# LA CONFIGURACIÓN DE FORMAS DE PENSAMIENTO FUNCIONAL EN LA EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA. UN ESTUDIO CON PROBLEMAS RELATIVOS A LAS RELACIONES FUNCIONALES LINEALES.

Yury Daniela Quenorán Lucano
Código: 1454152
Julie Pauline Sánchez Campos
Código: 1358561

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SEDE NORTE DEL CAUCA
2019

**LA CONFIGURACIÓN DE FORMAS DE PENSAMIENTO FUNCIONAL EN LA EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA. UN ESTUDIO CON PROBLEMAS RELATIVOS A LAS RELACIONES FUNCIONALES LINEALES.**

Yury Daniela Quenorán Lucano
Código: 1454152
Julie Pauline Sánchez Campos
Código: 1358561

Asesor
Mg. Johnny Vanegas Díaz

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA ÉNASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SEDE NORTE DEL CAUCA
2019

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

Universidad del Valle

**ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO**

Programa Académico: Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Fecha

| Día | Mes | Año |
|---|---|---|
| 11 | 06 | 2019 |

Código del programa: 3469 Resolución del programa: ________

**Título del Trabajo o Proyecto de Grado**

La Configuración de formas de Pensamiento funcional en la educación básica primaria. Un estudio con problemas relativos a las relaciones funcionales lineales.

**Se trata de:**

Proyecto ☐ Informe Final ☑

**Director**

Johnny Alfredo Vanegas Díaz

**Nombre del Primer Evaluador**

Cristian Andres Hurtado

**Nombre del Segundo Evaluador**

Adriana Garcia Moreno

**Estudiantes**

| Nombres y Apellidos | Código | Plan | E-mail | Télefonos de contacto |
|---|---|---|---|---|
| Yury Daniela Quenoran | 1454152 | | | |
| Juliet Pauline Sanchez | 1358561 | | | |
| | | | | |

**Evaluación**

Aprobado ☐ Meritorio ☑ Laureado ☐
Aprobado con recomendaciones ☐ No Aprobado ☐ Incompleto ☐

*En el caso de ser* ***Aprobado con recomendaciones*** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de ____________ (máximo un mes)* ***ante:***

Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐ Primer Evaluador ☐ Segundo Evaluador ☐

*En el caso de que el Informe Final se considere* ***Incompleto*** *(diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de ____________ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el:* ___ dd ___ mm ___ aa

*En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la* ***razón del desacuerdo*** *y las* ***alternativas*** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

**Firmas**

| Director del Trabajo o Proyecto de Grado | Primer Evaluador | Segundo Evaluador |
|---|---|---|
| | | Adriana Garcia M. |

| Recomendaciones ☐ | Observaciones ☑ | Razón de desacuerdo - Alternativas ☐ |
|---|---|---|

*Si se considera necesario, usar hojas adicionales.*

La evaluación como meritorio se asigna por las siguientes razones:

1) El documento está bien escrito guardando coherencia y cohesión entre los parrafos así como buen uso de conectores y puntuaciones

2) Las referencias empleadas para sustentar el trabajo son actuales y muy pertinentes dada la realidad escolar del país en sus dificultades con la formación de profesores en Educación Básica.

3) El marco teórico empleado es apropiado y muy pertinente puesto que en el país se encuentra poca literatura asociada con formas de pensamiento funcional. Además, se destaca la articulación del mismo con la aproximación metodológica adoptada.

4) El trabajo desarrollado da lugar a nuevas rutas de investigación que se perfilan para una maestría en Educación matemática

5) El aporte del trabajo elaborado no se queda unicamente en una situación de aula, sino que abre posibilidades para profundizarlo desde la realidad escolar en toda la educación básica.

**Firmas**

| Director del Trabajo o Proyecto de Grado | Primer Evaluador | Segundo Evaluador |
|---|---|---|
| [firma] | [firma] | Adriana García M. |

***Agradecimientos***

***Daniela***

*A Dios, por permitirme alcanzar un triunfo más, por permitirme sonreír ante todos mis logros que son el resultado de su ayuda, por hacer cada momento vivido durante todos estos años, únicos e incomparables.*

*A mis padres y hermanos, por su apoyo y amor infinito e incondicional, por enseñarme el valor de la perseverancia, la disciplina, la responsabilidad y la humildad. Gracias por ser los principales promotores de mis sueños, gracias por confiar y creer en mí.*

*Al amor de mi vida, por estar conmigo durante este largo y arduo proceso. Gracias por brindarme su cariño y amor, por su apoyo incondicional, gracias por ayudarme hacer mi sueño realidad y por permitirme continuar haciendo proyectos a futuro.*

*Al profesor Johnny Vanegas, por compartirnos sus conocimientos, por su paciencia, dedicación, orientación y compromiso para la realización de este trabajo. Gracias*

*A los profesores quienes fueron participes de mi formación profesional. Gracias por aportar sus conocimientos y valores en el transcurso de la carrera.*

*A mis compañeros, más que compañeros, amigos de quienes guardo gratos recuerdos con quienes aprendí que juntos somos más y que juntos podemos superar obstáculos tanto en la vida de estudiantes como en lo personal.*

*Gracias, infinitas gracias a todos los que formaron parte de esta gran historia que se quedara guardada en mi corazón por siempre.*

***Pauline***

*Para la realización de este trabajo primero que todo quiero agradecer a Dios por prestarme la vida, brindarme la sabiduría en todo el proceso académico y darme las fuerzas necesarias para seguir adelante y no desfallecer.*

*A mis padres su dedicación, esfuerzo y apoyo incondicional durante el transcurso de esta hermosa carrera.*

*A mis familiares y mi amigo Alexander Palacios por cada una de sus palabras y consejos, por ayudarme y brindarme su apoyo en los momentos más difíciles por los cuales atravesé durante mi proceso de formación.*

*A nuestro director de trabajo de grado Johnny Vanegas por sus enseñanzas, la paciencia, dedicación, orientación, recomendaciones, consejos y buena disposición de tiempo para las tutorías.*

*A los profesores que durante el proceso formación nos compartieron sus conocimientos, aconsejaron y los motivaron a seguir adelante.*

*A la Institución José Vicente Mina por permitirnos aplicar la secuencia de problemas dentro de sus aulas de clase.*

*A nuestros compañeros de clase por su amistad y compañía durante el proceso de formación.*

***Dedicatoria***

*A la memoria de mi papá, Arturo Sánchez Santamaría, por formarme como una persona con valores y principios para la sociedad, por escucharme y aconsejarme siempre; porque sin su compañía, apoyo y amor no habría alcanzado este nuevo triunfo en mi vida, siempre fue, es y será mi motivación, él me enseñó a seguir adelante sin importar las dificultades y de dar lo mejor de mi día a día.*

*A mi mamá, por su amor, dedicación y esfuerzo incondicional durante este proceso, por sus palabras y consejos para salir adelante y no darme por vencida por muy duras que fueran las pruebas que se me presentaran en la vida.*

**TABLA DE CONTENIDO**

**Índice de imágenes**

**Índice de tablas**



**Índice de figuras**

**Resumen**

La presente investigación se ocupa del estudio de las diversas *formas de pensamiento funcional* que se configuran en un grupo de estudiantes de tercero y cuarto grado de Educación Básica Primaria, cuando trabajan con problemas que involucran *relaciones funcionales lineales*. Así, se describen algunos aspectos que dieron lugar al problema y se presentan los referentes teóricos y metodológicos, los cuales sirvieron de base para diseñar, implementar y gestionar la secuencia de problemas propuestos. Los principales hallazgos ponen de relieve que las categorías de análisis construidas resultan útiles para caracterizar y ahondar, en términos de los sistemas de representación, en las estrategias empleadas y las *formas de pensamiento funcional* configuradas por los estudiantes de tercero y cuarto grado.

En el marco de la actividad matemática, si bien la mayoría de los estudiantes de grado tercero logran establecer la relación entre dos cantidades variables, están supeditados a una forma de pensamiento funcional que corresponde a *patrones recursivos* dado que ponen énfasis en el cambio de una sola cantidad hasta reconocer la manera en que se da dicha relación. En contraste, gran parte de los estudiantes de grado cuarto configuran el *pensamiento de correspondencia* caracterizado por el reconocimiento rápido del patrón y el posterior establecimiento de la relación entre las variables involucradas.

Esta investigación aporta, entre otros elementos, un insumo importante reflejado en el fundamento teórico y metodológico de los problemas propuestos que puede ser empleado para favorecer el ámbito de la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica Primaria, en particular con lo relacionado al desarrollo del pensamiento funcional.

**Palabras claves:** Pensamiento funcional, relaciones funcionales proporcionales, relaciones funcionales no proporcionales, generalización.

## Introducción

La presente investigación se inscribe en la línea de formación *didáctica de las matemáticas* del programa de *Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas* de la Universidad del Valle, sede Norte del Cauca. Desde tal línea de formación se decide investigar sobre una problemática relacionada con la introducción de formas de pensamiento algebraico desde la Educación Primaria. Particularmente porque se ha reconocido que desde los primeros años de escolaridad los estudiantes logran configurar formas de pensamiento algebraico que se ven reflejados, por ejemplo, en procesos de generalización y construcción de conocimientos sobre patrones y relaciones (Cañadas y Molina, 2016). Sin embargo, hay ciertas problemáticas relativas al trabajo con patrones y relaciones, tales como que, en una situación en la que intervienen dos cantidades que varían, los estudiantes generalmente se centran en la variación de una sola variable y no en la relación existente entre ambas variables (Tanisli, 2011). En este sentido, parece pertinente incorporar al trabajo matemático de los estudiantes de Educación Primaria, ideas cercanas al uso de patrones y funciones que posibiliten una mejor comprensión sobre las variables, la manipulación de fórmulas y la relación entre diferentes formas de representarlas.

Desde la reflexión anterior, en esta investigación se plantea un trabajo relativo al estudio de *formas de pensamiento funcional*, articulado al desarrollo de experiencias con funciones en situaciones contextualizadas. En particular, se cuestiona sobre: ¿cuáles son las semejanzas y diferencias en las *formas de pensamiento funcional* que presenta un grupo de estudiantes de tercero y cuarto grado de educación primaria cuando trabajan con problemas que involucran relaciones funcionales lineales?

En tanto interesa caracterizar y contrastar en el pensamiento funcional configurado por los estudiantes de tercero y cuarto grado, se considera como principal referente los aportes de Smith (2008). Para él, el pensamiento funcional "es aquel que se enfoca en la relación entre dos (o más) cantidades que varían, particularmente las formas de pensamiento que conducen desde las relaciones específicas (incidencias individuales) a generalizaciones de esas relaciones entre instancias" (p. 1) y el cual, emerge y se desarrolla a partir de tres formas distintivas: a) patrones recursivos, b) covariacional y c) correspondencia.

En concordancia con los intereses de investigación se proponen tres objetivos específicos: (a) identificar elementos teóricos que evidencien características de las *formas de pensamiento* funcional que puedan ser empleadas para construir problemas que involucren relaciones funcionales lineales; (b) articular diferentes referentes conceptuales en la construcción de un diseño de problemas que permitan caracterizar las *formas de pensamiento funcional* a partir de las producciones elaboradas por un grupo de estudiantes de tercero y cuarto de Educación Primaria; y (c) describir y analizar las *formas de pensamiento funcional* que configuran un grupo de estudiantes de tercero y cuarto cuando trabajan con problemas que involucran relaciones funcionales lineales.

Las relaciones funcionales lineales responden al modelo matemático $f(x) = mx + b$, diferenciando dos tipologías: las proporcionales ($b = 0$) y las no proporcionales ($b \neq 0$) (Godino, 2003). Dicho aspecto matemático fue fundamental para el diseño de los problemas al posibilitar un espacio amplio para el estudio de las *formas de pensamiento funcional.* Además, los tres problemas propuestos se sustentaron desde una dimensión didáctica, con resultados de otras investigaciones (e.g., Tanisli, 2011), y desde una dimensión curricular pretendiendo la articulación con algunos estándares básicos de competencias en matemáticas de los ciclos de 1-3 y de 4-5 estipulados para el territorio nacional.

La propuesta metodológica de la investigación consideró un *estudio de casos de tipo descriptivo*. El caso lo conformaron 16 estudiantes, distribuidos equitativamente, entre tercero y cuarto grado (niños en el rango de 8 a 10 años de edad) de una Institución de carácter oficial del municipio de Santander de Quilichao, Cauca, Colombia. Para la implementación y gestión de los problemas diseñados fueron necesarias tres sesiones de trabajo, de una hora, por cada grado. Cabe señalar que el uso del material concreto fue fundamental en la puesta en escena de los problemas y que el principal insumo para efectuar los análisis lo constituyeron las producciones escritas de los estudiantes, así como las interacciones y argumentos registrados en audio y video.

Para analizar los resultados de la actividad matemática desplegada por los estudiantes se construyeron unas categorías de análisis, sustentadas en desarrollos obtenidos por investigaciones similares (e.g., Pinto, 2016), las cuales destacan: los sistemas de representación y las estrategias con su respectiva articulación con las formas de pensamiento funcional.

Para efectos de organización esta investigación se divide en cuatro capítulos. El primer capítulo se discuten a) los antecedentes de algunas investigaciones que se han interesado por el estudio del pensamiento funcional en los primeros años de escolaridad, b) la contextualización y planteamiento del problema en el cual se enuncia la problemática relacionada con la insistente separación entre la aritmética y el álgebra y se plantea la siguiente pregunta ¿Cuáles son las diferencias y semejanzas en las *formas de pensamiento funcional* que presenta un grupo de estudiantes de grado tercero y cuarto de la Institución Educativa José Vicente Mina, cuando trabajan con problemas que involucran relaciones funcionales lineales? Por consiguiente se propone un objetivo general y tres objetivos específicos, y c) se cierra el capítulo con la justificación del problema.

El segundo capítulo aborda el marco de referencia conceptual, a partir de tres referentes a) didáctico, b) curricular y c) matemático. En el primer referente se caracteriza y ejemplifica cada una de las *formas de pensamiento funcional*; en el segundo, se considera la articulación de algunos estándares básicos de competencias en matemáticas de los ciclos de 1-3 y de 4-5 (MEN, 2006) y en el tercer referente se discuten las relaciones funcionales lineales como objetos de la matemática escolar.

El tercer capítulo hace alusión al diseño metodológico del trabajo, el cual se desarrolla con elementos de un estudio *de caso descriptivo*. En este capítulo se describe el contexto donde se implementó la secuencia de problemas, los participantes, los instrumentos que sirven de base para la recolección de la información, el procedimiento y las sesiones de la implementación de los problemas, entre otros. Finalmente se consideran unas categorías de análisis y un análisis preliminar de los problemas relacionado con las características de las *formas de pensamiento funcional*.

El cuarto capítulo corresponde a los resultados y análisis de los problemas, en el cual se muestran características específicas que dan cuenta de cada una de las *formas de pensamiento funcional* derivadas de los resultados de las producciones elaboradas por un grupo de estudiantes de grado tercero y cuarto. Por último se exponen las conclusiones del estudio y se proponer algunas ideas para futuras investigaciones.

# CAPÍTULO I

# ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

## 1.1 Antecedentes

En este apartado se presentan algunas investigaciones realizadas a nivel nacional e internacional, acerca del estudio del pensamiento funcional en la Educación Básica Primaria. A nivel nacional son pocas las investigaciones que se han desarrollado, en comparación con las que se han elaborado en el marco internacional (Blanton & Kaput, 2011 ; Payne, 2012; Cañadas & Molina, 2016; Morales, Cañadas, Brizuela, & Gómez, 2016). A continuación se presentan las más representativas para el desarrollo del presente trabajo, destacando sus múltiples aportes.

En el marco nacional se reconoce la investigación desarrollada por Quitian & Sopo (2013) cuyo objetivo fue analizar las estrategias utilizadas por los estudiantes de segundo de primaria para crear registros, encontrar patrones y relaciones de dependencia entre los datos obtenidos en una situación funcional e identificar en dichas estrategias el desarrollo del pensamiento funcional. Esta investigación muestra que, en el trabajo con estudiantes de segundo año, es posible encontrar la configuración de, al menos, dos *formas de pensamiento funcional*: *pensamiento de patrones recursivos* y *pensamiento covariacional*. Estos resultados los hallaron al trabajar con un problema cuyo contexto se refiere a la germinación de una planta de arveja, al constituirse en un fenómeno propicio para que los estudiantes reconocieran las relaciones presentes entre dos cantidades que varían. De esta manera, la citada investigación permite esbozar un tipo de problemas contextualizados que se pueden seleccionar y/o adaptar para el estudio de formas de pensamiento funcional que se configuran en estudiantes de edades tempranas, a partir del reconocimiento de las relaciones presentes entre dos cantidades que varían. Además, se hace explícita una problemática, al señalar que ningún estudiante logra desarrollar el *pensamiento funcional por correspondencia*.

En el ámbito internacional, Warren & Cooper (2005) investigaron sobre el pensamiento funcional en segundo grado. Su objetivo fue investigar el tipo de orientación que ayuda a los niños pequeños a generalizar y formalizar su pensamiento matemático. Los investigadores realizan un experimento de enseñanza que toma una base teórica para crear e investigar estrategias pedagógicas en un ambiente natural (salón de clase) observando a estudiantes y docentes, en el cual no se requería un conocimiento de números, pero sí presenta características fundamentales de una función, es decir aplicar un conjunto de variables en otro conjunto. Los resultados dan cuenta de la necesidad de introducir el pensamiento funcional de manera gradual para consolidar los aprendizajes y así ayudar a que los estudiantes logren establecer relaciones y conexiones entre diferentes operaciones al trabajar desde la aritmética. Este estudio concluye que además de encontrar un patrón secuencial es necesario establecer una relación entre dos cantidades que varían, lo cual alude al desarrollo del *pensamiento covariacional* y *por correspondencia*. Por lo tanto se hace importante retomar esta investigación en este trabajo, puesto que permite identificar un modelo teórico y metodológico que puede ayudar al desarrollo del pensamiento funcional con estudiantes de edades tempranas.

Las investigaciones realizadas por Blanton & Kaput (2004, 2011) ponen de relieve la capacidad de los estudiantes de primero a quinto, para trabajar con diferentes problemas algebraicos y hacer uso de distintas representaciones como tablas de funciones lineales, gráficos, imágenes, lenguaje verbal y símbolos. En dicha investigación estos autores reconocieron que en el trabajo con problemas contextualizados, los estudiantes dan cuenta de tres *formas de pensamiento funcional* (*patrones recursivos, covariacional y correspondencia*). Entre los contextos empleados para los problemas se destacan: el crecimiento de una serpiente, el número de ojos y colas de animales y el problema telefónico, los cuales resultan útiles para el diseño de problemas en el presente trabajo, al poner de manifiesto un trabajo arduo con más de una variable, donde la variación, el cambio y las relaciones entre las variables son fundamentales.

Tanisli (2011) en su estudio plantea que uno de los componentes del pensamiento algebraico es el pensamiento funcional, el cual facilita el estudio del álgebra y la noción de función, razón por la cual se considera necesario introducirse gradualmente desde los primeros años de escolaridad. Tanisli investiga las *formas de pensamiento funcional* de los estudiantes de quinto a través de tablas de funciones lineales. Para la recolección de datos se realizaron entrevistas a cuatro estudiantes de un mismo grado basadas en problemas. Los resultados muestran que el trabajo con tablas de funciones apoya el desarrollo temprano del pensamiento funcional, además identifica que los estudiantes encuentran patrones, piensan en la covariación durante su trabajo y descubren la relación de correspondencia y generalización de dicha relación, al tiempo que revelan las habilidades de razonamiento que utilizan para establecer la generalización. Este estudio resulta útil dentro del presente trabajo teniendo en cuenta que muestra un análisis específico de los resultados cuando se trabaja con tablas de funciones lineales, como una alternativa para el desarrollo del pensamiento funcional y el reconocimiento de sus formas.

La investigación realizada por Rodríguez (2016) se enmarca en el Early Algebra, particularmente en el pensamiento funcional y plantea como objetivo de interés mostrar las manifestaciones de pensamiento funcional en una muestra de 20 estudiantes de grado segundo, a través de un juego didáctico cuyo contexto se refería a una ruta escolar. Los resultados muestran que la forma de pensamiento que no se manifiesta es el *pensamiento covariacional*. Esta investigación es importante, porque aporta un tipo de estrategias que pueden emplearse para dar sentido a las *formas de pensamiento funcional*, las cuales se pueden adaptar al presente trabajo.

Payne (2012) en su investigación señala que, se presentan diversas dificultades en el aprendizaje del álgebra, una de ellas se produce por la separación curricular que existe entre la aritmética y el álgebra (aritmética luego álgebra). El objetivo fue analizar los problemas utilizados en el programa On Track Learn Math y considerar su impacto en el aprendizaje de los estudiantes; la propuesta del programa fue una investigación temprana del pensamiento funcional en los grados de tercero a quinto. La autora sugiere examinar las formas en las cuales los estudiantes justifican sus razonamientos, dado que varios estudios indican que la justificación es un factor importante en el desarrollo del pensamiento algebraico. Los resultados muestran que los estudiantes desde los primeros años escolares tienen habilidades para razonar sobre algunos aspectos que favorecen el aprendizaje de las funciones lineales, cuando se introducen problemas apropiados que les permiten reconocer los datos que se presentan en un problema. De esta manera, la investigación presenta un diseño teórico y metodológico, así mismo un tipo de modelo que permite caracterizar los problemas que son apropiados para el desarrollo del pensamiento funcional y presenta un marco de referencia analítico para analizar los resultados de los estudiantes los cuales pueden ser útiles para el desarrollo del presente trabajo.

Los estudios realizados por Merino, Cañadas y Molina (2013); Fuentes (2014), Fuentes y Cañadas (2015); Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey & Newman-owens (2015); Blanton, Brizuela, & Cañadas (2016) y Pinto, Cañadas, Moreno, & Castro (2016) señalan que aunque tradicionalmente el estudio formal de las funciones inicia en la Educación Secundaria el estudio de estas es una ruta crítica para la enseñanza y aprendizaje del álgebra en estos grados. Sin embargo han descubierto que los estudiantes desde sus primeros grados escolares presentan habilidades al emplear diferentes sistemas de representación (tabulares, pictóricos, verbales y simbólicos), razonar, expresar generalizaciones y relaciones entre dos variables, en otras palabras desarrollan pensamiento funcional. Esto se puede evidenciar cuando trabajan con problemas de generalización que involucran relaciones funcionales, tales como: $f(x) = 5x$, $f(x) = 2x + 2$ y el contexto de un problema sobre baldosas de piso, el cual se presenta con la intención de que los estudiantes reconozcan y establezcan la relación entre las baldosas grises (variable dependiente) y baldosas blancas (variable independiente), así mismo establezcan la regla que les permita hallar el número de baldosas blancas dado un número de baldosas grises o viceversa. De esta manera, la resolución de dichos problemas permite evidenciar la presencia de las tres *formas de pensamiento funcional*, los cuales sirven de base para el diseño de problemas y análisis de los resultados del presente trabajo.

Estas investigaciones permiten reconocer nuevas formas de intervención en el aula para acercar a los estudiantes de Educación Primaria al desarrollo del concepto de función, particularmente lo lineal proporcional y lo lineal no proporcional. Así mismo, presentan diferentes tipos de problemas matemáticos que permiten identificar la configuración, caracterización y desarrollo de *formas de pensamiento funcional*.

En síntesis, los antecedentes mencionados son fundamentales en la configuración del presente trabajo por las siguientes razones. En primera instancia, aportan al diseño teórico dado que posibilitan el reconocimiento: a) de algunos problemas y preguntas que permiten a los estudiantes desde sus primeros años escolares un acercamiento a la generalización y formalización de su pensamiento matemático, permitiéndoles llegar a un entendimiento de aquellas situaciones que involucran funciones lineales y b) del marco de referencia analítico para analizar las producciones de los estudiantes.

En segunda instancia, aportan en la construcción del diseño metodológico, al poner de manifiesto algunas formas de trabajar en el aula de clases con los estudiantes de Educación Primaria, tales como: los experimentos de enseñanza que ayudan al desarrollo del pensamiento funcional, los estudios de casos y los estudios longitudinales con estudiantes de distintos grados escolares.

Finalmente, permiten reconocer la diversidad de herramientas que ponen en juego los estudiantes durante su actividad matemática en la resolución de problemas que involucran relaciones funcionales lineales. En otras palabras, aportan a la identificación de las representaciones (pictóricas, verbales, tabulares y simbólicas) que los estudiantes emplean en la búsqueda y respuesta a la solución de problemas.

## 1.2 Contextualización y planteamiento del problema

Desde hace algunas décadas se viene reconociendo que la insistente separación entre la aritmética y el álgebra (al menos desde lo curricular) priva a los estudiantes de una potente estrategia de pensamiento (pensamiento algebraico) en los primeros grados escolares y hace más difícil el aprendizaje formal del álgebra en los grados posteriores (Carpenter & Levi, 2000; Warren & Cooper, 2005). El reconocimiento de esta problemática se sustenta en los resultados de múltiples investigaciones que dan cuenta de las capacidades de generalización naturales que tienen los estudiantes de educación primaria (Molina, 2009), así como las capacidades de trabajar con ideas algebraicas que implican la construcción de conocimientos informales sobre patrones y relaciones (Blanton, et al., 2015).

La introducción del pensamiento algebraico en los primeros grados escolares, se ha abordado a partir de un enfoque denominado *Early Algebra*. Esta propuesta no intenta incorporarse como una asignatura más en el contenido curricular, sino en trabajar con contextos y problemas ligados a los contenidos estipulados para la enseñanza de las matemáticas elementales, favoreciendo la observación, descripción y generalización de patrones; el estudio de las relaciones numéricas y funcionales; y el desarrollo y manipulación de simbolismo, así como la formalización de generalizaciones (Molina, 2009; Vergel, 2010; Blanton & Kaput, 2011; Fuentes, 2014 y Rodríguez, 2016). En este sentido, dicha propuesta busca favorecer un ambiente escolar en el que los estudiantes exploren, modelen, hagan predicciones, discutan, argumenten, justifiquen, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo (Vergel, 2010).

Actualmente, se reconocen tres perspectivas de interés concernientes al estudio del pensamiento algebraico, a saber: 1) aritmética generalizada, 2) patrones y funciones, y 3) resolución de problemas y modelación matemática (Demosthenous & Stylianides, 2014).

Desde la perspectiva de patrones y funciones, se destaca la importancia que tiene: a) el trabajo con patrones (de crecimiento y repetitivos) para promover procesos de generalización de la actividad que está siendo desarrollada y b) la idea de función al poner énfasis en el estudio de las relaciones de dependencia entre las variables, lo cual es primordial para mejorar la introducción del pensamiento algebraico en la escuela. El objetivo no es enseñar las funciones en los primeros años de escolaridad tal como son presentadas en la Educación Secundaria; se trata, entonces, de utilizar el potencial de este objeto matemático y sus conceptos matemáticos asociados, de forma que los estudiantes desarrollen habilidades que les permitan pensar algebraicamente, tanto en los primeros ciclos escolares como en los ciclos posteriores.

Si bien, se destaca la importancia de esta perspectiva en la introducción y desarrollo del pensamiento algebraico, también se reconoce que existe una dificultad por parte de los profesores. Esto, debido a la poca experiencia con formas de pensamiento algebraico, para incorporar esos tópicos en estudiantes de educación primaria, lo cual promueve diferentes dificultades que se reflejan en los estudiantes al llegar a la educación secundaria con un desarrollo básico de dichos temas, en el que no se reconoce la relación entre patrones, funciones y álgebra (Payne, 2012; Warren & Cooper, 2005; Blanton & Kaput, 2011)

Por otro lado, la falta de comprensión por parte de los estudiantes sobre las diferentes representaciones que existen en las matemáticas (lenguaje verbal, pictórico, algebraico, tabular, entre otros), ha generado en ellos dificultad para reconocer su uso, para trabajar con incógnitas, con números en general, con constantes y con variables en una relación o en una función (Osorio, 2016). De hecho, algunas investigaciones (Quitian & Sopo, 2013; Payne, 2012; Obando, 2009; Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2001; Warren & Cooper, 2005) indican que en una situación en la que intervienen dos cantidades que varían, los estudiantes, generalmente, se centran en la variación de una sola variable y no en la relación existente entre ambas variables. Así, al trabajar con representaciones tabulares, los estudiantes comúnmente toman las columnas como independientes, es decir encuentran dos patrones, uno para cada columna de la tabla sin tener en cuenta que existe una relación de dependencia entre ambas variables.

De acuerdo a lo anterior, Payne (2012) afirma que es necesario realizar más investigaciones para establecer de manera definitiva los diferentes tipos de estrategias que utilizan los estudiantes para llegar a la generalización. Dado que algunos de los problemas propuestos por ciertos investigadores, no permiten que los estudiantes construyan patrones y generalicen las relaciones. Igualmente, la autora plantea que los estudiantes tienen habilidades innatas para pensar y razonar sobre funciones, no obstante necesitan tener acceso a actividades que les ayude a usar y desarrollar su pensamiento trabajando en problemas abiertos y generando datos para dos cantidades relacionadas.

Por consiguiente, se considera importante que los estudiantes desde sus primeros años escolares establezcan relaciones de dependencia entre dos cantidades que varían una en relación con la otra. Para ello es importante el uso de patrones y funciones por lo que son entendidos como un camino que permite un acercamiento al álgebra, el cual es denominado como pensamiento funcional. Desde este pensamiento se sugiere un estudio del álgebra centrado en los patrones y en el desarrollo de experiencias con funciones en situaciones contextualizadas (Tanisli, 2011 y Heid (citado por Cañadas & Molina, 2016)) teniendo en cuenta que la función es entendida como una relación de dependencia entre dos o más cantidades, de manera que una cambia según los valores que tome la otra variable. Por lo tanto Cañadas & Molina (2016) afirman que la función es el foco del contenido matemático en el que se centra el pensamiento funcional.

Vargas (2011) y Brizuela & Alvarado (2010) mencionan que el trabajo con funciones permite establecer una comprensión sobre las variables, la manipulación de fórmulas y la relación entre diferentes formas de representarlas, así por ejemplo: lenguaje verbal, tablas, gráficos, pictogramas, simbolismo algebraico, etc. Estas son formas de representación en un contexto de resolución de problemas, además de las cantidades variables, sus relaciones, la recursividad y la correspondencia entre los valores de las variables, las cuales son clave en el pensamiento funcional en los primeros niveles educativos. Este pensamiento, se desarrolla a través de situaciones que establecen relaciones de dependencia, entre dos cantidades que varían entre sí, junto con la generalización de los resultados obtenidos, entendida como lo menciona Payne (2012) "el corazón del pensamiento funcional". Esto con el propósito que los estudiantes de Educación Primaria alcancen distintas habilidades tales como: generalizar, conjeturar, relacionar, justificar, argumentar, razonar, entre otras. En consecuencia, dichas habilidades son fundamentales y una vez adquiridas, los estudiantes pueden comenzar a dar cuenta del pensamiento algebraico.

Con base a lo anterior, Smith (2008) propone tres *formas de pensamiento funcional* que permiten el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros ciclos escolares, estos son: a) *pensamiento de patrones recursivos*, b) *pensamiento covariacional* y c) *pensamiento de correspondencia*. De acuerdo a las investigaciones realizadas por Quitian & Sopo (2013) y Payne (2012) se evidencia que el tipo de pensamiento que la mayoría de estudiantes no logran desarrollar con facilidad es el *pensamiento de correspondencia*. Sin embargo, Tanisli (2011) señala que de acuerdo a la naturaleza del pensamiento funcional, es necesario que los estudiante además de encontrar patrones se centren en los cambios correspondientes en las variables individuales (*pensamiento covariacional*), y encuentren la relación entre los pares correspondientes de las variables involucradas (*pensamiento de correspondencia*), así como la generalización de la relación, la cual es fundamental y un paso clave en la construcción del conocimiento matemático.

Por las razones expuestas, surge la siguiente pregunta, ¿Cuáles son las diferencias y semejanzas en las *formas de pensamiento funcional* que presenta un grupo de estudiantes de grado tercero y cuarto de la Institución Educativa José Vicente Mina, cuando trabajan con problemas que involucran relaciones funcionales lineales?

### 1.3 Objetivos

#### 1.3.1Objetivo general

Contrastar las formas de pensamiento funcional que presenta un grupo de estudiantes de grado tercero y cuarto, de la Institución Educativa José Vicente Mina, cuando trabajan con problemas que involucran relaciones funcionales lineales.

#### 1.3.2 Objetivos específicos

Identificar algunos elementos teóricos sobre la caracterización de *formas de pensamiento funcional* que puedan ser utilizados para construir problemas que involucran relaciones funcionales lineales.

Articular diferentes referentes conceptuales en la construcción de un diseño de problemas que permitan a partir del análisis de las producciones escritas caracterizar las diferentes *formas de pensamiento funcional* en un grupo de estudiantes de tercero y cuarto grado de Educación Básica Primaria pertenecientes a la Institución Educativa José Vicente Mina.

Describir y analizar las diversas *formas de pensamiento funcional* que se configuran como producto de la actividad matemática desarrollada por el grupo de estudiantes de tercero y cuarto grado de la Institución Educativa José Vicente Mina cuando trabajan con problemas que involucran relaciones funcionales lineales.

### 1.4 Justificación

Investigaciones recientes en Educación Matemática como la de Cañadas y Molina (2016) y Rodríguez (2016) señalan que gran parte de las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de los conceptos algebraicos, es producto de la separación curricular entre la aritmética y el álgebra, como si se tratara de dos escenarios disjuntos, en el que el aprendizaje del álgebra está supeditado al dominio aritmético. Por lo tanto, se hace necesario como lo menciona Smith (2008) y Rodríguez (2016) la introducción de un enfoque como el pensamiento funcional, que permita promover el desarrollo del pensamiento algebraico desde la Educación Primaria.

La necesidad de estudiar el pensamiento funcional se hace evidente en las exigencias curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN), tanto en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) como en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006). Si bien, estos documentos no explicitan la introducción de *formas de pensamiento funcional* en alguno de los niveles escolares, sí se presenta y discute el desarrollo de una forma de pensamiento (Pensamiento Variacional), que propone desde la Educación Primaria construir acercamientos para la comprensión y uso de los conceptos, y los procedimientos de las funciones. Esto se evidencia en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) al citar que:

> (…) El estudio de las relaciones funcionales que pueden detectarse en la vida cotidiana, como las relaciones entre edad y altura de un niño (o entre edad y masa o peso corporal), entre la temperatura a lo largo de un día y la hora que marca un reloj, etc., permite coordinar cambios de una magnitud Y con cambios de una magnitud X. Esta primera aproximación a la noción de función es la de dependencia funcional entre magnitudes variables (p. 67).

Con base a lo anterior, se hace pertinente adelantar estudios que aporten a una concepción más amplia para entender lo algebraico. De manera particular, el estudio de *formas de pensamiento funcional* puede aportar grandemente a la caracterización y desarrollo del Pensamiento Variacional en el ámbito escolar, al entenderse como procesos de generalización, puesto que en principio implica el reconocimiento de patrones, posteriormente la coordinación entre dos variables ($x$ e $y$) y finalmente la generalización de las relaciones. Sin embargo, estas formas de pensamiento que se constituyen como procesos de generalización no se deben interpretar como etapas a través de las cuales se debe progresar en una secuencia lineal sino como estados mentales con límites fluidos a través de los cuales los estudiantes se mueven bidireccionalmente a medida que avanza su aprendizaje (Blanton, et al., 2015). Además, el reconocimiento de las *formas de pensamiento funcional* en los primeros años escolares, puede resultar útil para identificar las estrategias que los estudiantes emplean en la resolución de problemas que indudablemente sirve de insumo para facilitar el aprendizaje del álgebra y el concepto de función en los años posteriores.

Por lo cual, la presente investigación se inscribe en el estudio del pensamiento funcional, desde la perspectiva de patrones y funciones que representa un gran esfuerzo por ayudar a construir en la Educación Primaria algunas bases para el estudio de la función en la Educación Secundaria. Así, se contribuye a mejorar la comprensión del concepto de función y evitar posibles dificultades en grados posteriores. Lo anterior es coherente con respecto a lo que indican Blanton y Kaput (2004, 2011), que los estudiantes en Educación Primaria tienen habilidades para pensar funcionalmente, es decir, describen como dos cantidades se corresponden entre sí, generalizan las relaciones y establecen algunos ejemplos de relaciones y funciones.

A nivel internacional, gran parte de las investigaciones se han enfatizado en proporcionar evidencias importantes del desarrollo del pensamiento funcional en estudiantes de primero, segundo y quinto de Educación Primaria (Pinto, 2016) y a nivel nacional, específicamente, en grado segundo de primaria estudio realizado por Quitian & Sopo (2013). De acuerdo a estos hallazgos se hace necesario profundizar en la manifestación de este tipo de pensamiento en los grados tercero y cuarto de Educación Primaria. De igual forma, surge el interés por contrastar las *formas de pensamiento funcional* en estudiantes de tercero y cuarto, en primer lugar porque se pretende analizar las diferencias y semejanzas que presentan los estudiantes en un contexto de resolución de problemas que involucran relaciones funcionales lineales; en segunda instancia, debido a los pocos estudios realizados, se analiza en sus producciones escritas una mayor cantidad de evidencias para describir las *formas de pensamiento funcional*. Por otra parte, el contraste permite identificar elementos del pensamiento funcional que surgen de las respuestas espontáneas de los estudiantes y que ayudan en la obtención de conclusiones útiles para la docencia, teniendo en cuenta que los contextos funcionales están presentes en los documentos Curriculares de la Educación Matemática.

Por otro lado, el presente trabajo es de gran aporte para la formación profesional docente en tanto que plantea elementos para reconocer y seleccionar problemas que involucran ideas algebraicas para trabajar en la Educación Primaria. Este aspecto es central en la justificación de este trabajo, puesto que es necesario que los docentes transformen y extiendan sus recursos existentes de base en el salón de clase para facilitar el estudio del pensamiento funcional. Permitiendo de esta forma, convertir problemas aritméticos de única respuesta a problemas que brinden oportunidades para construir patrones, conjeturar, generalizar y justificar las relaciones matemáticas entre cantidades. En esta dirección Blanton & Kaput (2011) hacen especial énfasis en que:

> (…) las innovaciones curriculares por sí solas, sin el desarrollo del conocimiento pedagógico y matemático de los profesores sobre cómo construir el pensamiento funcional de los niños, no son suficientes para producir un cambio real en el pensamiento matemático de los estudiantes (p.16)

Finalmente, otro aspecto que justifica la pertinencia de este trabajo es el hecho de reconocer que el trabajo con patrones no es la única entrada al álgebra en la Educación Primaria, tal como lo señalan Warren & Cooper (2005) la introducción de problemas que plantean relaciones de correspondencia entre cantidades, a través de representaciones pictóricas, gráficas y tabulares, pueden favorecer en los estudiantes el análisis, el razonamiento, la producción de conjeturas y la búsqueda de generalizaciones; aspectos que se relacionan ampliamente con el desarrollo de *formas de pensamiento funcional*, tales como: la presencia de *pensamiento de patrones recursivos*, *pensamiento covariacional* y *pensamiento de correspondencia* (Tanisli, 2011; Warren & Cooper, 2005 y Fuentes, 2014).

# CAPÍTULO II

# MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

## 2.1 Referente Didáctico

### 2.1.1 Early álgebra

Uno de los factores que promovió la investigación relacionada con el aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar en la década de los 90 fue la identificación de recurrentes dificultades que presentaban los estudiantes en el aprendizaje del algebra en la Educación Secundaria (Rodríguez, 2016). A partir de este suceso, se comienza a investigar lo que los estudiantes son capaces de hacer y se interesa por enseñar y potenciar modos de pensamiento algebraico en los primeros años de escolaridad. En este sentido, la propuesta curricular denominada Early algebra busca incorporar problemas que ayuden a la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas para desarrollar competencias algebraicas en los estudiantes (Fuentes, 2014 y Ayala, 2017).

Además, la propuesta curricular Early algebra busca desarrollar habilidades a través de las prácticas de exploración, modelización, predicción, discusión, argumentación y justificación, así mismo promover mayor grado de generalización en el pensamiento de los estudiantes y aumentar su capacidad para expresarla. Kaput (2008) indica que el foco de esta propuesta es la generalización de las ideas matemáticas, la representación y justificación de la misma. De acuerdo con Fuentes (2014) la idea de esta propuesta es desarrollar el pensamiento algebraico desde los primeros grados escolares para facilitar el estudio del álgebra en grados posteriores. Cabe resaltar, que no se trata de incluir más contenido al programa escolar o aprender álgebra formal y su simbolismo en Educación Primaria, sino que los docentes enseñen aspectos relacionados con el álgebra y desarrollen competencias algebraicas que les permitan establecer relaciones y la generalización de los números y las operaciones, así mismo se trata de desarrollar con mayor profundidad los temas que se están trabajando en el salón de clase, subrayando las ideas de generalización, estructuras y relaciones.

### 2.1.2 Pensamiento algebraico

Construir una definición de pensamiento algebraico es problemático (Radford 2006 y Radford 2010), puesto que existen múltiples formas de entenderlo debido a los diferentes objetos y procesos que implica. Por ejemplo, Kaput (2008) argumenta que pensar algebraicamente implica pensar, hacer y hablar sobre las matemáticas. En consecuencia, permite que los estudiantes adquieran diversas maneras de ver y trabajar con elementos algebraicos; alcanzar la generalización entendida como elemento central del pensamiento algebraico y la ampliación de símbolos para la resolución de problemas, argumentación y comunicación de ideas.

A nivel nacional, se destaca algunos de los elementos planteados en los documentos curriculares por el Ministerio de Educación Nacional (MEN). Por ejemplo, en los Estándares se habla de pensamiento variacional como eje fundamental para dar estructura y sentido al aprendizaje del pensamiento algebraico en los primeros grados de escolaridad (Rojas & Vergel, 2013 )y se muestra cómo el desarrollo del pensamiento variacional se puede potenciar desde la Educación Primaria, enfocado en el estudio de patrones, conceptos y procedimientos de las funciones. Así, Rojas & Vergel (2013) señala que:

> "(…) el pensamiento variacional se entiende como una forma específica de pensar matemáticamente, orientada a la construcción de estructuras conceptuales que fundamentan el estudio de la variación y el cambio. Por su parte, el pensamiento algebraico refiere al conjunto de procesos, procedimientos y esquemas que dan forma y sentido al pensamiento variacional" (p. 766)

Para enunciar el pensamiento algebraico depende del objeto matemático de estudio y de la perspectiva que se adopte para tal caracterización, al menos, para el propósito de esta investigación se tiene en cuenta la perspectiva de Kieran (2004) al señalar que el pensamiento algebraico en las primeras etapas escolares "incluye el desarrollo de formas de pensar sobre la relación entre cantidades, la identificación de estructuras, el estudio del cambio, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción". (p. 49). De esta manera, el pensamiento funcional se enmarca en el pensamiento algebraico al hacer énfasis, específicamente, a) en las formas de pensar sobre la relación entre cantidades, b) el estudio del cambio, c) la generalización, d) la resolución de problemas y e) la justificación.

### 2.1.3 Pensamiento Funcional

#### 2.1.3.1 Conceptualizaciones acerca del Pensamiento Funcional

Diferentes investigadores se han interesado por el estudio del pensamiento funcional. Algunos han enfatizado en su definición, mientras que otros se han centrado en cómo ese pensamiento puede ser desarrollado en la escuela. En términos generales, no hay una única forma de definir el pensamiento funcional. Radford (2010) indica que la dificultad conceptual para definir los tipos de pensamiento asociados a lo algebraico, radica en los diferentes procesos que involucra, como la generalización y la producción de conjeturas. Además, la definición o caracterización del pensamiento funcional esta implícitamente ligado a los intereses de las investigaciones.

Al margen de las anteriores consideraciones, se reconocen diferentes estudios que involucran el pensamiento funcional. Si bien, guardan ciertas similitudes que remiten a la relación entre las cantidades que varían y la generalización de las relaciones, también presentan matices distintos que dependen de los objetivos propuestos en las investigaciones. Por ejemplo, Blanton (citado por Pinto, et al., 2016) lo describe como "un proceso de construcción, descripción y razonamiento con y sobre las funciones que está incluido dentro del pensamiento algebraico, ya que incluye la construcción de una generalización sobre variables que se encuentran relacionadas" (p.30). Por su parte, Warren & Cooper (2005) lo definen con base a ciertas características: a) las ideas de cambio (cualitativo y cuantitativo), b) las relaciones que hay entre ellas y c) la solución de problemas utilizando estas relaciones. Además, añaden que a través del pensamiento funcional se pueden establecer relaciones de dependencia entre valores de dos o más conjuntos en una situación cercana y cotidiana para el estudiante, lo cual permite descubrir otras parejas de valores en la situación y la generalización que hay entre los conjuntos que se tienen.

Investigaciones recientes, como el trabajo de Pinto, et al., (2016) y Pinto & Cañadas (2017) establecen que el pensamiento funcional tiene como base, la relación entre cantidades involucradas, la variación conjunta y el concepto de función, siendo un contenido matemático fundamental. Por otra parte, Blanton, Levi, Crites y Dougherty (citado por Morales, et al., 2016) mencionan que es uno de los enfoques del álgebra adoptado en la Educación Primaria, cuyo objetivo es que los estudiantes se centren y desarrollen habilidades en cuanto al razonamiento sobre las relaciones entre cantidades que varían, la identificación de patrones que subyacen de las relaciones y sus representaciones y la realización de procesos de generalización con el fin de justificarlos.

Desde otro punto de vista, Blanton, et al. (2015) y Bastías y Moreno (2016) refieren que en el desarrollo del pensamiento funcional es importante la generalización de las relaciones entre las cantidades que varían; además es necesario tener en cuenta la representación y justificación de las relaciones obtenidas de diversas maneras, utilizando diferentes formas de representación (lenguaje natural, notación variable, tablas y gráficos) y el razonamiento sobre cómo las representaciones generalizadas juega un papel fundamental para comprender y predecir el comportamiento funcional. Por su parte, Rico (2006) expone que es una herramienta para la resolución de problemas, puede resultar útil para pensar en las relaciones entre las cantidades que varían y debe considerarse como una meta disciplinar y fundamental en la enseñanza de las matemáticas.

Finalmente para Smith (2008) el pensamiento funcional se entiende como una actividad cognitiva que "se enfoca en la relación entre dos (o más) cantidades que varían, particularmente las formas de pensamiento que conducen desde las relaciones específicas (incidencias individuales) a generalizaciones de esas relaciones entre instancias" (p.1).

De acuerdo a las posturas respecto al pensamiento funcional y de acuerdo a los objetivos del trabajo, la definición planteada por Smith (2008) presenta características más amplias sobre el pensamiento funcional, las cuales se describen a continuación.

#### 2.1.3.2 Una mirada del pensamiento funcional desde la perspectiva de Smith.

Para el desarrollo del pensamiento funcional, Smith (2008) propone seis actividades, agrupadas en tres grupos, las cuales al desarrollarlas permiten al estudiante adquirir bases sólidas para construir el concepto de función en la Educación Secundaria las cuales se mencionan a continuación.

***Actividades que potencian el pensamiento funcional***

*Participar en una problemática dentro de una situación funcional*
1. Participar en algún tipo de actividad física o conceptual.
2. Identificar dos o más cantidades que varían en el curso de esta actividad y enfocando la atención en la relación entre estas dos variables.

*Crear un registro*
3. Hacer un registro de los valores correspondientes de estas cantidades típicamente tabulares, gráficos o icónicos.

*Búsqueda de patrones y certeza matemática*
4. Identificación de patrones en estos registros.
5. Coordinar los patrones identificados con las acciones involucradas en la realización de la actividad.
6. Usar esta coordinación para crear una representación del patrón identificado en la relación.

En cuanto a la última actividad, la representación puede ser idéntica al registro. Sin embargo, el foco de interés en el pensamiento funcional son los procesos mediante los cuales un registro se convierte en una representación generalizada de la relación y cómo el individuo crea una certeza matemática sobre la relación generalizada, es decir cómo argumentan la relación que han establecido. Además, los estudiantes pueden desarrollar estas actividades sin seguir la secuencia lineal, incluso no realizarlas en su totalidad, lo cual no significa que no desarrollen pensamiento funcional. Por otra parte, Smith sugiere la resolución de problemas contextualizados para la enseñanza de las funciones, involucrando representaciones múltiples y transformaciones entre dichas representaciones.

**Participar en una problemática dentro de una situación funcional**

A lo largo del tiempo autores como Confrey (citado por Smith 2008) han expuesto que el aprendizaje se hace evidente cuando un estudiante construye un problema y a la forma cómo resuelven dichos problemas. El autor sugiere el uso de la palabra "problemática" la cual se define de acuerdo al solucionador puesto que "un problema es solo una problemática en la medida en que y en la manera en que se siente problemático para el solucionador"; de igual manera, lo interpreta como "un llamado a la acción".

Para comenzar el estudio de las funciones Smith (2008) propone construir situaciones donde las diversas problemáticas estén orientadas hacia el reconocimiento de la relación entre dos cantidades variables. Si bien, construir una problemática es un proceso de cada estudiante, el trabajo con problemas apropiados juega un papel importante en dicho proceso junto con los diálogos que se realizan en el salón de clase y la participación en alguna actividad. Las actividades pueden estar asociadas con procesos físicos reales o mentales sobre actividades imaginadas, en cualquier caso toman sentido cuando involucran relaciones entre dos cantidades variables, lo cual promueve a los estudiantes a pensar funcionalmente. “Por lo tanto, la génesis del pensamiento funcional ocurre cuando un individuo se involucra en una actividad, elige la atención superior a dos o más cantidades variables, y comienza a enfocarse en la relación entre esas cantidades. Es el foco en una relación que es central para el concepto de función” (Smith, 2008). La posibilidad de que los estudiantes desarrollen pensamiento funcional, depende en gran medida del trabajo del docente, al crear problemas contextuales, describir cantidades que varían, plantear preguntas apropiadas y promover la participar en el discurso del salón de clase.

En correspondencia con lo planteado por Smith (2008), a continuación se propone un problema contextualizado que involucra la relación entre dos cantidades que varían.

***Problema****: Santiago es un joven que se gana la vida trabajando en buses de transporte, vendiendo pasatiempos, él dice que cada pasatiempo tiene un valor de $6000, si son dos $12000 y tres serían $18000*

Para la resolución del problema es necesario que los estudiantes en principio identifiquen que existen dos variables, cantidad de pasatiempos y precio total, luego se centren en la relación de las mismas y ulteriormente realicen un registro de los valores correspondientes.

**Crear un registro**

El empleo de las tablas es usual cuando se trata de solucionar problemas que involucran relaciones entre dos cantidades variables Confrey & Smith (citados en Smith, 2008). Generalmente, los estudiantes realizan dos columnas y registran en la columna izquierda y derecha los valores de las variables de interés, como se puede observar en la tabla 1 que corresponde al problema presentado en el apartado anterior. De esta manera, el uso de las tablas juega un papel esencial en el desarrollo del pensamiento funcional.

*Tabla 1.*Relación entre la cantidad de pasatiempos y su precio

| Cantidad de pasatiempos | Precio total |
|---|---|
| **1** | **$ 6000** |
| **2** | **$ 12000** |
| **3** | **$ 18000** |

Es importante que después de que los estudiantes pasen de crear un registro a reflexionar sobre el registro como representación de la relación, construyan representaciones adicionales como pictóricas, verbales y simbólicas. El empleo representaciones múltiples posibilita que "el conocimiento en matemáticas evolucione en relación con las múltiples formas en que la idea puede ser mostrada. Tomamos la posición de que es a través del entretejido de nuestras acciones y representaciones que construimos el significado matemático" (p.11).

**Búsqueda de patrones y certeza matemática**

Para construir una función, no basta con enfatizar una correspondencia entre los valores de dos conjuntos, de ser esta la intención sería suficiente la creación de un registro, particularmente una tabla, en la que se colocaría dos valores en una misma fila e indicaría que son valores correspondientes. Se trata, de construir una relación entre las variables como argumento para enfocarse en el pensamiento funcional. Además, otro aspecto importante en el proceso de construir la relación entre las variables que varían es la construcción de una certeza en la relación, donde está, "es una parte esencial que forma parte de la visión cultural dominante de las matemáticas" (Smith, 2008).

El autor propone tres formas de pensamiento como procesos de generalización que los estudiantes puedan realizar en los primeros grados de escolaridad para fomentar el pensamiento funcional: *pensamiento de patrones recursivos*, *pensamiento covariacional* y *pensamiento de correspondencia*. Para caracterizar y ejemplificar las *formas de pensamiento funcional*, se considera el problema establecido anteriormente con su respectiva tabla, además la conceptualización de Smith (2008).

*Pensamiento de patrones recursivos*

Involucra el hallazgo de un patrón que varía en una secuencia de datos. Así, esta forma de pensamiento se manifiesta cuando los estudiantes se centran en una sola columna de la tabla y describen cómo están cambiando los resultados. Por ejemplo, un estudiante puede centrarse en la columna de la "cantidad de pasatiempos", cuyo patrón recursivo está cambiando de 1 en 1, o en la columna del "precio total", que está cambiando de $6000 en $6000.

*Pensamiento covariacional.*

El foco de esta forma de pensamiento se centra en el análisis en cómo dos cantidades relacionadas entre sí varían simultáneamente y en cómo los cambios en los valores de una, producen cambios en la otra. Por ejemplo, un estudiante da cuenta del *pensamiento covariacional* al observar de forma vertical las dos columnas y concluye que mientras la "cantidad de pasatiempos" aumenta en 1, el "precio total" aumenta en $ 6000.

*Pensamiento de correspondencia*.

El énfasis está puesto sobre la relación entre pares de variables correspondientes. De acuerdo a Confrey y Smith (citado por Payne, 2012) este pensamiento ocurre cuando los estudiantes forman o relacionan las dos cantidades variables y construyen una regla que relacione la variable independiente y dependiente $y = f(x)$. En el ejemplo anterior los estudiantes configuran el pensamiento de correspondencia cuando establecen una regla que permita encontrar un único valor de "precio total", por algún valor de "cantidad de pasatiempos". En consecuencia, observan a través de la tabla de forma horizontal y establecen una regla expresada como: multiplicar los valores de la columna de la izquierda ($x$) por seis mil para obtener los valores de la columna de la derecha ($y$) o en su expresión algebraicamente, $f(x) = 6000x$.

Conviene subrayar, que el interés principal por construir funciones está en cómo los estudiantes utilizan las *formas de pensamiento funcional* para crear una relación entre variables, más que construir una regla general que exprese la relación de correspondencia.

### 2.1.4 Problemas que involucran relaciones funcionales lineales

El problema propuesto por Rodríguez (2016) denominado: *ruta escolar* constituye un buen ejemplo que involucra relaciones funcionales lineales, y por tanto puede ser seleccionado y/o adaptado para el estudio de *formas de pensamiento funcional*. El problema consiste en que un conductor de autobús escolar recoge determinadas personas en las diferentes paradas que realiza. Con base a la Imagen 1, se debe responder las siguientes preguntas.


*Imagen 1*. Relación entre el número de paradas y el número de personas

1. ¿Cuántas personas van en el autobús al salir de la primera parada?
2. ¿Cuántas personas van en el autobús después de salir de la segunda, tercera y cuarta parada?
3. Si hay tres personas en el autobús, ¿de qué parada sale?
4. ¿Cuántas personas van en el autobús al salir de la parada número treinta?

5. ¿Cuántas personas aumentaron de la segunda a la tercera parada?
6. Si el número de paradas aumenta, ¿Qué pasa con el número de personas?
7. ¿Cuántas personas van en el autobús al salir de la parada número cien?
8. Si el número de parada fuera N, ¿cuál sería el número de personas que van?
9. ¿Cuántas personas van en el autobús al salir de cualquier número de parada?
10. ¿Cuántas personas van en el autobús al salir de la parada N?

Las preguntas 1, 2, 3 y 4 dan cuenta de *pensamiento de patrones recursivos* puesto que, las preguntas 1 y 2, y de acuerdo a la ilustración 1 se puede observar que en la parada 1 irán dos personas, en la parada dos irán tres, en la parada cuatro irán cinco; lo que quiere decir que existe un patrón que está aumentando de uno en uno; las pregunta 3 y 4 son inversas dado que, si hay tres personas en el autobús significa que ha salido de la segunda parada, si hay 4 personas ha salido de la tercer parada, si hay 18 personas ha salido de la para número 17 por tanto, el patrón está disminuyendo de uno en uno.

Las preguntas 5 y 6 permiten que el estudiante presente *pensamiento covariacional*, al identificar que de una parada a otra, aumenta una persona y si el número de paradas aumenta también aumentará el número de personas.

Las preguntas 7, 8, 9 y 10 posibilitan a los estudiantes reconocer una relación de correspondencia entre pares de valores, *pensamiento de correspondencia*, ya que se trata de establecer una relación entre el número de paradas y el número de personas que van en el autobús. Además, este tipo de preguntas los incita a buscar estrategias que le permitan encontrar la respuesta cuando se trate de datos muy altos, por ejemplo: ¿cuántas personas van en el autobús al salir de la parada número cien? O para la pregunta: si el número de parada fuera $N$, ¿cuál sería el número de personas que van? Si $N$ es el número de paradas, significa que el número de personas que van en el autobús será $N + 1$.

Otro referente importante para el trabajo con problemas que involucran relaciones funcionales lineales, se denomina: *cumpleaños de Sara* propuesto por Merino, et al., (2013). En dicho problema, Sara celebra su cumpleaños en casa y quiere invitar a sus amigos a comer torta. Así que su mamá organiza y junta algunas mesas rectangulares para que sus amigos se sientan, tal como se observa en la imagen 2.

Las mesas se unen formando una fila como la que se observa en la Imagen 2. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber dos niños sentados.

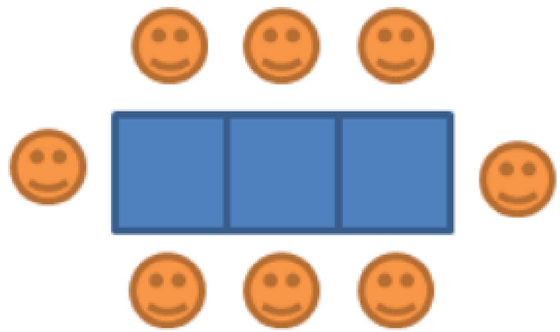


*Imagen 2*. Relación entre número de mesas y número de amigos.

Para que los estudiantes desarrollen las *formas de pensamiento funcional* se realizan preguntas como: ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 2 mesas?, ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 3 mesas? , ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 4 mesas? Explica cómo lo has averiguado. Este tipo de preguntas le permite a los estudiantes desarrollar *pensamiento de patrones recursivos* puesto que, a través de la representación pictórica es posible establecer cuantas personas se pueden ubicar en una mesa, dos, tres, cuatro, es decir, pueden establecer un patrón.

También, se presentan preguntas como: 1) si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? , 2) ¿Qué sucede con el número de mesas que debe de ubicar la mamá de Sara si el número de amigos aumenta? Este tipo de preguntas otorga a los estudiantes un acercamiento a desarrollar *pensamiento covariacional*, es decir, pueden establecer que al aumentar el número de amigos en la fiesta va a aumentar el número de mesas.

Finalmente, se plantean preguntas como: 1) Explícale a la mamá de Sara cuántas mesas tiene que ubicar si asisten 900 amigos a la fiesta de cumpleaños y 2) Vamos a utilizar la letra n para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra $n$ el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas. Con estas preguntas se pretende que el estudiante generalice la relación a través de datos lejanos (900 niños), escriba la expresión en términos de n para el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas y finalmente se le pide que expliquen el porqué de sus repuestas a otra persona; lo cual les permitiría dar cuanta de estar desarrollando *pensamiento de correspondencia.*

### 2.1.5 Algunos aportes desde la didáctica de las matemáticas hacia el desarrollo del pensamiento funcional

Existen diversas investigaciones que aportan, desde la didáctica de las matemáticas, soluciones para las dificultades que presentan los estudiantes en el desarrollo del pensamiento funcional; (Blanton & Kaput, 2004, 2011; Fuentes, 2014; Osorio, 2016; Payne, 2012; Schliemann, et al., 2001; Rodríguez, 2016; Tanisli, 2011; y Warren & Cooper, 2005).

Para comenzar, Osorio (2016); Schliemann, et al., (2001); y Tanisli (2011) mencionan que los estudiantes presentan dificultades para reconocer variables en una función o en una relación en las representaciones existentes en matemáticas, dado que el concepto de variables, en los primeros grados de escolaridad, es visto como etiquetas o como letras que están dentro del alfabeto y no como aquellas que representan cantidades, razón por la cual, cuando los estudiantes comienzan el estudio del álgebra formal se convierte en algo totalmente nuevo para ellos, en este sentido Tanisli (2011) refiere que "siendo incapaces de operar con letras algebraicas como cantidades variables en lugar de valores específicos" (p.208).

Siguiendo esta misma línea Rojas & Vergel (2013) mencionan que, tanto estudiantes como profesores hablan sobre dificultades para aprender y enseñar álgebra en la Educación Secundaria, particularmente en octavo y noveno grado, que es donde se inicia el estudio formal del álgebra. Dichas dificultades están asociadas al uso de las "letras (variables)" y al significado de estas en contextos matemáticos. Estos autores manifiestan que incluso estudiantes que se distinguen por tener un buen desempeño académico, se muestran inconformes por tener que trabajar con letras en matemáticas y manifestando expresiones como: "… y por qué tengo que trabajar con letras", o, "¿sí ve?, ¿de qué sirvió todo lo anterior? … ¡para que ahora no entienda nada!, o, incluso, "aparecieron las malditas letras" (p. 761). Se puede concluir que una de las causas que desencadenan estas dificultades, se atribuye al poco uso de dichas letras en el área de matemáticas en la Educación primaria, afectando el rendimiento académico de los estudiantes en la Educación Secundaria.

Cabe resaltar que el estudio del concepto de las variables es complejo y es un proceso que los estudiantes alcanzan lentamente. Algunos investigadores, como Tanisli (2011) señalan que esta dificultad es usualmente ignorada y para abordarla es importante trabajar desde el principio con patrones; a su vez otros investigadores como Blanton & Kaput (2004, 2011) manifiestan que, el trabajo solo con patrones no es suficiente, se trata de llevar a los estudiantes a pensar funcionalmente a través del trabajo con la búsqueda de relaciones entre dos cantidades que varían.

Por su parte, Schliemann, et al., (2001); Warren & Cooper (2005); Obando (2009); Tanisli (2011); y Fuentes (2014) mencionan que una de las dificultades evidenciadas en las tablas de funciones es cuando se les presenta a los estudiantes, problemas que involucren tablas de funciones, generalmente tienden a centrarse en una columna encontrando la diferencia entre pares de términos, teniendo en cuenta la relación entre los valores de las variables dependientes, dejando de lado la relación funcional entre la variable independiente y los valores de la variable dependiente. Un ejemplo de ello se puede apreciar en Obando (2009) (ver tabla 2).

*Tabla 2* Relación funcional entre número de dulces y precio.

| Número de dulces | Precio |
|---|---|
| 2 | 30 |
| 3 | 45 |
| 4 | 60 |
| 6 | 75 |
| 8 | 120 |
| 10 | 135 |

En la Tabla 2, se puede considerar la variable de número de dulces como la variable independiente y el precio como la variable dependiente. En este sentido Obando (2009) menciona que, los estudiantes suelen centrarse en la columna de valores de la variable dependiente; encontrando el número en cada posición del patrón (15) y sumando este, cada vez, sin tener en cuenta que existe una relación de dependencia entre las variables dependiente e independiente, es decir cada vez que el número de dulces aumenta en 1 el precio de cada uno, aumenta en 15.

Teniendo en cuenta que únicamente el trabajo con patrones no es suficiente para desarrollar pensamiento funcional, es importante establecer preguntas que ayuden al estudiante desde edades tempranas a encontrar el cambio de cada uno de los valores de las columnas, por ejemplo; ¿cómo está cambiando la variable dependiente con respecto a la variable independiente?, y ¿cuál es relación entre los valores de las variables dependientes e independientes en las tablas? Esto con el fin de mejorar la comprensión de los conceptos relacionados en las funciones y evitar posibles dificultades en grados posteriores.

Otra de las dificultades observadas en los estudiantes, de acuerdo con Fuentes (2014) se da cuando no se les presenta números consecutivos, como: 1,2,3,4,5,8,12,20 y 100, puesto que hasta cierta parte, pueden establecer una relación entre las variables, pero presentan problemas cuando se trata de buscar una relación en los casos particulares no consecutivos. Al respecto conviene decir, que Warren et al. (citado por Tanisli 2011) afirma que, en una tabla de funciones una aleación aleatoria de los valores de la variable dependiente e independiente permite que, los estudiantes busquen relaciones entre dos conjuntos de datos y no solo, se centren en una sola columna dado que esto, limita el descubrimiento de los estudiantes y no les permite pensar funcionalmente al no establecer una relación entre las variables.

Tanisli (2011) menciona que el uso de las tablas de funciones lineales, son un medio para el desarrollo del pensamiento funcional. Dado que, ayudan a hacer explícita o visible la dependencia, porque la variable independiente siempre se registra en la primera columna y la variable dependiente en la segunda columna.

Por lo que se refiere a las dificultades de los estudiantes en el álgebra, existen investigaciones que muestran la falta de generalidad como alguna de estas dificultades. Payne (2012) menciona que los estudiantes no establecen una generalización, debido al orden de enseñanza, primero aritmética y, luego álgebra, como si fueran dos materias distintas. En consecuencia, este autor plantea que “la generalización abarca el espacio entre aritmética y álgebra”, una forma de superar esta dificultad es a través de las imágenes visuales. Al respecto, Lannin et al. ( citado por Payne, 2012) mencionan que cuando los estudiantes las conectan con el contexto del problema, generalmente escriben una regla explícita.

Es importante que los docentes planteen problemas y preguntas apropiadas, de tal forma que les permita a los estudiantes, razonar sobre los datos encontrados y establecer una generalización, un claro ejemplo es el propuesto por Rodríguez (2016) denominado “ruta escolar”, dicho problema posibilita el desarrollo del pensamiento funcional, al dar respuesta a cada una de las cuestiones planteadas, ya que le permite buscar un patrón y establecer una relación entre el número de paradas y el número de personas que viajan dentro del bus. De la misma forma, establece una generalidad para el caso y para cualquier cantidad que se precise.

Si bien, los autores mencionan que los estudiantes desde edades tempranas encuentran patrones, establecen relaciones entre dos cantidades que varían, reconocen una variable como un número en general y establecen una generalización, la literatura menciona que existen dificultades en: la comprensión del concepto de variable, la relación de dependencia que existe entre las columnas de la tabla de funciones, la generalización, la formulación de preguntas, así mismo presentan dificultades cuando se presentan valores no consecutivos. Se reconoce entonces, que aún es necesario enfatizar en aquellas dificultades que impiden el desarrollo del pensamiento funcional y por ende el pensamiento algebraico. Con lo anterior, se busca disminuir las dificultades mencionadas a través de problemas contextualizados mediante los cuales los estudiantes tengan un acercamiento hacia la interpretación y comprensión del concepto de variable, además se busca que en la formulación de preguntas los estudiantes no solo se centren en las variables dependientes o independientes, sino que establezcan una relación entre las cantidades que varían y observen que, si la variable independiente cambia la variable dependiente también; de igual manera, que se establezcan preguntas que permitan crear una generalización a través de valores lejanos.

## 2.2 Referente curricular

Para el diseño y análisis de la secuencia de problemas propuestos en este trabajo, se toma como referencia los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006). Desde estos documentos curriculares el pensamiento que incluye de forma directa al pensamiento funcional es el pensamiento variacional. Desde los Lineamientos

Curriculares el pensamiento funcional se hace evidente al mencionar los desarrollos propios del pensamiento variacional al trabajar con álgebra, esto se muestra al citar que:

> "´Respecto al álgebra, se considera que en un primer momento generaliza patrones aritméticos y posteriormente se constituye en una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio, es por ello que debe involucrar entre otros aspectos el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebráicas como medio de representación y sus métodos como herramientas en la resolución de problemas, la función y sus diferentes formas de representación, el análisis de relaciones funcionales y de la variación en general para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra, y la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables, todos éstos desarrollos propios del pensamiento variacional" (p. 17).

De acuerdo a lo anterior, el pensamiento funcional da cuenta de pensamiento variacional al centrarse específicamente, en la noción de función a partir del trabajo con sus diversas formas de representación, relaciones funcionales, variación y cambio.

(…) el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico… (p. 66)

En este sentido, una manera de promover las situaciones de variación y cambio en la Educación Primaria es a partir del estudio de patrones a través de contextos de la vida cotidiana, actividades, procesos, conceptos y funciones siendo este último el centro de interés en el presente trabajo.

Teniendo en cuenta que la secuencia de problemas están pensadas para estudiantes de grado tercero y cuarto de Educación Primaria y que se relacionan con el estudio de fenómenos de variación y cambio en diferentes contextos, así como la representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos y algebraicos, se considera los siguientes estándares ubicados en el ciclo de primero a tercero y de cuarto a quinto en relación con el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos:

- Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
- Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros).
- Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.
- Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.

- Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.

A nivel nacional, dentro de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas se habla de coherencia vertical y coherencia horizontal. La coherencia vertical hace referencia a la relación que hay entre los estándares de un mismo pensamiento y diferentes conjuntos de grados y la coherencia horizontal alude a la estrecha relación que existe entre los estándares de los diferentes tipos de pensamiento matemático (el numérico, el espacial, el de medida o métrico y el aleatorio o probabilístico) dentro del mismo conjunto de grados. De esta manera, el diseño de la secuencia de problemas hace alusión a estas dos coherencias, en el cual los estándares de los ciclos primero a tercero y de cuarto a quinto, los estudiantes también pueden potenciar el pensamiento numérico y sistemas numéricos. Por ejemplo, en la coherencia horizontal (ver figura 1) se puede observar que en las situaciones de variación y cambio es necesario describir y comparar las situaciones numéricas en diferentes contextos y con diversas representaciones y reconocer las situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad directa.

En la Figura 1, se presenta los estándares ubicados en la coherencia vertical y horizontal, que se consideran centrales para el desarrollo de la secuencia de problemas que involucran relaciones funcionales lineales.

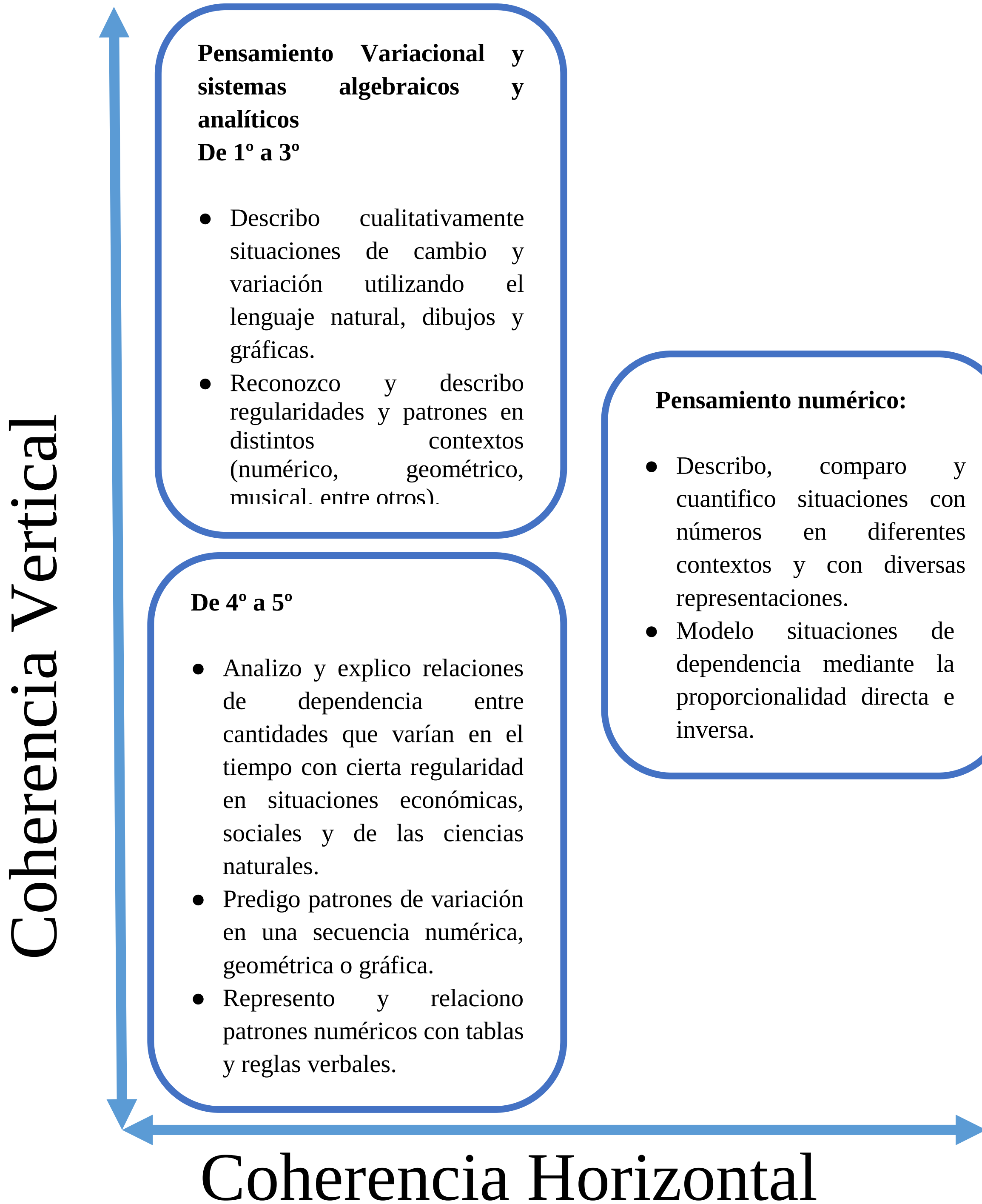



*Figura 1.* Coherencia vertical y horizontal

## 2.3 Referente Matemático

### 2.3.1 Función

A través de la historia de las matemáticas, se han reconocido diferentes formas de entender el concepto de función, entre las más comunes que se encuentran en los textos de matemáticas son (Valoyes & Malagón, 2006):

1. "Sean $X$ y $Y$ colecciones de objetos, posiblemente conjuntos. Una función de $X$ en $Y$ es una relación entre elementos de $Y$. Pero es una relación con una característica muy especial: cada $x \in X$ se realciona con uno y sólo un $y \in Y$".

2. "Se dice que la variable es FUNCIÓN de las variables independientes $x, y, \dots t$ o que depende de estás, cuando a cada grupo de valores numéricos $x, y, \dots t$ corresponde uno o varios valores de u"

3. "Una función de $f$ de $A$ en $B$ es una relación de $A$ en $B$ que cumple:

    a) Dominio de $f = A$
    b) Si $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$, entonces $b = c$; es decir, no hay dos pares ordenados diferentes cuyos primeros elementos sean iguales"

4. "Una función es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento de un conjunto (llamado el domino de la función) exactamente un valor de otro conjunto. El conjunto de todos los valores asignados se llama rango de la función".

La definición 1 y 4 se considera una función a la relación entre dos conjuntos de datos, donde la correspondencia es el foco central, debido a que "se trata de construir una conexión entre los elementos de dos conjuntos, en el cual a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno del segundo conjunto" (Valoyes & Malagón, 2006. p. 90).

### 2.3.2 Relación funcional lineal

A la relación que se crea entre las cantidades que varían en un problema Balayes y Malagón (año) lo denominan como "una relación funcional lineal", en la cual si se producen cambios en una de las variables también se determinarán cambios en la otra, lo que conlleva a establecerse una relación de dependencia.

Se llama relación funcional lineal a una relación que es una función cuya gráfica es una línea recta, la cual puede ser de dos tipos: proporcional y no proporcional. Se denomina función de proporcionalidad a cualquier función que relacione dos cantidades directamente proporcionales (x, y). Su fórmula algebraica tiene la forma:

$y = mx$ ó $f(x) = mx$

Donde $m$ es cualquier número real distinto de cero $m \neq o$, además, es la constante de proporcionalidad y recibe el nombre de pendiente de la función.

La representación gráfica de una función proporcional es una línea recta, como $y = mx$, si $x = 0$ entonces $y = 0$ ; por lo cual la gráfica de todas las funciones de proporcionalidad pasan por el punto (0,0), es decir, por el origen de coordenadas. Por otra parte, la función no proporcional está dada por la fórmula $f(x) = mx+b$ ó $y = mx + b$ su grafica es una línea recta que no pasa por el origen de coordenadas siempre y cuando $b$ sea diferente de $0$, donde $m$ es la pendiente o inclinación de la recta y $b$ es la ordenada en el origen, es decir nos indica el punto de corte en el eje $y$, además $m$ y $b$ son constantes. En este tipo de función los valores que tomen las variables $x$ e $y$ son números reales, que corresponden a las cantidades que intervienen en las diversas situaciones, cada vez que se incremente o disminuya la variable independiente, la variable dependiente se incrementará o disminuirá (Godino y Font, 2003).

# CAPÍTULO III

# MARCO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN

## 3.1 Enfoque cualitativo de la investigación

Esta investigación tiene como objetivo contrastar las *formas de pensamiento funcional* que presenta un grupo de estudiantes de grado tercero y cuarto de la Institución Educativa José Vicente Mina, cuando trabajan con problemas que involucran relaciones funcionales lineales. Con miras a alcanzar el objetivo propuesto, se reconoce el aporte del enfoque cualitativo en las investigaciones relativas en la Educación Matemática, porque entre otros aspectos permite: estudiar los fenómenos desde su contexto, dar una explicación detallada de los comportamientos y manifestaciones que ocurren dentro del mismo, describir los fenómenos por medio de las acciones y producciones de los estudiantes, además de comprender e interpretar la forma en que los perciben y los experimentan (Hernández, Fernández & Baptista, 2014)

En cuanto a las metodologías adoptadas en investigaciones concernientes al estudio del pensamiento funcional, se reconoce el enfoque de investigación cualitativo. Así por ejemplo, Pinto (2016) adopta este enfoque, porque permite realizar una mejor comprensión y descripción de los fenómenos, explorándolos desde las acciones de los estudiantes en un ambiente natural y en relación con el contexto. En su caso se centra en describir el pensamiento funcional de un grupo de estudiantes de tercero de Educación Primaria (8-9 años) a partir de un problema contextualizado. En esta misma línea (Morales et al. 2016) indican que este enfoque permite hacer una descripción detallada de las trascripciones de las respuestas a las preguntas planteadas y de las producciones escritas de un grupo de estudiantes de primero de Educación Primaria (6 años).

Adicionalmente el enfoque cualitativo está inserto en la vida cotidiana, requiere una observación y contacto directo del investigador con los actores sociales, en este caso con un grupo de estudiantes de tercero y cuarto, de manera que permita comprender las situaciones que son objeto de estudio. En consecuencia, dicha proximidad del investigador y las personas que participan en la investigación permite reconocer ciertas habilidades de los sujetos para enfrentarse a la solución de un problema que involucra relaciones funcionales lineales.

## 3.2 Diseño del estudio de casos

En relación con el enfoque de investigación cualitativo la presente investigación retomó algunos elementos propuestos desde el diseño de los estudios de casos, entendido como un método de investigación cualitativo para el análisis de las realidades sociales que se enfatiza en el estudio socioeducativo. Además, se trata de realizar un examen detallado, comprensivo, sistemático y profundo del caso objeto de estudio (Hernández, et al., 2014).

Dentro de la variedad de estudios de casos esta investigación adoptó elementos de un estudio de tipo descriptivo, el cual tuvo como finalidad describir de forma detallada el fenómeno objeto de estudio (Hernández, et al., 2014). De acuerdo con el objetivo de investigación propuesto, este tipo de estudio estuvo enfocado en caracterizar y describir los procesos que dan cuenta de la configuración de las *formas de pensamiento funcional* planteadas por Smith (2008). Los elementos que se consideraron en el marco del diseño del estudio de casos son: *el contexto, los participantes y los instrumentos.*

### 3.2.1 El contexto

La investigación se desarrolló en la Institución Educativa José Vicente Mina, de carácter público, la cual se encuentra ubicada en la zona urbana del municipio de Santander de Quilichao (Cauca). Dicha Institución presta sus servicios en la jornada de la mañana en el horario de 7:00 am a 12:00 pm y atiende alrededor de 200 estudiantes, los cuales se encuentran distribuidos desde grado transición hasta grado quinto, cabe resaltar que los grupos están conformado por 35 estudiantes en promedio. Hay que mencionar, además que a partir de segundo grado se les brindan cinco horas de matemáticas en la semana, de las cuales tres están destinadas para la asignatura de aritmética, una para geometría y la otra para estadística.

### 3.2.2 Los Participantes

Para la implementación de los problemas que involucran relaciones funcionales lineales se tuvo en cuenta una población de 65 estudiantes que cursan tercero y cuarto grado de Educación Primaria (8 a 10 años), de los cuales se seleccionó una muestra aleatoria de 16 estudiantes 8 para grado tercero y 8 para grado cuarto con el fin de identificar distintos sistemas de representación y diversas estrategias que sirvan como base para reconocer las *formas de pensamiento funcional*.

### 3.2.3 Instrumentos

Los instrumentos que se utilizaron para la recolección de la información fueron: a) una secuencia de problemas, b) producciones escritas por los estudiantes c) material manipulativo: billetes didácticos, rótulos de caritas felices, mesas y pizzas y d) recursos tecnológicos: una cámara móvil y dos celulares.

A continuación se describen los instrumentos señalados:

***Secuencia de problemas***

Se diseñó una secuencia de problemas en los cuales se involucraron relaciones funcionales lineales de modo que permitió evidenciar en los estudiantes la configuración de las *formas de pensamiento funcional* propuestas por Smith (2008). Para ello, se diseñaron tres problemas en contextos familiares para los estudiantes tales como: la compra y venta de pizzas, las reuniones de cumpleaños y el servicio a domicilio, lo que permitió involucrase en el problema y pensar en la variación de las cantidades con diferencias constantes, así mismo la relación entre: el número de porciones de pizza y la cantidad de personas; el número de mesas y la cantidad de amigos; el número de porciones de pizza y el precio total.

Los aspectos centrales que se consideraron en los problemas fueron: 1) el número de variables involucradas, 2) el tipo de relación funcional, 3) los sistemas de representación empleados y 4) preguntas sobre casos particulares consecutivos y no consecutivos.

1) El número de variables involucradas

En el problema 1 se trabajó con la relación que existe entre dos cantidades variables; cantidad de personas (variable independiente) y número de porciones de pizza (variable dependiente).

En el problema 2 se consideró un valor constante y la relación existente entre el número de mesas (variable independiente) y la cantidad de amigos de Pepito (variable dependiente).

En el problema 3 se trabajó con la relación que existe entre dos cantidades variables, numero de porción de pizza (variable independiente) y el precio total (variable dependiente, además se tiene en cuenta un valor constante el cual es representado por la suma de $3.000.

2) Tipo de relación funcional

La relación funcional lineal que está inmersa en el problema 1 es una relación funcional proporcional de la forma $f(x) = 2x$, en el cual $x$ es el número de personas que compran pizza.

En el problema 2 se trabaja con una relación funcional no proporcional de la forma $f(x) = 4x + 2$, en que $x$ es el número de mesas que debe ubicar Pepito.

Finalmente en el problema 3 se considera: la relación funcional proporcional de la forma $f(x) = 5000x$, en el cual $x$ es el número de porciones de pizza y la relación funcional no proporcional de la forma $f(x) = 5000x + 3000$, en que $x$ es la cantidad de pizzas que compra la mamá de Pepito.

3) Sistemas de representación empleados

Los sistemas de representación que se utilizaron en los problemas que involucran relaciones funcionales lineales fueron: Tabular, verbal, pictórico y simbólico. Es necesario señalar, que en el problema 3 no se presentó ningún sistema de representación, puesto que se pretende analizar si los estudiantes hacen uso de alguno de estos, para dar respuesta a las preguntas planteadas.

4) Preguntas sobre casos particulares consecutivos y no consecutivos.

En el diseño de los problemas planteados, se empleó los números 1, 2 y 3 como casos particulares consecutivos, y los términos 6, 10, 50, 73, 100 entre otros como casos no consecutivos. Los casos consecutivos fueron orientados para la configuración del *pensamiento de patrones recursivos* y los casos no consecutivos fueron orientados hacia el desarrollo del *pensamiento covariacional* y *de correspondencia*.

***Las producciones escritas de los estudiantes***

Las producciones escritas fueron el principal insumo para caracterizar y contrastar la actividad matemática que pusieron en juego los estudiantes. Adicionalmente, se reconoció los sistemas de representación y las estrategias que emplearon los estudiantes para responder las preguntas planteadas, los cuales sirvieron como base para reconocer las *formas de pensamiento funcional*. En este sentido, se manifiesta que dichas producciones fueron fundamentales para dar cumplimiento al objetivo de investigación.

***Material manipulativo***

Con el fin de favorecer, facilitar y estimular el pensamiento matemático, captar el interés de los estudiantes se facilitó el uso de materiales manipulativos, además considerando lo mencionado por Godino, Batanero & Font (2003) estos materiales apoyan y potencian el razonamiento matemático, así mismo se caracteriza por tener un carácter exploratorio, de modo que aporta a la resolución de problemas, comunicación, discusión y reflexión. Teniendo en cuenta lo anterior, se elaboraron materiales manipulativos que representaron: la tabla funcional, las mesas, los amigos de Pepito y el dinero a pagar (ver imagen 3), esto con la intención de posibilitar el reconocimiento del patrón que está variando, el establecimiento de la relación correspondiente entra las cantidades individuales y construcción de una regla que les permitiera encontrar un resultado para cualquier valor dado.

*Imagen 3:* Material manipulativo

***Recursos tecnológicos***

Con la finalidad de evidenciar las acciones que se articularon con las producciones escritas de los estudiantes y con el propósito de observar, describir y analizar detalladamente las producciones escritas y obtener mejores resultados en los análisis, se tuvo en consideración materiales como una cámara móvil que permitió constatar por medio de las explicaciones de los estudiantes las estrategias que emplearon para solucionar los problemas y dos celulares que posibilitaron capturar el trabajo realizado.

## 3.3 Momentos de intervención con los estudiantes

En este apartado se describe detalladamente la ejecución y puesta en escena de los problemas diseñados, de igual manera se describe los diversos momentos de intervención con los estudiantes.

La práctica implicó tres sesiones de trabajo por cada grupo, dicha actividad se realizó en la sala de sistemas de la Institución, tomando aproximadamente 2 horas cada una (ver tabla 3), es decir 1 hora para grado tercero y 1 hora para grado cuarto. Por otro lado, para la organización de la sala se tuvo en cuenta el tamaño de las mesas, dado que eran mesas muy grandes, por lo cual se ubicaron 2 mesas con 3 estudiantes y 1 mesa con 2 estudiantes.

*Tabla 3.* Cronología de la práctica.

| | **Grado** | **Duración** | **Fecha** |
|---|---|---|---|
| **Sesión 1** Primer problema | Tercero | 2 horas | 16 de octubre de 2018 |
| | Cuarto | | |
| **Sesión 2** Segundo problema | Tercero | 2 horas | 19 de octubre de 2018 |
| | Cuarto | | |
| **Sesión 3** Tercer problema | Tercero | 2 horas | 26 de octubre de 2018 |
| | Cuarto | | |

La práctica se llevó a cabo en tres sesiones individuales por cada grado, puesto que era necesario desglosar los resultados obtenidos con cada uno de ellos, dado que esto permitió comparar las respuestas de cada uno de los grados entre sí en cada problema y así alcanzar el objetivo propuesto y dar respuesta a la pregunta de investigación. Igualmente, por la naturaleza del presente trabajo la secuencia se dividió en tres momentos, en cada sesión se presentó un problema contextualizado que involucra una relación funcional lineal y varias preguntas respecto de este. Hay que mencionar, además que la estructura de las sesiones fue similar: se realizó una introducción de la situación, luego se entregó a cada estudiante la parte de la secuencia de problemas correspondiente y los materiales manipulativos (tabla funcional, rótulos de caritas y porciones de pizza) con los que debía trabajar, adicionalmente se leyó en voz alta el cuento “Rolos pizza y el cumpleaños de Pepito” se sugirió que siguieran la lectura junto con la investigadora y por último se solicitó desarrollar las preguntadas que se había planteado.

Durante el desarrollo de la secuencia se llevó a cabo momentos de intervención de forma intercalada, con las producciones escritas de los estudiantes en las preguntas propuestas, esto con el fin que comprendieran las preguntas y los contextos que se les estaba proponiendo. Cabe señalar, que durante las intervenciones no se les brindó herramientas que les ayudaran a realizar el trabajo, la finalidad de dichas intervenciones buscaba orientar sus ideas y enfocar la atención hacia los elementos algebraicos que se propusieron trabajar. Además se buscó reconocer diversas verbalizaciones de las relaciones que establecieron entre las dos cantidades que varían y la manera como lo expresaban por escrito.

### 3.4 Diseño de los problemas

Para el diseño de los problemas se consideró el marco de referencia conceptual (didáctico, curricular y matemático) como base para guiar este, la implementación y el eventual análisis de un conjunto de problemas que ayudaron a dar cuenta, a través de las producciones escritas de los estudiantes, de las tres *formas de pensamiento funcional* propuestas por Smith (2008). En este orden de ideas, se diseñaron dos problemas, se hizo un (re)diseño del problema designado "el cumpleaños de Sara" propuesto por Merino et al., (2013) quienes trabajan con estudiantes de grado quinto de Educación Primaria, se les pidió encontrar el patrón para dar respuesta a las preguntas de relación directa de las mesas donde debe sentarse un niño en cada lado, según se vaya colocando una mesa más, llegando a establecer un patrón entre el número de mesas y el número de niños y distintas preguntas en las cuales se les presenta casos consecutivos y no consecutivos. Es propicio mencionar que, en todas las preguntas se pidió justificar sus respuestas.

Por otro lado, se reconoció la importancia del contexto como uno de los elementos fundamentales en el diseño de problemas puesto que, facilita la asociación de los elementos para la resolución de los mismos, así mismo Tanisli (2011) argumenta que los problemas contextualizados posibilitan dotar de significado a las matemáticas al mostrar a los estudiantes dónde aplicarlas en su vida cotidiana, motivándolos en su estudio. De igual forma, se hace necesario el uso de material manipulativo, como una estrategia que favorece, facilita y estimula el pensamiento matemático. Según Arce (2012) su correcta utilización permite la construcción de conceptos, relaciones y heurísticas matemáticas.

***Descripción de la secuencia de problemas***

El cuento "Rolos pizza y el cumpleaños de Pepito" se constituye por una secuencia de tres problemas y cada uno se compone por diferentes preguntas que están orientadas hacia la configuración de una *forma de pensamiento funcional*. A continuación se presenta el objetivo que se espera que alcancen los estudiantes al solucionar cada de uno de los problemas y se describe la estructura de cada uno de estos.

***Primer problema***

***Objetivo:*** identificar a través del sistema de representación tabular, el patrón que varía, la relación entre las dos cantidades variables y la regla general de la relación.

Para alcanzar el objetivo, se presenta un problema que subyace la relación funcional lineal proporcional y= $mx$, particularmente la función y= $2x$. Lo cual es correspondiente a la relación entre cantidad de personas y número de porciones de pizza que debe preparar Juanito. Además, se presenta a través de una tabla algunos datos organizados por medio de imágenes y valores numéricos la relación 1 persona-2 porciones de pizza (ver imagen 4).

**Rolos pizza y el cumpleaños de Pepito**


Había una vez un hombre amable, alegre y espontáneo llamado Juanito, que trabajaba arduamente en una pizzería todos los días. Un buen día después de una larga y pesada jornada de trabajo, Juanito estando en su casa se sentó a meditar en la posibilidad de no ser, solo un empleado y pensó en colocar su propia pizzería a la que le llamara "Rolos pizza", Juanito sabía que era uno de los mejores pizzeros de la ciudad, así que se puso en marcha.

Primero, Juanito desea saber cuántas porciones de pizzas debería hacer, si llega una persona, dos personas, tres personas o más, con la condición de cada persona debe pedir dos porciones de pizza.

Para ello, ha realizado una tabla que se muestra a continuación, en la que registró la cantidad de personas y el número de porciones de pizzas que debería hacer. Ahora le vamos a ayudar a terminar la tabla y vamos a responder a unas preguntas.

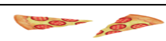
| Cantidad de personas | Número de porciones de pizza |
|---|---|
|  |  |
|  | |
|  | |
| 4 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 19 | |
| 50 | |
| 100 | |

*Imagen 4.* Problema 1 presentado en la primera sesión

Se les facilita material manipulativo, tales como una tabla, ocho rótulos de caritas felices que personifican a los amigos de Pepito y ocho rótulos de porciones de pizzas (Ver imagen 5). Para el desarrollo de este problema, en primer lugar se propone completar la tabla para casos particulares 2, 3, 4, 6, 7, 19, 50 y 100 haciendo uso del material manipulativo para los primeros casos (2 y 3) con la intención de que reconozcan los patrones de la variable independiente y dependiente, la relación entre las dos cantidades variables y construyan una regla para hallar el resultado del número de porciones de pizza dado un caso particular en la columna de la cantidad de personas, de manera que les permita completar la tabla y responder las preguntas planteadas, sin necesidad de hacer uso de los rótulos de caritas y las porciones de pizza.

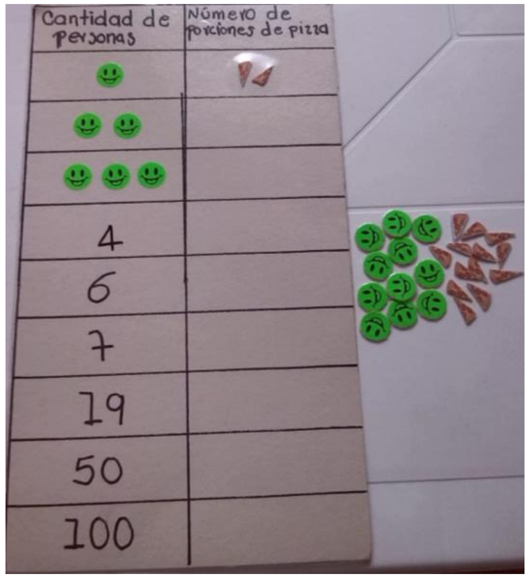


*Imagen 5.* Material manipulativo (tabla funcional, rótulos de caritas y porciones de pizza)

La idea del diseño de este primer problema surge a partir de la importancia que tiene el sistema de representación tabular en el desarrollo del pensamiento funcional. Así, se toma como referencia a Tanisli (2011) quien expone que las tablas son una herramienta que permite a los estudiantes desarrollar las *formas de pensamiento funcional* desde los primeros años de escolaridad al posibilitar centrarse en una sola columna y reconocer la diferencia entre los pares de valores de una misma columna, así como permitir observar las dos columnas al mismo tiempo y establecer una relación al enfocarse en los pares de valores de las dos cantidades variables involucradas.

Con el fin de analizar el objetivo propuesto se plantean 6 preguntas (ver tabla 4) de las cuales se hace énfasis en tres aspectos que se mencionan a continuación:

*Tabla 4* Preguntas propuestas en el primer problema

| Preguntas |
|---|
| 1. ¿Cómo encontraste el número de porciones de pizza que debe preparar Juanito si llegan 4 personas? |
| 2. ¿Cómo encontraste el número de porciones de pizza que debe preparar Juanito si llegan 7 personas? |
| 3. Si hay 3 personas en “Rolos pizza” y llega 1 persona más, ¿cuántas porciones más debe preparar Juanito? ¿Cómo lo sabes? |
| 4. Si hay 50 personas en “Rolos pizza” y llega 1 persona más, ¿cuántas porciones más debe preparar Juanito? ¿Cómo lo sabes? |
| 5. ¿Cómo encontraste el número de porciones de pizza que debe preparar Juanito si llegan 100 personas a “Rolos pizza”? |

6. Juanito quiere hacer un registro de la cantidad de porciones de pizza que debe preparar, ¿Cómo puede hallar el número de porciones de pizza teniendo en cuenta el número de personas que han llegado a “Rolos pizza”?

Con las preguntas 1 y 2 se intenta dar cuenta del *pensamiento de patrones recursivos*, a través de las producciones elaboradas por los estudiantes. En este sentido, se pretende que los estudiantes expongan la forma cómo hallaron el número de porciones de pizza que debe preparar Juanito cuando llegan 4 y 7 personas. Así, se espera que a partir de la tabla se enfoquen en la columna del número de porciones de pizza (variable dependiente) y reconozcan que el patrón recursivo varía de 2 en 2. Por ejemplo, al preguntar cómo encontraron el número de porciones de pizza que debe preparar Juanito si llegan 4 personas, los estudiantes pueden centrarse en el cambio término a término y en dicho proceso utilizar el conteo. De esta manera, una posible respuesta que da cuenta de esta forma de pensamiento es: contando de 2 en 2.

Las preguntas 3 y 4 están orientadas hacia la configuración del *pensamiento covariacional*. Con este tipo de preguntas se espera que los estudiantes se centren en las dos columnas (cantidad de personas y número de porciones de pizza) de la tabla, reconozcan que si al llegar una persona a “Rolos pizza” Juanito debe preparar 2 porciones, si llegan 2 personas debe preparar 4 porciones, si llegan 3 serán 6 porciones y así sucesivamente. Además, identifiquen que el patrón de la variable independiente cambia de 1 en 1 y el patrón de la variable dependiente cambia de 2 en 2, de tal manera que coordinen los patrones identificados y reconozcan que a medida que llega una persona a “Rolos pizza” Juanito debe preparar dos porción más de pizza. En conclusión, un ejemplo de la configuración de esta forma de pensamiento se evidencia al concluir que al llegar una persona más a la pizzería se debe preparar dos porciones más de pizza porque cada persona pide dos pizzas.

Finalmente, con las preguntas 5 y 6 se pretende que en las producciones de los estudiantes se manifieste la forma de *pensamiento de correspondencia*. Posteriormente al reconocimiento del patrón de las dos variables, la identificación de que los números (valores) de la variable dependiente cambia al cambiar los valores en la variable independiente y el trabajo con valores particulares pequeños, se espera que los estudiantes construyan una regla particular que permita encontrar el número de porciones de pizza que debe preparar Juanito teniendo en cuenta el número de personas que llegan a “Rolos pizza” y a su vez establezcan un acercamiento sobre la regla que les posibilite hallar un único valor del “número de porciones de pizza” por algún valor de la “cantidad de personas”. En conclusión, los siguientes ejemplos dan cuenta de la forma de *pensamiento de correspondencia*: a) para hallar la solución de la pregunta 5, una posible respuesta puede ser: multiplicando $100x2 = 200$ y b) para responder la pregunta 6 la posible respuesta es: para hallar el resultado del número de porciones de pizza hay que multiplicar la cantidad de personas que llegan a la pizzería por dos en otras palabras generalice la regla o establezca la expresión algebraica $y = 2x$ .

Materiales: ficha (tabla funcional, rótulos de caritas y porciones de pizza).

***Segundo problema***

***Objetivo:*** reconocer a través del sistema de representación pictórico los valores constantes, el patrón y la relación entre las dos cantidades variables involucradas.

Para dar cuenta del objetivo propuesto, se consideró un problema que involucra la relación funcional lineal no proporcional y= $mx + b$, específicamente la función y= $4x + 2$. En el cual las variables involucradas corresponden al número de mesas y el número de amigos que pueden sentarse a comer pizza. En este caso se propone el sistema de representación pictórico (ver imagen 6) como una forma de hacer más explicitó la relación entre las dos cantidades variables.

Pepito le dice a su mamá que las pizzas que venden en "Rolos pizza" son deliciosas y le gustaría comprar en su cumpleaños para repartir a sus amigos, a lo que su madre está de acuerdo y le dice que debe organizar a sus compañeros en mesas, de tal forma que al unirlas queden en una sola fila. Para ello le muestra un ejemplo de la manera como deben estar ubicados.

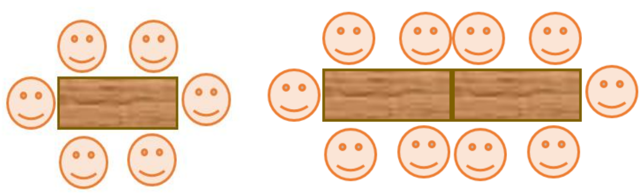


*Imagen 6.* Problema 2 presentado en la segunda sesión

Para el desarrollo del presente problema se facilitó material manipulativo: ocho fichas que representan las mesas y 12 rótulos de caritas felices que aluden a los amigos de Pepito (ver imagen 7). Se pretende entonces, que a través del sistema de representación pictórico y manipulativo, identifiquen los valores constantes, el patrón que varía, el cambio simultáneo entre la variable independiente y la variable dependiente y establezcan la relación entre las dos cantidades variables. Por consiguiente construyan una regla que les permita hallar el número de mesas que debe ubicar Pepito para cualquier cantidad de amigos que pueden sentarse a comer pizza.

*Imagen 7.* Material manipulativo (mesas, rótulos de caritas y porciones de pizza)

El presente problema es un rediseño del problema propuesto por Merino et al., (2013) quien planteó el problema denominado “el cumpleaños de Sara”. El cual consiste en hallar un patrón entre el número de mesas y el número de niños, dando como condición que únicamente puede sentarse un niño en cada lado de las mesas. Dicho problema posibilita analizar cómo las dos cantidades relacionadas entre sí, varían al mismo tiempo y mantienen ese cambio.

En el problema rediseñado se sugiere ubicar los amigos de pepito dos a cada uno de los lados laterales (superior e inferior) y uno a los lados derecho e izquierdo, tal como se muestra en la imagen 8.

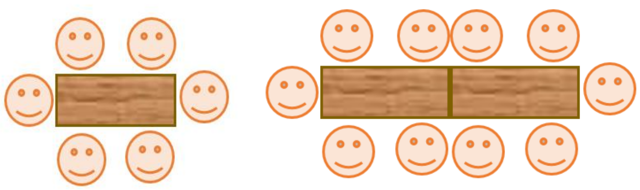


*Imagen 8.* Representación pictórica

Con el fin de reconocer si los estudiantes reconocieron el patrón, establecieron la relación entre la cantidad de mesas y el número de amigos que pueden sentarse a comer pizza se plantearon preguntas relacionadas con casos particulares consecutivos y no consecutivos hasta llegar a la generalización de la relación entre la dos cantidades (ver tabla 5).

*Tabla 5* Preguntas del segundo problema

| preguntas |
|---|
| 1. ¿Cuántos amigos de Pepito pueden sentarse a comer pizza en 1 mesa? |
| 2. ¿Cuántos amigos de Pepito pueden sentarse a comer pizza si se juntan 2 mesas? |
| 3. ¿Cuántos amigos de Pepito pueden sentarse a comer pizza si se juntan 3 mesas? |
| 4. ¿Cuántos amigos de Pepito pueden sentarse a comer pizza si se juntan 6 mesas? |
| 5. Sabemos que al juntar 2 mesas se pueden sentar 10 personas, si se coloca 1 mesa más, ¿cuántas personas más pueden sentarse? ¿Cómo lo has averiguado? |

6. Sabemos que al juntar 10 mesas se pueden sentar 42 personas, si se coloca 1 mesa más, ¿cuántas personas más pueden sentarse? ¿Cómo lo has averiguado?
7. Si sabes que hay 30 mesas, ¿de qué forma le explicarías a Pepito cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a comer pizza? Explica cómo lo has averiguado
8. Si Pepito ha juntado 50 mesas, ¿cuántos amigos pueden sentarse a comer pizza en su fiesta de cumpleaños? Explica cómo lo has averiguado.

Con las preguntas 1, 2, 3 y 4 se busca dar cuenta de la configuración del *pensamiento de patrones recursivos* a través de las indagaciones de los estudiantes. Al presentar valores consecutivos en las preguntas tiene como intención el reconocimiento del patrón que varía, de tal manera que determinen que el número de amigos que pueden sentarse a comer pizza cambia de 4 en 4. Por ejemplo, a la pregunta ¿Cuántos amigos de Pepito pueden sentarse a comer pizza si se juntan 3 mesas? Una repuesta viable es 14, porque a 10 le sumo 4. Es decir se recurre al resultado anterior y se le suma 4 para encontrar la respuesta a la pregunta planteada.

Las preguntas 5 y 6 están enfocadas hacia desarrollo del *pensamiento covariacional*. Con estas preguntas se busca que los estudiantes reconozcan que al ubicar una mesa más se pueden sentar 4 amigos de Pepito más y que a los lados derecho e izquierdo siempre se sentaran dos personas. Por lo tanto, si los estudiantes concluyen que al ubicar una mesa más se pueden sentar 4 amigos más dan cuenta de la configuración del *pensamiento covariacional* o si responden que cuando el número de mesas aumenta en uno el número de amigos que pueden sentarse a comer pizza aumenta en cuatro.

Las preguntas 7 y 8 están orientas a la configuración del *pensamiento de correspondencia*. Razón por la cual, se espera que en sus indagaciones los estudiantes relacionen las cantidades que varían y construyan una regla de tal forma que les permita encontrar el resultado para la cantidad de amigos que pueden sentarse a comer pizza dependientemente del número de mesas que se haya juntado. De manera que, si responden a partir de una multiplicación, por ejemplo: $4\ x\ 50 = 200$, luego $200 + 2 = 202$, dan cuenta de esta forma de pensamiento.

Materiales: ficha (mesas y rótulos de caritas y pizzas).

***Tercer problema***

***Objetivo:*** identificar las dos cantidades que varían, representándolas con diferentes sistemas de representación de manera espontánea.

Por último, se presenta un problema que se divide en dos partes, el primer problema subyace la relación funcional lineal proporcional y= $mx$ (y= $5000x$) y el segundo subyace la relación funcional lineal no proporcional y= $mx + b$ (y= $5000x + 3000$) (ver imagen 9). Con este tipo de problema se busca que los estudiantes identifiquen las dos cantidades variables y se centren en la relación entre estas dos cantidades. Además, al no presentarles un registro de los valores correspondientes de las cantidades variables, es necesario que ellos construyan su propio registro y ulteriormente identifiquen patrones, reconozcan el cambio simultáneo entre las cantidades variables y creen la regla que permita expresar la generalización de las relaciones.

**Primera parte**

Dado que el día del cumpleaños de Pepito se acerca, su madre se ha dirigido hasta “Rolos pizzas” para cotizar el precio de la porción de pizzas y hacer el pedido, en la carta aparece que cada porción vale $5000, ayúdale a la madre de Pepito a averiguar cuánto debe pagar si compra 1 porción, 2 porciones, 3 porciones, 5 porciones, 18 porciones, 43 porciones o 95 porciones de pizza.

**Segunda parte**

Juanito le dice a la madre de Pepito que tiene servicio a domicilio con un costo de $ 3.000 independientemente del número de porciones de pizza que lleven hasta su casa. La madre de Pepito desea saber cuánto debería pagar en total teniendo en cuenta que el precio de cada porción de pizza es de $5000 y el costo del servicio a domicilio que es de $3000. ¡Una vez más necesita que le ayudes a contestar algunas preguntas que requiere responder para conocer el valor exacto a pagar!

*Imagen 9*. Problema 3 presentado en la tercera sesión

Para el desarrollo de este problema se les facilita material manipulativo: cinco billetes didácticos $5000 para unos y para otros estudiante billetes de $2000 y $5000 (ver imagen 10).

*Imagen 10.* Material manipulativo (billetes didácticos)

Materiales: billetes didácticos

En la primera parte del problema se espera investigar si los estudiantes realizaron algún registro de los valores correspondientes de las dos cantidades que varían o la forma cómo hallaron el valor a pagar por un determinado número de porciones de pizza compradas. También, se presenta 3 preguntas que involucran valores particulares pequeños (ver tabla 6).

*Tabla 6.* Preguntas problema 3, primera parte

| Preguntas |
| --- |
| 1. Ayúdale a la madre de Pepito a averiguar cuánto debe pagar si compra 3 porciones de pizza. ¿Cómo lo has averiguado? |
| 2. Ayúdale a la madre de Pepito a averiguar cuánto debe pagar si compra 5 porciones de pizza ¿Cómo lo has averiguado? |
| 3. Si la madre de Pepito pagara $15000 ¿Cuántas porciones de pizza habrá pedido? ¿Cómo lo sabes? |

Con estas preguntas se espera reconocer la configuración del *pensamiento de patrones recursivos* a través de las producciones escritas de los estudiantes. Como resultado, se aspira que ellos determinen el patrón recursivo de la variable dependiente e identifique que el patrón está variando de $5000 en $5000. Por ejemplo, una solución para la primera pregunta puede ser $5000 + 5000 + 5000 = 15000$.

Teniendo en cuenta que en esta primera parte del problema se hace énfasis en la relación funcional lineal proporcional y las preguntadas están orientadas hacia el análisis de la configuración de la forma del *pensamiento de patrones recursivos*, las preguntas 4, 5, 6 y 7 planteadas en la segunda parte están orientadas a que los estudiantes por medio de sus indagaciones establezcan la relación entre las dos cantidades variables y además reconozcan que existe un valor constante que interviene en la determinación del valor total a pagar: $3000 correspondiente al servicio a domicilio.

*Tabla 7.* Preguntas problema 3, parte 2

| Preguntas |
| --- |
| 4. Si a la casa de la madre de Pepito le han llevado 3 porciones de pizza, ¿cuánto debe pagar por las porciones de pizza y el servicio a domicilio? ¿Cómo lo sabes? |
| 5. Si ahora la madre de Pepito cuenta con 6 porciones de pizza en su casa, ¿cuánto debe pagar por las porciones de pizza y el servicio a domicilio? ¿Cómo lo sabes? |
| 6. Si sabes que la madre de Pepito por 3 amigos que asistan al cumpleaños debe pagar $18000 por las porciones de pizza y el domicilio, si llega 1 amigo más ¿cuánto más debería pagar? ¿Cómo lo has averiguado? |

7. Si han llegado 73 amigos al cumpleaños de Pepito ¿Cómo le explicarías a su madre lo que debe hacer para hallar el valor a pagar por las porciones de pizza y el servicio a domicilio? ¿Cómo lo sabes?

Las preguntas 4 y 5 están orientadas al desarrollo del *pensamiento de patrones recursivos*. Con la diferencia, respecto a las preguntas de la primera parte del problema que en este caso deben considerar un valor adicional ($3000). Así, un ejemplo que refleja esta forma de pensamiento es la siguiente sumar $\$5000 + \$5000 + \$5000$ al resultado agregarle $3000 o recurrir a valor encontrado anteriormente y sumarle el valor del servicio a domicilio. Posteriormente justificar que la madre de Pepito debe pagar $18000 por las porciones de pizza más el servicio a domicilio.

La pregunta 6 está enfocada a la configuración del *pensamiento covariacional*. Por lo tanto, se espera que los estudiantes identifiquen que por cada amigo que asista al cumpleaños de Pepito, su madre debe pagar $5000 más. Por ejemplo, una posible respuesta pude ser, $5000 más porque cada porción de pizza vale $5000.

Con la pregunta 7 a través de un valor grande se busca que en las producciones de los estudiantes den cuenta del *pensamiento de correspondencia*. Por lo cual, se pretende que reconozcan el valor constante y expresen la regla que permite encontrar un único valor "precio total" por algún valor "cantidad de porciones de pizza", lo cual lo pueden lograr a partir de multiplicar $73\ x\ 5000 = 365000$ y al resultado sumarle $3000 ($365000 + 3000 = 368000$) o también concluir que para encontrar el resultado es necesario multiplicar el precio de las porciones de pizza por el número de porciones solicitados más el servicio a domicilio que es de $3000.

### 3.5 Categorías de análisis

Para la construcción de las categorías de análisis se consideraron algunos elementos teóricos planteados por Rodríguez (2016); Fuentes (2014) y Pinto (2016), quienes proponen procedimientos específicos para la recolección y análisis de los datos.

A continuación, en la tabla 8 se presenta las categorías para el análisis de los datos

*Tabla 8* Categorías para el análisis de los datos.

| Categorías | Subcategorías |
|---|---|
| Formas de pensamiento funcional | Patrones recursivos<br>Covariacional<br>Correspondencia |
| Sistemas de representación | Verbal<br>Manipulativo<br>Pictórico<br>Tabular<br>Simbólica<br>Múltiple |
| Estrategias | Operatoria<br>Recursiva<br>Conteo<br>Duplicación<br>Respuesta directa<br>Particularización<br>Inadecuada |

A partir de investigaciones realizadas por Fuentes (2014) y Pinto (2016) se define la ***categoría sistemas de representación.*** La cual hace referencia a todas aquellas herramientas que permiten identificar los conceptos y procedimientos matemáticos, a través de los cuales los estudiantes registran y comunican el conocimiento matemático (Quitian & Sopo, 2013). Se entiende también por sistemas de representación como una característica de los conceptos y estructuras matemáticas al permitir representar algo, pero ese algo es distinto y existente a lo que la representación sustituye (Rico, 2009).

El pensamiento funcional involucra a las funciones que, como contenido matemático, conlleva una serie de sistemas de representación asociados. Cada uno de dichos sistemas de representación pone de manifiesto unos u otros significados de este contenido. Por ejemplo, el sistema de representación simbólico es muy importante para las funciones, incluyendo tanto los números como las letras. No obstante, no es uno de los sistemas de representación clave para los niños de educación primaria porque no están familiarizados con este tipo de sistema. El uso del lenguaje natural (sistema de representación verbal) es especialmente útil para los estudiantes de los primeros años de escolaridad porque les resulta cercano (Fuentes, 204). Los investigadores en Early algebra tienen una visión sobre los sistemas de representación asociados al pensamiento funcional y consideran que incluye, pero no restringe, el pensamiento con notación algebraica, y se pueden incorporar, además, el uso del lenguaje natural (oral y escrito), las tablas, lo pictórico entre otros.

A continuación, se presenta los sistemas de representación más relevantes para el contenido matemático en el que se centra la investigación.

*Representación verbal:* permite utilizar el lenguaje natural para exponer los resultados que van obteniendo, de forma cohesionada y estructurada y permiten expresar el proceso de razonamiento Cañadas y Figueiras (citado por Fuentes, 2014).

*Representación manipulativa:* posibilita que los estudiantes construyan un medio para hacer tangible el objeto matemático que se está trabajando a partir del empleo de material concreto y manipulativo (Pinto, 2106).

*Representación pictórica:* son aquellas representaciones visuales, generalmente dibujos, que ayuda al estudiante a organizar la información presente del enunciado, a plasmar lo que está pensando y a buscar una solución al problema al que se enfrenta (Fuentes 2014).

*Representación tabular:* aluden al uso de las tablas, las cuales permiten organizar datos, relacionar los valores de las dos cantidades involucradas, en otras palabras, establecer la relación que existe entre los valores de las columnas y los valores de las filas, posibilitando identificar una relación de dependencia entre las dos cantidades involucradas (fuentes, 2014).

*Representación simbólica:* se clasifican en dos subtipos: numéricas y algebraicas.

a. *Numérica:* aluden a la utilización de los números y sus operaciones para realizar un cálculo o cómputo.

b. *Algebraica:* hacen referencia al uso del lenguaje alfanumérico para realizar un cálculo o expresar un enunciado. En estas representaciones al utilizarse un carácter alfanumérico requieren un mayor nivel de abstracción por parte del estudiante (Merino 2012).

*Representación múltiple:* son aquellas que son producto de la combinación de dos o más representaciones (Merino 2012).

De acuerdo a investigaciones previas (e,g., Barbosa (2011), Morales, Cañadas, Molina, del Río y Moreno (2015), Cañadas, et al., (2016), Morales, et al., (2016)) se definió la ***categoría de estrategias*** entendida como los procedimientos empleados por los estudiantes para dar respuesta a las preguntas planteadas. A continuación, se mencionan algunas estrategias utilizadas a la hora de resolver problemas que involucran relaciones funcionales lineales y que permiten reconocer las *formas de pensamiento funcional*.

*Operatoria:* Se considera que los estudiantes utilizan la estrategia operatoria cuando recurren a una operación matemática, particularmente la multiplicación, al establecer la relación entre dos cantidades variables (Morales, et al., 2015).

*Recursiva:* los estudiantes emplean este tipo de estrategia cuando tienen en cuenta o recurren a la respuesta anterior para poder dar respuesta a la pregunta (Barbosa, 2011).

*Conteo:* (con apoyo de dedos, con material manipulativo y con dibujos). Se presenta cuando los estudiantes acuden al conteo para encontrar la respuesta de la pregunta planteada (Barbosa, 2011).

*Respuesta directa:* hace referencia a las respuestas en las cuales únicamente escriben un número sin dar justificación alguna (Fuentes, 2014).

*Duplicación:* esta estrategia es utilizada cuando suman dos valores iguales para dar una solución (Cañadas, et al., 2016).

*Particulariza:* esta estrategia se lleva acabo cuando a una pregunta general los estudiantes responden por medio de un caso particular (Morales et al., 2016).

*Inadecuada:* se propicia esta estrategia cuando las producciones escritas por los estudiantes "no se corresponden con la relación funcional involucrada" (Morales et al., 2016).

## 3.6 Análisis preliminar de los problemas

En este apartado se presenta un análisis preliminar de cada una de las preguntas que conforman los tres problemas. Se considera los sistemas de representación y las estrategias como (categorías de solución) respuesta a cada una de las preguntas de los problemas propuestos (ver tablas 9,10 y 11), a través de las cuales se caracteriza las *formas de pensamiento funcional*. Las categorías de solución se entienden como posibles respuestas de los estudiantes. Dichas respuestas no pretenden dar un juicio de las formas de pensar funcionalmente, en otras palabras, están designadas solo para describir la forma de expresar las soluciones y no necesariamente las formas de pensamiento. Así, un análisis preliminar sobre la base de estas categorías, es importante, porque posibilita un análisis descriptivo que sugiere ciertas preguntas y respuestas relacionadas con la emergencia, evolución y conexión de las *formas de pensamiento funcional*. De igual forma, estas categorías pueden ser aplicadas en futuras investigaciones con intereses comunes y se basan en los hallazgos de las investigaciones previas.

Tabla 9 Categorías de solución para el problema 1.

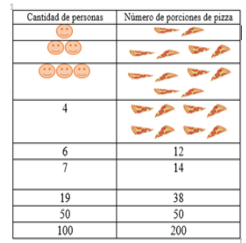
| Preguntas | Sistemas de representación | Estrategias |
|---|---|---|
| 1. ¿Cómo encontraste el número de porciones de pizza que debe preparar Juanito si llegan 4 personas? | ***pictórica:***<br><br><br>Dibujar las correspondientes porciones de pizza para cada carita que aparece en la columna izquierda. Por lo tanto, cuando se pregunta por 4, dibujar 8 porciones de pizza. | ***Conteo de dos en dos:*** contar las caritas de dos en dos. Por ejemplo, 2, 4, 6 y 8. |
| 2. ¿Cómo encontraste el número de porciones de pizza que debe preparar Juanito si llegan 7 personas? | ***Manipulativa:*** ubicar en la mesa una ficha de una carita y dos fichas de porciones de pizza, dos caritas cuatro porciones de pizza, así sucesivamente de acuerdo al número de cantidad de personas que aparezcan en la tabla y 7 caritas 14 porciones de pizza. | ***Recursiva:*** sumarle 2 al resultado anterior. Por ejemplo:<br>12+2=14 |
| 3. Si hay 3 personas en "Rolos pizza" y llega 1 persona más, ¿cuántas porciones más debe preparar Juanito? ¿Cómo lo sabes? | ***Tabular:*** observar en la tabla funcional que cada vez que aumenta una carita aumentan dos porciones de pizza**.** | ***Recursiva:*** reconocer que para tres personas son seis porciones de pizza, entonces si llega una persona más serán dos porciones de pizza más, los cuales se le suman a las seis porciones. |
| 4. Si hay 50 personas en "Rolos pizza" y llega 1 persona más, ¿cuántas porciones más debe preparar Juanito? ¿Cómo lo sabes? | ***Verbal:*** manifestar que al llegar una persona más, Juanito debe preparar dos porciones de pizza más o que ocho, porque en la anterior pregunta se preguntó por cuatro personas. | ***Operatoria:*** decir que es: 51, luego multiplicar 51x 2=102 |
| 5. ¿Cómo encontraste el número de porciones de pizza que debe preparar Juanito si llegan 100 personas a "Rolos pizza"? | ***Simbólico numérico-algebraico:*** interviene las operaciones y el uso de variables. Por ejemplo, multiplicar 100x 2, o asignar una variable para calcular cualquier cantidad de personas que lleguen a la pizzería. $\begin{array}{r} 100 \\ \underline{x\ \ 2} \\ 200 \end{array}$ Simbólico numérico y simbólico algebraico $2x$ | ***Duplicación:*** reconocer que el número de porciones de pizza es el doble de la cantidad de personas, así pues $100 + 100 = 200$ |
| 6. Juanito quiere hacer un registro de la cantidad de porciones de pizza que debe preparar, ¿cómo puede hallar el número de porciones de pizza teniendo en cuenta el número de personas que han llegado a "Rolos pizza"? | ***Verbal:*** argumentar que para hallar el número de porciones de pizza se debe multiplicar 2 por la cantidad de personas que lleguen a la pizzería. | ***particularización:*** emplear casos particulares para responder la pregunta 6, es decir:<br><br>$100x2 = 200$ |

*Tabla 10* Categorías de solución para el problema 2.

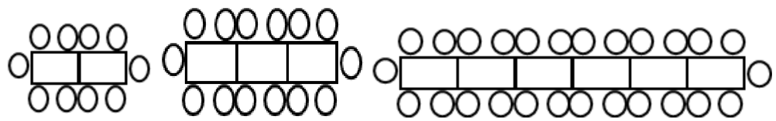
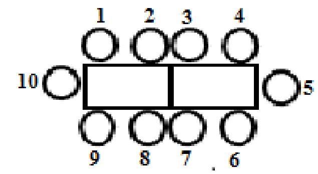
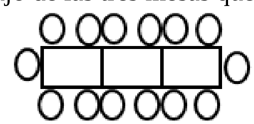
| Preguntas | Sistemas de representación | Estrategias |
|---|---|---|
| 1. ¿Cuántos amigos de Pepito pueden sentarse a comer pizza en 1 mesa?<br>2. ¿Cuántos amigos de Pepito pueden sentarse a comer pizza si se juntan 2 mesas?<br>3. ¿Cuántos amigos de Pepito pueden sentarse a comer pizza si se juntan 3 mesas?<br>4. ¿Cuántos amigos de Pepito pueden sentarse a comer pizza si se juntan 6 mesas? | ***Pictórica:*** realizar un dibujo de la manera que deben ir ubicadas las mesas y los amigos de Pepito en las mesas, tomando como referencia el ejemplo presenta<br><br>***Verbal:*** explicar que para encontrar la cantidad de amigos de Pepito que se pueden sentar a comer pizza en las mesas es necesario sumar cuatro niños por cada mesa. | ***Conteo:*** contar las fichas de caritas felices o los dibujos. Por ejemplo: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.<br><br><br>***Operatoria:*** $14 + 14 = 28$ justificando que si en tres mesas caben 14 personas en 6 mesas caben 28 personas. |
| 5. Sabemos que al juntar 2 mesas se pueden sentar 10 personas, si se coloca 1 mesa más, ¿cuántas personas más pueden sentarse? ¿Cómo lo has averiguado? | ***Pictórico*** Realizar un dibujo de las tres mesas que debe juntar.<br> | ***Recursiva*** Como ya conoce el número de persona que se pueden sentar a comer pizza en 10 mesas a este resultado le va a añadir una mesa más y las personas correspondientes a esa nueva mesa para encontrar el resultado. |
| 6. Sabemos que al juntar 10 mesas se pueden sentar 42 personas, si se coloca 1 mesa más, ¿cuántas personas más pueden sentarse? ¿Cómo lo has averiguado? | ***Simbólico numérico:*** Emplea operaciones matemáticas para dar respuesta a la pregunta.<br>Por ejemplo: sumar las mesas y la cantidad de niños que se pueden sentar a comer pizza en ellas. | ***Operatoria:*** Recurrir a la suma para encontrar la solución.<br>$\begin{array}{r}10\\ +1\\ \hline 11\end{array} \; y \; \begin{array}{r}42\\ +4\\ \hline 46\end{array}$ |
| 7. Si Pepito ha juntado 50 mesas, ¿cuántos amigos pueden sentarse a comer pizza en su fiesta de cumpleaños? | ***Simbólico numérico:*** Recurrir a la multiplicación y a la suma para encontrar el valor pedido, multiplica las 50 mesas por los 4 niños que se pueden sentar en los lados de las mesas y a este resultado le suma 2 que son los niños que se pueden sentar en los extremos de las mesas. | ***Operatoria***<br>$\begin{array}{r}50\\ x4\\ \hline 200\end{array} \; y \; \begin{array}{r}200\\ +2\\ \hline 202\end{array}$ |
| 8. Si sabes que hay 30 mesas, ¿de qué forma le explicarías a Pepito cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a comer pizza?<br>Explica como lo has pensado | ***Verbal:*** Le diría a Pepito que multiplique el número de mesas que ubico por 4 niños que van en los lados de las mesas y que al resultado le sume 2 que son los niños que deben ir en los extremos de las mesas. | ***Operatoria:***<br>$\begin{array}{r}30\\ x4\\ \hline 120\\ +2\\ \hline 122\end{array}$ |

*Tabla 11* Categorías de solución para el problema 3.

| Preguntas | Sistemas de representación | Estrategias |
|---|---|---|
| 1. Ayúdale a la madre de Pepito a averiguar cuánto debe pagar si compra 3 porciones de pizza ¿Cómo lo has averiguado? | ***Manipulativo:*** encontrar la cantidad de dinero que debe pagar la madre de Pepito utilizando los billetes, entonces como el precio de una porción de pizza es de $5000 toma un billete de cinco mil, luego como son tres porciones de pizza entonces tomar tres billetes y realizar su respectiva suma para encontrar el total a pagar | ***Conteo:*** contar los billetes de cinco en cinco. |
| 2. Ayúdale a la madre de Pepito a averiguar cuánto debe pagar si compra 5 porciones de pizza ¿Cómo lo has averiguado? | ***Simbólico numérico:*** sumar el valor de cada billete. Por ejemplo***:*** $5000 + 5000 + 5000 + 5000 + 2000 + 2000 + 500 + 500 = 25000$ | ***Recursiva:*** conociendo el valor a pagar por tres porciones de pizza, sumar este, al valor total a pagar por dos porciones de pizza cuando se pregunta por 5 porciones de pizza, quedando así: $\begin{array}{r} 15000 \\ \underline{+\,10000} \\ 25000 \end{array}$ |
| 3. Si la madre de Pepito pagara $15000 ¿Cuántas porciones de pizza habrá pedido? ¿Cómo lo sabes? | ***Simbólico numérico:*** emplear la operación multiplicativa. $\begin{array}{r} 5000 \\ \underline{x\quad 3} \\ 15000 \end{array}$ | ***Operatoria:*** encontrar el número de porciones de pizza solicitados a través de la multiplicación de esta manera 5000 x 3=15000 o recurrir a la división para encontrar la respuesta de estafa forma. |
| 4. Si a la casa de la madre de Pepito le han llevado 3 porciones de pizza, ¿cuánto debe pagar por las porciones de pizza y el servicio a domicilio? ¿Cómo lo sabes? | ***Verbal:*** explicar que debe pagar $18000, porque es el resultado de sumar $15000 que es el valor de las tres porciones de pizza más $3000 del servicio a domicilio. | ***Operatoria:*** realizar la siguiente operación aditiva 5+5++3=18 |
| 5. Si ahora la madre de Pepito cuenta con 6 porciones de pizza en su casa, ¿cuánto debe pagar por las porciones de pizza y el servicio a domicilio? ¿Cómo lo sabes? | ***Simbólico numérico:*** exponer que $33000 porque ha realizado la siguientes operaciones: $\begin{array}{r} 5000 \\ \underline{x\quad 6} \\ 30000 \end{array}$ | ***Operatoria:*** $\begin{array}{r} 5000 \\ \underline{x\quad 6} \\ 30000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30000 \\ \underline{+\ \ 3000} \\ 33000 \end{array}$ |
| 6. Si sabes que la madre de Pepito por 3 amigos que asistan al cumpleaños debe pagar $18000 por las porciones de pizza y el domicilio, si llega 1 amigo más ¿cuánto más debería pagar? | ***Manipulativo:*** tomar tres billetes de cinco mil, teniendo en cuenta que la suma de los tres más el servicio a domicilio es de $18000 como se pregunta por una persona más, tomar un billete de cinco mil y realizar su respectiva suma. | ***Recursiva:*** recurrir al valor conocido que es de $18000 y a este sumarle $5000, para un total de $23000. |
| 7. Si han llegado 73 amigos al cumpleaños de Pepito ¿Cómo le explicarías a su madre lo que debe hacer para hallar el valor a pagar por las porciones de pizza y el servicio a domicilio? ¿Cómo lo sabes? | ***Verbal:*** explicar que para hallar el valor a pagar por las porciones de pizza, debe multiplicar 73 x 5 y a dicho resultado sumarle $3000 del servicio a domicilio para obtener el total a pagar. | ***Operatoria****:* realizar la siguiente operación multiplicativa y aditiva. Por ejemplo: $\begin{array}{r} 73 \\ \underline{x\,5} \\ 365 \end{array}\ luego\ \begin{array}{r} 365 \\ \underline{+\ \ 3} \\ 368 \end{array}$ |

# CAPÍTULO IV

# RESULTADOS Y CONCLUSIONES

## 4.1 Resultados de la implementación

Los resultados se organizan en unas tablas que retoman las categorías previamente construidas; las mismas que fueron empleadas en el análisis preliminar de los problemas. Para hacer el consolidado de los resultados se construyen dos tablas (tabla 12 y tabla 13), una por cada grado, las cuales fueron ubicas en los anexos (ver anexo 2 y 3). Adicionalmente, se elabora una pequeña descripción sobre los resultados obtenidos por los estudiantes, de grado tercero, frente al problema 1-pregunta 4 con el fin de establecer un modelo para su interpretación.

Así, los resultados obtenidos en el problema 1-pregunta 4, indican que respecto a los sistemas de representación, 7 estudiantes emplearon el verbal **(V)**, 1 estudiante el pictórico **(P)** y 1 el simbólico numérico **(Sn)**. En relación con las estrategias empleadas, 4 estudiantes emplearon la operatoria **(O)**, 1 estudiante la recursiva **(R)**, 1 estudiante la respuesta directa **(RD)**, 1 estudiante el conteo **(Ct)**, 1 estudiante uso una estrategia inadecuada **(In)**, 1 estudiante empleó la duplicación **(Du)** y ningún estudiante para la estrategia de particularización **(Pa)**. Finalmente, para ese caso se indica que 2 estudiantes configuraron la forma de *pensamiento de patrones recursivos* **(PR)**, 4 estudiantes la forma de *pensamiento covariacional* **(CV)** y 1 estudiantes la forma de *pensamiento de correspondencia* **(CR)**.

Es importante mencionar que, a diferencia de las investigaciones realizadas por Morales, et al. (2015) y Cañadas, et al. (2016) quienes proponen las estrategias **O, R, RD, Ct, Pa, In, Du**; en esta investigación se reconoció la necesidad de construir una nueva categoría llamada: estrategia múltiple (*Em*), puesto que en el trabajo matemático de algunos estudiantes fue recurrente el *uso de más de una estrategia para encontrar la solución.*

## 4.2 Análisis de los resultados

En este apartado se retoman las categorías de análisis construidas en el capítulo 3 con el objetivo de describir e interpretar los resultados obtenidos a partir de las producciones escritas de los estudiantes y así trazar la ruta para llevar a cabo un análisis detallado. De esta manera, se pone especial énfasis en los sistemas de representación, las estrategias y las *formas de pensamiento funcional* que lograron identificarse en la actividad matemática desplegada por cada uno de los estudiantes, tanto individualmente como colectivamente (grado tercero y grado cuarto).

Se analizan los resultados obtenidos por los estudiantes de grado tercero y cuarto conjuntamente, debido a que las producciones elaboradas por ambos grados presentan diversas similitudes. Para ejemplificar y diferenciar la actividad matemática puesta en juego por cada uno de ellos, se decidió etiquetarlos empleando la letra T para grado tercero y la letra C para grado cuarto seguido de un número del 1 al 8. Además, cada uno de los problemas que conforma la secuencia se analiza puntualmente y después se plantean algunas hipótesis, así como interpretaciones e inferencias sobre la actividad matemática configurada en dicho grado. Finalmente se establecen algunas hipótesis y conclusiones características de las *formas de pensamiento funcional* en estos grados.

El análisis termina con el contraste entre las formas de pensamiento funcional configuradas en los estudiantes de grado tercero y grado cuarto. Dicha comparación se sustenta, al igual que los análisis consignados, en resultados derivados de otras investigaciones (e.g., Pinto & Cañadas, 2017; Payne, 2012) con intereses comunes.

### 4.2.1 Análisis de las producciones de los estudiantes

***<u>Análisis de los sistemas de representación</u>***

De acuerdo con los resultados obtenidos en las tablas 12 y 13 (ver anexos 2 y 3) se observa que la mayoría de estudiantes emplean los sistemas de representación: *verbal, simbólico numérico*; y *manipulativo* y, en menor medida los sistemas de representación: *pictórico* y *tabular*. También se destaca el empleo de *representaciones múltiples* como una combinación al utilizar dos o más sistemas de representación al resolver una misma pregunta.

Resulta importante destacar la forma en cómo los estudiantes utilizan diferentes sistemas de representación a medida que desarrollan los problemas. En principio, para responder las primeras preguntas planteadas, la mayoría de los estudiantes emplearon el *sistema de representación manipulativo* cuando se trataba de valores pequeños. Por ejemplo, en la imagen 11 se observa que para el primer problema, la estudiante T4 empleó dicho sistema para responder acertadamente sobre el número de porciones de pizza para dos personas. Además, al parecer, el uso del material manipulativo fue importante para que ella acertará en la tercera fila de la tabla, **reconociera el patrón** y **construyera relaciones** para llenarla en su totalidad. Si bien, en la imagen se observa que para 3 personas se corresponden 4 porciones de pizza, al examinar la producción escrita de esta estudiante se logran apreciar tales aspectos (ver imagen 12).

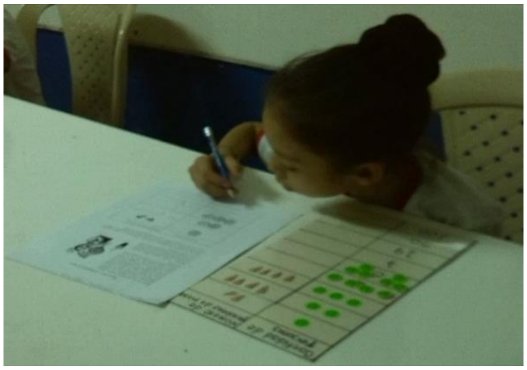
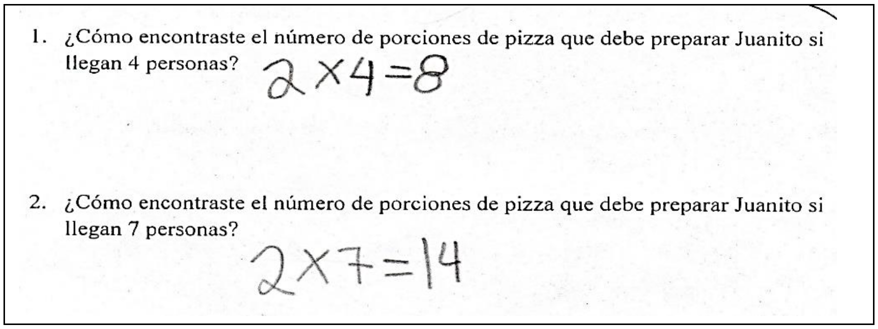


*Imagen 11.* Estudiante T4 empleando el sistema de representación manipulativo

A partir de este hecho se puede inferir que después de emplear el *sistema de representación manipulativo* la estudiante logra encontrar el patrón numérico y la relación entre las dos cantidades variables para determinar el resultado para la variable dependiente (Pinto, 2016).



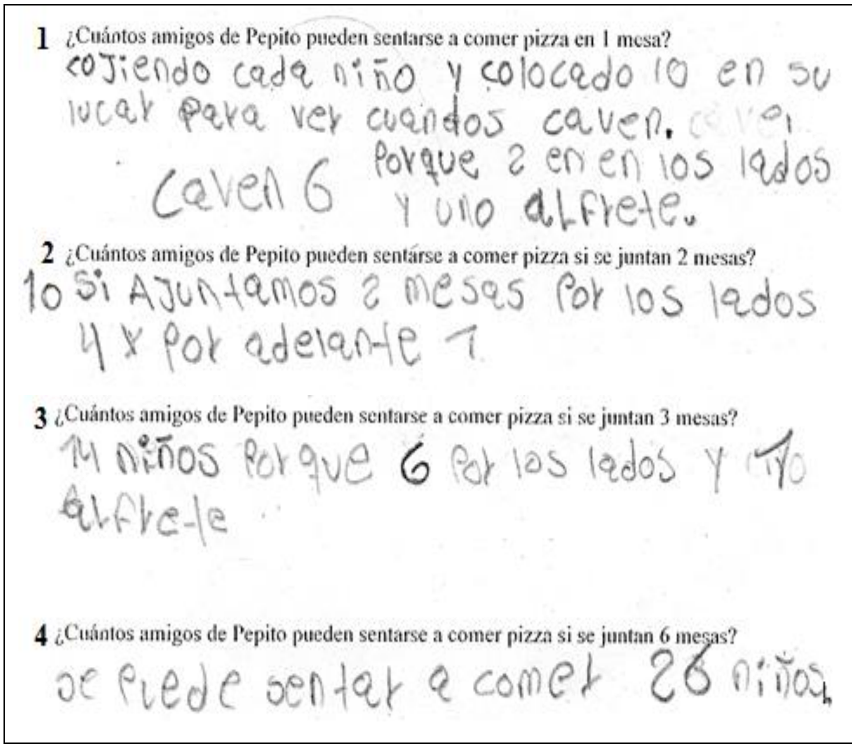
1. ¿Cómo encontraste el número de porciones de pizza que debe preparar Juanito si llegan 4 personas? $2 \times 4 = 8$

2. ¿Cómo encontraste el número de porciones de pizza que debe preparar Juanito si llegan 7 personas? $2 \times 7 = 14$

*Imagen 12.* Sistema de representación simbólico numérico empleado por T4. Problema 1

Posterior al uso del *sistema de representación manipulativo*, una vez identificado el patrón y la relación entre las dos cantidades que varían, es usual que los estudiantes utilicen el *sistema de representación simbólico numérico* expresando sus respuestas por medio de operaciones. La imagen 12 revela este hecho, pues para encontrar el resultado del número de porciones de pizza, la estudiante T4 multiplicó el patrón (2) por la cantidad de personas. Al parecer este sistema de representación es práctico para ellos, puesto que la gran mayoría lo emplea para indicar sus respuestas.

Por otra parte, es preciso enfatizar que el uso del *sistema de representación manipulativo* favoreció en los estudiantes el empleo del *sistema de representación verbal*, al expresar con sus propias palabras lo que hicieron para darle solución a las preguntas. Por ejemplo, en relación con el problema 2, la imagen 13 permite observar la manera en la cual el estudiante C2 explica con sus propias palabras cómo hallar el número de amigos de Pepito que pueden sentarse a comer pizza en una mesa. La descripción dada por C2 permite inferir que este tomó las fichas (mesas y caritas felices) y las ordenó de acuerdo a la imagen presentada en el problema. De esta manera para la primera pregunta concluye que van dos amigos a los lados (superior e inferior) y uno al frente (lados laterales), para un total de seis personas. Al parecer el uso recurrente de este sistema de representación se debe a que en la mayor parte de las preguntas planteadas se pidió justificar las respuestas, por lo que se interpreta que les resultó más fácil o más habitual utilizar dicho sistema en lugar de otro (Merino et al., 2013).


1 ¿Cuántos amigos de Pepito pueden sentarse a comer pizza en 1 mesa?
coJiendo cada niño y colocado lo en su lucar para ver cuandos caven. Caven 6 Porque 2 en en los lados y uno alfrete.
2 ¿Cuántos amigos de Pepito pueden sentárse a comer pizza si se juntan 2 mesas?
10 si AJuntamos 2 mesas Por los lados 4 x Por adelante 1
3 ¿Cuántos amigos de Pepito pueden sentarse a comer pizza si se juntan 3 mesas?
14 niños Porque 6 Por los lados y 1 alfrete
4 ¿Cuántos amigos de Pepito pueden sentarse a comer pizza si se juntan 6 mesas?
se Puede sentar a comer 26 niños

| **Transcripción** |
|---|
| **1.** CoJiendo cada niño y colocando lo en su lucar para ver cuantos caven. Caven 6 porque en en los lados y uno al frente. |
| **2.** 10 si Ajuntamos 2 mesas por los lados 4 x por adelante 1 |
| **3.** 14 niños porque 6 por los lados y 1 al frente |
| **4.** se puede sentar a comer 26 niños. |

*Imagen 13.* Sistema de representación verbal empleado por C2. Problema 2

Otro sistema de representación que les posibilitó identificar el patrón y la relación entre las dos cantidades variables involucradas es el *sistema de representación pictórico*. En la imagen 14, se muestra un ejemplo de la actividad realizada por cuatro estudiantes de grado cuarto al completar la tabla en el primer problema.

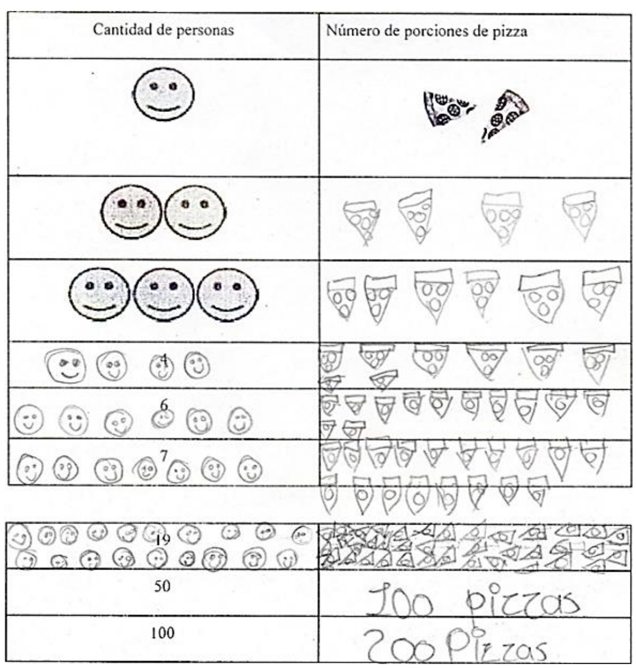
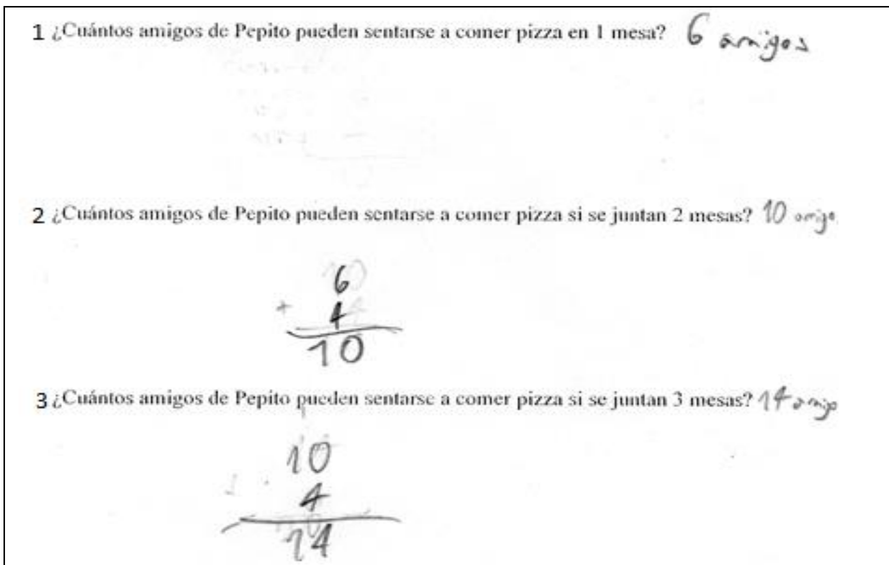


*Imagen 14*. Uso del sistema de representación pictórico por C1. Problema 1

En la imagen 14 se puede evidenciar que la estudiante C1 utilizó el *sistema de representación pictórico* para hallar los resultados de la columna del número de porciones de pizza. En este sentido, hay que mencionar que, la estudiante dibujó las porciones de pizza considerando la cantidad de caritas dadas en cada una de las filas de la columna de la variable independiente. Así, la estudiante estableció la relación entre las dos cantidades variables y posteriormente reconoció que el número de porciones de pizza es el doble de la cantidad de personas, por lo que para los últimos valores de la variable independiente (50 y 100) no fue necesario el uso del mismo sistema de representación, sino que utilizó el sistema de representación simbólico numérico y expuso los resultados a través de números. De esta manera, resulta interesante observar que a través del uso del sistema de representación pictórico reconoció la relación entre la cantidad de personas y el número de porciones de pizza.

Así mismo, el sistema de representación pictórico precede al uso del sistema de representación simbólico numérico. Por ejemplo, en la imagen 15 pareciera que el estudiante C7 al observar la ilustración que aparece al inicio del problema 2, lograra identificar el patrón de la variable independiente y la constante, puesto que para responder la segunda pregunta él recurrió al valor obtenido en la primera pregunta y a este valor le sumó el patrón (4) y seguidamente empleó el mismo proceso para la pregunta 3.



1 ¿Cuántos amigos de Pepito pueden sentarse a comer pizza en 1 mesa? 6 amigos

2 ¿Cuántos amigos de Pepito pueden sentarse a comer pizza si se juntan 2 mesas? 10 amigo

$$\begin{array}{r} 6 \\ +\ 4 \\ \hline 10 \end{array}$$

3 ¿Cuántos amigos de Pepito pueden sentarse a comer pizza si se juntan 3 mesas? 14 amigo

$$\begin{array}{r} 10 \\ 4 \\ \hline 14 \end{array}$$

**Transcripción**

**1**. 6 amigos

**2.** 10 amigo

**3.**

$$\begin{array}{r} 6 \\ +4 \\ \hline 10 \end{array}$$

**4.**

$$\begin{array}{r} 10 \\ +\ 4 \\ \hline 14 \end{array}$$

*Imagen 15*. Sistema de representación simbólico numérico, utilizado por C7. Problema 2

Otro elemento que se destaca dentro las producciones escritas por algunos estudiantes es el uso de más de un sistema de representación, tales como: pictórico-simbólico numérico, verbal-pictórico y verbal-simbólico numérico. En las imágenes 16, 17 y 18 se observa la combinación de estos sistemas de representación desarrollados en el segundo problema.

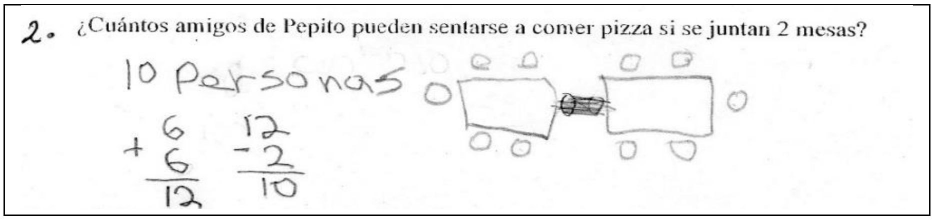


*Imagen 16.* Combinación de sistema de representación empleado por T1. Problema 2

En la imagen 16, se observa cómo T1 empleó los *sistemas de representación pictórico y simbólico numérico* de manera simultánea, al recurrir a los dibujos para organizar la información y a las operaciones matemáticas para hallar la respuesta de la pregunta planteada. En principio, el estudiante representó las dos mesas y los seis amigos que pueden sentarse en cada una. Posteriormente sumó el número de amigos que realizó en cada mesa "6+6=12". Luego tachó los dos amigos que impedían unir las mesas y al resultado (12) le restó 2 ("$12 - 2 = 10$"). Es importante mencionar que el proceso realizado por el estudiante le permitió identificar el patrón, la relación entre las dos cantidades variables involucradas y la presencia de un valor constante. Por lo cual, al preguntar por la cantidad de amigos que pueden sentarse si se juntan tres mesas, T1 respondió de la siguiente manera: "14 personas $10 + 4 = 14$".

Por otra parte, el empleo de los *sistemas de representación pictórico y verbal,* son comunes en las producciones elaboradas por los estudiantes de grado tercero en el transcurso del desarrollo del segundo problema quizá por el mayor nivel de dificultad que representa respecto al primer problema, dado que en el segundo problema se incluye una constante más (2). También, se infiere que, recurren al sistema de representación pictórico, debido a que no reconocen con facilidad el patrón (4) y la regla que permite determinar el número de amigos que pueden sentarse a comer pizza dado un número de mesas. Tal hecho, se puede observar en la Imagen 17 en la cual el estudiante T5 para hallar la solución de la pregunta, dibujó las 11 mesas y en cada mesa dibujó los cuatro amigos que pueden sentarse en cada una de estas, así mismo los dos amigos que van a los extremos. Finalmente, argumenta de forma verbal que halló la respuesta al dibujar las 11 mesas y en estas las personas.

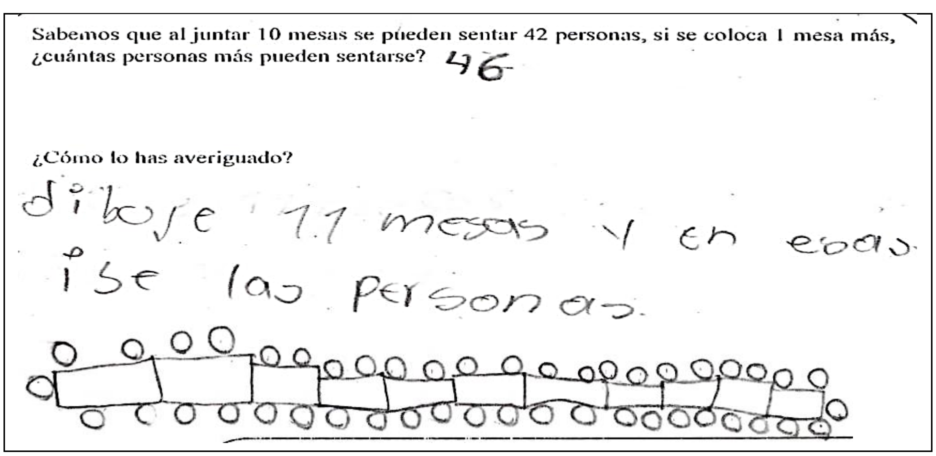
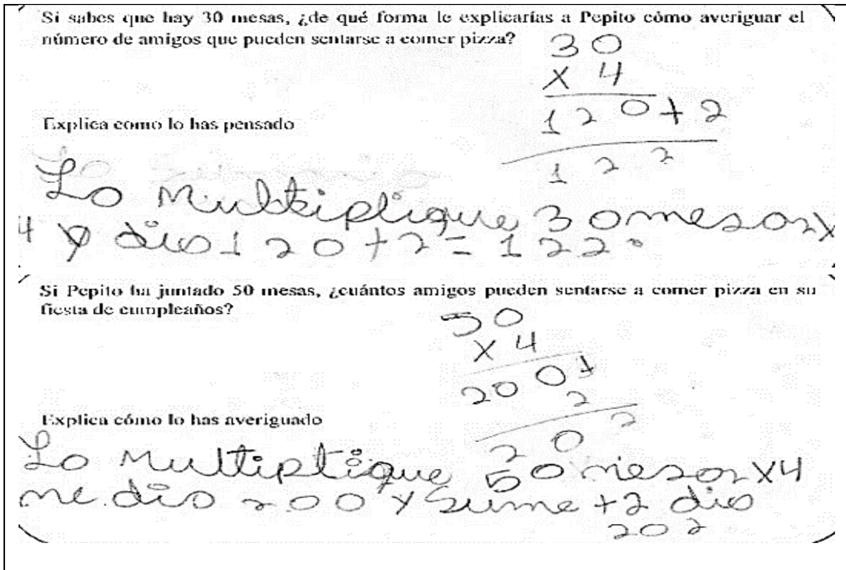


*Imagen 17.* Sistema de representación verbal y pictórico empleado por T5. Problema 2

En relación con los *sistemas de representación simbólico numérico y verbal,* múltiples producciones dan cuenta de estos sistemas de representación en el desarrollo de los tres problemas. En la Imagen 18 se puede apreciar la presencia de estos sistemas de representación. El primero se refleja al multiplicar $30x4 = 120$ (número de mesas por cantidad de amigos de los lados laterales) y a este resultado le sumó los dos amigos que van a los extremos $120 + 2 = 122$ y posteriormente, justificó su procedimiento argumentando que multiplicó las 30 mesas por 4 y al resultado le sumó dos. Por lo tanto, se evidencia que la estudiante C6 empleó conjuntamente estos sistemas de representación, sin embargo no es necesario analizarlos simultáneamente para que adquieran significado, puesto que cada uno aporta información correcta para cada pregunta.


Si sabes que hay 30 mesas, ¿de qué forma le explicarías a Pepito cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a comer pizza?

Explica como lo has pensado

Lo Multiplique 30 mesas x 4 y dio 120 + 2 = 122

Si Pepito ha juntado 50 mesas, ¿cuántos amigos pueden sentarse a comer pizza en su fiesta de cumpleaños?

Explica cómo lo has averiguado

Lo Multiplique 50 mesas x4 me dio 200 y sume +2 dio 202

**Transcripción**

**7.**

$$\begin{array}{r} \mathbf{30} \\ \underline{\boldsymbol{X}\,\mathbf{4}} \\ \underline{\mathbf{120+2}} \\ \mathbf{122} \end{array}$$

Lo multiplique 30 mesas x 4 y me dio $120 + 2 = 122$

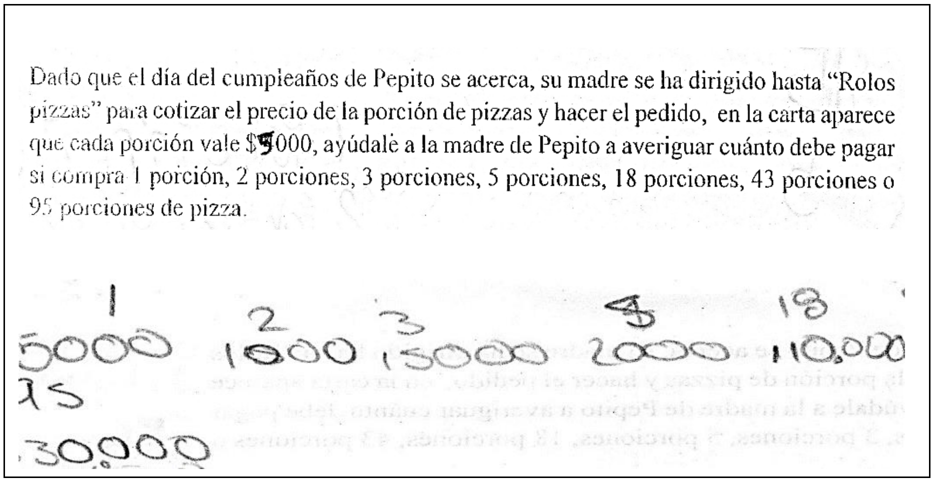
**8.**

$$\begin{array}{r} \mathbf{50} \\ \underline{\boldsymbol{X}\,\mathbf{4}} \\ \underline{\mathbf{200+2}} \\ \mathbf{202} \end{array}$$

Lo multiplique 50 mesas x 4 y me dio $200 + 2 = 202$

*Imagen 18.* Sistema de representación simbólico numérico y verbal utilizado por C6. Problema 2

Otro aspecto importante que se observa en las producciones escritas por cuatro estudiantes (T2, T3, T6 y C2) en el tercer problema hace referencia al uso del *sistema de representación tabular*, el cual “proporciona una visión sobre las nuevas formas de pensamiento de las respuestas potenciales de los niños a las funciones” (Tanisli, 2011. P.3 ). En la imagen 19, se muestra un ejemplo en el que T2 establece la relación entre el número de amigos que llegan a la casa de Pepito y el valor a pagar por cada porción de pizza. Si bien, presenta errores al escribir algunos valores como 1000 en lugar de 10000 para 2 personas y 2000 en lugar de 20000 para 5 personas, se puede observar que a cada valor de la variable independiente le asigna el valor correspondiente en la variable dependiente.



Dado que el día del cumpleaños de Pepito se acerca, su madre se ha dirigido hasta "Rolos pizzas" para cotizar el precio de la porción de pizzas y hacer el pedido, en la carta aparece que cada porción vale $5000, ayúdale a la madre de Pepito a averiguar cuánto debe pagar si compra 1 porción, 2 porciones, 3 porciones, 5 porciones, 18 porciones, 43 porciones o 95 porciones de pizza.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 18 |
|---|---|---|---|---|
| 5000 | 10000 | 15000 | 20000 | 110.000 |

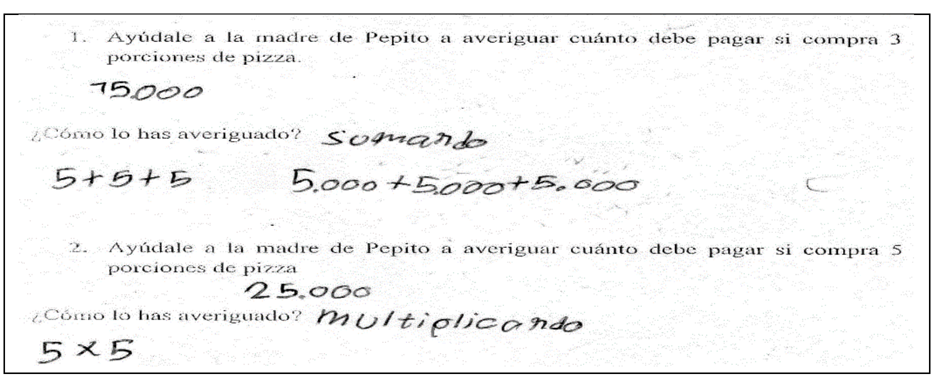
15
30000

*Imagen 19*. Empleo del sistema de representación tabular por parte de T2. Problema 3

### *Análisis sobre estrategias*

En relación con las estrategias, se observa que los estudiantes utilizaron con frecuencia: la estrategia *recursiva*, de *conteo* y en mayor medida la estrategia *operatoria*. Mientras que las estrategias de respuesta *directa*, *duplicación*, *particularización* e *inadecuada* fueron empleadas por muy pocos estudiantes, razón por la cual no se hará énfasis sobre estas. En cuanto al empleo de la combinación de *estrategias múltiples* se evidencia la *estrategia recursiva-operatoria*.

Un aspecto que se destaca dentro del empleo de las estrategias es la manera en cómo estas se convierten en un puente de transición a medida que desarrollan las preguntas. Al inicio, utilizan la *estrategia recursiva* o de *conteo*, ulteriormente emplean otras estrategias. Por ejemplo, en la imagen 20 se evidencia que para responder la primera pregunta del tercer problema, el estudiante T4 sumó "$5000 + 5000 + 5000$" para hallar la respuesta. De esta manera, utilizó la *estrategia recursiva* al identificar el patrón y al sumarlo al valor anterior para averiguar el siguiente, es decir $5000 + 5000 = 10000$, luego $10000 + 5000 = 15000$. Así, T4 se centró en el cambio de valores de la variable dependiente (valor de las porciones de pizza) y calculó el resultado a partir de la suma reiterada.



1. Ayúdale a la madre de Pepito a averiguar cuánto debe pagar si compra 3 porciones de pizza.

15000

¿Cómo lo has averiguado? sumando

5+5+5 5.000+5000+5.000

2. Ayúdale a la madre de Pepito a averiguar cuánto debe pagar si compra 5 porciones de pizza

25.000

¿Cómo lo has averiguado? multiplicando

5×5

*Imagen 20*. Estrategia recursiva empleado por T4. Problema 3

Siguiendo esta misma línea se puede afirmar que el uso de la *estrategia recursiva* le permitió al estudiante reconocer *la estrategia operatoria*. Puesto que, al parecer T4 para la primera pregunta reconoció que al sumar tres veces 5000 o al multiplicar 5 por 3 el resultado es igual. Por lo que, para la segunda pregunta (ver Imagen 20) multiplicó 5 por el número de porciones de pizza (5) para calcular el total a pagar. De esta manera, al establecer la relación entre el número de amigos que llegan al cumpleaños de Pepito (variable independiente) y el valor de la porción de pizza (variable dependiente), el estudiante calculó el valor de la variable dependiente al multiplicar el patrón por el valor de la variable independiente.

En cuanto a la presencia de la *estrategia de conteo*, se hace evidente en la actividad matemática desarrollada por algunos estudiantes al contar con ayuda de los dedos, con las fichas (caritas felices, porciones de pizza y billetes), y los dibujos que ellos realizan. En la Imagen 21, se observa cómo la estudiante C1 para hallar la solución de las primeras preguntas del segundo problema dibujó y se infiere que, posteriormente contó las fichas que representa los amigos de Pepito que pueden sentarse en las mesas. Por ejemplo, para la pregunta 3 dibujó las tres mesas seguidas y en cada una de ellas dos amigos que pueden sentarse en la parte superior e inferior de cada una, así mismo 1 amigo que va al lado lateral derecho y otro que va al lateral izquierdo.

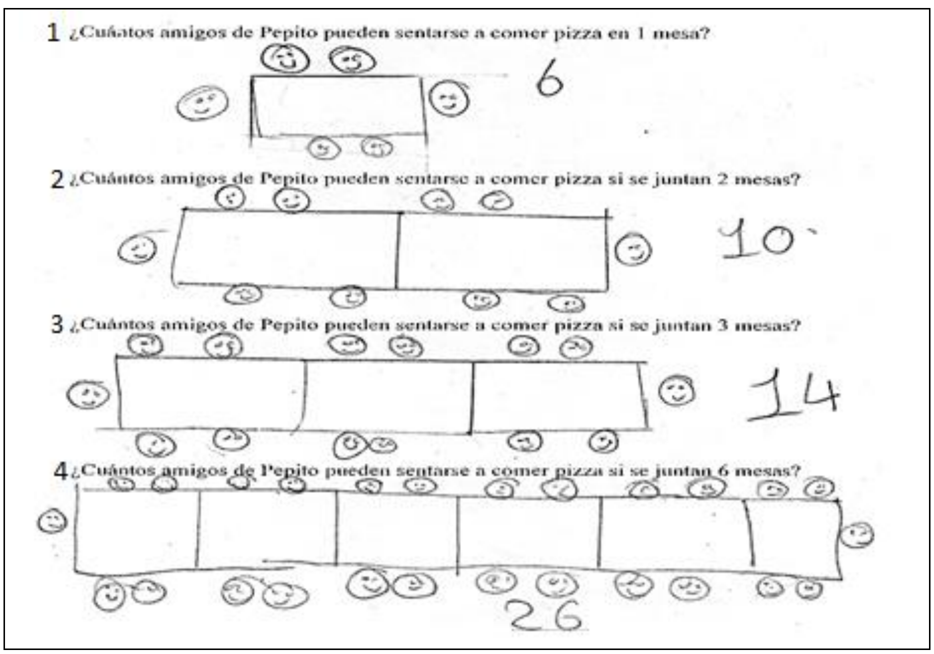
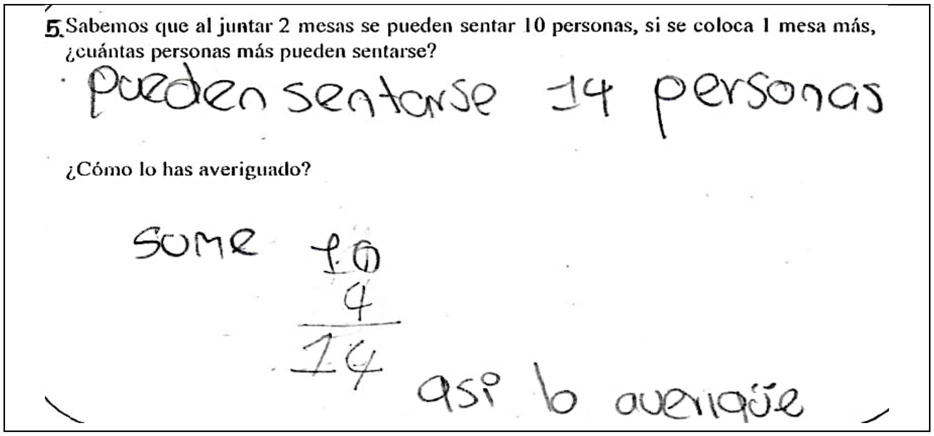



*Imagen 21* conteo de dibujos utilizado por C1. Problema 2

A partir del proceso realizado para hallar el resultado de cada una de las primeras preguntas, se puede inferir que C1 reconoció el patrón de la variable dependiente. Por lo que, para hallar la solución de las siguientes preguntas empleo la estrategia recursiva y finalmente la estrategia operatoria. En la imagen 22, se observa que para responder la pregunta 5, la estudiante consideró las 10 personas que pueden sentarse en 2 mesas y a este valor le sumó 4 más (patrón)


5. Sabemos que al juntar 2 mesas se pueden sentar 10 personas, si se coloca 1 mesa más, ¿cuántas personas más pueden sentarse?

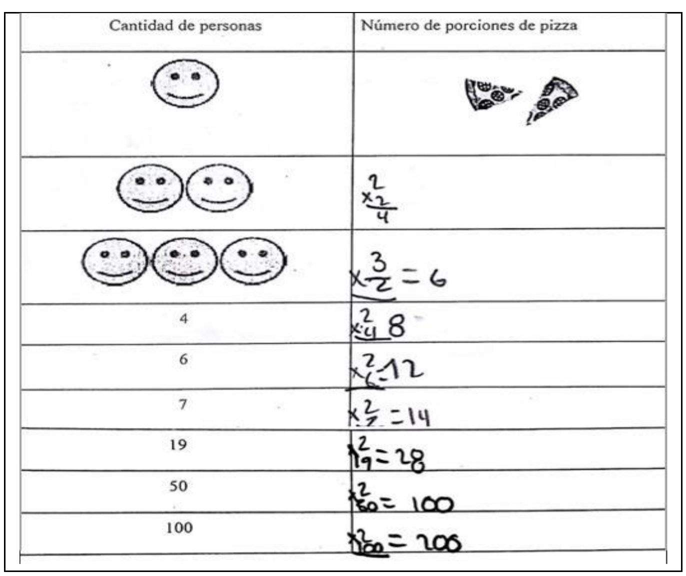
pueden sentarse 14 personas

¿Cómo lo has averiguado?

some 10 + 4 = 14 así lo averigüe

*Imagen 22.*Estrategia recursiva empleado por C1. Problema 2

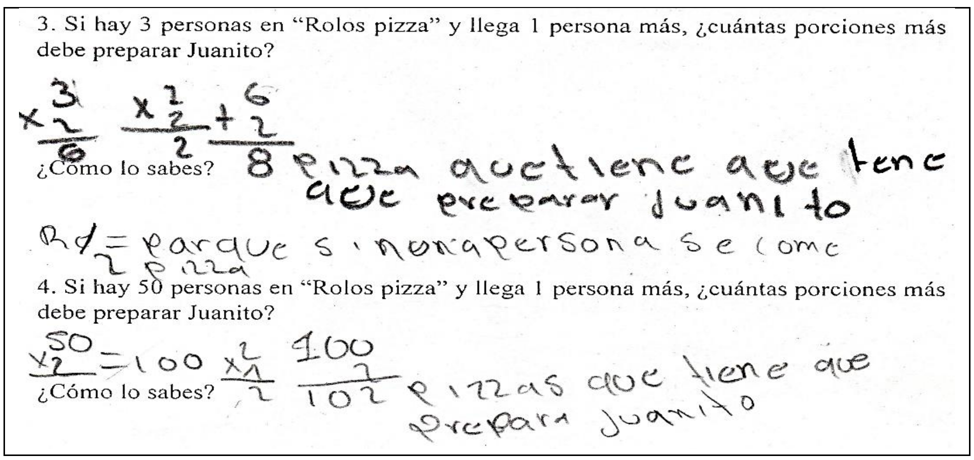
Un elemento que se recalca dentro de las estrategias empleadas por la mayoría de los estudiantes hace referencia al uso predominante de la *estrategia operatoria*. Un caso de interés se aprecia al examinar las soluciones elaboradas por los estudiantes C3 y C5. En la imagen 24 se observa que para el primer problema, el estudiante C3 tanto para los valores consecutivos y no consecutivos siguió el patrón de multiplicar 2 por la cantidad de personas para encontrar el número de porciones de pizza. Así, para completar la tabla el estudiante calculó el valor de la variable dependiente a partir del valor de la variable independiente, multiplicó siempre por dos y se centró en la relación entre ambas variables. Como resultado, se puede inferir que una vez establecida la relación entre las dos cantidades, este tipo de estrategia les permite encontrar el resultado de la variable dependiente dado cualquier valor en la variable independiente.



| Cantidad de personas | Número de porciones de pizza |
|---|---|
| | |
| | $2 \times 2 = 4$ |
| | $3 \times 2 = 6$ |
| 4 | $2 \times 4$ 8 |
| 6 | $2 \times 6$ 12 |
| 7 | $2 \times 7 = 14$ |
| 19 | $2 \times 19 = 28$ |
| 50 | $2 \times 50 = 100$ |
| 100 | $2 \times 100 = 200$ |

*Imagen 23.* Estrategia operatoria usada por C3. Problema 1

Otro elemento que se recalca dentro de las producciones escritas por algunos estudiantes es la presencia de más de una estrategia (*Estrategia múltiple*) en una misma respuesta. Una muestra de ello es el empleó de la estrategia operatoria y recursiva. En la imagen 24, se puede observar cómo el estudiante C3 halló la solución de la tercera y cuarta pregunta del primer problema. Por ejemplo, si hay 3 personas en la pizzería y llega una más, multiplicó $3 \ x \ 2$ y $1 \ x \ 2$ para hallar el número de porciones de pizza que se necesita, posteriormente realizó una adición de los resultados obtenidos (6+2). Este mismo proceso lo empleó para la cuarta pregunta donde cambia la cantidad de personas que hay en la pizzería. A partir de estas respuestas se identifica que él estableció la relación entre las dos variables. Además se deduce que se interesó por saber el total de pizzas que se debe preparar al llegar 4 personas, por lo que recurrió al primer resultado obtenido (6) y a este le sumó el patrón (2). Lo cual, al parecer, le ayudó a reconocer que por cada persona que llega se debe preparar 2 porciones de pizza, al responder que 2 porque una persona se come dos pizzas.


3. Si hay 3 personas en "Rolos pizza" y llega 1 persona más, ¿cuántas porciones más debe preparar Juanito?

¿Cómo lo sabes? 8 pizza que tiene que tene que preparar juanito

Rd= parque si nonapersona se come 2 pizza

4. Si hay 50 personas en "Rolos pizza" y llega 1 persona más, ¿cuántas porciones más debe preparar Juanito?

¿Cómo lo sabes? 102 pizzas que tiene que prepara juanito

*Imagen 24.* Estrategia operatoria y recursiva empleada por C3. Problema 2

En la imagen 25, se puede deducir que para el segundo problema el estudiante T7 empleó la *estrategia de conteo y operatoria*. En primer lugar, se sobrentiende que al dibujar una a una las mesas junto con los 4 amigos que pueden sentarse en los lados superior e inferior de las mesas, utilizó la *estrategia de conteo*. A partir de dicha estrategia, él reconoció que por cada mesa que dibuje, también debe dibujar 4 amigos más. Así, T5 utilizó la *estrategia operatoria* al multiplicar el número de mesas (30) realizadas por 4 para responder correctamente la pregunta. De esta manera, se infiere que, por medio del conteo el estudiante identificó la relación entre las dos cantidades variables, por lo que para la siguiente pregunta no fue necesario realizar los dibujos y procedió directamente a la multiplicación $(50x4 = 200, 200 + 2 = 202)$ sin olvidar el valor constante.

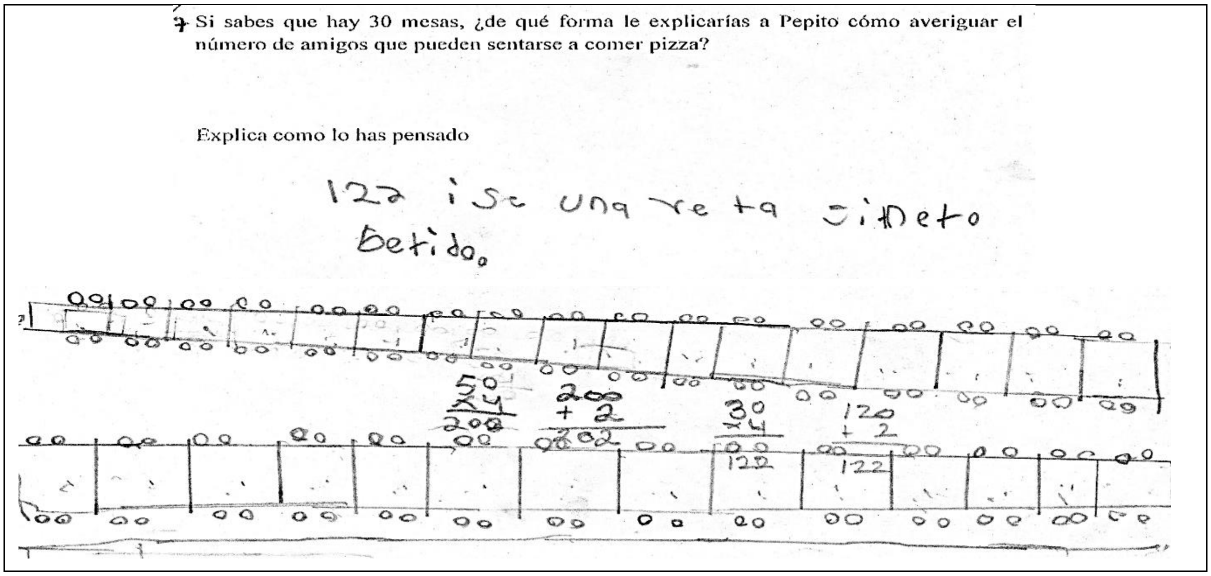


*Imagen 25.* Estrategia múltiple empleada por T7. Problema 2

Por otra parte, en la imagen 26 se puede observar que el estudiante T7 utilizó la *estrategia operatoria*, para responder la primera pregunta del tercer problema, además, se deduce que en la misma respuesta empleó la *estrategia recursiva*. Probablemente, al comienzo, el estudiante recurrió a la estrategia recursiva después de haber identificado el patrón de la variable dependiente y sumó de $5000 en $5000 hasta hallar el valor a pagar por las 3 porciones de pizza. Pareciera que, el estudiante reconoció que al sumar tres veces $5000, da el mismo resultado ($15000) que al multiplicar las tres porciones de pizza por 5. Por lo cual, el uso de la estrategia recursiva favoreció el hecho de que el estudiante relacionara las dos cantidades variables involucradas y ulteriormente calculara el valor a pagar a partir de la multiplicación del patrón (5) por el número de porciones de pizza (3).

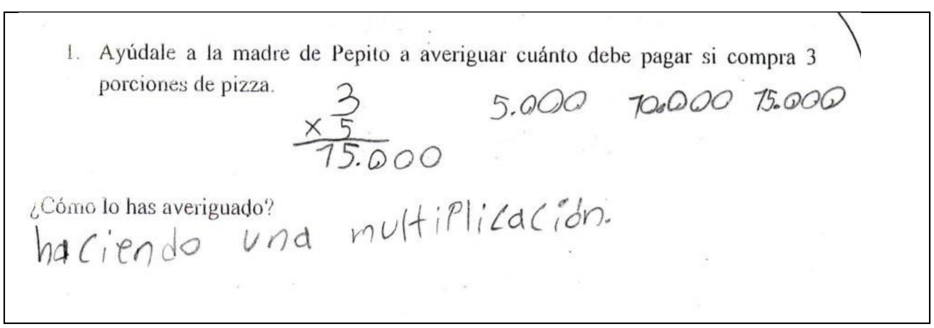
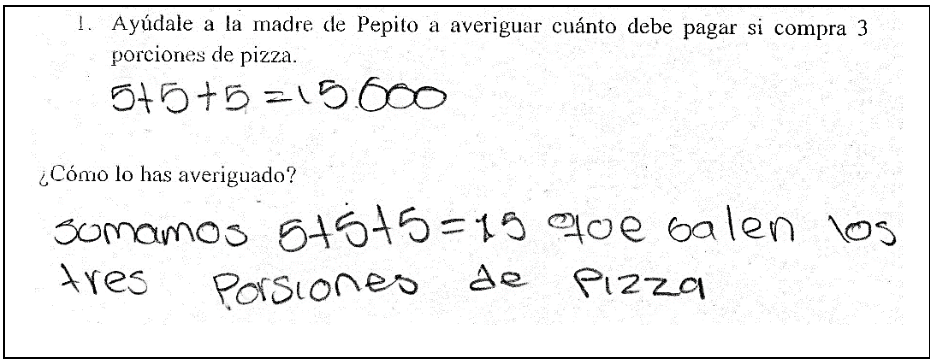


*Imagen 26.* Estrategia múltiple empleada por T7. Problema 3

***Análisis sobre las formas de pensamiento funcional***

De acuerdo a los resultados obtenidos en las producciones escritas por los estudiantes de grado tercero y cuarto, se puede decir que la mayoría de ellos presentan *pensamiento de correspondencia* seguida del *pensamiento de patrones recursivos* y en menor medida se evidencia la configuración del *pensamiento covariacional*. Hay que mencionar además, que en la actividad matemática desplegada por algunos estudiantes no se evidencia la configuración de ninguna forma de pensamiento funcional. A continuación se muestran algunos de los resultados más representativos, debido al proceso similar por varios estudiantes en cada una de las respuestas.

En cuanto a la configuración de la forma de *pensamiento de patrones recursivos*, es preciso mencionar que inicialmente algunos estudiantes se centran en una sola variable (variable dependiente) e identifican el patrón que se repite y comienzan a operar a partir de este. Por ejemplo, en la Imagen 27 se observa que en el tercer problema la estudiante C4 sumó de 5 en 5 ("$5 + 5 + 5 = 15000$") para hallar la solución del valor a pagar por las porciones de pizza. De esta manera, ella reconoció el patrón de la variable dependiente y se centró en dicha variable para hallar la solución de la variable independiente.


1. Ayúdale a la madre de Pepito a averiguar cuánto debe pagar si compra 3 porciones de pizza.

5+5+5 =15.000

¿Cómo lo has averiguado?

somamos 5+5+5=15 que balen los tres Porsiones de Pizza

*Imagen 27*. Pensamiento de patrones recursivos configurada por C4. Problema 3

Hay que mencionar que existen estudiantes, al menos de grado tercero, que no solo presentan *pensamiento de patrones recursivos* para responder las preguntas que están orientadas a su configuración, sino que, también lo presentan en preguntas cuyo propósito no es el mismo. En este sentido, se infiere que los estudiantes no logran establecer la relación entre las dos cantidades variables y se centran únicamente en el patrón de una sola variable. Por ejemplo, en la imagen 28 para el primer problema se observa que la estudiante T2 realizó palitos en grupos de dos para representar las porciones de pizza que pide cada persona. De acuerdo a dicha ilustración, es probable que la estudiante a medida que responde las preguntas realiza más palitos y de esta forma contesta correctamente, tal como se ilustra en las Imágenes 29 y 30.

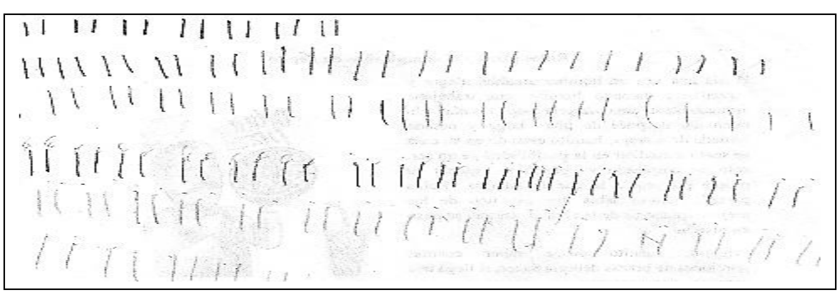
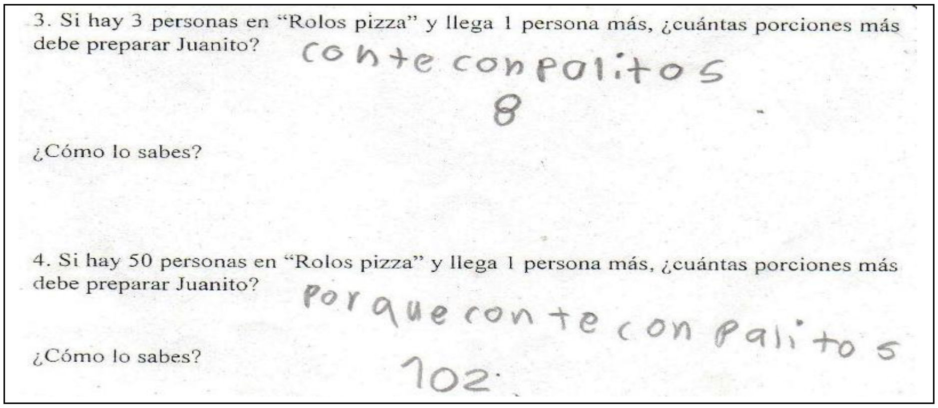


*Imagen 28.* Configuración del pensamiento de patrones recursivos empleado por T2. Problema 1


3. Si hay 3 personas en "Rolos pizza" y llega 1 persona más, ¿cuántas porciones más debe preparar Juanito?

conte conpalitos
8

¿Cómo lo sabes?

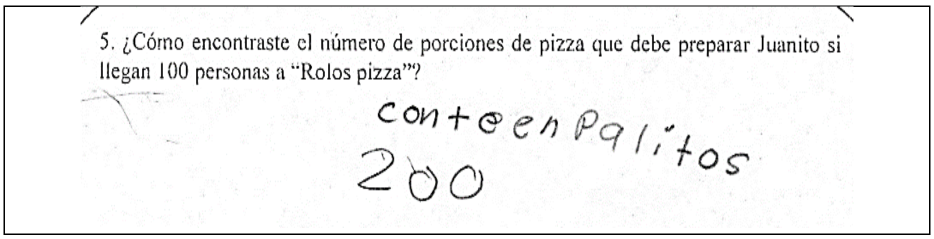
4. Si hay 50 personas en "Rolos pizza" y llega 1 persona más, ¿cuántas porciones más debe preparar Juanito?

porque conte con palitos

¿Cómo lo sabes?

102

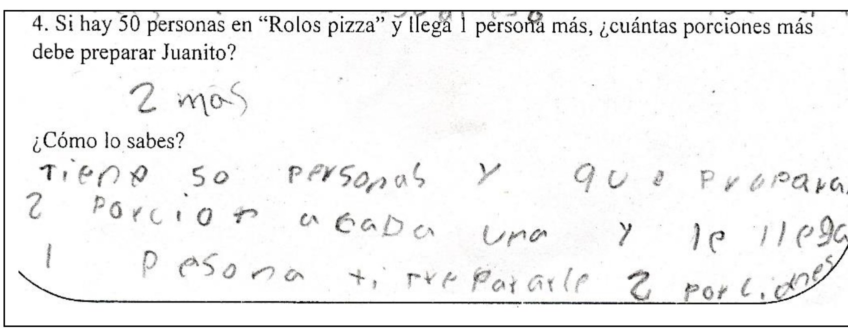
*Imagen 29.* Pensamiento de patrones recursivos empleado por T2. Problema 1


5. ¿Cómo encontraste el número de porciones de pizza que debe preparar Juanito si llegan 100 personas a "Rolos pizza"?

conteenpalitos
200

*Imagen 30.* Pensamiento de patrones recursivos empleado por T2. Problema 1

Dentro de las producciones elaboradas por los estudiantes se puede evidenciar que son pocos los estudiantes que configuran la forma de *pensamiento covariacional*. Además, llama la atención que los que presentan esta forma de pensamiento en el primer problema suelen ser quienes lo configuran en el segundo o en el tercero problema. En las Imágenes 31, 32 y 33 se muestra un ejemplo de lo mencionado.


4. Si hay 50 personas en "Rolos pizza" y llega 1 persona más, ¿cuántas porciones más debe preparar Juanito?

2 mas

¿Cómo lo sabes?

Tiene 50 personas y que prepara 2 porcion a cada una y le llega 1 pesona ti preparale 2 porciones

Transcripción
"2 mas"

"Tiene 50 personas y que preparar 2 porcion a cada una y le llega 1 persona tiene preparale 2 porciones"

*Imagen 31.* Configuración del Pensamiento covariacional por T5. Problema 1

En la Imagen 31 se observa un aspecto destacable relacionado con la configuración del pensamiento covariacional. Puesto que, en el primer problema, al preguntar por el número de porciones de pizza que se debe preparar si llega una persona más, el estudiante T5 argumentó que 2 porciones de pizza más. Así mismo explicó que si hay 50 personas en la pizzería se debe preparar 2 porciones por cada persona y al llegar 1 persona más se necesitan 2 porciones más. En este sentido, se concluye que, el estudiante comprendió la relación y el cambio simultaneo entre la variable independiente y la variable dependiente, por lo que al aumentar 1 en la variable independiente aumenta 2 en la variable dependiente.

En la Imagen 32, se puede apreciar que el estudiante T5 a partir de la información que aparece en la pregunta del tercer problema, reconoció que si bien para 3 amigos se paga $18000 por las porciones de pizza más el servicio a domicilio, al llegar 1 amigo más, debe sumar $5000 al valor conocido para hallar el total a pagar. Por lo tanto, se deduce el estudiante examinó que al cambiar los valores de la variable independiente cambian los valores en la variable dependiente.

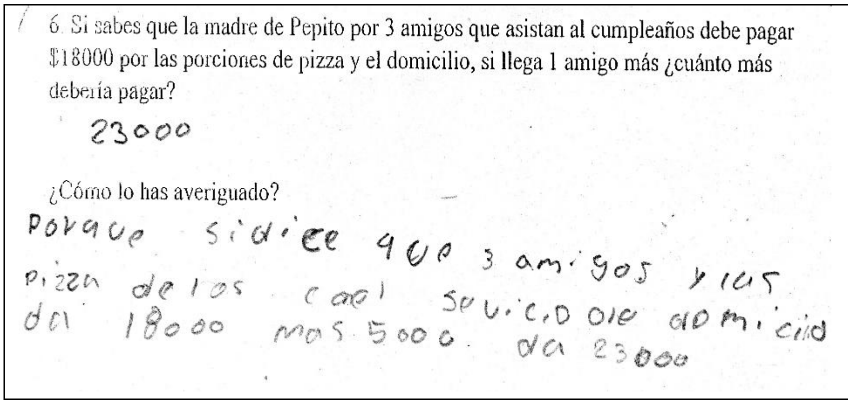
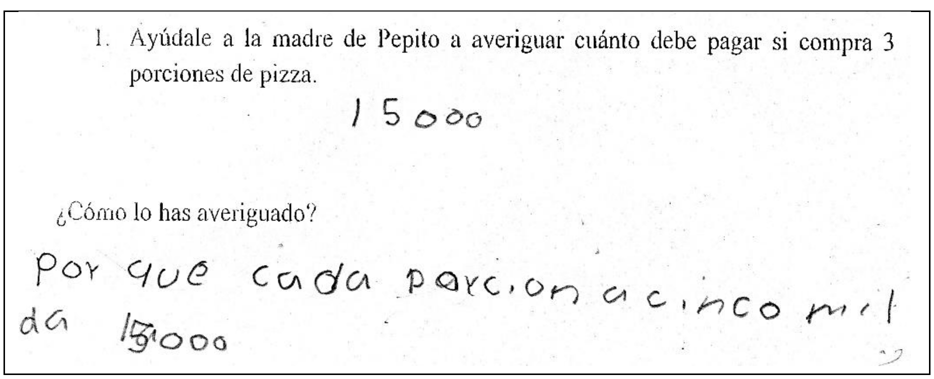
| | |
|---|---|
|  6. Si sabes que la madre de Pepito por 3 amigos que asistan al cumpleaños debe pagar $18000 por las porciones de pizza y el domicilio, si llega 1 amigo más ¿cuánto más debería pagar?<br>23000<br>¿Cómo lo has averiguado?<br>Porque si dice que 3 amigos y las pizza de los cael servicio de domicilio da 18000 mas 5000 da 23000 | **Transcripción.**<br><br>**6.** 23000<br><br>Porque si dice que 3 amigos y las pizza de los cael servicio a domicilio da 18000 mas 5000 da 23000 |

*Imagen 32.* Pensamiento covariacional empleado por T5. Problema 3

Un aspecto que se recalca dentro de aquellos estudiantes que configuran *pensamiento covariacional*, hace referencia al empleo de esta forma de pensamiento incluso en preguntas cuya intención no era su configuración. Por ejemplo, en la Imagen 34 se muestra que para el problema 3, el estudiante T3 explica que son “15000 por que cada porción a cinco mil da 15000”. En consecuencia, se infiere que considera que si 1 porción de pizza cuesta $5000, 2 cuestan $10000 y 3 $150000 de lo cual se deduce que estableció la relación entre las dos cantidades variables y que al cambiar los valores en la variable independiente cambia los valores en la variable dependiente.


1. Ayúdale a la madre de Pepito a averiguar cuánto debe pagar si compra 3 porciones de pizza.

15000

¿Cómo lo has averiguado?

Por que cada porcion a cinco mil da 15000

*Imagen 33.* Pensamiento covariacional empleado por T3. Problema 3

Por otra parte, también se aprecia la configuración del *pensamiento covariacional* en la respuesta brindada por C2 para el tercer problema al resolver el ejercicio inicial. La Imagen 33 ilustra la manera en la cual el estudiante ubicó los valores de la variable independiente y los valores de la variable dependiente. Resulta interesante mencionar que a partir del proceso realizado, el estudiante reconoció que al aumentar un amigo más (variable independiente), el valor a pagar por las porciones de pizza (variable dependiente) aumentara en $5000 más. Puesto que, al parecer, comprende que al aumentar consecutivamente el número de amigos el valor a pagar aumenta en $5000 más. De esta manera, se infiere que, C2 identificó el patrón de la variable independiente y el patrón de la variable dependiente.

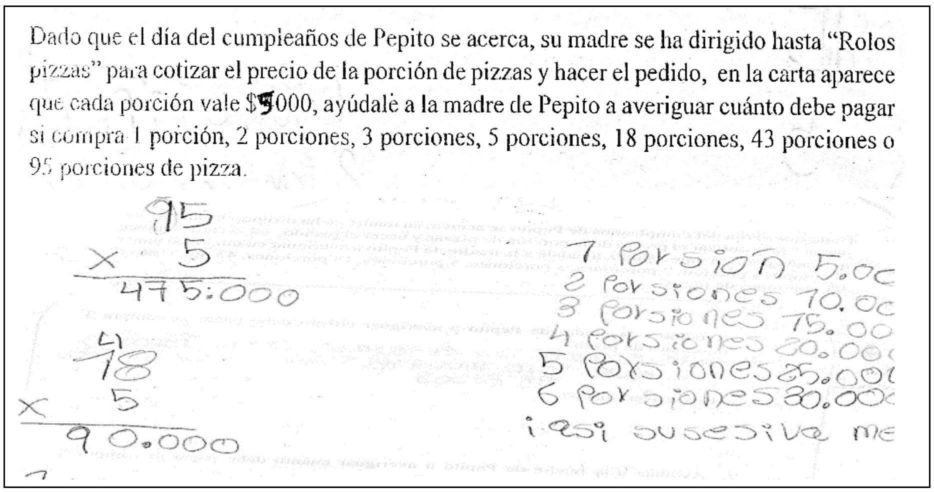
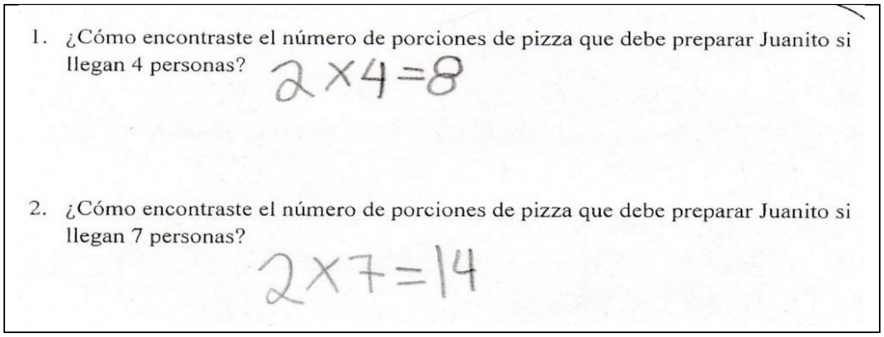

Dado que el día del cumpleaños de Pepito se acerca, su madre se ha dirigido hasta "Rolos pizzas" para cotizar el precio de la porción de pizzas y hacer el pedido, en la carta aparece que cada porción vale $5000, ayúdale a la madre de Pepito a averiguar cuánto debe pagar si compra 1 porción, 2 porciones, 3 porciones, 5 porciones, 18 porciones, 43 porciones o 95 porciones de pizza.



*Imagen 34*. Pensamiento covariacional empleado por C2. Problema 3

Otro aspecto que se destaca de la producción escrita por C2, en la Imagen 34, hace referencia a la configuración del *pensamiento de correspondencia*. Dado que el proceso realizado para hallar el valor a pagar por las primeras porciones de pizza, le permitió identificar el patrón y la relación entre las dos cantidades variables, por lo que al preguntar por números grandes, el estudiante multiplicó el patrón por la variable independiente para hallar el valor de la variable dependiente.

Por otra parte, es importante recalcar que el *pensamiento de correspondencia* es configurado en mayor proporción por ambos grados con respecto al *pensamiento de patrones recursivos* y covariacional. En este sentido, resulta interesante observar que en las preguntas orientadas a la configuración de *pensamiento de patrones recursivos*, en relación con el primer problema, la mayoría de los estudiantes se centraron en la relación entre la cantidad de personas y el número de porciones de pizza. En la Imagen 35, se muestra que el estudiante T3 siguió el patrón de multiplicar 2 por la cantidad de personas para establecer el resultado del número de porciones de pizza. De este modo, T3 calculó el valor de la variable dependiente $f(x)$ a partir del valor de la variable independiente $x$ al establecer la relación entre los pares de valores $(x, f(x))$ para valores de $x$ correspondientes a los casos particulares.


1. ¿Cómo encontraste el número de porciones de pizza que debe preparar Juanito si llegan 4 personas?

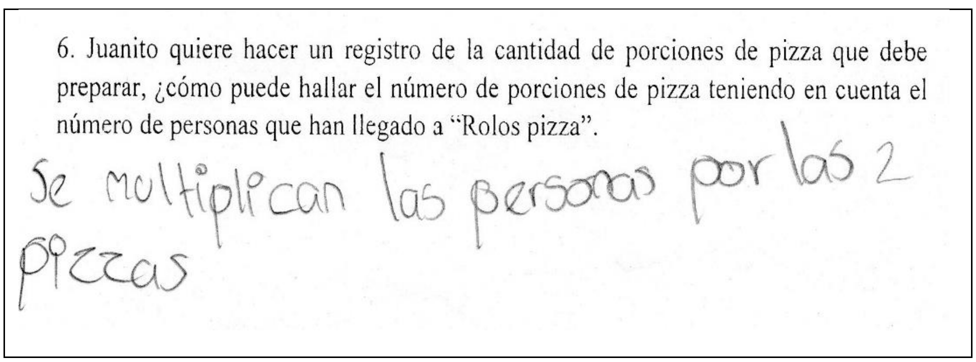
2x4=8

2. ¿Cómo encontraste el número de porciones de pizza que debe preparar Juanito si llegan 7 personas?

2x7=14

*Imagen 35*. Configuración de pensamiento de correspondencia empleado por T3. Problema 1

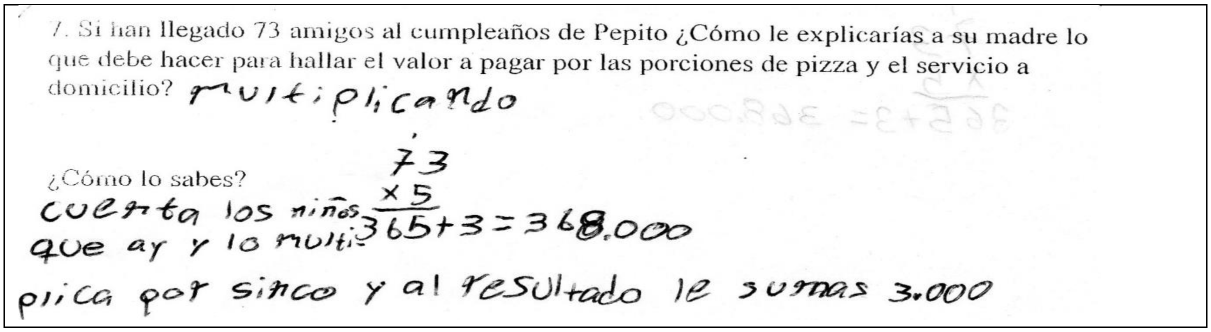
Además, dentro de las producciones elaboradas por los estudiantes, resulta interesante observar que ellos pueden establecer de forma verbal la regla que relaciona la variable independiente y dependiente ($y = f(x)$) (Cañadas et al., 2016 y Pinto, 2016). Por ejemplo, en la Imagen 36 se observa que para la última pregunta del primer problema, la cual está orientada hacia la generalización entre la cantidad de personas y el número de porciones de pizza, el estudiante C4 explica con sus propias palabras la regla general que posibilita hallar el número de porciones de pizza dada una cantidad de personas.


6. Juanito quiere hacer un registro de la cantidad de porciones de pizza que debe preparar, ¿cómo puede hallar el número de porciones de pizza teniendo en cuenta el número de personas que han llegado a "Rolos pizza".

Se multiplican las personas por las 2 pizzas

Imagen 36. Regla general creada por C4. Problema 1

En la Imagen 37 se evidencia que la estudiante T4, para hallar el valor a pagar por las porciones de pizza y el servicio a domicilio cuando han llegado 73 amigos, multiplicó el número de personas (73) por 5 y al resultado obtenido le sumó 3 el cual hace referencia al valor del domicilio ($73\ x\ 5 = 365 \ldots 365 + 3 = 368.000$). Además, es importante mencionar que la estudiante no solo estableció la regla para dicho caso particular, también explicó de forma verbal la regla general que permite hallar un único valor de la variable dependiente dado cualquier valor en la variable independiente, al manifestar que para hallar el valor a pagar por las porciones de pizza y el servicio a domicilio debe contar los niños que hay y multiplicarlos por cinco y al resultado sumarle tres. En consecuencia, la estudiante relacionó las dos cantidades variables y construyó la generalización de la relación de la variable independiente y dependiente $y = f(x)$.

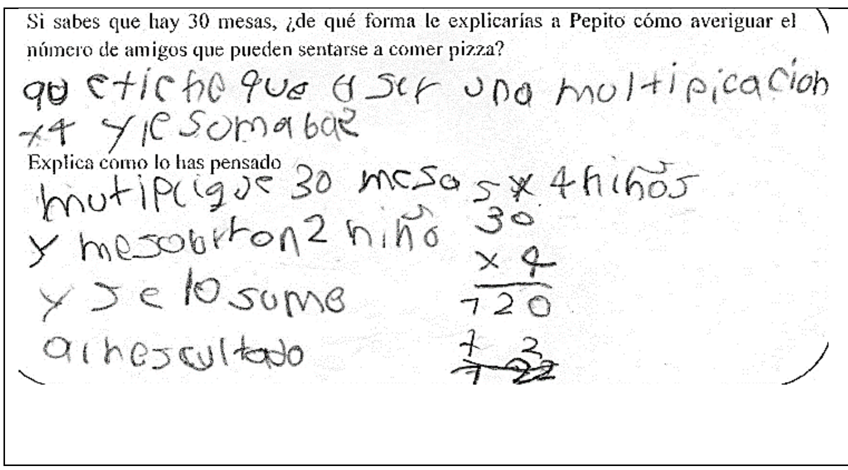

7. Si han llegado 73 amigos al cumpleaños de Pepito ¿Cómo le explicarías a su madre lo que debe hacer para hallar el valor a pagar por las porciones de pizza y el servicio a domicilio? multiplicando

¿Cómo lo sabes? cuenta los niños que ay y lo multiplica por sinco y al resultado le sumas 3.000

$$\begin{array}{r} 73 \\ \times 5 \\ \hline 365+3=368.000 \end{array}$$

*Imagen 37*. Configuración de pensamiento de correspondencia por T4. Problema 3

Otro ejemplo que da cuenta de la configuración de *pensamiento de correspondencia* se evidencia en la Imagen 38 relacionada con el problema 2. En principio, es importante enfatizar que aun cuando la intención de dicha pregunta no era establecer la generalización de la relación, un estudiante (C8) tiene indicios de establecer de manera espontánea la regla que permite encontrar la cantidad de amigos dado cualquier número de mesas al explicar que para averiguar el número de amigos que pueden sentarse a comer pizza tiene que multiplicar por 4 y al resultado sumarle 2.


Si sabes que hay 30 mesas, ¿de qué forma le explicarías a Pepito cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a comer pizza?

Explica cómo lo has pensado

**Transcripción**

7. Que tiene que a ser una multiplicacion x4 y le sumaba 2.

Mitiplique 30 mesa x4 niños y me sobron 2 niños y se lo sume al reultado.

$$\begin{array}{r} 30 \\ x4 \\ \hline 120 \\ +2 \\ \hline 122 \end{array}$$

*Imagen 38.* Pensamiento de correspondencia empleado por C8. Problema 2

Posteriormente C8 multiplicó el número de mesas por la cantidad de amigos que se pueden ubicar en los lados laterales de la mesa ($30 \times 4 = 120$) y a este resultado le sumó 2 ($120 + 2 = 122$), lo que quiere decir que se centró en la relación entre pares de valores de ambas variables y calculó el valor de la variable dependiente (cantidad de amigos) a partir de la variable independiente (número de mesas). Por lo tanto, se concluye que el estudiante construyó la regla que relaciona la variable independiente y dependiente $y = f(x)$ y se enfocó en la relación entre pares de valores de ambas variables cuando calculó el valor de la variable dependiente $f(x)$ a partir del valor de la variable independiente $x$.

### 4.2.2 Consideraciones finales del análisis de las producciones

De acuerdo a las investigaciones previas (Fuentes, 2014; Pinto, 2016; Rodríguez, 2016) y en relación con las producciones escritas por los estudiantes, se puede evidenciar que tanto los sistemas de representación como las estrategias empleadas sirven de base para reconocer e identificar la presencia de las *formas de pensamiento funcional*. Sin embargo, de acuerdo a sus características existen algunos sistemas de representación y estrategias que están más correlacionados con una de las tres formas de pensamiento funcional.

En cuanto a los sistemas de representación que permiten reconocer la forma de *pensamiento de patrones recursivos* se encuentra: el *sistema de representación pictórico y manipulativo*. Dichos sistemas de representación al involucrar la visualización, posibilitan que los estudiantes a través de las ilustraciones y el material manipulativo organicen la información y, a partir de esto, reconozcan el patrón, permitiendo de esta manera dar respuesta a las preguntas planteadas. Además, el empleo de estos sistemas de representación es usual en preguntas que incluyen valores pequeños, así mismo se presenta su uso al no identificar el patrón y la regla que permita determinar el resultado de la variable dependiente a partir de la variable independiente (Pinto, 2016). Por otra parte, las estrategias que está ligadas a la forma de *pensamiento de patrones recursivos*, de acuerdo a sus características son las *estrategias de conteo y recursiva.* La primera, se evidencia cuando los estudiantes cuentan bien sea con material manipulable, con ayuda de los dedos o con dibujos que ellos realizan, lo cual les permite poco a poco reconocer el patrón. La *estrategia recursiva* se refleja en el momento que ellos recurren a resultados anteriores y a estos les suman el patrón para llegar a la respuesta.

Por otro lado, los sistemas de representación que están relacionados con la forma de *pensamiento covariacional* son: *tabular*, *manipulativo y verbal*. El *sistema de representación tabular* está relacionado con esta forma de pensamiento, debido a que, al incluir la coordinación de la variación en dos columnas, ayuda a los estudiantes hacer más visible el cambio que se genera al mismo tiempo entre dos cantidades relacionadas entre sí (Tanisli, 2011). En cuanto al segundo, a través de la exploración del material manipulativo, facilita el reconocimiento de una manera más eficaz la relación y el cambio simultáneo de la variable independiente y la variable dependiente. Por último, el *sistema de representación verbal* es frecuente, puesto que permite el uso del lenguaje natural para expresar los cambios correspondientes en cada una de las cantidades variables. Cabe resaltar, que este sistema de representación por lo general se relaciona con las tres *formas de pensamiento funcional*. En relación con la estrategia que da cuenta de la forma de *pensamiento covariacional* se encuentran: la *estrategia recursiva.* Dicha estrategia hace presencia cuando los estudiantes se basan en los resultados anteriores de cada una de las cantidades variables para averiguar el siguiente, una vez identifican el patrón de al menos una variable.

Por último, los sistemas de representación que al parecer se correlacionan con la forma de *pensamiento de correspondencia* son: *verbal, tabular y simbólico numérico*. El *sistema de representación verbal*, por el hecho de generarse de manera natural en el momento de argumentar sobre las relaciones que se evidencia, ha cobrado importancia a otras formas de expresar la generalización, diferentes a la representación simbólica algebraica (Cañadas, Castro, & Castro, 2007). El *sistema de representación tabular*, posibilita a partir de la observación de las filas, identificar la relación entre pares de cantidades correspondientes, de igual forma permite un acercamiento a la construcción de una regla que relacione las dos cantidades variables. Finalmente, cuando los estudiantes reconocen el patrón y la relación entre dos cantidades variables es común el uso del *sistema de representación simbólico numérico*.

Dentro de las estrategias que están más relacionadas con la forma de *pensamiento de correspondencia* se encuentran: las *estrategias de particularización, duplicación y operatoria*. La primera, se evidencia cuando al preguntar por un caso en general responden a partir de un caso particular o explican su respuesta a través de un valor diferente al valor dado en la pregunta. La segunda estrategia, hace presencia al identificar que el resultado de la variable dependiente es el doble de la variable independiente. Por último, la *estrategia operatoria* es usual cuando los estudiantes operan con cualquier cantidad que se precise, permitiendo averiguar la solución a la pregunta con una operación, así mismo cuando establecen una generalidad para el caso.

En síntesis, la Figura 2 da cuenta de la correlación que tiene lugar entre los sistemas de representación, las estrategias y las *formas de pensamiento funcional*.

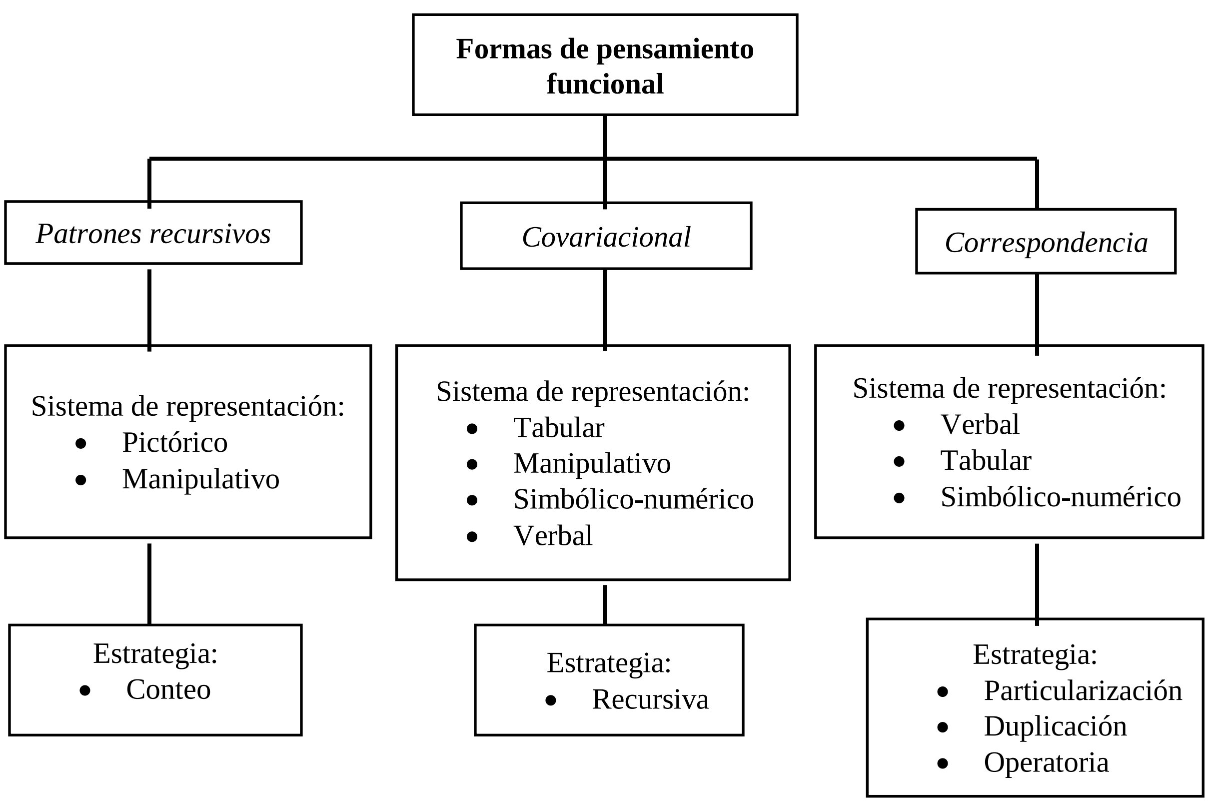



*Figura 2* Correlación entre sistemas de representación, estrategias y formas de pensamiento funcional.

## 4.3 Contraste entre las producciones de tercero y cuarto grado

Los resultados (ver anexo 2 y 3) muestran que los estudiantes de grado tercero configuran en mayor proporción la forma de *pensamiento de patrones recursivos* en comparación con los estudiantes de grado cuarto. Lo anterior indica que gran parte de los estudiantes de grado tercero ponen énfasis en el cambio de una sola cantidad variable, puesto que se basan en los resultados anteriores y a estos le suman el patrón para llegar a la respuesta o recurren al conteo de los dibujos que ellos realizan, al material manipulativo e incluso cuentan con los dedos para llegar a la solución de las preguntas hasta reconocer la manera en que se da dicha relación. Por otra parte, algunos de ellos no solo configuran esta forma de pensamiento para responder las preguntas que involucran valores pequeños, sino que también lo configuran para hallar la solución de preguntas que incluyen valores grandes (e,g., como se observa en la Imagen 29). Mientras que, solo algunos estudiantes de grado cuarto, presentan *pensamiento de patrones recursivos* únicamente para responder las preguntas que están orientadas a la configuración de esta forma de pensamiento, este hecho se evidencia en la Imagen 27 al contar de 5 en 5 para hallar la respuesta.

Las producciones elaboradas por los estudiantes de grado tercero y cuarto proporcionan pocas evidencias sobre la configuración de la forma de *pensamiento covariacional*. Lo cual, se debe a que la mayoría de los estudiantes de ambos grados no reconocen la variación simultánea entre la variable independiente y la variable dependiente y en cómo los cambios en los valores de una, producen cambios en la otra. Así, de los estudiantes que no configuran esta forma de pensamiento, algunos se centran en el cambio de una sola cantidad, mientras que otros reconocen la relación entre las dos cantidades variables involucradas y se enfocan en dicha relación, situación que se evidencia con mayor frecuencia en los estudiantes de grado cuarto. Por otro lado, en las producciones escritas por los estudiantes de grado tercero se evidencia la configuración de esta forma de pensamiento en preguntas que no están intencionadas a su configuración, a diferencia de los estudiantes de grado cuarto.

En relación con la configuración de la forma de *pensamiento de correspondencia* se puede inferir que los estudiantes de tercero y cuarto grado configuran esta forma de pensamiento con mayor frecuencia en relación con la forma de *pensamiento de patrones recursivos* y covariacional. De manera más amplia, en la actividad matemática desarrollada por ambos grados se observa que la gran mayoría de los estudiantes establecen la relación entre los pares de valores involucrados $(x, f(x))$ para casos particulares de la variable independiente y expresan de forma verbal la regla general la relación existente entre las dos cantidades que varían. Sin embargo, la actividad algebraica desplegada por los estudiantes de grado cuarto proporciona mayor evidencia de la configuración de la forma de *pensamiento de correspondencia*. Esto, quizá, se debe a las experiencias matemáticas sobre patrones recursivos a las cuales se enfrentan los estudiantes de grado cuarto, quienes pueden contar con más herramientas para relacionar dos cantidades variables involucradas.

### 4.4 Conclusiones y nuevas rutas para seguir investigando

En este apartado se exponen algunas conclusiones relacionadas con la configuración de las *formas de pensamiento funcional* que presenta un grupo de estudiantes de tercero y cuarto grado de Educación Básica Primaria cuando trabajan con problemas que involucran relaciones funcionales lineales. En consecuencia, se considera los hallazgos de los análisis de las producciones escritas por los estudiantes y algunos aspectos mencionados en investigaciones previas acerca del estudio del pensamiento funcional.

En los resultados obtenidos se observa que la resolución de problemas que involucran relaciones funcionales lineales no proporcionales implica mayor dificultad que los problemas que involucran relaciones funcionales lineales proporcionales. Esto se debe al incluir una cantidad constante que interviene en la determinación de los resultados. Así, al menos para grado tercero, se les dificulta reconocer el patrón y la relación entre las dos cantidades que varían.

En los resultados se evidencia que el empleo del sistema de representación manipulativo y pictórico son fundamentales en el proceso de la resolución de problemas que involucran relaciones funcionales lineales, puesto que a partir de la manipulación y la visualización se facilita a los estudiantes la identificación de patrones y la relación entre las dos cantidades variables involucradas. Por lo cual, estos sistemas de representación permiten el posterior uso de los sistemas de representación verbal y simbólico numérico.

Los resultados registrados se pueden complementar con los hallazgos de Payne (2012) quien identifica que una forma de superar la falta de generalidad, se logra a través de las imágenes visuales. De esta manera, se pudo observar que el sistema de representación pictórico y manipulativo juegan un papel importante dentro del proceso de generalización, dado que les permitió a los estudiantes conectarse con el problema y de esta manera llegar a una regla explicita.

Por otra parte, las estrategias utilizadas por los estudiantes de grado tercero y cuarto también proporcionan información clave sobre cómo los estudiantes llegan a construir la regla general que relaciona la variable independiente y la variable dependiente $(x, f(x))$. En este sentido, los estudiantes generalmente, parten de la estrategia de conteo y la estrategia recursiva las cuales son eliminadas cuando reconocen la relación entre las dos cantidades que varían. Esto permite el empleo de la estrategia operatoria, la cual a través de su uso posibilita que ellos expresen de forma verbal la regla general que permite hallar un único valor en la variable dependiente dado un valor en la variable independiente. De esta manera, se da respuesta a la línea de investigación que deja abierta Pinto & Cañadas (2017) quienes sugieren averiguar sobre “las estrategias que emplean los estudiantes de Educación Primaria al establecer una regla general que relacione las variables, en el contexto funcional del álgebra escolar” (p.9). Además, se confirma la idea de que la generalización en el contexto de la Educación Primaria permite que los estudiantes se alejen de las particularidades que trae consigo el cálculo aritmético identificando las relaciones matemáticas involucradas en la actividad que realizan (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011).

Los resultados aportan evidencias sobre cómo los estudiantes de tercero y cuarto desarrollan las formas de pensamiento *de patrones recursivos*, *covariacional y de correspondencia*, al representar, justificar y razonar con problemas que involucran relaciones funcionales. Las producciones escritas por los estudiantes muestran que ellos a) representan y justifican las relaciones por medio del empleo diversos sistemas de representación y diferentes estrategias y b) razonan sobre los sistemas de representación y las estrategias para deducir y comprender el comportamiento funcional de las variables involucradas.

Los hallazgos del análisis de las producciones escritas por algunos estudiantes de tercero y cuarto demuestran que la configuración del *pensamiento de patrones recursivos* es un puente necesario en el desarrollo del pensamiento funcional. De hecho, en esta investigación se constata que el reconocer y centrarse en el patrón de una sola variable es un prerrequisito para que los estudiantes comprendan la relación entre las dos cantidades que varían, y facilita su pensamiento sobre las relaciones. Así, se evidencia la viabilidad de presentar en las primeras preguntas de cada uno de los problemas valores consecutivos y no consecutivos, ya que esto posibilita la emergencia de la configuración de la forma de *pensamiento de patrones recursivos* a la configuración de *pensamiento covariacional y de correspondencia*.

Si bien, son pocas las respuestas que proporcionan evidencias sobre la configuración de la forma de *pensamiento covariacional*, se reconoce que aquellos estudiantes que lo presentan comprenden la variación simultánea entre la variable independiente y la variable dependiente, además describen en cómo los cambios que se realizan en una variable producen cambios en la otra y en cómo dicho cambio permanece constante.

Los resultados muestran que la gran mayoría de los estudiantes de grado tercero y cuarto configuran *pensamiento de correspondencia*. Así, dan cuenta de la relación entre las dos cantidades variables y crean la regla general que permite establecer la relación entre la variable independiente y dependiente, lo cual les permite determinar un único valor en la variable dependiente dado cualquier valor en la variable independiente. Este hecho deja ver que los estudiantes cuando trabajan con situaciones contextualizadas que incluyen relaciones funcionales lineales no solo identifican los patrones, sino que también establecen las relaciones en las que aparecen implicados los valores de la variable independiente y dependiente (Pinto, 2016; Pinto, et al., 2016; Rodríguez, 2016).

De acuerdo a los hallazgos obtenidos se puede apreciar que las *formas y desarrollo de pensamiento funcional* propuestas por Smith (2008) son clave para la construcción de problemas que involucran relaciones funcionales lineales. Puesto que presentan características esenciales que sirven de base para la formulación de preguntas que orienten a los estudiantes al trabajo con conceptos asociados a las funciones. Por otra parte, el trabajo con estos tipos de problemas posibilita que los estudiantes se conviertan en sujetos activos que construyen conceptos algebraicos a través del uso de diversos sistemas de representación y diferentes estrategias, los cuales son fundamentales para dar sentido a las relaciones funcionales.

El marco conceptual elaborado a base de tres referentes: didáctico, curricular y matemático fue fundamental para considerar aspectos importantes que posibilitan reconocer factores como: (a) la identificación de las actividades que permiten a los estudiantes potenciar el desarrollo del pensamiento funcional; el reconocimiento del tipo de problemas que promuevan a los estudiantes al trabajo con patrones y relaciones entre dos variables; la importancia de los problemas contextualizados con el fin de que los estudiantes puedan relacionar conceptos matemáticos con situaciones de la vida cotidiana y expresen su actividad matemática de forma natural con el objeto de reconocer situaciones que evoquen procedimientos como base para identificar la configuración de las *formas de pensamiento funcional*; (b) la identificación de algunos estándares básicos de competencias en matemáticas de los ciclos de 1-3 y de 4-5 propuestos por el MEN; y (c) el reconocimiento de aspectos matemáticos para el diseño de los problemas que posibilitan un espacio amplio para el estudio de las *formas de pensamiento funcional*.

Los resultados de la investigación permiten sentar bases mediante los cuales los docentes atiendan cómo transformar y extender sus recursos actuales para que el contenido aritmético de los grados de Educación Primaria se pueda extender a oportunidades más allá del trabajo con patrones, a través de algunos problemas y preguntas que posibiliten a los estudiantes un acercamiento a la generalización y formalización de su pensamiento matemático. Debido a que los hallazgos muestran que los estudiantes desde edades tempranas identifican patrones, reconocen la relación entre las dos cantidades variables y crean una regla para hallar la solución de preguntas que consideran casos particulares.

En el contexto de los primeros grados escolares, algunos investigadores reconocen que la generalización puede ser expresada de diferentes formas, transitando desde el uso del lenguaje verbal hasta llegar a emplear elementos más simbólicos (Blanton, 2008). Si bien, en los resultados obtenidos no se evidencia el empleo del sistema de representación simbólico algebraico (quizá porque en las preguntas planteadas en cada uno de los problemas propuestos no se consideró esto como requisito) vale la pena señalar que se sentaron bases sólidas para que eventualmente los estudiantes doten de significado las representaciones alfa-numéricas del álgebra sofisticada.

Se destaca que la mayoría de los estudiantes justifican sus razonamientos de manera apropiada para cada una de las preguntas planteadas. Así, dichas justificaciones constituyen un factor importante en el desarrollo del pensamiento algebraico (Payne, 2012) porque facilitan el reconocimiento de los procesos que llevan a cabo los estudiantes para llegar a la generalización de las relaciones de las variables involucradas. Por tanto, los problemas y las preguntas propuestas en este trabajo se pueden aplicar en el salón de clase como medios para promover el pensamiento algebraico a través del pensamiento funcional en estudiantes de Educación Primaria y de esta manera acatar el llamado de Payne (2012), quien propone incluir la justificación como una característica de estos problemas para examinar las formas en las cuales los estudiantes justifican sus razonamientos.

Con este trabajo se aporta mayor evidencia sobre las herramientas que poseen los estudiantes desde edades tempranas para fomentar pensamiento algebraico a través del pensamiento funcional. Así, los resultados encontrados aporta a las investigaciones previas (Quitian & Sopo (2013), Fuentes (2014), Pinto (2016), Pinto, et al., (2016), Rodríguez (2016) y Pinto & Cañadas (2017)) la cuales se han focalizado en torno al pensamiento funcional principalmente en los grados primero, segundo y quinto de Educación Primaria. Al trabajar con estudiantes de grado tercero y cuarto se puede aportar mayor información sobre cómo los estudiantes de Educación Primaria desarrollan problemas contextualizados que involucran relaciones funcionales lineales.

Al igual que otras investigaciones, la culminación de esta deja abierta una serie de rutas e ideas para seguir trabajando. Al respecto, es pertinente señalar que dado que el *pensamiento covariacional* no se evidenció en amplia proporción conviene desarrollar nuevas investigaciones que se ocupen del diseño de problemas o estrategias de intervención en el aula que promuevan esta forma de pensamiento funcional. Además, es importante que los problemas involucren la promoción y uso del simbolismo alfanumérico del álgebra con el fin de analizar el impacto que puede representar para los estudiantes de Educación Básica Primaria en el contexto escolar colombiano.

Aunque en la presente investigación únicamente se trabaja con estudiantes de tercero y cuarto grado, la secuencia de problemas propuesta también puede implementarse con grado quinto con el propósito de complementar los hallazgos y ampliar la visión del pensamiento funcional en la Educación Básica Primaria. Por otro lado, se sugiere construir un diseño de problemas que involucre relaciones funcionales cuadráticas y exponenciales, puesto que el trabajo con problemas que involucran relaciones funcionales lineales da cuenta de la factibilidad de llevar al aula de clases este tipo de problemas como forma de fomentar el pensamiento algebraico a través del pensamiento funcional.

Por último, se sugiere para futuras investigaciones centrar la atención en las dificultades que presentan los estudiantes cuando trabajan con tablas (como un aspecto fundamental en la búsqueda de promoción del pensamiento funcional). Si bien, gran parte de los estudiantes, a través de estas hallan patrones, se centran en las dos columnas de manera independiente, identifican la relación de correspondencia y establecen la regla de dicha relación, existen estudiantes que se centran en una sola columna y establecen la diferencia entre los valores de la variable dependiente dejando de lado los valores de la variable independiente.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS


Ayala, A. (2017). *Evolución del significado que estudiantes de tercero de primaria le otorgan a la letra en contextos funcionales.*Universidad de Granada.

Barbosa, A. (2011). *Patterning problems: sixth graders' ability to generalize.* Trabajo presentado en el CERME 7, Rzeszów, Polonia.

Bastías, & Moreno. (2016). Analysis of evidences about functional thinking in 5th level of primary education, *3*(3), 2016.

Blanton, M. (2008). *Teaching Practices That Develop Children's Algebraic Thinking Skills. Algebra and the Elementary Classroom Transforming Thinking , Transforming Practice*. https://books.heinemann.com/shared/onlineresources/E00946/blanton00946Sam ple.pdf

Blanton, M., Brizuela, B. M., & Cañadas, M. C. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 87–103. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A Learning Trajectory in 6-Year-Olds' Thinking About Generalizing Functional Relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511–558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Pyschology of Mathematics Education*, *2*, 135–142.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. *Early Algebraization*, 5–23. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades* 3-5. Essential Understanding Series. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Brizuela, B. M., & Alvarado, M. (2010). *First graders ' work on additive problems with the use of different notational tools*. *Revista IRICE* (Vol. 21).

Cañadas, M., Castro, E., & Castro, E. (n.d.). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de la eso en el problema de las baldosas, (2007), 283–294.

Cañadas, M., & Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio., (1999), 211–220.

Cañadas, M., & Molina, M. (2016). Aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades, (2016), 209–218. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2

Carpenter, T. P., & Levi, L. (2000). Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades. Research Report. *Research Report: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science*, (5), 1–22.

Demosthenous, E., & Stylianides, A. (2014). Algebra-related tasks in primary school textbooks. In C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of* PME 38 *and* PME-NA 36 (Vol. 2, pp. 369–376). Vancouver, Canada. http://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de alumnos de primero de educación primaria. un estudio exploratorio*. Universidad de Granada.

Godino, Batanero & Font. Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matematicas para maestros. *In Ministerio De Educación.*

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. (6a ed). México, DF: McGraw-Hill.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*,(1), 139-151.

MEN. (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Santa Fé de Bogotá, Colombia.

MEN (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciencias Ciudadanas. Santa Fe de Bogotá. Colombia.

Merino, E. (2012). *Patrones y representaciones de alumnos de 5º de educación primaria, una area de generalzación*. Universidad de Granada.

Merino, E., Cañadas, M., & Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Eduación Matemática En La Infancia*, *2*(1), 24–40.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. *Estándares Básicos de Competencias En Lneguaje, Matemáticas, Ciencias y Cuidadanas*, 46–95. https://doi.org/958-691-290-6

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *Pna*, *3*(3), 135–156.

Morales, A., Del Río, A., Cañadas, M., & Molina, M. (2015). Estudio del pensamiento funcional de estudiantes de educación primaria, *4*(2009), 2015.

Morales, R., Cañadas, M., Brizuela, B., & Gómez, P. (2016). Estudiantes de primero de educación primaria y involucran funciones lineales functional relationships identified by first graders and problem solving strategies in problems that involve linear functions, 365–375.

Obando, G. (2009). Profesora, ¿qué es multiplicar?, 1–10.

Osorio, M. (2016). *El paso de la aritmética al álgebra*. Universidad Nacional. Retrieved from http://www.bdigital.unal.edu.co/56283/

Payne, N. (2012). Tasks that Promote Functional Reasoning in Early Elementary School Students. *Saudi Med J*, 1–167. https://doi.org/10.1073/pnas.0703993104

Pinto, E. (2016). *Relaciones funcionales, sistemas de representación y generalización en estudiantes de tercero de primaria*. Universidad de Granada.

Pinto, E., & Cañadas, M. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo.

Pinto, E., Cañadas, M., Moreno, A., & Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan.

Quitian, S., & Sopo, M. (2013). *Evidencias del Pensamiento Funcional en niños de Segundo de Educación Básica Primaria*. Universidad Pedagogica Nacional.

Radford, L. 2006. Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. *In Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter,* ed. S. Alatorre, J.L. Cortina, M. Sa´iz, and A. Me´ndez, Vol. 1, 2?21. Merida, Mexico.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 1–19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. PNA, 1(2), 47-66. Smith,

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática, *4*, 1–14.

Rodríguez, A. (2016). *Manifestaciones de pensamiento funcional de alumnos de segundo de primaria en un juego de tarjetas.* Universidad de Granada.

Rojas, P., & Vergel, R. (2013). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Educación Científica y Tecnológica*.

Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (2001). When tables become function tables. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 145--152 ST-- When tables become function tables.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing funcions in the elementary curriculum. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grade*s (pp. 133-160). Nueva York, NY: Routledge.

Tanisli, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *Journal of Mathematical Behavior*, *30*(3), 206–223. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.001.

Valoyes, L. & Malagón, M. (2006). *Formación de pensamiento algebraico en la educación escolar*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Vargas, E. (2011). *El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con* *fenómenos físicos que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno*. *Univesidad Nacional De Colombia*. Universidad Nacional de Colombia.

Vergel, R. (2010). La Perspectiva de Cambio Curricular Early-Algebra como Posibilidad para desarrollar el Pensamiento Algebraico en Escolares de Educación Primaria : Una Mirada al Proceso Matemático de Generalización, *1980*, 69–81.

Warren, E., & Cooper, T. (2005). Introducing Functional Thinking in Year 2 : a case study of early algebra teaching, *6*(2), 150–162.

**UNIVERSIDAD DEL VALLE**
**INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA**
**ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

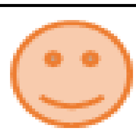
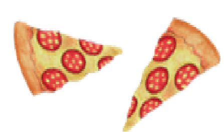
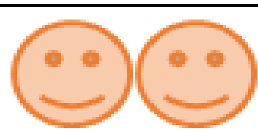
## Anexo 1. Secuencia de problemas que involucran relaciones funcionales lineales.

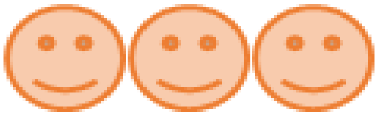
### Rolos pizza y el cumpleaños de Pepito


Había una vez un hombre amable, alegre y espontáneo llamado Juanito, que trabajaba arduamente en una pizzería todos los días. Un buen día después de una larga y pesada jornada de trabajo, Juanito estando en su casa se sentó a meditar en la posibilidad de no ser, solo un empleado y pensó en colocar su propia pizzería a la que le llamara “Rolos pizza”, Juanito sabía que era uno de los mejores pizzeros de la ciudad, así que se puso en marcha.

Primero, Juanito desea saber cuántas porciones de pizzas debería hacer, si llega una persona, dos personas, tres personas o más, con la condición de cada persona debe pedir dos porciones de pizza.

Para ello, ha realizado una tabla que se muestra a continuación, en la que registró la cantidad de personas y el número de porciones de pizzas que debería hacer. Ahora le vamos a ayudar a terminar la tabla y vamos a responder a unas preguntas.

| Cantidad de personas | Número de porciones de pizza |
|---|---|
|  |  |
|  | |

| | |
|---|---|
|  | |
| 4 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 19 | |
| 50 | |
| 100 | |

1. ¿Cómo encontraste el número de porciones de pizza que debe preparar Juanito si llegan 4 personas?

2. ¿Cómo encontraste el número de porciones de pizza que debe preparar Juanito si llegan 7 personas?

3. Si hay 3 personas en “Rolos pizza” y llega 1 persona más, ¿cuántas porciones más debe preparar Juanito?

¿Cómo lo sabes?

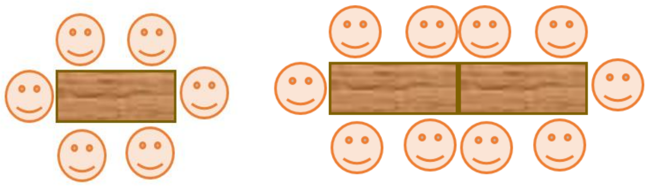
4. Si hay 50 personas en “Rolos pizza” y llega 1 persona más, ¿cuántas porciones más debe preparar Juanito?

¿Cómo lo sabes?

5. ¿Cómo encontraste el número de porciones de pizza que debe preparar Juanito si llegan 100 personas a “Rolos pizza”?

6. Juanito quiere hacer un registro de la cantidad de porciones de pizza que debe preparar, ¿cómo puede hallar el número de porciones de pizza teniendo en cuenta el número de personas que han llegado a “Rolos pizza”.

Pepito le dice a su mamá que las pizzas que venden en “Rolos pizza” son deliciosas y le gustaría comprar en su cumpleaños para repartir a sus amigos, a lo que su madre está de acuerdo y le dice que debe organizar a sus compañeros en mesas, de tal forma que al unirlas queden en una sola fila. Para ello le muestra un ejemplo de la manera como deben estar ubicados.



Ayúdale a Pepito a responder algunas preguntas que su madre le ha planteado.

1. ¿Cuántos amigos de Pepito pueden sentarse a comer pizza en 1 mesa?

2. ¿Cuántos amigos de Pepito pueden sentarse a comer pizza si se juntan 2 mesas?

3. ¿Cuántos amigos de Pepito pueden sentarse a comer pizza si se juntan 3 mesas?

4. ¿Cuántos amigos de Pepito pueden sentarse a comer pizza si se juntan 6 mesas?

5. Sabemos que al juntar 2 mesas se pueden sentar 10 personas, si se coloca 1 mesa más, ¿cuántas personas más pueden sentarse?

¿Cómo lo has averiguado?

6. Sabemos que al juntar 10 mesas se pueden sentar 42 personas, si se coloca 1 mesa más, ¿cuántas personas más pueden sentarse?

¿Cómo lo has averiguado?

7. Si sabes que hay 30 mesas, ¿de qué forma le explicarías a Pepito cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a comer pizza?

Explica como lo has pensado

8. Si Pepito ha juntado 50 mesas, ¿cuántos amigos pueden sentarse a comer pizza en su fiesta de cumpleaños?

Explica cómo lo has averiguado

Dado que el día del cumpleaños de Pepito se acerca, su madre se ha dirigido hasta “Rolos pizzas” para cotizar el precio de la porción de pizzas y hacer el pedido, en la carta aparece que cada porción vale $ 5000, ayúdale a la madre de Pepito a averiguar cuánto debe pagar si compra 1 porción, 2 porciones, 3 porciones, 5 porciones, 18 porciones, 43 porciones o 95 porciones de pizza.

1. Ayúdale a la madre de Pepito a averiguar cuánto debe pagar si compra 3 porciones de pizza.

¿Cómo lo has averiguado?

**2.** Ayúdale a la madre de Pepito a averiguar cuánto debe pagar si compra 5 porciones de pizza

¿Cómo lo has averiguado?

3. Si la madre de Pepito pagara $15000 ¿Cuántas porciones de pizza habrá pedido?

¿Cómo lo sabes?

Juanito le dice a la madre de Pepito que tiene servicio a domicilio con un costo de $ 3.000 independientemente del número de porciones de pizza que lleven hasta su casa. La madre de Pepito desea saber cuánto debería pagar en total teniendo en cuenta que el precio de cada porción de pizza es de $ 5000 y el costo del servicio a domicilio que es de $3000. ¡Una vez más necesita que le ayudes a contestar algunas preguntas que requiere responder para conocer el valor exacto a pagar!

4. Si a la casa de la madre de Pepito le han llevado 3 porciones de pizza, ¿cuánto debe pagar por las porciones de pizza y el servicio a domicilio?

¿Cómo lo sabes?

5. Si ahora la madre de Pepito cuenta con 6 porciones de pizza en su casa, ¿cuánto debe pagar por las porciones de pizza y el servicio a domicilio?

¿Cómo lo sabes?

6. Si sabes que la madre de Pepito por 3 amigos que asistan al cumpleaños debe pagar $18000 por las porciones de pizza y el domicilio, si llega 1 amigo más ¿cuánto más debería pagar?

¿Cómo lo has averiguado?

7. Si han llegado 73 amigos al cumpleaños de Pepito ¿Cómo le explicarías a su madre lo que debe hacer para hallar el valor a pagar por las porciones de pizza y el servicio a domicilio?

¿Cómo lo sabes?

Finalmente llegó el día del cumpleaños de Pepito, su madre logró el objetivo de conocer cuánto debe pagar por la compra y de esta manera todos sus amigos disfrutaron de la pizza y pasaron un día agradable.

**Anexo 2. Resultados grado tercero.**

*Tabla 12.Resultados de la implementación grado tercero.*

| Problemas | Pregunta | Sistema de representación | | | | | | Estrategias | | | | | | | | Formas de pensamiento funcional | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | V | Ma | P | T | Sn | M | O | R | Ct | Rd | Du | Pa | Ina | Em | PR | CV | CR |
| Problema 1 | CT | | 8 | 1 | | 8 | 5 | 5 | 1 | | | | | | | 1 | | 5 |
| | 1 | 1 | | | | 8 | | 6 | 1 | 1 | | | 1 | | 1 | 2 | | 6 |
| | 2 | 1 | | 1 | | 8 | | 7 | 1 | 1 | | | | | | 1 | | 5 |
| | 3 | 5 | | 1 | | 4 | 3 | 4 | | 1 | 2 | | | | | 1 | 2 | 3 |
| | 4 | 7 | | 1 | | 1 | | 4 | | 1 | 1 | 1 | | 1 | | 2 | 4 | 1 |
| | 5 | 6 | | 1 | | 3 | 1 | 4 | 1 | 1 | | 1 | | 1 | 1 | 1 | | 4 |
| | 6 | 7 | | | | | | 2 | | | | | 3 | | | | | 5 |
| Problema 2 | 1 | 6 | 4 | 1 | | | 3 | 3 | | 4 | 1 | | | | | 5 | | 2 |
| | 2 | 6 | 3 | 1 | | 1 | 4 | 4 | 1 | 3 | 1 | | | | 1 | 4 | | 2 |
| | 3 | 7 | 4 | | | 1 | 5 | 3 | 2 | 3 | 1 | | | | 1 | 6 | 1 | 1 |
| | 4 | 7 | 2 | 2 | | 3 | 6 | 2 | 3 | 3 | 1 | | | | 1 | 5 | | 2 |
| | 5 | 7 | | | | 1 | | 3 | 3 | 1 | | | | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| | 6 | 7 | | 3 | | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | | | | 3 | 2 | | 3 | 2 |
| | 7 | 5 | | 2 | | 5 | 5 | 3 | | 4 | | | | 2 | | 1 | | 4 |
| | 8 | 6 | | 4 | | 1 | 4 | 3 | | 1 | | | | 3 | 3 | 1 | | 4 |
| Problema 3 | EI | | | 1 | 3 | 2 | | 5 | | | | | | | | 5 | | 3 |
| | 1 | 5 | 4 | | | 6 | 3 | 1 | 1 | 4 | | | | 1 | | 5 | 1 | 1 |
| | 2 | 5 | 4 | 1 | | 5 | 4 | 2 | 1 | 4 | | | | | | 5 | | 2 |
| | 3 | 5 | 1 | | | 7 | 3 | 6 | 1 | 1 | | | | | | 3 | 2 | 3 |
| | 4 | 6 | 2 | | | 6 | 3 | 6 | | 2 | | | | | | 2 | | 6 |
| | 5 | 6 | 2 | | | 5 | 4 | 3 | | 3 | | | | | 1 | 2 | | 5 |
| | 6 | 6 | | | | 6 | 3 | 5 | | 3 | | | | | | | 3 | 3 |
| | 7 | 4 | | | | 7 | 3 | 2 | | 1 | | | | | | | | 4 |

Nota: V: verbal, Ma: manipulativo, P: pictórico, T: tabular, Sn: Simbólico numérico, M: Múltiple; O: operatoria, R: recursiva, Ct: conteo de dibujos, Rd: respuesta directa, Du: duplicación, Pa: particularizada, Em: Estrategia múltiple; Pr: patrones recursivos, Cv: pensamiento covariacional, Cr: pensamiento de correspondencia.

**Anexo 3. Resultados grado cuarto.**

*Tabla 13. Resultados de la implementación grado cuarto.*

| Problemas | Pregunta | Sistema de representación | | | | | | Estrategias | | | | | | | | Formas de pensamiento funcional | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | V | Ma | P | T | Sn | M | O | R | Ct | Rd | Du | Pa | Ina | Em | PR | CV | CR |
| Problema 1 | CT | | 8 | 3 | | 7 | 2 | 5 | 2 | 1 | | 2 | | | 1 | | | 6 |
| | 1 | 4 | | | | 6 | 3 | 6 | | | | | | | | | | 7 |
| | 2 | 2 | | | | 6 | 2 | 6 | | | 1 | | | | | | | 7 |
| | 3 | 6 | | | | 4 | 3 | 6 | 1 | | | | | | | | 1 | 6 |
| | 4 | 6 | | | | 5 | 4 | 6 | 1 | | | | | | | | 2 | 4 |
| | 5 | 2 | | | | 6 | 1 | 6 | | | 1 | | | | | | | 6 |
| | 6 | 7 | | | | | | 9 | | | | | 2 | | | | | 7 |
| Problema 2 | 1 | 7 | 8 | 1 | | 2 | 3 | 3 | | 4 | 1 | | | | | 1 | | 3 |
| | 2 | 6 | 8 | 1 | | 4 | 3 | 4 | 1 | 2 | | | | | 1 | 2 | | 4 |
| | 3 | 6 | 8 | 1 | | 3 | 2 | 5 | 2 | 1 | 1 | | | 1 | 1 | 2 | | 2 |
| | 4 | 6 | | 1 | | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | | | 1 | 1 | 1 | | 5 |
| | 5 | 5 | | | | 4 | 4 | 2 | 5 | 1 | | | | 2 | | | 5 | 3 |
| | 6 | 5 | | | | 5 | 5 | 1 | 7 | | | | | 2 | | | 7 | 2 |
| | 7 | 8 | | 1 | | 7 | 7 | 7 | | 1 | | | | 1 | | | | 7 |
| | 8 | 7 | | | | 8 | 6 | 7 | | | | | 1 | | | | | 6 |
| Problema 3 | EI | 2 | | | 1 | 5 | 1 | 6 | | | 1 | | | | | | | 5 |
| | 1 | 5 | 4 | | | 7 | 5 | 6 | 1 | | | | | | | 1 | | 6 |
| | 2 | 6 | 2 | | | 7 | 6 | 7 | | | | | | 1 | | | | 7 |
| | 3 | 6 | | | | 3 | 1 | 3 | 2 | | 1 | | | 2 | | | 1 | 1 |
| | 4 | 5 | | | | 5 | 3 | 6 | | | 1 | | | | | | | 6 |
| | 5 | 5 | | | | 6 | 4 | 6 | | | | | | | | | | 7 |
| | 6 | 3 | | | | 5 | 1 | 4 | 2 | | 1 | | | | | | 4 | 1 |
| | 7 | 6 | | | | 6 | 5 | 6 | | | | | | 1 | | | | 7 |

Nota: V: verbal, Ma: manipulativo, P: pictórico, T: tabular, Sn: Simbólico numérico, M: Múltiple; O: operatoria, R: recursiva, Ct: conteo de dibujos, Rd: respuesta directa, Du: duplicación, Pa: particularizada, Em: Estrategia múltiple; Pr: patrones recursivos, Cv: pensamiento covariacional, Cr: pensamiento de correspondencia.