



CARACTERIZACIÓN DE LOS NIVELES DE MATEMATIZACIÓN QUE LOGRAN
ALCANZAR LOS ESTUDIANTES DEL GRADO SÉPTIMO DE LA INSTITUCIÓN
EDUCATIVA SENON FABIO VILLEGAS, CON RESPECTO A LA RELACIÓN
EXISTENTES ENTRE LOS CONCEPTOS DE ÁREA Y PERÍMETRO

GIANCARLO SALAZAR CAICEDO

ROMARIO MONTAÑO RAMOS

UNIVERSIDAD DEL VALLE SEDE NORTE DEL CAUCA

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SANTANDER DE QUILICHAO

2018

CARACTERIZACIÓN DE LOS NIVELES DE MATEMATIZACIÓN QUE LOGRAN
ALCANZAR LOS ESTUDIANTES DEL GRADO SÉPTIMO DE LA INSTITUCIÓN
EDUCATIVA SENON FABIO VILLEGAS, CON RESPECTO A LA RELACIÓN
EXISTENTES ENTRE LOS CONCEPTOS DE ÁREA Y PERÍMETRO

GIANCARLO SALAZAR CAICEDO

201358501

ROMARIO MONTAÑO RAMOS

201358669

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE
LICENCIADO EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

DIRECTOR

FULVIO ASTORQUIZA

COTUTOR

JOHNNY ALFREDO VANEGAS

UNIVERSIDAD DEL VALLE SEDE NORTE DEL CAUCA

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SANTANDER DE QUILICHAO

2018

Resumen

El presente trabajo investigativo toma como referente teórico y metodológico el enfoque de *Educación Matemática Realista*, con lo cual se busca fundamentar el diseño de situaciones con respecto a los conceptos de área y perímetro, que permite caracterizar los *Niveles de Matematización* de un grupo de estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Senon Fabio Villegas, del municipio de Villa Rica, Cauca, Colombia. Así mismo, el trabajo presenta un marco de referencia conceptual que aborda elementos didácticos, curriculares y matemáticos.

También se tienen en cuenta los resultados de diversas investigaciones, donde se presentan algunos problemas en torno a la independencia de los conceptos de área y perímetro y aspectos relacionados con el enfoque de la *Educación Matemática Realista*.

Las situaciones planteadas en este documento articulan los referentes de orden didáctico, curricular, matemático y aspectos centrales de la EMR, como lo es el trabajar con contextos cercanos a la realidad de los estudiantes; de tal modo, que se pretende analizar los resultados por parte de los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones contextualizadas.

Con respecto a los resultados obtenidos, se logra mostrar que los estudiantes se ubican en distintos Niveles de Matematización dependiendo de los conocimientos adquiridos y los grados de dificultad con los que se le presentan las situaciones, lo cual permite caracterizarlos y dar cumplimiento al objetivo general que se trazó al inicio de la investigación.

Palabras Claves: Educación Matemática Realista, Niveles de Matematización, contextos escolares y extraescolares, situaciones realistas, área y perímetro.

Tabla De Contenido

Introducción	1
CAPÍTULO I. CONTEXTUALIZACIÓN DEL PROBLEMA INVESTIGACIÓN	4
1.1 Planteamiento del problema	5
1.2 Objetivos	9
1.2.1 Objetivo General	9
1.2.2 Objetivos Específicos	9
1.3 Justificación	10
1.4 Antecedentes	13
1.4.1 Investigaciones en torno a la relación entre los conceptos de área y perímetro	13
1.4.2 Investigaciones en torno al enfoque de la Educación Matemática Realista	20
CAPÍTULO II. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL	24
2.1 Referente Didáctico	25
2.1.1 La Educación Matemática Realista (EMR)	25
2.1.1.1 Principio de Actividad	26
2.1.1.2 Principio de Realidad	26
2.1.1.3 Principio de Reinención	28
2.1.1.4 Principio de Niveles	28
2.1.1.5 Principio de Interacción	31
2.1.1.6 Principio de Interconexión	31
2.2 Referente Matemático	32
2.2.1 Tratamiento del área desde esta investigación	32
2.2.2 Tratamiento del perímetro desde esta investigación	36
2.3 Referente Curricular	40
CAPÍTULO III. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	46
3.1 Diseño metodológico	47

3.2 Diseño del estudio de Casos	49
3.2.1 Contexto y Población de estudio	50
3.2.2 Los Instrumentos para la recolección de la información	51
3.3 Momentos de Intervención	53
3.4 Fundamentación Teórica de las Situaciones	55
3.5 Las Situaciones	59
3.5.1 Situación Uno. La cosecha de Ana y su familia	60
3.5.2 Situación Dos. El banquete para los profesores	62
3.5.3 Situación Tres. El canje de terrenos	64
3.6 Categorías de Análisis	68
3.7 Análisis preliminar de las situaciones	70
3.7.1 Situación uno. La cosecha de Ana y su familia	70
3.7.2 Situación dos. El banquete para los profesores	74
3.7.3 Situación tres. El canje de terrenos	78
CAPÍTULO IV. ANÁLISIS Y RESULTADOS DE LAS SITUACIONES	83
4.1 Análisis de las situaciones	84
4.1.1 Situación Uno. La cosecha de Ana y su familia	85
4.1.2 Situación Dos. El banquete para los profesores	94
4.1.3 Situación Tres. El canje de terrenos	101
Conclusiones	106
Referencias	109

Índice De Figuras

Figura 1. Niveles de Matematización	30
Figura 2. Área del Rectángulo	33
Figura 3. Área del Cuadrado	34
Figura 4. Área del Triángulo	34
Figura 5. Área del Paralelogramo	34
Figura 6. Área del Paralelogramo	35
Figura 7. Área del Paralelogramo	35
Figura 8. Área de Polígonos Regulares	36
Figura 9. Segmento	37
Figura 10. Segmentos consecutivos y poligonales	37
Figura 11. Polígono	38
Figura 12. Tarea uno, Situación Uno	61
Figura 13. Tarea Dos, Situación Uno	62
Figura 14. Situación Dos	63
Figura 15. Propiedad A, Situación Tres	65
Figura 16. Propiedad B, Situación Tres	66
Figura 17. Propiedad C, Situación Tres	66
Figura 18. Modelo Iso-perimétrico, Situación Uno	71
Figura 19. Modelo Geométrico Equi-extenso, Situación Uno	72
Figura 20. Modelo Aritmético, Situación Uno	73
Figura 21. Modelo Particular, Situación Dos	75
Figura 22. Modelo Aritmético, Situación Dos	76
Figura 23. Modelo Aritmético, Situación Dos	76
Figura 24. Modelo Particular (Propiedad A), Situación Tres	79
Figura 25. Modelo Particular (Propiedad B), Situación Tres	79
Figura 26. Modelo Particular (Propiedad C), Situación Tres	79
Figura 27. Modelo Aritmético (Propiedad A), Situación Tres	80
Figura 28. Modelo Aritmético (Propiedad B), Situación Tres	81
Figura 29. Modelo Aritmético (Propiedad C), Situación Tres	81
Figura 30. Modelo 1, Área y Perímetro, Tarea Uno, Situación Uno	86
Figura 31. Respuesta particular de las parejas P5 y P6, Tarea Uno, Situación Uno	87

Figura 32. Cálculo de área y perímetro de P6, Situación Uno	88
Figura 33. Transformaciones geométricas de P5 y P6, Situación Uno	89
Figura 34. Respuesta confusa de P1, Situación Uno	90
Figura 35. Respuesta de P3 y P4, Situación Uno	90
Figura 36. Respuesta de P2, Situación Uno	91
Figura 37. Modelo 2, por Transformación de Figuras (TF) Iso-perimétricas, Tarea Uno, Situación Uno	92
Figura 38. Método para el cálculo de áreas de figuras irregulares.	93
Figura 39. Modelo 3, por TF Equi-extensas, Tarea Dos, Situación Uno	93
Figura 40. Generalización de figuras Equi-extensas, Tarea Dos, Situación Uno.	94
Figura 41. Modelo Particular	95
Figura 42. Identificación del Contenido Matemático.	96
Figura 43. Modelo referido a la situación problema	96
Figura 44. Respuesta de P3 y P4, Situación Dos	98
Figura 45. Respuesta de P2 y P6, Situación Dos	100
Figura 46. Respuesta de P1, Situación Dos	100
Figura 47. Modelos Geométricos duplicados.	102
Figura 48. Respuesta de G1, Situación Tres.	103
Figura 49. Respuesta de G2, Situación Tres.	103
Figura 50. Respuesta de G3, Situación Tres	104

Índice De Tablas

Tabla 1. Coherencia Vertical	41
Tabla 2. Coherencia Horizontal	42
Tabla 3. Cronograma de la Puesta en Acto	53
Tabla 4. Categorías de Análisis	69
Tabla 5. Niveles de Matematización, Situación Uno	74
Tabla 6. Niveles de Matematización, Situación Dos	78
Tabla 7. Niveles de Matematización, Situación Tres	82

Introducción

El presente trabajo de investigación se desarrolla en la línea de investigación de Didáctica de las Matemáticas, la cual pretende caracterizar los *Niveles de Matematización* que logran alcanzar algunos estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Senon Fabio Villegas, ubicada en el municipio de Villa Rica, Cauca, cuando se implementan situaciones con *Contextos Realistas* en el marco de relacionar los conceptos de área y perímetro.

Ahora bien, para alcanzar dicho fin, la presente investigación se encamina a diseñar, rediseñar, aplicar y analizar tres situaciones direccionaladas bajo el enfoque de la *Educación Matemática Realista (EMR)*, pues dicho enfoque se centra en introducir los conceptos matemáticos mediante el trabajo con *contextos* cercanos a la realidad del estudiante.

Esta investigación nace como consecuencia de resultados de diversas investigaciones, donde se presentan algunos problemas en torno a la independencia de los conceptos de área y perímetro, en esta oportunidad se toma en consideración a autores como D'Amore y Fandiño, y se pretende abordar estos conceptos desde contextos cercanos a los estudiantes, en este caso contextos similares a la actividad de la agricultura, puesto que es un contexto que a menudo se trabaja en la institución, además de ser un ambiente en el que los estudiantes se encuentran familiarizados.

De esta manera, para llevar a cabo la presente investigación, esta se divide en cinco momentos, de la siguiente manera:

En el primer momento, se hace la presentación de los aspectos centrales de la investigación, entre los cuales se aborda la problemática de estudio tomando como

principal referente las consideraciones de D'Amore y Fandiño (2007) y algunos otros autores, además de ello, se plantea su respectiva justificación resaltando la relevancia en el campo de la Didáctica y se destacan los objetivos a los que se busca dar respuesta en el presente trabajo. Por último, se hace una búsqueda detallada de algunos proyectos en los cuales se aborden la relación de los conceptos de área y perímetro, y la manera en cómo fueron planteadas dichas investigaciones.

En el segundo momento, se detalla el Marco de Referencia Conceptual que aborda el enfoque de la *Educación Matemática Realista (EMR)*, con sus respectivos *Niveles de Matematización* considerados por Bressan (2005). De igual manera, se presentan los Referentes Matemáticos y los Curriculares con la intención de mostrar algunos elementos que se tendrán en cuenta para realizar los diseños y rediseños de las situaciones a trabajar durante la investigación.

En el tercer momento, se presentan los elementos que conforman la metodología de la investigación, en el que se resalta el estudio de casos como desarrollo metodológico, de igual manera, se detalla la descripción de los estudiantes participantes para la investigación, los instrumentos para la recolección de los datos, entre otros aspectos. Y por último, se presentan las situaciones con contextos realistas y su respectiva fundamentación, así como también, un análisis predictivo de cada una de las situaciones planteadas.

En el cuarto momento, se muestran los resultados obtenidos durante la implementación de cada una de las situaciones, posterior a esto, se realiza la caracterización de los análisis de las situaciones tomando como principal referente los *Niveles de Matematización* de la EMR (Nivel Situacional, Referencial, General y Formal). Además, se resaltan los diferentes modelos que tienen en cuenta los estudiantes al momento de dar solución a las

situaciones problemas.

Finalmente, **en un quinto momento**, se presentan las conclusiones a las cuales se llega durante la investigación, además, la relación que tienen estos resultados con cada uno de los objetivos que se plantearon al inicio de esta investigación.

CAPÍTULO I.

CONTEXTUALIZACIÓN DEL PROBLEMA INVESTIGACIÓN

1.1 Planteamiento del problema

En Colombia, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) plantean entre sus objetivos, desarrollar ciudadanos matemáticamente competentes, es decir, ciudadanos con la capacidad de formular, plantear, razonar, argumentar, y resolver situaciones de la vida cotidiana, del mundo de las ciencia y del mundo de las matemáticas mismas, haciendo uso de procedimientos y algoritmos matemáticos, para ello propone abordar el aprendizaje de las matemáticas a partir de cinco pensamientos.

Entre ellos se encuentra el Pensamiento Métrico, el cual trabaja en la “comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones” (MEN, 2003, p.63), tanto de las matemáticas como de las ciencias y del mundo real, resaltando así la pertinencia e importancia del desarrollo de este pensamiento.

Ahora bien, en diversas situaciones de la vida real se evidencia el uso de sistemas métricos o de medidas, un caso específico y notorio es el de los conceptos de área y perímetro. Por ejemplo: cuando se quiere diseñar el plano de una casa y en la delimitación de terrenos. Por esta razón, es necesario que en las aulas de clase se trabaje con contextos cercanos a la realidad de los estudiantes para que ellos consideren importante su estudio.

Por otra parte, es necesario transformar la visión tradicional de la enseñanza de la geometría (teoría, ejemplos y ejercicios), caracterizada por la aplicación de fórmulas y procesos memorísticos, por una visión que promueva procesos de visualización, argumentación y justificación, que incentive la búsqueda de diversos procedimientos en la resolución de las tareas (Gamboa y Ballesteros, 2010), estos procesos se encuentran inmersos dentro de la actividad matematizadora de los estudiantes, denominado así por el Dr. Hans Freudenthal en el enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR).

Se requiere entonces que se dedique un buen tiempo en las aulas de clases para que los estudiantes logren construir significativamente los conceptos geométricos. De manera particular, diferentes investigadores se han ocupado de la forma en la que los conceptos de área y perímetro pueden ser abordados en el contexto escolar. Por su parte, Chamorro (1995) resalta que el aprendizaje de estos conceptos no debe ser visto como un producto terminado, puesto que requiere un amplio proceso de elaboración que va desde la educación primaria, hasta la educación superior con el tratamiento con integrales.

Ahora bien, la relación entre ambos conceptos no es clara para los estudiantes. De hecho, también es problemática para los profesores. Al respecto, D'Amore y Fandiño (2007) mencionan que “algunos profesores tienen grandes dificultades para conceptualizar el área y el perímetro y, particularmente para comprender mutuas relaciones entre estos” (p. 10)

En el marco de las consideraciones anteriores, algunas investigaciones han mostrado que esta falta de conexión entre dichos conceptos conlleva a los estudiantes a plantear suposiciones erróneas. D'Amore y Fandiño (2007) ejemplifican esta situación cuando les presentan a los estudiantes dos figuras planas A y B, infiriendo que:

- a) Si el perímetro de A es mayor que el perímetro de B, entonces el área de A es mayor que el área de B
- b) Si el perímetro de A es menor que el perímetro de B, entonces el área de A es menor que el área de B;
- c) Si el perímetro de A es igual al perímetro de B, entonces el área de A es igual al área de B.

Obteniendo los mismos resultados al intercambiar “perímetro-área” con “área-perímetro”. Lo anterior deja en evidencia la existencia de dichas relaciones creadas a

partir de suposiciones, las cuales podrían llegar a ser utilizadas de manera indiscriminada si no se da un tratamiento adecuado a las mismas.

En consecuencia, entre las problemáticas asociadas con el aprendizaje reportadas por estas investigaciones, se destacan aquellas que examinan la relación existente entre las figuras isoperimétricas y el cálculo de área de las mismas. Pese a que existen trabajos que abordan esta problemática (Amadeo y Yáñez, 2006; Roldán y Rendón, 2014; López y Suárez, 2010; D'Amore y Fandiño, 2007) todavía se requieren otras investigaciones que aporten desde otro punto de vista, nuevos elementos para incorporar al trabajo didáctico en el aula de clases.

Desde la perspectiva de los estudiantes, ellos mismos reconocen que el cálculo de perímetros y áreas es una de sus principales dificultades al estudiar geometría. Incluso, indican dificultades para interpretar qué dice un problema y para resolverlo algebraicamente (Gamboa y Ballesteros, 2010), posiblemente esto se deba a que, los problemas presentados no sean concebidos por los estudiantes como real, puesto que:

Si la matemática surge como matematización (organización) de la realidad, el aprendizaje matemático debe originarse también en esa realidad. Esto no sólo significa mantener a esta disciplina conectada al mundo real o existente sino también a lo realizable, imaginable o razonable para los estudiantes. (Bressan, 2005, p.3)

En relación con lo anterior, se pone de manifiesto la relevancia de estos conceptos en la formación académica y personal de cada uno de los estudiantes, puesto que la comprensión que se haga de los mismos, es fundamental para enfrentar situaciones en contextos escolares y extraescolares, y mejorar sus procesos de pensamiento matemático, tales como: la resolución de problemas y la matematización.

El enfoque de la EMR promueve el trabajo con contextos y situaciones cercanas a la cotidianidad de los estudiantes. De acuerdo con Bressan, et al (2016), estos generan oportunidades para que los estudiantes, a) construyan conceptos de las matemáticas a partir de su uso, y b) logren trabajar en diferentes niveles de conceptualización con base a sus posibilidades.

En síntesis, esta investigación se interesa por el estudio de las concepciones erróneas de los estudiantes de grado séptimo, frente a las relaciones entre los conceptos de área y perímetro, a través del diseño, implementación y análisis de una secuencia de situaciones realistas, relativas al trabajo con figuras isoperimétricas y equi-extensas. De esta manera, este trabajo de investigación pretende responder a la siguiente pregunta:

¿Cómo se caracterizan los niveles de matematización que se configuran en un grupo de estudiantes de grado séptimo, de la Institución Educativa Senón Fabio Villegas, del municipio de Villa Rica, Cauca, respecto a la relación existente entre los conceptos de área y perímetro, cuando se implementan situaciones enmarcadas en la EMR?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Caracterizar los niveles de matematización que logra alcanzar un grupo de estudiantes de grado séptimo, de la Institución Educativa Senon Fabio Villegas, respecto a la relación existente entre los conceptos de área y perímetro, cuando se implementan situaciones enmarcadas en la EMR.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Identificar algunos referentes didácticos, matemáticos y curriculares, que favorezcan la introducción de los conceptos de área y perímetro en el grado séptimo, de la Institución Educativa Senón Fabio Villegas.
- Articular los referentes de orden didáctico, matemático y curricular en el diseño y rediseño de situaciones realista para los estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Senon Fabio Villegas.
- Identificar y caracterizar los niveles de matematización que se configuran en un grupo estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Senón Fabio Villegas a partir de los resultados obtenidos durante la implementación de las situaciones.

1.3 Justificación

A lo largo de la historia los seres humanos se han interesado por saber qué y cuánto tienen, han utilizado diversos instrumentos para el cálculo de las mismas, y a medida que pasa el tiempo estos instrumentos han ido evolucionando con fines comerciales haciendo así necesario estandarizar unas unidades de medidas.

Lo anterior permite dar cuenta que desde la antigüedad se hace uso de diversos instrumentos para el cálculo de magnitudes y que las mismas hacen parte del entorno en el que vivimos, es por ello, que el estudio de las magnitudes es uno de los ejes centrales de la geometría elemental, puesto que este prepara al estudiante para la vida escolar y extraescolar.

Es de reconocer que los conceptos geométricos de área y perímetro han sido un fenómeno de gran estudio dentro del campo de la Educación Matemática. Posiblemente, esto se deba a que el aprendizaje de los mismos no se encierra únicamente a operaciones aritméticas y geométricas, sino que estos también “incluyen operaciones mentales y lógicas, habilidades espaciales, gráficas y numéricas y estimaciones” (Luelmon, 2001, p. 730).

Estos conceptos se encuentran presentes no solo en la vida cotidiana de toda persona, sino también en sus distintas etapas educativas en matemáticas, que va desde la básica hasta su etapa profesional. Por tal razón, esta investigación se hace pertinente en el grado séptimo por encontrarse a la mitad de su proceso educativo, además en esta fase se pueden trabajar en las posibles concepciones erróneas que se hayan podido generar.

Todo lo mencionado hasta el momento permite entender que, para el aprendizaje de estos conceptos, es necesario tener en cuenta no solo su componente matemático sino también su componente sociocultural, es por ello que este trabajo investigativo se centra en la reconstrucción de estos conceptos a partir de situaciones reales que los conlleven a

desarrollar habilidades matemáticas permitiendo así la comprensión de los mismos, tomando como referente didáctico la EMR, la cual permite plantear propuestas donde se haga énfasis en el trabajo de las matemáticas con ambientes realistas.

Dentro de la problemática se destaca el hecho de la utilización de fórmulas carentes en general de significados y procesos memorísticos, haciendo así necesaria la implementación y pertinencia de la EMR como enfoque central en este trabajo investigativo.

En cuanto a los trabajos investigativos realizados dentro de este campo, se puede apreciar que algunas de las propuestas planteadas en estas investigaciones se basan en trabajar el área y perímetro como conceptos independientes. Por ejemplo, en la investigación de López y Suárez (2010) trabajan estos conceptos de manera aislada, con el objetivo de no crear tendencias falsas en cuanto a su relación. Sin embargo, al presentarlos de forma aislada, se podrían generar problemáticas como las señaladas en los apartados anteriores.

En este marco de ideas, se entiende que es necesario trabajar la relación existente entre los conceptos de área y perímetro, su componente matemático y cultural. Por esa razón, la presente investigación se hace necesario trabajar la relación de estos conceptos teniendo en cuenta cada uno de los factores mencionados hasta el momento.

Desde una perspectiva más general, se pretende trabajar estos conceptos teniendo en cuenta que “el énfasis no está en aprender algoritmos, sino en el proceso de algoritmización, no en el álgebra sino en la actividad de algebrizar, no en las abstracciones sino en la acción de abstraer, no en la forma y la estructura sino en formalizar y estructurar” (Bressan, 2005, p.73) de tal manera que se llegue a la comprensión de las relaciones que se encuentran entre los conceptos de área y perímetro a partir de la acción.

La presente investigación también tiene en cuenta los elementos culturales que podrían

llegar a permitir la comprensión de estos conceptos, por tal razón, no solo se debe tener en cuenta el enfoque de la EMR, sino también un marco metodológico cualitativo que permita conocer la población de estudio para crear vínculos entre los conocimientos formales y los conocimientos informales por medio de situaciones contextualizadas.

En todo caso, se hace pertinente indagar sobre estos conceptos dado que “el trabajo con objetos bidimensionales y tridimensionales y sus movimientos y transformaciones permite integrar nociones sobre volumen, área y perímetro, lo cual a su vez posibilita conexiones con los sistemas métricos o de medida y con las nociones de simetría, semejanza y congruencia, entre otras” (MEN, 2003, pág. 62). Al mismo tiempo, los objetos bidimensionales y tridimensionales son indispensables para carreras profesionales de las cuales se haga uso del cálculo y la física.

Finalmente, se debe reconocer que la problemática a tratar es importante porque ayuda a afrontar futuras dificultades tanto, en el ámbito social y cultural como, en el ámbito profesional, puesto que la comprensión y utilización de estos conceptos son necesarios para la formación profesional en carreras, tales como: Ingeniería de Materiales, Ingeniería Civil, Agronomía, Física, entre otras.

Dado que la compresión que se haga de estos conceptos serán las que enmarquen el uso de los mismos en los distintos aspectos de la vida, se deben plantear situaciones que permita caracterizar los distintos niveles de matematización puesto que estos determinan el nivel de comprensión que estos han logrado alcanzar.

1.4 Antecedentes

En el transcurso de la historia de la Educación Matemática, muchas investigaciones han sido realizadas en torno a los conceptos de área y perímetro de figuras, así como las dificultades que pueden presentar los estudiantes al momento de enfrentarse a estos dos conceptos. En este apartado se discuten algunas de ellas, destacando las problemáticas, el desarrollo de los objetivos y los resultados más relevantes.

1.4.1 Investigaciones en torno a la relación entre los conceptos de área y perímetro

En primer lugar, se presenta la investigación de Amadeo y Yáñez (2006), denominada: *Relación entre perímetro y área: el caso de Patricia y las interacciones*. En esta investigación se adopta un diseño metodológico correspondiente con un estudio de casos, en el que se analizan las producciones de una estudiante de quinto grado, al resolver problemas, enmarcados en una unidad didáctica, cuyo objetivo es abordar la relación entre perímetro y área. Entre las actividades propuestas se destacan las que involucran figuras equivalentes que pueden o no ser, isoperimétricas. Los resultados de esta investigación indican que a través de los problemas diseñados, la estudiante que conforma el caso, logró distinguir la independencia entre el área y el perímetro de superficies equivalentes o isoperimétricas. Además, sugieren incorporar tareas de construcción de figuras equivalentes con mayor perímetro determinado.

Esta investigación es de interés para el presente proyecto porque permite constatar que una de las dificultades existentes en el aprendizaje de la relación entre área y perímetro, tiene que ver con la concepción errada por parte de los estudiantes de que al aumentar el perímetro de una figura en cierta proporción, el área respectiva aumenta en esa misma

medida. Además, revela ciertos elementos que pueden tenerse en cuenta para el diseño de situaciones que exploren la relación de independencia entre el área y el perímetro de una figura plana.

Seguidamente, se presenta la investigación realizada por Roldán y Rendón (2014), denominada: *Estrategia para el estudio del Área y el Perímetro de figuras planas articulada al modelo Socio Crítico para los estudiantes de la Institución Educativa María De Los Ángeles Cano Márquez*. Esta investigación revela que las dificultades que presentan los estudiantes con los conceptos de área y perímetro perduran hasta su formación universitaria y que por tanto, es necesario replantear la enseñanza de la geometría en los niveles de Básica Secundaria. Entre los planteamientos sugiere poner mayor atención al reconocimiento de la bidimensionalidad de las superficies y la carencia de estrategias para efectuar medidas de objetos comunes de los conceptos de área y perímetro.

Adicional a lo anterior, se abordan aspectos relacionados con el modelo pedagógico socio-crítico propio del contexto de la Institución Educativa María de los Ángeles Cano Márquez, en la cual se desarrolla la investigación. Desde esta mirada, se hace especial énfasis en el trabajo colaborativo y cooperativo, el cual se considera relevante para promover el aprendizaje de nuevos conocimientos, potenciando el espíritu investigativo. La metodología de investigación es de carácter cualitativo, debido a que se realiza el abordaje de realidades subjetivas e intersubjetivas como objetos legítimos de conocimiento científico.

En resumen, tomando en consideración el modelo pedagógico socio-crítico propuesto en esta investigación, se resalta que es de suprema importancia, puesto que permite abrir espacios en los cuales los estudiantes puedan ser críticos y a la vez puedan opinar acerca de las diferentes estrategias que logran implementar al momento de resolver un problema,

además, permite que el estudiante logre participar en la construcción de su propio conocimiento.

Este trabajo es de utilidad para la presente investigación debido a que reconoce que no solamente hay dificultades producto de la naturaleza compleja de los conceptos, sino también de las prácticas propias del profesor. Asimismo, se resalta que el trabajo colaborativo y cooperativo es trascendental para promover el aprendizaje de nuevos conocimientos. Además, este tipo de metodología de trabajo se torna importante para que los estudiantes reconozcan estas relaciones y diferencias entre los conceptos de área y perímetro, lo cual se corresponde ampliamente con la selección de un enfoque como la EMR.

A continuación se presenta la investigación llevada a cabo por Mántica, Del Maso, Götte, y Marzoni (2002), en su artículo titulado: *La confusión entre área y perímetro. Análisis de una propuesta áulica*. Esta investigación toma como punto de partida numerosas investigaciones acerca de los errores que cometen los alumnos en el cálculo de áreas y las concepciones erróneas que manifiestan estos mismos. Así, uno de los errores que cometen los estudiantes y que se ha puesto de manifiesto en esta investigación es la confusión entre los conceptos de perímetro y área.

En este artículo se describe una secuencia de aprendizaje implementada en un curso de octavo año de Educación General Básica (E.G.B.). El cual tiene como objetivo central proporcionar una serie de actividades para que los estudiantes puedan establecer la independencia de los conceptos de perímetro y área.

En esta investigación se evidenció que los estudiantes no tienen claro los conceptos de área y perímetro. De igual manera se pudo apreciar que, en general, los estudiantes no lograron establecer la independencia entre la variación de área y perímetro. No obstante,

se observó que algunos estudiantes comenzaron a plantearse qué tipo de relación existe entre los conceptos de área y perímetro de figuras de distinta forma. Lo cual permite avanzar en la reconstrucción de dichos conceptos y su independencia.

Finalmente, se resalta la investigación presentada por López y Suárez (2010), denominada: *Trabajando la diferencia de los conceptos de área y perímetro con actividades didácticas en alumnos de cuarto grado de primaria*. En ella se trabaja a partir de las dificultades que presentan los estudiantes al crear tendencias falsas acerca de las relaciones entre los conceptos de área y perímetro, debido a esto, se implementaron actividades que permitieran aclarar cada concepto por separado, para que al enfrentarse a situaciones problemas no se presentase errores y les permitiera consolidar estos conocimientos.

Debido a este problema, se decidió trabajar en el aula de clase por medio de actividades didácticas concretas como el uso del geoplano, el cubrimiento de figuras con un patrón de medidas, el reconocimiento del contorno. En el que la aplicación de estos conceptos a la resolución de problemas fuera el método para involucrarse en el aprendizaje, todas estas herramientas didácticas permitieron abordar las confusiones y analizar si mediante este método los estudiantes logran dar solución a estos inconvenientes.

En esta investigación se plantea la importancia de trabajar el concepto de perímetro asociado al contorno separado del concepto de área que se asocia al recubrimiento, debido a que si no se trabajan los dos conceptos de manera independiente y en profundidad posiblemente se seguirán presentando las mismas confusiones. Además, es de vital relevancia proporcionar al estudiante experiencias didácticas, con materiales concretos que les permitan desarrollar su capacidad analítica, crítica e investigativa. En cuanto a la confusión existente entre los conceptos de área y perímetro que presentaron los

estudiantes tomados en la investigación se logra superar las dificultades a través del planteamiento de las guías y a la total disposición por parte de los estudiantes.

En síntesis, esta investigación se toma debido a que permite verificar que una de las dificultades que presentan los estudiantes en torno a los conceptos área y perímetro, es que estos crean concepciones erróneas acerca de estos conceptos. Además, aporta elementos para reconocer que la relación entre estos dos conceptos no es evidente en los estudiantes, quizás porque no se ha realizado un estudio profundo sobre lo que es el área y lo que es el perímetro, lo cual conlleva a que el estudiante no comprenda con exactitud a que se refiere cada uno de estos conceptos. Asimismo, esta investigación contribuye al diseño de situaciones y a la EMR, debido a que al trabajar con material concreto, en este caso el uso del geoplano, eventualmente podría ayudar a mejorar la relación área y perímetro.

Ahora bien, se toma en consideración la investigación presentada por Salazar (2016), denominada: *Enseñanza de los conceptos de perímetro, área y volumen a estudiantes de grado sexto, a partir de maquetas*. En esta se logra evidenciar el diseño, implementación y evaluación de una estrategia que tiene como propósito que los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Santa Juana de Arco del Municipio de Santa María (Huila), puedan apropiarse de los conceptos geométricos de área, perímetro y volumen. Para dicho fin, se propone como recurso didáctico la construcción de la maqueta de una casa, por medio de la cual se orienta el diseño de ésta mediante la elaboración de actividades en las que se abordan ciertos conceptos geométricos y en las que los estudiantes calculan el área, perímetro y volumen de algunos espacios de la casa. Esta construcción permite asociar algunos campos en los que se logran aplicar estos conceptos, tales como la arquitectura y la albañilería.

La elaboración de esta investigación permite dar cuenta que el trabajo con maquetas en la clase de geometría, es una estrategia pedagógica adecuada para la enseñanza de los conceptos de área, perímetro y volumen en los estudiantes de grado séptimo, pues la apropiación y aplicabilidad de estos conceptos en contextos cotidianos se evidencia de manera exitosa al solucionar situaciones problemas de su entorno.

Esta investigación se torna pertinente para este trabajo, debido a que permite conocer cómo abordar los conceptos de área y perímetro partiendo de contextos cotidianos tal como se presenta en el enfoque de la EMR. Así mismo, este trabajo favorece el diseño de situaciones, puesto que permite trabajar con este tipo de contextos (construcción de maquetas) los cuales ayudan a que los estudiantes se apropien y apliquen estos conceptos de manera satisfactoria.

En este mismo sentido, se presenta la investigación de González (2014), denominada: *Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café*. Este estudio toma como punto de partida y principal motivación los bajos niveles de comprensión y de conceptualización de los estudiantes sobre conceptos geométricos, evidenciando así que los estudiantes no tienen clara la definición de los conceptos de área y perímetro, también suelen asumir que las medidas de ambos son mutuamente dependientes y además, se comprobó que aun cuando pueda expresarse matemáticamente (área y perímetro), una en función de la otra, no se comprende la independencia en sus medidas.

Para realizar esta investigación, se diseñó y evaluó una guía curricular bajo los parámetros y principios del marco teórico de la Enseñanza para la Comprensión, que permitiera el avance y la caracterización de los procesos de intuición en los estudiantes de la comunidad cafetera del corregimiento Santa Rita, municipio de Andes, departamento de

Antioquia, Colombia. Para ello, la investigación se enfoca en el diseño de algunas actividades sociales y económicas que sean representativas en la región, tal como la agricultura del café, que a su vez les permite a los estudiantes comprender los conceptos de área y perímetro, además de la independencia de sus medidas.

En esta investigación se logra observar que las particiones en una finca, de tajos en un lote, facilitó la comprensión del área como una suma de superficies y la igualdad de áreas aún en situaciones de figura y forma diferente. También se resalta que los estudiantes alcanzaron los conceptos de perímetro y área en el contexto de la agricultura del café a través de la asociación de área: contenido de la era y perímetro: mediante barreras de sembrado. Dicho de otro modo, los estudiantes lograron alcanzar un nivel de maestría en cuanto a la independencia entre las medidas del área y del perímetro dado que hubo una variada y coherente relación de los conceptos con otras áreas del conocimiento y con las situaciones comunes de la vida.

Este trabajo es de interés para la presente investigación, puesto que permite conocer cómo abordar los conceptos de área y perímetro desde un contexto agrícola, siendo este contexto pertinente desde el punto de vista del enfoque de la EMR. Además de ello, este trabajo se torna de vital importancia debido a que aporta elementos para el diseño de una secuencia, partiendo de actividades sociales y económicas que permitan a los estudiantes una buena comprensión de estos conceptos.

Las investigaciones presentadas anteriormente, se muestran con la intención de aportar elementos de gran relevancia para el planeación y el diseño de situaciones, algunos de estos son los diferentes contextos que permiten una buena comprensión de estos conceptos, tales como el trabajo con actividades económicas y sociales, así como también la construcción de maquetas.

1.4.2 Investigaciones en torno al enfoque de la Educación

Matemática Realista

Por otro lado, se muestra la investigación realizado por Henao y Vanegas (2012), denominada: *La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción y uso de modelos cuadrático*. Esta investigación se encuentra direccionada bajo el enfoque de la Educación Matemática Realista y buscar fundamentar una situación referente al trabajo con modelos cuadráticos partiendo de ciertos referentes teóricos y metodológicos, los cuales permiten estudiar el proceso de modelación matemática en estudiantes con grado de escolaridad 10° y 11°, en específico, indagar lo relativo a los niveles de *matematización* y la incidencia de las situaciones planteadas en el proceso de aprendizaje de los modelos cuadráticos. La investigación se proyecta en términos del estudio de los niveles de *matematización*, como una posibilidad de estudiar la práctica matemática de los estudiantes y algunas contradicciones didácticas y cognitivas, en correspondencia con el proceso de modelación matemática en la clase de matemáticas.

Esta investigación surge como resultado del reconocimiento de algunas problemáticas y preocupaciones recurrentes en la investigación en Didáctica de las Matemáticas en relación con la búsqueda, el diseño e implementación de nuevas propuestas de enseñanza formuladas para abordar el (sin) sentido común de los estudiantes en la interpretación y resolución de problemas en diferentes contextos, lo cual a su vez involucra el problema actual de los estudiantes, para conectar la matemática escolar con sus saberes informales.

En primera instancia, se presenta un recorrido pasando por los principios fundantes de la Educación Matemática Realista, en el que se busca ligar tanto elementos teóricos como elementos metodológicos que ayuden a dimensionar y entender este enfoque teórico. En un segundo momento, la investigación desarrollada busca enfatizar en los fenómenos

asociados al estudio de la modelación matemática, con el objetivo central de determinar cuáles son las características de los niveles de *matematización* que presenta un grupo de estudiantes de los últimos grados de educación media, cuando se enfrentan a situaciones diseñadas desde el enfoque de la EMR, puesto que las situaciones propuestas desde contextos realistas presentan mejores perspectivas en el proceso de aprendizaje matemático de los estudiantes, en comparación a los resultados obtenidos cuando se trabaja desde contextos eminentemente matemáticos.

En síntesis, uno de los logros de esta investigación es haber encontrado que los estudiantes atraviesan por diferentes etapas o fases de *matematización*; horizontal y vertical, que pueden especificarse aún más, a través de los niveles de compresión. Como consecuencia, se encontró que los estudiantes pueden situarse dentro de uno de estos niveles, pero debido a que sus modelos poco a poco van evolucionando, hasta adquirir un carácter más general, dicho posicionamiento tiene necesariamente un valor relativo. De esta manera, se pudo dar cumplimiento al propósito general de esta investigación, enmarcado en describir cómo son los procesos horizontales y verticales de matematización, aunque una proyección importante que se puede derivar de esta experiencia, es poder estudiar el impacto que tiene esta descripción en lo concerniente a los procesos de conceptualización y/o comprensión de los conceptos matemáticos, particularmente de lo cuadrático.

Esta investigación es de interés para este trabajo debido a que permite fundamentar la problemática propuesta desde el enfoque de la EMR, además, permite conocer y entender algunos aspectos acerca de este enfoque. En cuanto al diseño de las situaciones, esta investigación permite fundamentarlas y reconocer algunos contextos en los cuales se es pertinente trabajar este enfoque, debido a que este presenta mejores perspectivas en el proceso de aprendizaje matemático de los estudiantes.

De igual manera, se presenta la investigación llevada a cabo por Cetina (2015), denominada: *Proceso de matematización de situaciones de variación en el marco de la función cuadrática. Un estudio de caso en bachillerato*. En esta se discuten los efectos de un estudio que se enfoca en indagar el proceso de *matematización* alcanzado por estudiantes de bachillerato al momento de modelar situaciones de variación con contextos realistas en el cuadro de la función cuadrática. El propósito de realizar este trabajo es que promueve no solo las competencias de modelar, sino también como el aprendizaje de la función cuadrática en un ambiente escolar, es mediante la modelación matemática vista como un proceso de *matematización* de la realidad o de la matemática misma.

Esta investigación se presenta en el enfoque de la Educación Matemática Realista, donde se considera a las matemáticas como una actividad humana, en la cual los estudiantes deben aprenderlas a través de la actividad de organizar la disciplina desde la realidad o de la matemática misma, conocido este proceso como *matematización*. Además de esto, se logra aceptar que los estudiantes se mueven por diferentes niveles de compresión, tomando como punto de partida una matemática informal relacionada con el contexto hasta llegar a una matemática más formal. Esta investigación se realizó bajo el método de investigación de un estudio de casos, con el motivo de poder organizar y reportar información acerca de la actividad matemática que un grupo de 15 estudiantes hizo al matematizar situaciones de variación con contexto realista relativas a la función cuadrática.

En resumen, se llega a obtener que el proceso de matematización, se desarrolla de manera progresiva, tomando como punto de partida los contextos realistas de las situaciones de variación hasta lograr reconocer ciertas características y representaciones referidas a la

función cuadrática. El conocimiento matemático informal en la actividad de los estudiantes, se consideró como aquel conocimiento previo que les sirvió de apoyo para establecer relaciones matemáticas con los datos que los estudiantes conocían y los que desconocían del contexto de la situación. Y el conocimiento matemático formal, estuvo asociado con las características y representaciones matemáticas que dieron cuenta del concepto función cuadrática.

Esta investigación es relevante en este trabajo puesto que proporciona algunos elementos a la problemática de este trabajo, partiendo de una matemática informal relacionada con el contexto hasta llegar a una matemática más formal. Además de ello, muestra cómo trabajar este enfoque cuando se toma un estudio de casos como método de investigación, y permite fundamentar y conocer algunos contextos adecuados para diseñar situaciones direccionaladas bajo el enfoque de la EMR.

Estas dos investigaciones aportan elementos pertinentes para la construcción de la problemática, conocer y entender aspectos relacionados con el enfoque de la EMR, además estas investigaciones permiten fundamentar el diseño de situaciones partiendo de contextos cotidianos para que los estudiantes logren comprender de una mejor manera los conceptos de área y perímetro.

CAPÍTULO II. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

2.1 Referente Didáctico

2.1.1 La Educación Matemática Realista (EMR)

La Educación Matemática Realista (EMR) reconoce como fundador al Dr. Hans Freudenthal (1905-1990), matemático nacido en Holanda quien se interesó por temas relevantes como lo son la filosofía, la literatura, entre otros. Sin embargo, Freudenthal también mostró gran interés en la educación matemática, quien llegó a pensar las matemáticas como una actividad humana, es de aquí donde nace uno de los fundamentos de la EMR, puesto que en esta se considera que la enseñanza de las matemáticas debe estar en completa relación con la realidad de los estudiantes, es decir, que la realidad pueda ser organizada por modelos matemáticos a lo que Freudenthal denominaría matematizar.

Desde esta perspectiva, la EMR tiene como idea central tratar de superar la ruptura que se da entre los conocimientos formales de la matemática y los conocimientos informales que poseen los estudiantes, mediante el uso de situaciones o ambientes cercanos a la vida diaria que promuevan los procesos de *matematización progresiva*, a través de procedimientos que les permitan a los estudiantes reinventar las matemáticas formales.

De igual manera, esta teoría se fundamenta específicamente sobre tres ideas trascendentales las cuales son:

1. Pensar la matemática como una actividad humana, de modo tal que debe existir una matemática para todos.
2. Aceptar que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles donde los contextos y los modelos poseen un papel relevante y que ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado reinención guiada en un ambiente de heterogeneidad cognitiva.

3. Desde el punto de vista curricular, la reinención guiada de la matemática en tanto actividad de matematización requiere de la fenomenología didáctica como metodología de la investigación, esto es, la búsqueda de contextos y situaciones que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente, siendo las dos fuentes principales de esta búsqueda la historia de la matemática y las invenciones y producciones matemáticas espontáneas de los estudiantes. (Bressan, 2005, p.2)

La EMR presenta seis principios básicos que subyacen a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los principios de *Realidad*, *Reinvención* e *Interconexión* se encuentran directamente relacionados con el aprendizaje y los principios de *Actividad*, *Niveles* e *Interacción* se encuentran asociados con la enseñanza. A continuación se describen con detalle cada uno de estos principios, tomando como referentes los aportes de Bressan (1973) y Bressan, et al, (2005).

2.1.1.1 Principio de Actividad

En este principio se resalta la importancia de la actividad de *matematizar* (hacer matemáticas) por encima de su producto terminado, dado que si se logra interactuar con las matemáticas en situaciones donde estas le dan sentido u organiza el mundo real, las mismas tendrán un gran valor educativo. No obstante, para que la actividad de *matematizar* sea fructífera deben existir situaciones que permitan o posibiliten espacios para la construcción de estrategias, propiedades, conjeturas y la utilización de herramientas matemáticas para su desarrollo.

2.1.1.2 Principio de Realidad

La EMR reconoce la relevancia de la realidad en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, ya que si la actividad de matematizar permite la interacción de las matemáticas en situaciones de la vida real, es necesario que el aprendizaje de las mismas se dé en dicha realidad.

Ahora bien, se hace indispensable aclarar lo que en la EMR se entiende por realidad, a lo que Freudenthal (citado por Bressan, 2005) dice: Yo prefiero aplicar el término “realidad” a lo que la experiencia del sentido común toma como real en un cierto escenario, entonces, para que algunas situaciones sean concebidas como reales, es necesario que estas sean lógicas, imaginables y coherentes con las experiencias del individuo. En consecuencia, de la realidad se pueden desprender o desligar los contextos, estos son situaciones derivadas de la realidad con algunos elementos no reales que permiten orientar dichas situaciones hacia un objetivo específico, Dekker & Elshout-Mohr (citado por Bressan, 2016) mencionan que existen distintos tipos de contextos: reales, artificiales (fantasía), matemáticos o virtuales.

Dentro de este marco de ideas, se pretende que el aprendizaje de las matemáticas se dé por medio de la resolución de problemas contextualizados, de tal manera que estos le permitan al estudiante desarrollar estrategias que posibiliten la solución de los mismos. Cabe aclarar, que no se debe limitar la enseñanza de las matemáticas a situaciones de la vida diaria, dado que lo que se busca es que los estudiantes a partir de estas situaciones puedan identificar el contenido matemático pero, para esto es necesario que los estudiantes conciban modelos que les permitan organizar las situaciones que a estos se le presentan.

Visto desde esta perspectiva, los estudiantes llegan a construir o concebir modelos de las situaciones puestas en juego buscando generalizar sus procedimientos, esto es posible dado que “los modelos en la EMR no sólo son pensados como representaciones sino también como objetos de trabajo y reflexión en sí mismos, sobre los cuales se realizan acciones y operaciones y se visualizan, explican, comparan, contrastan, comprueban relaciones” (Bressan, 2016, p.4).

2.1.1.3 Principio de Reinvención

En la EMR el papel del profesor es de gran relevancia, este es el encargado de guiar las distintas interacciones que se dan en el aula de clases, en especial las interacciones que se dan entre los estudiantes y las situaciones problemas que a estos se le plantean. Dentro de esta teoría, la enseñanza de las matemáticas es entendida como un proceso denominado por Freudenthal como reinvención guiada, en la cual el profesor debe guiar a los estudiantes para que puedan reinventar las matemáticas de su sentido común en matemáticas formales, partiendo de una previa organización de las situaciones problemas en modelos que les permitirán realizar el paso de lo informal a lo formal.

Para que sea posible lo anterior, es necesario entender que “la educación matemática debe dar a los alumnos la oportunidad guiada por el maestro de reinventar la matemática (no crean, ni descubren, sino que reinventan modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas con un proceso similar a los que usan los matemáticos al momento de inventarlas)” (Bressan, 2005, p.5), y para esto, el profesor hace que sus estudiantes se cuestionen sobre las posibles soluciones a las distintas situaciones.

2.1.1.4 Principio de Niveles

El proceso de *matematización* es el paso que se da del conocimiento informal hacia el conocimiento formal, pero durante ese camino, el estudiante llega a un conocimiento preformal, dado que se inicia a trabajar con temáticas en situaciones de la vida real con el fin de lograr identificar los contenidos matemáticos para luego trabajar sobre estos hasta llegar a una posible comprensión.

El procedimiento descrito anteriormente es una forma amplia de ver el proceso de matematización, dado que dentro de esta teoría, la comprensión de un objeto matemático no se da de manera directa, este pasa por distintos niveles los cuales Freudenthal

denomina como: Situacional, Referencial, General y Formal, estando estos niveles correlacionados.

El Nivel Situacional se encuentra enmarcado al uso del sentido común y experiencias para el desarrollo de estrategia que permitan desarrollar la situación problema que se les proponga. En este nivel los estudiantes deben utilizar sus conocimientos informales para lograr identificar el contenido matemático que se encuentra inmerso dentro del contexto que se les presenta.

En el Nivel Referencial surgen los modelos (gráficas, tablas, notaciones), propiedades y conceptos personales que permiten sintetizar o esquematizar la situación inicial.

El Nivel General como su nombre lo indica es la generalización de los modelos, propiedades y conceptos que se desarrollan en el nivel referencial, esto se da a partir de la reflexión y exploración de los mismos, es en este punto donde se focalizan en lo matemático por fuera del contexto posibilitando la utilidad de sus procedimientos en situaciones homólogas a la presentada.

El Nivel Formal se encuentra relacionado con la comprensión y la utilidad que se le da a los conceptos, notaciones y procedimientos propios de las matemáticas con las que se está trabajando.

Los niveles descritos anteriormente son dinámicos, lo cual permite que un estudiante trabaje en los distintos *Niveles de Matematización*, diversos conceptos o aspectos de un mismo concepto. Sin embargo, estos no solo describen lo que el estudiante puede hacer en cada uno de ellos, sino también posibilitan el seguimiento global de sus aprendizajes.

Este proceso de *Matematización* fue profundizado por Treffers (1987) y retomado por Freudenthal (1991) bajo dos formas:

- **Matematización Horizontal**, que consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación, la experimentación inductiva (Nivel Situacional).
- **Matematización Vertical**, ya dentro de la matemática misma, que conlleva estrategias de reflexión, esquematización, generalización, prueba, simbolización y rigorización (limitando interpretaciones y validez), con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática (Nivel Referencial, General y Formal).

Para concluir, se presenta en la (*Figura 1*) un resumen del proceso de *Matematización*, donde el pasaje de cada nivel es favorecido por los logros alcanzados en el nivel anterior:

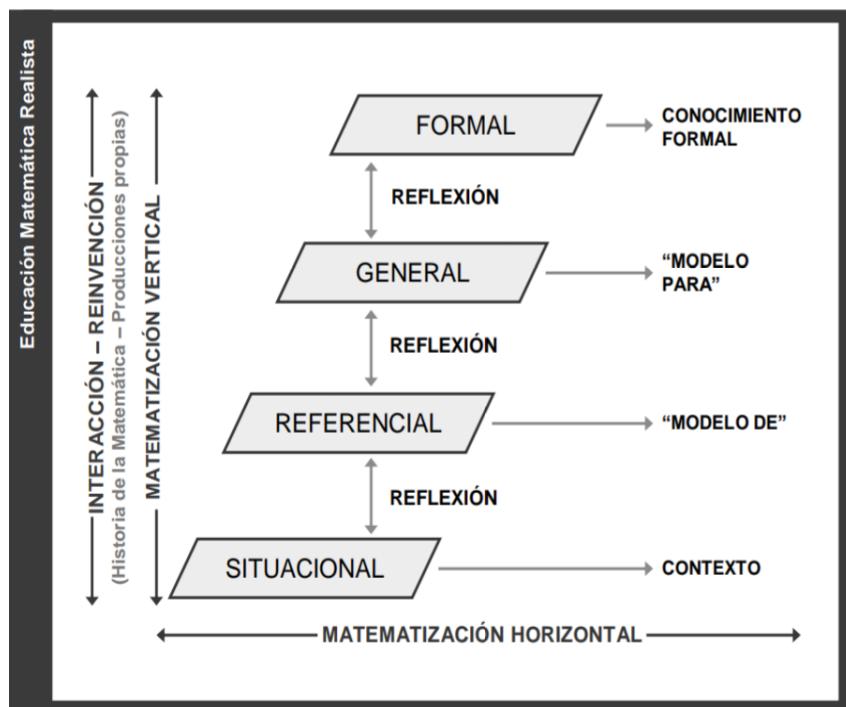


Figura 1. Niveles de Matematización (Tomado de Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower, 2016, p. 7).

2.1.1.5 Principio de Interacción

Las interacciones sociales juegan un papel relevante dentro de la EMR, dado que en esta teoría el aprendizaje de las matemáticas es considerado una interacción social. Se destacan las interacciones que se puedan generar durante el proceso de aprendizaje (discusiones sobre interpretaciones de la situación problema, procedimientos, posibles soluciones, justificaciones, etc.) porque estas conllevan al estudiante a reflexionar, permitiendo que se capaciten y lleven a niveles de comprensión más altos. En el aula de clase el aprendizaje no es homogéneo, puesto que todos los individuos buscan alternativas propias para dar solución a situaciones problemas que se les presenten, sin embargo, “esto no lleva a partir la clase en grupos con procesos similares, sino más bien a mantener la clase general junta como una unidad de organización o al trabajo cooperativo en grupos heterogéneos, lo que fue defendido por Freudenthal desde los años 45” (citado por Bressan, 2016). Los problemas seleccionados deben dar lugar a soluciones pensadas en distintos nivel de comprensión, de tal manera que todos los estudiantes puedan trabajar en ellos.

2.1.1.6 Principio de Interconexión (Estructuración)

En la resolución de problemas, a menudo se exige la utilización o aplicación de herramientas matemáticas y un amplio rango de comprensiones. La EMR al no hacer una profunda distinción entre los ejes curriculares permite que haya una mayor coherencia en la enseñanza y hace posible diversos modelos de matematizar bajo distintos modelos y lenguajes, permitiendo alcanzar una alta coherencia a través del currículo.

2.2 Referente Matemático

El propósito que enmarca el siguiente referente matemático es poder reconocer algunas características de los conceptos de área y perímetro que resultan ser relevantes para la comprensión de los mismos, para ello, se hace indispensable aclarar algunos términos que se encuentran en estrecha relación con los conceptos que se abordan en este trabajo de investigación.

De esta manera, se considera el término magnitud como una cualidad que poseen algunos objetos, y el término medida como un contraste entre un objeto y el tomado como unidad. La actividad de medir superficies consiste básicamente en la comparación entre una unidad de medida fija y la cantidad que se desea ser medida.

En este apartado no se pretende dar definiciones de todos los términos que serán empleados en esta investigación, sino que se tendrán en cuenta algunas nominaciones planteadas por D'Amore y Fandiño (2009), puesto que se menciona que “no todo es definible en cuanto que, para definir algo, se debe dar ya por descontado el conocimiento de elementos precedentes de los cuales partir” (P, 8)

2.2.1 Tratamiento del área desde esta investigación

El **área** se mide en unidades cuadradas como cm^2 , es decir, es un número real acompañado de una unidad de medida, teniendo en cuenta que es una medida bidimensional. Es decir, cuando se habla de un plano, se alude a una superficie bidimensional infinita. A una determinada zona cerrada o demarcada del plano, la cual se denomina **región**. Ahora bien, se llama **área del polígono** a la medida de la parte interna del mismo, la cual recibe el nombre de **superficie poligonal**.

Área de figuras elementales¹

- Área del Rectángulo

Si tenemos un rectángulo cuyos lados consecutivos miden a y b , entonces su área mide a^*b o $a.b$ (con su oportuna unidad de medida). El hecho no es complejo, si se piensa en b cuadraditos unitarios tomados a veces. Las medidas lineales a y b de los lados consecutivos se expresan en “medida unitaria del lado del cuadrito”; la medida de la superficie del rectángulo ($a.b$) se expresa en una unidad donde cada una es una “medida unitaria del cuadrito entendido como superficie”.

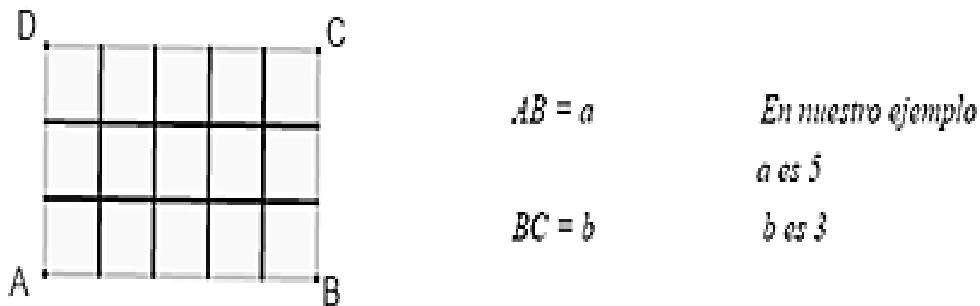


Figura 2. Área del Rectángulo.

La escritura a^*b o $a.b$ es la medida del área del rectángulo independiente del campo numérico al cual pertenecen los números a y b .

Cuando se tiene la fórmula para encontrar el área del rectángulo, que intuitivamente se entiende y se acepta, todo el resto es consecuencia de ésta.

- Área del Cuadrado

En el caso del cuadrado, a y b son iguales y por lo tanto el área del cuadrado es a^2 .

¹Todas las descripciones utilizadas para dar claridad a los conceptos de área y perímetro son tomadas de Fandiño, M. y D'Amore, B. (2009). Área y Perímetro Aspectos conceptuales y didácticos.

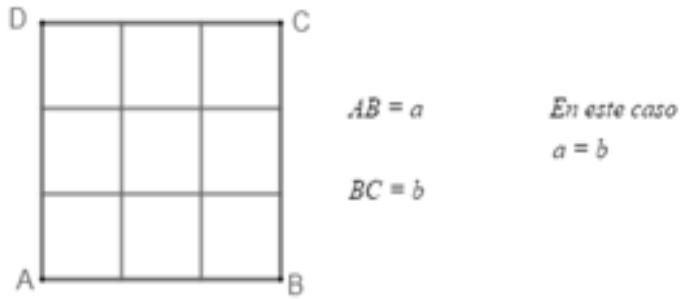


Figura 3. Área del Cuadrado.

- **Área del Triángulo.**

La superficie del triángulo ABC es la mitad de aquella del rectángulo que tiene como medidas los segmentos, AB y CH, es decir, la medida de la altura relativa al lado AB; por tanto, considerando el rectángulo tenemos que:

$$A\Delta = (\text{longitud del lado } x \text{ medida de la altura relativa}) / 2$$

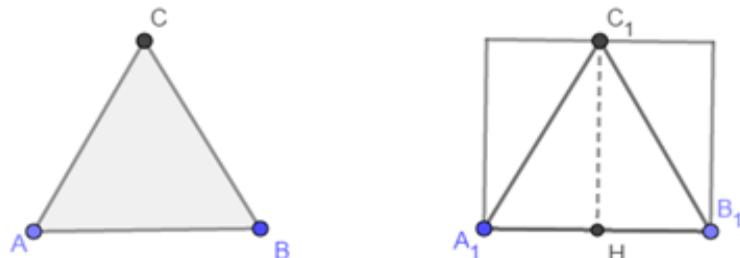


Figura 4. Área del Triángulo.

- **Área del Paralelogramo.**

En el caso del paralelogramo ABCD

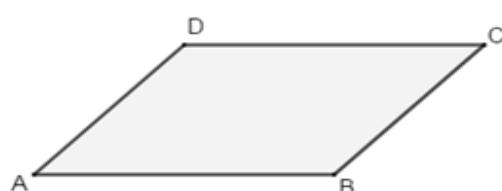


Figura 5. Área del Paralelogramo.

Se “corta” un oportuno triángulo ADH

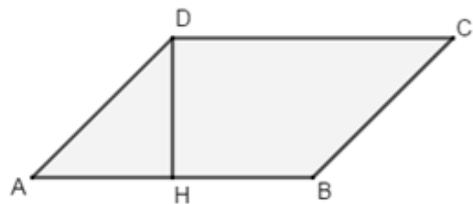


Figura 6. Área del Paralelogramo.

Y se “transporta” a la posición CBK.

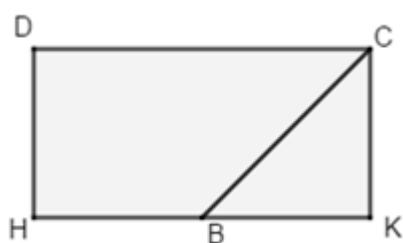


Figura 7. Área del Paralelogramo.

El rectángulo obtenido HKCD tiene superficie igual al paralelogramo de partida ABCD, por tanto, tienen igual área; de esto se deduce que el área del paralelogramo se encuentra multiplicando la medida del lado (base) por la medida de la altura relativa a este.

Dado todo esto, se da por descontado que si dos polígonos son equi-descomponibles, entonces también son equi-extensos.

- **Área de polígonos Regulares.**

La superficie de un polígono regular de n lados está conformada por n triángulos iguales; por tanto, basta con encontrar el área de uno de estos triángulos y después multiplicarlo por n .

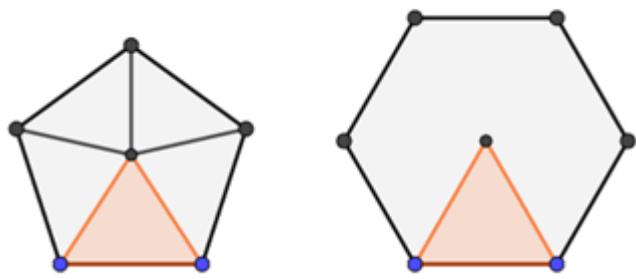


Figura 8. Área de Polígonos Regulares.

En general, para determinar el área de un polígono, basta con descomponerlo en partes conocidas y se mide la superficie de cada una de éstas, para después, sumar todas estas medidas.

2.2.2 Tratamiento del perímetro desde esta investigación

El **perímetro** se mide en unidades lineales como cm. o m. es decir, un número real que expresa la longitud del contorno de una figura, se llama perímetro la medida de dicho contorno o frontera. Esta medida es la suma de la longitud de los lados que lo componen en cuanta línea poligonal. Cabe señalar que las líneas son unidimensionales, en otras palabras, hace referencia a una única dimensión “longitud” cuando se quiere realizar la medición de un segmento de recta.

Ahora bien, las nominaciones descritas dejan en evidencia un gran vacío en cuanto al significado de algunos términos que se encuentran de manera explícita e implícita. Por tanto, para que haya una comprensión de estos conceptos es necesario describir cada uno de estos términos:

- **Segmentos**

Si en una recta orientada r tomamos dos puntos distintos A y B , entonces la recta r se divide en tres partes, por lo general se le reserva el nombre de **segmento AB** al conjunto

de puntos de r comprendidos entre los puntos A y B, haciendo de estos extremos de dicho segmento. El segmento AB tiene una medida lineal que se expresa a través de una medida en alguna determinada unidad de medida.

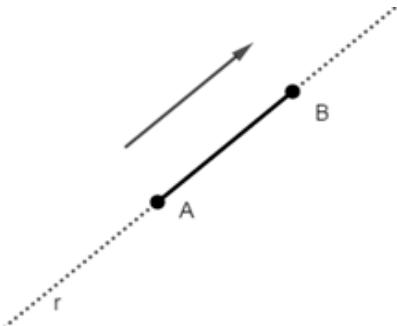


Figura 9. Segmento.

- Segmentos consecutivos y poligonales

Consideremos dos segmentos tales que el primer extremo del segundo segmento coincida con el segundo extremo del primer segmento, de la forma: AB y BC; entonces se AB y BC se dicen consecutivo.

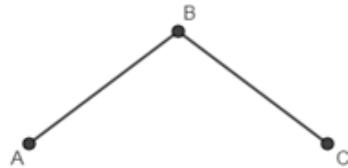


Figura 10. Segmentos consecutivos y poligonales.

Una línea formada por una sucesión de segmentos consecutivos se denomina **poligonal**, si el segundo extremo del último segmento coincide con el primer extremo del primer segmento, la poligonal es considerada cerrada, en caso contrario se dice abierta.

Si en la poligonal cerrada cada segmento-lado tiene en común con otro, sólo el primero y el último punto; en tal caso la poligonal se denomina simple, en caso contrario se dice compleja.

Para el desarrollo de este trabajo investigativo solo se tendrán en consideración las poligonales cerradas y simples.

- **Polígono**

Una poligonal simple cerrada se denomina **polígono** y cada segmento se llama lado, un polígono divide el plano en tres partes, una de estas es el mismo polígono y es lineal, los dos restantes son superficies.

Ahora bien, consideremos dos puntos diferentes en cada una de estas partes y consideremos la recta que pasa por estos:

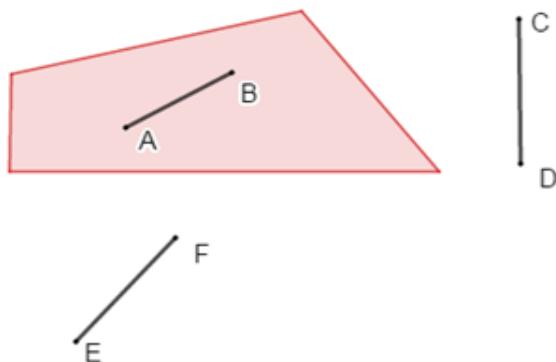


Figura 11. Polígono.

La primera parte del plano se llama “externa” al polígono, como, por ejemplo, la recta que pasa por los puntos C y D o E y F, en algunos casos estas intersecan al polígono, todo depende de cómo se eligieron las parejas de puntos.

La otra parte del plano se llama “interna”, por ejemplo, la recta que une los puntos A y B están tomada en la parte interna del polígono y necesariamente ésta intersecta al mismo.

Esta parte del plano también recibe el nombre de superficie poligonal o en general del polígono.

La línea poligonal cerrada simple que conforma el polígono recibe el nombre de contorno o frontera y la misma (entendida como figura superficial) hace parte del polígono.

2.3 Referente Curricular

Para la construcción de los aspectos curriculares, de acuerdo al planteamiento de la problemática y a los conceptos matemáticos que se pretenden trabajar durante esta investigación, se toman como referencia, los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) y los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998).

Desde la perspectiva de los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), para que haya una completa y coherente adquisición de conocimiento, es preciso establecer la relación temática en los diferentes grados de escolaridad sin dejar de lado el nivel de complejidad que se necesita en cada uno de ellos. De esta manera, se establece una coherencia vertical, dada por la relación existente con los estándares en un mismo pensamiento en los diferentes grados de escolaridad. Y además, una coherencia horizontal que relaciona un estándar con los demás estándares presentados en los distintos pensamientos dentro del mismo grado de escolaridad.

De esta manera, se toma como estándar central, resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos, y se encuentra asociado al pensamiento métrico y sistemas de medidas. El cual, no solo se toma como base para la construcción de la coherencias vertical y horizontal, sino que además, será el estándar central para la elaboración de cada una de las secuencias; además de este, se encuentran algunos otros estándares que también se tendrán en cuenta para la construcción de cada una de las situaciones problemas, tales como:

- Coherencia Vertical

En esta coherencia, para trabajar los conceptos de área y perímetro, los estudiantes deben haber desarrollado algunos estándares en años anteriores, con la intención de garantizar el desarrollo de las competencias, en correspondencia con el proceso de mejora biológica

y psicológica; de acuerdo con lo planteado por el (MEN, 2006) estos estándares (ver

Tabla 1) son:

Ciclos de grados.	Estándares.
Sexto a Séptimo.	<ul style="list-style-type: none">• Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.• Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.
Octavo a Noveno.	<ul style="list-style-type: none">• Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.
Décimo a Once.	<ul style="list-style-type: none">• Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.

Tabla 1. Coherencia Vertical.

Los estándares trazados de sexto a séptimo son utilizados para el desarrollo de competencias que les permitan a los estudiantes alcanzar o desarrollar estándares de grados superiores, como lo es el uso de técnicas e instrumentos o estrategias para abordar situaciones de medición, en este caso, se emplean elementos de la EMR para plantear situaciones con aspectos conceptuales relevantes que posibiliten la comprensión de los mismos.

De manera más general, cada uno de los estándares propuestos en el grado séptimo se encuentra correlacionado con estándares de grados superiores, lo cual destaca la necesidad e importancia de un buen trabajo en dicho grado para el desarrollo de competencias

- **Coherencia Horizontal**

En esta coherencia, al trabajar los conceptos de área y perímetro en el ciclo de sexto a séptimo, los estudiantes potenciarán los siguientes estándares (ver **Tabla 2**) presentes en

los diferentes pensamientos.

Pensamiento.	Estándares.
Espacial y Sistemas Geométricos.	<ul style="list-style-type: none"> Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.
Métrico y sistemas de medidas.	<ul style="list-style-type: none"> Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud. Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.

Tabla 2. Coherencia Horizontal.

Cabe resaltar que los estándares mencionados anteriormente en las coherencias, permiten diseñar y rediseñar cada una de las situaciones propuestas en la investigación, en el sentido que las diferentes preguntas planteadas apuntan o permiten desarrollar alguno de estos estándares, teniendo en cuenta además los diferentes contextos con los que se encuentran familiarizados los estudiantes.

Los Estándares Básicos descritos anteriormente, se encuentran estrechamente relacionados con los Lineamientos Curriculares, en la medida que buscan la superación de visiones que privilegian la simple transmisión y memorización de contenidos para lograr una mejora en la pedagogía que permita comprender los conocimientos y usarlos de manera satisfactoria no solamente dentro de la escuela, sino también en contextos diferentes a este (MEN, 2006).

En la perspectiva de los Lineamientos, se menciona ampliamente la geometría como herramienta básica y fundamental, para interpretar, entender y apreciar el mundo, dicho en otras palabras, la geometría es trascendental en el desarrollo de estrategias para resolución de problemas.

También debe señalarse la relevancia que se le da al aprendizaje matemático en los Lineamientos, dado que este debe posibilitar en los estudiantes la aplicación de sus

conocimientos en ambientes extraescolares, por lo tanto “es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista” (MEN, 1998, p.18).

Dentro de este orden de ideas, los Lineamientos presentan tres grandes componentes que contribuyen en la construcción del currículo de matemáticas, estos componentes son: procesos generales, conocimientos básicos y el contexto (MEN, 1998).

- **Los Procesos Generales**, tratan todo lo relacionado con el aprendizaje, como lo es el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.
- **Los Conocimientos Básicos**, están relacionados con los procesos que ayudan a desarrollar el pensamiento matemático y hacen parte de los sistemas propios de las matemáticas, entre los que se encuentran el pensamiento espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico, el variacional y el numérico; además de sus pertinentes sistemas;
- **El Contexto**, hace referencia a las diferentes situaciones problemáticas en las que se encuentran inmersos los estudiantes, los cuales le permiten a los estudiantes aprender las matemáticas.

Para los intereses de esta investigación, se toman algunos procesos generales que se consideran de suprema importancia para la construcción de las situaciones problemas, debido a que comprende aspectos que constituyen la elaboración de modelos y la generalización. Algunos de estos procesos son:

- **La Resolución y el Planteamiento de Problemas**

De acuerdo con el (MEN, 1998), esta actividad es una de las más importantes en el

proceso de aprender matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático, puesto que al enfrentarse el estudiante con situaciones que impliquen la resolución de problemas, este se va familiarizando en la utilidad de las matemáticas y además de ello, va adquiriendo la capacidad de comunicarse matemáticamente. Algunos aspectos que permite esta actividad son:

- Desarrollo y aplicación de diversas estrategias para resolver problemas.
- Generalización de soluciones y estrategias para nuevas situaciones de problemas.

- **El Razonamiento**

Conforme con lo planteado por el (MEN, 1998), la actividad de razonar hace alusión a la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión. Algunos aspectos que permite la actividad de razonar son:

- Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas. Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.

- **La Comunicación**

En cuanto a esta actividad, permite que los estudiantes relacionen los conocimientos informales e inconscientes, y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas, de esta manera, la comunicación permite aspectos tales como:

- Expresar ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas.
- Comprender, interpretar y evaluar ideas que son presentadas oralmente, por

escrito y en forma visual.

- Hacer observaciones y conjeturas, formular preguntas, y reunir y evaluar información.

- **La Modelación**

Con respecto a Treffers y Goffree (citado por MEN, 1998) definen la actividad de modelar como aquella actividad estructurante y ordenadora, por medio de la cual el conocimiento y las destrezas alcanzadas por los estudiantes se usan para descubrir métodos, relaciones y estructuras desconocidas.

Ahora bien, de acuerdo a los intereses de esta investigación no se pretende hacer énfasis en el proceso de Modelar de manera clara, sino que se toma el proceso de Matematizar el cual se define por el MEN (1998) como: “el proceso desde el problema enunciado matemáticamente hasta las matemáticas” (p. 77).

En síntesis, todo lo propuesto con anterioridad se detalla con la intención de identificar algunos elementos de orden curricular que permitan tener una mejor comprensión acerca de los conceptos de área y perímetro en el grado de escolaridad séptimo. Asimismo, estos referentes se especifican con el fin de ser tenidos en cuenta al momento de diseñar las situaciones problemáticas, que se pretenden abordar en el presente trabajo de investigación.

CAPÍTULO III. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1 Diseño Metodológico

La presente investigación pretende caracterizar los niveles de matematización que se configuran en un grupo de estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Senon Fabio Villegas, del municipio de Villa Rica, Cauca, cuando trabajan con *situaciones* enmarcadas en la EMR, relativas a la relación entre área y perímetro. En concordancia con este objetivo de investigación una aproximación metodológica de corte cualitativo se hace pertinente al considerar la recolección de datos descriptivos, puesto que permite estudiar la naturaleza profunda de los fenómenos, la estructura dinámica de estos, y posibilita la explicación detallada de los comportamientos y manifestaciones que ocurren dentro de dichos fenómenos. De esta manera, Sampieri (2006), resalta que uno de los principales aportes de este tipo de investigación es que “proporciona profundidad a los datos, dispersión, riqueza interpretativa, contextualización del ambiente o entorno, detalles y experiencias únicas. También aporta un punto de vista "fresco, natural y holístico" de los fenómenos, así como flexibilidad” (p.21).

Este tipo de investigación se hace oportuna para el estudio de ciertos fenómenos que inciden dentro del *proceso de matematización*, debido a que “se fundamenta en una perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento del significado de las acciones de seres vivos, principalmente los humanos y sus instituciones” (Sampieri, 2006, p.9). Por tal motivo, la misma se realiza bajo la modalidad de estudios de casos, la cual Tamayo (2004) caracteriza como “el estudio en profundidad de la unidad de observación, donde se tiene en cuenta las características y comportamientos de dicha unidad, mencionando que los resultados que se obtienen de esta son difícilmente generalizados” (p.51).

De igual manera, para el desarrollo metodológico se consideran algunos aspectos que el enfoque de la EMR proporciona. Por ejemplo, este enfoque brinda elementos que

permiten realizar la selección de los estudiantes que intervendrán en la investigación, así como también pautas para el trabajo en grupos y la planeación de las situaciones problemas

3.2 Diseño del estudio de Casos

El presente trabajo investigativo se dirige bajo una perspectiva metodológica de estudio de casos, se concibe este método de investigación de acuerdo a como lo plantea Tamayo (2004), el cual afirma que “este tipo de investigaciones es apropiado en situaciones en las que se desea estudiar intensivamente características básicas, la situación actual, e interacciones con el medio de una o unas pocas unidades tales como individuos, grupos, instituciones o comunidades” (p. 51).

En este sentido, se hace necesario presentar algunas características planteadas por Tamayo (2004) que se consideran importantes en este método de investigación:

- El estudio a profundidad de una unidad de observación, teniendo en cuenta características y procesos específicos o el comportamiento total de esa unidad en su ciclo de vida total o un segmento de ella.
- Son particularmente útiles para obtener información básica para planear investigaciones más amplias, pues, debido a lo intensivo de la indagación, arrojan luz sobre importantes variables, interacciones y procesos que merecen ser investigados más extensivamente.

Asimismo, se considera que el estudio de casos se logra dividir en tres tipologías, de acuerdo con Morra y Friedlander (2001) estos pueden ser:

- **Explicativos**, este estudio de casos tiene como fundamento central manifestar las relaciones entre los componentes de un programa.
- **Descriptivos**, a diferencia del anterior este estudio de casos es más orientado y tiene como finalidad añadir realismo y ejemplos de fondo al resto de la información acerca de un programa o proyecto.

- **Metodología Combinada**, este tipo de estudio tiene como propósito congregar hallazgos de diversos estudios de caso para dar respuesta a interrogantes de algún tipo de evaluación ya sea descriptiva, normativa o de causa y efecto.

De acuerdo con los intereses de la presente investigación, se toma el estudio de casos descriptivo como el método adecuado para llevar a cabo dicho objetivo, puesto que una de las finalidades de esta investigación es indagar acerca de las interpretaciones con relación a la actividad matemática llevada a cabo por los estudiantes de la institución cuando se enfrentan a *Situaciones Realistas*.

3.2.1 Contexto y Población de estudio

La presente investigación se desarrolla en la Institución Educativa Senor Fabio Villegas ubicada en el municipio de Villa Rica Cauca, perteneciente al sector público, la cual ofrece a la comunidad Villarricense Educación Primaria, Secundaria y Media, con énfasis o perfil técnico agropecuario y comercial.

La Institución Educativa cuenta con terrenos destinados para la agricultura y el comercio, los cuales les permiten fortalecer las habilidades agropecuarias y comerciales de sus estudiantes. En estos espacios los profesores plantean actividades con el fin de potencializar la parte práctica y cultural de la Institución Educativa.

Sin duda, estos espacios resultan ser apropiados para trabajar las relaciones entre los conceptos de área y perímetro teniendo en cuenta el enfoque propuesto por la EMR. Para ello se tuvo en cuenta la participación de doce (12) estudiantes del grado séptimo, los cuales, fueron sugeridos por el profesor que orienta el área de matemáticas en los distintos grados séptimos de la institución educativa, además el profesor tuvo en cuenta que los

estudiantes que fueran elegidos debían estar familiarizados con los conceptos de área y perímetro.

Ahora bien, en la primera y segunda situación los doce estudiantes estarán organizados en parejas, y cada una de las seis parejas tendrán el nombre de P1, P2, P3, P4, P5, y P6, todo esto con el fin de poder distinguir las diferentes producciones de las parejas y además para proteger las identidades de los estudiantes. En cuanto a la tercera situación, por motivos del material didáctico los estudiantes se organizan en grupos de cuatro personas, en los que las parejas P1 y P2 se fusionan dando origen al grupo G1, de igual manera sucede con las parejas P3 y P4 dando origen al grupo G2, y también las parejas P5 y P6 serán el grupo G3.

3.2.2 Los Instrumentos para la recolección de la información

Si bien es cierto, lo que se busca en este estudio de casos es obtener información del contexto y de los participantes de la investigación, es por ello que se deben tener en cuenta los distintos factores que inciden dentro del proceso investigativo, los cuales permitirán describir, analizar y caracterizar los niveles de matematización que logran alcanzar algunos estudiantes. El método descriptivo adoptado en este trabajo, permite la utilización de algunos instrumentos tales como: grabaciones de video, entrevistas y producciones escritas; que permitan la recolección de datos de las diferentes situaciones que serán presentadas a los estudiantes.

- Las **producciones escritas** son las respuestas que proporcionan los participantes a cada una de las preguntas que se les plantean en las diversas situaciones, estas permiten evidenciar los procedimientos y modelos utilizados en el proceso de *matematización* de cada uno de los estudiantes. Además, este instrumento es

pertinente para determinar los conocimientos formales e informales empleados en dicho proceso.

- Las **grabaciones de video** sirven de soporte para el análisis de las producciones escritas, dado que en estas se pueden apreciar los diversos métodos y herramientas empleadas para la resolución de cada una de las situaciones problemas, como también las interacciones que se pueden generar entre estudiantes-estudiantes, estudiantes-profesor, y las argumentaciones que presentan los estudiantes al momento de resolver las situaciones.
- Con las **entrevistas** se logra obtener toda aquella información que no se alcanza a conseguir por medio de la observación. Además, a través de este instrumento podemos profundizar y conocer no solamente sus ideas, sino también sus creencias y conocimientos.

En resumen, cada uno de estos instrumentos permite registrar de manera detallada las diferentes estrategias empleadas por los estudiantes, proporcionando elementos relevantes para el análisis de sus producciones, de modo que posibilite la caracterización de cada uno de los niveles dentro del proceso de *Matematización*.

3.3 Momentos de Intervención

En este apartado, se pretende dar a conocer algunos elementos que se tendrán en cuenta en el transcurso y la puesta en acto de las situaciones problemas. De igual manera, se muestran diferentes momentos donde se generan espacios para discusiones entre estudiantes y profesor.

Ahora bien, durante la puesta en acto los estudiantes se enfrentarán a tres situaciones, donde algunas situaciones cuentan con una o dos tareas, a las que el estudiante tiene que dar respuesta. Debido a que se presentan tres situaciones, se estima que la puesta en acto se realice en tres sesiones de una hora con treinta minutos cada una. Además, cabe señalar que al finalizar cada una de situaciones, se pretende socializar los diferentes resultados obtenidos, el cual tendrá un espacio de treinta minutos (tal como se ve en la **tabla 3**).

Sesión.	Situación.	Duración.	Fecha de aplicación.
Primera.	Uno. “La cosecha de Ana y su familia”	2 horas	19 de Marzo del 2018.
Segunda.	Dos, “El banquete para los profesores”	2 horas	20 de Marzo del 2018.
Tercera.	Tres. “El canje de terrenos”	2 horas	21 de Marzo del 2018.

Tabla 3. Cronograma de la Puesta en Acto.

Para concluir, la función del profesor en la puesta en acto de las diferentes situaciones, es la de acompañar a los estudiantes e intervenir durante la ejecución de la misma; además el profesor es el encargado de llevar a cabo las diferentes socializaciones que se presenten durante las diversas sesiones.

3.4 Fundamentación Teórica de las Situaciones

Uno de los componentes más importantes que presenta en el enfoque de la EMR de acuerdo con Bressan (2016), se centra en la idea de que el proceso de enseñanza de la matemática no solo debe estar relacionado con la realidad, sino también que este proceso debe permanecer cercano a los estudiantes y ser relevante para la sociedad.

De esta manera, se consideran a los estudiantes como los participantes activos dentro de estos espacios, puesto que estos son los encargados de mantener el espacio en óptimas condiciones para el buen uso del mismo. Es por esta razón que se toman aspectos relevantes en cuanto a los fenómenos presentes en dicho espacio para el diseño de las situaciones, con el fin de plantear situaciones que se encuentren acordes a los contextos de cada uno de ellos, dado que en la EMR propone abordar situaciones imaginables para los estudiantes.

Ahora bien, para el diseño de las situaciones 1, 2 y 3, se toma como punto de partida la idea que se presenta en la EMR, en la que se menciona que se debe partir de contextos y situaciones problemáticas realistas, en el sentido de que estos permitan a los estudiantes representar, razonar, e imaginar, como creadores de su actividad matematizadora, al respecto Freudenthal (citado por Bressan, 2005) afirma que:

En gran parte la matemática surge históricamente como herramienta para matematizar situaciones del entorno natural y social, su enseñanza debe basarse también en la organización de este tipo de situaciones. Esto no significa restringirse a fenómenos del mundo real (perceptual), dado que esto limitaría las oportunidades para que los estudiantes aprendan a operar dentro de la matemática misma. Se trata que los estudiantes, quienes al principio no poseen herramientas matemáticas suficientes, las reinventen a partir de abordar problemas presentados en contextos y situaciones realistas.

(p. 3)

De esta manera, se considera importante partir de *situaciones realistas* para que los estudiantes puedan imaginar y razonar dentro de sus conocimientos informales. Además, les proporciona a los estudiantes la oportunidad de desarrollar habilidades y destrezas que les permitirá vincular sus conocimientos informales a sus conocimientos formales. Por ello, el diseño de las situaciones debe sustentarse desde la fenomenología didáctica de los conceptos matemáticos, así como también de su historia.

Asimismo, Freudenthal (citado por Bressan, 2005), considera la fenomenología didáctica como:

Un método que consiste en investigar primero las diversas manifestaciones y usos de un determinado concepto matemático en la realidad, por ejemplo: las fracciones, las razones, las funciones, las proporciones, los ángulos, como fenómenos en la vida real, considerando sus referencias en el lenguaje cotidiano (lo que decimos cuando hablamos de razones, fracciones, funciones, etc.) y a partir de esto, construir la didáctica de ese tema. (p. 5)

De este modo, de acuerdo a los intereses de esta investigación, se presenta un análisis fenomenológico de los conceptos de área y perímetro que permitan fundamentar las situaciones problemas.

Análisis fenomenológico de los conceptos de Área y Perímetro

En la EMR el análisis fenomenológico didáctico es entendido como la búsqueda de *contextos o situaciones* que generan la necesidad de ser organizados matemáticamente, es decir, es el estudio de los fenómenos que en la historia y actualidad se han mostrado con la necesidad de ser organizados matemáticamente (Cetina, 2015).

De hecho, el análisis fenomenológico didáctico se orienta a la adquisición de todo lo que resulta necesario para la organización en materia de enseñanza y aprendizaje de los

conceptos (Rico, 1997). En efecto, el presente análisis tiene como propósito identificar algunos elementos o fenómenos que fueron y son de relevancia para la construcción de los conceptos de área y perímetro dentro del proceso aprendizaje.

Con relación a lo anterior, algunas investigaciones durante el proceso aprendizaje han hecho uso de ciertos *contextos* los cuales se encuentran estrechamente relacionados con la historia de los conceptos de área y perímetro, un caso particular es el de Molina et al. (2014) donde plantean problemas con respecto a la agricultura del café, fenómenos semejantes a los que se enfrentaron los babilonios, egipcios, griegos, entre otros. Estos problemas de agrimensura no se encuentran alejados de la cotidianidad de la población de estudio haciendo de este un contexto pertinente para la presente investigación.

Como se mencionó anteriormente, estos conceptos se encuentran estrechamente relacionados con muchos aspectos de la vida cotidiana, en esta dirección Chamorro, (1995) en su investigación presenta situaciones problemas referidas a la vida cotidiana alejadas del cálculo especulativo, además en estos contextos, los estudiantes deben recurrir a la transformación o modificación de superficies posibilitando la comparación de figuras equi-extensas e isoperimétricas, lo cual es la problemática trabajada en la presente investigación.

Por otro lado, Roldán y Rendón (2014) en su investigación hace uso del contexto matemático para el estudio del área y perímetro de figuras planas, apoyándose en el trabajo colaborativo, puesto que los estudiantes presentan dificultades para la identificación de la bidimensionalidad de las superficies y carecen de estrategias para efectuar medidas de objetos.

Es de observar que en cada una de estas investigaciones se resalta el contexto abordado durante el proceso educativo, no obstante, estas investigaciones presentan posturas

diferentes de los cuales se pueden extraer elementos fenomenológicos importantes para el aprendizaje de los conceptos de área y perímetro.

3.5 Las Situaciones

La presente secuencia se encuentra conformada por un conjunto de situaciones que se dirigen bajo el enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR), además, dichas situaciones han sido diseñadas teniendo en cuenta la articulación de diferentes referentes conceptuales, entre estos se encuentran, la propuesta del Ministerio de Educación Nacional a través de los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998); también se tiene en cuenta el referente Matemático y fenomenológico. Cabe señalar que todas las situaciones planteadas apuntan a dar respuesta al objetivo central de esta investigación, por esta razón la secuencia estará dividida en tres situaciones las cuales son:

- Situación Uno. La cosecha de Ana y su familia.
- Situación Dos. El banquete de bienvenida para los profesores.
- Situación Tres. El canje de terrenos.

En la primera sesión, se presenta la situación uno “La cosecha de Ana y su familia”, se exhibe con el fin de introducir a los estudiantes hacia la relación de los conceptos de área y perímetro en un ambiente a lápiz y papel, además, se diseña para que los estudiantes logren deducir propiedades de estos dos conceptos. Todo esto se lleva a cabo a través de situaciones problemáticas no ajena a la realidad del estudiante; al final de esta sesión, se pretende socializar las diferentes respuestas con el objetivo de afianzar algunas propiedades de la relación de los conceptos de área y perímetro.

Seguidamente, en las sesiones dos y tres se presentan las situaciones “El banquete para los profesores” y “El canje de terrenos”, con la intención de que los estudiantes logren afianzar y “superar” algunas de las creencias erradas que se presentan cuando tratan de

relacionar los conceptos de área y perímetro, para ello, se pretende abordar situaciones cercanas al entorno de los estudiantes y se pretende que los estudiantes puedan manipular los diferentes materiales de trabajo. Al igual que en la sesión anterior, en estas sesiones se pretende llevar a cabo una socialización con los diferentes grupos estudiantes.

3.5.1 Situación Uno. La cosecha de Ana y su familia

Objetivo de la situación: Esta situación tiene como objetivo que los estudiantes logren construir modelos de figuras iso-perimétricas y no equi-extensas (Tarea 1) o figuras equi-extensas y no iso-perimétricas (Tarea 2).

Recursos: Esta situación pretende ser realizada en un ambiente de lápiz y papel, en la cual se hará entrega de una hoja del estudiante con su respectiva hoja para plasmar las respuestas.

Situación: Ana y su familia han comprado un terreno para dedicarse a la agricultura, este cuenta con treinta metros (30 m.) de largo y veinte metros (20 m.) de ancho. La familia quiere que este espacio tenga una gran variedad de frutos, por tal motivo se hace necesario que cada uno de los integrantes de la familia se hagan cargo de la siembra de algún fruto.

Tarea Uno

Ana quiere sembrar mangos en algún espacio del terreno familiar, para ello cuenta con 16 m. de malla que su padre le ha dado para demarcar el terreno que desea usar. Además, uno de sus tíos le ha sugerido que el terreno cuente con una dimensión de 2 m. de ancho y 6 m. de largo tal como se muestra en la *Figura 12*, sin embargo, Ana cree que podría tener mucho más área si su diseño fuera diferente.

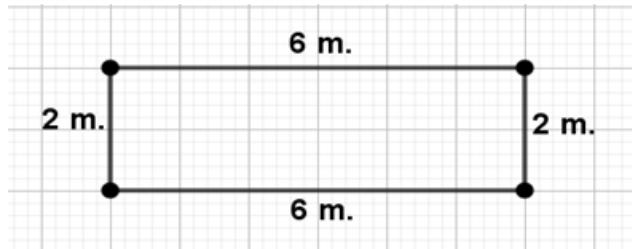


Figura 12. Tarea uno, Situación Uno.

- a) El padre de Ana afirma que el terreno siempre tendrá la misma área porque cuenta con la misma cantidad de malla ¿Es correcta la afirmación del padre de Ana? ¿Por qué?

Propósito: Acercar al estudiante a la creación de modelos de figuras iso-perimétricas, no equi-extensas.

- b) ¿Cuáles podrían ser los posibles diseños que usaría Ana con dicha cantidad de malla para que el área del terreno sea distinto y qué espacio ocupan los mismos?

Propósito: Crear diferentes modelos teniendo en cuenta que el perímetro de las figura será igual siempre con relación a su área.

- c) ¿Cuál crees que es la forma que debe tener el terreno, para que el área del cultivo sea la más grande? ¿por qué?

Propósito: Generalizar algunas de las propiedades del perímetro con relación al área al momento de diseñar los modelos.

Tarea Dos

Una vez Ana ha demarcado el lugar destinado para la siembra del mango, ella se da cuenta que su padre ha delimitado un espacio de treinta y seis metros cuadrados (36 m^2) para el cultivo de papaya (**ver Figura 13**), Ana le afirma a su padre que puede modificar el diseño del terreno conservando la misma área para dicho cultivo.

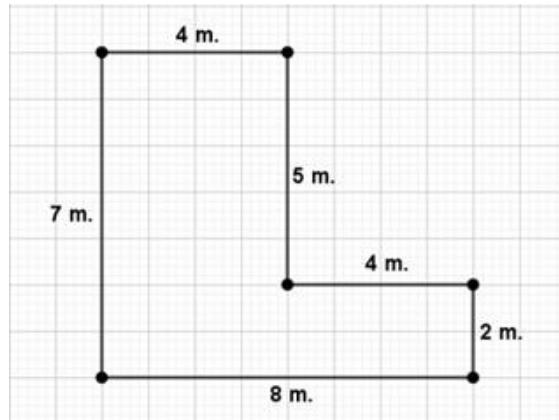


Figura 13. Tarea Dos, Situación Uno.

- a) ¿Crees que Ana tiene razón al afirmar que puede modificar el diseño del terreno conservando la misma área? ¿Por qué?

Propósito: Acercar al estudiante a la creación de modelos de figuras equi-extensas, no iso-perimétricas.

- b) ¿Cuáles podrían ser los posibles diseños que usaría Ana para que dicho terreno conserve la misma área?

Propósito: Crear diferentes modelos teniendo en cuenta que el área de las figuras será siempre igual con relación a su perímetro.

- c) ¿Cuál es la mínima y máxima cantidad de malla que puede usar Ana en el diseño del terreno siempre y cuando se conserve el área?

Propósito: Generalizar algunas de las propiedades de área con relación al perímetro al momento de diseñar los modelos.

3.5.2 Situación Dos. El banquete para los profesores

Objetivo de la situación: Esta situación tiene como objetivo que los estudiantes diseñen y comparan figuras con igual área, pero con diferentes perímetros.

Recursos: Esta situación pretende ser realizada en un ambiente dinámico con material manipulable, en este caso fichas construidas en cartón paja que representan mesas las cuales facilitan el recubrimiento de figuras planas y además, se entrega una hoja del estudiante, a través de la cual el estudiante pueda dar respuesta a cada consigna.

Situación: Los directivos de la institución quieren organizar un banquete como regalo por el día del profesor, de modo que se solicita la ayuda de los estudiantes del grado séptimo para ubicar 16 mesas cuadradas, en las cuales los 16 profesores invitados puedan tener lugar para disfrutar del banquete.

Tarea Uno

Los directivos piden a los estudiantes que ubiquen las mesas de tal manera que en el lado de cada mesa solo se puede sentar una persona. Además, cada mesa debe estar unida con las otras con uno de sus lados como mínimo, tal como se muestra (**Figura 14**).

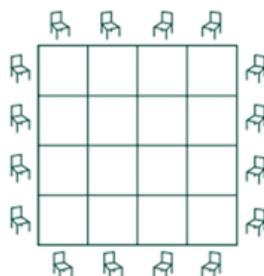


Figura 14. Situación Dos.

- Luego, los organizadores del evento se dan cuenta que al banquete han llegado cuatro profesores más. ¿Cómo podrían ubicar las 16 mesas de tal manera que todos los invitados pudieran sentarse sin que haya espacios entre ellos?

Propósito: Realizar diferentes descomposiciones de figuras equi-extensas. Que a su vez no son figuras iso-perimétricas.

- b) A la hora del banquete, los directivos de la institución se dan cuenta que algunos de los profesores invitados están llegando con acompañantes. Suponiendo que llegan en total 30 personas ¿Cuáles serían las diferentes formas en las que se pueden ubicar las 16 mesas?

Propósito: Diseñar modelos y comparar figuras con igual área, pero que a su vez tengan diferente perímetro.

- c) ¿Cuál es el mayor número de profesores invitados que pueden sentarse en las 16 mesas disponibles?

Propósito: Identificar cual es el mayor perímetro que puede ser hallado al tener un área determinada.

- d) ¿Cuáles serían los diferentes grupos de profesores que podrían ser ubicados si se encuentran disponibles 20 mesas?

Propósito: Diseñar modelos y comparar figuras con igual área, pero que a su vez tengan diferente perímetro.

- e) Con respecto a tus respuestas, ¿Es correcto afirmar que existen diversas maneras de ubicar la misma cantidad de mesas, de tal forma que se tenga mayor o menor espacio disponible?

Propósito: Que el estudiante logre generalizar y validar cada uno de los modelos creados anteriormente.

3.5.3 Situación Tres. El canje de terrenos

Objetivo de la situación: Esta situación tiene como objetivo que los estudiantes diseñen figuras a escala y logren predecir las dimensiones de algunas figuras dadas.

Recursos: Esta situación pretende ser realizada en un ambiente dinámico con material manipulable, más precisamente con geoplanos, bandas elásticas y su respectiva hoja del estudiante.

Situación: Una constructora desea adquirir unos predios para edificar casas de interés social, por tal razón se comunica con los propietarios de esos predios para establecer negociaciones. Los propietarios se niegan a ceder sus tierras a cambio de dinero, ellos están dispuestos a canjearlas sus tierras por otras que posean mayor dimensión, pero la constructora está dispuesta a duplicar, triplicar o hasta cuadruplicar el área de esas tierras. Duvan Camilo uno de los socios de la constructora tiene ciertas dudas en cuanto al negocio planteado por los propietarios de las tierras, pues piensa que es posible que lo que ellos proponen no es equivalente con lo que los propietarios demandan.

Tarea Uno

Duvan camilo ha plasmado algunos diseños de terrenos a escala y desea considerar ciertos casos, por tanto, necesita de tu ayuda para considerar las propuesta de los propietarios, utiliza el geoplano para validar tus respuestas.

1. Si la constructora quisiera duplicar el contorno de la propiedad A (ver *Figura 15*), ¿sería equivalente a duplicar el área de dicha propiedad? ¿Por qué?

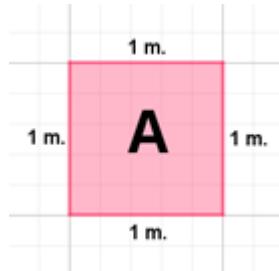


Figura 15. Propiedad A, Situación Tres.

Propósito: Explorar con la ayuda del geoplano y conjutar al momento de crear modelos, que no necesariamente al duplicar el perímetro su área también se duplica.

2. Si la constructora duplica el contorno de la propiedad B (ver *Figura 16*), ¿sería posible plantearles un terreno donde el área sea igual o menor al doble del área de dicha figura? ¿Por qué?

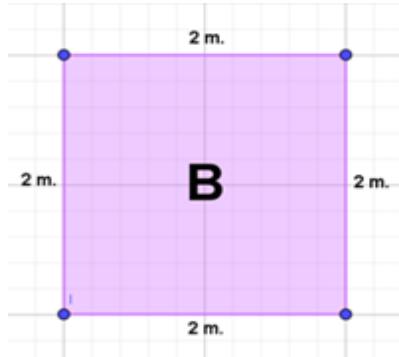


Figura 16. Propiedad B, Situación Tres.

Propósito: Explorar y crear modelos en el geoplano que permita que el estudiante saque conjeturas por sí mismo para dar respuesta a la pregunta.

3. Si la constructora les propone triplicar el área de la propiedad C (ver *Figura 17*), ¿Cuál sería el contorno mínimo que tendría dicha propiedad? ¿Por qué?

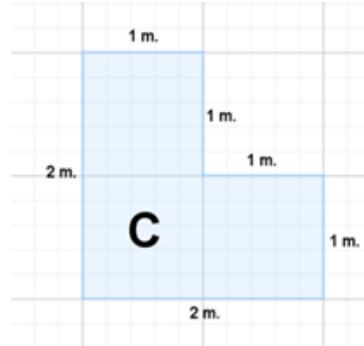


Figura 17. Propiedad C, Situación Tres.

Propósito: Deducir propiedades del área y perímetro en figuras tomando como apoyando la ayuda del geoplano.

4. Con respecto a tus respuestas, ¿Es correcto afirmar que, al publicar el contorno de los terrenos, de igual modo se publicaría el espacio disponible de los mismos y viceversa?

Propósito: Generalizar algunas propiedades del área y perímetro exploradas por los mismos estudiantes en el transcurso de la actividad.

3.6 Categorías de Análisis

En el proceso de análisis se busca interpretar las producciones escritas y las interacciones de los estudiantes a partir de los elementos proporcionados por la EMR, esto con la intención de caracterizar los niveles de matematización que estos logran alcanzar durante la implementación las situaciones.

Ahora bien, el análisis de la información no consiste en realizar descripciones simples de lo sucedido en el momento de la implementación, sino que este es un proceso donde se articula el enfoque de la EMR con los resultados, en otras palabras, el análisis de la información descansa sobre lo planteado en la EMR, sin embargo, este proceso de análisis no es una tarea fácil, puesto que en la misma se plantea que “no se debe pensar en clases homogéneas en sus trayectos de aprendizaje, sino en individuos que siguen senderos propios” (Bressan, 2005), por ende, es necesario analizar cada uno de los métodos y herramientas utilizadas por los estudiantes.

Dentro de este marco de ideas, se plantea un análisis preliminar donde se detallen los posibles modelos que pueden llegar a surgir en el proceso de *matematización*. Si bien es cierto, las situaciones se encuentran articuladas con el enfoque teórico, curricular y matemático, además estas fueron planteadas con una intención matemática donde se tiene en cuenta cada uno de estos referentes, lo cual hace posible la identificación de algunas características que demarcan los *Niveles de Matematización*.

Por consiguiente, se analizan los diferentes niveles de matematización que se logran alcanzar en cada una de las tareas presentadas en las situaciones, de esta manera, se busca relacionar los diversos modelos construidos por los estudiantes en la implementación con el enfoque de la EMR.

Categorías de Análisis		
<i>Niveles de Matematización</i>	<i>Características</i>	<i>Modelos</i>
Formal	Por ser estudiantes de séptimo grado no se espera que llegue al nivel formal, puesto que no tiene el fundamento matemático que se los permita.	
General	A partir de los diseños y conjeturas establecidas por los estudiantes, realizan una exploración matemática donde se busca establecer relaciones entre situaciones que los conlleven a generalizaciones.	<ul style="list-style-type: none"> ● Modelo aritmético ● Modelo Matemático
Referencial	Los estudiantes hacen diseños y rediseños de modelos en relación a las situaciones problemas que les permita conjeturar y establecer posibles soluciones.	<ul style="list-style-type: none"> ● Modelo Geométrico ● Modelo Tabular ● Modelo Gráfico
Situacional	Los estudiantes hacen uso de diversos métodos o estrategias basados en sus conocimientos previos los cuales les permitirá comprender y dar respuesta a la situación problema haciendo uso de la información que se les presenta.	<ul style="list-style-type: none"> ● Modelo Particular

Tabla 4. Categorías de Análisis.

3.7 Análisis preliminar de las situaciones

El presente análisis se efectúa con el fin de considerar posibles modelos que surgen durante la actividad matemática de los participantes, los cuales se encuentran en relación con los *niveles de matematización* planteados por en la EMR.

Cabe resaltar que, en cada una de las situaciones el estudiante podrá alcanzar un *nivel de matematización*, esto se da gracias a que en las diferentes tareas se pueden establecer preguntas que orienten el trabajo de los estudiantes, las cuales pueden surgir durante la puesta en acto de las situaciones, estas preguntas deben posibilitar la construcción de modelos que puedan ser categorizados.

3.7.1 Situación Uno. La cosecha de Ana y su familia

Esta situación parte de un contexto realista donde se pretende generar modelos que permitan matematizar los cambios de figuras iso-perimétricas y equi-extensas, cada uno de los posibles modelos se encuentra asociado a un nivel de comprensión, permitiendo categorizar las construcciones de los estudiantes en dos formas de matematización (Horizontal y Vertical).

Ahora bien, los modelos que se encuentran en completa relación con el contexto de la situación problema y establecen estrategias ligadas a conocimientos previos, estarían correlacionadas al Nivel de Matematización Horizontal, en caso contrario, estarían relacionados con los niveles de matematización vertical, es decir, si los modelos se encuentran desvinculados o presentan algún vínculo con el contexto.

3.7.1.1 Modelos – Matematización Horizontal

- Modelo Particular

Los modelos construidos en este nivel se encuentran relacionados con la situación problema, se espera que los estudiantes a partir de sus conocimientos previos sean capaces de plantear estrategias que le permitan identificar el trasfondo matemático. En este caso, los estudiantes deben pensarse la existencia o no de la variación del área cuando se rediseñan figuras iso-perimétricas o el perímetro de figuras equi-extensas, estos modelos pueden ser expresados de forma verbal o gráfica.

Cuando el estudiante expresa su solución teniendo en cuenta sus conocimientos previos o utiliza herramientas informales para dar solución a la situación problema, se encuentra en un nivel de comprensión *Situacional*.

3.7.1.2 Modelos – Matematización Vertical

- Modelo Geométrico

Los modelos geométricos son utilizados para realizar rediseños de los terrenos planteados en la situación problema, estos modelos les permiten visualizar de manera clara la relación existente entre el área y perímetro.

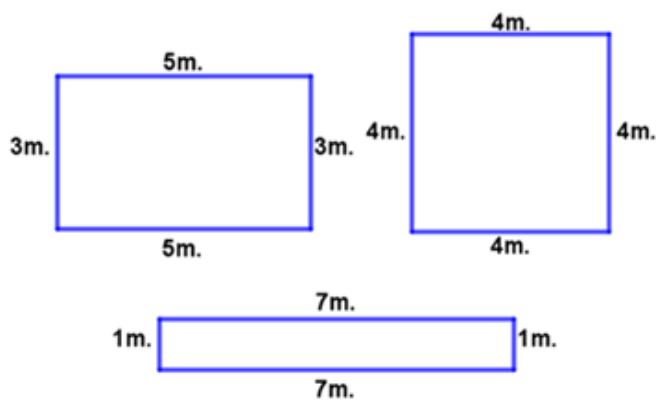


Figura 18. Modelo Iso-perimétrico, Situación Uno.

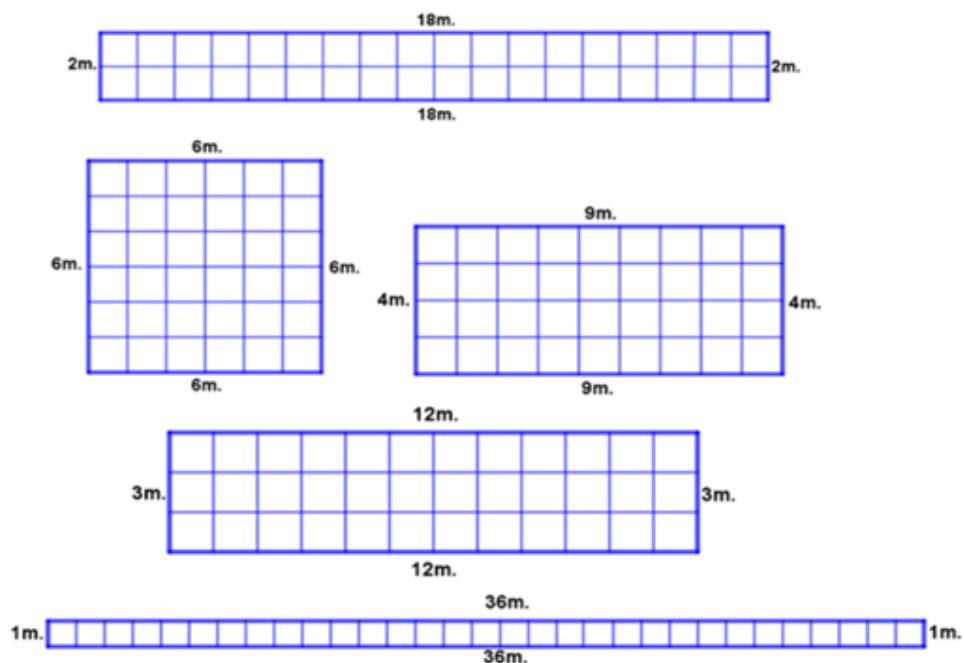


Figura 19. Modelo Geométrico Equi-extenso, Situación Uno.

En estos modelos geométricos se expresa la variación del área cuando se rediseña una figura con único perímetro y la variación del perímetro cuando se rediseña un terreno en el que no varía su área, permitiendo así la construcción de conjeturas en cuanto a la relación de estos conceptos.

En este nivel se puede hacer uso de gráficas, tablas, diagramas referidos a la situación problema, las cuales indicarían que los estudiantes se encuentran en un nivel de comprensión *Referencial*.

- **Modelo Aritmético**

Una vez el estudiante haya pensado los diferentes modelos en cada una de las tareas o haya planteado las diversas gráficas o diagramas referidos a la situación problema, se recurre a la exploración matemática de dichos modelos geométricos.

El modelo aritmético se refiere al uso de las matemáticas para calcular los cambios que se dan en cada uno de los modelos anteriores, por ejemplo: en el modelo geométrico iso-

perimétrico se puede calcular la variación del área de cada uno de los rediseños, posibilitando reflexionar sobre los mismos y llegar a generalizaciones.

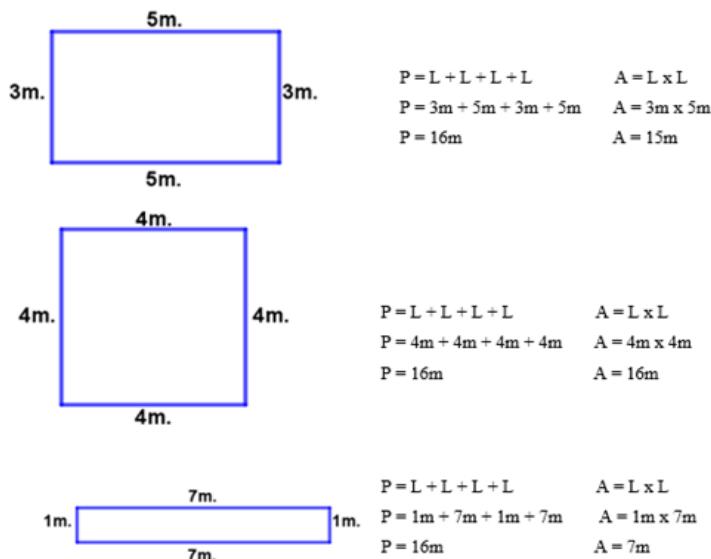


Figura 20. Modelo Aritmético, Situación Uno.

Cuando los estudiantes pueden explorar cada una de las posibilidades matemáticas superando el contexto de las situaciones y llegan a generalizaciones en cuanto a la relación de los conceptos, se puede decir que se encuentran en un nivel de comprensión *General*.

3.7.1.3 Niveles de Matematización situación uno

A continuación, se presenta la **Tabla 5** que sintetiza las formas de matematización con sus respectivos modelos y cada uno de los *Niveles de Matematización*:

Situación Uno. La cosecha de Ana y su familia

Matematización Vertical	Matematización Horizontal		Modelos
	Nivel Formal	Por ser estudiantes de séptimo grado no se espera a que lleguen al nivel formal, puesto que tienen el fundamento matemático que se los permita.	
	Nivel General	A partir de los diseños y conjeturas establecidas por los estudiantes en el transcurso de la actividad, se espera que ellos realicen una exploración matemática donde logren identificar que no necesariamente si el área de una figura cambia, su perímetro debe cambiar igualmente.	Modelo Matemático Modelo Aritmético
	Nivel Referencial	Se espera que los estudiantes sean capaces de diseñar y rediseñar modelos en relación a la pregunta planteada, es decir, recurren a diferentes tipos de representaciones. En este caso, representaciones gráficas y geométricas.	Modelo Gráfico Modelo Geométrico Modelo Tabular
	Nivel Situacional	Se espera que hagan uso de los conocimientos que han adquirido con anterioridad en su formación académica y logren deducir propiedades simples de las figuras.	Modelo Particular

Tabla 5. Niveles de Matematización, Situación Uno.

3.7.2 Situación Dos. El banquete para los profesores

Esta situación es enfoca en un contexto escolar donde se les pide a los estudiantes organizar mesas para el banquete de los profesores, de esta manera la relación área-perímetro se encuentra de manera implícita, puesto que, el perímetro estaría asociado a la ubicación de los profesores en las mesas y el área sería el espacio que ocupan todas las mesas, en otras palabras, se trabaja la construcción de figuras equi-extensas donde se analiza el cambio del perímetro.

3.7.2.1 Modelos – Matematización Horizontal

- Modelo Particular

Los arreglos que se puedan realizar con el material concreto estarán asociados al nivel situacional, estas construcciones se encuentran relacionadas a la situación problema y su diseño dependerá de las estrategias concebidas por los estudiantes.

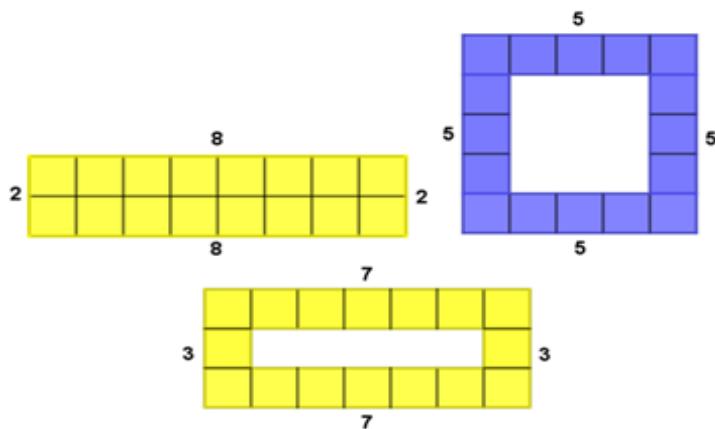


Figura 21. Modelo Particular, Situación Dos.

3.7.2.2 Modelos – Matematización Vertical

- Modelo Gráfico

Los esquemas o gráficas que puedan surgir en la búsqueda de posibles soluciones a la problemática, posibilitan la creación de conjeturas que permiten esquematizar la situación.

Los estudiantes pueden recurrir al trabajo con lápiz y papel para representar los modelos del nivel situacional, el cual les permitirán ampliar su visión y considerar nuevos modelos.

- Modelo Aritmético

Estos modelos se encuentran en completa relación con los modelos anteriores, ya que, las estrategias que se plantean los estudiantes son las que enmarcan la utilización del conteo

o la suma. Por ejemplo, en el modelo particular se logra calcular la cantidad de personas que se pueden ubicar en los diferentes modelos, en otras palabras, determinar la variación del perímetro de cada modelo, teniendo en cuenta que son figuras equi-extensas, además, se espera que el estudiante pueda considerar una generalización.

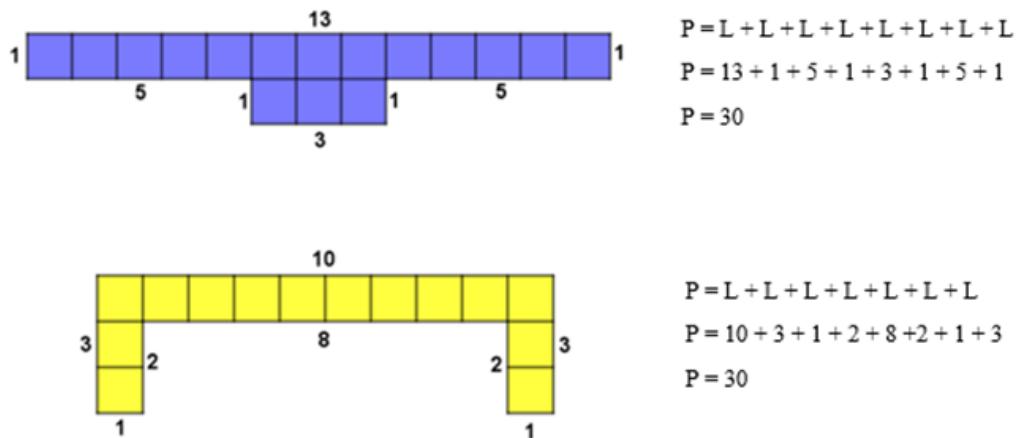


Figura 22. Modelo Aritmético, Situación Dos.

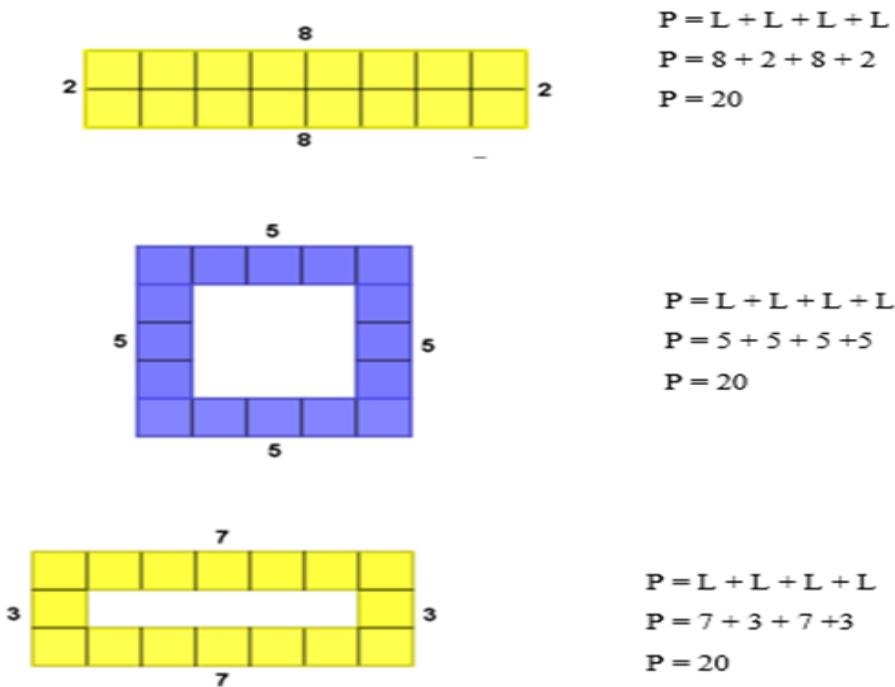


Figura 23. Modelo Aritmético, Situación Dos

Se puede considerar que para alcanzar un nivel de comprensión *general*, los estudiantes consigan explorar cada uno de los eventos matemáticos logrando superar el contexto de las situaciones y llegando a generalizar respecto a la relación de los conceptos de área y perímetro.

3.7.2.3 Niveles de Matematización situación dos

En este sentido, se plantea la **Tabla 6** con la intención de sintetizar las formas de matematización que se logran alcanzar en esta situación, con sus respectivos modelos y cada uno de los *Niveles de Matematización*:

Situación Dos. El banquete para los profesores

Matematización Vertical	Matematización Horizontal		Modelos
	Nivel Formal	Por ser estudiantes de séptimo grado no se espera a que lleguen al nivel formal, puesto que tienen el fundamento matemático que se los permita.	
	Nivel General	A partir de los diseños y conjeturas establecidas por los estudiantes en el transcurso de la actividad, se espera que aquí realicen una exploración matemática donde ellos logren identificar que no necesariamente si el perímetro de una figura cambia, de igual manera su área debe cambiar.	Modelo Aritmético
	Nivel Referencial	En este caso se espera que puedan crear diferentes modelos para dar respuesta a la situación, ya sean estos de forma gráfica o algebraica, que les permita conjeturar por sí mismos.	Modelo Gráfico Modelo Geométrico
	Nivel Situacional	Se espera que los estudiantes exploren con el material manipulable y logren comunicar sus respuestas sin necesidad de introducir conceptos matemáticos a sus respuestas.	Modelo Particular

Tabla 6. Niveles de Matematización, Situación Dos.

3.7.3 Situación Tres. El canje de terrenos

En esta situación se busca trabajar en un contexto cotidiano para los estudiantes, donde se les pide que dupliquen y tripliquen figuras con la ayuda del geoplano, de esta manera, se busca que los estudiantes relación área-perímetro se encuentre de manera implícita, puesto que, el perímetro estaría asociado a la ubicación de los profesores en las mesas y el área sería el espacio que ocupan todas las mesas, en otras palabras, se trabaja la construcción de figuras equi-extensas donde se analiza el cambio del perímetro.

3.7.3.1 Modelos – Matematización Horizontal

– Modelo Particular

Los diferentes diseños que pueden ser realizar con el material de trabajo que para esta situación es el geoplano, se corresponde con el nivel situacional, debido a que cada una de las construcciones se encuentran relacionada con la situación problema que se plantea y los diversos diseño dependerá de las estrategias ideadas por los estudiantes.

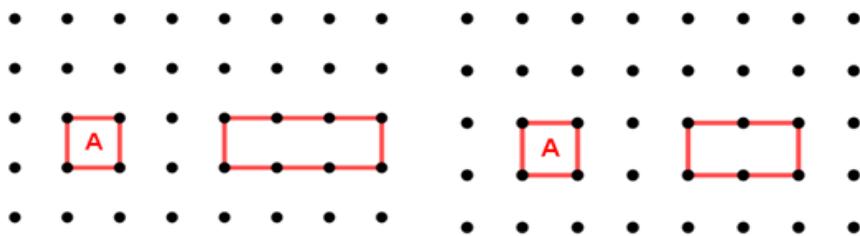


Figura 24. *Modelo Particular (Propiedad A), Situación Tres.*

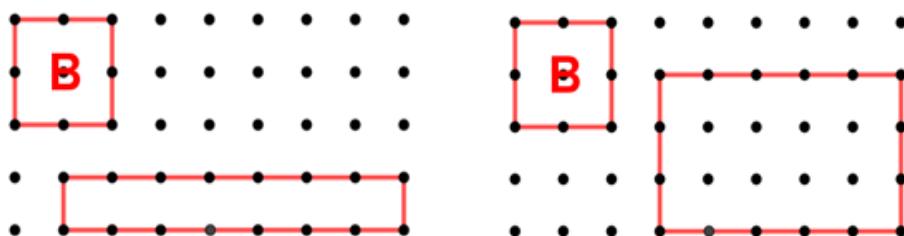


Figura 25. *Modelo Particular (Propiedad B), Situación Tres.*

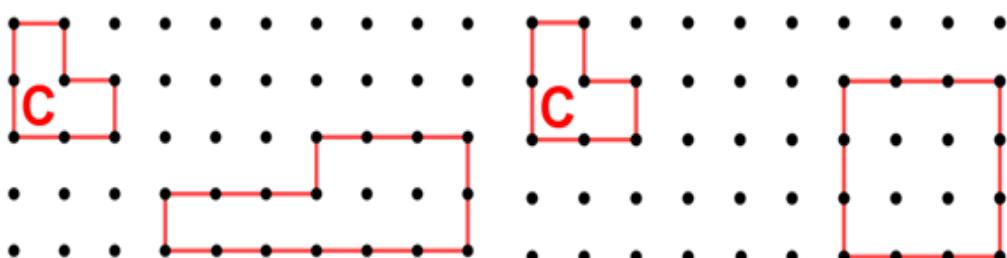


Figura 26. *Modelo Particular (Propiedad C), Situación Tres.*

3.7.3.2 Modelos – Matematización Vertical

- Modelo Gráfico

La creación de los diferentes esquemas o gráficas que se logran obtener en la búsqueda de posibles respuestas al problema planteado, permite que los estudiantes puedan establecer conjeturas que le permitan esquematizar la situación.

Ahora bien, para la creación de los esquemas o gráficas los estudiantes pueden apoyarse en un ambiente a lápiz y papel para lograr representar los diferentes modelos del nivel situacional, el cual les permite tener una visión más amplia para que puedan considerar nuevos modelos.

- Modelo Aritmético

Los modelos creados aquí se encuentran relacionados con los modelos que se crean con anterioridad, debido a que las diferentes estrategias que se logran considerar por los estudiantes permiten enmarcar el uso de habilidades como el conteo o la suma. Por ejemplo, en el modelo particular se logra hallar el perímetro en los diferentes modelos con la habilidad de contar cada lado, además, se espera que el estudiante pueda reflexionar y logre conjeturar en cada una de las cuestiones.

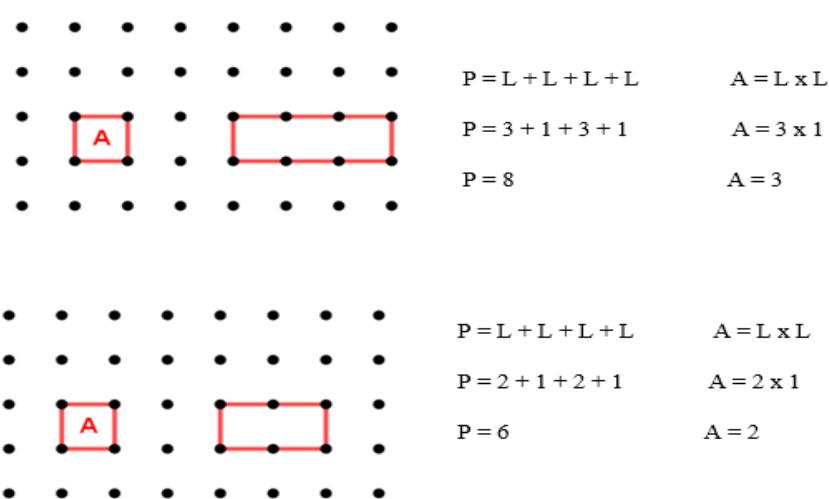


Figura 27. Modelo Aritmético (Propiedad A), Situación Tres.

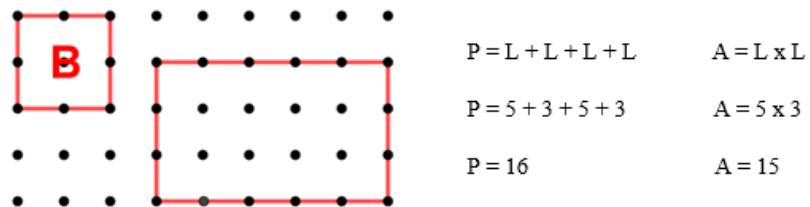
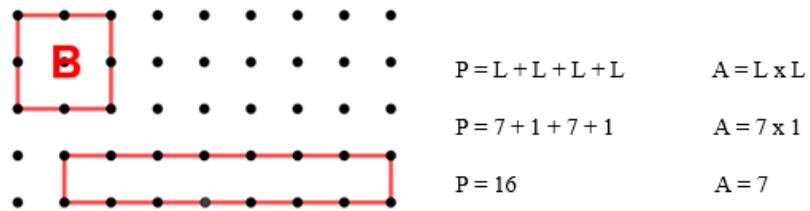


Figura 28. Modelo Aritmético (Propiedad B), Situación Tres.

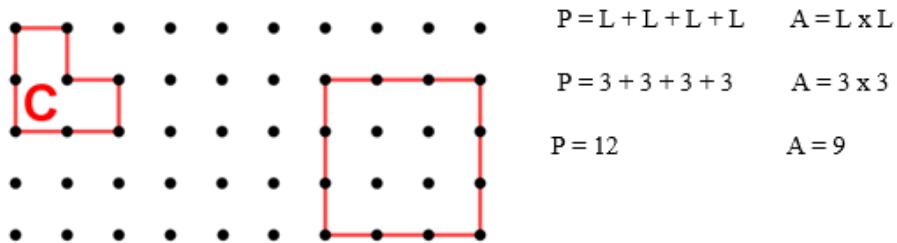
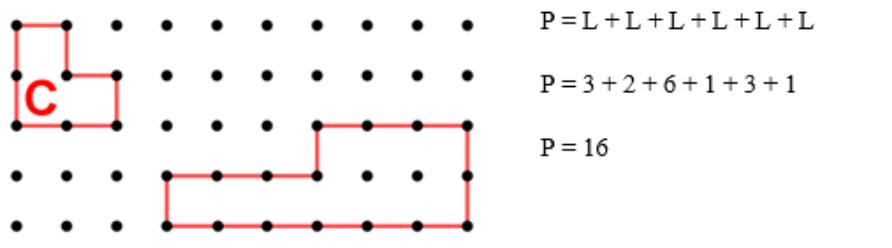


Figura 29. Modelo Aritmético (Propiedad C), Situación Tres.

En consideración, para que se logre alcanzar el nivel de comprensión General, los estudiantes deberían poder explorar cada uno de los hechos matemáticos logrando superar el contexto de las situaciones y llegando a generalizar respecto a la relación de los conceptos de área y perímetro.

3.7.3.3 Niveles de Matematización situación tres

En este sentido, se plantea la **Tabla 7** con la intención de sintetizar las formas de matematización que se logran alcanzar en esta situación, con sus respectivos modelos y cada uno de los niveles de matematización:

Situación Tres. El canje de terrenos			
<i>Matematización Vertical</i>	<i>Matematización Horizontal</i>		<i>Modelos</i>
	Nivel Formal	Por ser estudiantes de séptimo grado no se espera a que lleguen al nivel formal, puesto que tienen el fundamento matemático que se los permita.	
	Nivel General	En este nivel, se espera que los estudiantes logren identificar que si se pide duplicar o triplicar una figura, el área y el perímetro de la misma, también se duplicará o triplicará, esto lo hacen a través de casos específicos.	Modelo Aritmético
	Nivel Referencial	En este caso se espera que los estudiantes logren predecir los resultados a las cuestiones planteadas y con ayuda del material manipulable, logren verificar la veracidad de sus anticipaciones.	Modelo Gráfico Modelo Geométrico
	Nivel Situacional	Se espera que los estudiantes logren superar este nivel con la ayuda de las situaciones planteadas con anterioridad, puesto que las actividades anteriores le permiten tener bases sólidas para enfrentarse a estos problemas.	Modelo Particular

Tabla 7. Niveles de Matematización, Situación Tres.

CAPÍTULO IV. ANÁLISIS Y RESULTADOS DE LAS SITUACIONES

El presente capítulo pretende mostrar el análisis a los resultados obtenidos al momento de poner en acto a los estudiantes las diferentes situaciones problemas direccionaladas bajo el enfoque de la EMR. Al mismo tiempo, estos análisis buscan dar respuesta al objetivo general de esta investigación que se centra en caracterizar los niveles de *matematización* que logran alcanzar algunos estudiantes del grado séptimo respecto a la relación existente entre los conceptos de área y perímetro con contextos cercanos a la realidad de los estudiantes.

De igual manera, cabe resaltar que anteriormente se desarrolló un análisis preliminar con el propósito de anticiparnos a las diferentes reflexiones que los estudiantes llevarían a cabo al momento de efectuar las soluciones a las situaciones planteadas, así como también con el propósito de prever cada uno de los modelos matemáticos puestos en juego por los estudiantes.

4.1 Discusión de las situaciones

La situación uno moviliza la comparación de figuras iso-perimétricas y equi-extensas, para ello se divide la situación en dos tareas. En la primera tarea se realizan comparaciones de áreas en figuras iso-perimétricas, la cual busca trabajar en la concepción errónea cuando se piensa que: si existen dos figuras iso-perimétricas necesariamente estas no son equi-extensas precisamente; la segunda tarea trata el caso contrario, si existen dos figuras equi-extensas entonces estas no necesariamente tienen que ser iso-perimétricas.

En la situación dos se les plantean un contexto en el que se moviliza la transformación de figuras iso-perimétricas, de tal forma se trabaja de manera implícita la comparación de áreas entre las posibles transformaciones concebidas por los estudiantes.

La situación tres trabaja la concepción que puede llegar a tener algunos estudiantes en cuanto a la relación de proporcionalidad de los conceptos de área y perímetro, esta se da al pensar que, si se duplica o triplica el perímetro de una figura, de manera proporcional se duplicará o triplicará el área de la misma y el caso contrario.

Ahora bien, todas las situaciones trabajan sobre las posibles concepciones que pudieran surgir durante el proceso de matematización de los conceptos de área y perímetro, sin embargo, en cada una de las situaciones se plasmó una pregunta que permitiría caracterizar los Niveles de Matematización que logran alcanzar de los estudiantes.

4.1.1 Situación Uno. La cosecha de Ana y su familia

Esta situación es presentada en la primera sesión dispuesta para la implementación, se conforman las parejas que desarrollaran las tareas uno y dos de la Situación Uno. Una vez organizados las parejas de trabajo, se hizo oportuno presentarles la situación problema y realizar una breve explicación de cada una de las tareas que en esta se presenta.

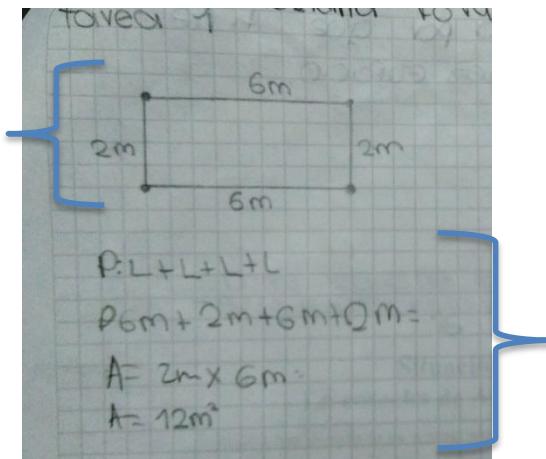
Posterior a eso, se pasó a aclarar las dudas que pudieran tener cada uno de los estudiantes y se les facilitó el material para el desarrollo de las tareas (lápiz, borrador y papel). Una vez las parejas dan inicio a desarrollar la situación problema, se evidencia el buen trabajo colaborativo.

En la tarea uno, el literal “A” es el encargado de movilizar toda la actividad de matematización de los estudiantes, el cual tiene como consigna:

- El padre de Ana afirma que el terreno siempre tendrá el mismo espacio porque cuenta con la misma cantidad de malla ¿Es correcta la afirmación del padre de Ana? ¿Por qué?

Para dar respuesta a este interrogante, todas las parejas con ciertas similitudes realizan el modelo de la figura inicial y calculan el área y perímetro de la misma (**Figura 30**).

Figura inicial
(Figura 1)

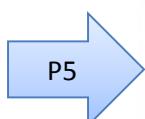


Se calcula el área y el perímetro

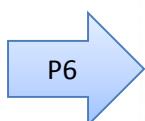
Figura 30. Modelo 1, Área y Perímetro, Tarea Uno, Situación Uno.

En general, los estudiantes establecen cierta relación entre las posibles respuestas al interrogante con el modelo inicial, una vez analizan la información proporcionada en la situación y sintetizada en el modelo, las parejas se involucran en el desarrollo de la actividad. En síntesis, las respuestas de las seis parejas se pueden clasificar en cuatro grupos, donde dos parejas contestaron de forma incorrecta, una de forma confusa, dos de manera correcta sin justificar su respuesta y una última de forma correcta justificando su respuesta con un ejemplo.

Iniciemos con las respuestas de las parejas P5 y P6, las cuales contestaron de forma incorrecta a la consigna, permitiendo identificar concepciones erróneas en cuanto a la relación existente entre los conceptos de área y perímetro (**Figura 31**).



a) nosotros creemos que si cambiamos el dibujo no puede dar 12 m^2 pero si tiene la misma longitud si no tiene la misma longitud no sera un rectangulo de



DESARROLLO
a) Es correcta por el punto de que afirma que cuenta 30 metros de largo y 20 metros de ancho

Figura 31. Respuesta particular de las parejas P5 y P6, Tarea Uno, Situación Uno.

La pareja P5 considera el hecho de que, si una figura posee la misma longitud, entonces esta figura siempre tendrá la misma área. A partir de esta respuesta se puede inferir que la pareja P5 tiene una concepción errónea acerca de la relación existente entre figuras isoperimétricas y figuras equi-extensas.

En el caso de la pareja P6, se evidencia que la respuesta presentada no es coherente con la pregunta problema que se le plantea, no obstante, toman elementos generales de la situación como lo es el terreno el cual está destinado para la agricultura, dejando de lado un elemento importante como son los 16m de perímetro que debe contar la figura a construir.

Dentro de las producciones de la pareja P6 se pudo identificar algunas inconsistencias que pueden ser la razón por la cual esta pareja no pudo contestar de manera afirmativa a la consigna, si se analiza con detalle, esta pareja de estudiantes realizó como el resto de sus compañeros el modelo inicial (**Figura 30**), pero en este caso, esta pareja calcula el perímetro de la figura, además también proponen el modelo de la segunda tarea y en este

pretenden calcular su área (**Figura 32**), dejando en evidencia que existe una confusión entre los conceptos.

Este tipo de confusiones se podría dar puesto que a menudo la práctica de calcular el área y perímetro de una figura se deriva al simple hecho de usar una fórmula. Tal como Mantica, et al (2002) lo expresa:

No es muy frecuente el planteo de actividades en las que la medida de la superficie, al igual que cualquier otra magnitud geométrica deba realizarse partiendo de una unidad de medida y su posterior reiteración, como sí se realiza en la medida de longitudes. (p. 112)

De acuerdo a esto, podría considerarse que la pareja P6 tuvo este tipo de dificultad, algo que no fue previsto con anterioridad.

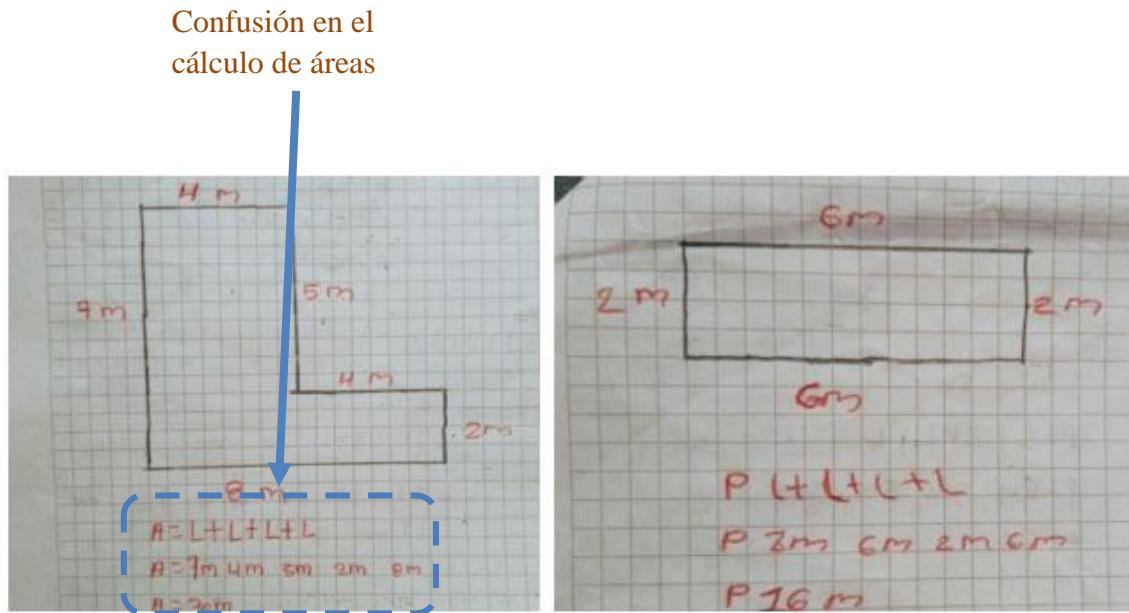


Figura 32. Cálculo de área y perímetro de P6, Situación Uno.

En las respuestas proporcionadas por P5 y P6 ponen de manifiesto que los estudiantes a menudo suelen confundir el hecho de que si una figura es iso-perimétrica esta necesariamente debe ser equi-extensa, tal como se encuentra planteado en la problemática de esta investigación, donde autores como D'Amore y Fandiño (2007) reconocen que:

“gran número de estudiantes de todas las edades están convencidos de que existe una relación de estrecha dependencia entre los dos conceptos sobre el plano relacional” (p. 44).

La **Figura 33** muestra algunas trasformaciones geométricas realizadas por P5 y P6, que tienen como intencionalidad llevar al estudiante a cuestionarse sobre las variaciones que se dan con respecto al área y perímetro en cada uno de los casos concebidos.

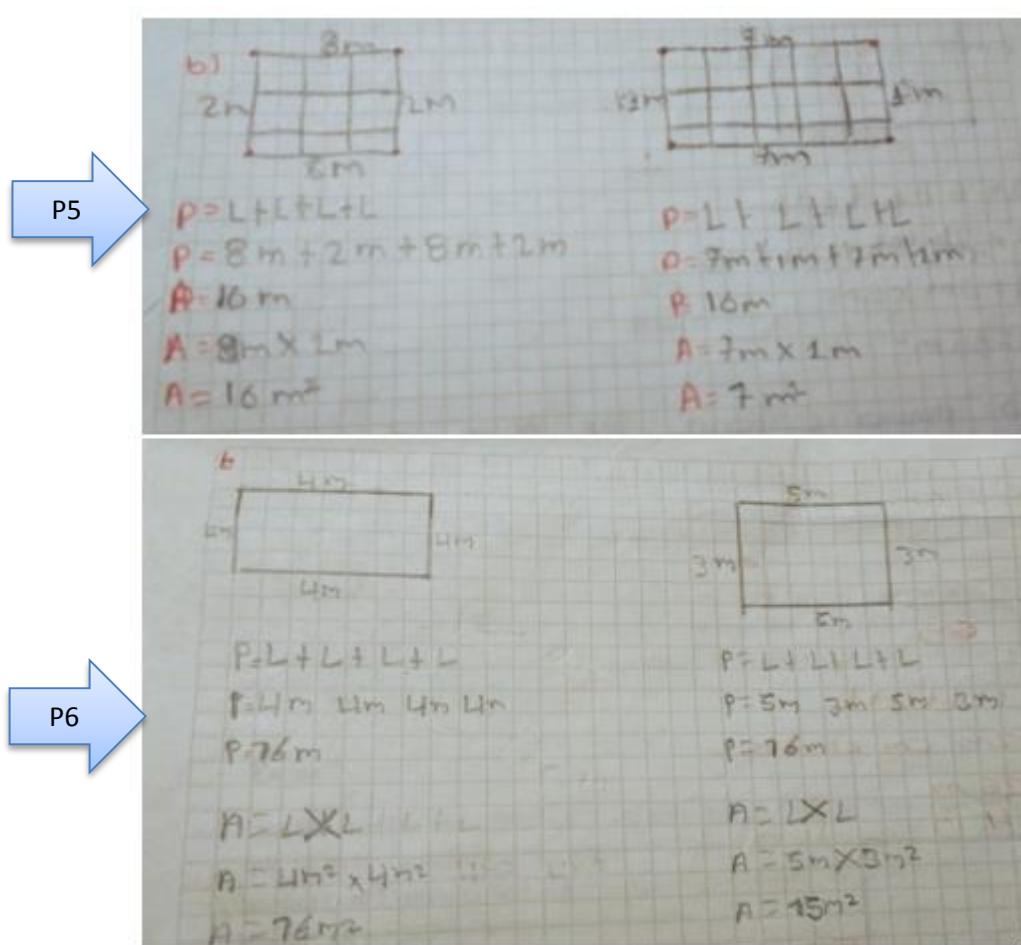


Figura 33. Trasformaciones geométricas de P5 y P6, Situación Uno.

Por otro lado, la respuesta de la pareja P1 no puede ser clasificada como correcta o incorrecta (**Figura 34**), puesto que esta se torna confusa e impide caracterizar el Nivel de Matematización que logran alcanzar, además, su respuesta no pudo ser validada dentro de las entrevistas realizadas durante la implementación.

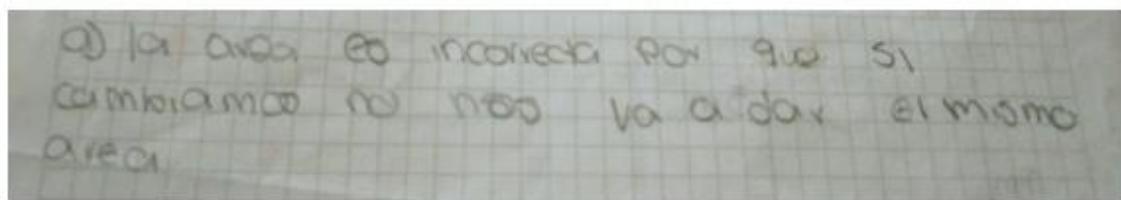


Figura 34. Respuesta confusa de P1, Situación Uno.

Ahora bien, las parejas P3 y P4 contestaron de manera correcta a la consigna de la situación (**Figura 35**), en sus producciones se puede apreciar que al parecer a partir de un caso particular (**Figura 30**), los estudiantes infieren que es posible que se cambie la forma de la figura con el perímetro inequívoco, pero con su área variando, por lo tanto, sus producciones se pueden caracterizar en un *Nivel de Matematización Referencial*.

P3 → R1 no porque si cambiamos la forma del Rectangulo no va a dar el mismo resultado

P4 → ② Pensamos que si cambiamos la figura con el mismo perimetro (16m) no podia combinar el mismo area (12m²)

Figura 35. Respuesta de P3 y P4, Situación Uno.

En el caso de la pareja P2, al igual que P3 y P4 contestaron de manera correcta, pero su respuesta sobresale a las dos parejas anteriores en el sentido de que no solo expresan la respuesta a la cuestión planteada de manera verbal o escrita, sino que también hace uso del lenguaje gráfico (**Figura 36**), por tanto, podría decirse que esta pareja alcanza de igual manera a las dos parejas anteriores un *Nivel de Matematización Referencial*. Puesto que, de acuerdo con Bressan, et al (2016) es aquí donde: “aparecen las representaciones o modelos gráficos, materiales o notacionales, y las descripciones, conceptos y procedimientos personales que esquematizan el problema” (p. 7).

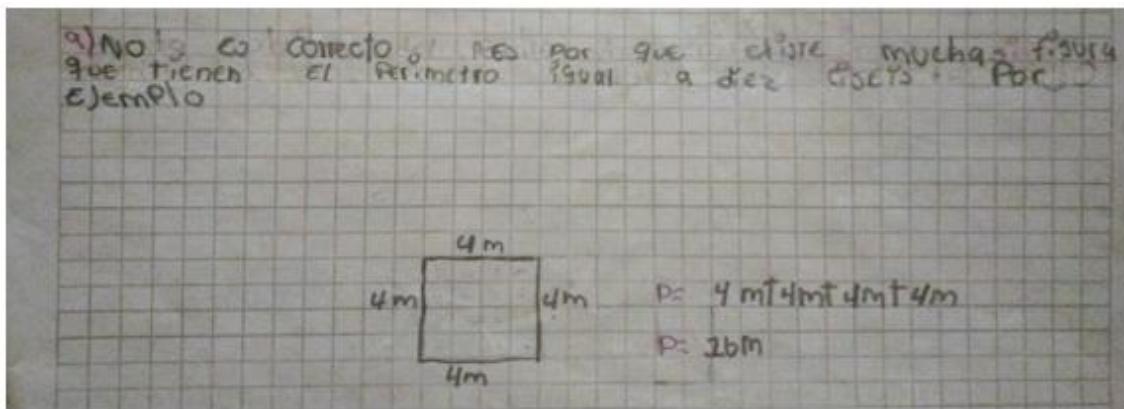


Figura 36. Respuesta de P2, Situación Uno.

Si se analiza de forma detenida la respuesta de P2 (**Figura 36**), con respecto a las producciones de las parejas P3 y P4 (**Figura 35**), se puede apreciar que P2 no solamente exemplifica su respuesta con un Modelo Geométrico, sino que estos también generalizan sus argumentos a diversos casos, puesto que P2 mencionan que existen muchas figuras con el mismo perímetro (en este caso 16m), pero lo que expresa inicialmente deja claro que no necesariamente estas figuras poseen la misma área (esto se asumen por la forma en la que está planteada la consigna). Por esta razón, las producciones de P2 se pueden caracterizar no solo en un *Nivel de Matematización Referencial*, sino también en un *Nivel de Matematización General*.

De acuerdo con Bressan, et al (2016), esta pareja se ubica en este nivel puesto que: “se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias que supere la referencia al contexto” (p. 7).

Como se mencionó anteriormente, solo la consiga “A” de la Situación Uno nos permite caracterizar los Niveles de Matematización que logran alcanzar los participantes de esta investigación, sin embargo, cada uno de los puntos planteados dentro de la situación se

resolvieron de manera correcta, donde los estudiantes realizaron cada uno de los modelos previstos en el análisis previo.

Ahora bien, se puede decir que la Situación Dos conlleva a que las parejas reflexionen sobre las diferentes respuestas que plantearon en la tarea uno, en el sentido en que permite que cada una de las parejas especule que no necesariamente las figuras iso-perimétricas, son por obligación equi-extensas. Pese a que no se hizo una pregunta en la que se exponga lo anterior, se puede considerar que este tipo de trabajo ayuda a los estudiantes a recapacitar sobre la labor que hicieron durante la sección uno y les ayuda a mejor en los Niveles de Matematización.

A continuación, se presentan los modelos concebidos por algunas de las parejas durante la implementación, tanto de la tarea uno, como de la tarea dos:

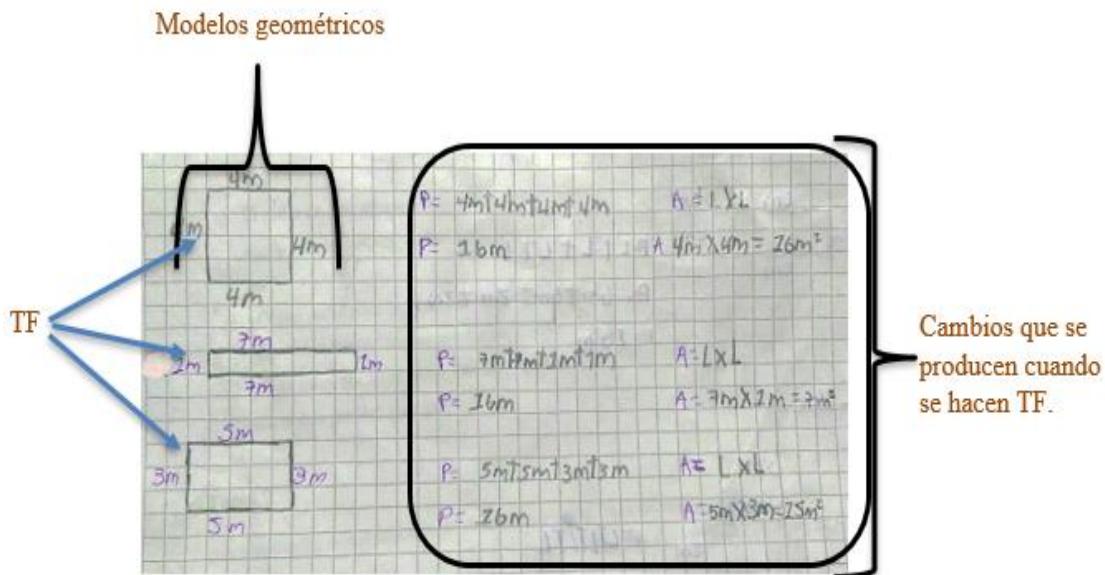


Figura 37. Modelo 2, por Transformación de Figuras (TF) Iso-perimétricas, Tarea Uno, Situación Uno.

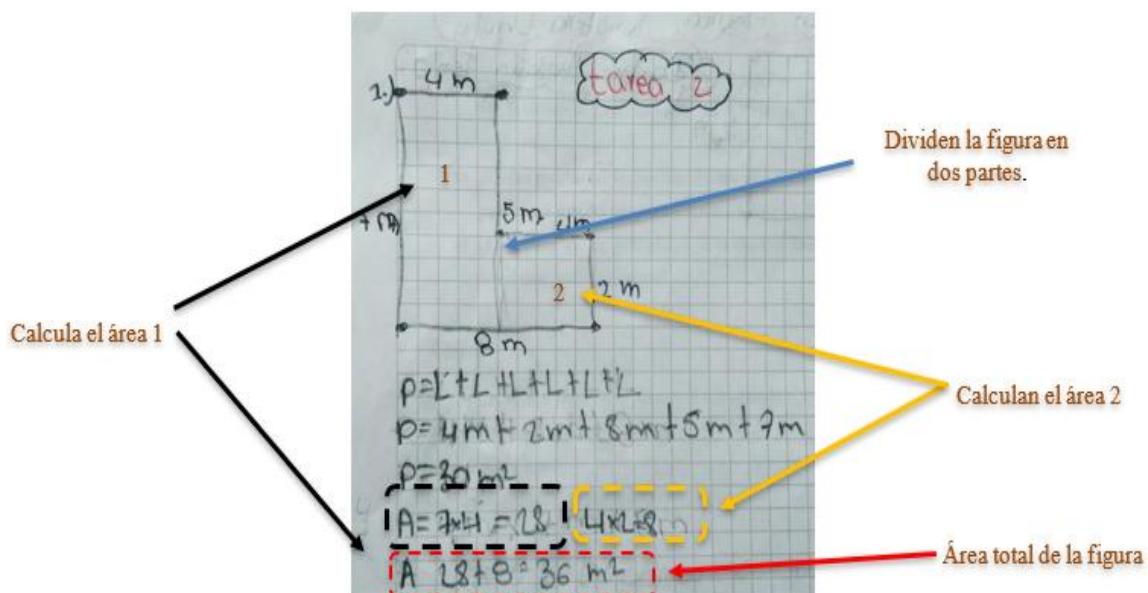


Figura 38. Método para el cálculo de áreas de figuras irregulares.

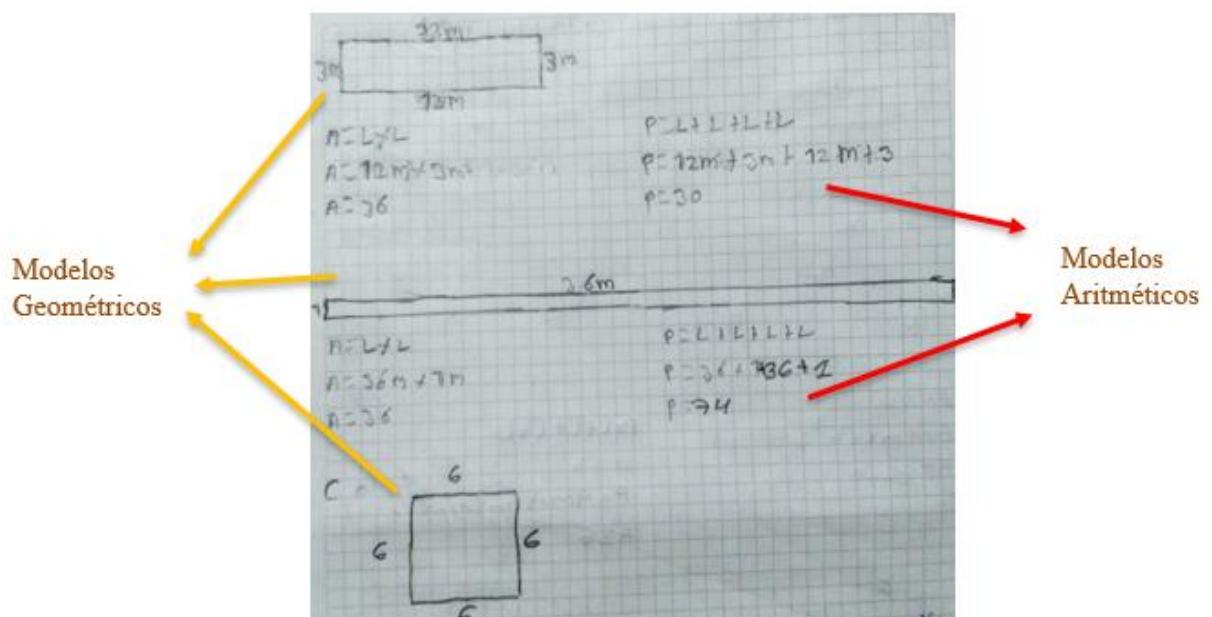


Figura 39. Modelo 3, por TF Equi-extensas, Tarea Dos, Situación Uno.

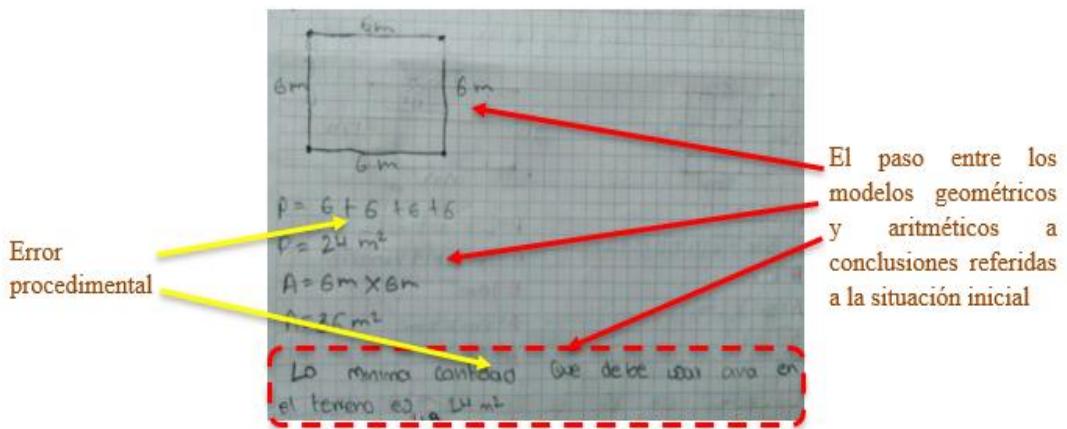


Figura 40. Generalización de figuras Equi-extensas, Tarea Dos, Situación Uno.

En general, de la situación uno se puede mencionar que el 50% de los estudiantes realizaron de manera satisfactoria las actividades presentadas, de las cuales se puede destacar que se obtuvieron tres parejas de estudiantes que lograron alcanzar un *Nivel de Matematización Referencial* de las cuales, una de estas parejas logró alcanzar a su vez el *Nivel de Matematización General*. En cuanto a la tarea dos, esta permitió que los estudiantes lograran mejorar en los diferentes Niveles de Matematización, en el sentido que les ayuda a observar en qué están fallando y no cometer nuevamente este tipo de errores.

4.1.2 Situación Dos. El banquete para los profesores

La Situación Dos se les presentan a los estudiantes durante la segunda sesión de la puesta en acto, se les sugiere a los estudiantes conformar las parejas de trabajo, de las cuales se prescinde a la pareja P5, debido a que por motivos educativos se les impide su participación.

Una vez organizadas las parejas, se les presentó y explicó la situación aclarando las dudas de cada uno de los estudiantes, posteriormente, se les facilita el material manipulativo con el cual los estudiantes podrán realizar su proceso de exploración.

A continuación, se presenta un análisis general de las primeras consignas de la situación, puesto que las cinco parejas realizaron sus producciones con ciertas similitudes (esto es posible por la forma en la que fueron planteadas), además los modelos concebidos por los estudiantes fueron coherente con los propuestos en el análisis previo y solo la última consigna de la situación permite caracterizar los *Niveles de Matematización* que logran alcanzar dichas parejas (es de aclarar, que son necesarias las primeras consignas puesto que estas permiten que los estudiantes se cuestionen sobre las relaciones de los conceptos de área y perímetro).

Ahora bien, en esta situación los estudiantes hacen uso del material manipulativo en búsqueda de patrones o regularidades que posibilite la esquematización de la situación problema, muchos de estos hacen uso de la Transformación de Figuras (TF) como herramienta o medio de exploración.

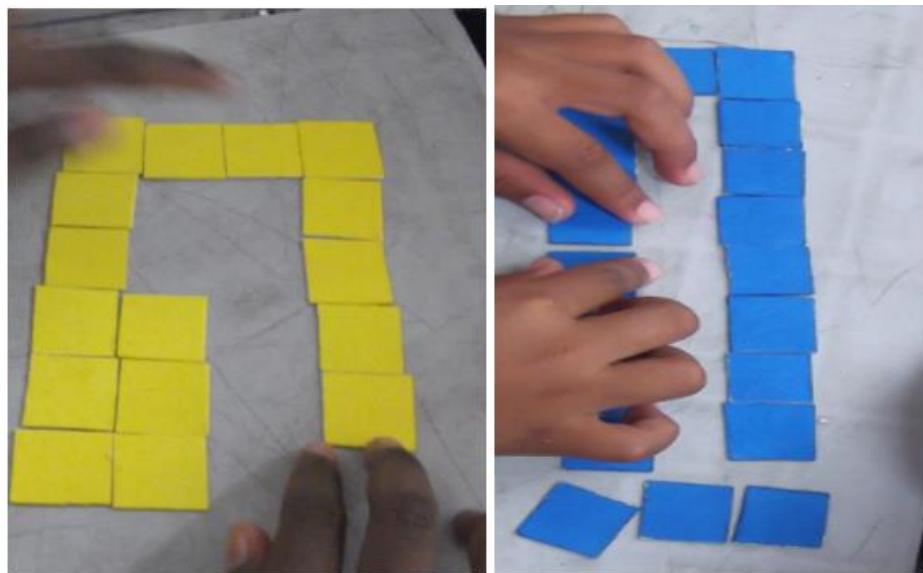


Figura 41. Modelo Particular.

Cada uno de los casos tomados en la Situación Uno por parte de los estudiantes (**Figuras 37, 38 y 39**) les proporcionan elementos para la construcción de modelos, que no solo le

permite entender la situación problema, sino también, extraer el contenido matemático que se encuentra en el mismo (**Figura 42**).

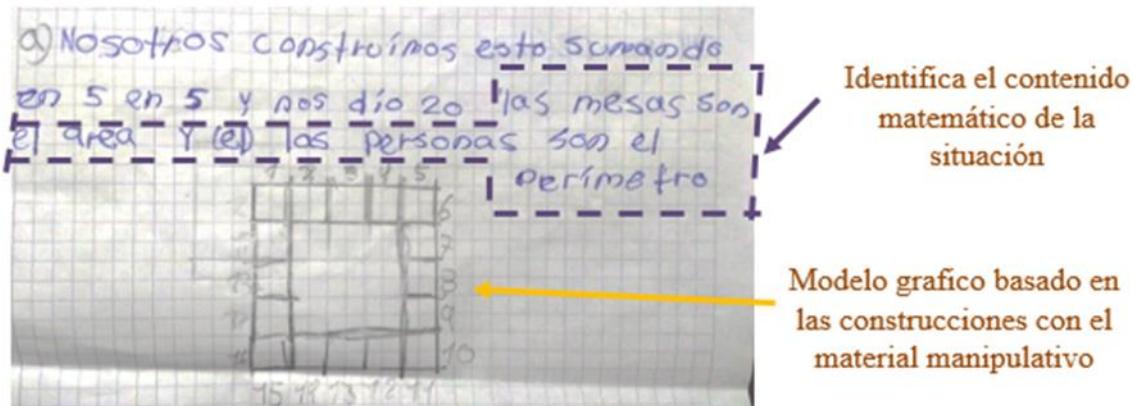


Figura 42. Identificación del Contenido Matemático.

El uso del material manipulativo permite la esquematización de la situación problemas en gráficas que se encuentran en total relación con la situación problema.

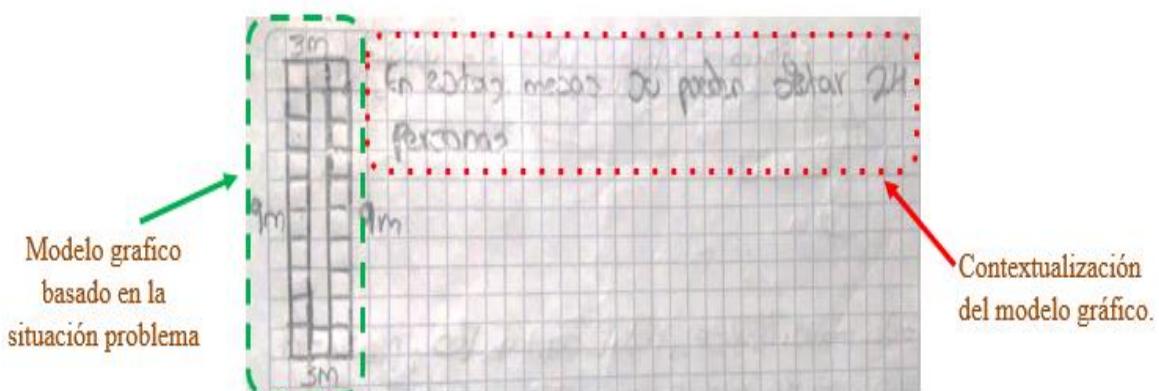


Figura 43. Modelo referido a la situación problema.

Como se puede apreciar en la **Figura 43**, los estudiantes recurren la construcción de Modelos Gráficos en los cuales se tiene en cuenta cada uno de los elementos de la situación problema. El Modelo Gráfico tiene forma rectangular, con nueve metros (9m) de largo y tres metros (3m) de ancho, esta figura está conformada por pequeños cuadrados que representan las mesas de la situación problema, además, se contextualiza el gráfico

de manera verbal, donde se hace explícito que el perímetro representa el número de personas que se pueden sentar en ese espacio.

En las producciones escritas no se hace evidente la exploración matemática que realizan los estudiantes en cada uno de los momentos de la situación, pero, al analizar las entrevistas realizadas a las diferentes parejas (tal como se presenta más adelante), se puede evidenciar los procedimientos matemáticos empleados por una de las parejas, que permitieron llegar a las posibles soluciones.

Ahora bien, en uno de los momentos se les pedía a los estudiantes ubicar dieciséis mesas de tal manera que se pudieran sentar la misma cantidad de profesores, los estudiantes no dejaron de manera explícita en las producciones escritas los procedimientos matemáticos utilizados, pero el siguiente protocolo tomado de una de las entrevistas a la pareja P1 deja en evidencia dicha exploración:

Se tomará a E1 como la representación del estudiante y P como la representación del profesor.

- P: ¿Cómo lo hicieron?
- E1: Nosotros sabemos que tenemos que encontrar una figura que tenga dieciséis metros de perímetro.
- P: correcto
- E1: Y sabemos que cuatro por cuatro es dieciséis, entonces hicimos un cuadrado y lo multiplicamos y nos dio dieciséis de perímetro con dieciséis de área.

En este caso los estudiantes extraen de la situación el contenido matemático, y realizan su exploración refiriéndose a los conceptos tomando distancia de la situación problema, lo cual les permitirá realizar generalizaciones.

Con todo esto, las parejas ya poseen el conocimiento suficiente para poder dar respuesta a la última consigna: “Con respecto a tus respuestas, ¿Es correcto afirmar que existen diversas maneras de ubicar la misma cantidad de mesas, de tal forma que se tenga mayor o menor espacio disponible?”.

En general, las producciones de los estudiantes se pueden clasificar en tres grupos, en el primer grupo están los estudiantes que contestaron de manera incorrecta, en el segundo están los estudiantes que contestaron de forma correcta y por último tenemos los estudiantes que contestan de manera correcta y justifican su respuesta mediante un ejemplo.

Iniciemos con las respuestas de las parejas de estudiantes P3 y P4:

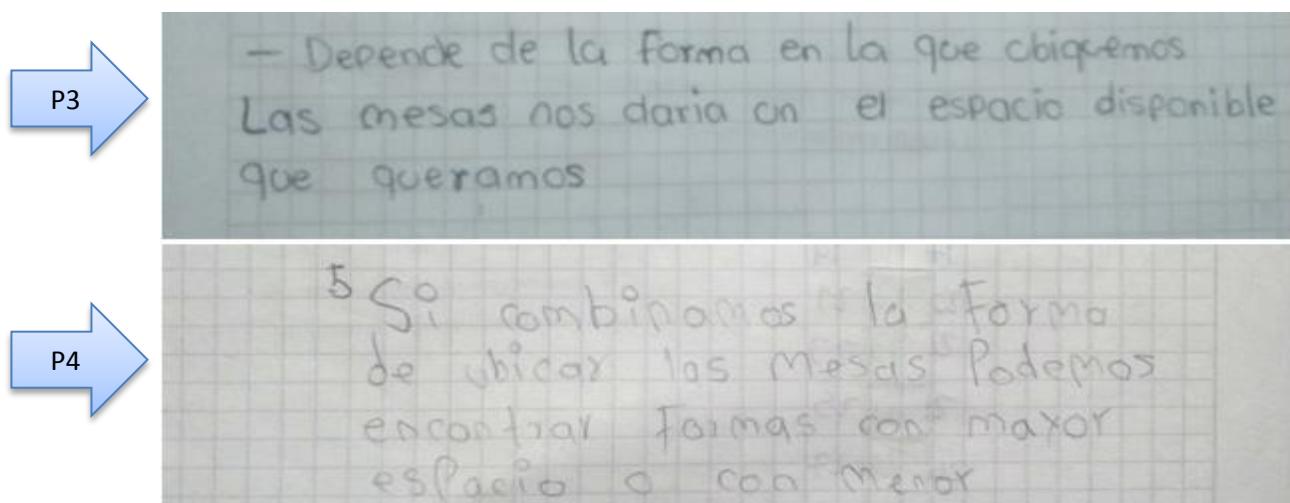


Figura 44. Respuesta de P3 y P4, Situación Dos.

En sus producciones (**Figura 44**) se puede evidenciar que utilizan la misma analogía con la que trabajaron en la situación uno, es decir, si la figura cambia su perímetro, el área de la figura no cambiaría; al utilizar esta analogía, las parejas incurren en un error puesto que en la situación anterior se trabajaba de manera directa con figuras iso-perimétricas no equi-extensas, sin embargo, esta situación trabaja el caso contrario a la situación

presentada en la primera sección, en otras palabras, se trabaja con figuras equi-extensas pero no iso-perimétricas.

Las parejas afirman que al modificar la forma en que ubican las mesas, estas deberían cambiar con respecto a su área, pero, los estudiantes no reconocen que cada una de las mesas utilizadas representa una unidad de área de la figura, además, al utilizar la misma cantidad de mesas, estas podrían modificar su forma, pero no se podrá modificar el espacio que éste ocupa.

Por otro lado, las parejas P2 y P6 contestaron de manera afirmativa a la consigna, en sus producciones (*Figura 45*), se puede apreciar que relacionan la cantidad de mesas con el área de las figuras. Es de detallar, que las producciones de los estudiantes se encuentran únicamente relacionadas a un caso particular, sus respuestas no logran trascender mucho más allá del contexto en el cual están planteados, por tal razón, los estudiantes logran alcanzar un *Nivel de Matematización Situacional*.

En este caso, se puede observar cómo las parejas de estudiantes no usan conceptos matemáticos de manera consciente, en este caso se puede observar que lo hacen de manera involuntaria para dar respuesta a la cuestión planteada, de acuerdo con Bressan, et al (2016), afirman que:

Los estudiantes, apoyándose en sus conocimientos informales, su sentido común y su experiencia, pueden identificar y describir la matemática que yace en el contexto, visualizar, esquematizar y formular el problema de diferentes formas, descubrir relaciones y regularidades, reconocer analogías con otros problemas, etc. (p. 7)

Se logra inferir que las parejas usan la información, su propia experiencia y el contexto que se les presenta, y con la ayuda de los mismos, dan respuesta a la pregunta planteada.

P2

Dolucion

E - Las figuras construidas con las mesas siempre tendrán el mismo esfuerzo porque las mesas son el área y el contorno de las mesas sino el perímetro

P6

Nosotros creemos que si tenemos la misma la misma cantidad de mesas van a ocupar lo mismo espacio.

Figura 45. Respuesta de P2 y P6, Situación Dos.

En el caso de la pareja P1, los estudiantes contestan de forma afirmativa a la consigna planteada en la situación, al igual que las parejas P2 y P6, la pareja P1 contesta de forma particular, pero en sus producciones se puede apreciar que se expresan en términos matemáticos tales como: Perímetro y área de figuras. (*Ver Figura 46*).

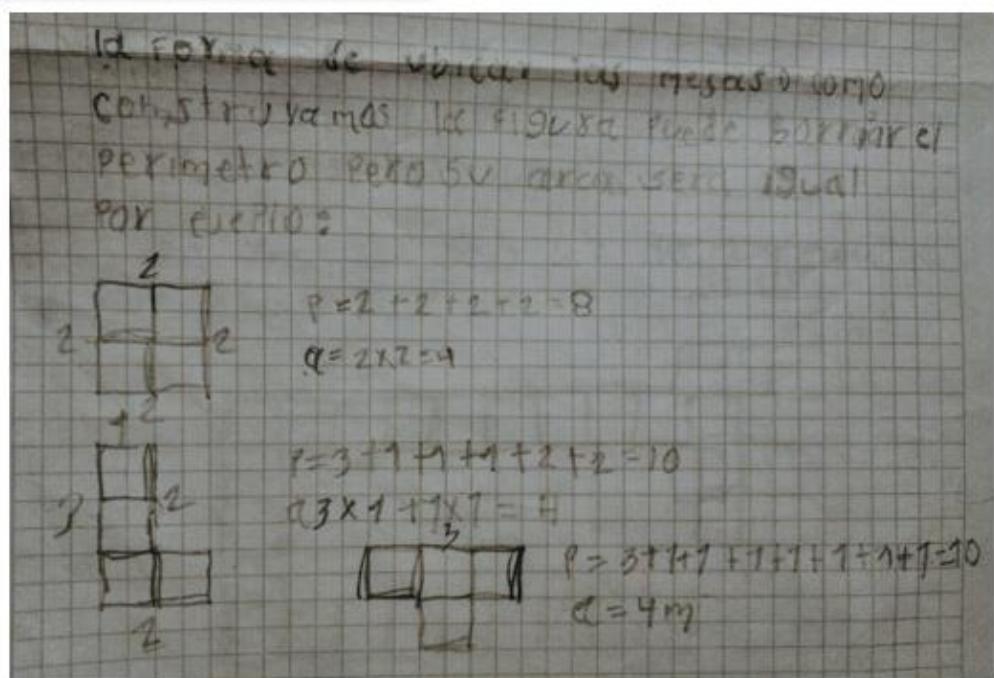


Figura 46. Respuesta de P1, Situación Dos.

De forma general, las producciones verbales y mediante la escritura de P1 se pueden caracterizar un *Nivel de Matematización Situacional*, pero su respuesta es justificada con

un ejemplo, donde se presentan modelos gráficos y algebraicos, lo cual se caracteriza como un *Nivel de Matematización Referencial*. De acuerdo con Bressan, et al (2005), se afirma que: “aparecen los modelos gráficos, materiales o rotacionales y las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referidos a la situación particular” (p. 6).

En conclusión, se logró identificar por lo menos dos Niveles de Matematización, uno Situacional relacionado con las producciones verbales y las producciones basadas en la información dada en la situación, y el otro Nivel es el Referencial, relacionado con la construcción de modelos gráficos y algebraicos. Además, se puede notar que hay ausencia con el Nivel General, puesto que las producciones de las diferentes parejas no logran reflexionar, explorar o generalizar las diferentes respuestas que logran dar sobre las consignas.

4.1.3 Situación Tres. El canje de terrenos

La Situación Tres es presentada en la tercera y última sección dispuesta para la implementación, una vez organizados los grupos de trabajo, se les presentó la situación problema, posteriormente se pide que la actividad se pretende trabajar en grupos de cuatro estudiantes, donde se fusionan las seis parejas y se les explicó en qué consistía cada uno de los puntos que se encontraban en esta situación, seguido a eso, se aclaran las dudas y se les facilitó el material manipulativo, en este caso eran geoplanos.

En esta situación los estudiantes hacen uso del material manipulativo para crear modelos que les permitan realizar comparaciones de figuras con respecto a su área y perímetro, cada uno de los modelos creados acercan al estudiante a la situación problema posibilitando su comprensión.

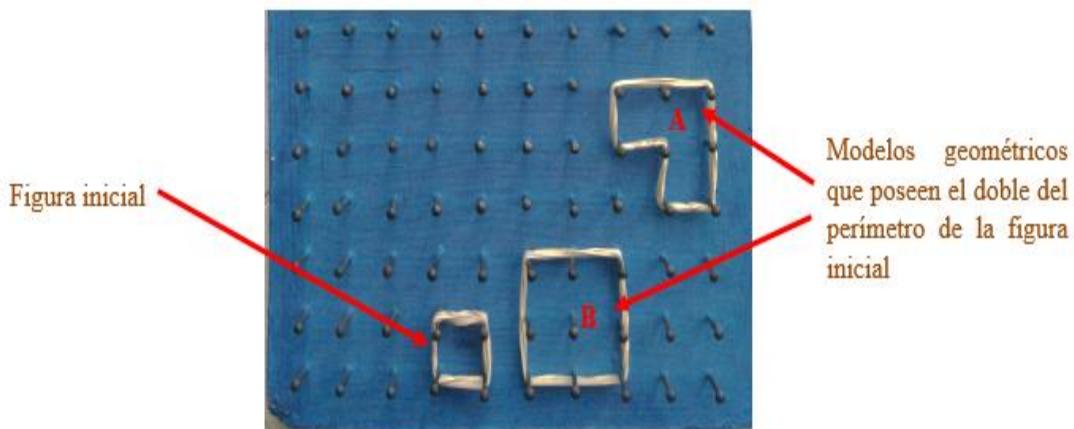


Figura 47. Modelos Geométricos duplicados.

Precisemos, antes que nada, los modelos construidos surgen a medida que en la situación problema se plantean interrogantes, los cuales llevan al estudiante a pensar posibles soluciones. En el caso de la **Figura 47**, los estudiantes hacen uso de sus conocimientos previos para plasmar modelos los cuales deben cumplir con la característica de ser el doble del contorno de la figura inicial.

En la **Figura 47** se puede apreciar que los estudiantes hacen la representación de la figura inicial, continuamente, realizan dos figuras (nos referiremos a ellas como A y B) dando respuesta a la pregunta plasmada en la situación problema, que es: “Si la constructora quisiera duplicar el contorno de la propiedad A, ¿sería equivalente a duplicar el área de dicha propiedad? ¿Por qué?”. Las figuras A y B cumplen con las características de poseer el doble del contorno de la figura inicial, pero estos modelos permiten que los estudiantes se percaten que al duplicar el contorno de la figura inicial no implica a su vez duplicar su área.

Durante el desarrollo de la Situación Tres los estudiantes no recurren a Notaciones, Tablas o Modelos Gráficos que esquematicen la problemática, sino que, los grupos a partir de los modelos planteados en el material manipulativo hacen la exploración matemática que les permite dar respuestas a las diversas preguntas planteadas en la

situación, cada una de las posibles soluciones planteadas por los estudiantes dejan en evidencia las conclusiones y generalizaciones a los que estos llegan.

En este punto se hace pertinente y necesario analizar de forma particular las producciones de los grupos de trabajo G1, G2 y G3, esto con el fin de caracterizar los Niveles de Matematización que logran alcanzar cada grupo de estudiantes.

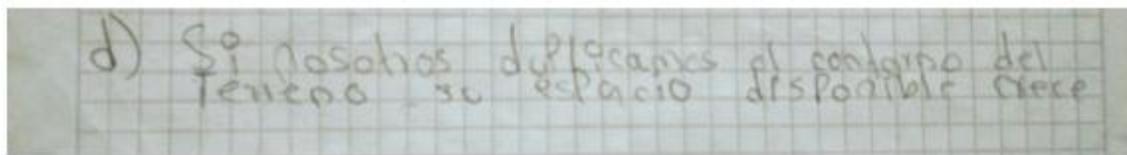


Figura 48. Respuesta de G1, Situación Tres.

Las producciones del grupo G1 (**Figura 48**) no permite caracterizar los niveles de matematización de los estudiantes, puesto que por sí sola la producción presentada no brindan los elementos necesarios para realizar un análisis, además su respuesta no puede clasificarse como correcta o incorrecta, por tal motivo, su respuesta se clasifica como una respuesta confusa.

En el caso del grupo G2, los estudiantes contestaron de forma correcta y utilizan el lenguaje formal de las matemáticas (**Figura 49**), es de resaltar que sus producciones no se encuentran condicionadas a ninguna situación en particular.

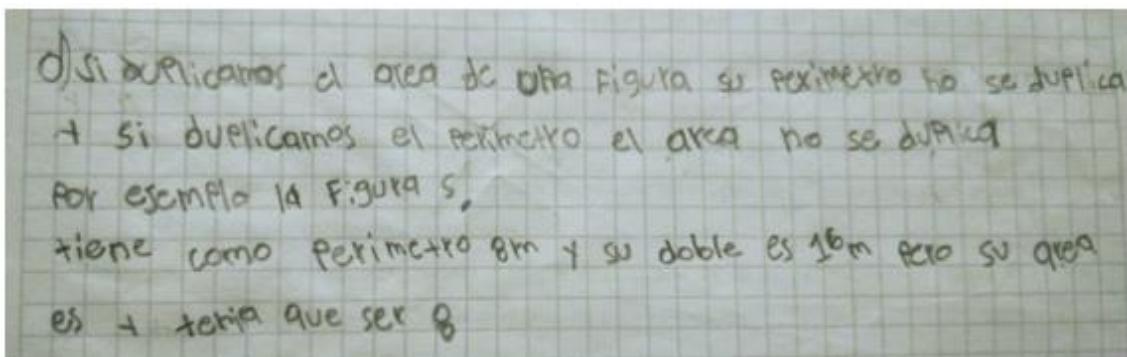


Figura 49. Respuesta de G2, Situación Tres.

La respuesta de G2 está expresada de forma general y recurre a un ejemplo para justificar su respuesta, el ejemplo tomado por el grupo de estudiantes es el de la **Figura 16**, en el cual se afirma que no existe una proporcionalidad con respecto al área y perímetro cuando se modifica la figura. Es de tener en cuenta que solo se toma un ejemplo para justificar su respuesta, lo cual implica que el grupo G2 logra alcanzar un *Nivel de Matematización General*. Bressan, et al (2005), plantea que este nivel "se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias, que supera la referencia al contexto" (p. 7).

El grupo G3 responde de forma afirmativa a la consigna de la situación (**Figura 50**), sin embargo, su respuesta se basa únicamente en los casos ya trabajados, es decir, no expresa de forma general su respuesta.

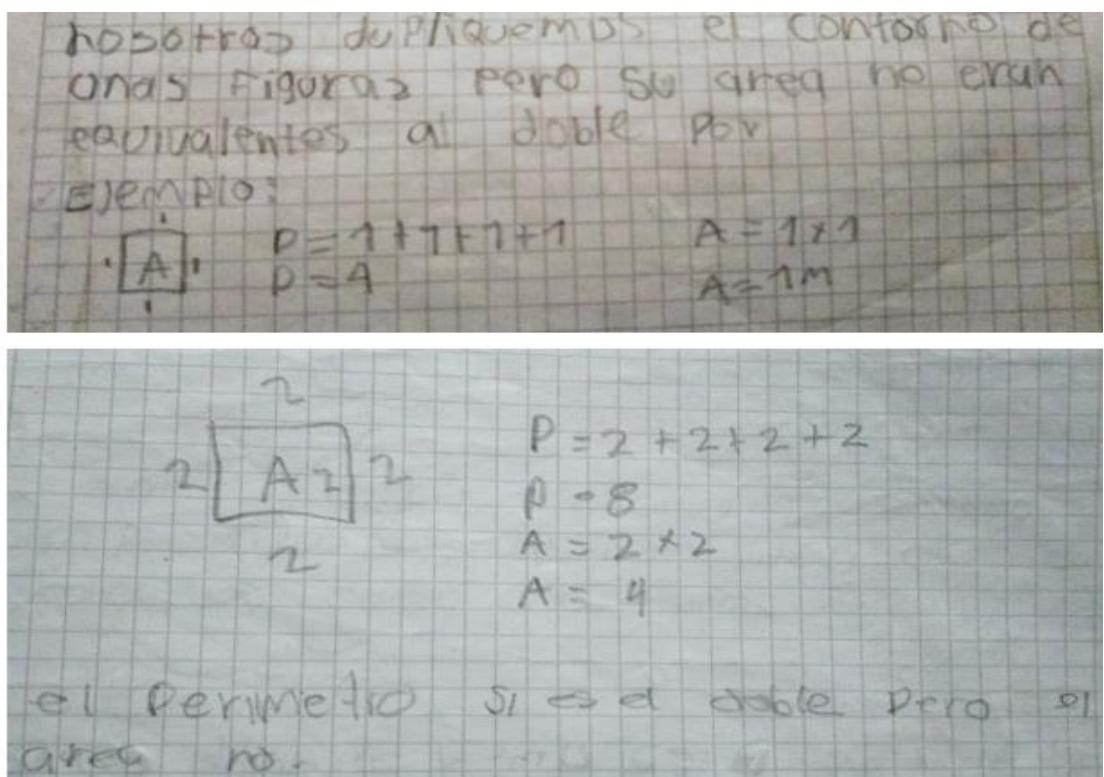


Figura 50. Respuesta de G3, Situación Tres.

La respuesta de G3 toma como ejemplo la *Figura 51*, en la cual duplican el perímetro de la figura y se comparan sus áreas, concluyendo que el área de la figura final no es el doble al área de la figura inicial. Cuando los estudiantes recurren a este tipo de modelos es porque al logrado alcanzar un *Nivel de Matematización Referencial*. En este nivel, surgen los modelos (gráficas, tablas, notaciones), propiedades y conceptos personales que permiten sintetizar o esquematizar la situación inicial (Bressan, 2016).

En conclusión, la Situación Tres permitió por medio del contexto y el material de trabajo, en este caso los geoplanos, realizar un trabajo significativo para los estudiantes, en el sentido que les permitió duplicar y triplicar figuras geométricas de forma manual y les ayudó a comparar sus magnitudes. En general, se podría considerar que el buen desarrollo de la última situación fue bueno, lo cual permitió que los diferentes grupos lograran alcanzar diversos Niveles de Matematización, entre ellos el Nivel Referencial y el Nivel General.

Conclusiones

En el presente apartado se presenta las conclusiones con respecto a los resultados obtenidos en el proceso de matematización de los conceptos de área y perímetro con algunos estudiantes del grado séptimo, para esto, se hizo necesario plantearse algunos objetivos específicos que permitirían la recolección de elementos importantes para la construcción de situaciones que dieran cumplimiento al objetivo general y a la problemática planteada desde los principios de la EMR.

De esta manera, se logra dar cumplimiento a los objetivos específicos propuestos al inicio de la presente investigación, de esta forma:

- Al momento de identificar algunos referentes didácticos, matemáticos y curriculares que permitieran favorecer la introducción de los conceptos de área y perímetro en el grado séptimo, se pudieron evidenciar algunas de las problemáticas asociadas a la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de área y perímetro, tales como confusiones entre estos dos objetos de estudio, al igual que el tratamiento que se da al área y el perímetro, cada uno de estos elementos lograron contribuir para poder pensar en cada una de las situaciones propuestas en la presente investigación.
- La articulación de los referentes de orden didáctico, matemático y curricular permitieron pensarse cada uno de los diseños y rediseños, lo cual conllevó al buen desarrollo durante la implementación, permitiendo identificar que los estudiantes pueden funcionar en distintos niveles de matematización en contenidos distintos debido a la dinamicidad de los niveles.
- En cuanto al último objetivo, se reconoce que los resultados obtenidos en cada una de las situaciones se encuentran relacionados con los contextos de las situaciones, la organización de la clase, la guía del profesor, los conocimientos

previos de los estudiantes y las reflexiones que se dan durante la socialización de los saberes. Cada uno de estos aspectos influye durante el proceso educativo, al implementar situaciones donde los estudiantes son los constructores de su aprendizaje.

Así pues, desde la EMR se llegan a identificar los distintos Niveles de Matematización que logran alcanzar los estudiantes en su proceso de matematización, y deja observar que los estudiantes se pueden ubicar en diferentes niveles de acuerdo con sus conocimientos y el grado de dificultad en el que se les presenten las situaciones problemas, lo cual permite caracterizarlos dando cumplimiento así al objetivo general trazado en la presente investigación.

De igual manera, los contextos ocupan un papel relevante dentro del proceso de matematización, dado que estos posibilitan el uso de elementos matemáticos en ambientes prácticos, cotidianos y educativos, contribuyendo así a la formación de ciudadanos matemáticamente competentes.

Ahora bien, con respecto a las situaciones planteadas en este trabajo investigativo se puede resaltar la necesidad de la fundamentación de las tareas, dado que los elementos teóricos y fenomenológicos que se tengan en cuenta serán los que permiten el proceso de matematización progresiva, y dentro del proceso de matematización, se destaca la relevancia que tienen los estudiantes cuando asumen un papel activo dentro del proceso educativo, esto fue posible, puesto que los contextos planteados en las situaciones se encuentran asociados a su realidad.

- En el caso de la Situación Uno “La cosecha de Ana y su familia”, los estudiantes trabajan en un ambiente cercano a su contexto escolar, permitiéndoles realizar y

comparar modelos gráficos en un ambiente de lápiz y papel, dichos modelos les posibilita efectuar cambios en sus perspectivas en cuanto a la posible relación que se da entre figuras isoperimétricas no necesariamente equi extensas.

- En la Situación Dos “El banquete para los profesores” deja grandes resultados en cuanto a la caracterización de los niveles de matematización, puesto que los estudiantes por medio del material manipulativo lograron llegar a generalizaciones, donde estos podían ratificar sus respuestas de manera rápida y dinámica.
- En la Situación Tres “El canje de terrenos”, los estudiantes lograron identificar por medio del material manipulativo y las consignas de la situación, que no existe una relación entre el doble o triple del perímetro de una figura con respecto a su área.

Finalmente, de este trabajo de investigación se puede concluir que:

- El trabajo con ambientes realistas permite que los estudiantes sean sujetos activos en la actividad matematizadora.
- La Educación matemática realista posibilita la construcción de secuencias o actividades significativas en el proceso educativo de los estudiantes.
- Los contextos utilizados deben estar acorde a la realidad de los estudiantes, de tal forma que estos sean significativos y de relevancia para los mismos.

Referencias

- Alagia, H., Bressan, A. y Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*, (Vol. 5). Libros del Zorzal.
- Amadeo, G. y Yáñez, J. (2006). *Relación entre perímetro y área: el caso de Patricia y las interacciones*. Una Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Huesca, (pp. 185-194). Instituto de Estudios Altoaragoneses.
- Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S., y Zolkower, B. (1973). *Educación Matemática Realista Bases teóricas*. Educación, 63.
- Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, M. (2005). *Los principios de la educación matemática realista. Reflexiones teóricas para la educación matemática*, (5), 69.
- Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S. y Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista Bases teóricas*. Obtenido de Grupo Patagónico De Didáctica De La Matemática.
- Cetina, M. (2015). *Proceso de matematización de situaciones de variación en el marco de la función cuadrática. Un estudio de caso en bachillerato*. Universidad Autónoma De Guerrero.
- Chamorro, M. (1995). *Aproximación a la medida de las magnitudes en la Enseñanza Primaria*. Revista de Didáctica, (3), p. 31-53.
- D'Amore, B. y Fandiño, M. (2007). *Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes*. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, (10), p. 39-68.

Fandiño, M. y D'Amore, B. (2009). *Área y perímetro. Aspectos conceptuales y didácticos*. Editorial Magisterio. Bogotá. Colombia.

Freudenthal, H. (2006). *Revisando la educación matemática: conferencias de China* (Vol. 9). Springer Science & Business Media.

Gamboa, R. y Ballesteros, E. (2010). *La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes*. Revista electrónica educare, 14(2).

González, J. (2014). *Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café*. Universidad de Antioquia.

Henao, S. y Vanegas, J. (2012). *La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción y uso de modelos cuadrático*, (Trabajo de pregrado). Universidad del Valle. Cali (Colombia).

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*, (Vol. 3). México: McGraw-Hill.

López, L. y Suárez, N. (2010). *Trabajando la diferencia de los conceptos de área y perímetro con actividades didácticas en alumnos de cuarto grado de primaria* (tesis de pregrado). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Luelmo, M. (2001). *Medir en secundaria: algo más que fórmulas*. *Actas del X JAEM*, 727-737.

Mántica, A., Del Maso, M., Götte, M., y Marzoni, A. (2002). *La confusión entre área y perímetro. Análisis de una propuesta áulica*. Educación Matemática, 14(1), 111-119.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*.

Bogotá, D.C.

Ministerio de Educación Nacional. (2003). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá: Magisterio.

Morra, L. y Friedlander, A. (2001). *Evaluaciones mediante estudios de caso*. Washington: Banco Mundial.

Rico, L. (1997). *Apuntes sobre fenomenología*. Documento no publicado (Informe). Granada: Universidad de Granada.

Roldán, G. y Rendón, H. (2014). *Estrategia para el estudio del área y el perímetro de figuras planas articulada al modelo socio crítico para los estudiantes de la Institución Educativa María de los Ángeles Cano Márquez* (Doctoral dissertation, Maestría en Educación Matemática-Universidad de Medellín).

Salazar, W. (2016). *Enseñanza de los conceptos de perímetro, área y volumen a estudiantes de grado sexto, a partir de maquetas* (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia-Sede Manizales).

Tamayo, M. (2004). *El proceso de la investigación científica*. Editorial Limusa.

Treffers, A. (1987), Tres Dimensiones. Un modelo de descripción de objetivos y teoría en la enseñanza de las matemáticas: The Wiskobas Project, Reidel Publishing Company, Dordrecht, Países Bajos.