



**DIFICULTADES EN LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE MEDIA
ARITMÉTICA EN ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO**

**YUSEBY STELLA TEGUE CARABALÍ
JUAN CARLOS TORRES FERNÁNDEZ**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTANDER DE QUILICHAO**

2019



**DIFICULTADES EN LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE MEDIA
ARITMÉTICA EN ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO**

YUSEBY STELLA TEGUE CARABALÍ

JUAN CARLOS TORRES FERNÁNDEZ

Director trabajo de grado:

JULIO CESAR MÉNDEZ CARDONA

Línea de investigación: Didáctica de las Matemáticas

**Trabajo de grado para optar al título de licenciado (a) en Educación Básica con
Énfasis en Matemáticas.**

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTANDER DE QUILICHAO

2019

Tabla de contenido

Resumen.....	1
Introducción	2
Capítulo 1. Aspectos Generales	5
1.1 Planteamiento del problema	5
1.2 Objetivos	11
1.2.1 Objetivo general.	11
1.2.2 Objetivos específicos.....	11
1.3 Justificación.....	12
1.4 Antecedentes	15
1.4.1 Significado y comprensión de las medidas de tendencia central.....	15
1.5 Marco Contextual.....	18
1.5.1 Población objeto de estudio.....	19
Capítulo 2. Marco Teórico	21
2.1 Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática	21
2.1.1 Configuración de objetos y procesos matemáticos.....	25
2.1.2 Relaciones entre objetos: función semiótica y conflictos semióticos.....	30
2.1.3 Comprensión y competencia.	32
2.2 Significado institucional de referencia del objeto matemático Media Aritmética ..	34
2.2.1 Campos de problemas asociados a la media aritmética.....	34

2.2.2 Definición de la media.....	38
2.2.3 Propiedades.....	39
2.2.4 Procedimientos.	43
2.2.5 Lenguaje verbal, simbólico y gráfico.	49
Capítulo 3. Metodología	52
3.1 Enfoque metodológico	52
3.1.1 Fases de la metodología.....	53
3.2 Análisis Epistémico y Semiótico de las Situaciones Problema.....	57
3.2.1 Análisis Epistémico y Semiótico Ítem 1.....	57
3.2.2 Análisis Epistémico y Semiótico Ítem 2.....	62
3.2.3 Análisis Epistémico y Semiótico Ítem 3.....	66
3.2.4 Análisis Epistémico y Semiótico Ítem 4.....	71
3.2.5 Análisis Epistémico y Semiótico Ítem 5.....	75
3.2.6 Análisis Epistémico y Semiótico Ítem 6.....	78
Capítulo 4. Análisis de las Prácticas Matemáticas.....	84
4.1 Estudio de casos	84
4.1.1 Estudio de casos Estudiante E-1.....	84
4.1.2 Estudio de casos estudiante E-2.....	97
4.1.3 Estudio de casos estudiante E-3.....	108
4.1.4 Estudio de casos estudiante E-4.....	120

4.1.5 Estudio de casos estudiante E-5.....	129
4.1.6 Estudio de casos estudiante E-6.....	138
4.2 Conclusiones del análisis semiótico de las prácticas matemáticas	148
Capítulo 5. Conclusiones	153
5.1 Conclusiones sobre los objetivos	153
Referencias bibliográficas.....	160
Anexo 1	166
Anexo 2.....	168
Anexo 3.....	170
Anexo 4.....	178

Índice de ecuaciones

Ecuación 1. Algoritmo de la media aritmética.....	44
Ecuación 2. Algoritmo de la media aritmética con frecuencias absolutas.....	45
Ecuación 3. Algoritmo de la media aritmética con frecuencias relativas.....	45
Ecuación 4. Algoritmo de inversión de la media aritmética.....	49

Índice de ilustraciones

Ilustración 1 Institución Educativa Cauca.	19
Ilustración 2. Sistema de prácticas operativas y discursivas.....	24
Ilustración 3. Configuración de objetos y procesos matemáticos.....	30
Ilustración 4. Respuesta estudiante E-1 ítem 1.....	85
Ilustración 5. Respuesta estudiante E-1 ítem 2.....	87
Ilustración 6. Respuesta estudiante E-1 ítem 3.....	89
Ilustración 7. Respuesta estudiante E-1 ítem 4.....	91
Ilustración 8. Respuesta estudiante E-1 ítem 5.....	93
Ilustración 9. Respuesta estudiante E-1 ítem 6.....	94
Ilustración 10. Respuesta estudiante E-2 ítem 1.....	97
Ilustración 11. Respuesta estudiante E-2 ítem 2.....	98
Ilustración 12. Respuesta estudiante E-2 ítem 3.....	100
Ilustración 13. Respuesta estudiante E-2 ítem 4.....	101
Ilustración 14. Respuesta estudiante E-2 ítem 5.....	103
Ilustración 15. Respuesta estudiante E-2 ítem 6.....	106

Ilustración 16 Respuesta estudiante E-3 ítem 1	109
Ilustración 17. Respuesta estudiante E-3 ítem 2	110
Ilustración 18 Respuesta estudiante E-3 ítem 3	111
Ilustración 19. Respuesta estudiante E-3 ítem 3	113
Ilustración 20. Respuesta estudiante E-3 ítem 5	115
Ilustración 21. Respuesta estudiante E-3 ítem 6	119
Ilustración 22. Respuesta estudiante E-4 ítem 1	121
Ilustración 23. Respuesta estudiante E-4 ítem 2	122
Ilustración 24. Respuesta estudiante E-4 ítem 3	123
Ilustración 25. Respuesta estudiante E-4 ítem 4	124
Ilustración 26. Respuesta estudiante E-4 ítem 5	125
Ilustración 27 Respuesta estudiante E-4 ítem 5	126
Ilustración 28. Respuesta estudiante E-5 ítem 1	129
Ilustración 29. Respuesta estudiante E-5 ítem2	130
Ilustración 30. Respuesta estudiante E-5 ítem 3	132
Ilustración 31. Respuesta estudiante E-5 ítem 4	133
Ilustración 32. Respuesta estudiante E-5 ítem 5	135
Ilustración 33. Respuesta estudiante E-5 ítem 6	136
Ilustración 34. Respuesta estudiante E-6 ítem 1	139
Ilustración 35. Respuesta estudiante E-6 ítem 2	140
Ilustración 36. Respuesta estudiante E-6 ítem 3	141
Ilustración 37. Respuesta estudiante E-6 ítem 4	142
Ilustración 38. Respuesta estudiante E-6 ítem 5	144

Ilustración 39. Respuesta estudiante E-6 ítem 6	146
Ilustración 40. Estudiantes 8°-1 Institución Educativa Cauca.	166
Ilustración 41. Estudiantes 8°-1 Institución Educativa Cauca.	166
Ilustración 42. Estudiantes 8°-1 Institución Educativa Cauca.	167
Ilustración 43 Estudiantes 8°-1 Institución Educativa Cauca.	167

Índice de tablas

Tabla 1 Ejemplo situación problema P3.	36
Tabla 2 Ejemplo situación problema P5.	38
Tabla 3 Ejemplo de datos presentado tabla de frecuencias.....	45
Tabla 4 Datos agrupados en intervalos de clase.	47
Tabla 5 Elementos lingüísticos asociado a la media aritmética.....	50
Tabla 6 Puntos de jugadoras de baloncesto.	54
Tabla 7 Rejilla de análisis semiótico.	56
Tabla 8 Objetos primarios asociados al ítem 1.	58
Tabla 9 Análisis semiótico ítem 1.....	59
Tabla 10 Objetos primarios asociados al ítem 2.	63
Tabla 11 Análisis semiótico ítem 2.....	65
Tabla 12 Objetos primarios asociados al ítem 3.	67
Tabla 13 Tabla de frecuencias ítem 3.	68
Tabla 14 Análisis semiótico ítem 3.....	69
Tabla 15 Objetos primarios asociados al ítem 4.	72
Tabla 16 Análisis semiótico ítem 4.....	73

Tabla 17 Objetos primarios asociados al ítem 5	75
Tabla 18 Análisis semiótico ítem 5.....	77
Tabla 19 Objetos primarios asociados al ítem 6	79
Tabla 20 Análisis semiótico ítem 6.....	81
Tabla 21 Análisis semiótico ítem 1 E-1.....	85
Tabla 22 Análisis semiótico ítem 2 E-1.....	87
Tabla 23 Análisis semiótico ítem 3 E-1.....	90
Tabla 24 Análisis semiótico ítem 4 E-1.....	91
Tabla 25 Análisis semiótico ítem 5 E-1.....	94
Tabla 26 Análisis semiótico ítem 6 E-1.....	95
Tabla 27 Análisis semiótico ítem 1 E-2.....	98
Tabla 28 Análisis semiótico ítem 2 E2.....	99
Tabla 29 Análisis semiótico ítem 3 E-2.....	100
Tabla 30 Análisis semiótico ítem 4 E-2.....	102
Tabla 31 Análisis semiótico ítem 5 E-2.....	104
Tabla 32 Análisis semiótico ítem 6 E-2.....	107
Tabla 33 Análisis semiótico ítem 1 E-3.....	109
Tabla 34 Análisis semiótico ítem 2 E-3.....	111
Tabla 35 Análisis semiótico ítem 3 E-3.....	112
Tabla 36 Análisis semiótico ítem 4 E-3.....	113
Tabla 37 Análisis semiótico ítem 5 E-3.....	116
Tabla 38 Análisis semiótico ítem 6 E-3.....	119
Tabla 39 Análisis semiótico ítem 1 E-4.....	121

Tabla 40 Análisis semiótico ítem 2 E-4.....	122
Tabla 41 Análisis semiótico ítem 3 E-4.....	123
Tabla 42 Análisis semiótico ítem 4 E-4.....	124
Tabla 43 Análisis semiótico ítem 5 E-4.....	126
Tabla 44 Análisis semiótico ítem 6 E-4.....	127
Tabla 45 Análisis semiótico ítem 1 E-5.....	130
Tabla 46 Análisis semiótico ítem 2 E-5.....	131
Tabla 47 Análisis semiótico ítem 3 E-5.....	132
Tabla 48 Análisis semiótico ítem 4 E-5.....	134
Tabla 49 Análisis semiótico ítem 5 E-5.....	136
Tabla 50 Análisis semiótico ítem 6 E-5.....	137
Tabla 51 Análisis semiótico ítem 1 E-6.....	139
Tabla 52 Análisis semiótico Ítem 2 E-6.....	140
Tabla 53 Análisis semiótico ítem 3 E-6.....	142
Tabla 54 Análisis semiótico ítem 4 E-6.....	143
Tabla 55 Análisis semiótico ítem 5 E-6.....	145
Tabla 56 Análisis semiótico ítem 6 E-6.....	146

Resumen

En el presente trabajo de grado, se analiza las prácticas de un grupo de estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Cauca; con el propósito de caracterizar las dificultades que están presentado en la comprensión del concepto de media aritmética. Para tal fin, se toma como referente teórico, el modelo del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), ya que, brinda herramientas de análisis de los procesos de aprendizaje; así mismo, permite abordar el problema semiótico cognitivo (Godino et al., 2019). El trabajo se fundamenta en una metodología cualitativa de tipo descriptivo; en este sentido, se realiza un análisis semiótico de las prácticas matemáticas, identificando objetos y procesos matemáticos emergentes. Así, los resultados obtenidos, evidencian la complejidad ontosemiótica de las prácticas al resolver las situaciones problema que involucran la media; además, se identifican una serie de conflictos semióticos como explicación a las dificultades en la comprensión de este concepto. Algunos de estos conflictos están relacionados: con el campo de problemas, definiciones, procedimientos y propiedades.

Palabras claves: Conflicto semiótico, Enfoque Ontosemiótico (EOS), Estadística, función semiótica, objetos y procesos matemáticos, Media aritmética.

Introducción

A partir de la incorporación de los contenidos estadísticos y probabilísticos al currículo de matemáticas, en los últimos años, se ha generado un aumento en el número de investigaciones en Educación Estadística. En este sentido, un buen número de trabajos de investigación con diferentes marcos teóricos, han centrado su interés en analizar la comprensión y las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las medidas de tendencia central, especialmente, la media aritmética. Trabajos como los de Batanero (2000); Batanero y Godino (2001); Watson (2000); Cobo y Batanero (2004). Evidencian la complejidad en la comprensión de este concepto, pues en ocasiones se aplica de forma mecánica sin comprender su significado, también la dificultad para invertir el algoritmo de la media (Cai, 1995). Así mismo, el asignarle propiedades erróneas o confundir este concepto con otras medidas de tendencia central, por ejemplo, con la mediana o moda (Russel y Mokros, 1991).

Por otra parte, la revisión de la literatura muestra que las dificultades relacionadas con el aprendizaje del concepto de media aritmética, se debe a la falta de comprensión de los diferentes elementos epistémicos u objetos primarios asociados al concepto, por ejemplo, campo de problemas, definiciones, procedimientos y propiedades (León y Uribe, 2016). Así pues, ante esta problemática, las investigaciones en Educación Estadística, centran su interés en conocer las principales dificultades que presentan los estudiantes, con el objetivo de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, es decir, poder asegurar en los estudiantes una mejor comprensión de los conceptos estadísticos, tal como, la media aritmética.

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente y los pocos antecedentes del tema de investigación en el contexto colombiano, motivan la realización del presente trabajo de grado,

inscrito en la línea de investigación de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad del Valle sede Norte del Cauca. El propósito del trabajo, es caracterizar las dificultades que presenta un grupo de estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Cauca en cuanto a la comprensión del concepto de media aritmética. De ahí que, se pretenda analizar las prácticas matemáticas de los estudiantes al resolver situaciones problema que involucran este concepto. Para tal fin, se considera como referente teórico, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, propuesto por Godino, Batanero y Font (2007), ya que es un sistema teórico, modular e inclusivo, que pretende abordar el problema epistemológico, ontológico, semiótico cognitivo, ecológico e instruccional (Godino et al., 2019). De igual manera, brinda herramientas de análisis didáctico de los procesos de aprendizaje y enseñanza, tales como: sistemas de prácticas, objetos y procesos matemáticos, trayectorias didácticas, dimensión normativa e idoneidad didáctica.

Así pues, en el presente trabajo, se profundiza en el problema semiótico cognitivo en la comprensión del objeto media aritmética, tomando como herramientas de análisis la configuración de objetos y procesos matemáticos, ya que permite describir la complejidad de las prácticas matemáticas donde se moviliza este concepto. Para tal fin, el trabajo se organiza en cinco capítulos de la siguiente manera:

En el primer capítulo, se delimitan aspectos generales, el planteamiento del problema; los objetivos que orientan el trabajo; la justificación, resaltando la pertinencia del trabajo para el campo de la Educación Matemática y la Educación Estadística; los antecedentes, detallando investigaciones que han abordado de manera paralela la problemática expuesta, y finalmente, el marco contextual, caracterizando la población objeto de estudio.

En el segundo capítulo, se describen elementos del referente teórico: Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS); en adición, el significado institucional de referencia del objeto media aritmética.

En el tercer capítulo, se presenta la metodología, fundamentada en un estudio cualitativo de tipo descriptivo. Primeramente, se presenta cada una de las fases que permitirán el desarrollo del trabajo. Posteriormente, se detalla el análisis epistémico de las situaciones problema, identificando: definiciones, procedimientos, propiedades, elementos lingüísticos. Sumado a esto, el análisis semiótico de las prácticas esperadas al resolver las situaciones problema.

En el cuarto capítulo, se presenta el análisis semiótico de las prácticas matemáticas de seis estudiantes, al resolver las situaciones problema que involucran la media aritmética, también, una serie de conclusiones a partir del estudio realizado. Finalmente, en el quinto capítulo, las conclusiones del trabajo, a partir de los objetivos propuestos; conjuntamente, algunas reflexiones, aportes, y posibles líneas de investigación futuras entorno al concepto de media.

Capítulo 1. Aspectos Generales

Algunas investigaciones realizadas en España y México, han revelado que los estudiantes de diferentes niveles escolares, presentan una problemática en cuanto a la comprensión de conceptos estadísticos. Es por esto, que el presente trabajo de grado tiene como objetivo, caracterizar las dificultades que presentan los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Cauca en la comprensión del concepto de media aritmética; puesto que permitirá a los educadores matemáticos, enfocar mejor su enseñanza en la Educación Estadística y obtener mejores resultados por parte de los estudiantes.

En este primer capítulo, se presentan algunos aspectos generales: la problemática, en la que se describe las razones que llevaron a realizar el trabajo; los objetivos, los cuales orientan la propuesta y permitirán su desarrollo; la justificación, resaltando la pertinencia del trabajo para el campo de la Educación Matemática y la Educación Estadística; los antecedentes, describiendo algunas investigaciones que han centrado su interés, en el significado y la comprensión de las medidas de tendencia central, y finalmente, el marco contextual, caracterizando la población objeto de estudio.

1.1 Planteamiento del problema

Durante los últimos años, se ha suscitado un interés en el campo de la estadística, con el objetivo de que los ciudadanos adquieran nociones estocásticas, ya que, esta área brinda herramientas que les permite tener una capacidad de análisis e interpretación de la información presentada en su entorno, ayudando a ser más críticos a la hora de tomar decisiones (Holmes, 1980). Además, desde el año 2002, la Sociedad Internacional de Educación Estadística (IASE por sus siglas en inglés, International Association for Statistical Education), viene liderando

proyectos a nivel internacional, que promueven la enseñanza de la estadística en los diferentes ámbitos de la vida (Contreras et al., 2017). Por otra parte, el interés en el campo de la estadística, ha generado una creciente preocupación por su enseñanza en la Educación Primaria y Educación Media; así pues, estos planteamientos, han llevado a la incorporación de esta área al currículo de matemáticas, y al mismo tiempo, la Educación Matemática centre la mirada en su enseñanza, debido a su desarrollo como ciencia útil en la investigación y la vida profesional (Batanero, 2000).

Con la incorporación de la estadística al currículo de matemáticas de varios países, se ha fomentado su enseñanza y el desarrollo de la cultura estadística¹ o como expresan Vásquez *et al.* (2018) “la alfabetización estadística”. Por ejemplo, en el contexto colombiano, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998; 2006), a través de los Lineamientos Curriculares y los Estándares de Competencias en Matemáticas, se dan las orientaciones para la enseñanza y el desarrollo del pensamiento estadístico, desde grado primero a grado undécimo.

Teniendo en cuenta, las orientaciones curriculares y el enfasis en la incorporacion de los contenidos estadisticos en el curriculo de matematicas de varios paises, Batanero (2000) afirma: “Sin embargo, en la práctica son todavía pocos los profesores que incluyen este tema y en otros casos se trata muy brevemente o en forma excesivamente formalizada” (p. 6). Así mismo, Mayen (2009) expresa que “La realidad docente indica que estos contenidos no se enseñan con la profundidad que merecen” (p. 11). Con respecto a lo expuesto anteriormente, se evidencia que la enseñanza de los contenidos estadísticos, no se abordan en su totalidad o en ocasiones estos no

¹ (...) que se refiere a dos componentes interrelacionados: a) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante (Gal, 2002, p. 2-3).

son incluidos en los planes de área de matemáticas; ya que la incorporación de los contenidos estadísticos en el currículo de matemáticas, no asegura su enseñanza y aprendizaje (Batanero, 2019).

Así pues, ante la paradoja de pedirle algunos profesores que movilicen un conocimiento para el que todos, no han tenido, ni formación didáctica, ni del área (Batanero, 2000), se evidencia que en la enseñanza de conceptos estadísticos, como por ejemplo, las medidas de tendencia central, el docente en ocasiones se limita a brindarle al estudiante la definición del concepto, dejando de lado las situaciones problema² y otros elementos primarios asociados a este, por ejemplo: procedimientos, propiedades, elementos lingüísticos. Por otro lado, cuando se movilizan los conceptos estadísticos, no se analizan las dificultades que subyacen en la comprensión de estos, según Sayritupac (2013) “Esto se debe, entre otras cosas, a la falta de preparación (de tipo conceptual y didáctico) de los profesores en esta área” (p. 2).

De acuerdo con Batanero (2000) la comprensión de las ideas estocásticas, no es una tarea fácil, pero los docentes deben buscar actividades que permitan un acercamiento a estos conceptos. Estos planteamientos, han llevado en los últimos años a dar un énfasis, primeramente, al sentido estadístico³ y su desarrollo; en segundo lugar, se ha propuesto desarrollar una Didáctica de la Estadística. Con respecto, al segundo planteamiento, se ha generado un aumento

² una situación-problema es cualquier tipo de circunstancia que precisa y pone en juego actividades de matematización. Como ejemplos de actividades de matematización podemos resaltar:

- construir o buscar posibles soluciones que no son accesibles inmediatamente;
- inventar una simbolización adecuada para representar las situaciones y las soluciones encontradas y para comunicar dichas soluciones a otras personas;
- producir nuevas expresiones y enunciados significativos mediante manipulaciones simbólicas; justificar (validar o argumentar) las soluciones propuestas (Godino, 2003, p. 88)

³ (...) (a) La comprensión de las ideas estadísticas fundamentales, que han contribuido al desarrollo de la estadística, se requieren en la resolución de problemas estadísticos y pueden ser enseñadas en varios niveles educativos; (b) la competencia de análisis de datos; (c) el razonamiento a partir de los datos, para realizar inferencias de muestras a poblaciones y/ o tomar decisiones acertadas en situaciones inciertas” (Batanero, 2013, p.1).

en el número de investigaciones es este campo. En este sentido, se pueden resaltar las investigaciones lideradas por el grupo de investigación de Educación Estadística de la Universidad de Granada que tienen como objetivo, analizar, y diseñar propuestas que permiten mejorar el aprendizaje en este campo, ya que los estudiantes presentan dificultades y errores en la comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.

Diferentes trabajos de investigación en el campo de la Educación Estadística, entre estos, se pueden resaltar las investigaciones de Cobo (2003) y Mayen (2009), quienes han centrado su interés en analizar el significado y la comprensión de conceptos estadísticos, especialmente, las medidas de tendencia central⁴; realizando sus investigaciones con estudiantes de secundaria en contextos diferentes; han podido concluir, que se presentan dificultades en la comprensión de estas. Al respecto Mayen (2009) argumenta “a pesar de ser conceptos estadísticos básicos, las medidas de tendencia central no son siempre bien comprendidas por los estudiantes de educación secundaria o incluso los estudiantes universitarios” (p. 14). Lo anterior, evidenciando la problemática en el aprendizaje de conceptos, como el de media aritmética; ya que el significado personal que tienen los estudiantes sobre el objeto difiere del significado institucional de referencia (Cobo, 2003).

Especialmente, uno de los conceptos estadísticos, que ha generado mayor interés en el marco de investigaciones en Educación Estadística, es la media aritmética o promedio; ya que esta medida de tendencia central es fundamental, en el análisis de datos, teoría de probabilidad y teoría de muestreo; adicionalmente, su énfasis en los diseños curriculares. Aparentemente, este

⁴ Las medidas que describen un valor típico en un grupo de observaciones suelen llamarse medidas de tendencia central. Es importante tener en cuenta que estas medidas se aplican a todo el conjunto de datos (distribución) más bien que a individuos. Entre ellas, los más importantes son la media, mediana y la moda (...) (Mayen, 2009, p.13).

concepto no es complejo, pero diversas investigaciones como: Cai (1995); Batanero, Godino y Navas (1997); Mevarech (1983), evidencian que los estudiantes de diferentes niveles escolares, presentan una serie de dificultades en la comprensión de las propiedades asociadas a la media como lo resalta Cárdenas y Segovia (2011) en su investigación⁵.

Algunas de las dificultades en el aprendizaje de la media aritmética, se deben a que los estudiantes no comprenden el algoritmo para calcular la media de un conjuntos de datos (Cai, 1995). Por otra parte, las investigaciones de Carvalho (2000), muestran que al hallar la media ponderada, los estudiantes no tienen en cuenta los valores de las frecuencias absolutas o relativas. Por otro lado, Diaz (2007) expresa que aunque se calcule de forma correcta la media de un conjunto de datos, no hay una comprensión del significado del concepto, ya que en ocasiones es aplicado de forma meccanica.

De acuerdo con Cárdenas y Segovia (2011) “En particular, la media aritmética cuenta con propiedades que son desconocidas u olvidadas al momento de analizar situaciones que la involucran” (p.20); también, las dificultades están asociadas a falta de comprensión de los objetos primarios o sistémicos asociados a esta medida de tendencia central, por ejemplo: campo de problemas, definiciones, procedimientos y propiedades (León y Uribe, 2016).

⁵ La creencia de que el valor de la media se sujeta sólo al uso de un algoritmo, Cai, (1995), sin importar su significado y las propiedades que éste posee; muchos alumnos aplican adecuadamente la fórmula, pero pocos son capaces de determinar un valor desconocido en un conjunto pequeño de datos para obtener un valor medio dado.

El error de estudiantes al escoger entre media, mediana y moda como mejor representante de los datos, Batanero, Godino, y Navas, (1997), eligiendo en muchos casos el valor de la moda, el cual no cumple con la propiedad requerida para ese caso, ser el mejor estimador de un conjunto de datos.

Las falencias de los estudiantes universitarios al pensar que la media tiene la propiedad asociativa y al hallar la media de un conjunto grande de números, dividir en partes hallando primero la media de cada parte y luego promediando el resultado obtenido, Mevarech, (1983).

Situar la media en el punto medio del conjunto de valores, propiedad que solo se cumple en distribuciones simétricas Campbell, (1974) (Cardenas y Segovia, 2011, p. 20).

Recientemente Molero (2017), en su investigación manifiesta que al comienzo de la educación secundaria, se presentan varios conflictos en la comprensión del concepto y las propiedades de la media aritmética; teniendo en cuenta que los estudiantes deberían haber trabajado esta medida de tendencia central en la Educación Primaria. Así pues, lo expuesto anteriormente, evidencia la problemática que presentan los estudiantes, con respecto a las definiciones, algoritmos, propiedades; llevando a que no haya una comprensión de la media aritmética y otros temas que involucran este concepto.

En este orden de ideas, a partir del interés generado en el campo de la Educación Estocástica, la incorporación de la estadística currículo de matemáticas, y el auge de investigaciones que buscan indagar las dificultades que se presentan en la comprensión de conceptos estadísticos como el de media; motivan a investigar en el contexto colombiano, específicamente en el municipio de Santander de Quilichao, las dificultades en la comprensión del concepto de media aritmética que están presentando los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Cauca; en este sentido, es seleccionada dicha institución, teniendo en cuenta que desde el plan de área de matemáticas del año electivo 2018, se enfatiza, que de acuerdo a los resultados de las pruebas saber, se observa una debilidad en el área de estadística, además, los estudiantes no hacen referencia a los contenidos estadísticos y probabilísticos.

De lo anterior se formula la siguiente pregunta problema:

¿Cuáles son las dificultades que presenta un grupo de estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa cauca, en la comprensión del concepto de media aritmética, resolver situaciones problema que involucran este concepto?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general.

Caracterizar las dificultades que presenta un grupo de estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Cauca, en la comprensión del concepto de media aritmética, al resolver situaciones problemas que involucran este concepto.

1.2.2 Objetivos específicos.

- Identificar las unidades de análisis, a partir del referente teórico y el significado institucional de referencia del objeto media aritmética.
- Determinar la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas a partir del análisis de los objetos y procesos matemáticos emergentes de estas.
- Generar algunas reflexiones y recomendaciones a los docentes en ejercicio o formación entorno a las dificultades que se presentan en la comprensión del concepto de media aritmética.

1.3 Justificación

El proyecto se justifica, en el interés en campo de la estadística y su incorporación al currículo de matemáticas. Se ha fomentado su enseñanza y el desarrollo de una cultura estadística en los ciudadanos; resaltando su importancia en la vida diaria, pues se ha incorporado de una manera notoria, en el entorno y realidad social; generando la necesidad de tener conocimiento en esta área, para poder interpretar la información que se presenta en los medios de comunicación, redes sociales o espacios académicos. Además, el énfasis en la enseñanza de los contenidos estadísticos y probabilísticos a partir de las orientaciones curriculares del Ministerio de Educación Nacional: Lineamientos Curriculares, Estándares de Competencias en Matemáticas y Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 1998; 2006; 2015). Sumado a esto, resulta importante centrar el interés, en caracterizar las dificultades que están presentando los estudiantes en la comprensión de los conceptos de estadísticos, especialmente, la media aritmética.

En este orden de ideas, el propósito del trabajo, es la caracterización de las dificultades que presenta un grupo de estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Cauca, en la comprensión del concepto de media aritmética; se debe agregar que, la selección del contexto se fundamenta, teniendo en cuenta que desde el plan de área de matemáticas de la institución para el año electivo 2018, se manifiesta que al contrastar los resultados de las pruebas institucionales del área de matemáticas, es evidente que en los temas del área de estadística, se presenta mayor dificultad, ya que los estudiantes no hacen referencia a conceptos de estadística.

Por otro lado, el trabajo se realiza en respuesta a la preocupación por el aprendizaje de los conceptos estadísticos y probabilísticos. Se propone seguir la línea de investigación en Educación Estadística de la Universidad de Granada; quienes han propuesto analizar el

significado y la comprensión de los conceptos estadísticos. Estas investigaciones, han estado lideradas por los investigadores Juan Godino, del departamento de Didáctica de las Matemáticas y Carmen Batanero, investigadora del grupo de Educación Estadística, quienes en los últimos años han realizado grandes aportes al campo de la Educación Matemática y la Educación Estadística, así mismo, se resalta los trabajos realizados por Cobo (2003); Mayen (2009); Molero (2017) inscritos en este campo de investigación.

Con la intención de abordar la problemática expuesta, se toma como referente teórico, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), presentado por Godino, Batanero y Font (2007), teniendo en cuenta que dicho marco teórico, brinda cinco categorías de análisis didáctico de los procesos de estudio matemático: sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos, trayectorias didácticas, dimensión normativa e idoneidad didáctica. De acuerdo al interés del trabajo, se profundiza en los elementos del nivel dos: análisis de los objetos y procesos matemáticos emergentes de las prácticas. En adición, se aborda la noción de función semiótica, presentada por Godino (2003). Esta noción teórica, brindan la herramienta para un análisis de tipo semiótico de las prácticas matemáticas de los estudiantes, al resolver las situaciones problema que involucran el concepto de media; al mismo tiempo, el análisis de los objetos y procesos matemáticos, permite describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas como factor explicativo de los conflictos semióticos (Godino et al., 2007).

Ahora bien, se toma como objeto matemático, la media aritmética; ya que este concepto es utilizado, en el análisis de datos, igualmente, permite la comprensión de diferentes temas asociados al campo de la estadística y probabilidad: la esperanza matemática, en la teoría de la probabilidad; la media, en variables aleatorias discretas; el uso de la media muestral, en las diferentes distribuciones de probabilidad con variables discretas. Mayen (2009) expresa “toda la

teoría de muestreo usa extensamente la idea de media, por las propiedades de la media muestral, de ser un estimador insesgado, eficiente, consistente y suficiente de la media poblacional, además de tener mínima varianza” (p. 17). En otras palabras, el concepto de media aritmética, tiene un papel privilegiado en la estadística; de ahí que, resulta importante analizar las dificultades que se presentan en la comprensión de este concepto, ya que la media aritmética, permite la comprensión de diferentes temas asociados al campo de la estadística, descriptiva e inferencial y su uso en la vida cotidiana.

Cabe resaltar, que los aportes del trabajo permitirán a los docentes del área de matemáticas y estadística conocer las dificultades que están presentando los estudiantes de la Institución Educativa Cauca, en la comprensión del concepto de media aritmética. Conjuntamente, los elementos del marco teórico y metodológico, brindan herramientas, que permiten al docente aplicarlas o adecuarlas, para identificar las dificultades en la comprensión de diferentes conceptos, estadísticos o matemáticos; permitiéndole organizar sus clases y lograr que los estudiantes tengan una mejor comprensión de ideas estadísticas, y, por lo tanto, haya mejores resultados en las pruebas institucionales (Pruebas saber). Adicionalmente, el trabajo se inscribe en el marco de las investigaciones sobre Educación Estadística realizadas bajo el Enfoque Ontosemiótico (Godino, 2019).

En síntesis, este trabajo es pertinente porque permitirá a los docentes de la Institución Educativa Cauca y profesores en formación, un modelo para identificar las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de conceptos estadísticos, probabilísticos y matemáticos. Sumado a esto, se busca que la propuesta sirva para proponer una mejora en la enseñanza cuando se movilizan conceptos estadísticos como la media aritmética.

1.4 Antecedentes

Existen diferentes investigaciones que tiene como objetivo, analizar el significado y la comprensión de las medidas de tendencia central, especialmente, han centrado su atención en la media aritmética. A continuación, se describen algunos estudios que han abordado de manera paralela la problemática expuesta en el presente trabajo; entre estos, se pueden resaltar, las investigaciones realizadas por el grupo Educación Estadística de la Universidad de Granda, España; algunos trabajos de pregrado del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle; de igual manera, se tendrán en cuenta otros trabajos desarrollados en el contexto colombiano.

1.4.1 Significado y comprensión de las medidas de tendencia central.

Se pretende considerar las investigaciones realizadas por Cobo (2003) y Mayen (2009) quienes centraron su interés en el significado que los estudiantes de secundaria les atribuían a las medidas de posición central. Tomando como referente teórico, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino y Batanero, 1994; Godino, 1996, 1999, 2002, 2003; Godino, Batanero y Roa, 2005), y utilizando el mismo cuestionario, pero realizando sus investigaciones en contextos diferentes, evidencian la complejidad ontosemiótica de las medidas de tendencia central.

Cobo (2003) evalúa en estudiantes españoles, la comprensión de las medidas de tendencia central, particularmente, el significado personal que los estudiantes de 1º y 4º de educación secundaria obligatoria (E.S.O), les atribuían a estas; también, realiza un análisis de dos libros de texto escolares, para fijar el significado institucional de referencia del objeto matemático; con el objetivo de construir el cuestionario que sería aplicado a los estudiantes.

La investigación realizada por Cobo (2003) evidencia la complejidad que tiene la enseñanza de conceptos estadísticos, tal como las medidas de tendencia central, dado a la variedad de elementos del significado; conjuntamente, la dificultad que presentan los estudiantes, al resolver situaciones que involucran estos conceptos. A partir de un análisis semiótico de algunos ítems de promedios (media aritmética), realiza un estudio de casos con cuatro estudiantes de los grados 1º y 4º de ESO, con el objetivo de analizar la comprensión que tienen sobre la media aritmética. Lo anterior, evidenciado la dificultad de este concepto.

Mayen (2009) siguiendo la misma línea de investigación, pero con un grupo de estudiantes mexicanos, con un rango de edad mayor que los estudiantes de Cobo (2003) evalúa el significado atribuido a las medidas de tendencia central, especialmente la mediana; con el objetivo de determinar complejidad ontosemiótica del concepto; para esto, realiza un análisis semiótico, identificando, los objetos y procesos matemáticos emergentes de las prácticas; a partir del estudio realizado, detalla una serie de conflictos semióticos relacionados con la comprensión del concepto de mediana.

En el contexto colombiano, se pueden resaltar los trabajos realizado por Díaz (2007) quien, en su trabajo de pregrado, realiza un estudio del significado atribuido al concepto de media aritmética, por estudiantes de grado séptimo. Utilizando como referente teórico el Enfoque Ontosemiótico (EOS), evalúa el significado personal de los estudiantes, al resolver dos situaciones problemas, asociados al campo de problemas de la media aritmética. El trabajo realizado, evidencia complejidad de este concepto para los estudiantes, ya que al resolver situaciones problemas, se observa que aplican de forma mecánica el algoritmo sin comprender el significado de la media aritmética.

De igual manera, Posada y Rosada (2011) analizan las dificultades que presentan los estudiantes de educación básica, en la obtención e interpretación de las medidas de tendencia central; tomando como referente, la teoría de funciones semióticas de Godino (2003) detallan una serie de dificultades relacionadas con la media, mediana y moda. Por su parte, Cárdenas y Segovia (2011) analizan las dificultades que presentan los estudiantes de grado decimo, con respecto a la media aritmética; realizando un análisis de respuestas dadas por los estudiantes, identificando los razonamientos, estrategias, errores en la solución de las actividades y dificultades en la comprensión de las propiedades conceptuales de la media.

Recientemente Molero (2017) en su investigación analiza la comprensión de la media aritmética, con estudiantes de españoles de segundo grado de E.S.O (educación secundaria obligatoria), tomando como referencia los ítems de las investigaciones de Cobo (2003) y Mayen (2009), evalúa los razonamientos y las dificultades que presentan al resolver situaciones problemas que involucran esta medida de tendencia central.

Molero (2017) analiza las prácticas matemáticas; la dificultad de cada ítem, y los errores que presentan los estudiantes. Sumado a esto, contrasta lo conflictos semióticos encontradas con investigaciones como las Cobo (2003), aunque no hace un análisis semiótico tan detallado como el de Mayen (2009) quien analiza las prácticas y los procesos matemáticos, con el objetivo de explicar la complejidad ontosemiótica al resolver situaciones problemas que involucran la mediana. Finalmente, concluye que se presentan dificultades en el significado de media, teniendo en cuenta que los estudiantes deberían haber trabajado este concepto desde la educación primaria.

1.5 Marco Contextual

La Institución Educativa Cauca, esta localiza en el municipio de Santander de Quilichao, carrera 9 #1-14, barrio el centro. Dicha institución, pertenece al convenio que tiene actualmente la Universidad del Valle, con ciertas instituciones educativas del municipio; para realizar la práctica profesional I y II de los estudiantes del programa de pregrado de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Actualmente, la institución ofrece los niveles escolares de transición a grado undécimo; en la jornada de la mañana la primaria y en la tarde la secundaria (sexta a once grado). La institución educativa, para el año lectivo 2018 atiende una población estudiantil de 988 estudiantes distribuidos entre la jornada mañana y tarde.

Por otro lado, se ha decidido seleccionar la Institución Educativa Cauca, teniendo en cuenta que desde el plan de área de matemáticas del año electivo 2018, se enfatiza que los resultados en la pruebas saber en el área de matemáticas, ha mejorado, pero con respecto al área de estadística y probabilidad no se tiene un buen desempeño⁶.

En este orden de ideas, a partir del interés de caracterizar las dificultades en la comprensión del concepto de media aritmética, se ha seleccionado el grado octavo, especialmente el grado (8°-1); un grupo de 34 estudiantes entre hombres y mujeres, con edades entre 13-14 años.

⁶ (...) Los resultados institucionales de las pruebas saber del área de matemáticas muestran en cambio un mayor dominio en la geometría, mientras que el desempeño en aritmética fue promedio respecto a los demás temas. Los alumnos no hacen referencia al tema de estadística y probabilidad como importante e interesante y, de hecho, al contrastar con los resultados de la prueba, es evidente que es el tema que presenta mayor debilidad. (Plan de área matemáticas Institución Educativa Cauca, 2018, p. 6).



Ilustración 1 Institución Educativa Cauca.

1.5.1 Población objeto de estudio.

De acuerdo con los documentos institucionales, se especifica que los miembros de la comunidad educativa, pertenecen a los estratos sociales 1, 2 y 3; el grupo familiar promedio de este sector es de cuatro a cinco personas. La fuente de ingreso de los padres de familia varía mucho, porque se encuentran ubicados en diferentes empleos, por lo tanto, el salario devengado es como empleado público o de comercio informal. La gran mayoría no cuenta con una vivienda propia y algunos viven en barrios de zonas de invasión; de igual manera, algunos de los padres de familia, solo tiene formación en la educación básica primaria.

Lo anterior, permite evidenciar una serie de dificultades del contexto que pueden llevar a que exista una desmotivación y bajo rendimiento en las diferentes áreas y especialmente en el área de estadística.

1.5.1.1 Sujetos participantes del estudio.

Para el desarrollo de la propuesta, se ha decidido seleccionar a los estudiantes del grado octavo (8º-1) de la Institución Educativa Cauca. Un grupo de 34 estudiantes, con edades entre los 12 y 13 años; se debe agregar que, para el análisis de las prácticas matemáticas, se seleccionaran aleatoriamente seis estudiantes, con el objetivo de realizar un análisis de sus prácticas matemáticas con mayor profundidad.

Resumiendo, en el capítulo 1, se ha descrito la problemática y las dificultades que subyacen a la comprensión de los conceptos estadísticos, particularmente, la media aritmética; Así mismo, se han formulado los objetivos que se proponen alcanzar; de igual manera, se ha justificado la pertinencia del trabajo para el campo de la Educación Estadística y los aportes teóricos y metodológicos del mismo.

Capítulo 2. Marco Teórico

En este capítulo, se presentan el referente teórico que, de acuerdo al propósito del trabajo, permitirá analizar las prácticas y caracterizar las dificultades en la comprensión del concepto de media aritmética. En primer lugar, se presenta el referente teórico, se describen elementos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, tales como: prácticas, objetos y procesos matemáticos. En segundo lugar, se presenta el significado institucional de referencia de la media aritmética, caracterizando los elementos epistémicos u objetos primarios: campo de problemas, definiciones, propiedades, algoritmos, procedimientos y elementos lingüísticos.

2.1 Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática

Para el desarrollo del trabajo de grado, se ha seleccionado como referente teórico, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), propuesto por el grupo de investigación de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002, 2003; Godino, Batanero y Font., 2007; Godino, 2017), puesto que articula diversas nociones teóricas sobre el conocimiento matemático. De acuerdo con Godino (2017) “Dicho enfoque se apoya en presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas, y adopta principios didácticos de tipo socio-constructivista e interaccionista para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje (p. 93)”. En este sentido, el Enfoque Ontosemiótico, se considera como un sistema teórico, modular e inclusivo, que pretender abordar el problema epistemológico, ontológico, ecológico e instruccional, semiótico cognitivo⁷

⁷ ¿Qué es conocer un objeto matemático? ¿Qué significa el objeto O para un sujeto en un momento y circunstancias dadas? (Godino et al, 2019, p.6).

así, mismo, brinda herramientas metodológicas para abordar estos problemas.(Godino et al., 2019).

En el Enfoque Ontosemiótico, las matemáticas se pueden considerar desde tres perspectivas: la primera, una actividad de resolución de problemas, socialmente compartida; la segunda, un lenguaje simbólico y la tercera como un sistema conceptual organizado. A partir de las tres perspectivas mencionadas anteriormente, se toma las situaciones problemas, como toda actividad de matematización y centro de interés del Enfoque Ontosemiótico. Así pues, tomando como referente las situaciones problema, se puede definir: los sistemas de prácticas, los objetos personales e institucionales, significados de los objetos matemáticos (personal e institucional), objetos y procesos matemáticos; aspectos que se describirán en el siguiente apartado.

Actualmente, el Enfoque Ontosemiótico, articula cinco niveles de análisis didáctico de los procesos de estudio: el primer nivel, el sistema de prácticas; segundo nivel, la configuración de objetos y procesos; el tercer nivel, las configuraciones y trayectorias didácticas; el nivel cuatro, el sistema de normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y finalmente, en el quinto nivel, la idoneidad didáctica del proceso de estudio. Para el desarrollo del trabajo, se retoman elementos del primer nivel (sistema de prácticas) y un énfasis en niveles (objetos y procesos matemáticos), ya que, de acuerdo al objetivo del propuesto, permitirá analizar los objetos y procesos emergentes de las prácticas; de igual manera, determinar la complejidad ontosemiótica de las mismas.

Primeramente, uno de los conceptos que se caracteriza en el Enfoque Ontosemiótico (EOS), son las prácticas, noción introducida, con el fin de sintetizar mediante ella, aspectos de la matematización. La *práctica matemática*, se puede definir como “toda actuación o manifestación

(lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 8). Desde el EOS, se considera que los objetos matemáticos, emergen de las prácticas que realiza el estudiante al resolver una situación problema. Por ejemplo, una situación problema asociada a la media aritmética, puede ser la comparación de dos distribuciones de datos con variables numéricas; una práctica matemática, puede ser hallar la media aritmética de cada distribución, es decir, puede sumar todos los valores de la distribución y dividir entre número total de datos, para hallar el representante de cada distribución.

Según el tipo de prácticas, están pueden ser: *prácticas personales*, aquellas que realiza, el estudiante para resolver una situación problema; *prácticas institucionales*, como las prácticas significativas para resolver un problema que son compartidas en el seno de una institución, como, por ejemplo, la comunidad de matemáticos o estadísticos.

Teniendo en cuenta que los conceptos matemáticos, por ejemplo, el de media aritmética puede utilizarse en diferentes contextos a lo que Godino (2003) denomina "unidades culturales (o institucionales)" (p.101). Se propone distinguir entre el *significado personal* y *significado institucional* de los objetos matemáticos.

El *Significado institucional*, es el sistema de prácticas institucionales, asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto matemático en un momento dado. Mientras que el *Significado personal*, es el sistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas, dónde emergen los objetos personales en un momento dado (Godino y Batanero, 1994). Así cuando se pregunta ¿Qué es el objeto matemático media aritmética? Desde el EOS, se propone la siguiente respuesta: es el sistema de prácticas que realiza el estudiante (significado personal) o

compartido en el seno de una institución (significado institucional) con el propósito de resolver un tipo de situaciones problemas, en las que se requiere encontrar, el representante de un conjunto de datos (Godino, Batanero y Font., 2007).

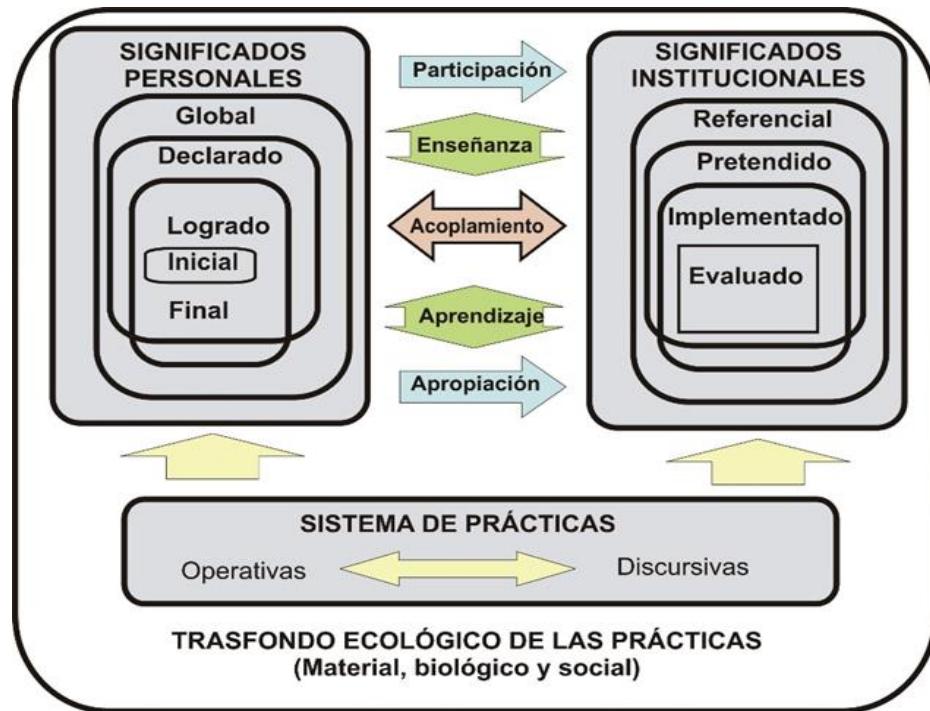


Ilustración 2. Sistema de prácticas operativas y discursivas.

De acuerdo Godino (2003) en el significado institucional de un objeto, se puede distinguir cuatro tipos de significados: significado referencial, pretendido, implementado y evaluado. Dentro de la propuesta, nos interesa el significado referencial, ya que nos permite caracterizar los objetos asociados a la media aritmética.

Desde la dimensión del estudiante, significado personal (subjetivo), de acuerdo con Godino (2003), se propone la siguiente clasificación: significado global, declarado, logrado. La parte del significado personal, que interesa considerar, es el significado personal declarado, ya

que da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto institucional.

Descritos los elementos teóricos del nivel 1, sistemas de prácticas (prácticas matemáticas, significado institucional y personal), y con la intención de abordar la problemática expuesta en el capítulo 1, enseguida, se profundizará en el nivel dos: configuración de objetos y procesos matemáticos. Desde el punto de vista de Godino, Font y Wilhelmi (2008), este nivel, se centra en los objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas; al mismo tiempo, permite mostrar la complejidad ontosemiótica de las mismas, como explicación a los conflictos semióticos.

2.1.1 Configuración de objetos y procesos matemáticos.

De acuerdo con Godino, Batanero y Font (2007) consideran que los objetos matemáticos emergen del sistema de prácticas; la emergencia de los objetos matemáticos, es un proceso complejo, por esto, se propone considerar dos niveles de objetos: Los objetos primarios y los atributos contextuales u objetos secundarios que permiten considerar los objetos primarios desde diferentes dualidades o facetas. A continuación, se presenta la tipología de objetos primarios:

Elementos lingüísticos: términos, expresiones, notaciones, gráficos, en sus diversos registros escrito, oral, gestual (Godino y Batanero, 1994). Se utilizan para representar los datos del problema, expresar la solución a un problema. Por ejemplo \bar{x} representa media aritmética; f_i frecuencia relativa.

Situaciones problema: aplicaciones extra matemáticas, tareas, ejercicios, que llevan a una actividad de solucionar problemas de tipo matemático; desde el Enfoque Ontosemiótico, se

considera, que los objetos matemáticos emergen de las situaciones problema, por ejemplo, hallar el valor representativo de un conjunto de datos.

Conceptos o definición: introducidos mediante definiciones; por ejemplo, la definición de media aritmética como el promedio aritmético de un conjunto de datos (definición 2).

Proposiciones: enunciados o características sobre los conceptos, por ejemplo: el valor de numérico de media aritmética cambia cuando se cambia cualquier valor (propiedad numérica 4).

Procedimientos: son algoritmos, operaciones o técnicas de cálculo, que realiza el estudiante para solucionar la situación problema; por ejemplo, inversión del algoritmo de cálculo de la media (procedimiento 6).

Argumentos: enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo.

En el segundo nivel de objetos, se encuentran los atributos contextuales; este nivel permite considerar los objetos primarios desde diversos puntos de vista o dualidades; según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas las siguientes facetas o dimensiones duales Godino (2003).

Personal e institucional: si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran “objetos institucionales”; mientras que, si estos sistemas son específicos de una persona, se consideran como “objetos personales” (Godino y Batanero, 1994, p. 338).

Ostensivo-no ostensivo: un objeto es ostensivo, si se puede visualizar, mostrar a los demás, a través de los objetos primarios (por medio de un sistema de representación); los objetos no ostensivos son aquellos objetos abstractos, que no se pueden ver, es decir son intangibles o que son pensados por el estudiante, pero se hacen ostensivos.

Extensivo – intensivo (ejemplar- tipo): si un objeto es expresado como un caso particular, se considera un ejemplo, por lo tanto, tiene un carácter extensivo. Y si es más general, se considera intensivo. Se puede considerar un ejemplo particular de la media de un conjunto de datos (extensivo) y un caso más general (intensivo) puede estar asociado a la media como:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Expresión-contenido: relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado). Por ejemplo el signo \bar{x} remite al concepto de media aritmética o su algoritmo que sería el significado (la regla ya ha sido establecida).

Unitario-sistémico: En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio (Godino, Batanero y Font, 2007).

De acuerdo con lo propuesto por Godino, Batanero y Font (2007), se propone analizar los objetos primarios y las dualidades, a través de la relación proceso-producto; es decir, cada uno de los objetos primarios, tiene asociado un proceso matemático: procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización) y argumentación. Es decir, cada objeto primario emerge de un

proceso: los elementos lingüísticos emergen de los procesos de comunicación; las situaciones problemas de los procesos de problematización; los conceptos de los procesos de definición; las proposiciones de la enunciación; los procedimientos de procesos de algoritmización y los argumentos emergen de los procesos de argumentación.

Al respecto, Godino, Batanero y Font, (2007), señalan que estos objetos primarios, estarán relacionados entre sí formando configuraciones, que se pueden definir como las redes de objetos interviniéntes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos y estas configuraciones pueden ser socio-epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales).

La dualidad de los objetos secundarios o atributos contextuales según Godino, Batanero y Font (2007), se da mediante procesos matemáticos de: institucionalización – personalización; generalización-Particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; materialización /concreción –idealización/ abstracción; expresión/representación – significación. Con base a lo propuesto por Godino et al. (2007), estos procesos se pueden caracterizar de la siguiente manera:

Procesos de generalización-particularización: están asociados a la dualidad (extensivo-intensivo) da origen a lo particular y general; al considerar la ecuación $6x^2 - 10x + 9 = 0$, se está considerando un ejemplo particular del tipo de ecuaciones de la forma $x^2 + bx + c = 0$, que sería su generalización.

Procesos de materialización-idealización: están asociados a la dualidad ostensiva y no ostensivo. Cuando el objeto es pensado, pero no se manifiesta por un ostensivo, se hace un proceso de idealización. En una práctica cuando el objeto es representado por un ostensivo, hay un proceso de materialización.

Procesos descomposición-reificación: asociado a lo sistémico- unitario. En un proceso de descomposición, los objetos se analizan por separados, considerados como sistémicos (media, moda, mediana), el proceso de reificación, permite agrupar varios objetos, es decir unitario (medidas de tendencia central).

Procesos de representación- significación: permiten la dualidad, expresión (representación de un objeto) y contenido (significado del objeto), es decir la representación de un objeto y su significado.

Procesos de personalización- institucionalización: dan origen a la dualidad personal (la práctica es realizada por el estudiante); institucional (si la práctica es compartida en una institución).

En la ilustración 3, se presentan, las diferentes nociones teóricas, objetos y procesos matemáticos, descritos anteriormente. Desde lo propuesto por el Enfoque Ontosemiótico, la actividad matemática, ocupar el lugar central y se modeliza en términos de “prácticas operativas y discursivas” (Godino, Batanero & Font, 2007). De estas prácticas matemáticas, emergen los diferentes objetos primarios formando configuraciones. Finalmente, los objetos secundarios y procesos matemáticos desde las cinco dimensiones o dualidades (Godino et al., 2007).

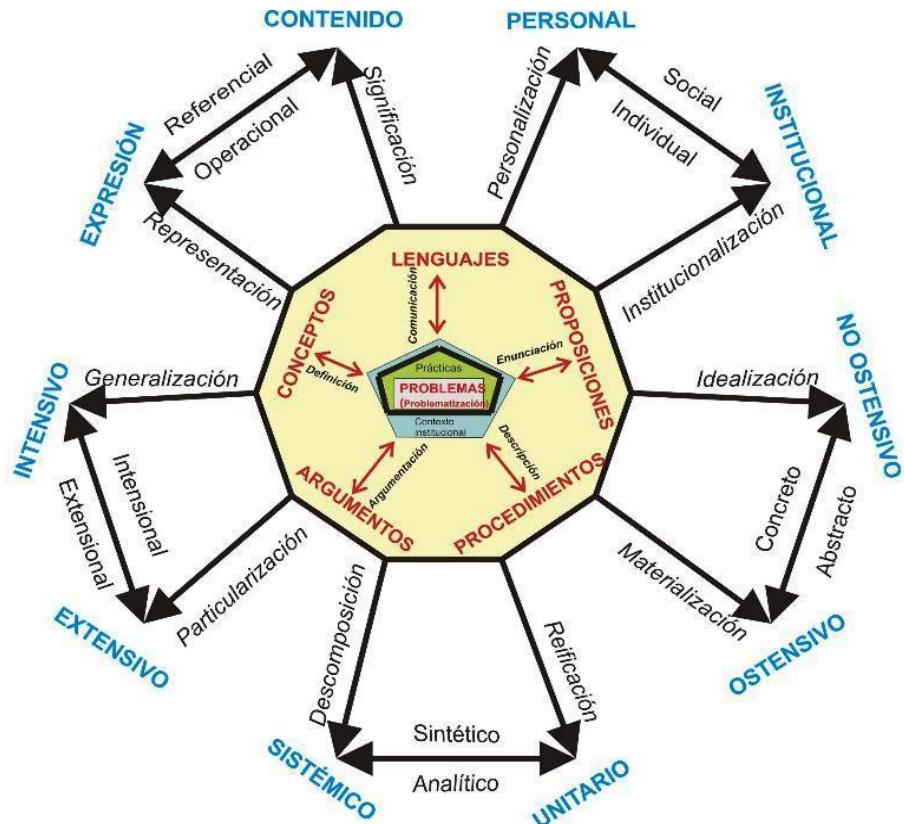


Ilustración 3. Configuración de objetos y procesos matemáticos.

Descrito el nivel dos: configuración de objetos y procesos matemáticos. A continuación, se introduce la noción de función semiótica (Godino, 2003), esta noción, nos permite entender la dualidad expresión- contenido, y como los diferentes objetos primarios pueden ser elementos de una función semiótica.

2.1.2 Relaciones entre objetos: función semiótica y conflictos semióticos.

Godino (2003) define la función semiótica, como una correspondencia entre el antecedente (expresión o representante) y el consecuente (contenido o representado), que se establece por una regla de correspondencia, fijada por un sujeto o institución, de acuerdo a una regla o código de correspondencia. De acuerdo a lo anterior, una función semiótica tiene tres elementos:

- un plano de expresión (objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo)
- un plano de contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor);
- un criterio o regla de correspondencia, esto es, un código interpretativo que regula la correlación entre los planos de expresión y contenido, estableciendo el aspecto o carácter del contenido referido por la expresión.

Godino (2003), manifiesta que cualquier objeto primario puede ser contenido o expresión de una función semiótica. De acuerdo al contenido de la función semiótica, el significado puede ser de tipo: lingüístico, si el contenido de la función es un término o expresión lingüística; situacional, si el objeto es una situación problema; conceptual, si el contenido de la función es una definición; proposicional, si el contenido es una propiedad; actuario, si el contenido es un procedimiento u operación; argumentativo, si el contenido de la función semiótica es un argumento.

Por ejemplo, \bar{x} es la expresión de la función semiótica (signo); media aritmética, sería contenido de la función semiótica, es decir el significado del signo; el contenido de la función semiótica es de tipo lingüístico, ya que es un término o representación lingüística. En el ejemplo se observa una regla de correspondencia, entre la expresión y contenido, esta regla ha sido fijada desde la institución: la comunidad de matemáticos o estadísticos.

Al no existir una correspondencia entre la expresión y el contenido, se produce un conflicto semiótico, es decir: sea \bar{x} la expresión de la función semiótica, y el contenido de la función semiótica sea que \bar{x} representa la incógnita de una ecuación, se observa que no hay una

regla de correspondencia entre los elementos de la función semiótica; por lo tanto se identifica un conflicto semiótico.

A partir de lo anterior Godino et al. (2007), introducen la noción conflicto semiótico, como cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión. La noción de conflicto semiótico sirve como una explicación de los errores, dificultades y obstáculos de los estudiantes para el aprendizaje de un contenido matemático, y en general, en las dificultades surgidas en la comunicación en el aula. Teniendo en cuenta el interés del proyecto, se propone analizar las dificultades en términos de conflictos semióticos.

Por otra parte, Contreras et al. (2017) refieren que en el análisis de prácticas matemáticas, al resolver una situación problema, se puede aplicar la noción de función semiótica, identificando los objetos y procesos matemáticos emergentes; la identificación de las diferentes funciones semióticas, puede ser una tarea exhaustiva, por lo cual, propone centrar la atención en las funciones semióticas, mas importantes para una correcta interpretación de situación problema o la interpretación de un gráfico estadístico, en este sentido propone, identificar las funciones semióticas críticas (FSC). Al no identificar correctamente la función crítica, se producen los conflictos semióticos.

Enseguida, se presenta la noción de comprensión y competencia desde la mirada del Enfoque Ontosemiótico.

2.1.3 Comprensión y competencia.

De acuerdo con Godino, Batanero y Font (2007), consideran que hay dos perspectivas de la comprensión, como un proceso mental o como competencia. En primer lugar, desde el

Enfoque Ontosemiótico, se considera la comprensión como una competencia, es decir, un estudiante comprende determinado objeto matemático, cuando lo utiliza en diferentes prácticas. En segundo lugar, al analizar el papel que tienen las funciones semióticas en relación con los objetos que son activados en las prácticas matemáticas, se puede interpretar la comprensión en términos de funciones semióticas; es decir, la comprensión de un objeto O por parte de un sujeto X (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que interviene el objeto O (Godino, 2003, p.152).

Así pues, desde el EOS, conocer un objeto matemático se modela mediante las funciones semióticas donde el objeto puede intervenir como contenido o expresión, es decir las relaciones que se pueden establecer (Godino et al., 2019). En este sentido, el análisis semiótico de las prácticas permite identificar los objetos y procesos emergentes de actividad matemática e identificar los conflictos semióticos como la disparidad entre la expresión y contenido de la función semiótica, y por tanto explicar las dificultades en la comprensión del objeto matemático en términos de conflictos semióticos.

En resumen, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), Propuesto por Godino et al. (2007), brinda unidades de análisis didáctico, especialmente: la configuración de objetos y procesos matemáticos, que permite mostrar la complejidad ontosemiótica de las prácticas realizadas. Por otro lado, a partir de la noción de función semiótica (expresión- contenido), permite realizar un análisis semiótico de las prácticas, identificando la trama de funciones semióticas que se establecen entre los diferentes tipos de objetos (Godino, 2019). Adicionalmente, el Enfoque Ontosemiótico, permite, abordar la comprensión, en términos de funciones semióticas, es decir, como una relación entre expresión y

contenido; al no existir esa correspondencia, se introduce la noción de conflicto semiótico, permitiendo explicar las dificultades en la comprensión de la media aritmética.

Descripto los elementos del Enfoque Ontosemiótico, enseguida, se presenta el significado institucional de referencia de la media aritmética, describiendo, los diferentes objetos primarios asociados a este concepto.

2.2 Significado institucional de referencia del objeto matemático Media Aritmética

En este apartado, se caracterizan los diferentes objetos primarios asociados a la media aritmética (campo de problemas, definiciones, algoritmos, procedimientos y propiedades), tomando como referente la investigación de Cobo y Batanero (2002), tambien la tesis doctoral de Cobo (2003) y Mayen (2009), quienes han analizado dos textos escolares, para fijar el significado sistémico de la medidas de tendencia central; adicionalmente se toma como referencia, la tesis de master en Didáctica de las Matemáticas de Molero (2017) y el trabajo de Díaz (2007). Enseguida, se describen cada uno de las entidades primarias asociadas al concepto.

2.2.1 Campos de problemas asociados a la media aritmética.

Según lo propuesto desde el Enfoque Ontosemiótico, los objetos matemáticos, emergen de un sistema de prácticas, que pueden ser personales o institucionales asociadas a un campo de problemas. A continuación, se pretende caracterizar, los cinco campos de problemas asociados a la media aritmética.

Situación problema 1: Estimar una medida a partir de diversas mediciones realizadas en presencia de errores (Cobo, 2003).

Ejemplo situación problema 1: Ocho estudiantes de una misma clase, miden la estatura de una misma persona con el mismo instrumento obteniendo, en metros, los siguientes resultados: 1,79; 1,80; 1,795; 1,78; 1,80; 1,81; 1,79; 1,805. ¿Cuál sería la mejor estimación de la estatura real del sujeto?

De acuerdo con Cobo (2003), este campo de problemas, está asociado a la media aritmética, como estimación de una cantidad desconocida de datos, en presencia de errores, con lo cual, se busca que los estudiantes, realicen la suma de los datos y dividan entre el número total de datos de la distribución, para obtener el valor de 1,79625. El problema, consiste en determinar, a partir de un conjunto de medidas: x_1, x_2, \dots, x_n , ¿cuál será la mejor estimación posible del valor X desconocido? esta práctica matemática, ha dado origen a lo que hoy se conoce como media aritmética, y ha extendido su aplicación u otro campo de problemas.

Situación problema 2: Obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto para conseguir una distribución uniforme (Cobo, 2003).

Ejemplo situación problema 2: Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?

En la situación problema 2, y en otras similares, se necesita obtener una cantidad equitativa a repartir, para conseguir una distribución uniforme, y como en el ejemplo, se toma la Media aritmética. En Cobo (2003) destaca que este tipo de problemas surge con frecuencia al obtener la "renta por capital", en problemas de física como obtener la velocidad media durante

un viaje o la calificación final en un examen compuesto de varios exámenes parciales, muchas veces lo estudiantes realizan este cálculo para obtener su promedio de nota en alguna asignatura.

Situación problema 3: Obtener un elemento representativo de un conjunto de valores dados, cuya distribución es aproximadamente simétrica (Cobo, 2003).

Ejemplo situación problema P3: Al medir el tiempo en segundos que pueden correr un grupo de estudiantes antes y después de haber efectuado un cierto entrenamiento deportivo, se obtuvieron los valores siguientes. ¿Piensas que fue efectivo el entrenamiento?

Tabla 1
Ejemplo situación problema P3.

Alumno	Cien metro planos (en Segú.)									
	Ana	Mary	Carol	Dana	Maya	Sol	Adri	Luz	Inés	Flor
Antes del entrenamiento	11,5	11,2	10,7	11,9	11,5	13,8	12,6	9,98	9,99	10,5
Después del entrenamiento	12,8	10,5	10,6	12,8	12,2	12,5	10,2	11,2	9,98	10,5

En la situación problema 3, se muestra otra aplicación típica de la media, que consiste en servir de elemento representativo de un conjunto de valores dados x_i , cuya distribución es aproximadamente simétrica (Díaz, 2007). Para representar un conjunto de datos, se toma la media por sus propiedades de localización central, por ser "centro de gravedad" del espacio de valores muestrales o poblacionales. Si la distribución es muy asimétrica, el valor más frecuente (moda) o el valor central en el conjunto de datos ordenados (mediana) podrían ser más representativos.

Situación problema 4: Estimar el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población para una variable con distribución aproximadamente simétrica (Cobo, 2003).

Ejemplo situación problema P4: La altura media de los alumnos de un colegio es 1,40. Si extraemos una muestra aleatoria de 5 estudiantes y resulta que la altura de los 4 primeros es de 1,38; 1,42; 1,60; 1,40 ¿Cuál sería la altura más probable del quinto estudiante?

En otras ocasiones se necesita conocer el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población. Por ejemplo, al predecir la esperanza de vida o el beneficio esperado en una inversión en bolsa; se toma la media de la variable en la población como predicción, como valor esperado, por sus propiedades muéstrales derivadas del teorema central del límite. Del concepto de valor esperado, se derivan muchos modelos de predicción, como los distintos tipos de regresión.

Situación problema 5: Comparación de dos distribuciones de datos con variables numéricas: Este campo de problema, no fue incluido en Cobo (2003), por lo que Mayen (2009), toma este campo de problema para su investigación. Se busca que el estudiante, a partir de dos distribuciones con datos numéricos, seleccione la media aritmética como mejor representante. En Molero (2017), se encuentra la siguiente situación:

Ejemplo situación problema P5: A continuación, se muestran las calificaciones de dos grupos distintos que hicieron el mismo examen. ¿A qué grupo se le dio mejor?

Tabla 2
Ejemplo situación problema P5.

Grupo A	0	0	2	3	3	3	4	5	6	7	7	7	7	8	9	9	9	10
Grupo B	1	1	4	4	4	4	6	6	6	7	7	7	8	8	9	9	9	10

Los diferentes campos de problemas, asociados a la media aritmética, descritos anteriormente, permite considerar situaciones simples, situaciones propias de las matemáticas o situaciones problemas extra matemáticas (Godino, 2003), donde emergen, los objetos matemáticos, en este caso la media aritmética. Estos elementos u objetos permiten diseñar o seleccionar situaciones con el objetivo analizar y describir la práctica que realizan los estudiantes, identificando objetos y procesos emergentes de estas actividades de matematización.

2.2.2 Definición de la media.

Teniendo en cuenta el análisis realizado por Cobo (2003), se pueden encontrar las siguientes definiciones relacionadas con la media aritmética.

Definición 1: La media es la suma ponderada de cada uno los valores de la variable multiplicado por su frecuencia.

Definición 2: La media es el promedio aritmético de un conjunto de datos.

2.2.3 Propiedades.

En relación con las propiedades, estas se clasifican en: propiedades numéricas; propiedades aritméticas y propiedades estadísticas. El siguiente apartado, se define las diferentes propiedades asociadas a la media aritmética.

2.2.3.1 Propiedades numéricas.

Propiedad numérica 1 (N1): La media de un conjunto de datos es siempre un valor perteneciente al rango de la variable en estudio. Lo que lleva a considerar que no el valor de la media aritmética no puede ser mayor al valor máximo del conjunto de datos (Mayen, 2009)

Ejemplo: la estatura de algunos estudiantes de séptimo grado son: 1,59; 1,86; 1,65; 1,50.

Hallar la estatura promedio de los estudiantes.

Utilizando la definición de media:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{1,59 + 1,68 + 1,65 + 1,50}{4}$$

$$\bar{x} = 1,605$$

La media está comprendida entre el valor máximo y mínimo, es decir 15,0 y 1,68

Propiedad Numérica 2 (N2): La media no tiene por qué coincidir con ningún valor de los datos. Incluso, podría ser un número perteneciente a un conjunto numérico más amplio que el dado. En ocasiones, la media puede ser un valor que no tenga sentido en el contexto planteado.

Propiedad numérica 3 (N3): En el cálculo de la media se tienen en cuenta todos los valores de los datos. Esta propiedad diferencia a la media de otras medidas de centralización, como son la mediana o la moda. También, se debe tener en cuenta los valores nulos cuando aparece.

Ejemplo: Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?

Se utiliza la definición de media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{5 + 8 + 6 + 0}{4}$$

$$\bar{x} = 4,75$$

Propiedad numérica 4 (N4): El valor numérico de la media cambia cuando se cambia cualquier dato.

2.2.3.2 *Propiedades aritméticas.*

Propiedad aritmética 1 (A1): El cálculo de la media no es una operación interna en el conjunto numérico utilizado, puesto que ésta puede tomar un valor distinto a todos sus elementos. Es la traducción algebraica de la propiedad numérica 1.

Propiedad aritmética 2 (A2): La media no tiene elemento neutro ni simétrico. Esta propiedad se deduce algebraicamente de la propiedad numérica 2.

Propiedad aritmética 3 (A3): La media no tiene la propiedad asociativa para el caso general. Si dividimos en partes un conjunto de datos y calculamos sus medias respectivas, no podemos deducir la media del conjunto total de datos.

Propiedad aritmética 4 (A4): La media es una operación conmutativa. Dos ordenaciones distintas del conjunto de datos dan lugar al mismo valor de la media.

Propiedad aritmética 5 (A5): La media conserva los cambios de origen y de escala. Si se suma, resta, multiplica o divide cada elemento del conjunto de datos por un mismo valor, la media es también sumada, restada, multiplicada o dividida por esa misma constante. En consecuencia, la media hereda la misma unidad que los datos.

Propiedad aritmética 6 (A6): La media de la suma de 2 o más variables es igual a la suma de las medias de dichas variables. Esta propiedad puede facilitar el cálculo de la media cuando dividimos una población en 2 o más subpoblaciones.

Propiedad aritmética 7 (A7): La media siempre existe en datos numéricos y es única. La media siempre se puede calcular y, además, es única.

2.2.3.3 Propiedades estadísticas (E).

Propiedad estadística 1 (E1): La media es un representante del conjunto de datos. La media proporciona información de todo el conjunto de datos, no de un dato en concreto. Por ello se usa, por ejemplo, para comparar dos conjuntos de datos.

Propiedad estadística 2 (E2) : La media coincide con el centro del conjunto de datos, semejante al centro de la gravedad. Esta propiedad se generaliza para datos bivariantes donde el punto con coordenadas las dos medias es el centro de gravedad de la distribución.

Propiedad estadística 3 (E3): En distribuciones simétricas, la media coincide con la mediana y la moda (en distribuciones unimodales).

Propiedad estadística 4 (E4): La media es un estadístico poco resistente, muy sensible a la variación de los datos, especialmente a los valores atípicos. Esta propiedad hace que utilicemos otras medidas de tendencia central, como la mediana o la moda, en aquellas ocasiones en las que aparecen valores atípicos, conocidos como “outliers”.

Propiedad estadística 5 (E5): La suma de las desviaciones de un conjunto de datos de su media es 0. La suma de los valores absolutos de las desviaciones es mínima respecto a la mediana. En Behar y Yepes, (1985) encontramos la siguiente demostración:

Definimos desviación del dato x_i con respecto al valor “a” como:

$$d_i = x_i - a$$

así que la propiedad puede escribirse como:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$$

La verificación puede hacerse muy sencilla:

$$\sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{x}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i - n\bar{x}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i - n \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right) = 0$$

Propiedad estadística 6 (E6): La suma de los cuadrados de las desviaciones es mínima.

$a = \bar{x}$ es decir:

$$f(a) = \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 \text{ tiene su mínimo en } a = \bar{x}$$

Propiedad estadística 7 (E7): Para datos agrupados en intervalos, con alguno de ellos abierto, también es preferible la mediana a la media. Existe la moda, pero no la media.

Propiedad estadística 8 (E8): Existen modas tanto para variables cuantitativas como cualitativas.

Propiedad estadística 9 (E9): En distribuciones no unimodales, la mediana es mejor representante del conjunto de datos que la media.

2.2.4 Procedimientos.

Las situaciones problema que involucran el concepto de media aritmética, se pueden resolver, teniendo en cuenta cada uno los siguientes procedimientos, distinguiendo el tipo de

variable continua o discreta y la forma como se presentan los datos, aislados, agrupados o en tablas de frecuencia. A continuación, se especifican cada uno de los procedimientos asociados al concepto de media.

Procedimiento 1 (P1): Variable discreta con datos aislados: Es la forma más fácil de calcular la media, ya que se utiliza la *definición 1*: media aritmética como el promedio aritmético de un conjunto de datos. Se calcula, sumando todos los datos de la distribución y se divide por el número total de datos.

Por ejemplo: calcular la media aritmética del siguiente conjunto de datos: 8, 6, 4, 2.

Aplicando la definición de media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Ecuación 1. Algoritmo de la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 8 + 6 + 4 + 2}{4}$$

$$\bar{x} = 10$$

Procedimiento 2 (P2): Variable discreta con los datos presentados en tablas de frecuencias: La media se calcularía como la suma total de los productos entre cada valor de la variable en cuestión y su frecuencia absoluta⁸, divido sobre el número total de datos:

⁸ frecuencia absoluta del dato, denotada por n_i (Behar, 2007, p. 48)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot n_i}{n}$$

Ecuación 2. Algoritmo de la media aritmética con frecuencias absolutas.

Equivalentemente, en términos de frecuencia absoluta⁹, La media se calcularía como la suma total de los productos entre cada valor de la variable en cuestión y su frecuencia absoluta.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i \cdot f_i$$

Ecuación 3. Algoritmo de la media aritmética con frecuencias relativas.

Si la muestra se presenta en un cuadro de frecuencias tenemos:

Tabla 3
Ejemplo de datos presentado tabla de frecuencias.

<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>n_i</i>	<i>f_i</i>
1	3	6	$\frac{6}{25} = 0,24$
2	5	7	$\frac{7}{25} = 0,28$
3	8	7	$\frac{9}{25} = 0,36$
4	10	3	$\frac{3}{25} = 0,12$

La media puede calcularse en término de frecuencias relativas:

⁹ $f_i = \frac{n_i}{n}$ frecuencia relativa (Behar, 2007, p. 43)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot n_i}{n}$$

Se multiplica cada valor de la variable por su frecuencia absoluta respectiva; se suman todos los productos obtenidos y se divide entre el número total de datos.

$$\bar{x} = \frac{3 \times 6 + 5 \times 7 + 8 \times 9 + 10 \times 3}{25}$$

$$\bar{x} = \frac{155}{25}$$

$$\bar{x} = 6,2$$

De igual manera, se puede calcular la media aritmética, en términos de frecuencias absolutas (ver ecuación).

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i \cdot f_i$$

Se multiplica cada valor de la variable por su frecuencia relativa y suman todos los productos obtenidos.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N 3 \times 0,24 + 5 \times 0,28 + 8 \times 0,36 + 10 \times 0,12$$

$$\bar{x} = 6,2$$

Procedimiento 3 (P3): Cálculo de la media de una variable continua o discreta con datos agrupados en intervalos de clase: Si partimos de una situación en la que tenemos un gran

de número de datos, se recurrirá al cálculo de la media con los datos agrupados en intervalos ($ei-1$). Para calcular la media usaremos como datos las marcas de clase, tomadas como el punto medio del intervalo, así como las frecuencias de cada clase fi . La media entonces se calcula mediante el algoritmo anterior P2, cuyo valor ahora es aproximado.

Ejemplo: Calcular la media, teniendo cuenta los datos presentados en la tabla 4.

Tabla 4
Datos agrupados en intervalos de clase.

l_i	Marca de clase x_i	n_i	f_i
[0; 2,5)	1,25	0	$\frac{0}{25}$
[2,5; 5)	3,75	13	$\frac{13}{25}$
[5; 7,5)	6,25	0	$\frac{0}{25}$
[7,5; 10)	8,75	12	$\frac{12}{25}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot n_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{1,25 \times 0 + 3,75 \times 13 + 6,25 \times 0 + 8,75 \times 12}{25}$$

$$\bar{x} = 6,15$$

Procedimiento 4 (P4): Cálculo de la media de manera gráfica: Cuando trabajamos con variables discretas, conocidos sus valores x_i , y sus frecuencias relativas f_i , podemos intuir de

manera aproximada el valor de la media aritmética mediante la observación de su representación gráfica, bien el diagrama de barras o bien el histograma.

Aún más, en el trabajo de Cobo (2003) se especifica cómo se puede calcular de manera exacta la media mediante el cálculo de áreas, teniendo en cuenta de que el área de cada rectángulo de la gráfica es el producto de $x_i \cdot f_i$.

Procedimiento 5 (P5): Cálculo de la media mediante calculadora u ordenador. Para calcular la media mediante herramientas tecnológicas no es necesario conocer ni comprender el algoritmo de la media. Basta con introducir los datos de manera correcta, tanto los valores como las frecuencias. En el caso de la calculadora, sí que será necesario saber el manejo de la memoria de la propia herramienta¹⁰.

Por ejemplo, en calculadoras graficadoras, como por ejemplo: la CASIO *fx-74000GII*, el estudiante puede seleccionar la opción STAT, y automáticamente, aparece una tabla con diferentes opciones de List; se puede introducir diferentes datos y automáticamente esta le calcula, la Media aritmética, la sumatoria, varianza, y el número total de datos.

Procedimiento 6 (P6): Inversión del algoritmo del cálculo de la media: En distintos contextos, se tiene la suerte de conocer la media de una distribución y todos sus valores excepto uno. Para su búsqueda es necesario el uso del algoritmo de la media despejando el valor de la siguiente forma.

¹⁰ “(...) El uso es simple, en el sentido de que el alumno no necesita entender el algoritmo, sino solo ingresar los datos de manera correcta. Hemos encontrado el uso de calculadora, MINITAB, EXCEL, STATISTIX, SPSS y el SAS, en especial, en el texto B, se usan todos estos programas sin excepción” (Sayritupac, 2013, p. 55).

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i n_i}{n}$$

$$x_i = n\bar{x} - \sum_{i \neq j}^n x_j \cdot n_i$$

Ecuación 4. Algoritmo de inversión de la media aritmética.

Procedimiento 7 (P7): Construir una distribución a partir de una media dada: En este caso, el objetivo es buscar una distribución cuya media aritmética, coincide con un valor previamente dado. Para encontrarla es necesario, conocer los distintos procedimientos de cálculo directo de la media. El caso más sencillo, es aquella distribución en la que todos los valores de los datos coinciden con la media dada. Como ejemplo: indica que 3 posibles calificaciones que ha obtenido un alumno en sus 3 exámenes teniendo en cuenta que su nota media es un 7.

2.2.5 Lenguaje verbal, simbólico y gráfico.

De acuerdo con Molero (2017), se pueden utilizar términos como promedio, sinónimo de media. Por ejemplo: la edad promedio de tres hermanos es 16. Con relación a los símbolos, se utiliza la siguiente representación para la media aritmética \bar{x} , para representar los datos x_i y n_i para frecuencias absolutas, f_i para representar las frecuencias relativas; n como el número total de datos. En la representación gráfica, pueden estar los datos aislados, presentado en tablas de frecuencias, frecuencias acumuladas, tablas de datos en intervalo. De igual manera, se pueden representar por diagramas de barras, histogramas, polígonos.

En la siguiente tabla, se detallan algunos de los elementos lingüísticos asociados a la media aritmética.

Tabla 5
Elementos lingüísticos asociado a la media aritmética.

Significante	Significado
\bar{x}	Media, promedio.
x_i	Valor de la distribución.
n	Número total de datos de la distribución.
$\sum_{i=1}^n x$	Sumatoria de datos de la distribución.
n_i	Frecuencia absoluta.
$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$	Algoritmo de la media
$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot n_i}{n}$	Algoritmo de la media con frecuencias absolutas

Al recapitular, en este apartado se ha caracterizado la variedad de objetos primarios asociados al concepto de media aritmética. El análisis de significado de referencia, permitirá detallar los diferentes objetos previos y emergentes, involucrados en las prácticas matemáticas, al resolver las situaciones problema.

En síntesis, en este capítulo, se presentaron los elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticas, desarrollados por Godino *et al.* (2007), que permiten abordar la problemática expuesta en Capítulo 1. El referente teórico, aporta herramientas de análisis didáctico de los procesos de estudio, como, por ejemplo, la configuración de objetos y procesos matemáticos; conjuntamente, la noción de función semiótica, como una correspondencia entre una expresión y un contenido (Godino, 2003). A

partir de lo anterior, se propone desarrollar un análisis semiótico de las prácticas matemáticas, identificando, las funciones semióticas críticas (FSC), que son importantes para una correcta interpretación y resolución de la situación problema (Contreras et al., 2017); adicionalmente, los objetos y procesos emergentes al resolver las situaciones problema. Este análisis, permitirá evidenciar la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas, al resolver las situaciones problemas que involucran la media aritmética, en este sentido las dificultades serán presentadas en términos de conflictos semióticos, en otras palabras, como una disparidad entre la expresión y contenido de una función semiótica.

Por otra parte, el significado institucional de referencia, permite caracterizar los diferentes objetos matemáticos asociados a la media: situaciones problema, elementos lingüísticos, conceptos, definiciones, procedimientos y argumentos; objetos que intervienen en las prácticas matemáticas; en este sentido, estos objetos serán analizados con el objetivo de describir la complejidad ontosemiótica del concepto de media.

Capítulo 3. Metodología

En este capítulo, se expone la metodología utilizada para la realización del trabajo de grado, fundamentada en un enfoque cualitativo de tipo descriptivo; inicialmente, se detallan las distintas fases que permitirán el desarrollo de la propuesta. Posteriormente, se presenta el análisis epistémico de cada situación problema; así mismo, el análisis semiótico de las posibles prácticas matemáticas.

3.1 Enfoque metodológico

La metodología, se fundamenta en un enfoque cualitativo. El trabajo pretende, analizar las prácticas de los estudiantes, y como lo expresa Hernández, Fernández y Baptista (2014) “el método cualitativo permite describir, comprender e interpretar los fenómenos, a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes” (p. 11). Así mismo, lo descriptivo comprende el análisis e interpretación de la información (Tamayo, 2003). Se debe agregar que, se toman elementos del estudio del caso, el cual, permite profundizar en las respuestas dadas por un grupo de estudiantes; teniendo en cuenta que, “Los estudios de caso tienen como característica básica que abordan de forma intensiva una unidad, ésta puede referirse a una persona, una familia, un grupo, una organización o una institución” (Muñiz, 2003, p. 1).

Considerando lo anterior y de acuerdo a el objetivo del trabajo, el estudio de caso, permite un análisis detallado y en profundidad de la problemática expuesta; además, lo descriptivo, permite describir las prácticas de los estudiantes al resolver las situaciones problema con el objetivo de caracterizar las dificultades en la comprensión de concepto de media.

3.1.1 Fases de la metodología.

A continuación, se describen cada una de las fases propuestas para llevar a cabo el objetivo del trabajo; en adición, se presenta el cuestionario que será aplicado a los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Cauca.

3.1.1.1 Fase I selección de los ítems.

Teniendo en cuenta, el objetivo de caracterizar las dificultades en la comprensión del concepto de media aritmética, en la primera fase, se realizó una revisión de trabajos de investigación que han centrado su interés en este concepto. Se han seleccionado seis ítems del trabajo realizado por Molero (2017), dado a la complejidad que tienen e involucran en el estudiante el manejo de: definiciones, propiedades y argumentos; es decir, los diferentes tipos de objetos primarios asociados a la media. Los ítems pertenecientes al campo de problemas de la media aritmética, se ha adecuado al contexto de los estudiantes de la Institución Educativa Cauca.

3.1.1.2 Cuestionario campo de problemas asociados a la media aritmética.

A continuación, se presentan seis ítems seleccionados del trabajo de Molero (2017), vale la pena aclarar que estas situaciones problemas han sido modificadas de acuerdo al contexto de los estudiantes. Se pretende, en un primer momento, hacer un análisis epistémico de cada pregunta; en segundo lugar, detallar las prácticas esperadas para la resolución del problema, adicionalmente, un análisis semiótico, identificando, objetos, procesos matemáticos emergentes, y posibles conflictos semióticos.

Ítem 1. Explica con tus propias palabras qué significan para ti cada una de las siguientes frases:

A. En promedio tarde 10 minutos para ir de mi casa al instituto.

B. El número medio de hijos en las familias colombianas es 1.2

Ítem 2. La edad media de cuatro hermanos es 10 años. Piensa en cuatro posibles edades de estos hermanos, de forma que la edad media sea 10 años.

Ítem 3. La talla media de cinco jugadores de un equipo de fútbol es 175 cm. Llega un jugador más y la talla media aumenta 2 cm. ¿Cuál es la talla media del nuevo jugador?

Ítem 4. El número de operaciones en el hospital Francisco de Paula Santander durante 10 días ha sido: 7, 8, 3, 2, 5, 4, 6, 5, 6, 43

Si te piden estimar con un solo valor el número diario de operaciones en el hospital, ¿qué valor darías?, ¿por qué?

Ítem 5. El entrenador de un equipo de baloncesto duda entre seleccionar a María o Daniela. Los puntos conseguidos por cada una, en una semana de entrenamiento fueron estos:

Tabla 6
Puntos de jugadoras de baloncesto.

María	18	23	22	24	19	25	16
Daniela	18	26	18	28	22	17	18

Si fueses el entrenador, ¿a cuál de las dos elegirías? ¿Por qué?

Ítem 6. El peso medio de 5 chicas es de 46 kg . ¿Cuál es el peso total de las 5 chicas? Si todas las chicas engordan 3 kg , ¿cuál será el peso medio? ¿Cuál será el peso medio en gramos?

3.1.1.3 Fases II aplicación del cuestionario.

En segundo momento, se realiza la intervención de aula en el grado octavo $8^{\circ}-1$ de la Institución Educativa Cauca; quienes resolverán las situaciones problema que involucran la media aritmética; la solución de estos problemas sirve como registro para analizar la práctica matemáticas de los estudiantes con el objetivo de caracterizar las dificultades en la comprensión del concepto de media. El tiempo estimado para la aplicación del cuestionario, es de una sola sección de clase de una hora (60'). Es importante resaltar que se ha solicitado los permisos correspondientes, carta de solicitud para desarrollar el proyecto; formato de autorización, que debe ser firmado por los padres de familia o acudientes del estudiante, para hacer grabaciones y toma de fotografías como parte de evidencia del estudio que está realizando.

3.1.1.4 Fase III Análisis del cuestionario.

En la tercera fase, teniendo en cuenta que el proyecto toma algunos elementos del estudio de casos; se seleccionará aleatoriamente seis estudiantes de la muestra total, con el objetivo de realizar un análisis con profundidad de sus prácticas matemáticas. Se busca analizar las respuestas dadas por los estudiantes, mediante un análisis semiótico; se propone separar la respuesta en unidades de análisis (Godino, 2003), identificando, los objetos matemáticos a los que hacen referencia; de igual manera, los procesos matemáticos y posibles conflictos semióticos. Esta caracterización se hace por medio del contraste entre el análisis previo (solución correcta desde el punto institucional) y el análisis de las prácticas resultantes.

Los resultados del análisis semiótico se presentan de acuerdo a la rejilla propuesta por Mayen (2009). En la primera columna, el código de respuesta del estudiante ($U1, U2, U3 \dots$); en la segunda y tercera columna, la dualidad expresión y contenido. En la expresión, el fragmento de la respuesta del estudiante, y en el contenido, los objetos, procesos matemáticos emergentes del sistema de prácticas y conflictos semióticos.

Tabla 7
Rejilla de análisis semiótico.

Unidad U	Expresión	Contenido
Unidad de contenido (U1)	Respuesta del estudiante (fragmento)	Objetos, procesos emergentes del sistema de prácticas y Conflictos semióticos.

La tabla 7 es tomada de Mayen (2009).

3.1.1.5 Fase IV resultados proyecto de trabajo de grado.

Por último, el análisis semiótico de las respuestas dadas por los estudiantes de grado octavo, se pretende dar una serie de conclusiones de los resultados obtenidos. Las dificultades presentadas por los estudiantes serán identificadas en términos de conflictos semióticos. También, se propone comparar los resultados obtenidos con otras investigaciones, que han abordado, la comprensión de las medidas de tendencia central, especialmente la media aritmética.

3.2 Análisis Epistémico y Semiótico de las Situaciones Problema

A continuación, se presenta el análisis epistémico de los diferentes ítems del cuestionario; se identifican las funciones semióticas críticas (FSC) que son esenciales para la resolución de la situación problema (Contreras et al., 2017); las prácticas matemáticas esperadas al resolver las situaciones problema; adicionalmente, un análisis semiótico, identificando los objetos y procesos matemáticos emergentes de estas.

Para el respectivo análisis, se utiliza la rejilla propuesta por Mayen (2009); la respuesta se fragmenta en unidades de análisis (U): identificando la expresión de la función semiótica, es decir, la respuesta del estudiante; el contenido de la función semiótica, haciendo referencia a los objetos y procesos emergentes de la práctica.

3.2.1 Análisis Epistémico y Semiótico Ítem 1.

Explica con tus propias palabras qué significan para ti cada una de las siguientes frases:

- A. En promedio taro 10 minutos para ir de mi casa al instituto.
- B. El número medio de hijos en las familias colombianas es 1,2.

Este ítem, es tomado de Molero (2017) quien lo rediseño a partir de las investigaciones de Watson (2000) y Cobo (2003). En el enunciado se ha realizado una modificación cambiando el contexto de familias andaluzas por el de familias colombianas. La situación problema está asociada a la media aritmética como reparto equitativo (situación problema 2); adicionalmente, se pueden identificar, funciones semióticas de tipo lingüístico, por ejemplo: expresiones como “edad media”, “promedio”, “número medio” que hacen referencia al concepto de media. También, incluye implícitamente propiedades, numéricas, estadísticas, algebraicas. Por ejemplo:

la media es un representante de un conjunto de datos (propiedad estadística *E1*); el cálculo de la media no es una operación interna (propiedad aritmética *A1*); el valor de la media no tiene por qué coincidir con ninguno de los datos (propiedad numérica *N2*).

Se pretende que, en la interpretación del enunciado, el estudiante pueda hacer referencia a la definición o algoritmo asociado al concepto de media. En la siguiente tabla, se detallan los objetos primarios asociado a la situación problema.

Tabla 8
Objetos primarios asociados al ítem 1.

Tipo de objetos primarios	Significado
Campo de problemas	Realizar un reparto equitativo.
Elementos lingüísticos	Representación verbal, numérica.
Conceptos-definición	Definición conceptual.
Propiedades	<i>N1</i> Valor en el rango. <i>N2</i> La media no tiene que coincidir con los datos. <i>A1</i> La media no es una operación interna. <i>E1</i> La media es el representante de un colectivo
Argumento	Requiere argumento.

El estudiante ha de comenzar con un proceso de significación de los elementos de la situación problema; debe relacionar, las expresiones lingüísticas “promedio”, “edad media” o “número medio” con el concepto de la media aritmética; así mismo, es necesario la comprensión de elementos de tipo actuario, conceptual, proposicional y argumentativo, asociados al concepto, es decir, definiciones, procedimientos y propiedades. A continuación, se presenta algunas de las posibles interpretaciones del enunciado.

En el apartado 1A:

- En ocasiones tarde más o menos 10 minutos en ir de mi casa al colegio.
- Que se ha sumado el número de minutos que gasto diariamente en ir de la casa al colegio, y se ha dividido entre en número de días que voy al colegio.

Con respecto al literal 1B:

- Que unas familias colombianas pueden tener un hijo; otras familias 2 o 3 hijos, pero 1,2 es resultado del hallar el promedio de hijos de las familias.
- Que se ha sumado el número total de hijos de las familias colombianas y se han dividido entre el número de familias colombianas.
- Se ha calculado la media aritmética de un conjunto de datos, es decir, sumar cada uno de los datos de la variable y se ha dividido entre el número total de datos.

Enseguida, se presenta un análisis semiótico de la posible solución; identificando los objetos y procesos emergentes de las posibles prácticas matemáticas.

Tabla 9
Análisis semiótico ítem 1.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	<p>Explica con tus propias palabras qué significan para ti cada una de las siguientes frases:</p> <p>A. En promedio tarde 10 minutos para ir de mi casa al instituto.</p> <p>B. El número medio de hijos en las familias colombianas es 1,2</p>	<p>- El estudiante ha de comenzar con un proceso de significación para darle sentido a la situación problema y los elementos que la componen.</p> <p>- Las expresiones lingüísticas o elementos del lenguaje “promedio”, “el número medio” se relacionan con el concepto de media aritmética.</p> <p>- 10 es el valor de media aritmética o promedio de minutos que gasta en ir</p>

de la casa al colegio; de igual manera, representa un número; en este caso, es un número natural.

- 1,2 es el valor de la media aritmética o promedio de hijos de las familias colombianas.
- 1,2 es una expresión decimal.
- Propiedad aritmética (*A1*) el cálculo de la media no es una operación interna, puesto que esta puede tomar un valor distinto a todos sus elementos.
- Propiedad numérica (*N2*) la media aritmética no tiene por qué coincidir con ningún valor de los datos, incluso, podría ser un número perteneciente a un conjunto numérico más amplio.
- La media es un representante de un conjunto de datos (propiedad estadística *E1*).
- Objetos extensivos: la función del objeto media aritmética en una práctica particular.

U2 En ocasiones taro más o menos 10 minutos de mi casa al colegio.

- Situación problema 3: obtener un valor representativo de un conjunto de datos.
 - Propiedad estadística (*E1*) la media es un valor representativo de un conjunto de datos.
-

-
- U3** Que se ha sumado el número de minutos que gasto diariamente en ir de la casa al colegio, y se ha dividido entre en número de días que va al colegio.
- U4** Que unas familias colombianas pueden tener un hijo; otras familias 2 o 3 hijos, pero 1,2 es resultado del hallar el promedio de hijos de las familias.
- U5** Que se han sumado el número total de hijos de las familias colombianas y se han dividido entre el número de familias colombianas.
- U6**
- Definición y algoritmo de la media aritmética.
 - Media como representante de un conjunto de datos (propiedad estadística *E1*).
 - Media como representante de un conjunto de datos (propiedad estadística *E1*).
 - Algoritmo de la media.
 - Concepto de distribución.
 - Propiedad numérica (*N2*) la media no es una operación interna en un conjunto de datos, puesto que esta puede tomar un valor distinto a sus elementos.
 - Situación problema 4: media aritmética como valor más probable.
 - Definición y algoritmo de la media aritmética.
 - Proceso de particularización del concepto de media.
 - Elementos extensivos.
 - Definición de media aritmética.
 - Algoritmo de la media.

-
- | | |
|--|---|
| Se ha calculado la media aritmética de un conjunto de datos, es decir, sumar cada uno de los datos de la variable y se ha dividido entre el número total de datos. | - Objetos intensivos: definición de la media aritmética.
- Proceso de generalización de concepto de media. |
|--|---|
-

3.2.2 Análisis Epistémico y Semiótico Ítem 2.

La edad media de cuatro hermanos es 10 años. Piensa en cuatro posibles edades de estos hermanos, de forma que la edad media sea 10 años.

Este ítem, ha sido tomado de Molero (2017), la situación problema está asociada a la media como reparto equitativo (situación problema 2). La práctica matemática que se espera por parte de los estudiantes, es la construcción de una distribución de datos dada la media aritmética (procedimiento *P7*). Inicialmente, se debe hacer una interpretación del enunciado y cada uno de sus elementos; en este ejemplo, se debe relacionar la expresión “edad media” con el algoritmo o definición de la media. Además, el procedimiento (*P6*) inversión del algoritmo de la media. En la siguiente tabla se detallan los diferentes objetos primarios asociados al ítem 2.

Tabla 10
Objetos primarios asociados al ítem 2.

Tipo de objetos primarios	Significado
Campo de problemas	Media aritmética como reparto equitativo.
Elementos lingüísticos	Representación verbal y numérica.
Conceptos-definición	Definición conceptual.
Propiedades	<i>N1</i> Valor en el rango. <i>N3</i> Interviene todos los valores. <i>E1</i> Representante de un colectivo.
Procedimientos	<i>P6</i> Invertir el algoritmo de la media. <i>P7</i> Buscar una distribución dada la media.
Argumento	No requiere argumento

En este caso, para resolver la situación problema se debe recordar la definición y algoritmo de la media aritmética; además, un proceso de significación o identificar las funciones semióticas críticas que son esenciales para la resolución de la situación problema; en este caso se debe identificar los valores dados en la situación: media aritmética (10); número total de elementos de la distribución (4) e identificar el valor o valores que se deben hallar (edades de los cuatro hermanos), es decir, el conjunto de datos:

$$\sum_{i=1}^4 x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

Una vez identificado los datos, se deben utilizar el algoritmo de la media aritmética; en este caso la *ecuación 1* (definición de media a partir del algoritmo).

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_1 + x_2 + \dots + x_3}{n}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^4 x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = 10$$

$$\frac{\sum_{i=1}^4 x}{4} = 10$$

En segundo lugar, aplicar procedimiento de inversión del algoritmo de la media (procedimiento *P6*) para encontrar el total o sumatoria de los datos de la distribución (suma de las edades de los cuatro hermanos), en otras palabras, multiplicar el valor de la media por el número total de elementos de la distribución (4×10).

$$\sum_{i=1}^4 x = 40$$

Una vez hallado el total, el estudiante debe construir un conjunto de datos (edades de los hermanos), de tal forma que la sumatoria sea 40. La distribución que se puede construir, es (10, 10, 10, 10) en este caso todos los valores de los datos coinciden con la media.

$$\sum_{i=1}^4 10 + 10 + 10 + 10 = 40$$

la edades de los cuatro hermanos es 10, 10, 10, 10

A continuación, se presenta un análisis semiótico de la solución 2, se identifican objetos y procesos emergentes de las prácticas.

Tabla 11
Análisis semiótico ítem 2.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	<p>La edad media de cuatro hermanos es 10 años. Piensa en cuatro posibles edades de estos hermanos, de forma que la edad media sea 10 años</p>	<ul style="list-style-type: none"> - El estudiante ha de comenzar con un proceso de significación para darle sentido a la situación problema y elementos que la componen. - Debe relacionar la expresión “edad media” con la definición o concepto de media aritmética. - proceso de particularización del concepto de media a la media aritmética de las edades de cuatro hermanos. - Edad (expresión verbal). - 10 es un número que representa la edad media de cuatro hermanos, en este caso la media aritmética del conjunto de edades. - 10 es un número natural. - 4 es un número que representa una cantidad discreta (números de hermanos); de igual manera, 4 es el número total de datos de la distribución que se debe construir. - Proceso de significación de la pregunta.
U2	$\frac{\sum_{i=1}^4 x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = 10$	<ul style="list-style-type: none"> - definición de media aritmética (definición 1)

-
- algoritmo del cálculo para la media.
 - algoritmo de inversión de la media (procedimiento *P6*).
 - sea $\sum_{i=1}^n x = 40$ se debe construir un conjunto de datos x_1, x_2, x_3, x_4 (edades de los hermanos), de tal forma que la suma de los valores sea 40 (materialización y particularización).

U4

$$\sum_{i=1}^4 10 + 10 + 10 + 10 = 40$$

- Procedimiento (*P7*) construcción de una distribución dada la media aritmética.
 - Los valores coinciden con la media dada.
 - Concepto de distribución de datos.
 - Proceso de reificación, construyen un objeto (distribución).
 - uso de representación numérica.
 - Proceso de materialización de los procedimientos mediante ostensivos.
 - Procesos de particularización del objeto media.
-

3.2.3 Análisis Epistémico y Semiótico Ítem 3.

La talla media de cinco jugadores de un equipo de futbol es 175 cm. Llega un jugador más y la talla media aumenta 2 cm. ¿Cuál es la talla media del nuevo jugador?

Este ítem, es tomado de Molero (2017), se ha realizado una modificación en el enunciado, adecuándolo al contexto de los estudiantes. En la práctica matemática, se espera el uso de la definición de la media ponderada (definición 1); también, el procedimiento para variable discreta con datos presentados en tablas de frecuencia (procedimiento *P2*); en este caso, se debe hacer referencia del algoritmo para calcular la media con frecuencias absolutas (*ecuacion 3*); así mismo, el procedimiento de inversión del algoritmo de la media aritmética (procedimiento *P6*).

Esta situación problema es de gran complejidad, ya que interviene diferentes objetos asociados al concepto y requiere el uso de dos procedimientos. En la siguiente tabla se detallan las diferentes entidades primarias asociadas a la situación problema.

Tabla 12
Objetos primarios asociados al ítem 3.

Tipo de objetos primarios	Significado
Campo de problemas	Elemento representativo en distribuciones simétricas. Obtener un valor probable.
Elementos lingüísticos	Representación verbal y numérica.
Conceptos-definición	Definición a partir del algoritmo. Definición conceptual.
Propiedades	<i>N3</i> Interviene todos los valores. <i>N4</i> Cambios al cambiar un dato. <i>A3</i> La media no tiene la propiedad asociativa.
Procedimientos	<i>P2</i> Cálculo de la media ponderada. <i>P6</i> Invertir el algoritmo de la media.
Argumento	No requiere argumento.

Para resolver la situación problema, el estudiante ha de comenzar con un proceso de significación para darle sentido al texto y los elementos que lo componen; la expresión “talla

media” hace referencia al valor de la media aritmética del conjunto de datos. Se debe identificar cada uno de los datos: frecuencias absolutas (5; 1); tamaño del conjunto de datos (6); valor de la media aritmética al aumentar dos centímetros (177); valores del conjunto de datos, (175; x_j). En este caso el valor que debe hallar es x_j .

En la práctica, se espera que el estudiante pueda hacer uso de una tabla de frecuencias, con el objetivo de identificar cada uno de los valores de la variable x_i y la frecuencia absolutas n_i . Enseguida se presenta los datos a partir de una tabla de frecuencias.

Tabla 13
Tabla de frecuencias ítem 3.

<i>i</i>	x_i	n_i
1	175	5
2	x_j	1

El estudiante debe recordar la definición de la media ponderada como la suma de cada uno de los valores de la variable multiplicado por su frecuencia absoluta, dividido entre el número total de datos; así mismo, su algoritmo (ecuación 3: cálculo de la media aritmética en con frecuencias absolutas).

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i n_i + x_j n_j}{n}$$

Una vez identificado los valores, se deben reemplazar en el algoritmo.

$$\frac{\sum_{i=1}^6 175 \times 5 + x_j \times 1}{6} = 177$$

Remplazados los valores, se debe aplicar procedimiento de inversión de la media aritmética (procedimiento 6); es decir, multiplicar el valor de la media aritmética por el número total de datos (177×6).

$$\sum_{i=1}^6 175 \times 5 + x_j \times 1 = 177 \times 6$$

Además despejar el valor x_j y realizar los procedimientos indicados:

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 177 \times 6 - 175 \times 5$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 187 \text{ La talla del nuevo jugador es } 187\text{cm}$$

A continuación, se presenta un análisis semiótico, de la posible solución, identifican objetos y procesos emergentes de las prácticas.

Tabla 14
Análisis semiótico ítem 3.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	<p>La talla media de cinco jugadores de un equipo de fútbol es 175 cm.</p> <p>Llega un jugador más y la talla media aumenta 2 cm. ¿Cuál es la talla media del nuevo jugador?</p>	<ul style="list-style-type: none"> - El estudiante ha de comenzar con un proceso de significación para darle sentido a la situación problema y los elementos que la componen. - La expresión “talla media” hace referencia al valor de la media aritmética.

-
- Cinco representa una cantidad discreta (número de jugadores, concepto de magnitud), y al mismo tiempo indica un número (concepto); número natural.
 - Cinco hace referencia a la frecuencia absoluta n_i .
 - 175 indica la talla media de los jugadores, de igual manera indica un número (concepto).
 - 2 indica el valor que aumenta la talla media; también, representa un número (concepto de número natural).
 - La expresión “llega un nuevo jugador” hace referencia a frecuencia absoluta n_i , en este caso 1.
 - El valor x_j es la talla de nuevo jugador.

- U2** Para solucionar el problema, el estudiante debe calcular el algoritmo de invertir la media

$$\frac{\sum_{i=1}^6 175 \times 5 + x_j \times 1}{6} = 177$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 177 \times 6 - 175 \times 5$$

- definición de media como suma ponderada (definición 1).
 - Procedimiento (*P2*) media para datos presentados en tablas de frecuencias.
 - Algoritmo de cálculo de la media con frecuencias absolutas (ecuación 3).
 - El estudiante deber asociar las frecuencias absolutas n_i (concepto) con los valores de la variable, es decir: $175 \times 5 ; x_j \times 1$
 - 177 valor de la media;
-

-
- 6 número total de datos de la distribución.
 - algoritmo de inversión de media (procedimiento *P6*).
 - Uso de la presentación numérica
 - proceso de materialización de la práctica matemática mediante ostensivos.
 - Elementos extensivos.
-

3.2.4 Análisis Epistémico y Semiótico Ítem 4.

El número de operaciones en el hospital Francisco de Paula Santander durante 10 días ha sido: 7, 8, 3, 2, 5, 4, 6, 5, 6, 43. Si te piden estimar con un solo valor el número diario de operaciones en el hospital, ¿qué valor darías? ¿Por qué?

El ítem 4, es tomado de Molero (2017), asociado a la situación problema 1: estimar una medida a partir de diversas mediciones realizada en presencia de errores. Se busca que el estudiante con un solo valor estime el número de operaciones diarias en el hospital. La solución de ítem, requiere la comprensión de diferentes elementos primarios asociados a la media aritmética (definición, procedimientos, propiedades). Por ejemplo: la media es el promedio aritmético de un conjunto de datos (definición 1); la media es un representante de un conjunto de datos (propiedad estadística 1); en el cálculo de la media intervienen todos los valores de los datos (propiedad numérica 3); cálculo de la media con datos aislados (procedimiento *P1*).

En la Tabla 15, se identifican los objetos primarios asociado a la situación problema 4.

Tabla 15
Objetos primarios asociados al ítem 4.

Tipo de objetos primarios	Significado
Campo de problemas	Estimar una cantidad desconocida.
Elementos lingüísticos	Representación verbal y numérica.
Conceptos-definición	Definición conceptual.
Propiedades	<i>N3</i> Interviene todos los valores. <i>E1</i> Representante de un colectivo. <i>E4</i> La media es poco resistente a cambio.
Procedimientos	<i>P1</i> Media para datos aislados.
Argumento	Requiere argumento.

Para resolver el ítem, primeramente el estudiante ha de comenzar con un proceso de significación de la situación problema; en la práctica matemática se debe utilizar la definición de media aritmética; también, los procedimientos de cálculo para variable discreta con datos aislados (procedimiento *P1*).

$$\bar{x} = \frac{7 + 8 + 3 + 2 + 5 + 4 + 6, + 5 + 6 + 43}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{89}{10}$$

$\bar{x} = 8,9$ el número de operaciones diarias en el hospital es 8,9.

A continuación, se presenta un análisis semiótico de la posible solución, identificando objetos y procesos emergentes de las prácticas.

Tabla 16
Análisis semiótico ítem 4.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	<p>El número de operaciones en el hospital francisco de paula Santander durante 10 días ha sido: 7, 8, 3, 2, 5, 4, 6, 5, 6, 43</p> <p>Si te piden estimar con un solo valor el número diario de operaciones en el hospital, ¿qué valor darías?, ¿por qué?</p>	<ul style="list-style-type: none"> - El estudiante ha de comenzar con un proceso de significación para darle sentido al texto y los elementos que lo componen; es decir, identificar las funciones semióticas críticas para la correcta interpretación del texto. - 10 representa una cantidad discreta (número de días), de igual manera indica un número. - 10 número total de datos de la distribución. - la serie 7, 8, 3, 2, 5, 4, 6, 5, 6, 43 es el número de operaciones realizadas por día (evento fenomenológico). - debe visualizar la serie de números como un todo (proceso de reificación). - concepto de distribución de datos - Debe realizar un proceso de interpretación (significación) a la pregunta.
U2	<p>Para resolver el problema el estudiante debe aplicar el algoritmo de cálculo de la media aritmética para datos aislados.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - El estudiante ha de recordar la definición de media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{7 + 8 + 3 + 2 + 5 + 4 + 6 + 5 + 6 + 43}{10}$$

$$\bar{x} = 8,9$$

- Algoritmo de cálculo de la media para datos aislados (procedimiento *P1*).
 - propiedad numérica *N3* en el cálculo de la media aritmética intervienen todos los datos de la serie.
 - Proceso de representación de las operaciones suma y división.
 - Asigna un valor (media) al conjunto de datos.
 - propiedad estadística (*E1*) la media es un representante de un colectivo de datos.
 - proceso de particularización del concepto de media a la media de un conjunto de datos.
 - Objetos extensivos.
 - Uso de representación numérica (número decimal 8,9).
 - Procesos de materialización de la práctica mediante elementos ostensivos.
-

3.2.5 Análisis Epistémico y Semiótico Ítem 5.

El entrenador de un equipo de baloncesto duda entre seleccionar a María o Daniela. Los puntos conseguidos por cada una, en una semana de entrenamiento fueron estos:

María	18	23	22	24	19	25	16
Daniela	18	26	18	28	22	17	18

Si fueses el entrenador, ¿a cuál de las dos elegirías? ¿Por qué?

Este ítem, es tomado de Molero (2017), la situación problema está asociada a la media aritmética en la comparación de dos distribuciones de datos con variables numéricas (situación problema 5). En el enunciado, se incluye implícitamente propiedades numéricas y estadísticas, tales como: la media es un representante de un conjunto de datos (propiedad estadística *E1*); en el cálculo de la media aritmética intervienen todos los valores (propiedad numérica *N3*). En la siguiente tabla, se presenta los objetos primarios epistémicos asociados al ítem 5.

Tabla 17
Objetos primarios asociados al ítem 5.

Tipo de objetos primarios	Significado
Campo de problemas	Comparar un conjunto de datos.
Elementos lingüísticos	Representación verbal, numérica, tabular.
Conceptos-definición	Definición a partir del algoritmo. Definición conceptual.
Propiedades	<i>N3</i> Interviene todos los valores. <i>E1</i> Representante de un colectivo.
Procedimientos	<i>P1</i> Media para datos aislados. Cálculo de la media y comparación de las dos distribuciones).
Argumento	El uso de la media aritmética, permite comparar dos conjuntos de datos.

Primeramente, se debe calcular la media aritmética de cada una de las distribuciones (procedimiento *P1*); también, se debe tener en cuenta varias propiedades asociadas al concepto, por ejemplo: en el cálculo de la media, intervienen todos los valores (propiedad numérica *N3*); la media no tiene la propiedad asociativa (propiedad aritmética *A3*).

Media aritmética distribución 1 (María):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^7 18+23+22+24+19+25+16}{7}$$

$$\bar{x} = 21$$

Media aritmética distribución 2 (Daniela):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^7 18+26+18+28+22+17+18}{7}$$

$$\bar{x} = 21$$

La media aritmética de las dos distribuciones coincide, se espera que el estudiante, analice, los puntos conseguidos por las dos jugadoras, con el objetivo de identificar ideas intuitivas de dispersión y pueda ofrecer un argumento basado en análisis de las medias de cada distribución y los puntos de cada jugadora (datos de la distribución).

A continuación, se presenta un análisis semiótico de la posible solución; se identifican objetos y procesos emergentes de las prácticas.

Tabla 18
Análisis semiótico ítem 5.

Unidad	Expresión	Contenido																
U1	<p>El entrenador de un equipo de baloncesto duda entre seleccionar a María o Daniela. Los puntos conseguidos por cada una, en una semana de entrenamiento fueron estos:</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>María</td> <td>18</td> <td>23</td> <td>22</td> <td>24</td> <td>19</td> <td>25</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>Daniela</td> <td>18</td> <td>26</td> <td>18</td> <td>28</td> <td>22</td> <td>17</td> <td>18</td> </tr> </table>	María	18	23	22	24	19	25	16	Daniela	18	26	18	28	22	17	18	<ul style="list-style-type: none"> - El estudiante ha de comenzar con un proceso de interpretación (significación) del enunciado y los elementos que lo componen. - Interpretación de la información presentada en la tabla. - Debe visualizar la serie de números como un todo (serie de distribución de datos) - proceso de reificación. - Identificar el número total de elementos de la distribución (7 días).
María	18	23	22	24	19	25	16											
Daniela	18	26	18	28	22	17	18											
U2	<p>Para resolver la situación habría, que calcular la media aritmética de los dos conjuntos de datos.</p> $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^7 18+23+22+24+19+25+16}{7}$ $\bar{x} = 21$ <p>Media aritmética distribución 2 (Daniela):</p>	<ul style="list-style-type: none"> - definición de media aritmética (concepto). - cálculo de la media para datos aislados (procedimiento <i>P1</i>). - Algoritmo de cálculo de la media. - De igual manera se debe tener en cuenta que interviene todos los datos de la distribución (propiedad numérica <i>N3</i>). - Al calcular la media de un conjunto de datos, se halla un 																

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^7 18+26+18+28+22+17+18}{7}$	representante de un colectivo (propiedad estadística <i>E1</i>). - Asigna un valor (21) media aritmética. - Representación simbólica y numérica para la media. - proceso de particularización. - Materialización de los procedimientos mediante ostensivos.
$\bar{x} = 21$	

3.2.6 Análisis Epistémico y Semiótico Ítem 6.

El peso medio de 5 chicas es de 46 kg . ¿Cuál es el peso total de las 5 chicas? Si todas las chicas engordan 3 kg , ¿cuál será el peso medio? ¿Cuál será el peso medio en gramos?

El ítem, es tomado de Molero (2017), asociado al campo de problemas de la media como elemento representativo en distribuciones simétricas. Se pretende que el estudiante utilice el algoritmo de la media y el procedimiento (*P6*) inversión del algoritmo de la media; así mismo, la comprensión de propiedades asociadas al objeto, por ejemplo: la propiedad aritmética 5: la media conserva los cambios de origen y escala. Si se suma, resta, multiplica o divide cada elemento del conjunto de datos por un mismo valor, entonces la media también se suma, resta o multiplica por ese valor.

En la siguiente tabla, se presentan los objetos primarios, asociados al ítem 6.

Tabla 19
Objetos primarios asociados al ítem 6.

Tipo de objetos primarios	Significado
Campo de problemas	Elemento representativo en distribuciones simétricas
Elementos lingüísticos	Representación verbal y numérica
Conceptos-definición	Definición a partir del algoritmo
	Definición conceptual
Propiedades	<i>A5</i> Cambios de origen y escala.
Procedimientos	<i>P1</i> Algoritmo de la media. <i>P6</i> Invertir el algoritmo de la media.
Argumento	No requiere argumento

Primeramente, se pregunta, ¿Cuál es el peso total de las 5 chicas? el estudiante debe hacer una interpretación del enunciado, identificando los datos que se dan en la situación problema: media aritmética (46 kg), tamaño de la distribución de datos (5) y el valor que se debe hallar; es decir: $\sum_{i=1}^n x$ (el peso total de las cinco chicas). En la práctica matemática, se debe utilizar la definición y algoritmo de la media, así como el procedimiento de invertir el algoritmo de la media (procedimiento *P6*).

$$\frac{\sum_{i=1}^5 x}{5} = 46$$

$$\sum_{i=1}^5 x = 46 \times 5$$

$$\sum_{i=1}^5 x = 230$$

El peso total de las 5 chicas es 230; además, se espera que el estudiante haga referencia al peso de cada una de las chicas, en otras palabras, de una posible distribución de datos (46, 46, 46, 46, 46). En este caso cada uno de los valores de la distribución coincide con la media.

Para resolver el literal 6B, primeramente, se debe hacer una interpretación del enunciado, identificado cada uno de los datos: peso medio ($46kg$); peso total de las 5 chicas (230) o los valores de la distribución de datos; (46, 46, 46, 46, 46); tamaño de la distribución (5). Además, identificar la pregunta; ¿cuál es el peso medio si todas las chicas engordan $3kg$?

El estudiante, debe recordar la definición y algoritmo de la media; así mismo, la propiedad aritmética (A5) si se suma, resta, multiplica o divide cada elemento del conjunto de datos, por un mismo valor, la media, también es sumanda, restada, multiplicada o dividida por esa misma constante.

Para calcular, el peso medio de las chicas al engordar $3kg$, debe sumar los $3kg$ a cada uno de los valores de la distribución construida en el literal 6A; así mismo sumar los $3kg$ al peso medio o media del conjunto de datos ($46kg$) y realizar las operaciones indicadas (suma y división), esto es:

$$\frac{\sum_{i=1}^5 (46+3)+(46+3)+(46+3)+(46+3)+(46+3)+(46+3)}{5} = 46 + 3$$

$$\frac{\sum_{i=1}^5 49+49+49+49+49}{5} = 49$$

$$\frac{\sum_{i=1}^5 245}{5} = 49$$

$\bar{x} = 49$ El peso medio de las cinco chicas si aumenta $3kg$ es $49kg$

Finalmente, para resolver el literal 6C, el estudiante debe realizar la conversión de los kilogramos a gramos. En este caso, el peso medio $46kg$ en gramos es equivalente a $46000 gr$. Después de realizada la conversión, el estudiante, debe aplicar la definición y algoritmo para calcular la media.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 49000 + 49000 + 49000 + 49000 + 49000 + 49000}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 245000}{5}$$

$\bar{x} = 49000$ el peso medio en gramos es igual a 49000 gr

A continuación, se presenta un análisis semiótico, de la posible solución; se identifican objetos y procesos emergentes de las prácticas.

Tabla 20
Análisis semiótico ítem 6.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	El peso medio de 5 chicas es de 46kg. ¿Cuál es el peso total de las 5 chicas	<ul style="list-style-type: none"> - El estudiante ha de comenzar con un proceso de interpretación (significación) de la situación problema. - La expresión “peso medio” debe remitir al estudiante a la definición de media aritmética aplicada a un caso particular. - Peso se refiere a una magnitud (concepto). - kilos (kg) refiere a una unidad de medida de la masa (concepto).
U2	¿Cuál es el peso total de las 5 chicas?	<ul style="list-style-type: none"> - El estudiante debe recordar la definición de media aritmética

$$\frac{\sum_{i=1}^5 x}{5} = 46$$

$$\sum_{i=1}^5 x = 46 \times 5$$

$$\sum_{i=1}^5 x = 230$$

- procedimiento (*P6*) inversión del algoritmo de la media.
- Igualdad (concepto), proceso de particularización.
- Uso de la representación numérica y simbólica.

U3 Si todas las chicas engordan 3 *kg*, ¿cuál será el peso medio?

A cada uno los valores de la distribución se le suma los 3 *kg*.

$$46 + 3 \text{ kg} = 49 \text{ kg}$$

$$(49, 49, 49, 49, 49)$$

- Representación numérica.
- Proceso de significación para interpretar la pregunta.
- Concepto y algoritmo de la adicción.
- Distribución de datos.

U4 Aplico la definición de media y el algoritmo.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 49 + 49 + 49 + 49 + 49 + 49}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 245}{5}$$

$$\bar{x} = 49$$

- Definición y algoritmo de la media aritmética.
- Asigna un valor, como media del conjunto de datos.
- Representación numérica.

U5 ¿Cuál será el peso medio en gramos?

Peso en kilogramos = 49 *kg*

- Proceso de significación de la pregunta y los elementos.
- Definición y algoritmo de la media aritmética.

Cambio de escala de kilogramos a gramos. $49 \text{ kilogramos} = 49000 \text{ gramos}$	- Propiedad aritmética 5: la media conserva los cambios de origen y escala.
Aplicar la definición de media y el algoritmo.	- Representación numérica.

En resumen, en este capítulo, se detallaron aspectos relacionados con la metodología utilizada para llevar a cabo el objetivo propuesto en el trabajo. Adicionalmente, el análisis epistémico, caracterizando los diferentes objetos asociados a cada situación problema, de acuerdo al marco teórico y el significado institucional de referencia descrito en el capítulo 2. Finalmente, el análisis semiótico de las posibles respuestas, permite evidenciar, las funciones semióticas, más importantes para una correcta interpretación de las situaciones problema. Además, permite el contraste entre el análisis epistémico (solución correcta desde el punto institucional) y las prácticas resultantes con el objetivo de determinar los conflictos semióticos.

Capítulo 4. Análisis de las Prácticas Matemáticas

En este capítulo, se explicitan los resultados obtenidos a partir de las actuaciones de un grupo de estudiantes de grado octavo, al resolver las situaciones problema que involucran el concepto de media aritmética. Inicialmente, se realiza un análisis semiótico de las prácticas matemáticas, identificando, objetos, procesos matemáticos y posibles conflictos semióticos; posteriormente, se presentan algunas conclusiones a partir del estudio realizado.

4.1 Estudio de casos

Para el análisis semiótico de las prácticas matemáticas, se realiza un estudio de casos con seis estudiantes de grado octavo, con el objetivo de profundizar en las respuestas ofrecidas; para el análisis, los estudiantes se identificarán como: E-1, E-2, E-3, E-4, E-5, E-6.

Primeramente, la respuesta se fragmenta en unidades de análisis (U) con el objetivo de analizar el significado personal declarado de los estudiantes (Godino et al, 2007). Mediante el análisis semiótico de las respuestas; se identifican, objetos y procesos matemáticos a los que hace referencia en la práctica, así mismo, los conflictos semióticos. Finalmente, se presentan algunas conclusiones a partir del estudio realizado, detallando los conflictos semióticos que presentaron los estudiantes, con el fin de mostrar la complejidad ontosemiótica en la comprensión del concepto de media aritmética.

4.1.1 Estudio de casos Estudiante E-1.

A continuación, se presenta el análisis semiótico de las respuestas dadas por el estudiante E-1. Primeramente, se describen elementos de la práctica realizada en cada ítem; en segundo lugar, el análisis semiótico, y finalmente, algunas conclusiones a partir del análisis.

4.1.1.1 Análisis semiótico ítem 1.

Item 1:
 a-Significa que más o menos tarda 10m en ir de la casa al colegio
 b-Significa que el porcentaje de hijos en Colombia es aproximada a 1.2

Ilustración 4. Respuesta estudiante E-1 ítem 1.

En la práctica, se observa que el estudiante en el literal 1A, hace referencia a la media aritmética como valor representativo de un conjunto de datos cuya distribución es simétrica (situación problema 3). En este caso, el objeto emergente de la práctica es situacional y se puede considerar desde la dualidad extensivo, ya que es usado en un contexto o práctica particular.

En el literal 1B, se evidencia que relaciona el valor de la media aritmética con el concepto de porcentaje; manifestando que “el porcentaje de hijos de las familias es aproximado a 1.2”. De igual manera, se presenta un conflicto con respecto a la propiedad numérica (N2) el cálculo de la media aritmética no es una operación interna en el conjunto numérico, puesto que esta puede tomar otro valor distinto a sus elementos; en este caso no tendría sentido pensar en un posible distribución cuyos valores sean 1,2. El siguiente análisis semiótico, permite evidenciar los objetos y procesos a los que hace referencia en la práctica matemática.

Tabla 21
 Análisis semiótico ítem 1 E-1.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	Significa que más o menos tarda 10 m en ir de la casa al colegio	- El alumno debe comenzar con un proceso de significación, para asignarle significado a la situación problema y a cada uno de sus elementos.

-
- media aritmética como elemento representativo en distribuciones simétricas; es decir, reconoce el campo de problemas asociados al concepto de media:
 - Media como representante de un colectivo (propiedad estadística *E1*).
 - Procesos de argumentación.
 - Objetos extensivos.
 - Proceso de particularización.
 - Representación verbal (lengua natural)
 - Error al usar *m* para indicar minutos.
-
- U2**
- Significa que el porcentaje de hijos en Colombia es aproximado a 1,2.
 - Idea de porcentaje (concepto).
 - Representación verbal.
 - Procesos de argumentación.
 - Conflicto semiótico al no distinguir entre los conceptos de porcentaje y media aritmética.
 - Conflicto semiótico con la propiedad aritmética (*N2*) la media no es una operación interna, puesto que esta puede tomar un valor distinto al conjunto de datos.
 - Conflicto con los procesos de significación, no hay una interpretación de la situación problema.
-

4.1.1.2 Análisis semiótico ítem 2.

Item 2: $\bar{x} = \frac{10+10+10+10}{4} = \frac{40}{4} = 10$

Ilustración 5. Respuesta estudiante E-1 ítem 2.

De acuerdo a la respuesta, el estudiante construye una distribución de datos (procedimiento 7), donde cada uno de los valores coincide con la media dada; además, en la práctica matemática, se calcula la media aritmética del conjunto de datos para verificar si esta coincide con la media dada. La práctica, es validad, aunque no se haya utilizado el procedimiento de inversión de la media; en este caso, se recurrió a una estrategia de ensayo y error para la construcción de la distribución.

Por otro parte, los objetos matemáticos emergentes son: definición y algoritmo de cálculo de la media para datos aislados (procedimiento *P1*); procedimiento (*P7*) construcción de una distribución de datos dada la media; uso de la representación lingüística, entre otros objetos primarios. Los procesos emergentes, son procesos de algoritmización; así mismo, los procedimientos, son de carácter ostensivo, materializando las operaciones realizadas. El uso de procesos de particularización mediante objetos extensivos (función particular del objeto media aritmética en un contexto o práctica). En la tabla 22 se presenta el análisis semiótico.

Tabla 22
Análisis semiótico ítem 2 E-1.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	$\bar{x} = \frac{10+10+10+10}{4} = \frac{40}{4} = 10$	- Proceso de significación: identifica correctamente la pregunta y reconoce el uso de la media aritmética para solucionar la situación problema.

-
- Identifica correctamente el número total de datos de la distribución (edad de cuatro hermanos).
 - Construcción de una distribución de datos (10, 10, 10, 10); concepto de distribución de datos).
 - proceso de reificación, construcción de una distribución de datos por objetos simples.
 - definición de media aritmética.
 - algoritmo para el cálculo de la media aritmética.
 - procedimiento (*P1*) cálculo de la media para datos aislados.
 - Propiedad estadística (*E1*).
 - procesos de algoritmización.
 - Representación lingüística de la media aritmética como \bar{x} .
 - Igualdad (concepto), proceso de particularización. En la práctica, el signo igual es utilizado de forma lineal.
 - Proceso de representación de las operaciones suma y división para el cálculo de la media aritmética.
 - Asigna un valor (media aritmética del conjunto de datos).
 - Proceso de particularización de la idea de media aritmética a este caso.
 - Uso de la media como reparto equitativo (situación problema 2).
-

-
- Procesos de materialización de la práctica matemática, mediante ostensivos.
-

4.1.1.3 Análisis semiótico ítem 3.

Item 3: La talla del nuevo jugdor es de 29.5 porque a 175 se le suman 2 = 177 y se dividen entre los 6 jugadores y da 29.5

Ilustración 6. Respuesta estudiante E-1 ítem 3.

En la práctica del estudiante, se hace referencia a las operaciones suma y división para justificar su respuesta; se evidencia que no logra determinar que a partir de la situación problema, se debe usar la definición de la media aritmética como suma ponderada (definición 1) y los diferentes procedimientos de cálculo, por ejemplo: la media se calculará como la suma total de los productos entre cada valor de variable en cuestión y su frecuencia absoluta, dividido entre el número total de datos de la distribución (procedimiento P2); inversión del algoritmo de la media (procedimiento P6).

En la práctica matemática, se presentan conflictos de tipo actuativo y conceptual; además, no hay un proceso de particularización del concepto de media ponderada a esta situación problema. Enseguida, se detalla el análisis de la respuesta.

Tabla 23
Análisis semiótico ítem 3 E-1.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	La talla del nuevo jugador es de 29,5 porque a 175 se le suma 2 = 177 y se divide entre los 6 jugadores y da 29,5	<ul style="list-style-type: none"> - Procedimiento al sumar, la talla media de los jugadores más los 2cm que aumenta esta al llegar el nuevo jugador. - 6: número total de datos de la distribución. - Procedimiento y representación de la división 177 entre 6. - Asigna un valor incorrecto 29,5 como media aritmética - Igualdad (concepto), proceso de particularización. - Representación de los números naturales y expresiones decimales. - Conflicto semiótico con la definición 1 (media ponderada). - Conflicto con el procedimiento (P2) cálculo de media con datos presentados en tablas de frecuencia. - Conflicto con el algoritmo de la media con frecuencias absolutas. - Conflicto semiótico con el algoritmo de invertir la media.

4.1.1.4 Análisis semiótico ítem 4.

Item 4: $\bar{x} = \frac{7+8+3+2+5+4+6+5+6+93}{10} = 89 | 10$ Resultado = 8,9

Ilustración 7. Respuesta estudiante E-1 ítem 4.

Como se puede observar, el estudiante realiza un procedimiento correcto; en este caso hay un proceso de interpretación del enunciado y sus elementos, es decir, logra determinar que a partir de la situación problema se debe usar la definición y el algoritmo de la media aritmética, con el objetivo de estimar el número promedio de operaciones diarias en el hospital.

En la práctica matemática, se materializa los procedimientos mediante ostensivos; Sumado a esto, se evidencia una comprensión de los elementos primarios asociados al concepto (definición, procedimientos, propiedades). No justifica su respuesta. A continuación, se detalla el análisis semiótico del fragmento de respuesta dada por el estudiante.

Tabla 24
Análisis semiótico ítem 4 E-1.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	$\bar{x} = \frac{7 + 8 + 3 + 2 + 5 + 4 + 6 + 5 + 6 + 43}{10}$ $\frac{89}{10} = 8,9$ <p><i>el resultado es 8,9</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> - El estudiante lee el enunciado e identifica correctamente los datos del problema. - Identifica correctamente la pregunta y el campo de problema asociado a la media aritmética (proceso de significación).

-
- Definición de media aritmética.
 - algoritmo de cálculo de la media aritmética.
 - procedimiento (*P1*) cálculo de la media para datos aislados.
 - Visualiza el conjunto de números como un conjunto de datos.
 - proceso de reificación, construcción de una distribución de datos por objetos simples.
 - Asigna un valor 8,9 (media aritmética), como elemento representativo de un conjunto de datos.
 - El signo igual, es utilizado de forma lineal.
 - Propiedad estadística (*E1*) la media es la representante de un conjunto de datos.
 - Proceso de representación de las operaciones suma y división para hallar la media.
 - Representación del número decimal 8,9.
 - Procesos de materialización mediante ostensivos.
 - Procesos de particularización mediante elementos extensivos
-

(función particular de un objeto en un contexto o práctica)

- No presenta conflictos semióticos.
-

4.1.1.5 Análisis semiótico ítem 5.

Item 5: Yo elegiría a Daniela porque el martes, Jueves, viernes, Domingo tuvo mejor puntuación que María y María solo tuvo buena puntuación el Miércoles y Sábado y el lunes las dos tuvieron la misma puntuación

Ilustración 8. Respuesta estudiante E-1 ítem 5.

De acuerdo a la respuesta, se puede observar que es un argumento cualitativo; basado en el análisis de los datos de cada una de las distribuciones. El estudiante, no reconoce que a partir de la situación problema, se debe emplear la definición y el algoritmo de la media aritmética con el objetivo de comparar los dos conjuntos de datos. Lo anterior, evidencia un conflicto asociado al campo de problemas asociado a la media (situación problema 3). Por otra parte, en la práctica, no se hace referencia a los elementos primarios asociados al concepto.

Tabla 25
Análisis semiótico ítem 5 E-1.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	Yo elegiría a Daniela porque el martes, jueves, viernes, domingo tuvo mejor puntuación que María y María solo tuvo buena puntuación el miércoles y sábado y el lunes las dos obtuvieron la misma puntuación.	<ul style="list-style-type: none"> - Representación verbal. - No hay un proceso de significación, ya que no reconoce el campo de problemas de la media aritmética. - No hay materialización de procedimientos para comparar los dos conjuntos de datos. El argumento está basado en el análisis de datos de la distribución. - no utiliza la media aritmética en la comparación de los dos conjuntos de datos.

4.1.1.6 Análisis semiótico ítem 6.

Item 6: $\begin{array}{r} 46 \\ \times 5 \\ \hline 230 \\ 15 \\ \hline 245 \end{array}$

El peso en gramos es de 245

El peso medio de los chicas es de 49 Kg

El peso medio en gramos es 49.000 Kg

Ilustración 9. Respuesta estudiante E-1 ítem 6.

El literal 6A, se evidencia un conflicto de tipo procedimental al usar el algoritmo de la media aritmética; en la práctica matemática, se hace referencia a las operaciones multiplicación

entre el peso medio y el número total de datos de la distribución (idea del algoritmo de invertir la media), pero a este resultado le suma 15, dando lugar a una respuesta incorrecta.

Con respecto a los literales *6B* y *6C* la respuesta es correcta, pero en la práctica matemática no se evidencia un proceso de materialización de los procedimientos para el cálculo de la media, solo se presenta el resultado del procedimiento; es decir, no se hace ostensivo el uso de fórmulas y procedimientos.

Tabla 26
Análisis semiótico ítem 6 E-1.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	$ \begin{array}{r} 46 \\ \times 5 \\ \hline 230 \end{array} $ $ \begin{array}{r} 15 \\ \hline 245 \end{array} $	<ul style="list-style-type: none"> - Procedimiento al multiplicar el peso medio por el tamaño de conjunto de datos (idea del algoritmo de invertir la media). - Concepto de suma. - Procedimiento al sumar 230 con 15. - Asigna un valor (245) como el peso total (respuesta incorrecta). - Error al expresar la respuesta en gramos (<i>gr</i>). - Conflicto semiótico procedimental al calcular el peso total, ya que desconoce el procedimiento correcto de invertir el algoritmo de la media.
U2	<p>El peso en gramos es de 245</p> <p>El peso medio de las chicas es de 49kg</p>	<ul style="list-style-type: none"> - El procedimiento para hallar el peso medio no es materializado, es decir, no se hace ostensivo. - propiedad estadística (<i>E1</i>) la media como representante de un conjunto de datos.

El peso medio en gramos es 49000gr	<ul style="list-style-type: none"> - propiedad aritmética (A5) la media conserva los cambios de origen y escala).
	<ul style="list-style-type: none"> - La respuesta es correcta, pero no hay un proceso de materialización del procedimiento, es decir no se hace ostensivo.

4.1.1.6.1 Conclusiones estudio de caso estudiante E-1.

En síntesis, en el análisis semiótico de las prácticas del estudiante, se observó, la materialización de los procedimientos mediante ostensivos, otros procedimientos no se hacen ostensivos. Uso de objetos extensivos, es decir, el objeto media aritmética en una práctica particular. Los principales conflictos, están relacionados con el algoritmo de invertir la media aritmética. Por otra parte, conflictos relacionados con la definición entre los conceptos de media y porcentaje. Además, no utiliza la media en la comparación de dos distribuciones con variables numéricas, no reconoce el campo de problemas asociado al concepto. A continuación, se detallan los diferentes conflictos semióticos que presenta el estudiante E-1.

- Conflicto semiótico conceptual con la definición de media aritmética como la suma ponderada de cada uno de sus valores de la variable multiplicado por su frecuencia (ítem 3).
- Conflicto relacionado con las definiciones de media y porcentaje (ítem 1).
- Conflicto semiótico con la propiedad aritmética (N2) la media no es una operación interna, puesto que esta puede tomar un valor distinto al conjunto de datos (ítem 1.)

- Conflicto semiótico relacionado con el algoritmo para calcular la media con frecuencias absolutas (ítem 3).
- Conflicto semiótico al invertir el algoritmo de la media aritmético (ítem 6)
- Conflicto semiótico asociado al campo de problemas, no reconoce el uso de la media aritmética para solucionar las situaciones problemas que involucra la comparación de dos distribuciones con variable numérica; es decir, no utiliza la media para comparar un conjunto de datos (ítem 5).

4.1.2 Estudio de casos estudiante E-2.

En este apartado, se presenta el análisis semiótico de las respuestas dadas por el estudiante E-2, al resolver las situaciones problema. Primeramente, se describen elementos de la práctica realizada en cada ítem; en segundo lugar, el análisis semiótico, y finalmente, algunas conclusiones a partir del análisis.

4.1.2.1 Análisis semiótico ítem 1.

1) Yo me demoro 10 minutos de ~~an~~ lugar de ~~res~~ ítem
que mi casa queda cerca al colegio
b: ~~por que~~ son

Ilustración 10. Respuesta estudiante E-2 ítem 1.

De acuerdo a la respuesta, se observa que no hay un proceso de interpretación del enunciado y sus elementos; para el estudiante, las expresiones lingüísticas “promedio”, “edad media” no se relacionan con el concepto o definición de la media aritmética. La interpretación es incorrecta. Enseguida, se presenta el análisis semiótico y los diferentes conflictos semióticos.

Tabla 27
Análisis semiótico ítem 1 E-2.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	Yo me demoro 10 minutos de mi lugar de residencia que mi casa queda cerca	<ul style="list-style-type: none"> - Argumento asociado a su vida cotidiana. - Se evidencia que no hay un proceso de significación. Los elementos lingüísticos “promedio”, “edad media”, no se relacionan con el concepto de media, ni el campo de problemas asociado al concepto. - Con respecto al literal 1B el estudiante no responde.

4.1.2.2 Análisis semiótico ítem 2.

$2) 10 = 4 \text{ hermanos}$ $ \begin{array}{r} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ \hline 10 \end{array} $	<p>los cuatro hermanos tienen 10 edades así el mayor 4, 3, 2, 1</p>
--	---

Ilustración 11. Respuesta estudiante E-2 ítem 2.

De acuerdo a la práctica, se evidencian varios conflictos semióticos; primeramente, al confundir la media con el total, es decir, considerar la media como la sumatoria de datos de la distribución. En segundo lugar, el estudiante, no hace referencia a los objetos primarios asociados a la media, por ejemplo: campo de problemas, elementos conceptuales y procedimentales. Enseguida, se presenta el análisis de la práctica matemática.

Tabla 28
Análisis semiótico ítem 2 E2.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	10 = 4 hermanos	<ul style="list-style-type: none"> - Error en el uso del signo igual como equivalencia numérica $10 = 4$ hermanos. - Mediante ensayo y error construye un conjunto de datos (concepto de distribución), de tal forma que la suma de los datos sea 10. - Proceso de representación de la suma y su resultado. - Omite el signo (+) de la adicción. - Considera la media aritmética como la sumatoria de datos de la distribución (la suma de las edades). - Conflicto semiótico conceptual, ya que no utiliza la definición de media como el promedio aritmético de un conjunto de datos (definición 2). - Confunde la media con el total (conflicto con la definición de media). - Conflicto semiótico con el algoritmo de cálculo de la media (procedimiento <i>P1</i>).
U2	Los cuatro hermanos tiene las edades así el mayor 4,3,2,1	<ul style="list-style-type: none"> - Particularización al asignar a cada hermano una posible edad. - Dificultad al construir una distribución dada la media aritmética. - Proceso de materialización de la práctica mediante elementos ostensivos.

4.1.2.3 Análisis semiótico ítem 3.

3) 177 cm

Se suma la talla de los jugadores entre la talla que aumenta

Ilustración 12. Respuesta estudiante E-2 ítem 3.

En la práctica del estudiante, se observa que no hay proceso de interpretación del enunciado, es decir, no logra determinar que a partir de la situación problema, se debe usar la definición y el algoritmo de la media aritmética. La estrategia utilizada, es la de sumar la talla media de los cinco jugadores (175) más los 2 cm que aumenta esta al llegar el nuevo jugador. Lo anterior, permite evidenciar una dificultad conceptual y procedimental, con respecto a la definición de media como suma ponderada y el algoritmo de cálculo para media con datos frecuencia absolutas (procedimiento P2). Enseguida se detalla el análisis semiótico de la práctica matemática.

Tabla 29
Análisis semiótico ítem 3 E-2.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	177 cm Se suma la talla de los jugadores entre la talla que aumenta.	<ul style="list-style-type: none"> - Concepto de suma. - Procedimiento al sumar la talla media de los cinco jugadores más los 2 cm que aumenta esta al llegar el nuevo jugador. - Desconoce que la media aritmética, puede utilizarse para resolver este tipo de situaciones problema. - Conflicto semiótico con la definición 1 (media ponderada).

-
- Conflicto con el algoritmo de la media (procedimiento *P2*).
 - Conflicto asociado al campo de problemas de la media.
-

4.1.2.4 Análisis semiótico ítem 4.

$$\begin{array}{r}
 4) \quad 7+8+3+2+5+4+6+5+6+4+3 = 89 \\
 \hline
 10 \quad \quad \quad 8 \quad 9 \quad 0 \quad 8,9
 \end{array}$$

El valor decimal de las operaciones es de 8,9

Ilustración 13. Respuesta estudiante E-2 ítem 4.

En la práctica matemática, se puede observar que se hace referencia a las operaciones suma y división para calcular el número promedio de operaciones realizadas en el hospital; es decir, logra determinar que a partir de la situación problema se debe usar la definición y el algoritmo de la media aritmética.

Por otra parte, en la práctica se aprecia el uso correcto del algoritmo de la media para datos aislados (procedimiento *P1*) y la comprensión de las diferentes propiedades asociadas al concepto, por ejemplo: la media es un representante de un conjunto de datos (propiedad estadística 1); en el cálculo de la media se tiene en cuenta todos los valores de los datos (propiedad numérica 3); la media es un valor perteneciente al rango de la variable de estudio (propiedad numérica 1).

Los objetos emergentes son: la definición de media aritmética, procedimiento (*P1*) variable discreta con datos aislados; así mismo, la propiedad estadística (*E1*) la media es un

representante de un conjunto de datos, además proporciona información de todo el conjunto de datos. De igual manera, los procedimientos son ostensivos, materializando las operaciones realizadas.

Tabla 30
Análisis semiótico ítem 4 E-2.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	$\frac{7+8+3+2+5+4+6+5+6+43}{10} = 89$ $\frac{89}{10} = 8,9$ <p>El valor diario de operaciones es 8,9</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Proceso de significación. - Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos; construye un objeto (distribución) por composición de objetos simples. - Definición de media aritmética como promedio aritmético de un conjunto de datos. - algoritmo de la media aritmética a partir de la definición. - procedimiento (<i>P1</i>). - Asigna un valor (media) al conjunto de datos. - Propiedad estadística 1: la media es un representante de un conjunto de datos. - Representación numérica, representación decimal. - Igualdad (concepto) proceso de particularización. - Representación verbal.

-
- Elementos extensivos (función particular de un objeto en un contexto o práctica).
 - Proceso de particularización del concepto de media aritmética a este caso.
 - Proceso de materialización de la práctica matemática.
-

4.1.2.5 Análisis semiótico ítem 5.

$$\underline{18+23+22+24+19+25+16} = 21$$

7

$$\underline{18+26+18+28+22+17+18} = 21$$

8

Yo escogería a
 daniela por que
 tiene mejores
 Valores q. maria

Ilustración 14. Respuesta estudiante E-2 ítem 5.

En la ilustración 14, se evidencia que el estudiante reconoce el uso de la media aritmética en la comparación de dos distribuciones con variables numéricas (situación problema 3); de igual manera, el algoritmo de la media aritmética como la suma de los datos de la distribución, dividido entre el número total de datos (procedimiento *P1*). Al analizar la práctica matemática (*U3*) que hace referencia a la procedimientos realizados para hallar la media, se observa un error al operar los datos de la segunda distribución (puntos conseguidos por Daniela), lo cual, modifica la media aritmética conjunto de datos; el estudiante obtiene un número decimal y lo aproxima a 21 de tal forma que las dos medias coinciden.

Los objetos matemáticos emergentes son: definición y algoritmo de media aritmética; así mismo, se observa la materialización de los procedimientos de cálculo, mediante ostensivos; y elementos extensivos (objeto medio en un contexto o práctica particular). A continuación, se detalla el análisis semiótico de la respuesta.

Tabla 31
Análisis semiótico ítem 5 E-2.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	$\frac{18+23+22+24+19+25+16}{7} = 21$	<ul style="list-style-type: none"> - Proceso de significación, visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos (proceso de reificación). - Definición de media aritmética como el promedio aritmético de un conjunto de datos. - algoritmo de cálculo para la media aritmética. - Procedimiento (P1) cálculo de la media para datos aislados. - Asigna un valor (media aritmética) al conjunto de datos. - Uso del signo igual. - Representación numérica.
U2	Explicación del procedimiento realizado. $18 + 23 + 22 + 24 + 19 + 25 + 16 = 147$	<ul style="list-style-type: none"> - Concepto y algoritmo de la adición. - Concepto y algoritmo de la división. - Representación numérica.

$$\frac{147}{7} = 21$$

U3
$$\frac{18+26+18+28+22+17+18}{7} = 21$$

- Proceso de significación, visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos (proceso de reificación).
- Aplica el algoritmo de cálculo para la media aritmética en datos aislados.
- Asigna un valor (media aritmética) al conjunto de datos.
- Signo igual (concepto).

U4 - Explicación del procedimiento realizado.

$$18 + 26 + 18 + 28 + 22 + 17 + 18 = 152$$

$$\frac{152}{7} = 21$$

- Algoritmo de la adición.
- Error al sumar los valores de la distribución.
- Algoritmo de la división.
- Conflicto al aproximar el resultado a 21.
- Conflicto con la propiedad (N4) el valor numérico de la media cambia cuando se cambia cualquier dato.

U5 Yo escogería a Daniela porque tiene mejores valores que María.

- El estudiante, ha calculado la media de los dos conjuntos de datos (procedimiento 1).
-

-
- su respuesta se justifica mediante el análisis de los puntos conseguidos por cada jugadora, en este caso, selecciona a Daniela por mejores valores.
 - Idea intuitiva de dispersión.
-

4.1.2.6 Análisis semiótico ítem 6.

46 puos se suman entre 10 que aseguran las chicas y ese es el resultado y en gramos 49 y 49 kg

Ilustración 15. Respuesta estudiante E-2 ítem 6.

En la práctica matemática no se evidencia el uso del concepto de media aritmética; los procedimientos utilizados hacen referencia a la suma entre la talla media ($46\ kg$) y los $3\ kg$ que aumenta cada una de las chicas. Se presenta dificultades en la comprensión del enunciado, es decir, no hay proceso de interpretación del ítem; por lo tanto, no logra determinar que a partir de la situación problema se debe utilizar la definición, el algoritmo y propiedades asociadas a la media aritmética (ver tabla 32).

Tabla 32
Análisis semiótico ítem 6 E-2.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	46 pues se suma entre lo que engordan las chicas y ese es el resultado del peso medio y en gramos 49 y 49 kg.	<ul style="list-style-type: none"> - Se evidencia que no hay un proceso de significación de los elementos del ítem y de la pregunta. - Se presenta un argumento confuso. - No se evidencia el uso de procedimientos o algoritmos. - hay un proceso de materialización en la respuesta, algunos elementos de la respuesta son idealizados, pero no están materializados. - Confusión entre 46 el peso total y 49. - Conflicto con la definición de media. - Conflicto con el procedimiento de inversión de la media.

4.1.2.6.1 Conclusiones estudio de caso estudiante E-2.

En resumen, el análisis semiótico evidencia conflictos con los procesos de significación, respecto a los elementos lingüísticos, “edad media”, “promedio”. Por otra parte, no hay una comprensión de la definición la media (definición 1; definición 2). A continuación, se detallan los principales conflictos semióticos.

- Conflicto semiótico conceptual con la definición de media como el promedio aritmético de un conjunto de datos. Confunde la media con el total (ítem 1, ítem 2).
- Conflicto semiótico procedimental al calcular la media con datos aislados o el algoritmo de media a partir de la definición (ítem 2).
- Conflicto semiótico con la definición de media aritmética como suma ponderada (ítem 3).
- Conflicto con el procedimiento ($P2$) cálculo de la media a partir de las frecuencias absolutas (ítem 3).
- Conflicto semiótico al invertir el algoritmo de la media aritmética (ítem 6).
- Conflicto procedimental relacionado con el algoritmo para calcular la media en datos aislados (ítem 2).
- Conflicto semiótico asociado al campo de problemas, ya que no reconoce el uso de la media aritmética en algunas situaciones problemas (ítem 6).

4.1.3 Estudio de casos estudiante E-3.

En este apartado, se presenta el análisis semiótico de las respuestas dadas por el estudiante E3, al resolver las situaciones problemas. Primeramente, se describen elementos de la práctica realizada en cada ítem; en segundo lugar, el análisis semiótico, y finalmente, algunas conclusiones a partir del análisis.

4.1.3.1 Análisis semiótico ítem 1.

1) a) Quiere decir que el colegio queda a 10 minutos a la casa, y así no se demora nada.

b) Quiere decir que el doble Serían 204 por que hace $102 + 102 = 204$

Ilustración 16 Respuesta estudiante E-3 ítem 1.

En el ejemplo ilustrado, se observa que el estudiante presenta una dificultad en la interpretación del enunciado; no relaciona las expresiones lingüísticas, “promedio” y “edad media” con el concepto o algoritmo de la media. Por ejemplo, en el ítem 1A, el argumento está basado en casos particulares. En el literal 1B, hay una interpretación incorrecta del enunciado. Lo anterior, generando conflictos con los procesos de significación y conflictos de tipo conceptual. Enseguida se presenta el análisis semiótico de la práctica matemática.

Tabla 33
Análisis semiótico ítem 1 E-3.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	Quiere decir que el colegio queda a 10 minutos a la casa, y así no se demora nada	<ul style="list-style-type: none"> - No hay un proceso de significación, de los elementos del texto. - El elemento lingüístico “promedio” no se relaciona con la definición conceptual o al campo de problemas asociado a la media aritmética. - Conflicto con la definición de media.

U2 Quiere decir que el doble sería 2,4 porque $1,2 + 1,2 = 2,4$	<ul style="list-style-type: none"> - suma entre decimales. - No hay un proceso de significación. - Promedio como hallar el doble o sumar 2 veces el valor dado. - Conflicto semiótico con la definición de la media. - Conflicto procedimental relacionado con el algoritmo de la media (procedimiento 1).
--	---

4.1.3.2 Análisis semiótico ítem 2.

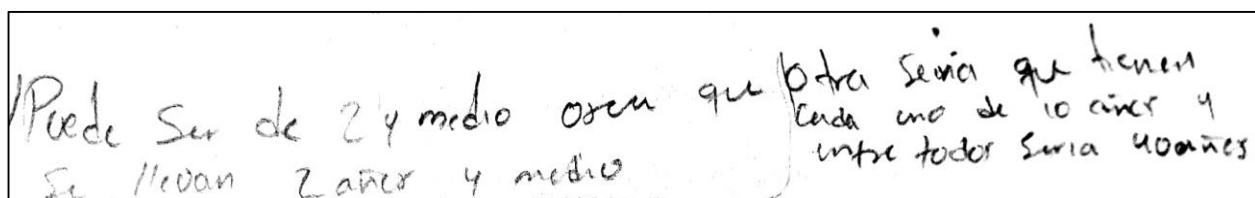


Ilustración 17. Respuesta estudiante E-3 ítem 2.

El estudiante ofrece dos respuestas. En la primera, se observa una interpretación incorrecta del enunciado, es un argumento cualitativo, y no se evidencia el uso de elementos conceptuales o procedimentales asociados a la media.

Con respecto a la segunda respuesta, es un argumento cualitativo; expresando que cada una de las edades de los cuatro hermanos es 10; el estudiante, hace referencia a una posible distribución de datos; en este caso la media como valor más probable (situación problema 3); en la práctica matemática no hay materialización de procedimientos mediante ostensivos. A continuación, se detalla el análisis semiótico del fragmento de respuesta.

Tabla 34
Análisis semiótico ítem 2 E-3.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	Que cada uno tiene 10 años y entre todos sería 40.	<ul style="list-style-type: none"> - Argumento cualitativo - No hay representación lingüística asociada a la media aritmética. - Media como valor más probable (situación problema 3). - concepto de distribución de datos. - Sumatoria de los datos de la posible distribución. - No hay materialización de los procedimientos. - No utiliza el algoritmo de invertir la media aritmética.

4.1.3.3 Análisis semiótico ítem 3.

3) La medida del nuevo jugador es de 177
Porque le sume 2 a la talla de los
otros

Ilustración 18 Respuesta estudiante E-3 ítem 3.

El estudiante presenta un argumento, haciendo referencia a la suma de la talla media de los cinco jugadores (175) más los dos centímetros que aumenta esta. En la práctica matemática, no se aprecia el uso del algoritmo de la media partir de las frecuencias absolutas (procedimiento P2); ni el algoritmo de invertir la media (procedimiento P6). Lo anterior, permite evidenciar,

primeramente dificultades de tipo conceptual con la definición de la media como suma ponderada (definición 1); en segundo lugar, dificultades de tipo procedural con respecto a los procedimientos: (*P2*) calculo de la media aritmética con frecuencias absolutas; (*P6*) algoritmo de inversión de la media aritmética.

Tabla 35
Ánalisis semiótico ítem 3 E-3.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	<p>La medida del nuevo jugador es de 177 por que se suma 2 a la talla de los otros.</p> $175 + 2 = 177$	<ul style="list-style-type: none"> - Algoritmo de la suma. - Conflicto semiótico conceptual: desconoce la definición 1 (media como suma ponderada). - Conflicto semiótico de tipo procedural. Se desconoce el procedimiento (<i>P2</i>) variable discreta con datos presentados en tablas de frecuencias. - No hay un proceso de significación de los elementos del ítem.

4.1.3.4 Análisis semiótico ítem 4.

$$\bar{x} = \frac{7+8+3+2+5+4+6+5+6+43}{10} = 8.9$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 8 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \\ 6 \\ 43 \\ \hline 99 \end{array}$$

Ilustración 19. Respuesta estudiante E-3 ítem 3.

A partir de la práctica, se observa que el estudiante hace uso de la representación lingüística asociada a la media (\bar{x}); los objetos emergentes son, el algoritmo de cálculo para datos aislados (procedimiento $P1$); así mismo, hace referencia a la representación de las operaciones suma y división para el algoritmo de cálculo de la media; en este caso, los procedimientos son de carácter ostensivo, materializando el procedimiento; además el uso de elementos extensivos, es decir el objeto en un contexto o práctica particular. En la tabla 36 se detalla en análisis de la respuesta.

Tabla 36
Análisis semiótico ítem 4 E-3.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	$\bar{x} = \frac{7+8+3+2+5+4+6+5+6+43}{10} = 8.9$	<ul style="list-style-type: none"> - Proceso de significación. - Definición de media aritmética. - algoritmo de cálculo de la media (procedimiento $P1$). - Representación lingüística media = \bar{x}

-
- Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos; construye un objeto (distribución) por composición de objetos simples
 - Representación de la suma.
 - propiedad asociativa para facilitar el cálculo de los valores de la distribución.
 - Asigna un valor (media) al conjunto de datos.
 - Propiedad estadística (*E1*) la media es un representante de un conjunto de datos.
 - Propiedad numérica (*N3*) en el cálculo de la media aritmética se tiene en cuenta todos los valores de los datos.
 - Uso del signo igual.

U2

$$\begin{array}{r}
 15 \\
 10 \\
 10 \\
 11 \\
 \hline
 43
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 89 \\
 \hline
 10
 \end{array}
 = 8,9$$

- Proceso de materialización de la práctica matemática.
 - Suma y división para el algoritmo de la media.
-

4.1.3.5 Análisis semiótico ítem 5.

$$3) 175 + 2 = 177$$

$$5) \text{Media} = x = \frac{18+23+22+24+19+25+16}{7} = 21$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ 46 \\ \hline 87 \\ 21 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$7) \text{Media} = x = \frac{14+26+18+28+22+17+18}{7} = 21$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ 46 \\ \hline 90 \\ 57 \\ \hline 17 \\ 21 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ilustración 20. Respuesta estudiante E-3 ítem 5.

En la respuesta del estudiante, se observa una comprensión de los diferentes objetos asociados a la media aritmética: representación lingüística; algoritmo de cálculo para datos aislados; así mismo, la comprensión de diferentes propiedades, por ejemplo: en el cálculo de la media interviene todos los valores (propiedad numérica *N3*); la media es representante de un colectivo de datos (propiedad estadística *E1*). También, en los procedimientos realizados, se hace referencia a propiedades de los números naturales, por ejemplo, la propiedad asociativa, para facilitar el cálculo de la sumatoria de datos.

En la práctica matemática, hay materialización de los procedimientos realizados, es decir se hacen ostensivos. En la siguiente tabla, se detalla en análisis semiótico de la práctica matemática.

Tabla 37
Análisis semiótico ítem 5 E-3.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	<p>Maria</p> $\bar{x} = \frac{18+23+22+24+19+25+16}{7} = 21$ $\frac{41}{147} \quad \frac{46}{147} \quad \frac{60}{147} \quad \frac{147}{7} = 21$	<ul style="list-style-type: none"> - Proceso de significación del texto y sus elementos. - La media aritmética en la comparación de dos distribuciones de datos con variables numérica (situación problema 5). - Representación lingüística media aritmética igual \bar{x}. - definición y algoritmo de cálculo de la media aritmética. - Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos; construye un objeto (distribución) por composición de objetos simples. - Aplica el algoritmo de cálculo de la media aritmética para datos aislados. - Asigna un valor (media) al conjunto de datos, proceso de particularización. - Uso del signo igual. - Uso de las propiedades de la media aritmética; propiedad estadística (E1) la media es un representante de un conjunto de datos;

-
- propiedad numérica (*N3*) en el cálculo de la media, se tiene en cuenta todos los valores.
 - Materialización de los procedimientos realizados suma de los valores de la distribución; división.

U2 Daniela

$$\bar{x} = \frac{18+26+18+28+22+17+18}{7} = 21$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ 46 \\ 57 \\ \hline 147 \end{array}$$

$$\frac{147}{7} = 21$$

- Proceso de significación del texto y sus elementos.
 - Media aritmética en la comparación de dos distribuciones de datos con variables numérica (situación problema 5).
 - Representación lingüística media aritmética igual \bar{x} .
 - El estudiante recuerda la definición y algoritmo de cálculo de la media aritmética.
 - Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos; construye un objeto (distribución) por composición de objetos simples.
 - Aplica el algoritmo de cálculo de la media aritmética para datos aislados.
-

-
- Asigna un valor (media) al conjunto de datos, proceso de particularización.
 - Uso del signo igual.
 - Uso de las propiedades de la media aritmética. propiedad estadística (*E1*) la media es un representante de un conjunto de datos.
 - propiedad numérica (*N3*) en el cálculo de la media, se tiene en cuenta todos los valores;
 - Materialización de los procedimientos mediante ostensivos.
- U3** Elegiría a ambas tiene mejor desempeño, pero si fuera a elegir a una, elegiría a Daniela porque ella tiene más puntos altos en cada día.
- El estudiante a partir del procedimiento del cálculo de la media, expresa que escogería a cualquiera de las dos, ya que, al coincidir la media, de los conjuntos de datos, las dos jugadoras tienen igual desempeño; su argumento se completa con el análisis cualitativo de datos; afirmando que escogería a Daniela porque tiene mejores puntajes.
-

4.1.3.6 Análisis semiótico ítem 6.

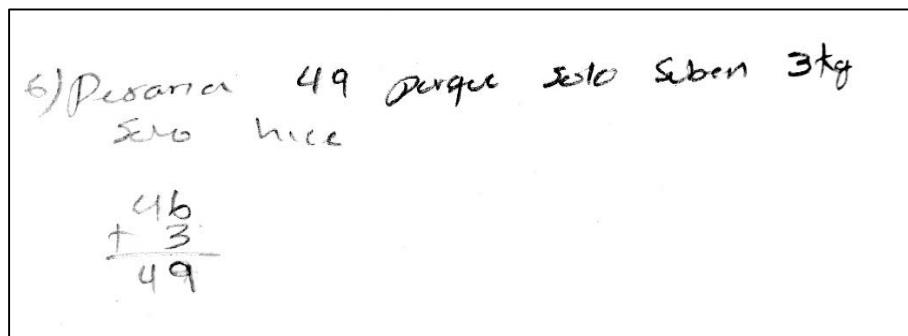


Ilustración 21. Respuesta estudiante E-3 ítem 6.

En la práctica matemática del estudiante, no se hace referencia al concepto de media aritmética, ni al algoritmo de inversión. Los objetos emergentes con el concepto y algoritmo de la suma. Por otra parte, no hay materialización de la práctica matemática con respecto a los literales 6B y 6C.

Tabla 38
Análisis semiótico ítem 6 E-3.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	<p>Pesaría 49 porque solo sube 3.</p> $ \begin{array}{r} 46 \\ + 3 \\ \hline 49 \end{array} $	<ul style="list-style-type: none"> - Representación de la operación suma. - Omite el signo (+). - Conflicto semiótico relacionado con la definición de media. - Conflicto semiótico procedimental, relacionado con el algoritmo de la media aritmética.

4.1.3.6.1 Conclusiones estudio de caso estudiante E-3.

De acuerdo al análisis semiótico, se observa que el estudiante no relaciona las expresiones “promedio”, “edad media” con el concepto de media o el algoritmo. Sumado a esto, presenta dificultades para construir un conjunto de datos dados la media aritmética. En algunas de las respuestas no hay materialización de los procedimientos. La principal dificultad, se evidencia con la definición de media como suma ponderada (definición 1). Observa que el estudiante E-3 presenta las siguientes dificultades o conflictos.

- Conflicto relacionado con la definición de media aritmética como el promedio aritmético de un conjunto de datos (ítem 1).
- Conflicto relacionado con la definición de media aritmética como suma ponderada (ítem 3).
- Conflicto semiótico al invertir el algoritmo de la media aritmética (ítem 6)
- Conflicto semiótico al construir un conjunto de datos dada la media aritmética (ítem 2).
- Conflicto relacionado con el procedimiento de calcular la media ponderada (ítem 3).
- Conflicto semiótico al calcular la media de un conjunto de datos (ítem 1)

4.1.4 Estudio de casos estudiante E-4.

En este apartado, se presenta el análisis semiótico de las respuestas dadas por el estudiante E-4, al resolver las situaciones problemas. Primeramente, se describen elementos de la práctica realizada en cada ítem; en segundo lugar, el análisis semiótico, y finalmente, algunas conclusiones a partir del análisis.

4.1.4.1 Análisis semiótico ítem 1.

a) 1) a) Cada día que voy del colegio a mi casa me tardo 10 minutos
 b) las Familias Colombianas Tienen entre 2 y 3 hijos.

Ilustración 22. Respuesta estudiante E-4 ítem 1.

En la práctica matemática, se hace referencia a media como reparto equitativo (situación problema 2). Se debe agregar que, es un argumento particular. En el literal 1B, da una posible distribución de datos (2 y 3). En este caso subyace la propiedad aritmética (A1) la media no es una operación interna. Enseguida, se presenta el análisis de la respuesta.

Tabla 39
Análisis semiótico ítem 1 E-4.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	Cada día que voy del colegio a mi casa me tardo 10 minutos.	<ul style="list-style-type: none"> - Argumento de la vida diaria. - Media como reparto equitativo.
U2	Las familias colombianas tienen entre 2 y 3 hijos.	<ul style="list-style-type: none"> - Idea del concepto de distribución de datos. - Propiedad numérica (N2) la media no es una operación interna, ya que esta puede tomar un valor diferente a los valores de la distribución. - Representación numérica. - Representación verbal.

4.1.4.2 Análisis semiótico ítem 2.

$$2) a) 2, 6, 18, 14 = \frac{40}{4} = 10$$

Ilustración 23. Respuesta estudiante E-4 ítem 2.

La práctica matemática, hace referencia a la construcción de distribución de datos; así mismo al algoritmo de la media aritmética. Por otra parte, la media del conjunto de datos, coincide con la media dada en la situación problema. El procedimiento y la respuesta son válidos, aunque no se haya utilizado el procedimiento de inversión de la media. El ítem no tenía un nivel de complejidad. Enseguida se detalla el análisis semiótico de la respuesta.

Tabla 40
Análisis semiótico ítem 2 E-4.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	$2, 6, 8, 14 = \frac{40}{4} = 10$	<ul style="list-style-type: none"> - Construcción por ensayo y error de un conjunto de datos. - concepto de distribución de datos. - 4 tamaño conjunto de datos - Definición de media aritmética. - Algoritmo de cálculo de media aritmética (procedimiento 1). - Asigna un valor (media) al conjunto de datos. - Propiedad numérica ($N1$) valor en el rango. - La media hallada coincide con la media dada (10). - Representación numérica.

-
- Uso del signo igual de forma lineal.
 - Materialización de la práctica mediante ostensivos.
 - Elementos extensivos uso de objeto en un contexto o práctica particular.
-

4.1.4.3 Análisis semiótico ítem 3.

3) 29,5 es la talla del Nuevo Jugador

Ilustración 24. Respuesta estudiante E-4 ítem 3.

En la práctica del estudiante, se observa que no hay un proceso de materialización de los procedimientos, es decir, no se hacen ostensivos. Lo anterior, permite evidenciar la complejidad del concepto de media aritmética como la suma ponderada de cada uno de los valores de la variable multiplicado por su frecuencia (definición 1). A continuación, se detalla el análisis semiótico de la práctica.

Tabla 41
Análisis semiótico ítem 3 E-4.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	29,5 Es la talla del nuevo jugador.	<ul style="list-style-type: none"> - Representación numérica. - No hay materialización del procedimiento realizado por el estudiante. - Conflicto semiótico relacionado con la definición 1 (media ponderada). - Conflicto semiótico procedimental (procedimiento 2).

-
- Conflicto semiótico con el algoritmo de invertir la media aritmética (procedimiento 6).
-

4.1.4.4 Análisis semiótico ítem 4.

$$4) \frac{7,8 + 3 + 2 + 5 + 4}{10} = 29$$

$$\frac{2,9 + 43}{2} = 24$$

Ilustración 25. Respuesta estudiante E-4 ítem 4.

En la respuesta dada por el estudiante E4, se puede observar varios conflictos relacionados con las propiedades de la media aritmética. Primeramente, al calcular la media no se tiene en cuenta todos los datos de la distribución (conflicto con la propiedad numérica 3). Aunque hace referencia al valor (10) como el número total de datos. Además, al hallar la sumatoria de datos omite el signo de la adición (+).

Al valor promedio del conjunto de datos (7, 8, 2, 5) le adiciona (43) y obtiene otra media aritmética. Lo anterior, evidencia un conflicto procedural y proposicional, ya que generaliza la propiedad asociativa para el concepto de la media.

Tabla 42
Análisis semiótico ítem 4 E-4.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	$\frac{7,8 + 3 + 2 + 5 + 4}{10} = 2,9$	- Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos (concepto de distribución).

-
- Algoritmo de cálculo de la media para datos aislados (procedimiento *P1*).
 - Asigna un valor (media aritmética) al conjunto de datos.
 - Uso del signo igual.
 - Conflicto semiótico proposicional, ya no tiene en cuenta todos los datos (propiedad numérica 3).

U2
$$\frac{2,9 + 43}{2} = 34$$

- Algoritmo de cálculo para la media aritmética.
 - Asigna un valor (media aritmética).
 - Uso del signo igual.
 - Conflicto semiótico al considerar la propiedad asociativa para la media (propiedad aritmética 3).
 - Proceso de materialización de la práctica matemática mediante elementos ostensivos.
-

4.1.4.5 Análisis semiótico ítem 5.

5) Yo escogería a Daniela porque
Gano 4 set a María.

Ilustración 26. Respuesta estudiante E-4 ítem 5.

El argumento es de tipo cualitativo; el estudiante no logra determinar que a partir de la situación problema, se debe utilizar la definición y el algoritmo de la media aritmética, con el

objetivo de comparar las dos distribuciones. En la práctica, no hay materialización de procedimientos asociados al concepto de media.

Tabla 43
Análisis semiótico ítem 5 E-4.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	Yo escogería a Daniela porque gano 4 set a María.	<ul style="list-style-type: none"> - Argumento cualitativo - Comparación de los puntos conseguidos por las dos chicas (evento fenomenológico). - No reconoce el campo de problemas de la media aritmética.

4.1.4.6 Análisis semiótico ítem 6.

- El Peso Medio De 5 chicas es de 46Kg - Para Saber Cuál es el Peso Total De Ellas Multiplico 46×5 es = 230
- Al Ellas Engordar 3Kg Cada una Pesara 49. = multiplico $49 \times 5 = 245$
- El Peso Medio Sería 122.5 al 40 dividir $245 \div 2$

Ilustración 27 Respuesta estudiante E-4 ítem 5.

De acuerdo a la práctica matemática del estudiante, en literal 6A, se observa que hace referencia al algoritmo de invertir la media (procedimiento *P6*). El procedimiento utilizado es: multiplicar el peso medio por el número total de datos de la distribución, esto es, (46×5) .

El literal 6B, el procedimiento es incorrecto, ya que confunde la media con el total; al mismo tiempo, relaciona elemento lingüístico “peso medio” como hallar la mitad o dividir entre dos.

Tabla 44
Análisis semiótico ítem 6 E-4.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	El peso medio de 5 chicas es 46 kg. Para saber cuál es el peso total de ellas multiplico $46 \times 5 = 230$	<ul style="list-style-type: none"> - Proceso de significación: identifica correctamente los datos del problema. - Procedimiento al multiplicar 46×5 (idea de inversión del algoritmo de la media). - asigna un valor (230) peso total. - Representación numérica.
U2	Al engordar 3kg cada una pesaría 49 Multiplico $49 \times 5 = 245$	<ul style="list-style-type: none"> - Al peso medio le adiciona los 3kg. - Concepto y algoritmo de la adicción. - Proceso de representación de la multiplicación. - Procedimiento al multiplicar 49×5 (idea de inversión del algoritmo de la media).

-
- Confunde la media con el total.
 - Representación numérica.

U3 Peso medio 122,5. Al yo dividir

$$\frac{245}{2} = 122,5$$

- Representación de la operación división y su resultado.
 - Representación numérica.
 - Conflicto semiótico lingüístico, ya que relaciona la expresión “peso medio” con la mitad o dividir entre dos.
-

4.1.4.6.1 Conclusiones estudio de casos estudiante E-4.

A partir del análisis semiótico de las prácticas matemáticas, se han identificado los siguientes conflictos semióticos:

- Conflicto con definición de media como suma ponderada (ítem 3).
- Conflicto con el algoritmo de cálculo de la media con frecuencias absolutas (ítem 3)
- Conflicto relacionado con la propiedad numérica (*N3*) en el cálculo de la media aritmética interviene todos los datos de la distribución (ítem 4).
- Conflicto relacionado con la propiedad aritmética (*A3*) al asignarle la propiedad asociativa al cálculo de la media (ítem 4).
- Conflicto con la propiedad numérica (*N3*) la media conserva los cambios de origen y escala.
- Conflicto asociado al campo de problemas de la media (ítem 5).
- Conflicto semiótico al confundir la media con el total (ítem 1; ítem 6).

- Conflicto semiótico con los elementos lingüísticos; relaciona la expresión peso medio como dividir entre dos o la mitad.

4.1.5 Estudio de casos estudiante E-5.

En este apartado, se presenta el análisis semiótico de las respuestas dadas por el estudiante E-5. Primeramente, se describen elementos de la práctica realizada en cada ítem; en segundo lugar, el análisis semiótico, y finalmente, algunas conclusiones a partir del análisis.

4.1.5.1 Análisis semiótico ítem 1.

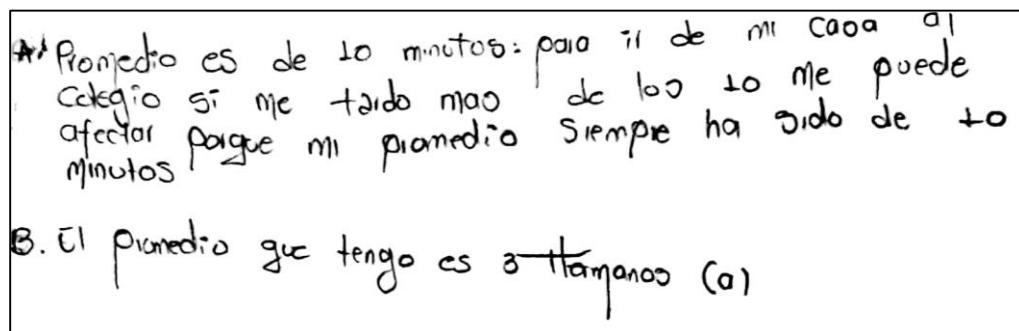


Ilustración 28. Respuesta estudiante E-5 ítem 1.

De acuerdo a la respuesta dada por el estudiante E-5, se hace referencia a la media como representante de un conjunto de datos (propiedad estadística E1); por otra parte, al afirmar “si me tarde más de los 10 puede afectar mi promedio”, está explícita la idea de la propiedad estadística (E4) la media es un estadístico poco resistente muy sensible a la variación de los datos.

Con respecto al literal 1B, los objetos emergentes hacen referencia a la media como la sumatoria de datos de una distribución. Lo anterior, evidencia conflictos de tipo conceptual y procedimental asociados al concepto. Enseguida, se presenta el análisis semiótico, identificando las unidades de contenido.

Tabla 45
Análisis semiótico ítem 1 E-5.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	Promedio es de 10 minutos para ir de mi casa al colegio, si me tardo más de los 10 minutos puede afectar porque mi promedio siempre ha sido de 10.	<ul style="list-style-type: none"> - Media como representante de un colectivo de datos (propiedad estadística <i>E1</i>). - Media como reparto equitativo. - Propiedad estadística (<i>E4</i>) la media es un estadístico poco resistente, sensible a la variación en presencia de valores atípicos. - Representación verbal.
U2	El promedio que tengo es 3 hermanos.	<ul style="list-style-type: none"> - Media aritmética como la sumatoria de los valores del conjunto de datos. - Conflicto semiótico conceptual (definición 2). - Conflicto semiótico con el algoritmo de la media (procedimiento <i>P1</i>).

4.1.5.2 Análisis semiótico ítem 2.

$$2 \cdot 4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

Ilustración 29. Respuesta estudiante E-5 ítem2.

El estudiante construye un conjunto de datos, y realiza la suma de los valores de la distribución; el valor de la sumatoria de los datos coincide con el valor de la media dada; en este caso, confunde el valor de la media con el total o sumatoria de datos de la distribución. El

procedimiento es incorrecto, evidenciado la dificultad conceptual y procedimental con respecto al concepto de media aritmética; ya que generaliza la definición de media como la suma de los valores de una distribución.

Los objetos emergentes de la práctica, son el concepto de suma, puesto que a través de la adición intenta resolver la situación problema; se evidencia un conflicto con el procedimiento para calcular la media de un conjunto de datos (procedimiento 1). A continuación, se identifica los diferentes objetos emergentes de las prácticas.

Tabla 46
Análisis semiótico ítem 2 E-5.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	$4 + 3 + 2 + 1 = 10$	<ul style="list-style-type: none"> - Construcción de un conjunto de datos (concepto de distribución). - Representación de la operación suma. - Uso del signo igual como operador. - Representación numérica. - Conflicto semiótico al considerar la media como la sumatoria de datos de una distribución - Conflicto semiótico relacionado con el algoritmo de cálculo de la media (procedimiento <i>P1</i>). - Conflicto relacionado con el procedimiento (<i>P7</i>) construir una distribución dada la media.

4.1.5.3 Análisis semiótico ítem 3.

$$3.175 \times 2 = 350 \div 2 = 175$$

Ilustración 30. Respuesta estudiante E-5 ítem 3.

La principal dificultad con respecto al ítem, es que no hay un proceso de significación de cada uno de los elementos del enunciado. El estudiante debía tener en cuenta: la definición de la media aritmética como la suma ponderada de cada uno de los valores por su frecuencia; el procedimiento de cálculo de la media con frecuencias absolutas (procedimiento *P2*); de igual manera, el algoritmo de invertir la media (procedimiento *P6*).

Los objetos emergentes de la práctica, hacen referencia a: la multiplicación entre la talla media y los *2cm* que aumenta esta al llegar el nuevo jugador; además, la división de 350 entre 2. La práctica matemática es incorrecta, evidenciando la complejidad en la comprensión de los diferentes objetos primarios asociados al concepto (definiciones, procedimientos). En la siguiente tabla se detalla en análisis de la práctica matemática.

Tabla 47
Análisis semiótico ítem 3 E-5.

Unidad	Expresión	Contenido
<i>U2</i>	$175 \times 2 = 350 \div 2 = 175$	<ul style="list-style-type: none"> - Representación de las operaciones multiplicación y división. - Representación numérica. - Asigna un valor (175) talla media. - Uso del signo igual de forma lineal.

-
- Conflicto semiótico relacionado con la definición de la media como suma ponderada de cada uno de los valores multiplicado por su frecuencia.
 - Conflicto con el procedimiento de cálculo de la media con frecuencias absolutas (procedimiento $P2$).
 - Conflicto con el algoritmo de invertir la media aritmética.
-

4.1.5.4 Análisis semiótico ítem 4.

Ítem 4.

$$\bar{x} = \frac{7+8+3+2+5+4+6+5+6+43}{10} = 8,9$$

5.

$$\begin{array}{r} 89 \\ \hline 10 \\ 09 \\ \hline 09 \end{array}$$

Ilustración 31. Respuesta estudiante E-5 ítem 4.

El estudiante utiliza correctamente el algoritmo de la media aritmética; en la práctica matemática, se observa una comprensión de las diferentes propiedades asociadas al concepto, por ejemplo: en el cálculo de la media aritmética, se tiene en cuenta todos los valores de los datos (propiedad numérica 3).

Los procedimientos emergentes de las prácticas, son ostensivos, materializando las operaciones realizadas para hallar el valor representativo del conjunto de datos. Los objetos

primarios de la práctica, se pueden considerar desde la faceta extensiva, en este caso el uso de objeto media aritmética en un contexto o práctica particular.

Tabla 48
Análisis semiótico ítem 4 E-5.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	$\bar{x} = \frac{7+8+3+2+5+4+6+5+6+43}{10} = 8,9$ $89 \div 10 = 8,9$	<ul style="list-style-type: none"> - El ostensivo \bar{x} se utiliza para hacer referencia a la media. - El estudiante recuerda la definición y algoritmo de cálculo de la media. - Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto, es decir, formar un objeto a partir de otros (proceso de reificación). - Cálculo de la media aritmética para datos aislados (procedimiento <i>P1</i>). - Asigna un valor (media) al conjunto de datos. - Propiedad estadística (<i>E1</i>) la media es un representante de un conjunto de datos. Propiedad numérica (<i>N3</i>) en el cálculo de la media se tiene en cuenta todos los valores de los datos. - Uso del signo igual como operador.

-
- Representación numérica (número natural y expresión decimal).
 - Proceso de materialización de la práctica matemática.
 - Proceso de particularización de concepto de media a la media aritmética de una distribución de datos.
 - No se evidencia conflictos semióticos.
-

4.1.5.5 Análisis semiótico ítem 5.

yo escogería para el equipo de baloncesto a Daniela porque tiene mas puntos que María y podríamos ganar todos los partidos.

Ilustración 32. Respuesta estudiante E-5 ítem 5.

El estudiante E-5, ofrece un argumento cualitativo, basado en el análisis de los puntos conseguido por cada una de las jugadoras; en este caso no se hace uso de la media aritmética para comparar o verificar que el valor promedio de los dos conjuntos de datos coincide.

Tabla 49
Análisis semiótico ítem 5 E-5.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	Yo escogería para el equipo de baloncesto a Daniela porque tiene más puntajes que María y podríamos ganar todos los partidos.	<ul style="list-style-type: none"> - El estudiante brinda un argumento de tipo cualitativo - No se evidencia procedimientos y algoritmos. - Conflicto semiótico situacional, ya que desconoce que la media aritmética permite la comparación de dos distribuciones de datos con variables numéricas.

4.1.5.6 Análisis semiótico ítem 6.

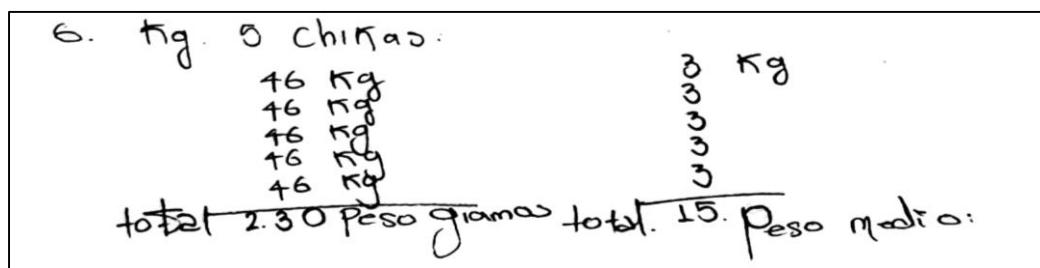


Ilustración 33. Respuesta estudiante E-5 ítem 6.

En la primera respuesta del estudiante, el resultado del peso total es correcto, pero no se utiliza el algoritmo de la media aritmética; el procedimiento, hace referencia a la sumatoria del peso medio de las cinco chicas ($46 + 46 + 46 + 46 + 46 = 230$).

En la segunda unidad de contenido (U_2 respuesta dos); se hace referencia a la operación suma: ($3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$). Lo anterior, evidencia la complejidad que tiene para el

estudiante, el uso de la definición y el algoritmo de la media, así mismo, el interpretar como varía la media si se cambia la escala de origen (propiedad aritmética 5). Los objetos emergentes de las prácticas, hacen referencia al concepto de suma; los procesos de algoritmización. Por otra parte, los procedimientos son materializados mediante ostensivos.

Tabla 50
Análisis semiótico ítem 6 E-5.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	<i>kg 5 chicas</i> 46 46 46 46 46 $\frac{46}{230}$ <i>total 230 peso gramos</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Representación numérica - Construcción de un conjunto de datos: cada uno de los valores coincide con la media aritmética dada (46 kg). - concepto de distribución de datos - Representación de la operación suma.
U2	<i>3</i> <i>3</i> <i>3</i> <i>3</i> $\frac{3}{15}$ <i>total peso medio 15</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Representación numérica - Representación de la suma. - Conflicto relacionado con las propiedades, no interpreta como varia la media cuando cambia de escala.

4.1.5.6.1 Conclusiones estudio de casos estudiante E-5.

El análisis de los diferentes ítems, muestra la complejidad que tiene la comprensión del concepto de media aritmética. A continuación, se detallan los conflictos semióticos de las prácticas matemáticas.

- Confundir la media con el total (ítem 2; ítem 1).
- Conflicto con el algoritmo de la media a partir de la definición (ítem 1; ítem 2).
- Conflicto relacionado con la definición de media como suma ponderada (ítem 3).
- Conflicto procedural cálculo de la media aritmética con frecuencias absolutas (ítem 3).
- conflictos de tipo procedural relacionado con el algoritmo de invertir la media aritmética (ítem 6).
- En el ítem 6 no se hace uso de la media para darle solución a la situación problema (conflicto asociado al campo de problema de la media)

4.1.6 Estudio de casos estudiante E-6.

En este apartado, se presenta el análisis semiótico de las respuestas dadas por el estudiante E-6. Primeramente, se describen elementos de la práctica realizada en cada ítem; en segundo lugar, el análisis semiótico, y finalmente, algunas conclusiones a partir del análisis.

4.1.6.1 Análisis semiótico ítem 1.

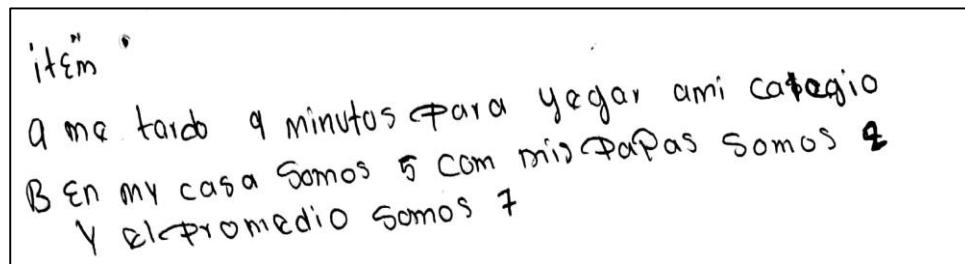


Ilustración 34. Respuesta estudiante E-6 ítem 1.

La práctica matemática del estudiante E-6, permite evidenciar que se presenta una dificultad en la comprensión de la definición de media aritmética como el promedio aritmético de un conjunto de datos; además, no hay un proceso de interpretación de los elementos del enunciado, por ejemplo: los elementos lingüísticos “promedio” o “edad media”.

En el literal 1B, se evidencia un conflicto relacionado con el concepto y algoritmo de la media aritmética; ya que considera la media como la suma de los valores de la distribución, esto es: $(5 + 2 = 7)$. El siguiente análisis semiótico, permite identificar los objetos y procesos a los que hace referencia en su respuesta.

Tabla 51
Análisis semiótico ítem 1 E-6.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	Me tardo 9 minutos para llegar a mi colegio.	<ul style="list-style-type: none"> - El estudiante, brinda un argumento de su vida cotidiana para explicar la frase. - Se evidencia un conflicto con los procesos de significación; no relaciona el elemento lingüístico “promedio” definición o algoritmo de la media.

U2	En mi casa somos 5, con mis papas somos 2 y el promedio somos 7.	<ul style="list-style-type: none"> - El argumento hace referencia al concepto promedio como la suma de los datos de la distribución. Por ejemplo, $5+2 = 7$. - El lenguaje aritmético se hace ostensivo. - Conflicto semiótico conceptual: desconoce la definición de media como la media como el promedio aritmético de un conjunto de datos (Definición 2). - Conflicto semiótico procedimental con el cálculo de la media aritmética (procedimiento <i>P1</i>).
-----------	--	---

4.1.6.2 Análisis semiótico ítem 2.

ítem ② 8, 3, 5, 2

Ilustración 35. Respuesta estudiante E-6 ítem 2.

De acuerdo a la respuesta dada, el estudiante construye un conjunto de datos mediante la estrategia de ensayo y error, pero no hay materialización de procedimiento (*P1*) para verificar si la media del conjunto de datos construido coincide con la media dada. Lo anterior, permite evidenciar que no hay una comprensión de los elementos procedimentales asociados al concepto.

Tabla 52
Análisis semiótico Ítem 2 E-6.

Unidad	Expresión	Contenido
--------	-----------	-----------

U1	8, 3, 5, 2	<ul style="list-style-type: none"> - Construcción de un conjunto de datos. - concepto de distribución. - No hay materialización de los procedimientos asociados a la media aritmética. - Conflicto semiótico procedural, al construir una distribución de datos dada la media.
-----------	------------	--

4.1.6.3 Análisis semiótico ítem 3.

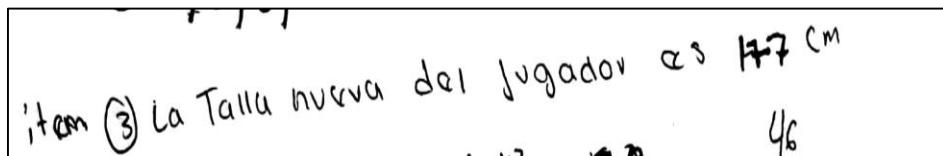


Ilustración 36. Respuesta estudiante E-6 ítem 3.

En la práctica del estudiante, los objetos emergentes son el concepto de suma; el procedimiento al sumar la talla media y el valor que aumenta esta al llegar un nuevo jugador. El análisis de la respuesta, permite evidenciar la dificultad de tipo conceptual asociado al concepto de media aritmética como suma ponderada; así mismo de tipo procedural con el algoritmo de cálculo de media con frecuencias absolutas. En la práctica no hay un proceso de particularización de concepto de media ponderada a esta situación problema.

Al respecto Molero (2017), expresa que este ítem presenta una gran complejidad para el estudiante, ya que interviene diferentes objetos asociados a la media aritmética; el estudiante, debe hacer uso de dos procedimientos: en primer lugar, el procedimiento para variable discreta

con datos presentados en tablas de frecuencia (procedimiento 2); en segundo lugar, la inversión del algoritmo del cálculo de la media (procedimiento 6).

Tabla 53
Análisis semiótico ítem 3 E-6.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	La talla del nuevo jugador es 177.	<ul style="list-style-type: none"> - Concepto y algoritmo de la adicción. - El procedimiento no se materializa, solo se presenta el resultado de la suma. - Conflicto semiótico conceptual respecto a la definición de media aritmética como suma ponderada. - Conflicto semiótico procedimental, ya que desconoce el algoritmo de cálculo de la media con frecuencias absolutas. - Conflicto con el procedimiento (P2).

4.1.6.4 Análisis semiótico ítem 4.

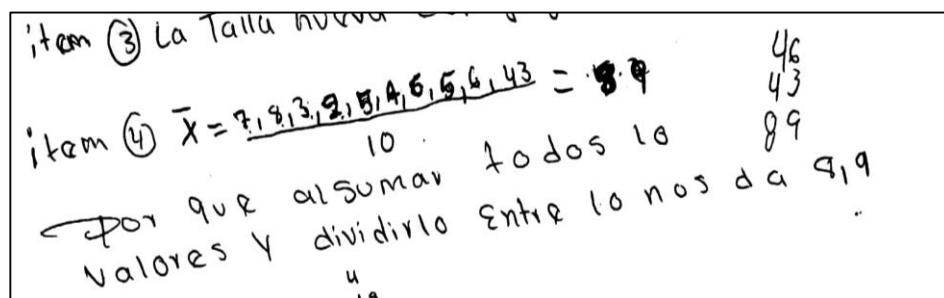


Ilustración 37. Respuesta estudiante E-6 ítem 4.

En esta práctica, se observa que el estudiante hace referencia a la definición y al algoritmo de la media aritmética, para hallar el valor representativo del conjunto de datos. El análisis de la práctica evidencia un error al no considerar el ostensivo (+) al sumar los datos, es decir, es idealizado, pero no materializado; El análisis semiótico presentado en la tabla 54, permite identificar, los objetos y procesos emergentes de la práctica.

Tabla 54
Análisis semiótico ítem 4 E-6.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	$\bar{x} = \frac{7,8,3,2,5,4,6,5,6,43}{10} = 8,9$ <p>Porque al sumar todos los valores y dividir entre 10 nos da 8,9</p>	<ul style="list-style-type: none"> - El ostensivo \bar{x} se utiliza para hacer referencia a la media. - proceso de materialización. - visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos (concepto de distribución de datos). - Definición de media aritmética. - algoritmo de cálculo de la media para datos aislados. - propiedad estadística (E1) la media es un representante de un conjunto de datos. - Propiedad aritmética (A3) la media no tiene propiedad asociativa. - Propiedad numérica (N3) en el cálculo de la media interviene todos los datos.

- El estudiante presenta un error; ya que omite el signo que indica que se trata de una suma.
- Asigna un valor (media aritmética), al conjunto de datos. Proceso de particularización de la idea de media aritmética a la media de un conjunto de datos.
- Justifica su respuesta como un argumento que hace referencia al algoritmo de cálculo de la media para este ejemplo (proceso de particularización).
- Conflicto semiótico con el algoritmo de la suma, al confundir el signo (+) con (,)

4.1.6.5 Análisis semiótico ítem 5.

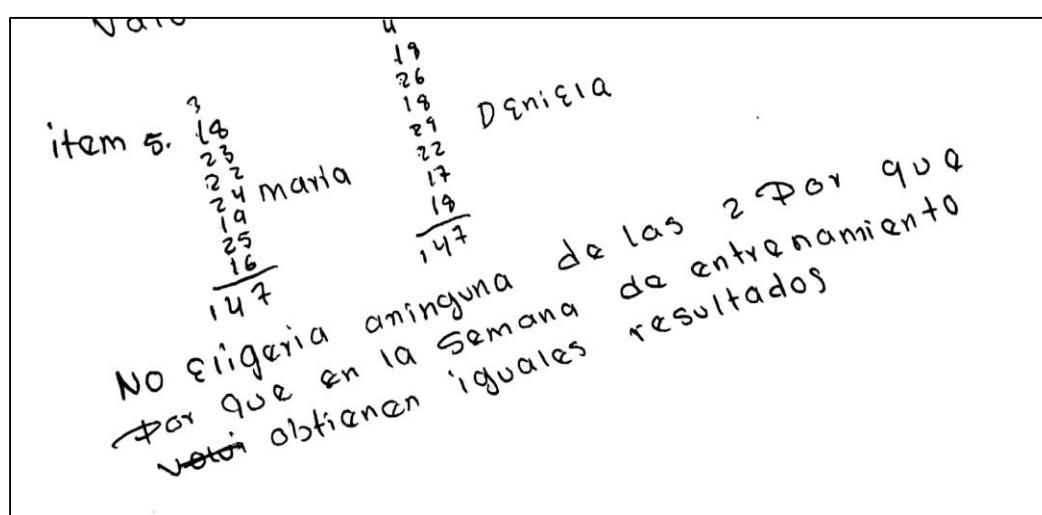


Ilustración 38. Respuesta estudiante E-6 ítem 5.

En la práctica matemática del estudiante E-6, se realiza la suma de cada uno de los valores de las dos distribuciones, obteniendo (147); no se hace referencia al concepto de media aritmética, ni a su algoritmo; además no hay un proceso de significación de los resultados obtenidos. Los objetos emergentes de la práctica, son el concepto de suma y el procedimiento de adición de los datos de distribución.

Tabla 55
Ánalisis semiótico ítem 5 E-6.

Unidad	Expresión	Contenido
U1	18 23 22 24 19 25 <u>147</u>	<ul style="list-style-type: none"> - Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos; realiza un proceso de significación y de composición (formar un objeto a partir de otros). - Procedimiento de sumar todos los datos. - No calcula la media aritmética.
U2	18 26 18 29 22 17 <u>18</u> <u>147</u>	<ul style="list-style-type: none"> - Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos; realiza un proceso de significación y de composición (formar un objeto a partir de otros). - Procedimiento de sumar todos los datos. - No calcula la media aritmética.
U3	No elegiría a ninguna de las 2 porque en la semana obtienen iguales resultados.	<ul style="list-style-type: none"> - No hay un proceso de significación del resultado obtenido.

4.1.6.6 Análisis semiótico ítem 6.

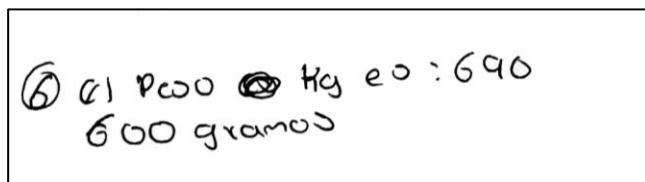


Ilustración 39. Respuesta estudiante E-6 ítem 6.

En la práctica del estudiante, se observa que no hay una materialización de los procedimientos, es decir, no se hacen ostensiva la práctica matemática. Así mismo, no hay una interpretación de los elementos del ítem y los interrogantes. La respuesta dada, evidencia que no hay una comprensión del concepto, algoritmo y demás propiedades asociadas a la media aritmética. Lo anterior, evidencia conflictos procedimentales.

Tabla 56
Análisis semiótico ítem 6 E-6

Unidad	Expresión	Contenido
U1	El peso es de 690 gramos	<ul style="list-style-type: none"> - No hay materialización del procedimiento realizado por el estudiante. - Asigna un valor como el peso en gramos (media), respuesta incorrecta. - Representación numérica. - Conflicto semiótico con la definición de media. - Conflicto con el algoritmo de cálculo de la media a partir de la definición.

4.1.6.6.1 Conclusiones estudio de caso estudiante E-6.

El análisis semiótico de las respuestas dadas por el estudiante E-6, muestra la complejidad en los procesos de significación del enunciado y sus elementos, es decir no hay una comprensión de la situación problema; por ejemplo, en el ítem 1, se observa que el estudiante, no usa la idea de promedio en el lenguaje ordinario, dificultad descrita por Watson y Moritz (1999; 2000); Así mismo, de acuerdo al análisis de las prácticas matemáticas, se pueden identificar varios conflictos semióticos que se describen a continuación.

- Conflicto semiótico conceptual, ya desconoce la definición de media como el promedio aritmético de un conjunto de datos (ítem 1).
- Conflicto semiótico procedimental con el cálculo de la media aritmética (ítem1; ítem 6).
- conflictos procedimentales al construir un conjunto de datos la media aritmética (ítem 2).
- Conflicto semiótico asociado al campo de problemas de la media (ítem 2; ítem 5).
- Conflicto relacionado con la definición de la media, como suma ponderada de cada uno de los valores de variables multiplicado por su frecuencia (ítem 3).
- Conflicto con el algoritmo para calcular la media con frecuencias absolutas (ítem 3).
- Conflicto procedimental con el algoritmo de inversión de la media.

4.2 Conclusiones del análisis semiótico de las prácticas matemáticas

Una vez finalizado el análisis semiótico de las prácticas matemáticas de seis estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Cauca, se detalla cada una de las dificultades relacionadas con la comprensión del concepto de media aritmética. Estas dificultades son interpretadas, en términos de conflictos semióticos; es decir, como cualquier disparidad entre una expresión y contenido. Se han identificado varios conflictos semióticos, que han sido descritos en investigaciones como las de Cobo (2003) y Molero (2017). A continuación, se detalla cada uno de los conflictos semióticos.

Conflictos relacionados con el campo de problemas de la media: El análisis de las prácticas matemáticas, permite evidenciar que los estudiantes al resolver las situaciones problema, no hacen referencia al concepto de media aritmética. En diferentes ítems, utilizan de forma incorrecta procedimientos matemáticos (multiplicación, suma, división), para encontrar la solución de esta. Por otro lado, al comparar dos distribuciones con variables numéricas no utilizan la definición y el algoritmo de la media aritmética para hallar el valor representativo de cada una de las distribuciones. Así mismo, se evidencia el uso de argumentos de tipo cualitativo, basado en el análisis de los datos con el objetivo de justificar sus respuestas; en este caso no se utiliza ningún procedimiento asociado al concepto de media u otro tipo de procedimiento matemático.

Conflictos semióticos relacionados con los elementos lingüísticos: No reconocen que las expresiones lingüísticas “promedio” o “edad media” hacen referencia al objeto media aritmética o su algoritmo; también, se presentan errores, al confundir expresiones “peso medio” como dividir entre dos o hallar la mitad.

Agregando a lo anterior, el análisis de las prácticas evidencia que no hay materialización de elementos lingüísticos, expresiones o notaciones que hagan referencia al concepto de media aritmética, es decir, no se hacen ostensivos mediante símbolos o representaciones, por ejemplo: \bar{x} para indicar la media; fórmulas para media con datos aislados; fórmula para el cálculo de la media con frecuencias absolutas (media ponderada).

Conflictos semióticos relacionados con las definiciones: El análisis semiótico de las prácticas matemáticas, evidencia dificultades conceptuales, ya que no hay una comprensión del concepto de media aritmética como la suma ponderada de cada uno de los valores de la variable multiplicando por su frecuencia (definición 1). Agregando a lo anterior, se observa la complejidad de la definición 2: la media aritmética es el promedio aritmético de un conjunto de datos.

Los estudiantes hacen referencia al concepto de media aritmética como la sumatoria de los datos de la distribución, es decir confunde la media con el total; Este conflicto fue detallado por Cobo (2003) y Molero (2017). También, se evidencia que asocian el valor de la media aritmética con un porcentaje. Dificultad descrita por Rodriguez y Castro (2018).

Conflictos semióticos procedimentales: De acuerdo al análisis de las prácticas matemáticas, se evidencia la complejidad en la comprensión de procedimiento (P2) cálculo de la

media para datos aislados, en este caso, no hacen referencia al procedimiento para calcular la media aritmética como la suma de los datos y posterior división entre el número total de datos.

Por ejemplo, al calcular, la media de una distribución de datos 4, 6, 1, 5. Los estudiantes consideran el promedio, como la sumatoria de los datos de la distribución, es decir:

$$4 + 6 + 1 + 5 = 16. \text{ La media aritmética es 16.}$$

El conflicto anterior, fue detallado por Cobo (2003) y Molero (2007), al hallar la media de una distribución de datos, confunden la media con el total (ítem 2).

Además, en el análisis de la práctica, se observa que al calcular la media no se tiene cuenta todos los valores de los datos o el número total de datos de la distribución; de igual manera, se observan, otros procedimientos matemáticos (suma, división, multiplicación) que dan lugar a respuestas incorrectas.

Sumado a esto, la dificultad para construir un conjunto de datos dada la media (ítem 2). Esta dificultad ha sido detallada en las investigaciones de Cobo (2003) y Molero (2017). Las prácticas matemáticas, evidencian la complejidad del procedimiento (*P6*) inversión del algoritmo de la media aritmética para hallar el total de la distribución; así mismo, construir una distribución de datos dada la media (procedimiento *P7*).

En el ítem 4, se observa la dificultad para el cálculo de la media con frecuencias absolutas. En este caso, el análisis de las prácticas matemáticas de los seis estudiantes, evidenció que ninguno hizo referencia al algoritmo para calcular la media aritmética con frecuencias absolutas como suma total de los productos entre cada variable en cuestión y su frecuencia absoluta y la posterior división entre el número total de datos.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot n_i}{n}$$

Esta dificultad, se puede presentar debido a que no hay una comprensión de la definición 1: Media como suma ponderada y los conceptos de frecuencia absoluta o relativa. Comparando los resultados obtenidos con el trabajo de Molero (2017), se evidencia la complejidad en la definición y su algoritmo de media ponderada, ya que de una muestra de 84 estudiantes de educación secundaria obligatoria (ESO) solo 3 estudiantes respondieron correctamente.

Finalmente, se evidencia la dificultad en el procedimiento (P6) algoritmo de inversión de la media. Dificultad detallada en Cobo (2003); Molero (2017).

Conflictos semióticos relacionados con las propiedades: Al calcular la media de un conjunto de datos, no se tiene en cuenta todos los valores de la distribución (propiedad numérica 3). Sumado a esto, se observó un conflicto semiótico al considerar la propiedad asociativa para el cálculo de la media (propiedad aritmética 3).

Adicionalmente, se observa un conflicto semiótico con respecto a la propiedad aritmética (N2) la media no es una operación interna, puesto que esta puede tomar un valor distinto al conjunto de datos; ya que en el ítem 1, hacen referencia a que “el número de hijos de las familias es 1,2”. Es decir, asocian el valor de la media como un posible dato de la distribución, pero en este caso no tendría sentido pensar en un número de hijos decimal para una familia.

Conflictos relacionados con los argumentos: De acuerdo al análisis de las prácticas, se evidencia que los estudiantes presentan dificultad para justificar o interpretar las respuestas obtenidas. En el ítem 1, se presenta la dificultad para expresar un argumento que haga referencia

al concepto de media u otro tipo de entidad primaria asociada al concepto, en otras situaciones, no justifican el porqué de sus respuestas.

El análisis semiótico de las prácticas ha permitido determinar el significado personal que los estudiantes tienen del concepto de media aritmética. (Godino et al., 2019), así mismo, se ha evidenciado la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas en las que intervine el objeto; se ha identificado una serie de conflictos semióticos relacionados con: los elementos lingüísticos, campo de problemas, definiciones, procedimientos, propiedades. De igual manera, se confirma varios de los conflictos semióticos en la comprensión del concepto de la media aritmética, que han sido descritos en investigaciones como las de Cobo (2003); Mayen (2009); Molero (2017); Rodríguez y Castro (2018). Los conflictos semióticos detectados, permiten una explicación a las dificultades que están presentando los estudiantes en la comprensión del concepto. Además, se observó que ocasiones se aplica el algoritmo de la media de forma mecánica, sin entender su significado. Esta dificultad había sido detallada por Cai (1985) y Díaz (2007).

En síntesis, las principales dificultades, están relacionadas con: la inversión del algoritmo de la media; el algoritmo de la media ponderada; la comparación de dos distribuciones de datos; la dificultad para construir un conjunto de datos dada la media, además, en la práctica matemática, los estudiantes no hacen referencia a los elementos lingüísticos asociados al concepto.

Capítulo 5. Conclusiones

En el presente capítulo, se presentan las conclusiones a partir de los objetivos propuestos; sumado a esto, algunas reflexiones, aportes y sugerencias que permitan a los docentes mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje cuando se aborda el concepto de media, y finalmente, se presentan posibles líneas de investigación futuras a partir del estudio realizado.

5.1 Conclusiones sobre los objetivos.

Con respecto al objetivo general: Caracterizar las dificultades que presenta un grupo de estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Cauca, en la comprensión del concepto de media aritmética al resolver situaciones problema que involucran este concepto. Se planteó tres objetivos específicos. A continuación, se presentan las conclusiones a partir de los objetivos propuestos.

Con relación al primer objetivo específico: Identificar las unidades de análisis, a partir del referente teórico y significado institucional de referencia del objeto media aritmética.

De acuerdo a la problemática expuesta en el capítulo 1, se realizó una documentación de los referentes teóricos: la dimensión matemática (significado institucional de referencia del objeto media aritmética) y la dimensión didáctica; en este sentido, es seleccionado el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática propuesto por Godino et al. (2007), ya que brinda herramientas teóricas que permitirían analizar las prácticas de los estudiantes al resolver situaciones problemas que involucran el concepto de media aritmética. Se debe agregar que, este marco teórico permite comprender el problema semiótico-cognitivo en los

procesos de aprendizaje, además, describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas; analizando los objetos y procesos emergentes de la actividad matemática.

Se consideró los niveles de análisis didáctico del Enfoque Ontosemiótico. Inicialmente, se describieron elementos del primer nivel: sistemas de prácticas personales e institucionales; significado personal e institucional. Posteriormente, el segundo nivel de análisis didáctico del EOS, se caracterizó la configuración de objetos y procesos matemáticos: objetos primarios y objetos secundarios o atributos contextuales. Así mismo, se retomó la noción de función semiótica, como una correspondencia entre una expresión y contenido, ya que, de acuerdo a lo propuesto desde el EOS, permitiría analizar la comprensión del objeto media aritmética, en términos de funciones semióticas.

Con respecto al significado institucional de referencia del objeto matemático media aritmética, se realizó una revisión de la tesis doctoral de Cobo (2002) y Mayen (2009); sumado a esto, el trabajo de Cobo y Batanero (2004) sobre el significado de la media en los libros de educación secundaria; con el objetivo de caracterizar los objetos primarios asociados al concepto: campo de problemas, definiciones, propiedades, procedimientos y los elementos lingüísticos. La revisión del significado institucional de referencia, permite evidenciar la complejidad semiótica del concepto debido a la variedad de objetos primarios; de igual manera, el determinar los elementos primarios asociados al concepto de media, permitirá caracterizar los objetos previos y emergentes de la actividad matemática.

Para concluir los elementos del Enfoque Ontosemiótico: objetos y proceso matemáticos y la noción de función semiótica, permitió articular, la propuesta hacia un análisis semiótico de las prácticas matemáticas, que permitiría identificar: los objetos y los procesos matemáticos

emergentes de la actividad matemática; así mismo, considerar los conflictos semióticos como una explicación a las dificultades en la comprensión del concepto de media.

Con respecto al segundo objetivo: determinar la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas mediante un análisis de objetos y procesos matemáticos emergentes de estas.

Para alcanzar este objetivo, se realizó un análisis semiótico de las prácticas matemáticas. El análisis, permitió evidenciar que los estudiantes hacen referencia de algunos elementos u objetos primarios asociados al concepto. Se observa que los procedimientos, son de carácter ostensivo materializando las operaciones realizadas; así mismo, el uso de objetos extensivos a través de los procesos de particularización, por ejemplo, del concepto de media a la media de un conjunto de datos; también, los procesos de reificación, es decir, construcción de una distribución de datos a partir de la agrupación.

Por otra parte, el análisis de las prácticas matemáticas, evidencia la dificultad en la comprensión de la definición del concepto de media aritmética como el promedio aritmético de un conjunto o como la suma ponderada de cada uno de los valores de la variable multiplicado por su frecuencia; en las prácticas, se observa conflictos semióticos de tipo conceptual, ya que se hace referencia a la media aritmética como la suma de los valores de la distribución. Lo anterior, permite corroborar lo planteado por Molero (2017) quien expresa que, aunque se haya trabajado el concepto de media desde la básica primaria, en la educación secundaria se presenta dificultades en la comprensión de este concepto. En este caso, el significado personal que los estudiantes tienen del objeto media aritmética difiere del significado de referencia (Cobo, 2003).

Adicionalmente, el análisis de los objetos emergentes de las prácticas, muestra la complejidad en los procedimientos de cálculo de la media para una distribución con datos aislados; el cálculo de la media con datos presentados en tablas frecuencias; el algoritmo de inversión de la media y construcción de una distribución de datos dada la media. De igual manera, la dificultad en la comprensión de propiedades estadísticas o numéricas. Lo anterior, originando conflictos semióticos de tipo procedimental y proposicional. Adicionalmente, se presentan conflictos semióticos relacionados con el campo de problemas, ya que no se reconoce el uso de la media aritmética, para solucionar las situaciones problema, en su lugar se recurría a procedimientos como sumar, multiplicar o brindar argumentos de tipo cualitativo.

Para concluir, cabe resaltar que, según los resultados obtenidos de las prácticas manifestadas por los estudiantes y el análisis realizado en el capítulo 4, ha permitido describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas en las que interviene el objeto media; en este sentido partir de las unidades de análisis del referente teórico del Enfoque Ontosemiótico, se ha realizado un estudio minucioso y se han detallado una serie conflictos semióticos como explicación a las dificultades en la comprensión de este concepto.

Con respecto al tercer objetivo: Generar algunas reflexiones y recomendaciones a los docentes en ejercicio o formación, entorno a las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión del concepto de media aritmética.

Primeramente, se hace necesario que los docentes de matemáticas y estadística, conozcan este tipo de trabajos inscritos en campo de investigaciones en Educación Estadística, que están orientados a caracterizar las dificultades en la comprensión del concepto de media aritmética. De igual manera los elementos teóricos del enfoque Ontosemiótico, descritos en el trabajo, brindan

las herramientas metodológicas que permiten realizar un análisis de las prácticas matemáticas de los estudiantes, y detallar las dificultades que se presentan en el aprendizaje de conceptos como la media; ya que este marco teórico, permite aborda los problemas de tipo epistemológico; ontológico ¿Qué es objeto matemático media aritmética? y problemas de tipo semiótico cognitivo ¿Qué es conocer un objeto matemático? Adicionalmente, brinda las herramientas metodológicas para el análisis de estos problemas (Godino et al., 2019).

Por otra parte, es importante que los docentes, en la planificación de un proceso de instrucción, tengan en cuenta la diversidad de significados de objeto media aritmética; también, los diferentes objetos primarios asociados a este: definiciones, propiedades, procedimientos, campos de problemas, elementos lingüísticos; ya que en los procesos de enseñanza no se profundiza en la variedad de entidades primarias asociadas a los conceptos estadísticos.

Con respecto a los procesos de enseñanza, se debe proponer situaciones problema de diferentes contextos que permitan en el estudiante una mayor comprensión del objeto media; ya que en las prácticas analizadas se evidencia que los estudiantes presentan dificultades en los procesos de significación de las situaciones problema; además, no se reconoce el campo de problemas asociado a este concepto. En este sentido, se busca que, haya un aprendizaje significativo de este concepto, no solo limitado al uso del algoritmo de forma mecánica, sino que pueda reconocerse el uso de la media en la solución de diferentes situaciones problemas. Así pues, sentido, las situaciones problema, fomentan en los estudiantes procesos de comunicación, razonamiento y resolución. Adicionalmente, se propone el diseño e implementación de unidades didácticas y el diseño de secuencias didácticas con el objetivo de poder asegurar en los estudiantes una mejor comprensión de esta medida de tendencia central.

Otro de los aspectos, que se debe tener en cuenta, en los procesos de enseñanza, es que la media no se limita hallar un representante de un conjunto de datos, se debe fortalecer el uso de diferentes procedimientos que involucran este concepto, por ejemplo, dada la media se puede construir un conjunto de datos y hallar la media en datos presentados en diagramas (barras).

Además, se hace necesario que los docentes en los procesos de enseñanza, privilegien, el uso de la notación lingüística, es decir, representación del concepto de media, formula, para datos aislados o datos presentados en tablas de frecuencia; ya que, el análisis de las prácticas, evidencia, que los estudiantes no hacen referencia a estos elementos.

Con todo lo anterior, es importante invitar a los docentes de las instituciones educativas, a fomentar una mayor incorporación de los contenidos estadísticos y probabilísticos; profundizar en estos temas mediante actividades que relacionen, la recolección de datos, representación de la información, así mismo el uso de medidas de tendencia central o dispersión en el análisis de datos. Se debe promover la enseñanza de la estadística a partir de proyectos con el objetivo de desarrollar el pensamiento estadístico en los estudiantes. De igual manera, se considera importante que los docentes del área de matemática o estadística, desarrollos análisis de tipo didáctico que permitan conocer las dificultades que están presentando los estudiantes en el aprendizaje de las medidas de tendencia central (media aritmética). Se debe agregar que, los elementos teóricos y metodológicos del trabajo, son aportes para los docentes en ejercicio y formación; ya que brinda herramientas que permite indagar las dificultades que presentan los estudiantes, y por la tanto proponer una mejora en la enseñanza en la estadística.

El trabajo, se centró en caracterizar las dificultades en la comprensión del concepto de media aritmética; el análisis realizado, permitió mostrar la complejidad Ontosemiótica de las

prácticas matemáticas, al resolver problemas que involucra el concepto de media aritmética; en este sentido, se detallaron diferentes conflictos semióticos, como una explicación a las dificultades en la comprensión de este concepto. De acuerdo a los antecedentes descritos en el capítulo 1, el trabajo corrobora que persisten dificultades en la comprensión de la media aritmética

Finalmente, tras la revisión del trabajo y teniendo en cuenta que este se fundamentó en el análisis de las prácticas de los estudiantes, a partir de las herramientas de análisis didáctico propuestas por el Enfoque Ontosemiótico, específicamente, la configuración de objetos y procesos; herramientas de una didáctica descriptiva y explicativa (Godino, 2007) que permiten caracterizar y describir las dificultades en la comprensión de la media aritmética. Se considera pertinente, completar el estudio con un análisis de la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio cuando se enseña el concepto de media aritmética; resaltando que dicho nivel, se fundamenta en los diferentes niveles de análisis previo (sistema de prácticas; configuración de objetos y procesos; trayectorias didácticas, y los sistemas de normas). En este sentido, se propone identificar dificultades de tipo, epistémico, cognitivo, ecológico e instruccional. Por otra parte, un análisis didáctico de los procesos de instrucción, permitirá, mejoraras en el proceso de enseñanza del concepto de media o como expresa Godino et al. (2019) optimizar los procesos de enseñanza. Así mismo, aporta elementos de reflexión para la práctica docente.

Referencias bibliográficas

- Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*, 15(1), 2-13.
- Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de tendencia central. *UNO*, 25, 41-58.
- Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. *I Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria*. Granada. Recuperado el 5 de noviembre de 2017, de <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/>
- Batanero, C. (2019). Treinta años de investigación en educación estocástica: reflexiones y aportes. *Actas del tercer congreso internacional virtual de educación estadística*. Recuperado el 6 de enero de 2019, de https://www.ugr.es/~fqm126/civeest/ponencias/batanero_esp.pdf
- Batanero, C., y Godino, J. (2001). *Análisis de datos y su didáctica. Materiales para la asignatura*. Departamento de didáctica de las matemáticas. Universidad de Granada.
- Behar, R., y Yepes, M. (1985). *Estadística, un enfoque descriptivo*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm. Student's understanding of the arithmetic avarage concept. *proceedings of the 19th PME conference*, 3, págs. 144-151. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.
- Cardenas, I., y Segovia, L. (2011). Media aritmética: dificultades en alumnos de grado décimo.(tesis maestría). Tolima, Colombia. Recuperado el 5 de Febrero de 2018, de <http://repository.ut.edu.co/>

Cobo, B., y Batanero, C. (2004). Razonamiento numérico en problemas de promedios. *Suma*, 45, 79-86.

Cobo, B. (2003). Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria (tesis doctoral). Universidad de Granada, España. Recuperado el 30 de Enero de 2018, de <http://www.ugr.es/~batanero/pages/librostesis.html#Tesis>

Cobo, B., y Batanero, C. (2004). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 22(1), 5-18.

Contreras, J., Molina, H., Godino, J., Rodríguez, C., y Arteaga, P. (2017). Funciones semióticas críticas en el uso de diagramas de barras por los. *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico.*, (págs. 1-11). Recuperado el 4 de septiembre de 2018, de <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/contreras.pdf>

Díaz, D. (2007). Significado atribuido al concepto de media aritmética por estudiantes de grado séptimo (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Font, V., y Rubio, N. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En P. A.-M. J. M. Contreras (Ed.), *actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico*. Recuperado el 4 de noviembre de 2017, de <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>

García, G. (1996). Reformas en la enseñanza de las matemáticas: perspectivas para su desarrollo. *Revista EMA*, 1(3), 195-206. Recuperado el 16 de febrero de 2018, de <http://funes.uniandes.edu.co/>

Godino, J. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico y semiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Recuperado el 5 de Febrero de 2018, de <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/trabajossintesis.html>

Godino, J. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas. *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico*. Recuperado el 5 de enero de 2018, de <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>

Godino, J. (2019). Perspectiva de las investigaciones sobre educación estadística. *Actas del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística*. Recuperado el 20 de enero de 2019, de https://www.ugr.es/~fqm126/civeest/ponencias/godino_esp.pdf

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10, 7-27.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the learning of mathematics*, 39(1), 37-42. Recuperado el 19 de febrero de 2019, de <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/trabajossintesis.html>

Godino, J., Font, V., y Wilhelmi, M. (2008). Análisis didáctico de los procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. 38, 25-49. Recuperado el 5 de marzo de 2018, de http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Godino, J., Giacome, B., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico del los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113. Recuperado el 2 de enero de 2019, de enfoqueontosemiotico.ugr.es

Godino, J., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y Personal de los objetos matemáticos. *recherches en Didactique des Mathématiques*, 3, 325-355.

Godino, J., y Font, V. (2010). The theory of representations as viewed from the onto-semiotic approach to mathematics education. *mediterranean journal for research in mathematics education*, 9(1), 189-210. Recuperado el 1 de enero de 2019, de www.ugr.es/~jgodino/eos/representaciones_mjrme10.pdf

Gómez, A. M. (2010). La escolarización de la reforma de las matemáticas modernas en la educación media en Colombia en torno a los conceptos de relación, función y conjunto durante el periodo 1960-1985. *Memorias 11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.*, (págs. 630-637). Recuperado el 20 de enero de 2018, de funes.uniandes.edu.co

Hernandez, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación* (6 ed.). (P. B. Lucio, Ed.) McGraw-Hill Education.

Holmes, P. (1980). *Teaching Statistics*. 11-16. Slough, UK: Foulsham Educational.

León, J. & Uribe, J. (2016). Algunas reflexiones epistemológicas y didácticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de media. *Memorias del segundo encuentro colombiano de educación estadística* (págs. 40-28). Bogota: Asociación Colombiana de Educación Estadística.

Mayen, S. (2009). Comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos de educación secundaria (tesis doctoral). Universidad de Granda, Granada, España.

Recuperado el 5 de Febrero de 2018, de

<http://www.ugr.es/~batanero/pages/librotesis.html#TesisM>

MEN. (1998). Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá, D.C. Colombia.

MEN. (2004). Pensamiento estadístico y tecnologías computacionales. Bogotá, Colombia.

MEN. (2006). Estandares de competencias en matemáticas. Bogotá, D.C, Colombia.

MEN. (2018). *Derechos Básicos de aprendizaje en matemáticas*. Bogotá, Colombia.

Molero, A. (2017). Comprension del concepto de media aritmética en los estudiantes de educación secundaria obligatoria (tesis master). Universidad de Granda, España.

Recuperado el 1 de noviembre de 2017, de

<http://www.ugr.es/~batanero/pages/librotesis.html#Tesis>

Posada, K., y Rosada, L. (2011). Dificultades que presentan los estudiantes de educación básica en obtención e interpretación de las medidas de tendencia central (Tesis pregrado).

Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia. Recuperado el 7 de febrero de 2018, de <http://bibliotecadigital.univalle.edu.co>

Rodriguez, J., y Castro, D. (2018). Significado de la media aritmética y el uso de la palabra promedio en estudiantes de 11° grado. *Memorias del tercer encuentro colombiano de educación estadistica.*, (págs. 399-409). Recuperado el 2 de Enero de 2019, de <http://funes.uniandes.edu.co/>

Sayritupac, J. (2013). Significados de las medidas de tendencia central. Un estudio con alumnos universitarios de carrera de humanidades (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica de Perú.

Tamayo, M. (2003). *El proceso de investigación cualitativa*. México: Limusa. Recuperado el 1 de Abril de 2019, de <http://evirtual.uaslp.mx>

Vásquez, C., Díaz, D., y Coronata, C. (2018). La alfabetización estadística y probabilística: primeros pasos para sus desarrollos desde la educación infantil. *cardenos cenpec*, 8(1), 154-179.

Anexo 1

Registro fotográfico



Ilustración 40. Estudiantes 8°-1 Institución Educativa Cauca.



Ilustración 41. Estudiantes 8°-1 Institución Educativa Cauca.

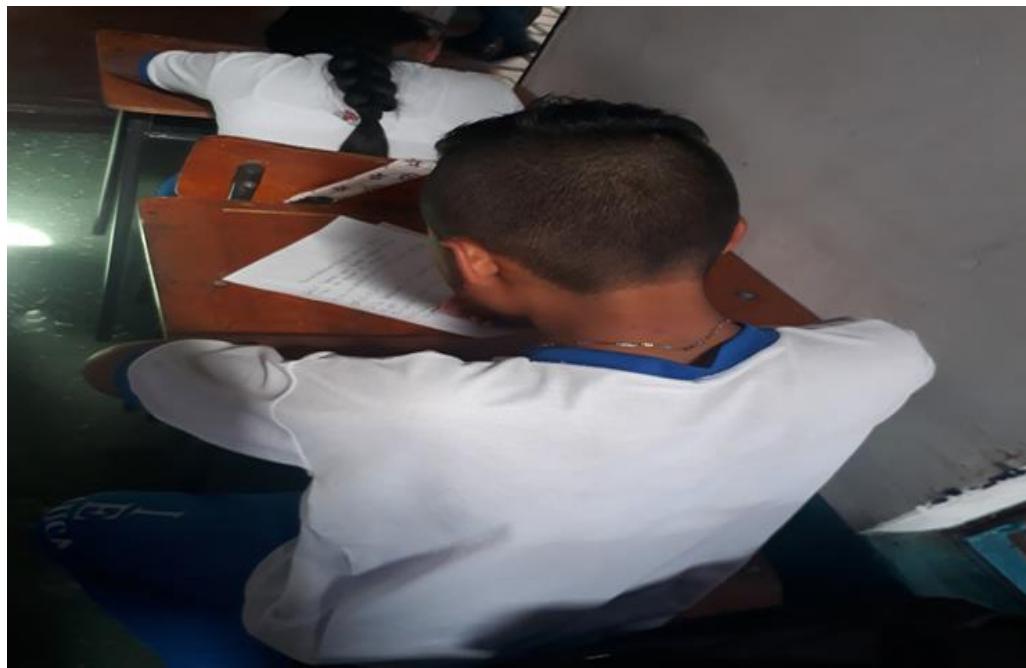


Ilustración 42. Estudiantes 8°-I Institución Educativa Cauca.



Ilustración 43 Estudiantes 8°-I Institución Educativa Cauca.

Anexo 2**UNIVERSIDAD DEL VALLE- SEDE NORTE DEL CAUCA****Cuestionario Media Aritmética****Nombre:** _____ **grado:** _____

Actividad: resolver las siguientes situaciones problemas que involucran el concepto de media aritmética, indicando las operaciones y procedimientos que realizo para encontrar la solución.

Ítem 1. Explica con tus propias palabras qué significan para ti cada una de las siguientes frases:

- a. En promedio tarde 10 minutos para ir de mi casa al colegio.
- b. El número medio de hijos en las familias colombianas es 1.2

Ítem 2. La edad media de cuatro hermanos es 10 años. Piensa en cuatro posibles edades de estos hermanos, de forma que la edad media sea 10 años.

Ítem 3. La talla media de cinco jugadores de un equipo de futbol es 175 cm. Llega un jugador más y la talla media aumenta 2 cm. ¿Cuál es la talla media del nuevo jugador?

Ítem 4. Ítem 4. El número de operaciones en el hospital Francisco de Paula Santander durante 10 días ha sido:

7, 8, 3, 2, 5, 4, 6, 5, 6, 43

Si te piden estimar con un solo valor el número diario de operaciones en el hospital, ¿qué valor darías?, ¿por qué?

Ítem 5. El entrenador de un equipo de baloncesto duda entre seleccionar a María o a Daniela.

Los puntos conseguidos por cada una, en una semana de entrenamiento fueron estos:

María	18	23	22	24	19	25	16
Daniela	18	26	18	28	22	17	18

Si fueses el entrenador, ¿a cuál de las dos elegirías? ¿Por qué?

Ítem 6. El peso medio de 5 chicas es de 46 kg. ¿Cuál es el peso total de las 5 chicas? Si todas las chicas engordan 3 kg, ¿cuál será el peso medio? y ¿Cuál será el peso medio en gramos?

Anexo 3

Respuesta estudiante E-1

12: Media que más o menos tarda 10m en ir de la casa al colegio

gráfica que el porcentaje de hijos en Colombia es aproximada a 1.2

$$12: \bar{x} = \frac{10+10+10+10}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

13: La talla del nuevo jugadores es de 29.5 porque a 175 se le suman

1.77 y se dividen entre los 6 jugadores y da 29.5

$$14: \bar{x} = \frac{77+84+32+51+44+65+64+93}{70} = \frac{489}{70} = 6.9$$

15: Yo elegiría a Daniela porque el martes, Jueves viernes, Domingo tuvo

la puntuación que María y María solo tuvo buena puntuación
Miércoles y Sabado y el lunes las dos tuvieron la misma
puntuación.

$$16: \begin{array}{r} 46 \\ \times 5 \\ \hline 230 \\ 15 \\ \hline 245 \end{array}$$

peso en gramos es de 245

peso medio de los chicos es de 49 Kg

peso medio en gramos es 49.000 Kg

Respuesta estudiante E-2

Solución

i) Yo me demoro 10 minutos de ~~an~~ lugar de residencia que mi casa queda cerca al colegio
porque son

$$10 = \text{4 hermanos} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ \hline 10 \end{array}$$

Los cuatro hermanos tienen 19
 edades así, el mayor 4, 3, 2, 1

) 177 cm

Se suman la talla de 10 juguetes entre la talla que aumenta

) $7+8+3+2+5+4+6+5+6+4+3 = 89 \frac{1}{10}$

El valor decimal de operaciones es de 8,9

i) $18+23+22+24+19+25+16 = 147$

) $18+26+18+28+22+17+18 = 147$

yo escogería a daniela por que tiene mejores valores que maria

) 46 pues se suman entre 10 que engordan las chicas y ese es el resultado del resultado del peso medio y en gramos 49 y 49 kg

Respuesta estudiante E-3

Solucion

3) Quiere decir que el colegio queda a 10 minutos a la casa, y que no se demora nadie

b) Quiere decir que a doble Señor 2.4
Por que hace $1.2 + 1.2 = 2.4$

1) Puede ser de 2 y medio o sea que para Señor que tienen cada uno de 10 años entre todos Señor 40 años
Se llevan 2 años y medio

La medida del nuevo jugador es de 1.77
Porque le sume 2 a la talla de los otros

$$1.77 - \frac{1.8 + 1.2 + 1.5 + 1.4 + 1.5 + 1.6 + 1.4}{7} = 1.77 - 1.14 = 0.63$$

$$\begin{array}{r} 1.5 \\ 1.0 \\ 1.6 \\ 1.1 \\ \hline 4.2 \\ \hline 0.63 \end{array}$$

1) Eligen a ambas tiene mejor desempeño
pues S. fuera a elegir una digeriu a Daniela porque ella tiene mas punto alto en cada dia.

1) Personas 49 porque solo saben 3kg
Señor hace

$$\begin{array}{r} 46 \\ + 3 \\ \hline 49 \end{array}$$

Respuesta estudiante E-3

$$4) \overline{X} \frac{15}{7,8,3,2,5,4,6,5,6,4,3} = 8,9$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 81 \\ 45 \\ \hline 8910 \\ 09089 \\ \hline 00 \end{array}$$

$$2) \overline{10,44}$$

$$3) 175+2 = 177$$

$$7) \overline{Maria} = \overline{X} = \frac{41+23+22+24+19+25+16}{7} = 21$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ 46 \\ 60 \\ 1472 \\ 09 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$7) \overline{Daniela} = \overline{X} = \frac{44+26+18+28+22+17+18}{7} = 21$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ 46 \\ 57 \\ 1472 \\ 07 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$5) \overline{46}$$

-3

Respuesta estudiante E-4

11) a) Cada dia que voy del colegio a mi casa me tarda 10 minutos

b) las Familias Colombianas Tienen entre 2 y 3 hijos.

$$1 \text{ a) } 2, 6, 18, 14 = \frac{40}{4} = 10$$

c) 29.5 es la talla del Nuevo Jugador

$$1 \frac{7,8+3+2+5+4}{10} = 2,9 \quad \frac{2,9+43}{2} = 24$$

d) Yo escogeria a Daniela Porque Gano 4 set a Maria

5) 46 kg =

$$\frac{46}{230} \text{ - las 5 Chicas.}$$

4) Engordar 8kg = $\frac{4}{49} \times 5 = \frac{20}{245}$

Peso Medio 122

$$\begin{array}{r} 1 \\ 245 \\ \times 4 \\ \hline 1220 \end{array}$$

Respuesta estudiante E-4

• El Peso Medio De 5 Chicas es de
46Kg - Para Saber Cuál es el Peso
Total De Ellas Multiplico $46 \times 5 = 230$

• Al Ellas Engordar 3Kg Cada una
Pesarán 49. = Multiplico $49 \times 5 = 245$

• El Peso Medio Sería 122.5
Al 40 dividir $245 \div 2$

Respuesta estudiante E-5

• Promedio es de 10 minutos: para mí de mi casa al colegio si me tarda más de los 10 me puede afectar porque mi promedio siempre ha sido de 10 minutos

B. El promedio que tengo es 3.5 manzanas (a)

$$2. 4+3+2+1 = 10$$

$$3. 175 \times 2 = 350 \div 2 = 175$$

Itema 4.

$$\bar{x} \frac{7+8+3+2+5+4+6+5+6+43}{10} = 8.9$$

$$\begin{array}{r} 8.9 \\ \hline 09 \end{array} \overline{)10}$$

5.

Yo escogería para el equipo de baloncesto a Daniela porque tiene más puntos que María y podríamos ganar todos los partidos.

6. Tg. 5 chicas.

46 Kg
46 Kg
46 Kg
46 Kg
46 Kg
46 Kg

3 Kg
3
3
3
3
3

total 230 Peso promedio total 15. Peso medio:

Respuesta estudiante E-6

tem
me tarda 9 minutos para llegar ami colegio
en my casa somos 5 con mis padres somos 7
y el promedio somos 7

tem ② 8, 3, 5, 2

tem ③ La Talla nrova del Jugador es 177 cm

$$\text{tem ④ } \bar{x} = \frac{18, 13, 12, 13, 14, 15, 16, 14, 13}{10} = 14,9$$

tem ④ Por que al sumar todos lo 89
valores y dividirlo entre los nos da 8,9

item 5.	maria	Denicia
	14	19
	23	26
	22	18
	24	21
	29	22
	25	17
	16	18
	147	147

NO eligeia ninguna de las 2 por que
que en la Semana de entrenamiento
por que obtienen iguales resultados

⑤ el peso ~~kg~~ es: 690
600 gramos

Anexo 4

Proyecto Educativo Institucional: Institución Educativa Cauca

Plan de área de matemáticas 2018 Institución Educativa Cauca

(Ver carpeta anexos)