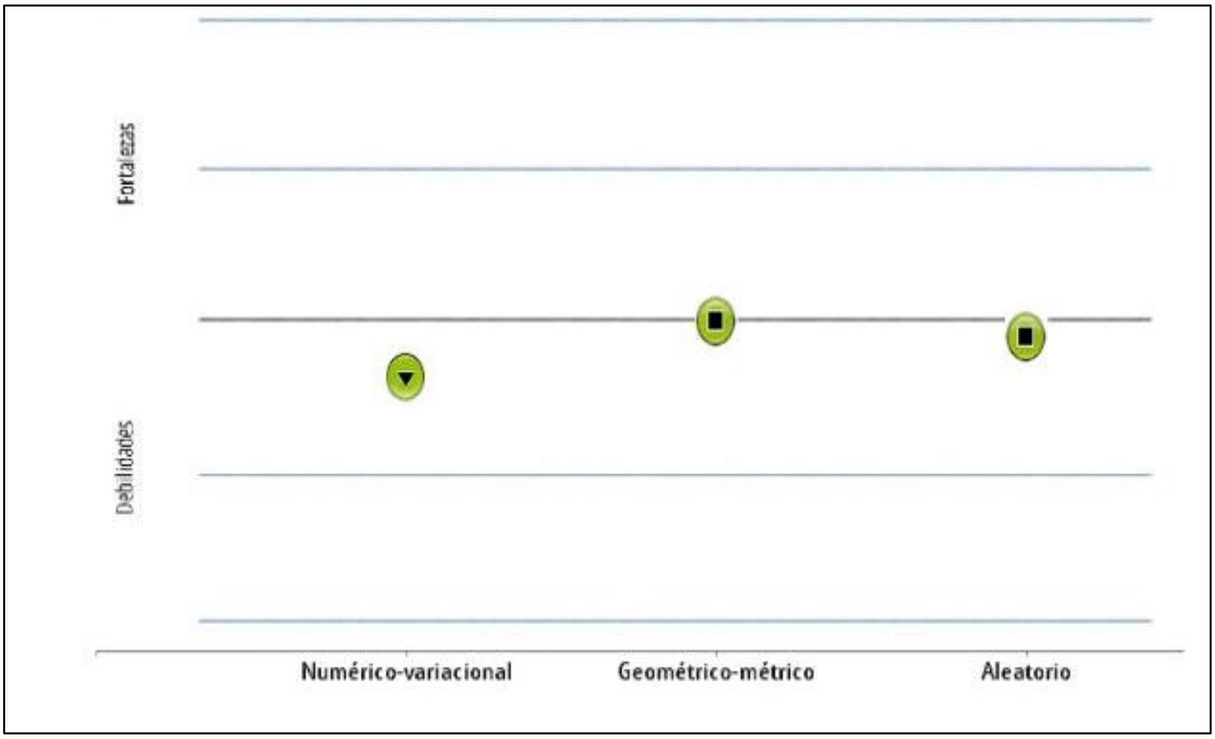


Figura 7. Resutados Prueba Saber 9°, Institución Educativa Fray Bartolome e Igualada.

Por otro lado, también es importante señalar la justificación del objeto de estudio que interesa en este trabajo de grado, a saber, las transformaciones isométricas. Un ejemplo de esto es la presencia de preguntas relacionadas con las traslaciones, en dos cartillas de la prueba Saber 5° del año 2017. En ambas cartillas solo se evidencia una pregunta relacionada a dicho tema, las cuales se caracterizan por el movimiento de un dibujo en una cuadrícula o en un tipo de plano cartesiano. (Ver figuras 8 y 9[4])

[4] Fuente: Imagen tomada de la cartilla de las Pruebas Saber de 5° del año 2017.

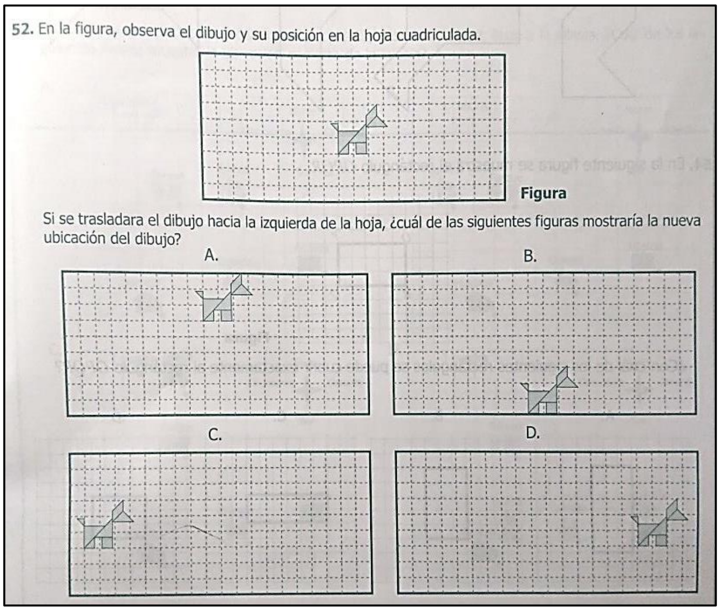


Figura 8. Ejemplo1 de una pregunta que estuvo presente en la Prueba Saber 5°, año 2017.

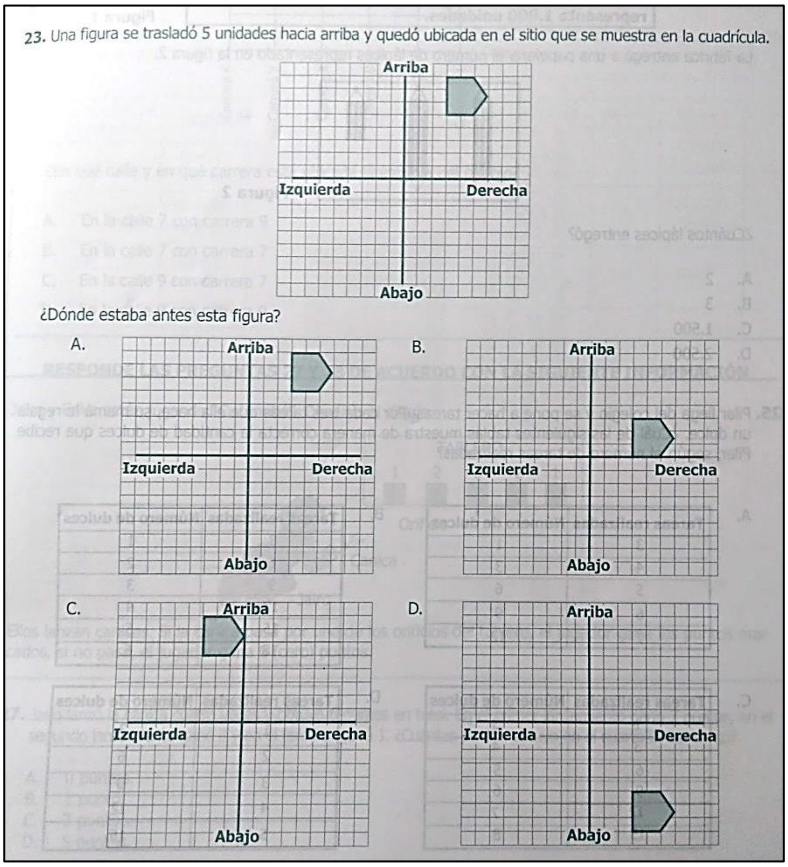


Figura 9. Ejemplo2 de una pregunta que estuvo presente en la Prueba Saber 5°, año 2017.

Por esta razón, se propone en este trabajo presentar un análisis geométrico que pueda ser el sustento para posteriores propuestas que relacionen las matemáticas occidentales con los conocimientos culturales de la comunidad kaméntsá, en particular las transformaciones isométricas mediada por los diseños que se pueden encontrar en las manillas elaboradas por la comunidad indígena.

1.3 Objetivos

1.3.1 General

- Aportar a la comunidad escolar de la Institución Educativa Fray Bartolomé de Igualada elementos para la elaboración de propuestas de aula sobre las transformaciones isométricas vinculadas al diseño de las manillas elaboradas por la cultura Kamëntsá.

1.3.2 Específicos

- Explicitar el significado cultural de las figuras presentes en las manillas artesanales de la comunidad Kamëntsá.
- Identificar las nociones geométricas asociadas a la traslación y reflexión axial, presentes en los diseños de las manillas elaboradas por los indígenas Kamëntsá.
- Describir elementos importantes para la elaboración de propuestas de aula articuladas a las nociones geométricas encontradas en las manillas de la comunidad Kamëntsá.

1.4 Antecedentes

En este apartado se presentará un barrido de algunos trabajos que están relacionados al tema de investigación y que aportan aspectos relevantes para el desarrollo de los objetivos propuestos en este trabajo de grado.

- Etnomatematicas

Avendaño et al[5] (2015) desarrollaron un documento, el cual fue construido como un estado del arte de investigaciones realizadas en el campo de la etnomatemática por la Facultad de educación de dicha Universidad. Una de las perspectivas de investigación es la curricular, en la que los trabajos se centran a preocuparse por los aspectos que cambian el currículo en su visión y organización de contenidos de manera lineal. Se trata de que los planes de estudios se centren en las prácticas culturales y no en contenidos, lo cual posibilita al trabajo disciplinar e indisciplinar.

Blanco (2006) presenta una recopilación de algunos de los distintos trabajos de investigación en etnomatemáticas hechos hasta el momento en Colombia. En dicha recopilación presenta la historia de la etnomatemática colombiana, da a conocer las diferentes perspectivas en las que se han desarrollado estos estudios y las diversas universidades, grupos de estudio y redes que apoyan el trabajo de investigación en etnomatemática.

Por otro lado, Blanco (2008a) pone en evidencia la poca investigación que actualmente se hace sobre el pensamiento matemático en los grupos étnicos y afrodescendientes, y la carencia de formación etnomatemática de los docentes de estas comunidades. Para responder a esta problemática el autor plantea tres puntos importantes, la etnoeducación, poner en relación los objetivos de las políticas curriculares en matemáticas con la etnoeducación y por

[5] Los autores de este articulo son integrantes del grupo de estudio “Etnomatematicas y educación matemática” de la Universidad de Antioquia.

último, analizar la influencia que, sobre la estructura didáctica, tiene trabajar el currículo de matemáticas desde la etnomatemática

- Etnomatematicas y el currículo

En su investigación, Peña (2014) presenta la necesidad de incluir la etnomatemáticas en los currículos de matemáticas. Además, muestra que la matemática no se puede alejar de los entornos y prácticas sociales, menos aún en contextos indígenas, ya que se está limitando y excluyendo a las culturas en su desarrollo del pensamiento matemático. Por tanto, es imprescindible cambiar la visión de las matemáticas e incluir la etnomatemáticas indígenas en los currículos, para permitir enriquecer el pensamiento matemático de los estudiantes indígenas y no indígenas, y a la vez aportar a la protección y reconocimiento de los grupos étnicos.

Rosa y Orey (2011) presentan la importancia de las conexiones entre los conceptos y las experiencias culturales, lo cual se puede llevar a cabo con un cambio del plan de estudio en donde el fin sea una matemática más relevante y significativa para los estudiantes. Por ello, los autores afirman que es fundamental reforzar y valorar el conocimiento cultural de los estudiantes, en lugar de ignorarlo o negarlo. En sus conclusiones, señalan que el desarrollo del plan de estudios de matemáticas, se debería enmarcar bajo una perspectiva etnomatemática, la cual podrá tomar partida de algunas prácticas culturales del contexto para la enseñanza de la matemática. Añaden que un factor que puede facilitar la inclusión de la etnomatemática al plan de estudios, es una concientización del aporte que hace esta perspectiva a la enseñanza de la matemática, pero muchas veces esto no se logra ya que la formación en este campo es poco recibido por los docentes.

- Etnomatemática en comunidades indígenas de Colombia

Gómez (2009) presenta una recopilación de las actividades matemáticas inmersas en las prácticas culturales de la comunidad Nasa de Chimborazo, bajo la perspectiva sociocultural de Bishop, con el fin de hacer aportes al Proyecto Educativo Comunitario de la Institución Educativa Chimborazo.

- Etnomatemáticas, grupos étnicos y el pensamiento espacial en Colombia

Vargas y Ortiz (2009) presentan una investigación etnográfica con el fin de aportar consideraciones teóricas a la enseñanza de la geometría, puesto que es indispensable el conocimiento de la cultura propia de la comunidad para su protección y reconocimiento.

Aroca (2007) muestra el proceso de construcción de un plan de enseñanza de geometría para los indígenas arhuacos. Esta investigación no solo permitió conocer los procesos geométricos que realiza esta cultura sino que además pone de manifiesto el significado cosmogónico, cosmológico y su cosmovisión. Esta investigación tiene un análisis tanto simbólico como geométrico de las figuras que se encuentran en las mochilas arhuacas.

Urbano (2009) hace una identificación de la relación que existe entre las transformaciones isométricas en el diseño y elaboración de las esculturas de la cultura de San Agustín. El producto de dicha investigación fue una secuencia didáctica para la enseñanza de las transformaciones de traslación, rotación y simetría para el grado quinto de primaria de las instituciones educativas del municipio de San Agustín, permitiendo integrar los conceptos de la geometría con aspectos históricos y culturales, mediados por ambientes de aprendizaje dinámicos, específicamente con el programa Cabri.

Guerrero (2017) realiza un análisis geométrico de uno de los productos artesanales de la comunidad indígena Nasa de Corinto al norte del departamento del Cauca, a saber, los tejidos del chumbe[6]. Esta investigación se desarrolló con el fin de sugerir algunos elementos que se podían tener en cuenta para la elaboración de propuestas didácticas de geometría que estén vinculadas a aspectos culturales de la región. Para el análisis, la autora tomó el modelo de "deconstrucción" aplicado por Aroca (2009), los principios de enculturación del currículo y las actividades universales de Bishop (1999), y las cuatro actividades que propone Barton (1996). Dicho trabajo, abrió el panorama a posteriores investigaciones en el campo de la Etnomatematicas, y se constituyó en un aporte para la comunidad docente de la zona para generar cambios en los currículos de las instituciones que están alrededor de la cultura Nasa.

En conclusión, teniendo en cuenta los antecedentes presentados, se puede evidenciar, por un lado, la falta de investigaciones en torno a cómo diseñar propuestas de enseñanza que aprovechen los contenidos matemáticos propios de las comunidades indígenas de Colombia.

Y por otro lado, estos estudios también dejan ver la necesidad de indagar sobre la geometría que está presente en algunos productos elaborados por comunidades indígenas colombianas, pues solo se han reportado algunos en relación con el chumbe, esculturas y mochilas.

[6] El chumbe, término propio de la comunidad indígena Nasa, es una faja tejida en lana.

CAPÍTULO 2: Marco Referencial

2.1 Contextualización geográfica, cultural y social de la comunidad Kamëntsá

La comunidad indígena Kamëntsá se encuentra en el suroccidente colombiano, específicamente en el Valle de Sibundoy, departamento del Putumayo. En este departamento no solo se encuentra esta comunidad sino también la comunidad indígena Inga, con la que comparten el territorio. Los indígenas de la zona son 5.539 de 15.490 habitantes que tiene Sibundoy, según lo que reporta el DANE de 2014[7]. Sibundoy está a una altura de 2055 msnm, con una temperatura media de 16°C, clima que ha permitido el cultivo de verduras, frutas y la ganadería. Este municipio limita al oriente con el municipio de San francisco, al occidente con el municipio de Colón, al sur con el municipio de Santiago y al norte con el páramo de Doña Juana- Nariño. (Ver figura 10)

Figura 10. Mapa geográfico de Sibundoy, Putumayo. Fuente: imagen propia.

[7] Debido a que no se encontró esta información directamente en la página oficial del DANE, se recurre a tomar los datos que aporta Agreda (2016), por ser los más actualizados.

Los indígenas Kamëntsá son una comunidad antigua, algunos viven en la cabecera municipal, pero la mayoría viven particularmente en algunas veredas del Valle de Sibundoy, a saber, Leandro Agreda, San Felix, Sagrado Corazón de Jesús, Tamabioy, entre otras. La comunidad indígena se identifica por su propio idioma y las costumbres tales como: el carnaval del perdón, la chagra tradicional, su medicina natural tradicional y sus artesanías. (Ver figura 11 y 12)

Figura 11. Desfile en Sibundoy-Carnaval del perdón comunidad Kamëntsá. Fuente: imagen propia.

Figura 12. Carnaval del perdón 2018. Fuente: imagen propia.

2.2 Aspectos educativos de la comunidad Kamëntsá

Para entrar a hablar de la educación en esta comunidad indígena, se debe partir del hecho de que sus antepasados fueron desarraigados de sus costumbres en la colonización, fueron obligados a apropiarse de la cultura occidental que traían los conquistadores en aquel momento, dejando con el tiempo un retroceso de su pensamiento ancestral y una pérdida de su identidad cultural.

En la comunidad Kamëntsá el proceso de enseñanza-aprendizaje y la práctica de sus conocimientos propios se llevan a cabo en tres escenarios, que son: la familia, la comunidad y la escuela. Para Ministerio del interior y el Cabildo indígena Camëntsá (2012) los anteriores escenarios se describen así:

> En el primero, es donde se empieza a temprana edad a inculcar los valores, los usos y costumbres de la comunidad indígena. El segundo, es el lugar donde se aplica y se refuerza todo lo aprendido en el hogar, inculcando el pensar y actuar en conjunto, para lograr un bienestar colectivo. El tercero, es la educación escolarizada, la cual es reformada con un modelo educativo propio que permite la práctica de lo aprendido en el hogar y en la comunidad, sin dejar de lado lo académico (la educación occidental) para cumplir y estar al nivel de lo que se exigen en las demás instituciones académicas, pero sin perder su identidad como comunidad indígena. (p. 185)

De lo anterior, cabe resaltar que el espacio que potencializa su educación es la impartida en la familia, puesto que la madre cumple un papel fundamental en la transmisión de los conocimientos ancestrales, ya que ella es la primera maestra, la que enseña su lengua materna, el trabajo de la tierra, la elaboración de las artesanías, entre otras.

La comunidad Kamëntsá en la actualidad cuenta con dos instituciones educativas para sus niños y jóvenes, que son: el Hogar Infantil *Basetemëngbe Yebna* (casa de los niños) y el Colegio Bilingüe Artesanal Kamëntsá. Estas instituciones apuntan a la recuperación de sus saberes ancestrales y su lengua materna, y a preservar los conocimientos en medicina tradicional, tejidos, agricultura, astrología, gramática, entre otros.

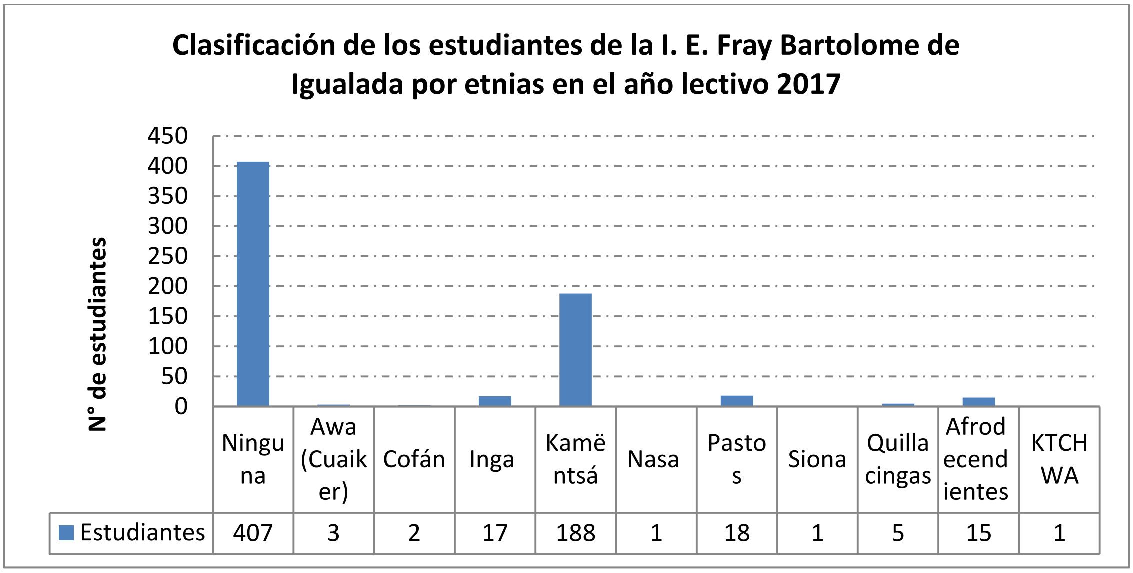
Pero, esto no es suficiente, hay muchos factores que llevan a los estudiantes de esta comunidad a buscar educación en otras instituciones educativas oficiales no indígenas presentes en la zona. El Cabildo indígena Kamëntsá de Sibundoy afirma que:

> La imposición de la educación escolarizada traída de la colonización y la evangelización ha afectado de manera negativa a nuestro pueblo porque no se le ha dado la importancia necesaria a nuestros conocimientos ancestrales. Podemos identificar dentro de este proceso un alto nivel de población estudiantil Kamëntsá dentro de centros educativos no bilingües. (2012, p. 190)

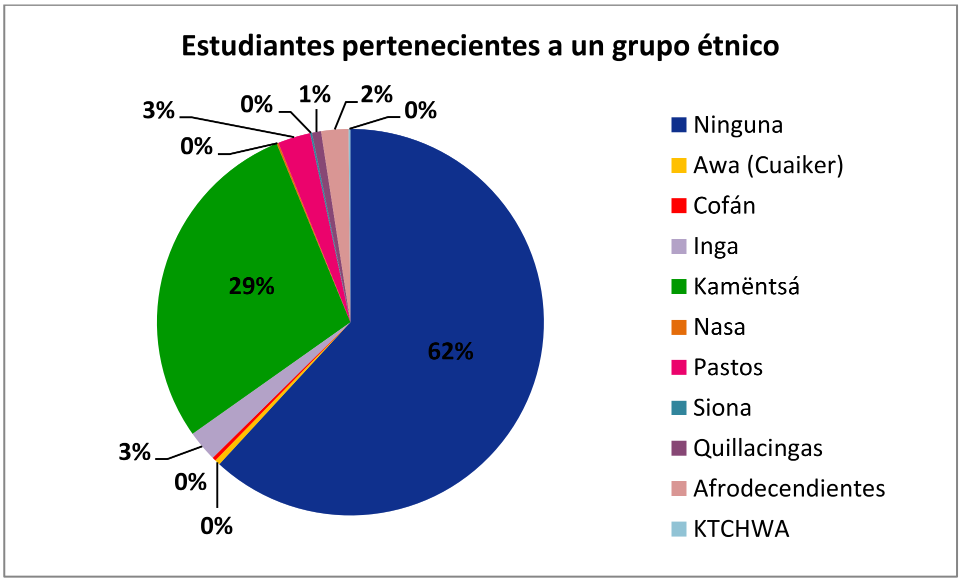
En este sentido, es necesario adoptar medidas para que estas instituciones permitan proteger y fortalecer su identidad cultural. Estas instituciones son cuatro: Colegio Champagnat, Colegio Normal Superior del Putumayo, Colegio Fray Bartolomé de Igualada y el Colegio Seminario Misional, las cuales se caracterizan por brindar una educación occidental, así como lo plantea el MEN.

2.3 Grupos étnicos en la Institución Educativa Fray Bartolomé de Igualada

En la Institución, para el año lectivo 2017 están presentes diez grupos étnicos, de las cuales nueve son etnias pertenecientes a nuestro país (awa, cofán, inga, Kamëntsá, nasa pastos, siona, quillacingas y afrodescendientes) y una etnia proveniente del Ecuador (KTCHWA). La institución al momento cuenta con 658 estudiantes, de los cuales 407 estudiantes no pertenecen a algún grupo étnico y por el contrario 251 estudiantes pertenecen a alguno de los grupos étnicos anteriormente mencionado. (Ver Gráfica 1)



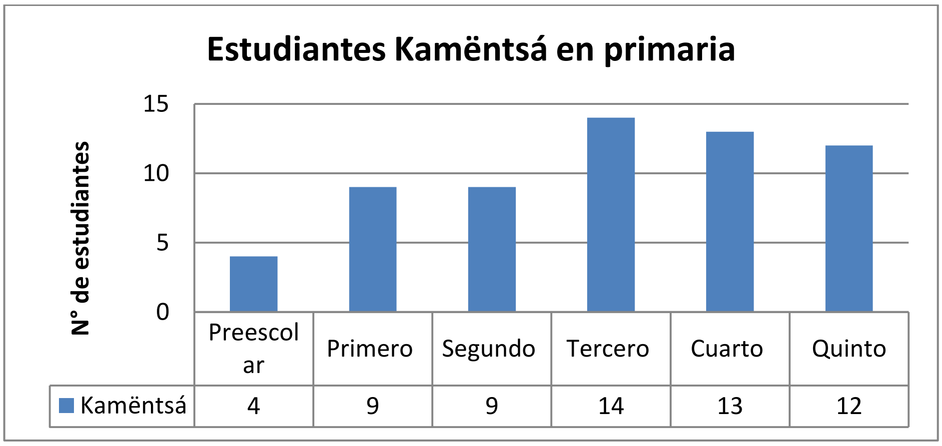
Gráfica 1 Clasificación de los estudiantes de la I. E Fray Bartolomé de Igualada por etnias en el año lectivo 2017. Fuente: tomado de las bases de datos de la I. E Fray Bartolomé, año 2017.



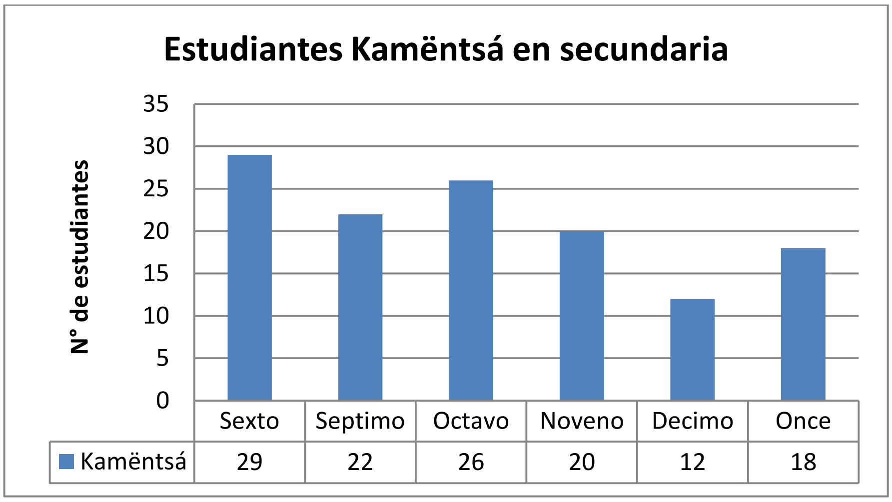
Gráfica 2 Porcentaje del número de estudiantes teniendo en cuenta si pertenece a un grupo étnico. Fuente: tomado de las bases de datos de la I. E Fray Bartolomé, año 2017.

En la Gráfica 2, se observa que la comunidad indígena Kamëntsá abarca un gran porcentaje con respecto a los otros grupos étnicos, pues el 29% de los estudiantes matriculados en la institución pertenecen a esta comunidad.

Ahora, se muestra la distribución de este porcentaje de la comunidad Kamëntsá, que contiene 188 estudiantes de la institución repartidos tanto en la primaria como en la secundaria. (Ver Gráfica 3 y 4)

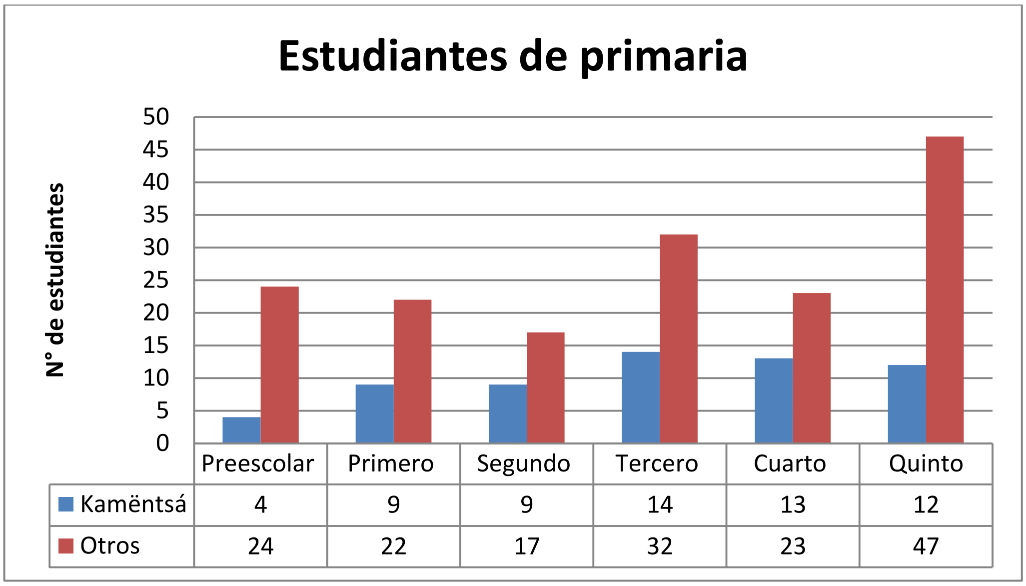


Gráfica 3 Distribución de los estudiantes por cada grado de la sección de primaria. Fuente: tomado de las bases de datos de la I. E Fray Bartolomé, año 2017.

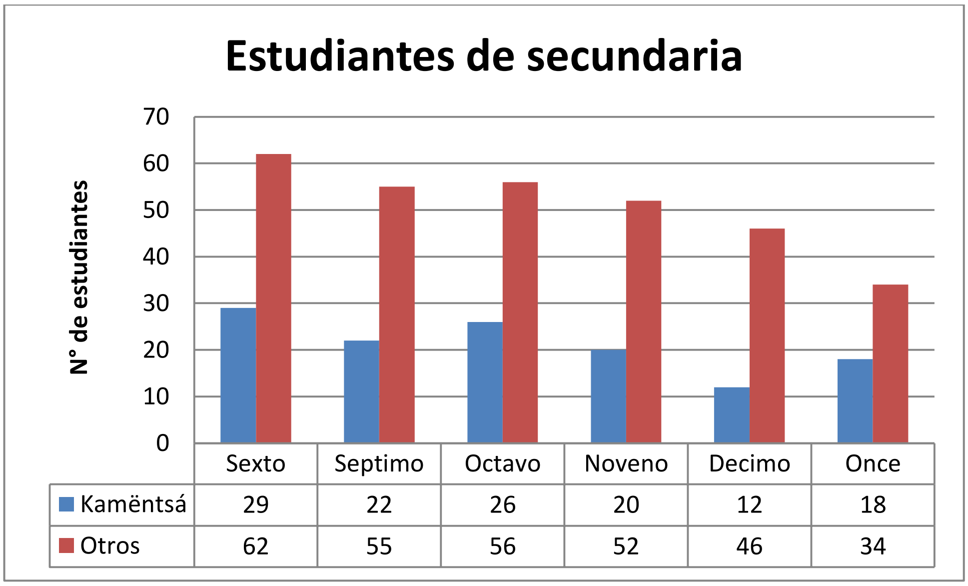


Gráfica 4 Distribución de los estudiantes por cada grado de la sección de secundaria. Fuente: tomado de las bases de datos de la I. E Fray Bartolomé, año 2017.

Por último, se presenta una comparación entre los estudiantes que pertenecen a la comunidad Kamëntsá y los demás estudiantes (los que no pertenecen a una etnia y los que pertenecen a una etnia que no es la Kamëntsá) para observar que la distribución de los estudiantes de esta comunidad es en todos los grados escolares de la Institución Educativa. (Ver Gráfica 5 y 6)



Gráfica 5 Comparación entre el número de estudiantes Kamëntsá con los otros estudiantes (en este grupo se encuentran los estudiantes que no pertenecen a un grupo étnico y los que pertenecen a un grupo etnico que no es el Kamëntsá) con respecto al grado escolar en la sección de primaria. Fuente: tomado de las bases de datos de la I. E Fray Bartolomé, año 2017.



Gráfica 6 Comparación entre el número de estudiantes Kamëntsá con los otros estudiantes (en este grupo se encuentran los estudiantes que no pertenecen a un grupo étnico y los que pertenecen a un grupo etnico que no es el Kamëntsá) con respecto al grado escolar en la sección de secundaria. Fuente: tomado de las bases de datos de la I. E Fray Bartolomé, año 2017.

De lo anterior, las gráficas evidencian la importancia y pertinencia de la investigación que se quiere realizar, puesto que la comunidad Kamëntsá abarca un 29% de la comunidad estudiantil en la institución educativa, y se encuentra distribuida en todos los grados escolares. En ese sentido, se muestra lo fundamental que puede ser la etnomatemática en el currículo de matemáticas de dicha institución, dejando clara la necesidad que posee la institución de contextualizar algunos contenidos matemáticos con la realidad de los estudiantes. Por tanto, la construcción de una propuesta de aula mediada por los diseños que se encuentran en las manillas Kamëntsá favorecerá el trabajo del docente para relacionar algunas nociones geométricas con aspectos socioculturales de la comunidad en la que se encuentra inmersa dicha institución.

2.4 Etnomatemática

En la actualidad, se ha venido poco a poco reconociendo la importancia de contextualizar los contenidos que se plantean en la estructura curricular de cada institución educativa. Uno de los campos que más ha abordado este aspecto es el campo de la etnomatemática, contribuyendo a la integración de los contenidos matemáticos occidentales con los saberes de las comunidades culturales.

Según D`Ambrosio el término etnomatemática se divide en tres raíces: *etno* por los diversos ambientes social, cultural, natural, entre otros; *mathema* que se entiende por explicar, entender, enseñar; y *thica* de la raíz griega tecno, que se refiere a artes, técnicas, maneras. (Blanco, 2008a, p. 21) Además, la define como “la matemática que se práctica entre grupos culturales identificables, tales como sociedades de tribus nacionales, grupos laborales, niños de cierto rango de edades, clases profesionales, entre otros”. (Citado por Blanco, 2008a, p. 2)

2.5 Actividades universales según Alan Bishop

En el trascurso de los años, no se ha podido eliminar la etiqueta de “compleja” que se les ha colocado a las matemáticas, desconociendo el hecho de que la matemática se encuentra en nuestra realidad, en todas las culturas.

Bishop, en su teoría de enculturación matemática plantea que todas las culturas desarrollan unas actividades comunes, las cuales ha llamado actividades universales del pensamiento matemático y que serán descritas brevemente, estas son seis: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar.

Contar es una actividad matemática más obvia, ya que contar y asociar objetos con números ha sido una actividad que se ha desarrollado en toda la historia, se podría decir que es un acto innato en el humano, solo que este depende de su proceso según la cultura que lo rodee. Bishop afirma que:

> Contar implica muchos aspectos, con sutiles variaciones en los tipos de lenguaje y las formas de representación empleados para comunicar los productos de contar. Es una actividad firmemente relacionada con las necesidades vinculadas con el entorno y está sujeta a diversas pautas y, al mismo tiempo, influye en estas actividades. (1999, p.48)

Medir es una actividad universal que se encarga de comparar, ordenar y cuantificar las magnitudes que tienen importancia para una cultura. Pero estas magnitudes dependen de cada cultura en su entorno local, ya que este es el que proporciona las necesidades y las unidades de medidas según sus condiciones, por ejemplo para muchas culturas el primer dispositivo de media fue el cuerpo, ya que muchas han tomado como unidades de medida, sus dedos, las manos, los pies, entre otros. Blanco (2008a) da a conocer otros patrones de medida que son usados en la vida diaria, como por ejemplo los que se presenta en las recetas de cocina: el atado y la pizca. Ambas son el resultado de un acuerdo social.

Diseñar es una actividad que todas las culturas realizan, pero el diseño varía y la cantidad de formas también. Esto depende de los materiales y de las necesidades que se encuentren en su entorno; por ejemplo la comunidad Kaméntsá con la llegada de los españoles a su territorio conocieron y obtuvieron las chaquiras, en las que encontraron un medio para diseñar manillas que reflejaran sus creencias ancestrales y además fuera un accesorio de uso diario para la distinción de otras culturas. Bishop afirma que "*la esencia de diseñar es transformar una parte de la naturaleza.*" (1999, p. 61) Es decir, el cambio que se le hace ya sea a un pedazo de madera, arcilla, entre otros, para construir una decoración o herramienta, como es el caso de las manillas, aunque no se modifiquen las chaquiras, estas se estructuran de unas formas específicas para dar a conocer sus saberes ancestrales. Por tanto, diseñar es un acto de creatividad que permite darle un toque artístico a algo bajo una estructura particular creada a través de la mente.

Además, los diseños que hace cada cultura son diferentes entre sí, puesto que las formas varían y la disponibilidad del material también, el diseñar para las culturas refleja las necesidades de cada una de ellas, ya que elaboran artesanías ya sea como adorno, protección o para cultivar.

Localizar es una actividad que surge de la necesidad de buscar y fijar sitios, ya que en las culturas la exploración y ubicación en la tierra y el mar fue una actividad fundamental para la obtención de los alimentos. Esta actividad es considerada por Bishop tan fundamental como la de contar, ya que, gracias a ella, se desarrollan nociones geométricas y numéricas, con el fin de cubrir la necesidad que ha tenido el hombre por ubicarse en un entorno físico, por lo anterior muchas culturas han construido métodos para codificar y simbolizar su entorno espacial. En particular, comunidades diferentes que se encuentran en distintos sitios geográficos han tomado diferentes aspectos para dar cuenta de la localización. Por ejemplo, en algunos lenguajes de las tierras altas de Papúa Nueva Guinea, tienen palabras para denotar diferentes grados de pendiente o inclinación, pero no tienen una palabra para definir la idea de "horizontal". Naturalmente, los pueblos de las islas no tienen este problema.

Jugar es una actividad común en todas las culturas, el juego hace parte del desarrollo de destrezas y habilidades, que permiten adquirir imaginación, creatividad y razonamiento.

Por tanto, no se puede desconocer que esta actividad expresa ideas matemáticas, las cuales se ponen en evidencia a través de distintas acciones que realiza el hombre.

Sin embargo, hay que resaltar que el juego es una actividad social que se desarrolla en un contexto y debe haber unos jugadores. El fin del juego es fomentar la diversión y el esparcimiento, en un contexto en que el razonamiento es un factor importante, puesto que se establecen unas reglas a cumplir para jugar. A menudo, para los matemáticos los juegos tienen mucha relación con las matemáticas mismas, ya que ambos son regidos por unas reglas.

Walter Roth (citado por Bishop, 1999, p. 66) plantea que los juegos presentes en distintas culturas se pueden categorizar en siete aspectos: imaginativos, realistas, imitativos, de discriminar, de disputa, de impulsión y de exultación.

Explicar es una actividad que tiene que ver con el entorno social más que con el entorno físico. Esta actividad se centra en responder la pregunta ¿Por qué? Según Bishop explicar es exponer las relaciones existentes entre fenómenos y la búsqueda de una teoría explicativa, es decir, según Horton explicar "*es* básicamente, la búsqueda de la unidad que subyace en la aparente diversidad; de la simplicidad que subyace en la aparente complejidad; del orden que subyace en el aparente desorden; de la regularidad que aparece en la aparente anomalía" (citado por Bishop, 1999, p. 71). Esta exposición de relaciones muestra distintas maneras de explicar fenómenos y de aprobar las explicaciones usando formas distintas que cambian en cada cultura.

2.6 La enculturación del currículo según Alan Bishop

El currículo de matemáticas es un documento estructurado para la enseñanza y el aprendizaje de procedimientos, métodos, actitudes, reglas y algoritmos, y está muy alejado de ser un producto para la reflexión. Según Bishop (1999) el currículo de matemática no puede convertirse en un instrumento de selección y limitación de las herramientas que ofrecen las matemáticas, por el contrario este debe permitir la reflexión, la interacción y el equilibrio dentro de la sociedad. Es decir, la matemática debería permearse de las características culturales de la sociedad a la cual es impartida, permitiendo reflexionar tanto la responsabilidad con la cultura como con el niño.

Bishop (1999) plantea que el currículo de enculturación aparte de asociar las seis actividades universales, debe tener en cuenta cinco principios, descritos a continuación:

- La representatividad: "Debe representar adecuadamente la cultura matemática. Es decir, no solo se debe ocupar de la tecnología simbólica de las Matemáticas, sino que también debe ocuparse de una manera explícita y formal de los valores de la cultura Matemática" (Bishop, 1999, p. 127).
- El formalismo: *"*Debe objetivar el nivel formal de la cultura Matemática" (Bishop, 1999, P. 128). Es decir, se debe indicar la razón del por qué las matemáticas hacen parte de la cultura y se pueden relacionar con las de otras culturas.
- La accesibilidad: "la enculturación deber ser para todos: la educación Matemática debería ser para todos." (Bishop, 1999, p. 128). Es, decir, el contenido del currículo debe estar estrechamente relacionado con las necesidades y capacidades de los alumnos. Se debería articular las vivencias e intereses de los alumnos a los contenidos para profundizar algunas de las ideas matemáticas.
- El poder explicativo: "las Matemáticas como fenómeno cultural obtienen su poder del hecho de ser una rica fuente de explicaciones y esta característica debe conformar los significados importantes que deben surgir del currículo de enculturación… Así, el currículo Matemático debe estar basado de alguna manera en el entorno del niño y su sociedad" (p. 129)

- La concepción amplia y elemental: “Se debería ofrecer varios contextos porque el poder de explicación, que se deriva de la capacidad de las Matemáticas para conectar entre si grupos de fenómenos aparentemente dispares, se debe manifestar por completo” (p. 130).

Además, para ejecutar los principios y las actividades universales, Bishop plantea tres componentes, no excluyentes, esenciales para el currículo:

Componente simbólico: Se exploran los valores del racionalismo y el objetivismo, pues está compuesto por los conceptos, los cuales deben ser estructurados en relación a las seis actividades universales. Por ello, las actividades o situaciones que se desarrollen deben incluir diversos contextos.

Componente societal: Se expone los diversos usos de las matemáticas en la sociedad. Considera el valor de las matemáticas en el pasado, en el presente y en un futuro, lleva a pensar la historia del desarrollo matemático para un posterior trabajo.

Componente cultural: refleja el cómo y el por qué se generó las matemáticas llegando a reflexionar sobre qué son las matemáticas. (1999, p. 131)

2.7 Pensamiento espacial

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) definen al pensamiento espacial como “el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales.” (MEN, p. 56) Es decir, este pensamiento aborda las acciones que hace el sujeto con los objetos que se encuentran en el espacio, en todas sus dimensiones. Para desarrollar este pensamiento se requiere del trabajo de conceptos y propiedades de los objetos en el entorno físico como del espacio geométrico en relación con los movimientos del cuerpo del sujeto y las coordinaciones entre ellos y con los sentidos.

La geometría se podría relacionar con lo artístico, con el diseño y elaboración de objetos artesanales, con los deportes, las danzas, con las plantas y animales, entre otros aspectos que ayudan a desarrollar el pensamiento espacial. Sin embargo, durante muchos años la geometría se redujo a solo el trabajo de líneas, curvas, puntos, rectas, planos, segmentos y figuras construidas con estos elementos. Pero luego, se abrió la puerta a los sistemas geométricos dinámicos, los cuales trabajan el movimiento, la acción, la imaginación y las transformaciones. Las transformaciones no se pueden trabajan sin antes haber interactuado con el espacio de manera física: moviendo objetos materiales, rotando o girando el cuerpo, solo así con este acercamiento el estudiante puede imaginar y anticipar las transformaciones de los objetos.

Por lo anterior, es de interés realizar una investigación sobre la relación que podría existir entre geometría y aspectos culturales, particularmente la geometría que se encuentra en las manillas que elabora la comunidad Kamëntsá. Para ello, la identificación de elementos geométricos en los diseños de las manillas Kamëntsá van a requerir de un sustento teórico que permita identificar y clasificar las figuras que se encuentran en ellas, por tal motivo a continuación se presentan algunas definiciones sobre el tema de transformaciones isométricas.

2.8 Transformaciones isométricas

Existen movimientos rígidos en el plano, los cuales se consideran transformaciones que conservan la congruencia de las figuras, es decir, envían cada par de puntos A y B en puntos A’, B’ en el mismo plano, de tal forma que AB ≡ A’B’. Al respecto, cabe señalar que a estas transformaciones también se les conoce como isometrías (Ibarguen y Realpe, 2012).

Sobre lo anterior, John Wiley & Sons mencionan lo siguiente:

Una isometría ("transformación congruente", o "congruencia") es una transformación que preserva la longitud, de manera que si (P, P') y (Q, Q') son dos pares de puntos correspondientes, determinarán los segmentos congruentes PQ = P'Q'. (Citado por Ibarguen y Realpe, 2012)

Entre estos movimientos rígidos se encuentran las traslaciones, las rotaciones y las reflexiones. Una diferencia entre el último movimiento y los dos primeros, es que las reflexiones no presentan un 'movimiento continuo'. En ese sentido, se dice que hay dos tipos de isometrías: directas y opuestas. Para esta investigación se tomará en particular la traslación y la reflexión axial.

Por un lado, Garzón (2005) define la traslación como:

Una traslación es un movimiento en el plano que es el resultado de desplazarlo sobre él mismo. Si A' es el punto correspondiente de A obtenido a través de una traslación Ʈ, es posible encontrar su dirección, longitud y sentido. La dirección es la misma de la recta determinada por A y A'; su longitud es dada por la distancia entre ellos y el sentido es el que va de A a A'. (p. 18)

Según Guerrero (2006) la traslación está relacionada con el paralelismo en el plano, y la define como:

La traslación es una correspondencia que asigna a cada punto A del plano un punto A' situado a una distancia fija de A en la dirección de una recta *u* y satisface las siguientes condiciones:

Cada punto de la recta *u* es desplazado por la traslación a un punto sobre ella misma.

Cada punto del plano en uno de los semiplanos que determina la recta *u* es desplazado por la traslación en el mismo semiplano.

Si *u* es una recta en el plano y *d* es un número positivo, una traslación del plano en la dirección de la recta *u* una distancia *d* envía un punto A en un único punto A' de tal manera que:

La longitud del segmento AA' es *d*.

El segmento AA' es paralelo a la recta *u*.

El punto A' está en el mismo semiplano en que se encuentra A respecto a la recta *u*.

Puesto que toda traslación está determinada por un numero positivo *d* y una recta *u*, notamos la traslación por $\text{T}_{(u,d).}$ (pp. 366-367)

Por otro lado, según Guerrero (2006) la definición de figuras simétricas:

Una figura F es simétrica con otra figura F' en el mismo plano, respecto de un punto O o de una recta u, si todo punto A en F se puede relacionar con un punto A' en F', de tal manera que las distancias de A y A' a O o la recta u satisfacen la igualdad, d(AO) = d(A'O) o d(A, u) = d(A', u). (p. 387).

En esta definición se observa que existen dos tipos de simetrías: la reflexión en un punto (conocida como simetría central) y la reflexión en una recta (conocida como simetría axial).

En ese sentido, cuando los puntos del plano se reflejan en una recta para obtener una figura simétrica respecto a esa recta, se habla de reflexión en una recta; lo anterior, según Garzón se puede definir así:

Transformación de simetría axial: Una reflexión respecto a una recta *l* es una transformación que envía un punto A del plano en un punto A', de tal manera que la recta *l* es la mediatriz del segmento AA'. El punto A' se llama el simétrico del punto A respecto a la recta *l* y la recta *l* se llama el eje de simetría.

De esta definición se desprende que si A’ es la reflexión de A en la recta *l*, entonces, AA’ ⊥ (perpendicular) a *l*, pues *l* pasa por el punto medio del segmento AA’; luego, todo punto en la recta *l* es equidistante de los puntos A y A’.

De manera general, esta definición se puede extender a figuras de la siguiente forma:

Una reflexión respecto a una recta *l* es una transformación que envía una figura inicial A en una figura final A’ Luego, al unir los puntos de la figura A con sus respectivos puntos correspondientes de la figura A’, se cumple que la recta *l* es la mediatriz de dichos segmentos. La figura A’ es la figura simétrica de la figura A respecto a la recta *l* y la recta *l* se llama el eje de simetría. (2005, pp. 20)

CAPÍTULO 3: Metodología

En este apartado se presenta la metodología que permitió desarrollar la investigación para solucionar el problema planteado. Esta se apoyó en el método etnográfico descrito por Goetz y LeCompte (1988), ya que la investigación es de tipo cualitativa. Dicho método se centra en observar en detalle los aspectos generales de un grupo de individuos. Goetz y LeCompte (1988) afirman que:

> Los seres humanos, según esta perspectiva, crean interpretaciones significativas de su entorno social y físico, por tanto, de los comportamientos e interacciones de las personas y objetos de ese medio ambiente. Nuestras acciones, consiguientemente, están condicionadas por los significados que otorgamos a las acciones de las personas y a los objetos con los que nos relacionamos. Una investigación que descuide o no trate estos aspectos está claro que no reflejara todas las dimensiones de esa realidad, e incluso podríamos decir que captara lo menos revelador de ella. (p. 13).

Teniendo en cuenta lo anterior, ya que es una investigación de un producto artesanal elaborado por una comunidad indígena, es necesario conocer su visión, costumbre, su realidad para poderla articular en un plano formal como es la enseñanza de la geometría. Por ello, la investigación se desarrolló en tres fases principales, las cuales se describirán a continuación.

3.1 Fases de la Investigación

3.1.1 Fase de búsqueda

En esta fase hubo una primera etapa de revisión del estado del arte, se realizó una consulta sobre diferentes artículos y trabajos de investigación en etnomatemáticas en los que se formulen propuestas para la enseñanza de conceptos geométricos mediados por artesanías de comunidades indígenas. En una segunda etapa, se realizó un estudio a la bibliografía que aporte elementos conceptuales a definiciones de conceptos que se usaron a lo largo del trabajo, como lo es el concepto de etnomatemáticas formulado por D´Ambrosio y otros autores aprovechando la teoría de la enculturación matemática de Bishop. Además, se hizo una contextualización tanto de lo que se propone en el pensamiento espacial sobre la enseñanza de la geometría, en especial el tema de transformaciones isométricas como también del grupo étnico que produce las manillas que se estudiaron, lo cual fue una tercera etapa sobre la descripción de la comunidad y del producto artesanal. Por último, en una cuarta etapa, se consultaron algunas estrategias para la recolección de información.

3.1.2 Fase de trabajo de campo

La finalidad de esta fase fue la recolección de información de los aspectos culturales presentes en los diseños de las manillas Kaméntsá. Esta fase se dividió en tres etapas, la primera fue la búsqueda de instrumentos ya diseñados que puedan ser aplicados en este trabajo para la recolección de información, la segunda etapa fue la aplicación y ejecución de los instrumentos elaborados y de las estrategias seleccionadas en la anterior fase. La última etapa, fue la organización y sistematización de la información recolectada en la anterior etapa.

3.1.3 Fase de Análisis

Una vez recolectada y organizada de manera clara y precisa la información, se pasó a la fase de análisis, esta fase se dividió en tres etapas. La primera fue un análisis detallado de los diseños tradicionales de las cuatro manillas que se eligieron para dicho proceso, queriendo identificar algunas nociones geométricas de las transformaciones isométricas. La segunda etapa fueron los aportes para una posible futura elaboración de propuestas didácticas mediadas por manillas Kamëntsá para la enseñanza y/o aprendizaje de la geometría. Por último, se realizó una tercera etapa de elaboración de unas conclusiones y reflexiones para culminar con la investigación.

3.2 Población y muestra

Población:

Según Tamayo y Tamayo, la población es "la totalidad del fenómeno a estudiar, grupo de entidades, personas o elementos cuya situación se está investigando". (2003, p. 176) De lo anterior, en esta investigación la población se ha conformado por los artesanos que pertenecen a la comunidad indígena Kamëntsá y los docentes que imparten la asignatura de matemáticas en la IE Fray Bartolomé de Igualada.

Muestra:

Ya determinada la población, se da paso a la recolección de información en la comunidad indígena para obtener la información necesaria. Para ello, se ha tomado una muestra, según Tamayo y Tamayo (2003) la muestra debe ser representativa de la población. Para la investigación se tomó tres familias, de las cuales se piensa recuperar el significado de los diseños tradicionales que se plasman en las manillas. Sin embargo, cabe resaltar que estos significados muchas veces pueden variar de familia en familia. (Ver tabla 1) Con respecto a los docentes, se entrevistara a dos docentes del área de matemáticas de la Institución. (Ver Tabla 2)

Tabla 1. Información de las artesanas entrevistadas

Artesano(a)	Genero	Años de labor	Especialidad
A1	F	37	Tejido en telar y manillas en chaquira.
A2	F	59	Tejido en telar
A3	F	68	Tejido en telar

Tabla 2. Información de los docentes entrevistados.

Profesor(a)	Genero	Años de docencia	Nivel de educación	Grados en los que se desempeña
P1	F	27	Especialista	6°, 7°, 10°
P2	F	25	Especialista	3°, 4°, 5°

3.3 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Las técnicas que se utilizaron para el trabajo son: la observación y la entrevista.

En seguida se presentará una descripción de las técnicas e instrumentos que se usaron para la recolección de información. (Ver Tabla 3)

Tabla 3. Técnicas e instrumentos de recolección de datos usados en el estudio.

Sistema de registro	Procedimiento	Factores de análisis	A quien va dirigido
Observación	Descriptivo	✓ Materiales utilizados en la elaboración de la manilla en chaquira. ✓ Pasos a seguir para la elaboración de la manilla.	Artesanos de la comunidad Kamëntsá
Entrevista	Descriptiva-narrativa	✓ Estrategias de enseñanza de las transformaciones isométricas. ✓ Medios que utilizan para la enseñanza. ✓ Recopilación de la simbología que se encuentra en las manillas en chaquira. ✓ Historia de la manilla como indumentaria propia de la comunidad indígena Kamëntsá. ✓ Contextualización de los conceptos	Docentes de matemáticas y artesanos.

		matemáticos con la realidad que los rodea.	

3.3.1 Observación

La observación es una técnica que permite acercarse a la realidad de una comunidad, según Goetz (1988) “la observación sirve para obtener de los individuos sus definiciones de la realidad y los constructos que organiza su mundo” (p.126)

La Tabla 4 presenta la descripción de la observación que se realizó a un artesano(a).

Tabla 4. Características claves para las observaciones en el estudio.

Propósito: Identificar nociones geométricas y su simbología en la elaboración de las manillas.	
Código:	**Características:**
O1	• Formas: Figuras geométricas • Explicación cosmológica: ¿Por qué de las figuras? Significados de las figuras • Combinación de colores y sus significados. • Técnicas de tejido: número de hilos, número de chaquiras, pasos.
Fuentes: Grupos de personas artesanas.	

3.3.2 Entrevista

Según Marcelo y Parrilla “la entrevista es un encuentro verbal, de carácter interactivo, entre dos personas y cuyo objetivo es el acceso a las perspectivas del entrevistado en torno a algún tema seleccionado por el entrevistador.”(1992, p. 23) Por tanto, en la entrevista intervienen un entrevistador y un entrevistado, el primero es el sujeto que platea preguntas sobre el tema de interés; el segundo es el sujeto que comparte la información que conoce sobre el tema que el entrevistador pone en cuestión.

Por otro lado, según Denzin hay tres tipos de entrevistas: “la entrevista estandarizada presecuencializada, la entrevista estandarizada no presecuencializada y la entrevista no estandarizada” (citado Goetz y LeCompte, 1988, p. 133). Para la elaboración del instrumento se tomó en cuenta la entrevista no estandarizada. Este tipo de entrevistas permite no limitar las preguntas ni su orden, con este tipo se deja un campo abierto al investigador para conducir la entrevista. Sin embargo para el desarrollo de esta es necesario tener unas preguntas orientadoras, pues en necesario considerar unos ítems que abarquen parcialmente el campo de investigación, para garantizar la información que el investigador quiere reunir.

Para la investigación se realizaron dos entrevistas a los docentes y cinco entrevistas a artesanos de la comunidad indígena. Las Tablas 5 y 6 presentan el instrumento de la entrevista que se realizó a los artesanos y a los docentes.

Tabla 5. Preguntas orientadoras para la entrevista de las artesanas

<table>
<tr><td colspan="2">Propósito: Recolectar información sobre la simbología de las figuras que se encuentran en los diseños de las manillas Kamëntsá.</td></tr>
<tr><td>Código:</td><td>Preguntas orientadoras:</td></tr>
<tr><td>EA1</td><td>¿Cuáles son los materiales fundamentales para elaborar una manilla?
¿Cuál es la importancia de los colores en el diseño de la manilla?
¿Cuáles son las figuras más comunes a la hora de elaborar una manilla? ¿Tienen un nombre particular esas figuras? ¿Estas figuras tienen un significado particular para la comunidad? ¿Cuál? ¿Podría describir cada figura según sus tradiciones ancestrales?
¿Cómo trasmiten estas descripciones ancestrales sobre las figuras tradicionales a las nuevas generaciones?
¿Cómo aprendió usted a elaborar estas manillas?
¿Qué tan importante es para usted este elemento como indígena Kamëntsá? ¿Por qué?
Para la elaboración del diseño que se quiere plasmar en las manillas, ¿cuál es el procedimiento?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fuentes: Taller de artesanos (as), personas que tengan por tradición la elaboración de manillas con chaquira checa.</td></tr>
</table>

Tabla 6. Preguntas orientadoras para la entrevista de los docentes.

<table>
<tr><td colspan="2">Propósito: Indagar sobre la enseñanza de las transformaciones, en particular las isométricas.</td></tr>
<tr><td>Código:</td><td>Preguntas orientadoras:</td></tr>
<tr><td>ED1</td><td>
De 1 a 5, siendo 5 el puntaje máximo y 1 el puntaje mínimo. ¿Cuál sería el puntaje para el desarrollo del tema de transformaciones en geometría en el área de matemáticas?
¿En qué grados de escolaridad ha trabajado el tema de transformaciones isométricas?
¿Cómo ha sido el desarrollo de la clase cuando se ha enseñado las transformaciones? ¿Se han utilizado materiales físicos o softwares para el trabajo de dicho tema? Podrías describir una clase sobre este tema.
¿Qué piensa usted sobre llevar al aula los conocimientos propios de la comunidad para relacionarlos con las temáticas del currículo?
¿Cuál es su postura con respecto a la contextualización de los conceptos matemáticos?
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fuentes: Docentes del área de matemáticas de la institución educativa.</td></tr>
</table>

CAPITULO 4: Las manillas Kamëntsá

En este capítulo se presentara una breve contextualización sobre las manillas y su sentido cultural como producto de las tradiciones de la comunidad indígena Kamëntsá. Además, se presentarán las manillas que serán objeto de estudio con su respectiva simbología.

4.1 El sentido cultural

La manillas en chaquira es una de las tantas expresiones de arte que tiene la comunidad indígena Kamëntsá, en esta artesanía se plasma el pensamiento ancestral, las leyendas, los cuentos, la vida cotidiana, la historia del pueblo, como también algunas visiones del yagé[8]. Estas manillas hacen parte de la indumentaria de la comunidad, ya que cumple la función de adorno por sus diversos y llamativos colores.

La chaquira es un material que es traído de otros lugares, especialmente del Ecuador. Según Agreda "la chaquira era utilizada como walcas (collares en chaquira enhebrada en grandes cantidades) de colores azul, blanca y verde; solo era utilizada en collares de hombres y mujeres, el tamaño del collar significaba las riquezas de la persona. Actualmente estos collares son utilizados en ceremonias especiales". (2016, p. 22) Algunas artesanas afirman que la chaquira llego después de la colonización, puesto que los poseedores de este material eran los Españoles, y se dice que ellos a manera de trueque para conseguir oro u otros elementos los intercambiaban con los indígenas.

En el momento, la manilla es parte decorativa de su indumentaria y lleva plasmada, en sus diseños, el pensamiento de sus ancestros. Estas manillas han pasado por algunas

[8] El Yagé es una ceremonia que realizan los taitas en la comunidad indígena Kaméntsá. Esta consiste en tomar una bebida preparada con una raíz conocida como yagé o ayahuasca. La bebida, de acuerdo a los taitas lo que produce es un desdoblamiento de la conciencia física y espiritual del espacio-tiempo y de la realidad, por ello las personas que toman yagé recuerdan visiones, las cuales son interpretadas por los taitas. En el Valle de Sibundoy esta ceremonia para la comunidad indígena se hace de manera ritual, buscando limpiar el cuerpo, la mente y el alma. (Taita Ricardo Juajibioy)

transformaciones, pues al pasar el tiempo la comunidad ha cambiado el trabajo de sus artesanías, buscando siempre la belleza de ellas pero sin perder su esencia e identidad ancestral. Por ello es interesante saber cómo fue la transición de pasar a tener manillas solo enhebradas en chaquira a pasar a las manillas tejidas. Según la artesana Carmen Juajibioy (2017) "todo va evolucionando en nuestra comunidad, antes no había chaquiras y nuestros mayores igualmente hacían sus collares y manillas con lana y/o semillas, pero después de la llegada de la chaquira la comunidad miro la facilidad de plasmar nuestro pensamiento. Según lo que cuenta mi mamita (abuela) la manilla se elaboró a partir del proceso que se hace con los telares, por eso en estas manillas se plasma la misma simbología que se hace en los cumbes o fajas. (Ver Figura 13) Por eso, al ver la facilidad de poder trabajar con las chaquiras permite plasmar la simbología propia de la comunidad, como también explorar un poco con diversos colores, y así representar la alegría de ser indígena y que a su vez sea un adorno para que la comunidad se embellezca." (C. Juajibioy, Comunicación personal, 19 de agosto de 2017). Ahora la chaquira hace parte de la bisutería que porta la comunidad indígena especialmente para el "Carnaval del perdón o bëtscnaté", en innumerables artesanías como: collares, balacas (diademas), prendedores, pinzas para el cabello, mochilas, entre otros.

Figura 13. Faja elaborada en lana por la artesana Estefanía Juajibioy.

El Día Grande o “bëtscnaté”, o también conocido como el carnaval del perdón, es el reencuentro de las familias que pertenecen a la comunidad indígena Kaméntsá, como un solo pueblo. Esta fiesta se realiza para que todas las familias se perdonen y se reconcilien, tanto de corazón, pensamiento y razón, con el propósito de vivir en paz y armonía. Para celebrar este día la comunidad se viste con su atuendo típico y entona con sus instrumentos artesanales sus ritmos propios. (Ver Figura 14)

“Bëtscnaté es el comienzo de un nuevo año, no sabemos si lleguemos hasta el próximo año; ya que somos pasajeros de la vida” (Pueblo indígena Kamëntsá Biÿa, 2018)

Figura 14. Desfile de la comunidad indígena en el Día grande, Febrero 12 de 2018. Fuente: Imagen propia.

En este carnaval se realiza una programación durante la semana antes del día grande, por parte del cabildo indígena y el nuevo gabinete que estará al mando del gobierno por ese año, en esta programación se darán al público talleres de reflexión sobre lo que es el *Bëtscnaté*, elaboración de artesanías, conversatorios de temas sobre la simbología, principios de la vida, entre otros, talleres de la lengua materna Kamëntsá, en la actualidad se ha venido fortaleciendo el sentido de pertenencia del festejo de esta ceremonia para la comunidad, para ello se realiza una celebración del *Bëtscnaté* para los niños de la comunidad indígena (ver Figura 15), incentivando en ellos, la esencia cultural propia de la comunidad, fomentando las costumbres y el amor a su comunidad Kamëntsá.

Figura 15. ***Bëtscnaté*** **para los niños de la comunidad indígena, realizado el 9 de Marzo del 2018. Fuente: Imagen propia.**

4.2 Materiales

Las manillas en chaquiras se elaboran con la ayuda de un instrumento que es hecho artesanalmente (Ver Figura 16). Los materiales que se necesita para tejer una manila son los siguientes:

- Una tabla urdidora: tiene un largo de aproximadamente 44 cm, y en sus extremos de dicho largo tiene aproximadamente 20 puntillas (el número de puntillas depende del ancho de la manilla).
- Hilo aptan: hilo industrial de buena calidad.
- Aguja pelo: es una aguja muy delgada.
- Chaquira checa: material en cristal que se encuentra en diferentes colores.

Figura 16. Elaboración de la manilla en chaquira. Fuente: Fotografía propia.

El tejido de la manilla en chaquira según doña Carmen Juajibioy necesita de mucha concentración, y es necesario tener buena luz ya que las chaquiras son muy pequeñas y algunos colores pueden tomarse por otros. (Ver Figura 17)

Figura 17. Artesana Carmen Juajibioy elaborando una manilla en chaquira. Fuente: Fotografía propia.

4.3 Simbología

En este apartado se mostrara algunos diseños que se plasman en las manillas Kamëntsá. Algunos diseños están presentes en fajas, siendo este otro elemento artesanal que hace parte de la indumentaria de la comunidad indígena. Sin embargo, al estar estos diseños en otra artesanía su simbología es la misma.

El nido: es un símbolo de buena suerte, representa el nido de la gallina, en este se puede apreciar los huevos que están siendo abarcados por la gallina y a su alrededor están las alas. Este símbolo es significativo para la comunidad por que atrae la abundancia, para que a los hogares no les haga falta la comida. (ver Figura 18)

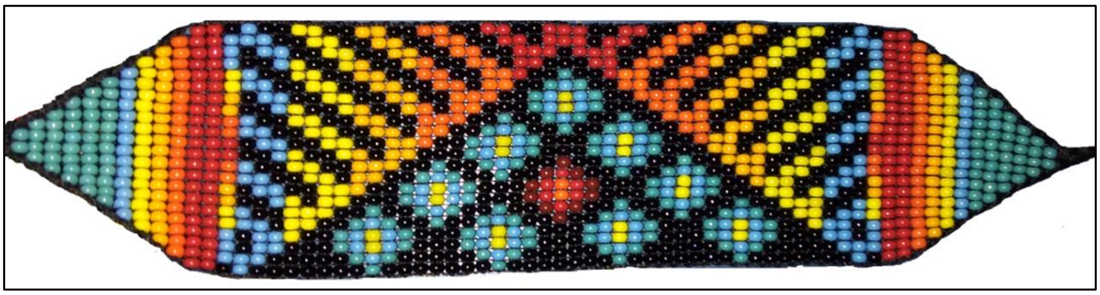


Figura 18. Diseño del nido, elaborado por la artesana Carmen Juajibioy.

El oso: es una representación de un cuento mítico que pertenece a la comunidad indígena Kamëntsá, en el cual se cuenta que un oso se robó una muchacha[9]. (Ver Figura 19, 20 y 21)

[9] Al ser este un cuento de la comunidad debe ser narrado entre personas de la comunidad y con mucho tiempo de disponibilidad.

Figura 19. Manilla con la representación del oso niño. ***Elaborada por la artesana Carmen Juajibioy***

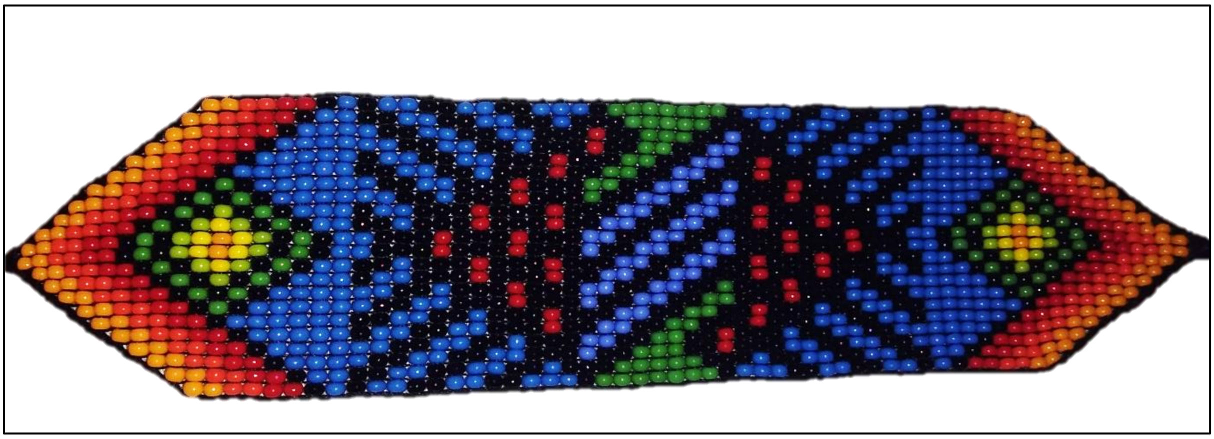


Figura 20. Manilla con la representación del oso joven. ***Elaborada por la artesana Carmen Juajibioy***

Figura 21. Manilla con la representación del oso viejo, ***Elaborada por la artesana Estefanía Juajibioy***

La lombriz o el camino: este símbolo tiene dos significados en la comunidad, representa la lombriz de tierra con sus huevos, siendo esta un animal de suma importancia para el abono de la tierra en su agricultura; y el otro significado la representación del camino con las piedras que recorren día a día. (ver Figura 22)

Figura 22. Manilla con la representación de la lombriz o el camino. ***Elaborada por la artesana Carmen Juajibioy***

El vientre: es un rombo el cual simboliza el vientre de la mujer, se elabora como una secuencia ya que para la comunidad uno nace de una mujer, ella procrea y dará luz a otros seres que a su vez también darán vida. Cuando el rombo está lleno significa que esta por dar a luz. También, simboliza la protección, pues el vientre de una mujer es el lugar donde se protege a la nueva vida que está por llegar. (ver Figuras 23, 24 y 25)

Figura 23. Representación del vientre de una mujer en una faja. Elaborada por la artesana Carmen Juajibioy Fuente: Imagen propia.

Figura 24. Otra representación del vientre de una mujer en una faja. Elaborada por la artesana Carmen Juajibioy. Fuente: Imagen propia.

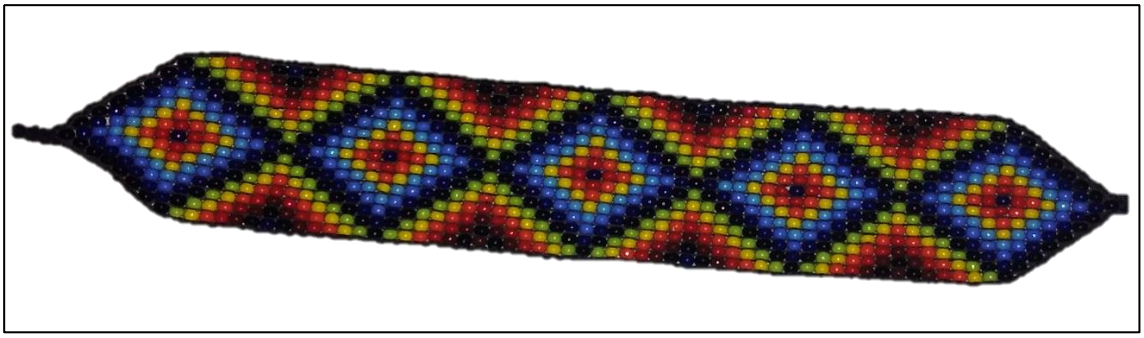


Figura 25. Representación del vientre en una manilla. Fuente: Imagen propia.

El sol: es el símbolo más significativo para la comunidad Kamëntsá, representa el Dios que ilumina su caminar, también tiene un sentido de protección. (Ver figura 18)

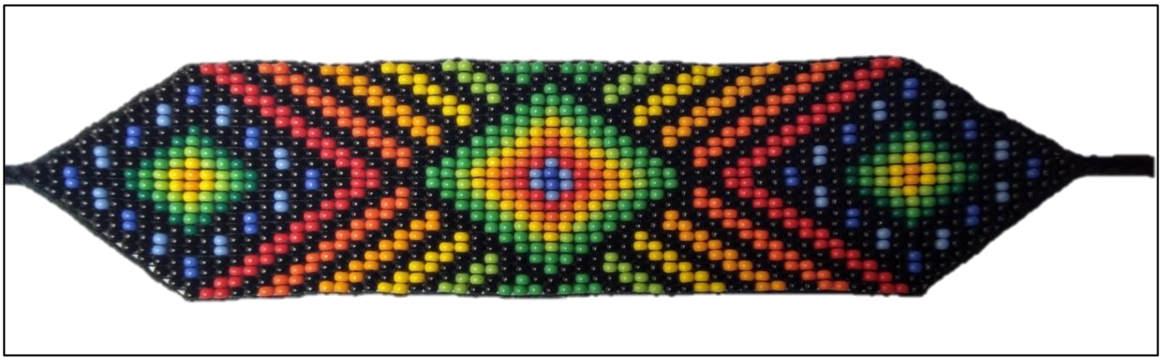


Figura 26. Diseño del Dios sol, elaborado por la artesana Carmen Juajibioy. Fuente: imagen propia.

La generación de la familia: El diseño está compuesto por tres rombos que representan, el primero a la generación de los hijos, el segundo a la de los padres y el tercero a los abuelos, también tiene algunos segmentos que representan los caminos que deben recorrer cada generación para pasar de una generación en otra. Es decir, es una representación del ciclo de la vida. (Ver Figura 27)

Figura 27. Diseño de la generación de la familia, elaborado por la artesana Carmen Juajibioy.

La rana: es la representación de uno de los animales más importante para la comunidad kaméntsá. Este diseño tiene un rombo que representa el vientre del animal, el cual tiene adentro muchos huevos que hacen alusión a la fertilidad que caracteriza a la rana. Por tanto, para la comunidad indígena Kamëntsá la rana es símbolo de la fertilidad y de buena suerte. (Ver Figura 28)

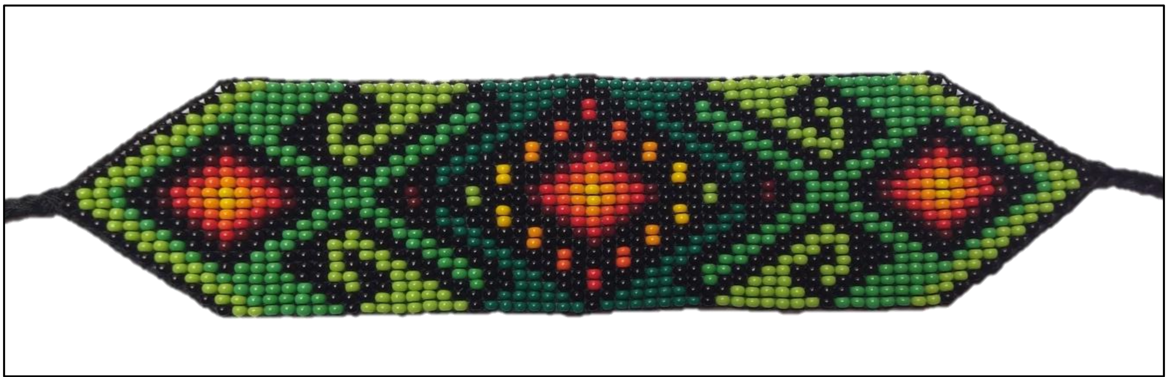


Figura 28. Diseño de la rana, elaborado por la artesana Carmen Juajibioy.

CAPITULO 5: Análisis geométrico

En este capítulo se mostrará el análisis de cuatro manillas con diseños tradicionales mencionados en el capítulo anterior, con el fin de presentar las nociones geométricas que se encuentran en los diseños. Para ello se tendrá en cuenta la conceptualización de trasformación de simetría axial y el de traslación.

Las manillas son artesanías elaboradas con chaquiras checas, estas se tejen en un plano constituido por el urdimiento del hilo en un instrumento para dicho trabajo artesanal. Para el análisis de la manilla se tendrá en cuenta como unidad de medida una chaquira, la cual se denotara como *ch*, el plano que se trabajará es de largo 69 chaquiras y de ancho 22 chaquiras (ver Figura 29), lo anterior para el caso de tres manillas, y en el caso particular de una de las cuatro manillas el largo es de 67 chaquiras y 22 chaquiras de ancho (ver figura 30). Sin embargo, las dimensiones que poseen las manillas como producto comercial son de aproximadamente 16 cm de largo y 3,6 cm de ancho (ver figura 31 y 32).

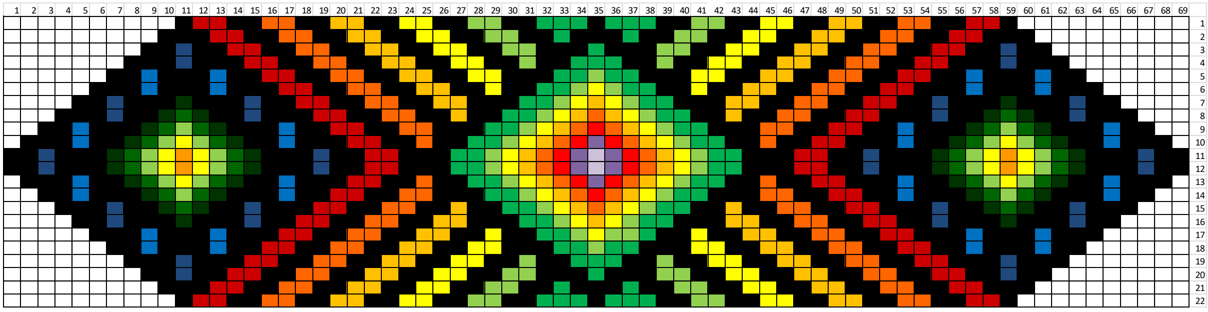


Figura 29. Plano de una manilla que tiene 69 chaquiras de largo y 22 chaquiras de ancho.

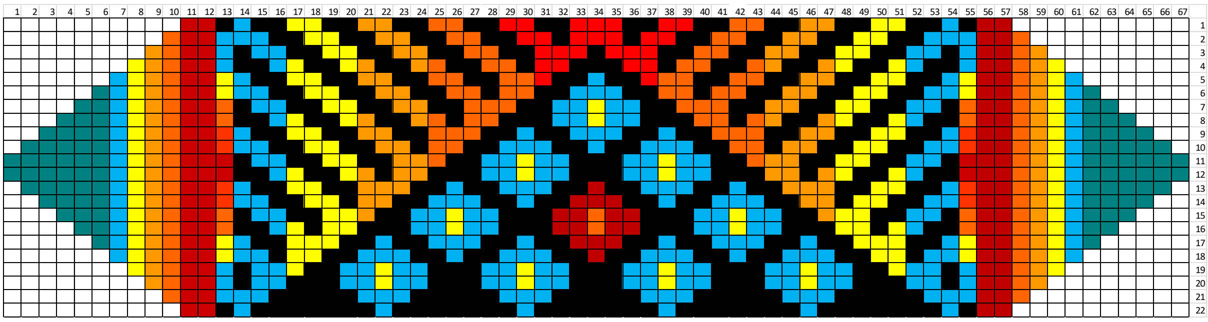


Figura 30. Plano de una manilla que tiene 67 chaquiras de largo y 22 chaquiras de ancho.

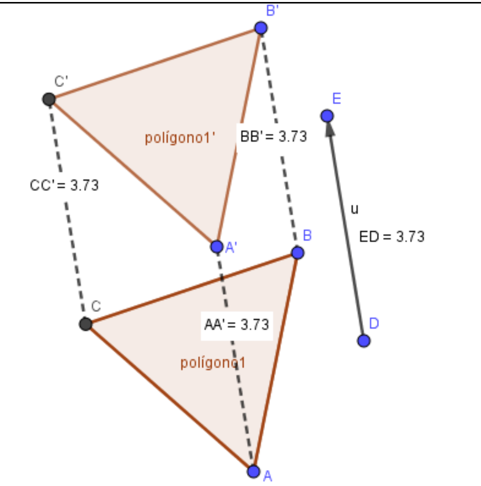
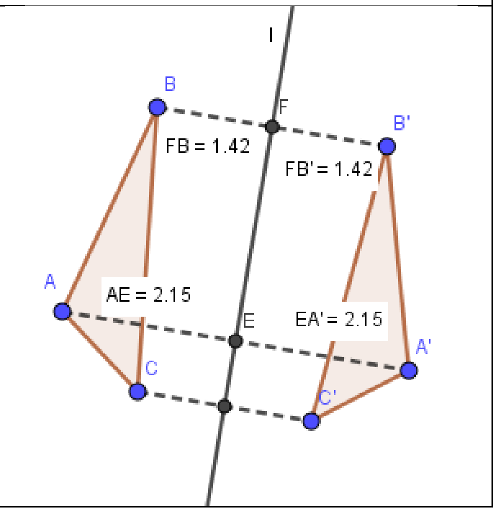
Figura 31. Medición del largo aproximado de una manilla

Figura 32. Medición del ancho de una manilla.

5.1 Categorías de análisis

En el análisis de las manillas se verificó movimientos rígidos (concretamente las transformaciones isométricas de simetría axial y traslación) tomando como base los criterios que se especifican en la siguiente tabla:

Tabla 7. Categorías de análisis transformaciones isométricas.

Transformación Isométrica	Definición[10]	Representación gráfica[11]
Traslación	Una traslación es un movimiento en el plano que es el resultado de desplazarlo sobre él mismo. Si A' es el punto correspondiente de A obtenido a través de una traslación Ʈ, es posible encontrar su dirección, longitud y sentido. La dirección es la misma de la recta determinada por A y A'; su longitud es dada por la distancia entre ellos y el sentido es el que va de A a A'.	
Simetría Axial	Una reflexión respecto a una recta l es una transformación que envía una figura inicial A en una figura final A' Luego, al unir los puntos de la figura A con sus respectivos puntos correspondientes de la figura A', se cumple que la recta l es la mediatriz de dichos segmentos. La figura A' es la figura simétrica de la figura A respecto a la recta l y la recta l se llama el eje de simetría.	

Para el análisis, los diseños de las cuatro manillas se han plasmado en una hoja cuadriculada, buscando una representación similar a la que tiene la manilla, cada cuadro representa una chaquira. Se trabajará casi en su totalidad los pasos presentados por Urbano

---
[10] Definiciones presentadas en el marco referencial (p. 30)
[11] Imágenes creadas en Geogebra 5.0 por Angela Obando.

(2009) para hacer el análisis de las esculturas de la cultura San Agustín. (p. 36). Los siguientes pasos se trabajarán con ayuda del software Geogebra:

1. A partir de la observación se determinan los 4 vértices del plano que tiene el diseño de la manilla, se nombraran con los puntos A, B, C y D. Se trazaran las rectas comprendidas entre los puntos A y B, y los puntos C y D, se nombrara L1 y L2 respectivamente. Se hallara el punto medio entre los puntos A y B, se nombrara F, sobre la recta l_1 se traza una recta perpendicular que pase por el punto medio F, se nombrara recta S. (Ver Figura 33)

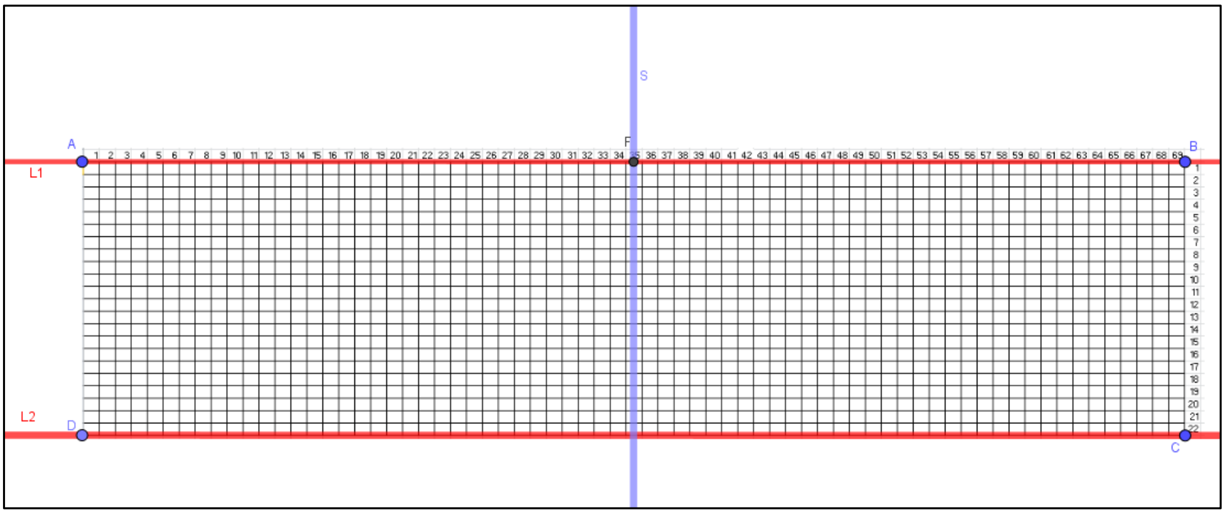


Figura 33. Desarrollo del paso 1 en los diseños de las manillas.

Luego, si es pertinente para el análisis se halla otro eje, primero se halla el punto medio entre C y D, se nombrara E, después se halla el punto medio entre los puntos F y E, se nombrara como O, por último se traza una recta paralela ya sea a la recta L1 o a la recta L2 que pase por el punto O, se nombrara recta P. (ver Figura 34)

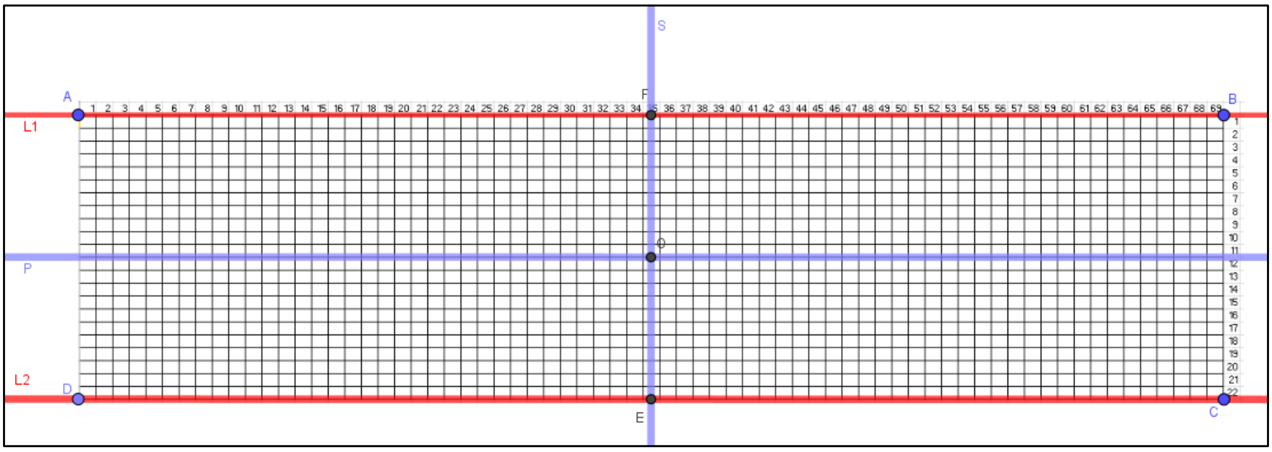


Figura 34. Desarrollo del paso 1 en los diseños de las manillas

2. Se resaltan algunos de los elementos que están en el diseño, como formas: triángulos, rombos, rectas, segmentos. Como por ejemplo la Figura 35:

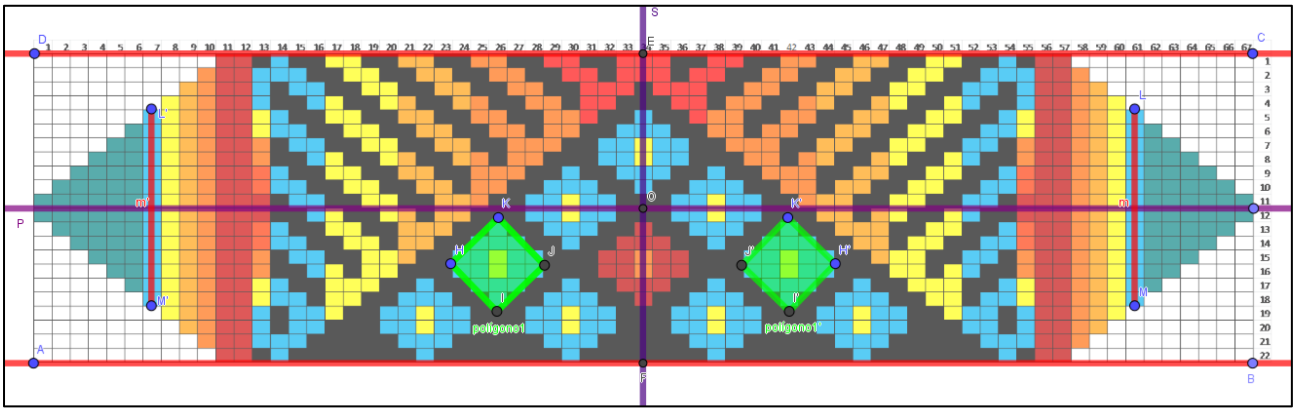
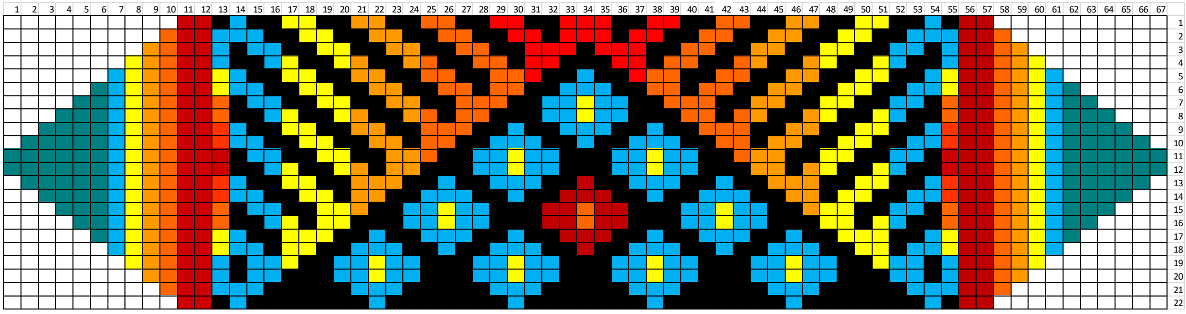


Figura 35. Ejemplo del desarrollo del paso 2 en los diseños de las manillas.

3. Teniendo en cuenta el eje de simetría S y el eje de simetría P. Se verificaran si los elementos resaltados cumplen con las propiedades las transformaciones isométricas (simetría axial o traslación) teniendo en cuenta las categorías de análisis.

5.2 Manilla “El nido”



Largo: 67 chaquiras
Ancho: 22 chaquiras

Siguiendo los pasos antes determinados, se definen los ejes S y P, se encontró que en el diseño de la manilla es simétrica con respecto al eje S, que se podría tomar como eje la columna 34, que sería la mitad de la manilla a lo largo, todos los elementos que están al lado izquierdo de la columna 34 se reflejan al lado derecho de la misma. (Ver Figura 36)

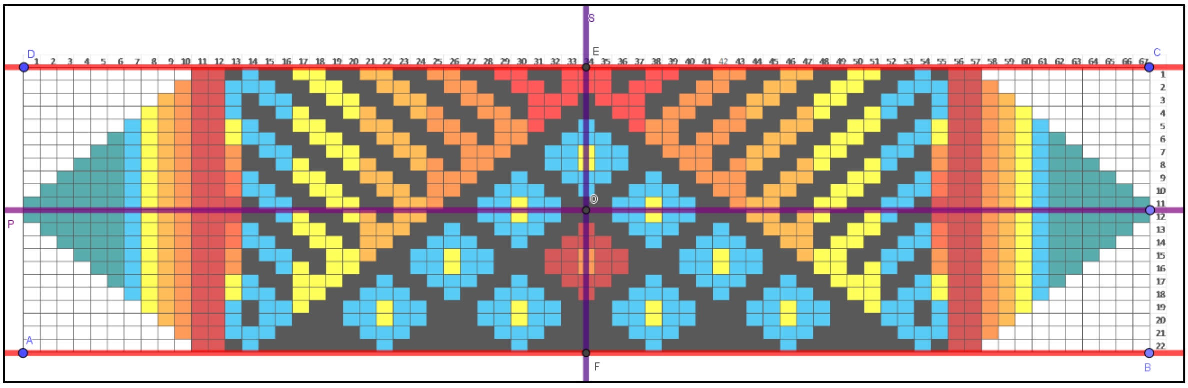
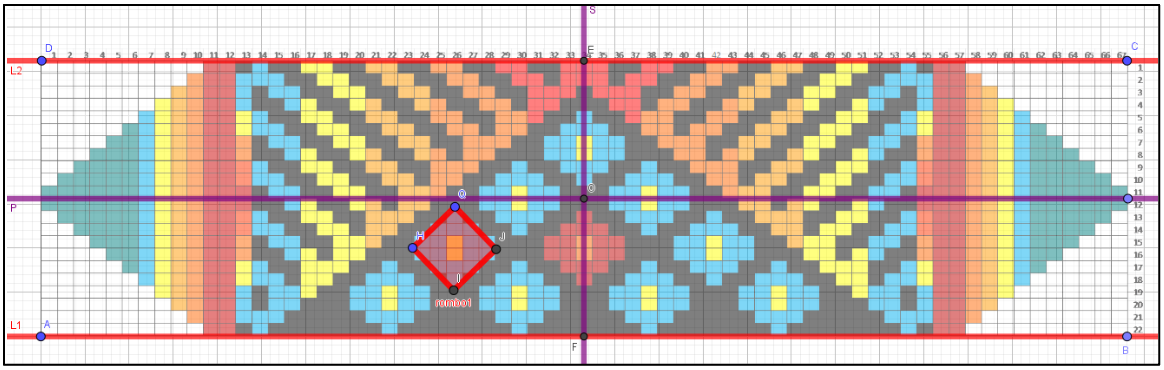
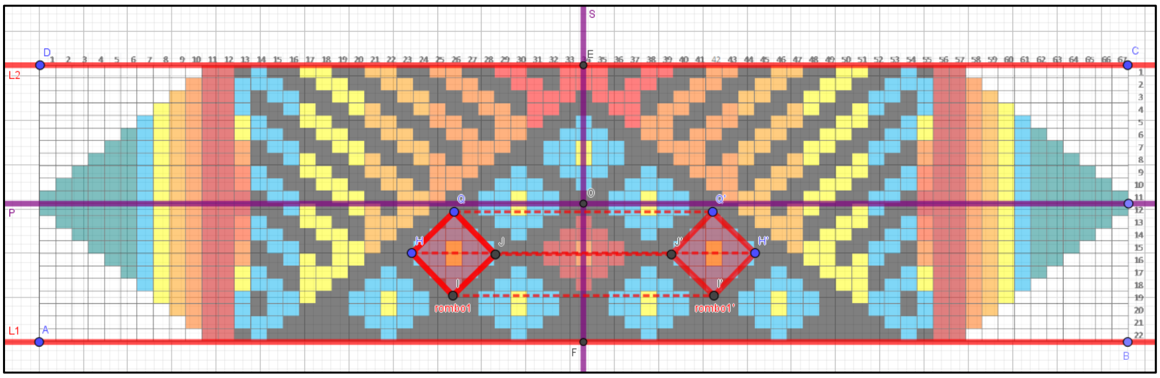


Figura 36. Paso 1 y 2 - manilla “El nido”.



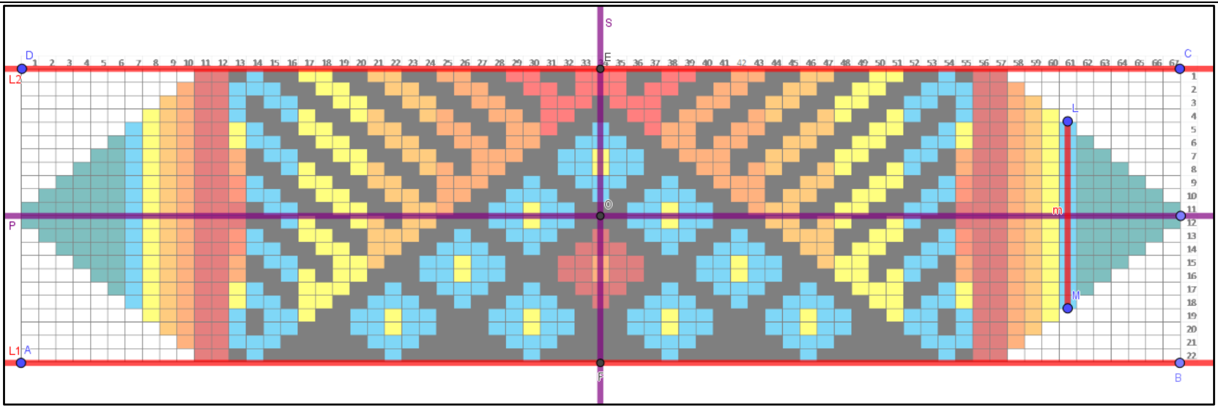


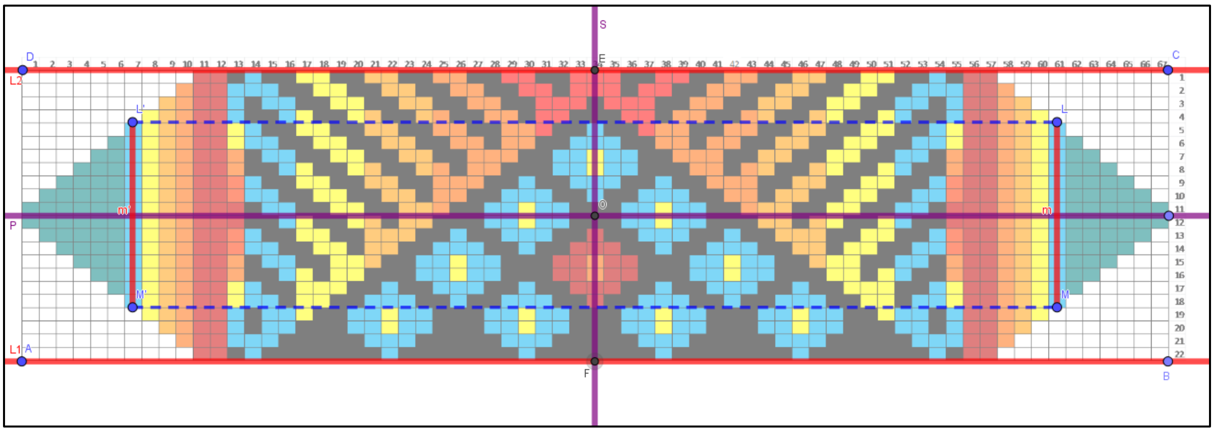
Se presenta reflexión axial del rombo HQJI respecto al eje de simetría (S).

$$R(\overline{HQ}),(S) = \overline{H'Q'}, luego$$
$$d(H,S) = 10{,}5ch \; y \; d(S,H') = 10{,}5ch;$$
$$d(Q,S) = 7{,}5 \; ch \; y \; d(S,Q') = 7{,}5ch$$
Por la propiedad de equidistancia.

$$R(\overline{IJ}),(S) = \overline{I'J'}, luego$$
$$d(I,S) = 7{,}5ch \; y \; d(S,I') = 7{,}5ch;$$
$$d(J,S) = 5{,}5 \; ch \; y \; d(S,J') = 5{,}5ch$$
Por propiedad de equidistancia.

Y así sucesivamente con los segmentos $\overline{HI} y \overline{JQ}$.

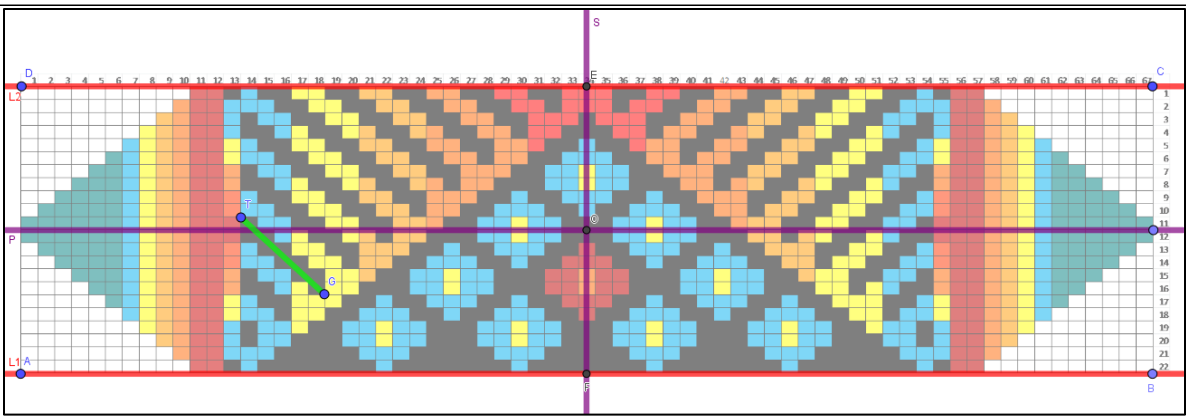


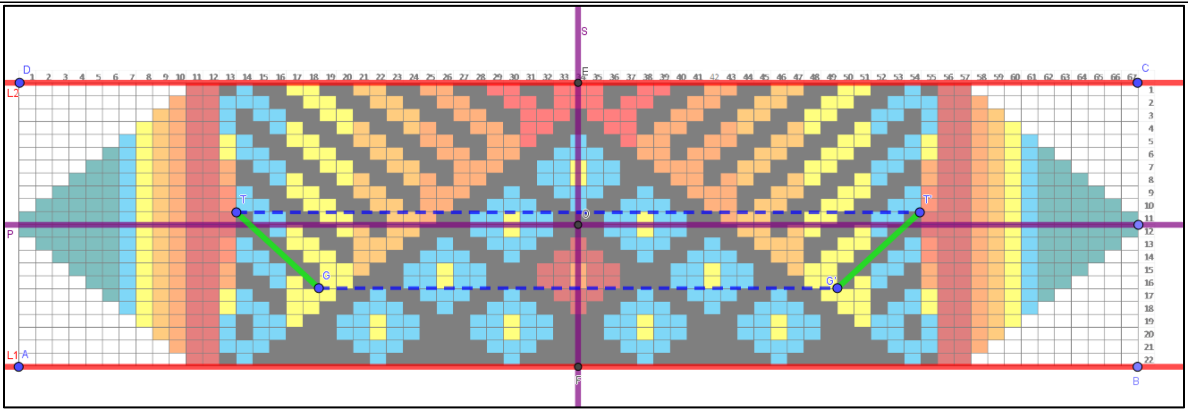


Se presenta una reflexión axial del segmento LM de acuerdo al eje de simetría (S).

$$R(\overline{LM}),(S) = \overline{L'M'}, luego$$
$$d(L,S) = 27ch \ y \ d(S,L') = 27ch;$$
$$d(M,S) = 27 \ ch \ y \ d(S,M') = 27ch$$
Por equidistancia.

$$m(\overline{LM}) = 14ch \ y \ d\left(\overline{L'M'}\right) = 14ch$$
Por congruencia, se conserva la forma y tamaño del segmento.



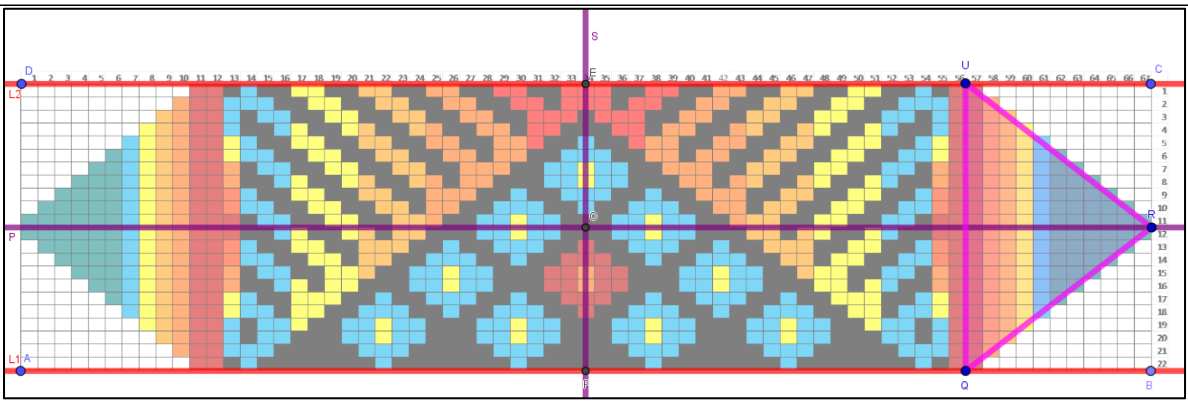


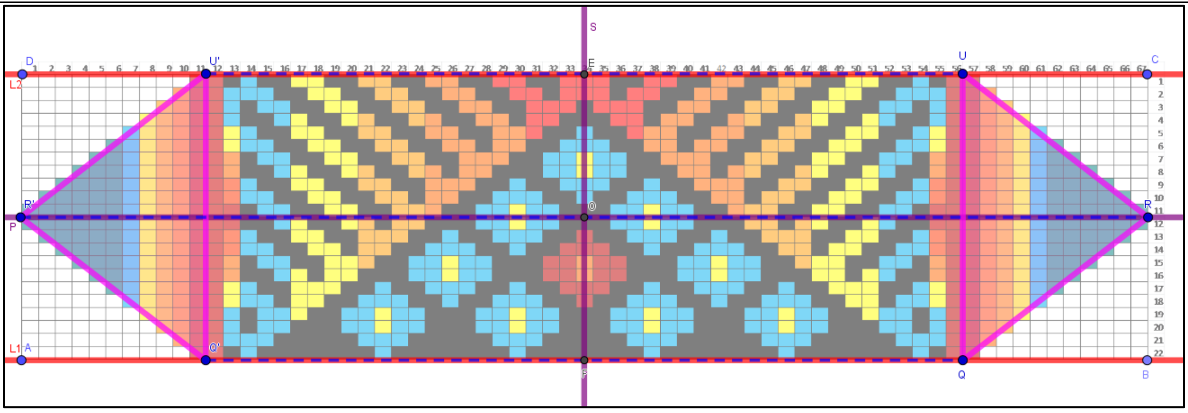
Se presenta una reflexión axial del segmento TG de acuerdo al eje de simetría (S).

$$R(\overline{TG}),(S) = \overline{T'G'}, luego$$
$$d(T,S) = 20{,}5ch\ y\ d(S,T') = 20{,}5ch;$$
$$d(G,S) = 15{,}5ch\ y\ d(S,G') = 15.5ch$$

Por equidistancia.

El segmento TG tiene posición opuesta al segmento T'G' respecto al eje S. Por la característica del sentido.





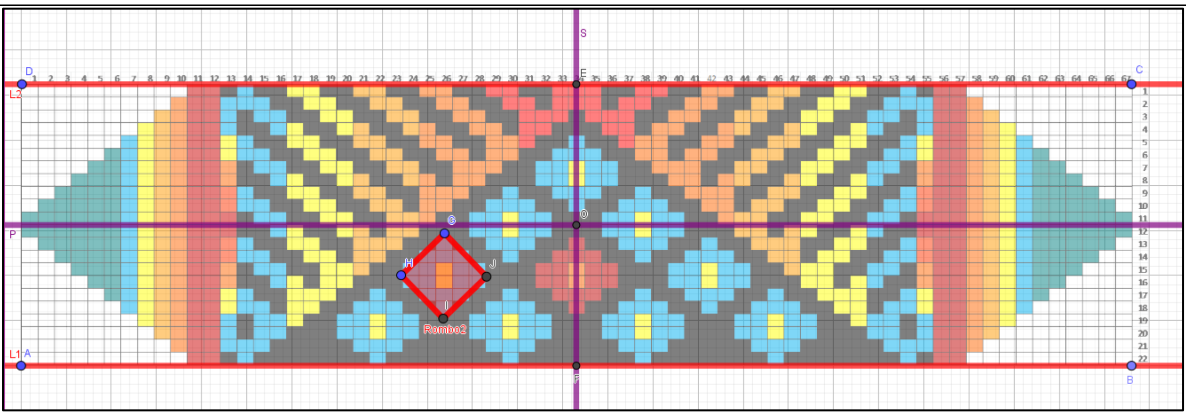
Se presenta una reflexión axial de del triángulo UQR de acuerdo al eje de simetría (S).

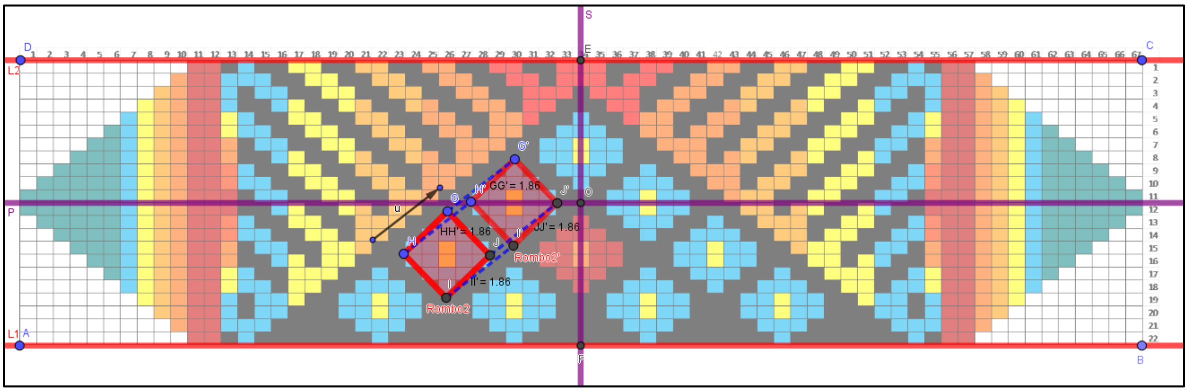
$$R(\Delta UQR),(S) = \Delta U'Q'R' \; luego$$
$$d(U,S) = 22{,}5ch \; y \; d(S,U') = 22{,}5ch,$$
$$d(Q,S) = 22{,}5ch \; y \; d(S,Q') = 22{,}5ch,$$
$$d(R,S) = 33{,}5ch \; y \; d(S,R') = 33{,}5ch,.$$

Por equidistancia.

$$\overline{UU'} \perp S, \; \overline{QQ'} \perp S, \; \overline{RR'} \perp S$$

Por perpendicularidad.



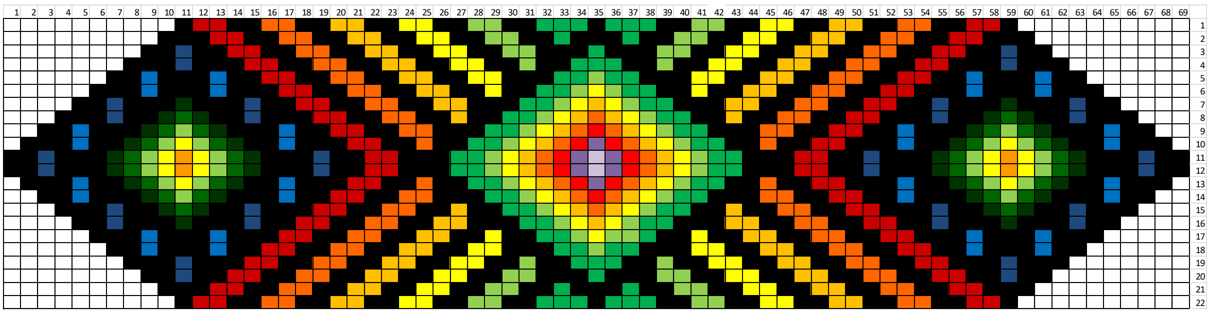


Se presenta una traslación del rombo IJGH respecto al vector $\vec{u}$.

$$T(IJGH),(\vec{u}) = I'J'G'H'', luego$$
$$d(\overline{II'}) = 1{,}86cm \,, d(\overline{JJ'}) = 1{,}86cm \,,$$
$$d(\overline{GG'}) = 1{,}86cm \,, d(\overline{RR'}) = 1{,}86cm, y$$
$$\overline{II'} \parallel \vec{u}, \ \overline{JJ'} \parallel \vec{u}, \ \overline{QQ'} \parallel \vec{u}, \ \overline{RR'} \parallel \vec{u}.$$

Por definición de traslación.

5.3 Manilla "El sol"



Largo: 69 chaquiras
Ancho: 22 chaquiras

Siguiendo los pasos antes determinados, se definen los ejes S y P, luego se empieza a observar que elemento o figuras podrían estas relacionadas mediante una simetría axial o una traslación. (Ver Figura 29)

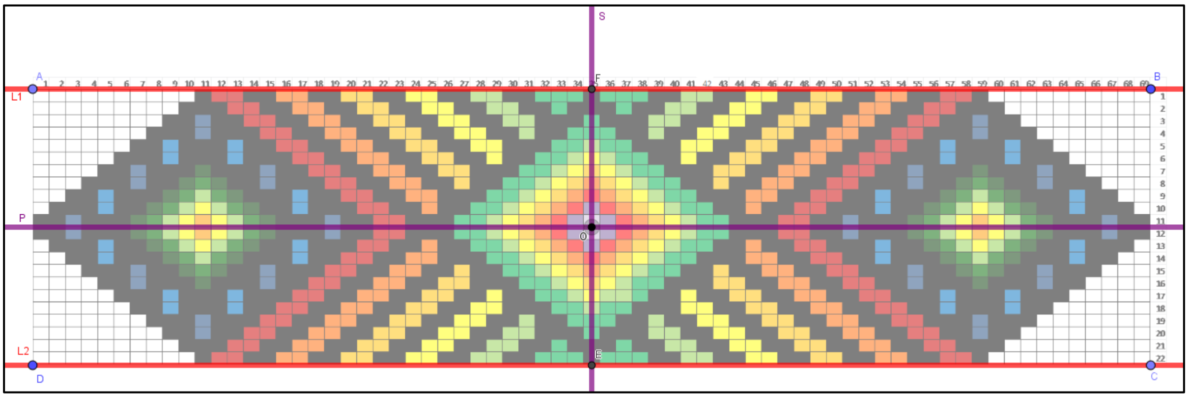
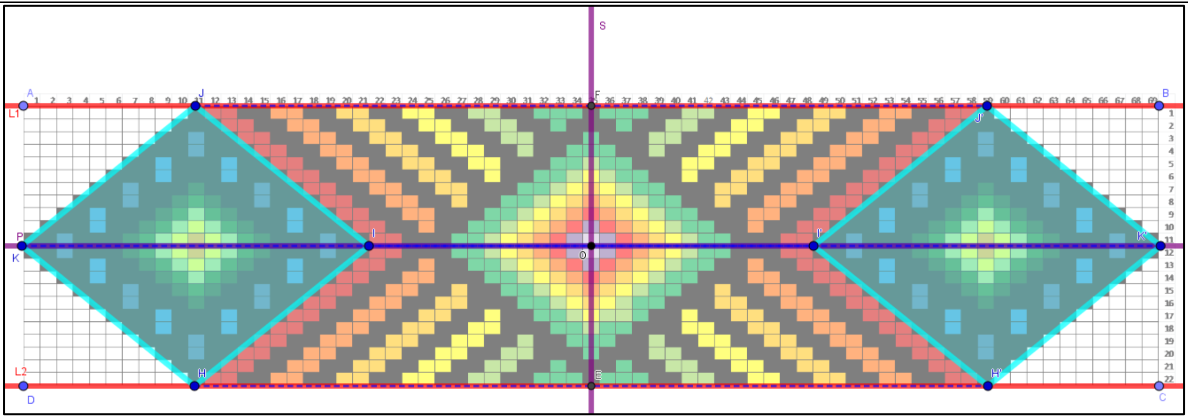
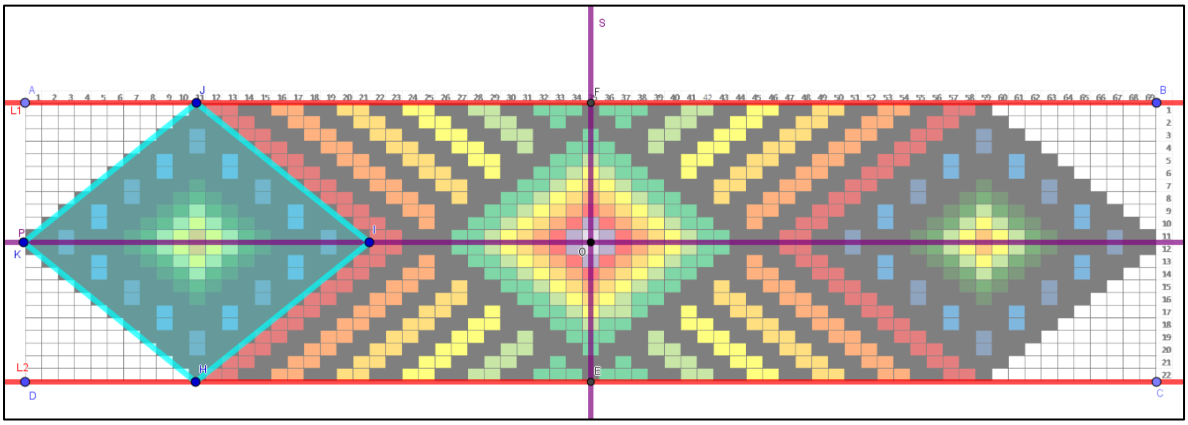


Figura 37. Paso 1 y 2- Manilla "El sol".





Se presenta reflexión axial del rombo HIJK respecto al eje de simetría (S).

$$R(HIJK),(S) = H'I'J'K', luego$$

- $\boldsymbol{R(\overline{HI}),(S) = \overline{H'I'}}$

$d(H,S) = 23{,}5\ ch\ y\ d(S,H') = 23{,}5ch$

$d(I,S) = 13{,}5\ ch\ y\ d(S,I') = 13{,}5ch$

Por equidistancia.

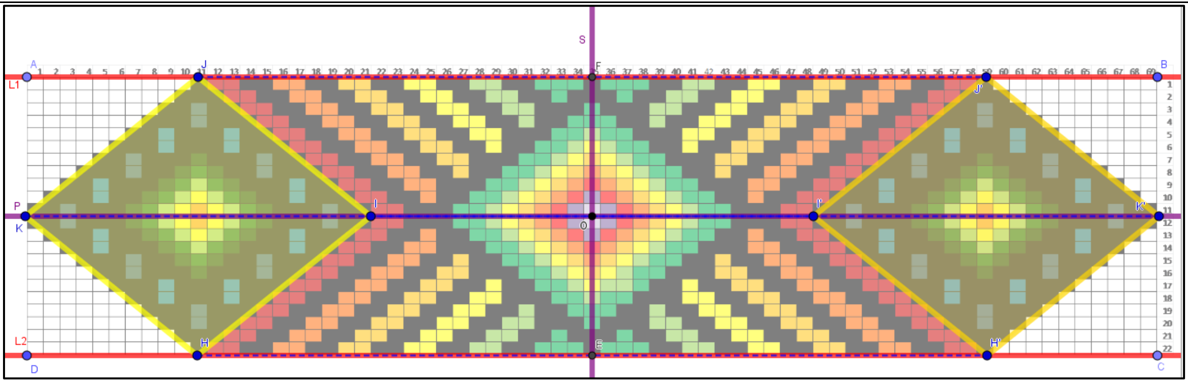
- $R(\overline{IJ}),(S) = \overline{I'J'}$

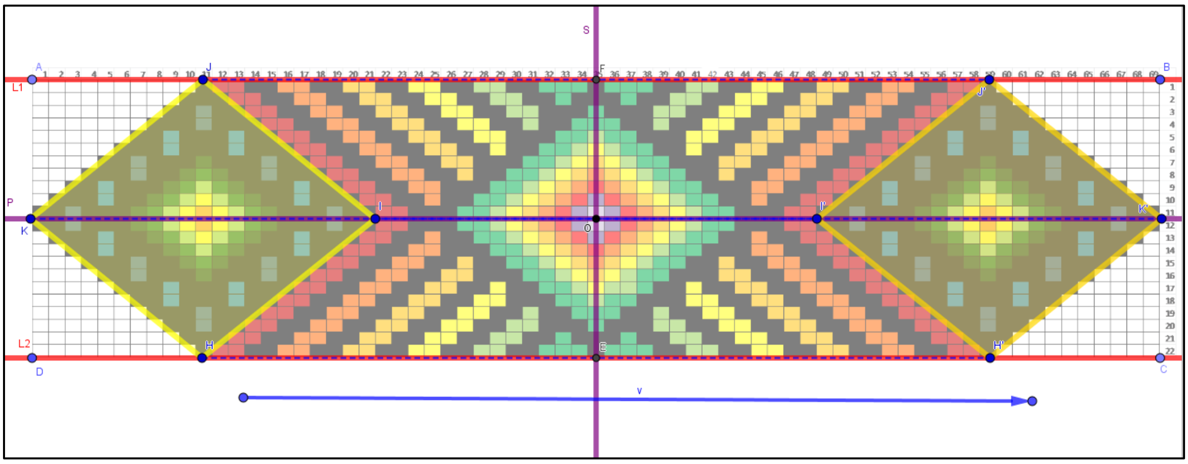
$d(I,S) = 13{,}5\ ch\ y\ d(S,I') = 13{,}5ch$

$d(J,S) = 23{,}5\ ch\ y\ d(S,J') = 23{,}5ch$

Por equidistancia.

Y así sucesivamente con los segmentos $\overline{JK}\,y\ \overline{KH}$.

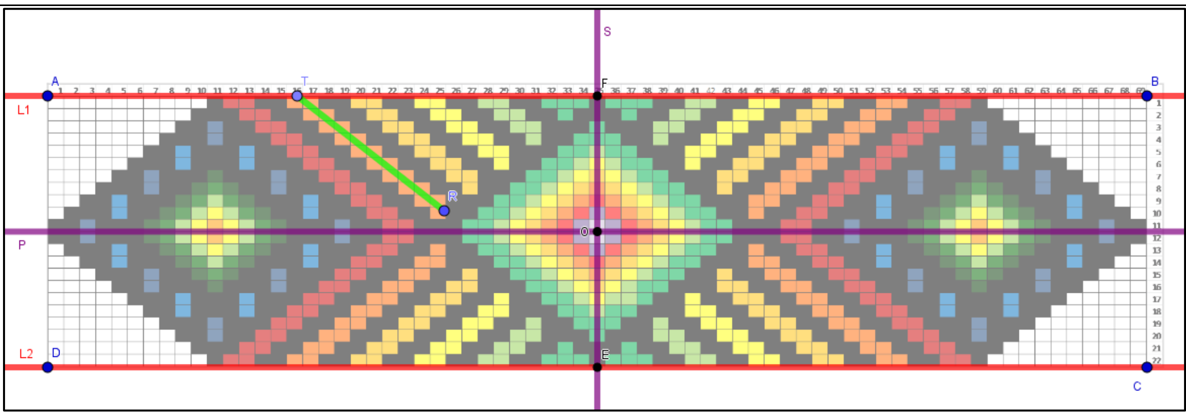


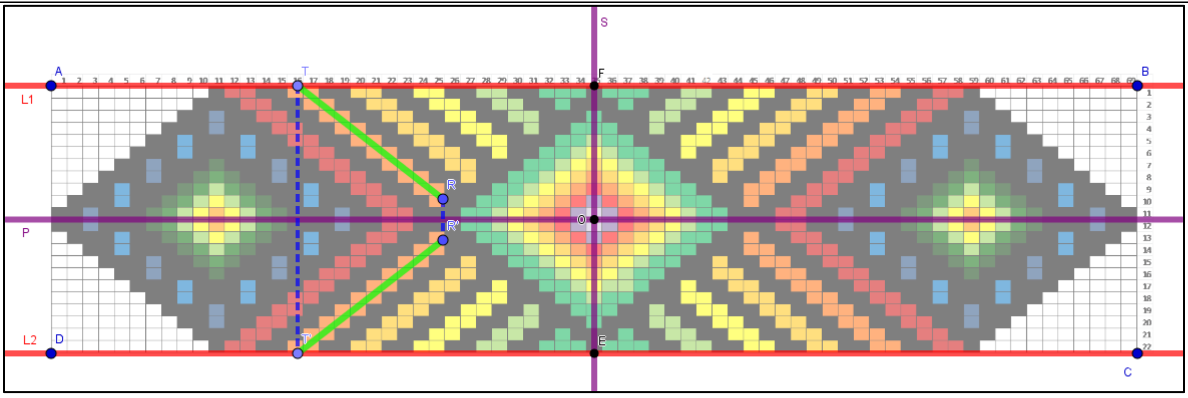


Se presenta una traslación del rombo HIJK respecto al vector $\vec{v}$.

$$T(HIJK), (\vec{v}) = H'I'J'K'', luego$$
$$d\left(\overline{HH'}\right) = 48ch\,, d\left(\overline{II'}\right) = 48ch\,,$$
$$d\left(\overline{JJ'}\right) = 48ch\;\;, d\left(\overline{KK'}\right) = 48ch, y$$
$$\overline{II'} \parallel \vec{v},\;\; \overline{JJ'} \parallel \vec{v},\;\; \overline{HH'} \parallel \vec{v},\;\; \overline{KK'} \parallel \vec{v}.$$

Por definición de traslación





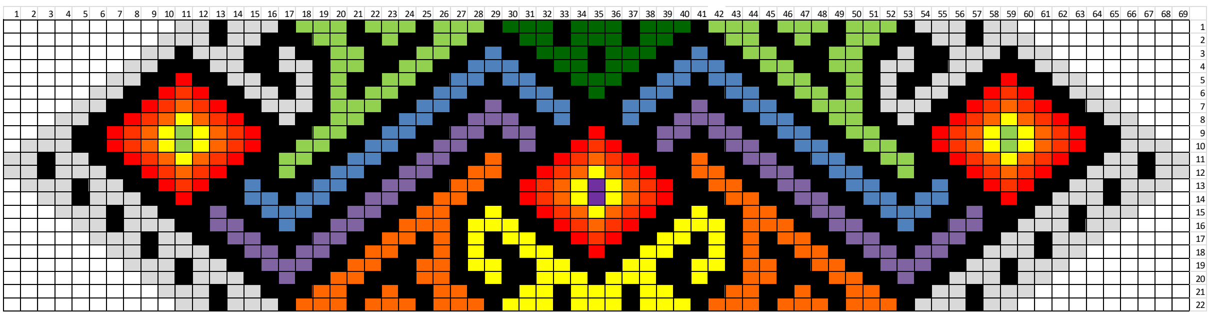
Se presenta reflexión axial de la figura de acuerdo al eje de simetría (P).

$$R(\overline{TR}),(P) = \overline{T'R'}, luego$$
$$d(T,P) = 11ch\ y\ d(P,T') = 11ch;$$
$$d(R,P) = 2\ ch\ y\ d(P,R') = 2ch$$

Por equidistancia.

Luego, el segmento TR está en posición opuesta al segmento T'R' respecto al eje P.

5.4 Manilla "La generación de la familia"



Largo: 69 chaquiras
Ancho: 22 chaquiras

Siguiendo los pasos ya determinados, se definen los ejes S y P, se encontró que en el diseño de la manilla es simétrica con respecto al eje S, que se podría tomar como eje la columna 35, que sería la mitad de la manilla a lo largo, todos los elementos que están al lado izquierdo de la columna 35 se reflejan al lado derecho de la misma. (Ver Figura 30)

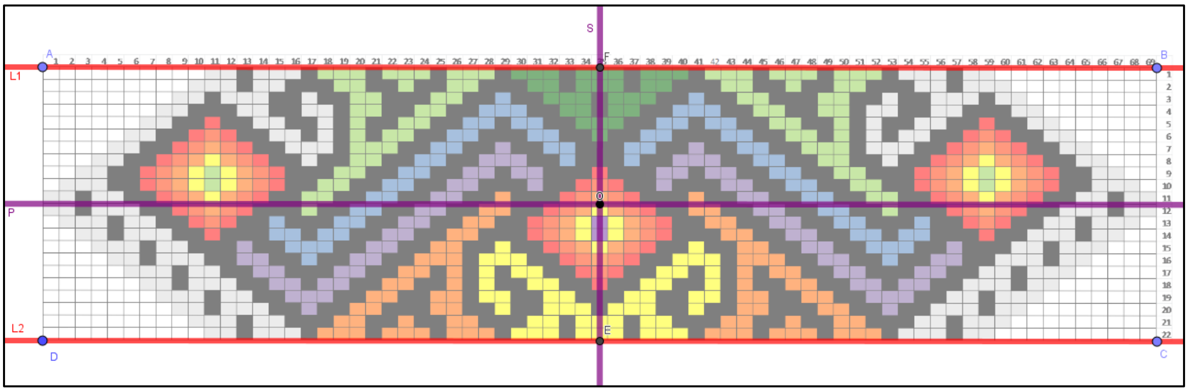
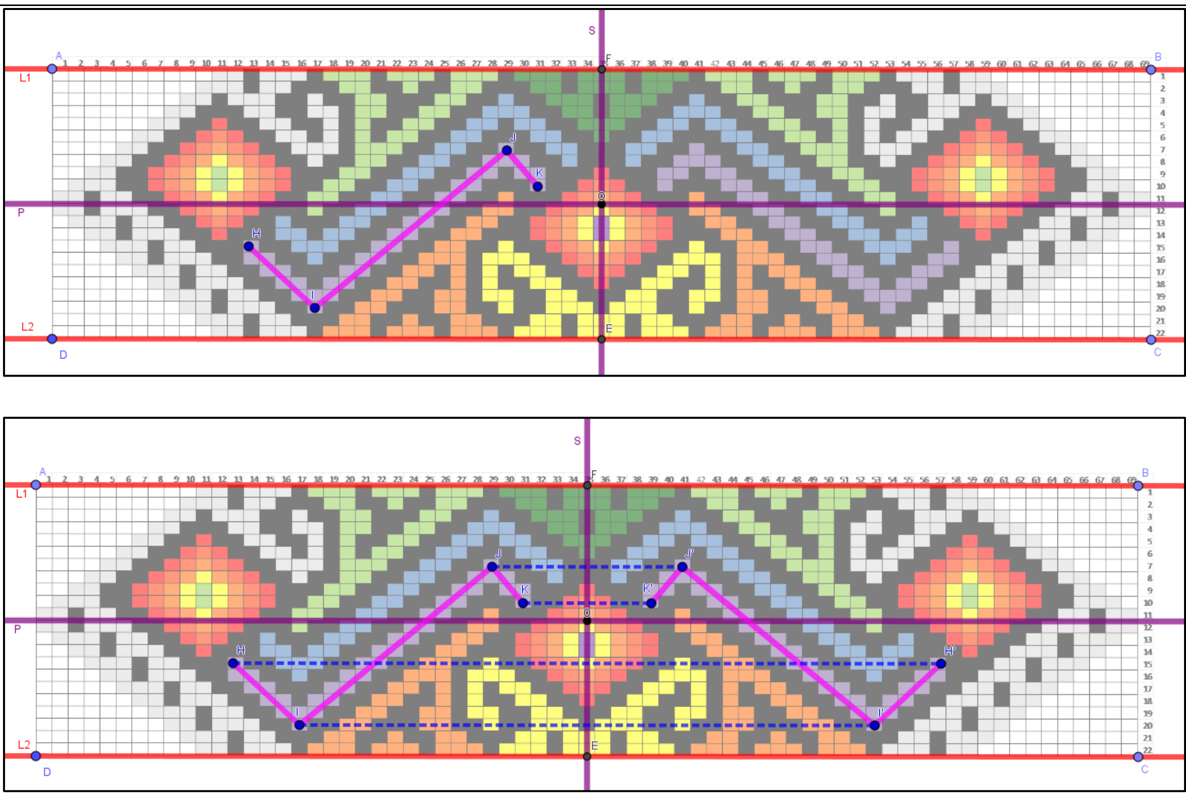


Figura 38. Paso 1 y 2- Manilla "La generación de la familia"



Se presenta reflexión axial de la figura de acuerdo al eje de simetría (S).

$$R(\overline{HI}),(S) = \overline{H'I'}, luego$$
$$d(H,S) = 21ch \; y \; d(S,H') = 21ch;$$
$$d(I,S) = 18ch \; y \; d(S,I') = 18ch$$

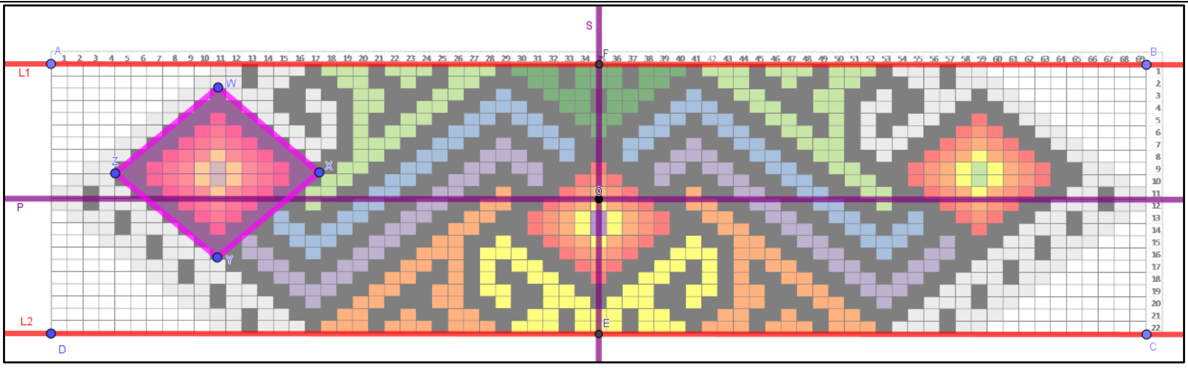
$$R(\overline{IJ}),(S) = \overline{I'J'}, luego$$
$$d(I,S) = 18ch \; y \; d(S,I') = 18ch;$$
$$d(J,S) = 5{,}5 \; ch \; y \; d(S,J') = 5{,}5ch$$

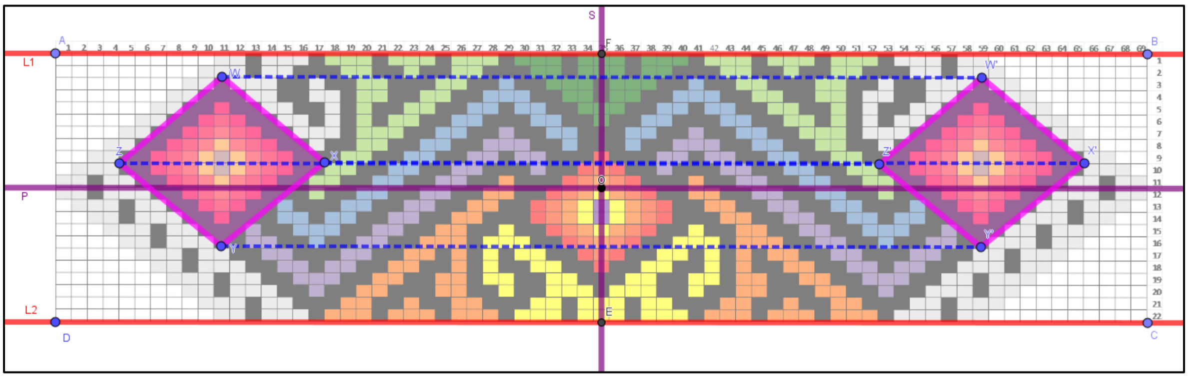
$$R(\overline{JK}),(S) = \overline{J'K'}, luego$$
$$d(K,S) = 3{,}5ch \; y \; d(S,K') = 3{,}5ch;$$

$d(J,S) = 5{,}5\ ch\ y\ d(S,J') = 5{,}5ch$

Por propiedad de equidistancia.

Además, los segmentos HI, IJ y JK son ⊥ al eje S.





Se presenta reflexión axial del rombo WXYZ respecto al eje de simetría (S).

$R(WXYZ),(S) = W'X'Y'Z', luego$

- $R(\overline{WX}),(S) = \overline{W'X'}$

$d(W,S) = 23{,}5\ ch\ y\ d(S,W') = 23{,}5ch$

$d(X,S) = 13{,}5\ ch\ y\ d(S,X') = 13{,}5ch$

Por equidistancia.

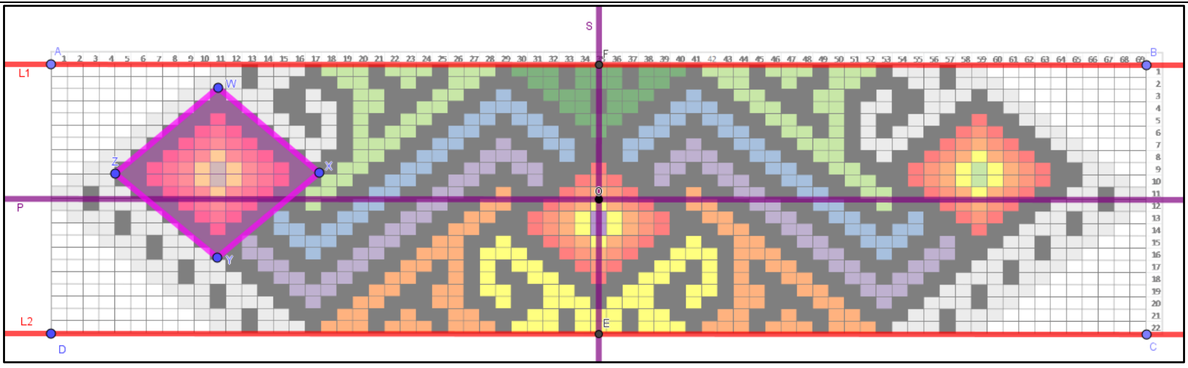
- $R(\overline{XY}),(S) = \overline{X'Y'}$

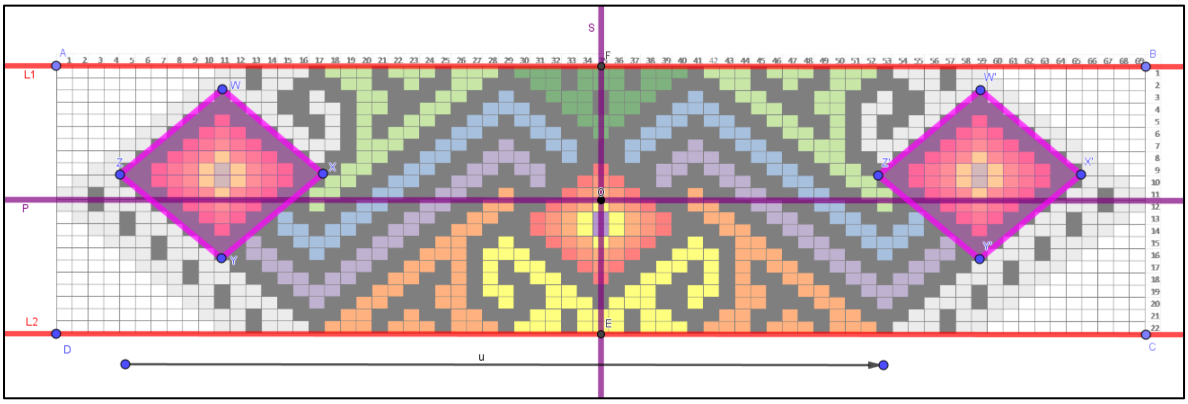
$d(X,S) = 13{,}5\ ch\ y\ d(S,X') = 13{,}5ch$

$d(Y,S) = 23{,}5\ ch\ y\ d(S,Y') = 23{,}5ch$

Por equidistancia.

Y así sucesivamente con los segmentos $\overline{YZ} y\ \overline{ZW}$.



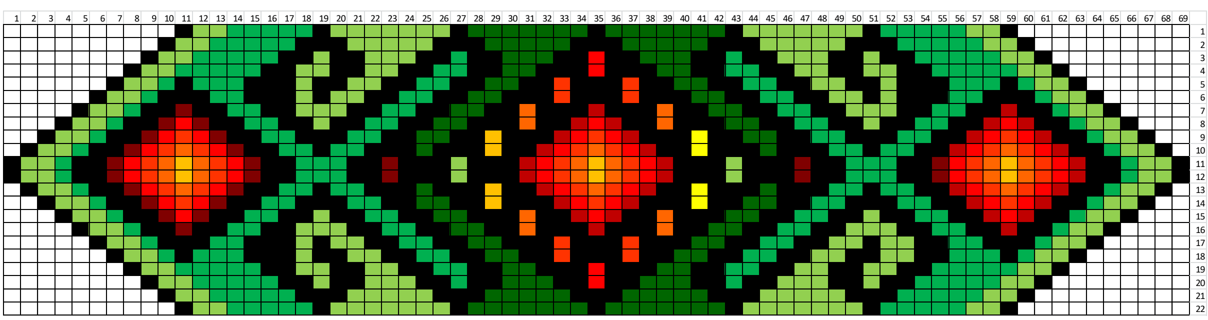


Se presenta una traslación del rombo WXYZ respecto al vector $\vec{u}$.

$$T(WXYZ),(\vec{u}) = W'X'Y'Z', luego$$
$$d(\overline{WW'}) = 48ch\,, d(\overline{XX'}) = 48ch\,,$$
$$d(\overline{YY'}) = 48ch\ \,, d(\overline{ZZ'}) = 48ch, y$$
$$\overline{WW'} \parallel \vec{u},\ \ \overline{XX'} \parallel \vec{u},\ \ \overline{YY'} \parallel \vec{u},\ \ \overline{ZZ'} \parallel \vec{u}.$$

Por definición de traslación.

5.5 Manilla "La rana"



Largo: 69 chaquiras
Ancho: 22 chaquiras

Siguiendo los pasos determinados para el análisis, se definen los ejes S y P, se encontró por observación que en el diseño de la rana presenta una simetría respecto al eje S, ya que la columna 35 de la cuadricula, por donde pasa el eje S, sería la mitad de la manilla a lo largo, además todos los elementos que están al lado izquierdo de la columna 34 se reflejan al lado derecho de la misma. (Ver Figura 39)

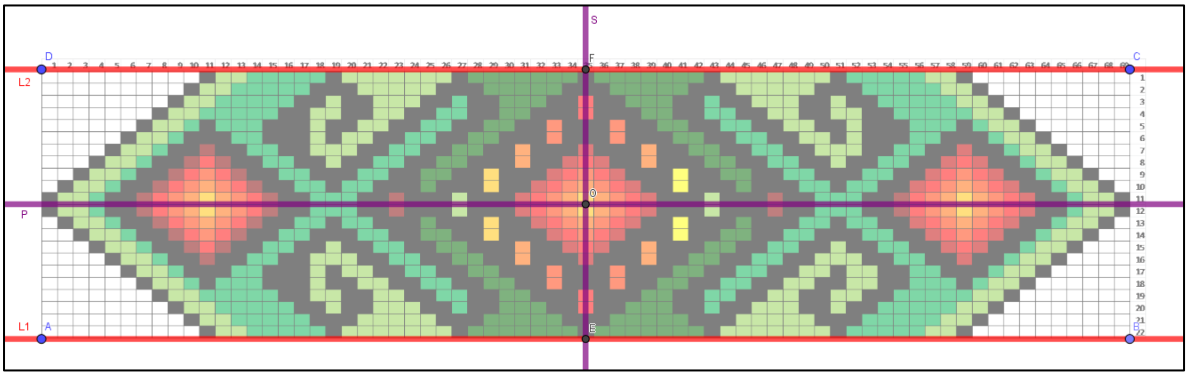
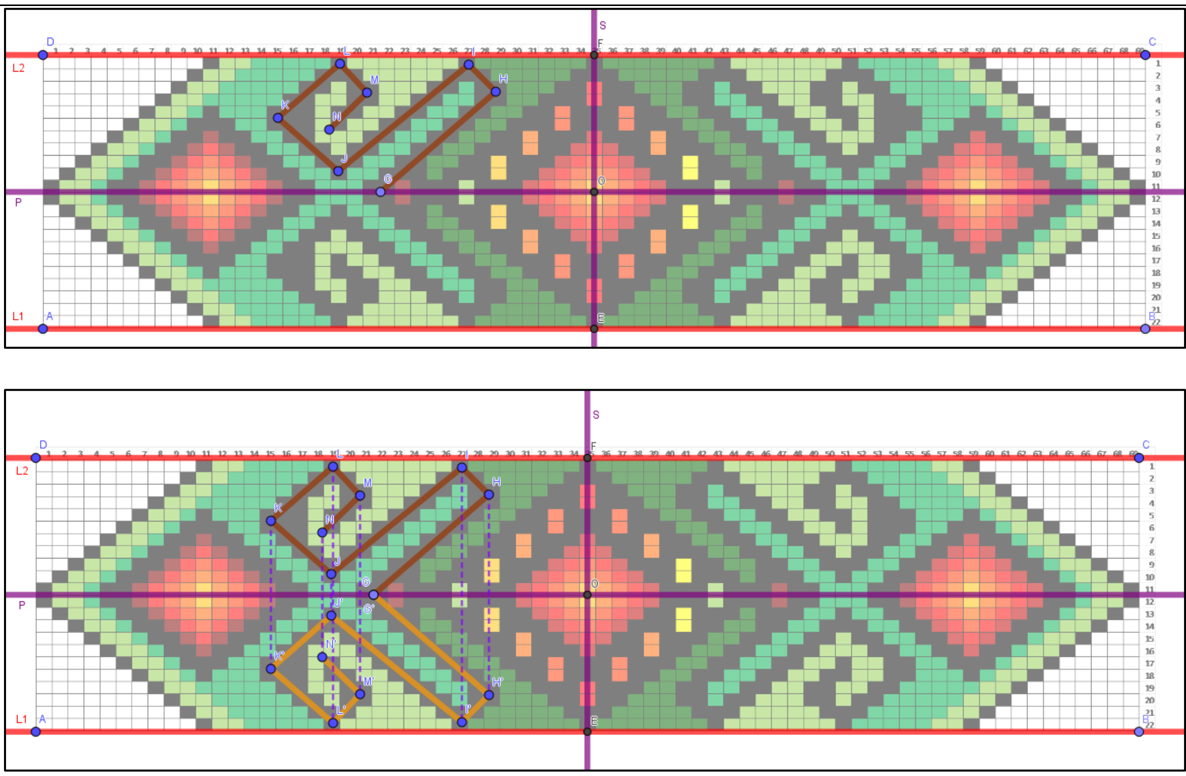


Figura 39. Paso 1 y 2- Manilla "La rana".



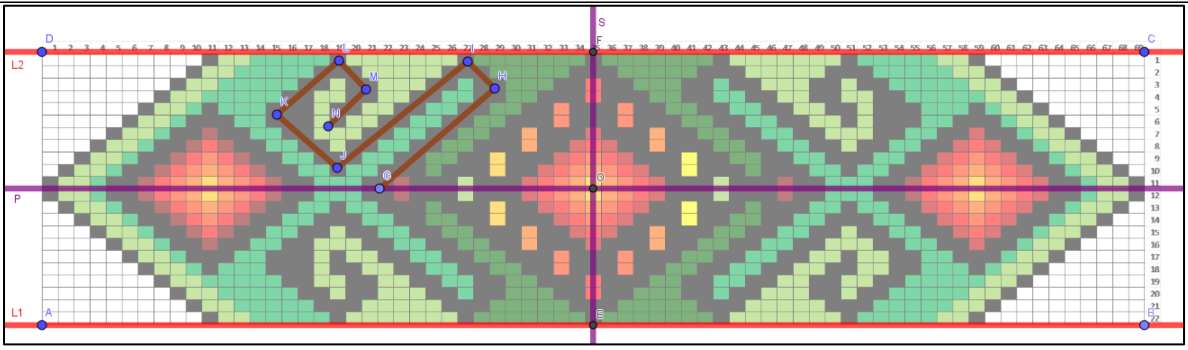
Se presenta reflexión axial de la figura de acuerdo al eje de simetría (P).

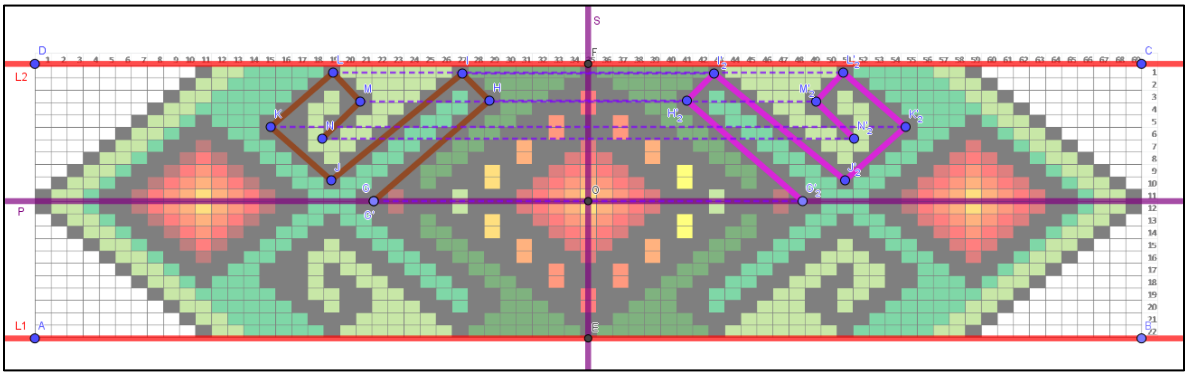
$$R(\overline{KJ}),(P) = \overline{J'K'}, luego$$
$$d(K,P) = 6ch\ y\ d(P,K') = 6ch;$$
$$d(J,P) = 1{,}5\ ch\ y\ d(P,J') = 1{,}5ch$$

$$R(\overline{LM}),(P) = \overline{L'M'}, luego$$
$$d(L,P) = 10ch\ y\ d(P,L') = 10ch;$$
$$d(M,P) = 8ch\ y\ d(P,M') = 8ch$$

Por propiedad de equidistancia.

Y así sucesivamente con los segmentos MN, JI, IH, HG





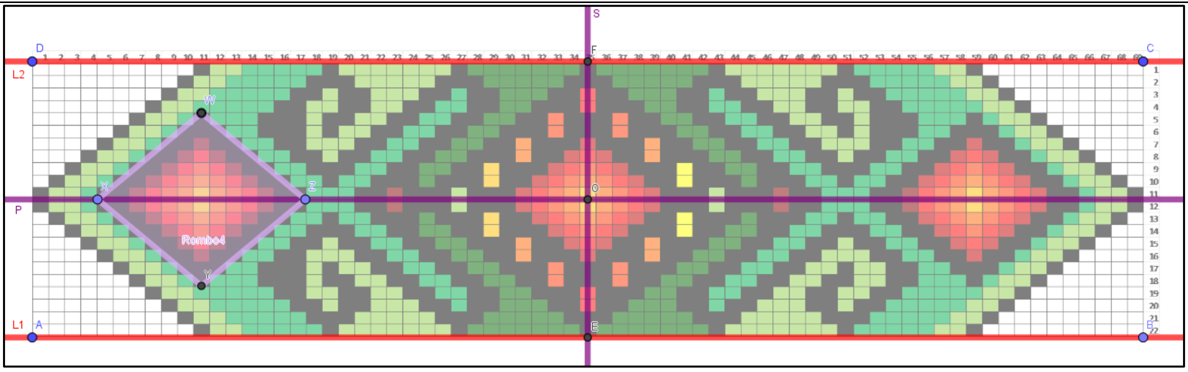
Se presenta reflexión axial de la figura de acuerdo al eje de simetría (S).

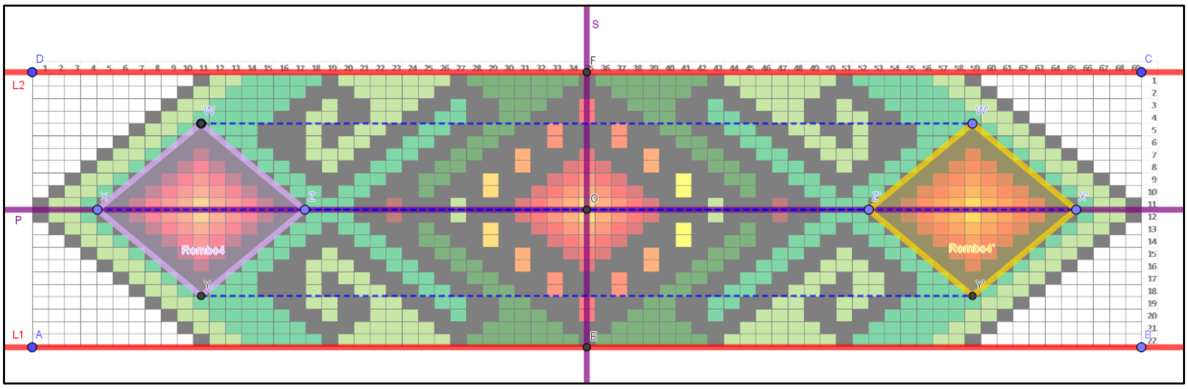
$$R(\overline{GH}),(S) = \overline{G'H'}, luego$$
$$d(G,S) = 13{,}5ch\ y\ d(S,G') = 13{,}5ch;$$
$$d(H,S) = 6{,}5ch\ y\ d(S,H') = 6{,}5ch$$

$$R(\overline{HI}),(S) = \overline{H'I'}, luego$$
$$d(H,S) = 6{,}5ch\ y\ d(S,H') = 6{,}5ch$$
$$d(I,S) = 7{,}5ch\ y\ d(S,I') = 7{,}5ch;$$

Por propiedad de equidistancia.

Y así sucesivamente con los segmentos IJ, KL, LM y MN.





Se presenta reflexión axial del rombo WXYZ respecto al eje de simetría (S).

$$R(WXYZ), (S) = W'X'Y'Z', luego$$

- $R(\overline{WX}), (S) = \overline{W'X'}$

$d(W, S) = 23{,}5\ ch\ y\ d(S, W') = 23{,}5ch$

$d(X, S) = 13{,}5\ ch\ y\ d(S, X') = 13{,}5ch$

Por equidistancia.

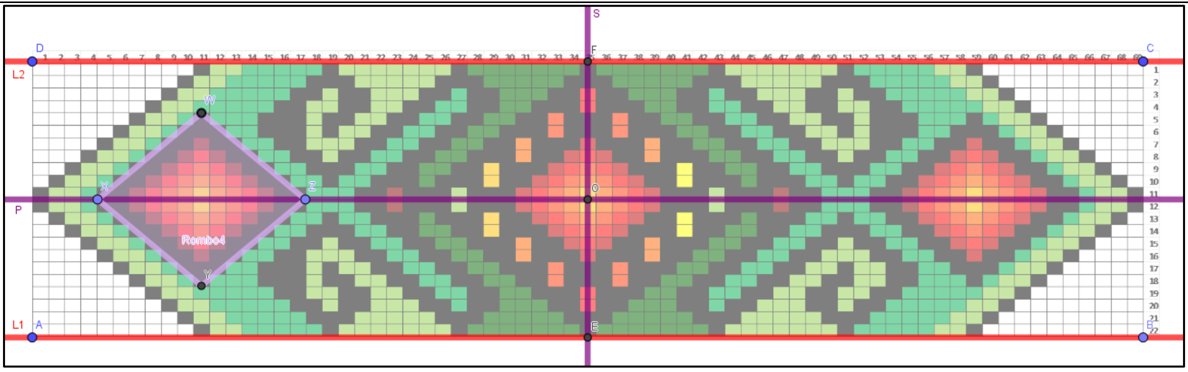
- $R(\overline{XY}), (S) = \overline{X'Y'}$

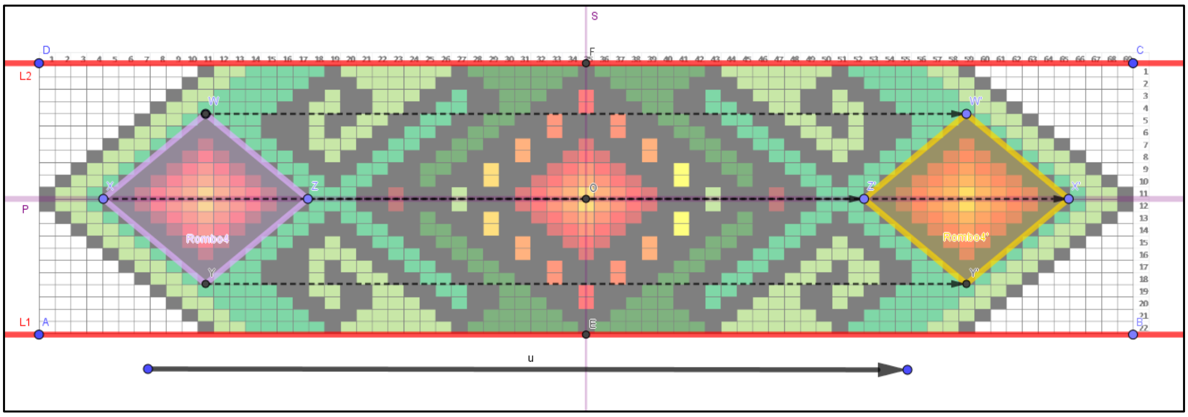
$d(X, S) = 13{,}5\ ch\ y\ d(S, X') = 13{,}5ch$

$d(Y, S) = 23{,}5\ ch\ y\ d(S, Y') = 23{,}5ch$

Por equidistancia.

Y así sucesivamente con los segmentos $\overline{YZ} y\ \overline{ZW}$.





Se presenta una traslación del rombo WXYZ respecto al vector $\vec{u}$.

$$T(WXYZ),(\vec{u}) = W'X'Y'Z', luego$$
$$d(\overline{WW'}) = 48ch\ , d(\overline{XX'}) = 48ch\ ,$$
$$d(\overline{YY'}) = 48ch\ \ , d(\overline{ZZ'}) = 48ch, y$$

$\overline{WW'} \parallel \vec{u}$, $\overline{XX'} \parallel \vec{u}$, $\overline{YY'} \parallel \vec{u}$, $\overline{ZZ'} \parallel \vec{u}$. Por definición de traslación.

Finalmente con el propósito de facilitar la identificación de los elementos geométricos que se encontraron en las manillas analizadas se presenta un cuadro que sintetiza aquella información.

Tabla 8. Síntesis del anterior análisis geométrico.

Manilla	Síntesis
El nido	En esta manilla encontramos figuras como: rombos y triángulos. También se identifica con facilidad un eje de simetría, ya que no tiene muchos elementos en ella. Se evidencia que existe un eje de simetría en la mitad de su largo, el cual hace que se refleje exactamente todos los elementos que hay a un lado del eje. Además, se evidencia que los

	rombos al ser del mismo tamaño y forma están relacionados por una traslación ya sea horizontal a lo largo de la manilla como también de manera diagonal.
El sol	La manilla en su diseño presenta tres rombos que son los elementos principales, también tiene rectas diagonales las cuales son paralelas entre sí. Al observar los colores que están presentes en su diseño, se puede evidenciar que la manilla presenta el efecto espejo, permitiendo identificar que tiene ejes de simetría, uno de ellos es en la mitad de su largo y el otro en la mitad de su ancho. Como la manilla se elabora a lo largo se evidencia que el eje de simetría principal es el que se encuentra a la mitad de su largo, puesto que después de llegar a este eje todos los elementos se repiten, conservando los mismos colores. Además, dos de los rombos presentan características de una traslación, puesto que conservan el tamaño y la forma, estos están ubicados de manera horizontal en las dos esquinas de la manilla.
La generación de la familia	Esta manilla presenta a diferencia de las anteriores más elementos en su diseño, pero contiene al igual que ellas, rombos. Al observarla se identifica un eje de simetría a lo largo, al igual que las demás manilas, se repite los elementos que se elaboran hasta el eje de simetría identificado en la mitad de la manilla, y también conserva los mismos colores. La manilla si se mirase desde la traslación de figuras, solo presenta una, la traslación de los rombos que se encuentran a los extremos de la manilla, puesto que conservan el tamaño y la forma de los rombos y se evidencia que existe un movimiento de traslación horizontal entre ellos a lo largo de la manilla.
La rana	La manilla al igual que la manilla del “sol” se evidencia que posee dos ejes de simetría, pero si se tiene encuentra la elaboración de ella el eje principal es el que se encuentra a la mitad del largo de la manilla. También, tiene rombos en su diseño, y se evidencia que se repite todos los elementos que se tiene antes del eje de simetría. Por otro lado se podría afirmar, sin dejar en evidencia el eje, que hay figuras que tienen semejanza, como los rombos, ellos podrían estar

	desplazados teniendo en cuenta un vector de desplazamiento ya que se encuentran en la misma zona horizontal, y al ser los rombos del mismo color y del mismo tamaño, se evidencia que hay una traslación de la figura.

CAPITULO 6: Rumbo a una propuesta de aula

6.1 Introducción

En este capítulo se propondrán algunos componentes importantes para la elaboración de unas posibles propuestas de aula en las que se articulen los elementos geométricos identificados con la simbología kaméntsá que se encuentra en los diseños de las manillas. En primer lugar se comentará la importancia de los aspectos culturales en la enseñanza de las matemáticas, luego se explicitara los cinco principios que sugiere Bishop (1999) que debe tener un currículo basado en la enculturación matemática, el cual debe articular las seis actividades universales, sugiriendo elementos para la elaboración de propuestas de clase. Por último, se destacará las nociones geométricas que se encontraron en el análisis geométrico.

6.2 Importancia de un currículo mediado por aspectos socioculturales

El desarrollo del aprendizaje mediado por situaciones didácticas permite que los estudiantes comprendan de una manera más significativa. Es por ello, que se debe apuntar a la elaboración de propuestas de aula articuladas con la realidad de los estudiantes. Sin embargo, en el caso específico de la I. E Fray Bartolomé de Igualada no se tiene en cuenta estos aspectos a la hora de elaborar el plan de área, pese a que han existido iniciativas por trabajar las matemáticas mediante proyectos aplicados en ambientes cotidianos, como por ejemplo: un docente de la institución comentaba que:

> Se desarrolló un proyecto para trabajar la estadística en estudiantes de quinto de primaria, en el cual los estudiantes tuvieron que hacer entrevistas a agricultores, ganaderos, etc, y así realizar unas frecuencias de dichos datos y sacar las medidas de tendencia central, pero el proyecto no se realizó de manera formal, hasta que se presentó en un concurso a nivel departamental. Pero con estos trabajos permitió que el estudiante saliera de la rutina y aplicara los conocimientos que está aprendiendo en la

escuela, lo cual es importante para ellos. (D2, comunicación personal, 17 de octubre de 2017)

Siendo la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas un proceso complejo, su abordaje desde la socioculturalidad, como lo evidencian investigaciones ya citadas, puede resultar efectivamente significativo.

La docente D1 claramente hace mención a este aspecto, "este tipo de propuestas son significativas para los estudiantes, ya que permite la articulación de la teoría con la práctica, y que mejor que con el contexto que les rodea" (D1, comunicación personal, 18 de agosto de 2017). Sin embargo, pese a que en Colombia no existe un currículo específico para todas las instituciones educativas, tal articulación con los aspectos socioculturales aún no se ha logrado.

En la Institución Educativa Fray Bartolomé de Igualada se podría articular algunos aspectos culturales para exaltar la población de los rodea.

Pero siempre surge la pregunta: ¿Cuál es la importancia de un currículo que este articulado con los aspectos socioculturales? Analizando las entrevistas queda en evidencia que los maestros sienten que la vinculación del contexto podría aportar a la relación entre las matemáticas y la realidad que nos rodea, de allí que las investigaciones que se han hecho y se piensan hacer sobre la articulación de los contenidos matemáticos occidentales con elementos socioculturales aportan elementos que podrían ser útiles para la práctica docente en las instituciones educativas.

6.3 La enculturación del aula de clases

La enculturación del aula es un camino largo que se debe empezar a recorrer en el currículo, Bishop (1991) propone que para que haya una enculturación en el currículo, debe haber un equilibrio ente las actividades, proyectos e investigaciones.

El proceso de enculturación está estrechamente relacionado al contexto social, por lo cual esta es formal, interpersonal e interactiva, ya que está en busca de un desarrollo para todos. Según Buesa (2014) "el termino enculturación resalta la importancia de los valores desechando la idea de educación como un mero proceso de transmisión de ideas instrumentales, impersonales y mecanicistas actuales."

Por ello, para representar los cinco principios que propone Bishop (1991) para una enculturación, se tomó la estructura que elabora Aroca (2009) mediante una tabla en la que explicita la característica fundamental de cada principio y la contextualización desde la comunidad indígena, en este caso la comunidad Kamëntsá.

1. Principio de representatividad (ver Tabla 9)

Tabla 9

Característica	Contextualización
Representar adecuadamente la cultura Matemática	La elaboración de las manillas en chaquira checa es una actividad artesanal autóctona de los indígenas Kamëntsá, ella representa simbología propia de la comunidad sobre sus costumbres, visiones, dioses, entre otros, así como se evidencio en algunos de los diseños tradicionales que se analizaron.
No a la falta de sentido y comprensión	En la actualidad muchos contenidos matemáticos presentes en los currículos de escuelas que brindan educación a la comunidad indígena kaméntsá carece de significado, ya que no se toma la realidad que lo rodea como medio para vincular los conceptos matemáticos y hacerlos así más significativos para la comunidad.
Racionalismo por encima del objetivismo	Las actividades que se lleven a las escuelas donde existan estudiantes indígenas deben privilegiar de alguna medida el contexto, es

	decir, acercarse a la realidad que los rodea, como por ejemplo: el aprendizaje de la simetría axial mediante los diseños de las manillas en chaquira checa de los indígenas Kamëntsá. En el diseño de la rana se evidencia que existe un eje de simetría P que divide a la figura en dos partes iguales, y si se toma un elemento que pertenezca al lado derecho del eje, este elemento también se encontraba en sentido contrario al eje, conservando la congruencia y cumpliendo cada punto correspondiente de estos elementos una equidistancia al eje P. $(\overline{KJ}),(P)=\overline{J'K'}$

2. Principio de formalismo (ver Tabla 10)

Tabla 10

Característica	**Contextualización**
Reflejar las conexiones entre las matemáticas (formal) y la sociedad actual, mostrar a las matemáticas como fenómeno cultural.	La propuesta de aula que se elabore debe enfocarse en articular las matemáticas occidentales y las matemáticas que están presentes en la cultura, como es el caso de los diseños de las manillas Kamëntsá en el anterior análisis geométrico, puesto que para construcción de estos diseños que son símbolos ancestrales utiliza características de las transformaciones isométricas y elementos geométricos, como se evidencio en la mayoría de las manillas estudiadas, todas tiene rombos en su diseño. En la manilla del nido, los rombos toman la posición de los huevos, estos huevos están ordenados en el nido, mas sin embargo, los

	huevos están ubicados de manera simétrica con respecto al eje S, como se evidencio en el análisis geométrico que se realizó en el anterior capítulo, mostrando la equidistancia de cada punto que conforma el rombo1 y el rombo1' respecto al eje S. $R(\overline{HQ}),(S) = \overline{H'Q'}, luego$ $d(H,S) = 10{,}5ch\ y\ d(S,H') = 10{,}5ch;$ $d(Q,S) = 7{,}5\ ch\ y\ d(S,Q') = 7{,}5ch$ Por la propiedad de equidistancia.
Conexiones entre el nivel informal, nivel técnico y nivel formal.	La propuesta debe encaminarse en primer lugar, en hacer un acercamiento a la cultura, encaminando principalmente a las manillas en chaquira checa, su reconocimiento y conocimientos previos de la elaboración y simbología que se plasma en ellas. En segundo lugar, la elaboración de un diseño con simbología tradicional, y evidenciar el tratamiento que se hace para formar la figura tradicional, como plasma la observación que tiene de la figura y las estrategias que usa para realizarla. En un tercer momento, al ya conocer los diseños y la elaboración de las manillas, se puede dar paso a la formalización de las estrategias para realizar dichos diseños, mediadas por las transformaciones isométricas, permitiendo el reconocimiento del concepto. De esta manera no solo se apropiarían del contenido matemático sino que dicha actividad podría ser más significativa puesto que el medio que

	permite es una artesanía de su diario vivir.

3. Principio de accesibilidad (ver Tabla 11)

Tabla 11

Característica	Contextualización
Ser accesible para todos los niños	El propósito de esta investigación es estudiar y ayudar a los estudiantes de la Institución Fray Bartolomé de Igualada del municipio de Sibundoy- Putumayo, en la cual se evidencia un gran porcentaje de estudiantes que pertenecen a la comunidad Kamëntsá, pero se podría tomar en cualquier institución que tenga el interés de reconocer y promulgar la cultura de nuestro país.
El contenido curricular no debe estar fuera de la capacidad intelectual de los niños	Para comenzar, se quiere que se aborde el tema de isometrías mediante los diseños de una artesanía que elabora los indígenas Kamëntsá, pero de una manera más significativa, primero reconociendo a la cultura, luego la artesanía, su elaboración, luego tener un acercamiento con la elaboración y algunas manillas, permitiendo hacer replicas o diseños propios teniendo en cuenta los tradicionales, y por último el acercamiento al formalismo del contenido matemático que se quiere abordar con los diseños que tiene las manillas. Así, como se presentó en el anterior principio en el apartado de *Conexiones entre el nivel informal, nivel técnico y nivel formal*. Además, teniendo en cuenta el contenido que se analizó en las manillas, fue de interés saber en qué grados se abordaba y con qué

	profundidad. Según los Estándares básicos en competencia matemática (2006) el tema de transformaciones se trabaja en los grados: 1°- 3°: *Reconozco y valoro simetrías en distintos aspectos del arte y el diseño. Reconozco y aplico traslaciones y giros sobre una figura.* (MEN, 2006, pág. 80) 4°-5°: *Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.* (MEN, 2006 Pag.82) 6°-7°: *Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.* (MEN, 2006 Pag.84) De lo anterior, los estándares básicos en competencias matemáticas buscan que al pasar cada grado escolar el tema tenga una continuidad que avance de los simple a lo complejo. En los grados inferiores se inicia con un cercamiento y reconocimiento de las bases fundamentales para comenzar un tema que al final del ciclo escolar será lo suficientemente complejo. La coherencia vertical de los contenidos permite encontrar una relación entre los estándares del mismo pensamiento con los diferentes grados, como se evidencia anteriormente, aunque el tema de isometrías que se trabaja desde 1° hasta 7°, no quiere

	decir que se deja de lado, simplemente se transforma el contenido y se complejiza.

4. Principio explicativo (ver Tabla 12)

Tabla 12

Característica	**Contextualización**
Explicar y hacer	La propuesta se debería basar en explicar y hacer, pues serian complementarios para llegar a la comprensión del tema y su relación con la manilla. Se deberían elaborar actividades que primero trabajen la contextualización de la manilla y la elaboración de su diseño y de la misma, luego actividades que le permitan elaborar diseños y plasmarlos en las manillas, dejando en evidencia algunas figuras que ya conocen o han visto en las manillas Kamëntsá, y por ultimo actividades que permitan evidenciar la relación de esos diseños con los temas de simetría axial y traslación, y ver la demostración formal con las características que están inmersas en dichos diseños construidos y la argumentación de cómo es posible.
Los fenómenos que hay que explicar deben ser accesibles para todos los niños, deben ser conocidos por todos ellos y deben estar sin explicar.	La accesibilidad a las manillas Kamëntsá es vital, y los estudiantes de la Institución Fray Bartolomé de Igualdad la tienen, ya que esta artesanía es un producto artesanal de la cultura, es una artesanía que está presente en el diario vivir de cada uno de los habitantes del municipio de Sibundoy. Aunque la artesanía sea reconocida, no todos saben la

	simbología que se plasma en ella y tampoco se ha utilizado como medio para la enseñanza de las matemáticas, pues en la investigación que se hizo en el Plan de área de matemáticas de dicha institución no se encontró articulación de los contenidos con la cultura (el contexto que rodea a los estudiantes). Por ello, se ve la necesidad de realizar aportes para la elaboración de propuestas innovadoras que permitan la contextualización de los contenidos matemáticos, ya que se evidencia en el análisis geométrico de esta investigación, que hay elementos que se pueden usar para la enseñanza del tema de isometrías, y que mejor que usar este medio lograr que el conocimiento de los estudiantes sea más significativo y que esté presente en el entorno que lo rodea.

5. Principio de concepción amplia y elemental (ver Tabla 13)

Tabla 13

Característica	Contextualización
El currículo de enculturación debería tener una concepción relativamente amplia y elemental al mismo tiempo	La propuesta al estar construida para la enseñanza de los diseños de las manillas, este debe abordar en alguna medida el proceso del diseño, para luego llegar a la elaboración de la manilla y comprender que son pasos complementarios para poder llegar al producto terminado. Para así apuntar a la enculturación teniendo en cuenta no solo el hacer sino también el explicar.

La limitación del tiempo de la enseñanza significa implica que la explicación y el contexto del contenido matemático sea algo elemental.	La propuesta no puede tomar extremos, no podría ser una actividad de una o dos sesiones de una hora, y tampoco se podría trabajar demasiadas sesiones, ya que este contenido no será el único que los estudiantes deben conocer según los Estándares básicos en competencias matemáticas. Pero esto se dejara a consideración del docente, y del tiempo que crea necesario para el desarrollo de la propuesta que se elabore.

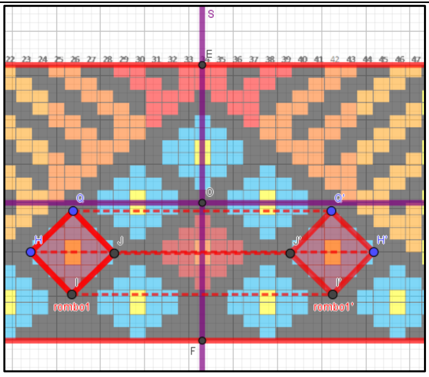
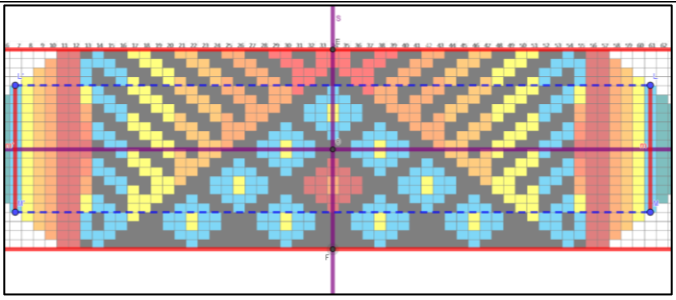
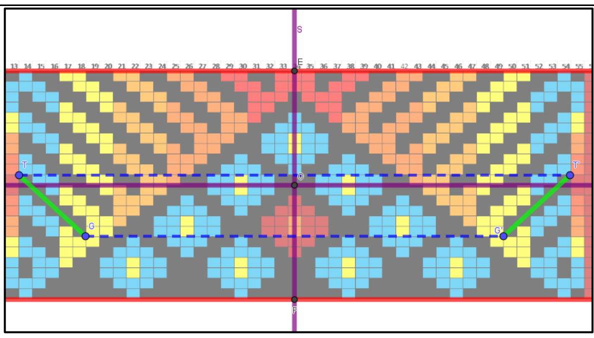
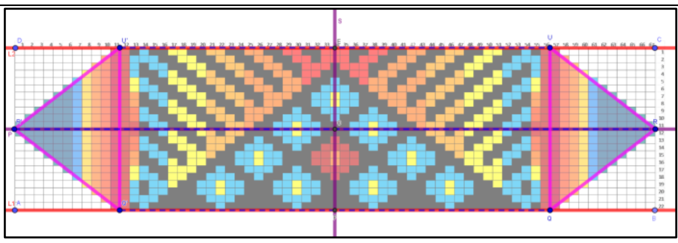
6. 4 Nociones geométricas encontradas en el análisis de las manillas

En el análisis realizado en el Capítulo 5 “Análisis geométrico”, se encontraron las siguientes nociones geométricas:

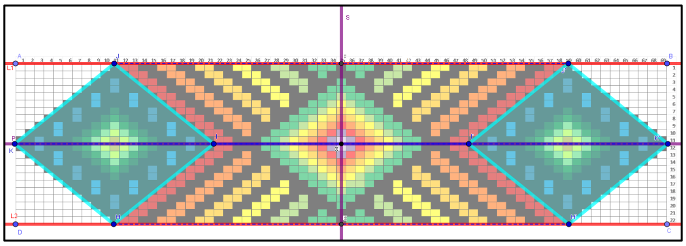
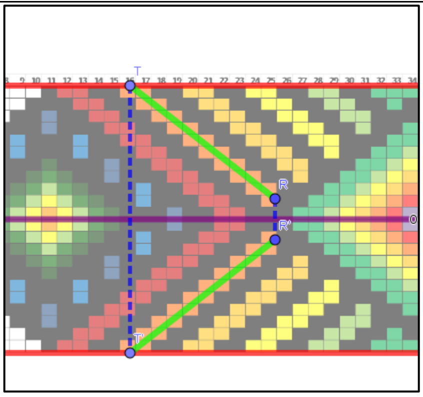
6.4.1 Transformaciones geométricas

- Simetría axial

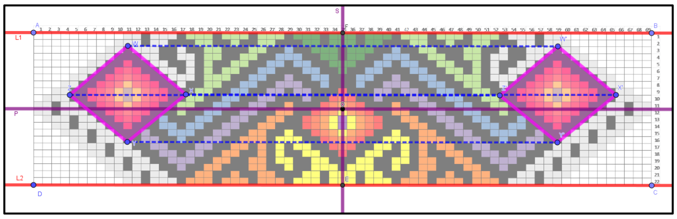
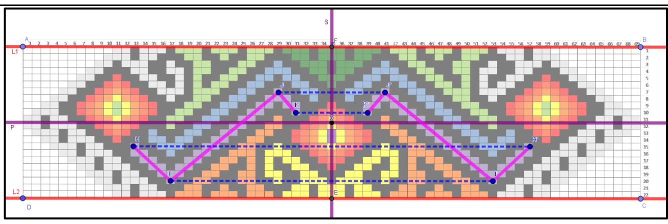
En el diseño “El Nido” se evidencia cuatro reflexiones axiales.

	$R(HQJI),(S) = H'Q'J'I'$
	$R(\overline{LM}),(S) = \overline{L'M'}$
	$R(\overline{TG}),(S) = \overline{T'G'},$
	$R(\Delta UQR),(S) = \Delta U'Q'R'$

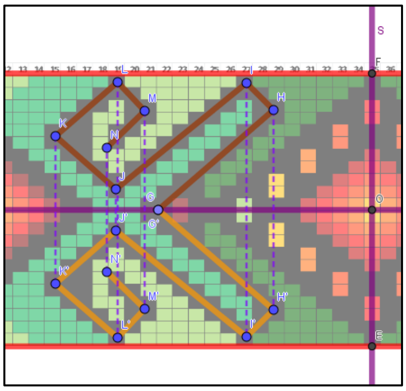
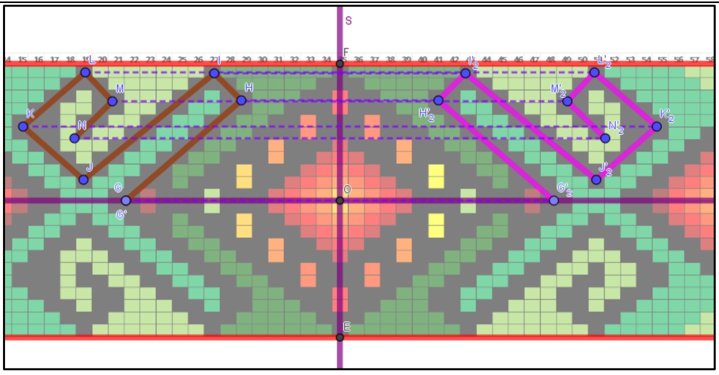
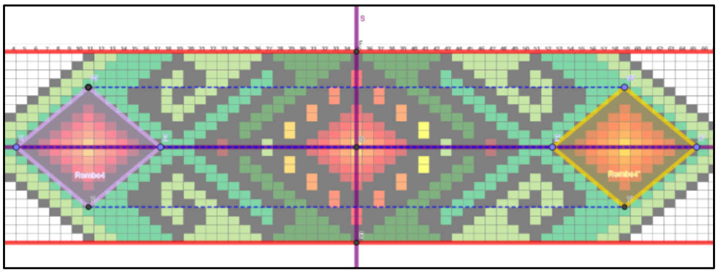
En el diseño “El sol” se evidencia dos reflexiones axiales.

	$R(HIJK),(S) = H'I'J'K'$
	$R(\overline{TR}),(P) = \overline{T'R'}$

En el diseño “La generación de la familia” se evidencia dos reflexiones axiales.

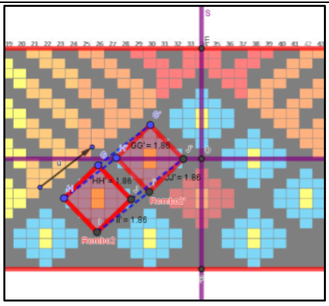
	$R(WXYZ),(S) = W'X'Y'Z'$
	$R(\overline{HI}),(S) = \overline{H'I'}$ $R(\overline{IJ}),(S) = \overline{I'J'}$ $R(\overline{JK}),(S) = \overline{J'K'}$ $R(\overline{HI}),(S) = \overline{H'I'}$ $R(\overline{IJ}),(S) = \overline{I'J}$ $R(\overline{JK}),(S) = \overline{J'K'}$

En el diseño “la rana” se evidencia tres reflexiones axiales.

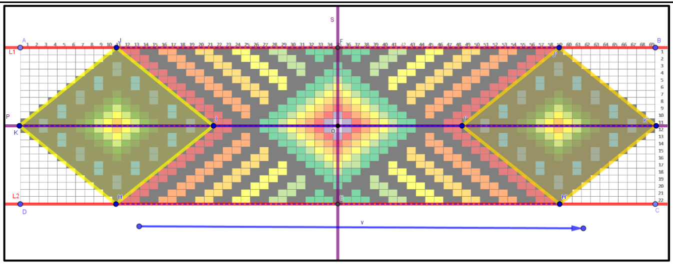
	$R(\overline{KJ}),(P) = \overline{J'K'}$ $R(\overline{LM}),(P) = \overline{L'M'}$ $R(\overline{MN}),(P) = \overline{M'N'}$ $R(\overline{JI}),(P) = \overline{I'J'}$ $R(\overline{IH}),(P) = \overline{I'H'}$ $R(\overline{HG}),(P) = \overline{H'G'}$
	$R(\overline{GH}),(S) = \overline{G'H'}$ $R(\overline{HI}),(S) = \overline{H'I'}$ $R(\overline{IJ}),(S) = \overline{I'J'}$ $R(\overline{KJ}),(S) = \overline{J'K'}$ $R(\overline{LM}),(S) = \overline{L'M'}$ $R(\overline{MN}),(S) = \overline{M'N'}$
	$R(WXYZ),(S) = W'X'Y'Z'$

- Traslación

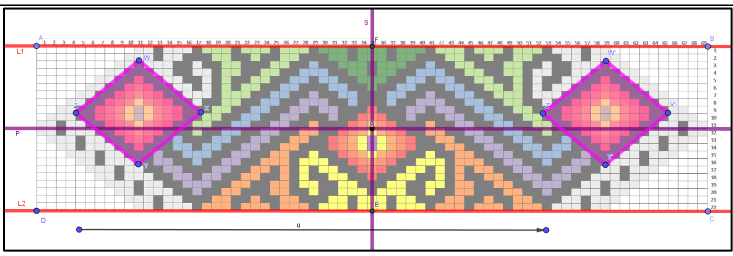
En el diseño “El nido” se presenta una traslación.

	$T(IJGH), (\vec{u}) = I'J'G'H''$

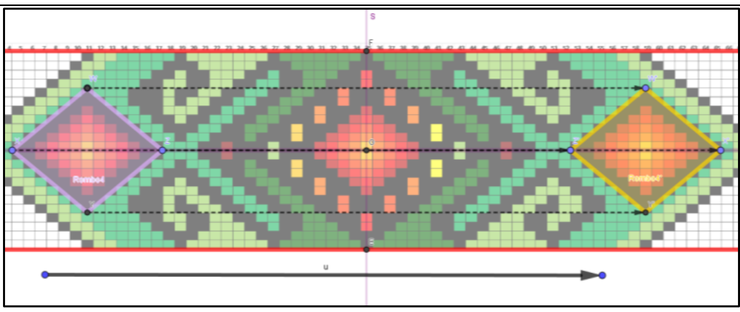
En el diseño “El sol” se presenta una traslación.

	$T(HIJK), (\vec{v}) = H'I'J'K'$

En el diseño “La generación de la familia” se presenta una traslación.

	$T(WXYZ), (\vec{u}) = W'X'Y'Z'$

En el diseño “La rana” se presenta una traslación.

	$T(WXYZ), (\vec{u}) = W'X'Y'Z'$

Conclusiones

Al realizar esta investigación, se pudo evidenciar el poco manejo de los aspectos culturales en la enseñanza de las matemáticas para el diseño del plan de estudios de esta área en la Institución Educativa Fray Bartolomé de Igualada. Pese a ello, se observa el interés de los docentes por realizar algunos proyectos en este campo, pues en las entrevistas realizadas, manifestaron su deseo por construir actividades formales en relación a la enseñanza de las matemáticas mediadas por los contextos de los estudiantes, e incluirlas en el respectivo plan de estudios. En sus palabras, existen algunos acercamientos a este tipo de tareas, pero consideran que es necesario recibir apoyo por parte de la Institución Educativa, para que tomen mayor fuerza.

Debido a lo anterior, resultó de gran ayuda brindar un estudio sobre esta comunidad, articulado a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que permitiera consolidar una base para futuras elaboraciones de propuestas didácticas que se podrían aplicar en cualquier institución educativa del departamento del Putumayo. Además, este trabajo de grado permitió mirar más allá de las matemáticas occidentales, y poder identificarlas en objetos cercanos a nuestra realidad, es decir, evidenciar que existe una posibilidad de articular tanto la etnomatemática como la teoría de la enculturación que propone Bishop (1999), en el currículo del área de matemáticas de la Institución Educativa Fray Bartolomé de Igualada.

A partir de este estudio se resalta los siguientes aspectos:

- El trabajo de campo con la comunidad indígena Kamëntsá, en especial el trabajo de las manillas en chaquira Checa, permitió un acercamiento a sus costumbres, pensamiento, ideologías, historia, entre otras. Esto no solo llevó a conocer las manillas y los símbolos que se plasman en ellas, sino a comprender la visión del mundo que tienen los Kamëntsá.

Tras una serie de entrevistas a tres familias diferentes de la comunidad Kamëntsá, y por algunas observaciones, se conoció que el significado de algunos símbolos puede variar de familia en familia, mientras otros significados de símbolos son comunes. Para este último caso, lo fueron los cuatro diseños en las manillas que se eligieron para el estudio.

En el primer diseño, se encontró que el símbolo del nido representa la abundancia en los hogares de la comunidad Kamëntsá. Con el segundo, ellos representan al dios Sol, quien consideran que ilumina su caminar y los protege. El tercer tipo de diseño significa el ciclo de vida (roles familiares) que cumple cada persona de generación en generación, es decir, su función como hijos, padres, y abuelos. El último diseño, la rana, representa la fertilidad que se desea en los hogares Kamëntsá, pues para esta comunidad, es de suma importancia la descendencia (hijos), con el fin de asegurar la transmisión de su cultura.

- Después del análisis geométrico de las manillas tradicionales de la comunidad Kamëntsá, se evidenció que en ellas están presentes nociones geométricas, las cuales se evidencian en los diseños allí plasmados. Luego, es posible afirmar que este tipo de artesanía, no solo se caracteriza por su esencia cultural, sino también por nociones como la simetría axial y la traslación, tal como se mostró en el capítulo 5.

  De manera particular, se encontraron las siguientes nociones geométricas asociadas a la traslación y a la reflexión axial, en los cuatro diseños:

Reflexión axial	Traslación
Para asegurar la presencia de esta isometría en cada diseño, se identificó: - Ejes de simetría que indicaban donde había un reflejo de una parte del diseño. - Equidistancia entre los puntos (chaquiras) pertenecientes a las figuras inicial y final (reflejo). - Sentido opuesto entre las figuras transformadas, para lo cual ayudó mucho los colores de dichas figuras. Esta isometría se encontró con mayor frecuencia en cada diseño.	Para asegurar la presencia de esta isometría en cada diseño, se identificó: - Paralelismo[12] entre los segmentos formados por los puntos correspondientes de las figuras transformadas. - Vector que indica la dirección y distancia, con las cuales es trasladada la figura. - Congruencia entre figuras trasladadas, para lo cual ayudó mucho los colores de dichas figuras. Esta isometría se encontró con poca frecuencia en cada diseño.

El proceso del diseño de las manillas o hasta la misma elaboración de ellas, articula las nociones geométricas mencionadas anteriormente, con el contexto de la comunidad Kamëntsá. Por ello, se podría abordar este aspecto por medio de una propuesta de aula que permita explorar y dejar en evidencia esta relación de los diseños de las manillas de la comunidad Kamëntsá con la matemática, y especialmente con la geometría.

Para el posible diseño de una propuesta de aula, se sugiere tener en cuenta los principios de enculturación de Bishop (1999) y las nociones geométricas encontradas en el análisis geométrico (Capítulo 5) de este estudio. Esto permitirá que la propuesta esté construida bajo una articulación entre la cultura y la matemática occidental.

En cuanto a los cinco principios:

- El primero es la *representatividad*, es decir, la propuesta debe representar acertadamente la cultura, sin perder el sentido y la comprensión, los diseños de las manillas Kamëntsá son un medio que permite tanto el reconocimiento de la comunidad indígena como el aprendizaje significativo de algunos conceptos matemáticos.

[12] Por paralelismo se entiende la igualdad de distancias entre dos o más rectas, segmentos, semirrecta o planos, los cuales no se cortan en ningún punto entre sí.

- El segundo principio es el *formalismo*, es la relación entre el nivel formal, técnico e informal para mostrar a las matemáticas como un fenómeno cultural, este principio permitirá que la propuesta este encaminada a evidenciar la relación que existe entre los símbolos que se plasman en las manillas Kamëntsá y las matemáticas occidentales, primero con un acercamiento a la cultura y a las manillas, luego a la elaboración del diseño y la manilla, y así ir llegando a conocer aquellas características que se podrían relacionar con algunas nociones geométricas, para luego formalizar el concepto matemático.
- El tercer principio es el de *accesibilidad*, al ser este un estudio de investigación de un artesanía que de alguna manera es conocida como producto local, los estudiantes tendrán una ventaja de sobre el conocimiento de algunos significados y simbología para la comunidad, y con respecto al contenido curricular, el trabajo de las transformaciones geometrías está presente tanto en básica primaria como en bachillerato, por tanto este contenido podría adaptarse a un grado en específico teniendo en cuenta los estándares básicos de competencia en matemáticas.
- El cuarto es el *explicativo*, en este principio, la propuesta al tener como base el segundo principio, en aquellos niveles será necesario explicar y hacer, pues al elaborar los diseños se irán explicando y conociendo tanto el sentido cultural como la relación que se evidencia con la simetría y la traslación, para conocer aquellas características fundamentales de aquellas transformaciones isométricas que están presentes en las manillas Kamëntsá.
- El quinto y último principio, *el principio de concepción amplia y elemental*, como la propuesta debería apuntar a un currículo de enculturación, por tanto debe ser amplio y elemental, sin embargo el tiempo de desarrollo de las actividades dependerá del tiempo disponible que se tenga para la enseñanza de dicho contenido, pero se

recomienda que al ser un trabajo con aspectos culturales se podría tomar un tiempo generoso para que la propuesta sea significativa en el aprendizaje de los estudiantes.

Aspectos a considerar para la elaboración de una propuesta de aula dirigida a la Institución educativa Fray Bartolomé de Igualada

Teniendo en cuenta el marco de referencia planteado en este trabajo y los resultados del análisis geométrico realizado a los diseños que se encuentran en algunas manillas de la comunidad Kamëntsá, se plantea lo siguiente:

- Al ser las manillas en chaquira una artesanía que ya es reconocida por los estudiantes y que en muchos casos no será ajena la manera en que éstas se elaboran, se debería trabajar el pre-diseño de lo que se quiera plasmar en las manillas. Para ello, se puede utilizar, inicialmente, una cuadrícula a lápiz y papel, con el largo y ancho de la manilla permitiendo que los estudiantes dibujen su propio diseño.
- También se deberían realizar actividades en las cuales el diseño ya este dado, y en este, los estudiantes identifiquen los ejes y algunas características de la traslación y simetría axial.
- Los colores son un elemento importante en el reconocimiento de las isometrías de traslación y reflexión axial presentes en los diseños de las manillas de la comunidad Kamëntsá, debido a que permiten, en la mayoría de casos, identificar algunas características y elementos de estas isometrías, al tener los mismos colores entre figuras correspondientes. Este hecho da un indicio de una posible presencia de una transformación isométrica en el diseño, puesto que juega, visualmente, un rol de verificación de ciertas propiedades.

- La oportunidad de realizar un propio pre-diseño, también puede aprovecharse haciendo uso de tecnología, puesto que facilita su trabajo por parte de los estudiantes, al poder realizarse, por ejemplo, en una hoja de cálculo, como se muestra en la Figura 40; esta herramienta permite borrar los colores con facilidad y comenzar de nuevo. Otra opción puede ser mediante la utilización de un software de geometría dinámico.

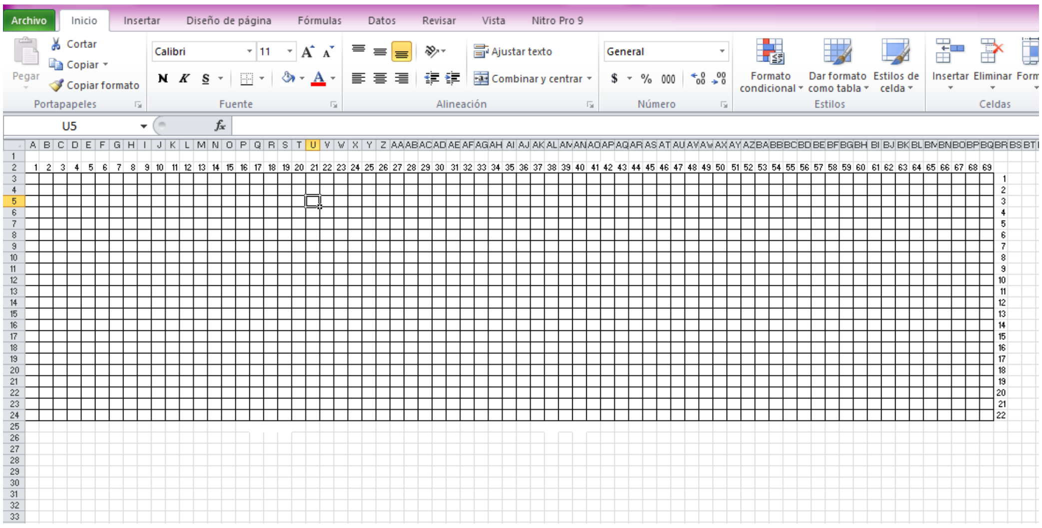


Figura 40. Ejemplo de una cuadricula en una hoja de cálculo

Referencias

Agreda, N. (2016). La Chagra tradicional o Jajañ en la comunidad indígena Kamëntsá: una propuesta didáctica para la construcción de conocimiento escolar y conocimiento tradicional. (Trabajo de grado para optar el título Licenciatura en pedagogía infantil), Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas, Bogotá. Recuperado de http://repository.udistrital.edu.co/bitstream/11349/2863/1/AgredaEspa%C3%B1aNancyLuzDary2016.pdf

Aroca, A. (2007). Una propuesta de enseñanza de geometría desde una perspectiva cultural. Caso de estudio: Comunidad indígena Ika – Sierra Nevada de Santa Marta (Tesis Maestría en Educación), Universidad del Valle, Cali. Recuperado de http://etnomatematica.org/articulos/Tesis_maestria_Aroca.pdf

Avendaño, E., Díaz, L., Herrera, A., Higuita, C., Montoya, D., & Quiceno, A. (2016). La Etnomatemática y la Educación Matemática: Un recorrido epistemológico, curricular y metodológico en las investigaciones de la Universidad de Antioquia. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 9 (1), 84-103. Recuperado de http://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/297/231

Bishop, A. (2005). Aproximación sociocultural a la educación matemática. Colombia: Universidad del Valle.

Bishop, AJB. (1999). Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural. España: Paidós.

Blanco, H. (2006). La etnomatemática en Colombia: un programa en construcción. BOLEMA, (19), 1-19. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/2912/291221866004.pdf

Blanco, H. (2008a). La integración de la etnomatemática en la etnoeducación. Conferencia presentada en 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (16 al 18 de Octubre de 2008). Valledupar, Colombia. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/874/

Blanco, H. (2008b). La Educación Matemática desde un punto de vista sociocultural y la formación de Licenciados en Matemáticas y Etnoeducadores con énfasis en matemáticas. Boletín ASOCOLME, 1 (1), 4-6. Recuperado en http://etnomatematica.org/articulos/Blanco_etnoeducacion.pdf

Congreso de la Republica, (8 de febrero, 1994). Ley general de educación [ley 115 de 1994]. D.O: 41.214/ Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

Dane. (2007). Colombia una nación multicultural: su diversidad étnica. Recuperado en https://www.dane.gov.co/files/censo2005/etnia/sys/colombia_nacion.pdf

Ibarguen, Y. & Realpe, J. (2012). La enseñanza de la simetría axial a partir de la complementariedad de artefactos. (Trabajo de grado para optar el título Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas), Universidad del Valle, Cali. Recuperado de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/3858/4/CB-0470299.pdf

Garzón, D. (2005). Geometría I, notas de clase. Cali: Universidad del Valle.

Goetz, J y LeCompte, M. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. España: Morata.

Gómez, B. (2009). Actividades matemáticas socioculturales en la comunidad indígena Nasa de Chimborazo, Morales, Cauca. (Trabajo de grado para optar el título Licenciatura en etnoeducación), Universidad del Cauca, Popayán. Recuperado de http://etnomatematica.org/trabgrado/Matematica_Nasa.pdf

Guerrero, A. (2002). Geometría, en el plano y en el espacio. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Guerrero, A. (2006). Geometría, Desarrollo Axiomático. Bogotá: Eco Ediciones.

Guerrero, A. (2017). Análisis de nociones geométricas a los tejidos de los cumbes de los indígenas Nasa de Corinto Cauca. (Trabajo de grado para optar el título Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas), Universidad del Valle, Santiago de Cali.

Marcelo, C. y Parrilla, A. (1991). El estudio de caso: Una estrategia para la formación del profesorado y la investigación didáctica. En C. Marcelo et al. (eds), El estudio de caso en la formación del profesorado y la investigación didáctica. Universidad de Sevilla.

Ministerio de Educación Nacional. (2004). Normatividad básica para Etnoeducación. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional. http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-85384.html

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Bogotá, MEN

Ministerio del interior & Cabildo indígena Camëntsà de Sibundoy. (2012). Diagnostico plan salvaguarda Camëntsá. Recuperado de http://siic.mininterior.gov.co/sites/default/files/p.s_camentza_version_preliminar_0.pdf

Peña, P. (2014). Etnomatemáticas y currículo: una relación necesaria. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(2), 170-180. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/2740/274031870012.pdf

República de Colombia. (2015) Constitución Política de Colombia 1991. Recuperado de http://www.corteconstitucional.gov.co/inicio/Constitucion%20politica%20de%20Colombia%20-%202015.pdf

Rosa, M & Orey, D. (2011) Ethnomathematics: the cultural aspects of mathematics. Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática, 4 (2), pp. 32-54. Recuperado en http://funes.uniandes.edu.co/3079/

Smith, D. & Wentworth, J. (1915). *Geometría plana y del espacio*. Estados Unidos: Ginn y Compania.

Tamayo y Tamayo, M. (2004) El Proceso de la Investigación científica. (4ta ed) Mexico: Editorial Limusa.

Urbano, A. (2009). Transformaciones isométricas en las esculturas de San Agustín y su implementación en el aula con el uso de Cabri. (Trabajo de grado para optar el título Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas), Universidad del Valle, Cali. Recuperado de http://www.etnomatematica.org/publica/trabajos_grado/transfor-cabri.pdf

Vásquez, C. (2004). Reflexiones y ejemplos de situaciones didácticas para una adecuada contextualización de los contenidos científicos en el proceso de enseñanza. Revista EUREKA sobre enseñanza y divulgación de las ciencias, 1(3), 214 – 223. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/920/92001306.pdf

Villalobos, J. (2003). El docente y actividades de enseñanza/aprendizaje: algunas consideraciones teóricas y sugerencias prácticas. Universidad de los Andes, Mérida. Recuperado de http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/19790/1/articulo5.pdf

Anexo 1[13]

Estructura curricular de la Institución Educativa Fray Bartolomé de Igualada, año lectivo 2017

GRADO PRIMERO

PRIMER PERIODO			
EJES:		ESPACIAL Y METRICO	
¿Qué aprender?		Empleo de las palabras como: arriba, abajo, atrás, adelante, adentro, a fuera, izquierda y derecha. Medición de objetos o trayectos con unidades no estándar. Metro (Decímetro)	
¿Cómo enseñar?		Actividades prácticas de medición. Juegos y rondas de desplazamiento Ejercicios de orientación y ubicación Talleres cartillas	
SEGUNDO PERIODO			
EJES:		ESPACIAL Y METRICO	
¿Qué aprender?		Figuras geométricas: Cuadrado. Triángulo, círculo, rectángulo. Metro, decímetro y centímetro	
¿Cómo enseñar?		Presentación, elaboración y reconocimiento de figuras geométricas en su entorno. Poesía de figuras Elaboración de maquetas con figuras	
TERCER PERIODO			
EJES:		ESPACIAL Y METRICO	

[13] En el plan de estudio del área de matemáticas solo se analizó el pensamiento espacial y métrico, y algunos ejes que se consideraron relevantes para el estudio.

¿Qué aprender?		Figuras planas Meses del año Días de la semana	
¿Cómo enseñar?		Elaborar y recortar figuras planas Elaborar y diseñar la maqueta de la casa Canciones y juegos de meses y días	
CUARTO PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?		Cuerpos geométricos Palabras: antes, después	
¿Cómo enseñar?		Clasificación de cuerpos geométricos e identifica propiedades	

GRADO SEGUNDO

PRIMER PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?		Figuras planas: triángulos y rectángulos. Cuerpos geométricos: cilindro, cubo y cono Metro Centímetro	
¿Cómo enseñar?		Recordar y reconocer figuras y cuerpos geométricos en el entorno Trazo de figuras y elaboración de cuerpos geométricos Medida de las figuras y cuerpos geométricos.	
SEGUNDO PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	

¿Qué aprender?		Semejanza y congruencia Medidas de longitud Medidas de área, capacidad y tiempo	
¿Cómo enseñar?		Actividad de comparación de objetos de acuerdo a forma, tamaño y ubicación. Clasificación de situaciones cotidianas de acuerdo a la unidad de medida a utilizar.	
TERCER PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?		Ubicación espacial Clases de líneas	
¿Cómo enseñar?			
CUARTO PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?			
¿Cómo enseñar?			

GRADO TERCERO

PRIMER PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?		Escala Eje de simetría	
¿Cómo enseñar?		Centro de aprendizaje 3: Soy simétrico. Módulo B	

SEGUNDO PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?		Clases de líneas Clases de ángulos Trayectos Metro Submúltiplos	
¿Cómo enseñar?		Actividad práctica en espacio libre Observación de las calles y carreras Identificación de las líneas según su posición y ángulos Trazo de líneas y ángulos Calculo de distancias Centro de aprendizaje 3. La batalle de las coordenadas. Módulo C	
TERCER PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?			
¿Cómo enseñar?			

CUARTO PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?			
¿Cómo enseñar?			

GRADO CUARTO

PRIMER PERIODO			
EJES:		ESPACIAL Y METRICO	
¿Qué aprender?		Cuerpos geométricos Características de los cuerpos geométricos. (cubo, pirámide, prisma, cilindro) Medidas de longitud Perímetro Unidades de masa: gramo y kilogramo	
¿Cómo enseñar?		Elaboración de cuerpos geométricos Longitud de perímetros Centro de aprendizaje 2. Guía del docente. 3°. Módulo C. Página 45 a 49	
SEGUNDO PERIODO			
EJES:		ESPACIAL Y METRICO	
¿Qué aprender?		Clasificación de ángulos Clasificación de polígonos	
¿Cómo enseñar?		Actividad práctica de transformación y medición de ángulos. (cuerpo humano, cuerda y papel) Clasificación de ángulos y polígonos en figuras	
TERCER PERIODO			
EJES:		ESPACIAL Y METRICO	
¿Qué aprender?			
¿Cómo enseñar?			
CUARTO PERIODO			

EJES:		ESPACIAL Y METRICO	
¿Qué aprender?		Plano cartesiano	
¿Cómo enseñar?		Diferenciar espacio, plano cartesiano y cuadrante. Ubicación de puntos en el plano cartesiano La búsqueda del tesoro. Guía de enseñanza. Módulo C. Página 136 a 138	

GRADO QUINTO

PRIMER PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?		Cuerpos Geométricos Características Área de figuras planas y cuerpos geométricos. Perímetro de figuras planas. Volumen de cuerpos geométricos	
¿Cómo enseñar?		Elaboración de cuerpos geométricos Características de los cuerpos geométricos Áreas y perímetros de caras. Área Total.	
SEGUNDO PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?		Medidas de peso, capacidad y longitud	
¿Cómo enseñar?		Enumeración de actividades para medir peso, capacidad y longitud. Ejercicios numéricos y contextualizados	
TERCER PERIODO			

EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?			
¿Cómo enseñar?			
CUARTO PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?			
¿Cómo enseñar?			

GRADO SEXTO

PRIMER PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?		Angulos Clasificación y construcción Polígonos Clasificación de polígonos	
¿Cómo enseñar?		Juego Tangram: Forma, clasifica polígonos e identifica los ángulos. Talleres del texto Los caminos del saber. Trabajo con Geogebra	
SEGUNDO PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?		Transformaciones en el plano cartesiano Plano cartesiano	

		Traslación, Rotación, Reflexión, Homotecias	
¿Cómo enseñar?		Videos Ejercicios Guías de trabajo	
TERCER PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?			
¿Cómo enseñar?			
CUARTO PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?			
¿Cómo enseñar?			

GRADO SEPTIMO

PRIMER PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?		Clasificación de Polígonos: Su forma Número de lados Medida de sus lados y ángulos internos	
¿Cómo enseñar?		Juego Tangram: A partir de las figuras formadas clasificarlas y dar las características de cada una. En una figura buscar polígonos y	

		colorearlos.	

SEGUNDO PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?		Circunferencia Circulo Perímetro Áreas y volumen	
¿Cómo enseñar?		Tangram circular, usando como radio la mitad de la medida del lado del cuadrado Hallar perímetros y áreas de polígonos con números racionales	

TERCER PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?			
¿Cómo enseñar?			

CUARTO PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?		Medidas	
¿Cómo enseñar?		Integradas en los ejercicios de proporcionalidad	

GRADO OCTAVO

PRIMER PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?			
¿Cómo enseñar?			
SEGUNDO PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?		Triángulos. Clasificación de triángulos. Líneas notables de un triángulo. Métodos de demostración Congruencia y semejanza de triángulos	
¿Cómo enseñar?		Socialización de la temática haciendo uso de tablero o en algunos casos haciendo uso de diapositivas. Consultas de algunos temas por grupos en biblioteca para su respectivo análisis.	
TERCER PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?		Teorema de Pitágoras Teorema de Tales Ángulos y clasificación. Áreas de figuras geométricas	
¿Cómo enseñar?		Socialización de la temática haciendo uso de tablero o en algunos casos haciendo uso de diapositivas. Consultas de algunos temas por grupos en biblioteca para su respectivo análisis.	
CUARTO PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?		Áreas de figuras regulares.	

¿Cómo enseñar?		Socialización de la temática haciendo uso de tablero o en algunos casos haciendo uso de diapositivas. Consultas de algunos temas por grupos en biblioteca para su respectivo análisis.	

GRADO NOVENO

PRIMER PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?			
¿Cómo enseñar?			
SEGUNDO PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?			
¿Cómo enseñar?			
TERCER PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?		Circunferencia y círculo. Elementos de la circunferencia.	
¿Cómo enseñar?		Socialización de la temática haciendo uso de tablero o en algunos casos haciendo uso de diapositivas. Consultas de algunos temas por grupos en biblioteca para su respectivo análisis.	
CUARTO PERIODO			

EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?		Cuerpos geométricos Área y volumen de cuerpos geométricos (prisma, pirámide, cono, esfera, cilindro).	
¿Cómo enseñar?		Socialización de la temática haciendo uso de tablero o en algunos casos haciendo uso de diapositivas. Consultas de algunos temas por grupos en biblioteca para su respectivo análisis.	

GRADO DECIMO

PRIMER PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?			
¿Cómo enseñar?			
SEGUNDO PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?			
¿Cómo enseñar?			
TERCER PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?		Razones trigonométricas Ley del seno y coseno	
¿Cómo enseñar?		Socialización de la temática haciendo uso de tablero o en algunos casos haciendo uso de diapositivas. Consultas de algunos temas por grupos en biblioteca para su respectivo análisis.	

CUARTO PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?		Secciones cónicas	
¿Cómo enseñar?		Socialización de la temática haciendo uso de tablero o en algunos casos haciendo uso de diapositivas. Consultas de algunos temas por grupos en biblioteca para su respectivo análisis.	

GRADO ONCE

PRIMER PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?			
¿Cómo enseñar?			
SEGUNDO PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?			
¿Cómo enseñar?			
TERCER PERIODO			
EJES:		**ESPACIAL Y METRICO**	
¿Qué aprender?			
¿Cómo enseñar?			

CUARTO PERIODO			
EJES:		ESPACIAL Y METRICO	
¿Qué aprender?			
¿Cómo enseñar?			