



**DISEÑO DE UNA SECUENCIA DE TAREAS PARA DAR CUENTA DE LA FUNCIÓN
LINEAL INTEGRANDO GEOGEBRA EN GRADO NOVENO DE EDUCACIÓN
BÁSICA**

**DIEGO ARMANDO DÍAZ CARVAJAL
DAVID EDUARDO CHAMIZO CHEPE**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE – SEDE NORTE DEL CAUCA
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTANDER DE QUILICHAO, CAUCA**

2019



**DISEÑO DE UNA SECUENCIA DE TAREAS PARA DAR CUENTA DE LA FUNCIÓN
LINEAL INTEGRANDO GEOGEBRA EN GRADO NOVENO DE EDUCACIÓN
BÁSICA**

DIEGO ARMANDO DÍAZ CARVAJAL

Código (1458111)

DAVID EDUARDO CHAMIZO CHEPE

Código (1458296)

Trabajo de grado para optar el título de:
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Director

MG. DANIEL ANDRÉS FERNÁNDEZ LÓPEZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE – SEDE NORTE DEL CAUCA
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTANDER DE QUILICHAO, CAUCA

2019

AGRADECIMIENTOS

Inicialmente agradecemos a Dios por brindarnos la posibilidad de desarrollar este trabajo de investigación y sus infinitas bendiciones.

A nuestras familias, por su apoyo incondicional durante toda nuestra formación como licenciados.

A nuestro director Daniel Andrés Fernández, por su acompañamiento y dedicación durante la realización de este trabajo de investigación.

A nuestros evaluadores Diana Ximena Ortiz y Ronald Andrés Grueso, por sus aportes y sugerencias para que este trabajo se realizara de la mejor manera.

A la Universidad del Valle, por formarnos integralmente y brindarnos las bases académicas para poder afrontar nuestra vida profesional.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES.....	VI
ÍNDICE DE TABLAS	VIII
RESUMEN.....	1
INTRODUCCIÓN	2
CAPÍTULO 1: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN	5
1.1 ESTUDIOS REALIZADOS A LA FUNCIÓN LINEAL	5
1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	13
1.3 OBJETIVOS	20
1.3.1 Objetivo general.....	20
1.3.2 Objetivos específicos.	20
1.4 JUSTIFICACIÓN	21
CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA.....	23
2.1 DIMENSIÓN DIDÁCTICA	23
2.1.1 Diseño de tareas en educación matemática.....	23
2.1.1.1 <i>Significado de tareas</i>	23
2.1.1.2 <i>Diseño de una tarea</i>	24
2.1.1.3 <i>Secuencia de tareas</i>	25
2.1.2 Diseño de tareas con uso de tecnología digital.	26
2.1.3 Visualización matemática.	27
2.2 DIMENSIÓN COGNITIVA.....	29
2.2.1 La Mediación Instrumental.	29
2.3 DIMENSIÓN MATEMÁTICA	32
2.4 DIMENSIÓN CURRICULAR	38
CAPÍTULO 3: MARCO METODOLÓGICO DE REFERENCIA	45
3.1 CONCEPCIÓN DE LA SECUENCIA DE TAREAS.	45
3.1.1 El contexto apropiado.	46
3.1.2 Diseño de las actividades con el software GeoGebra.	47
3.2 ANÁLISIS <i>A PRIORI</i> DE LAS TAREAS.	50
3.2.1 Tarea 1: “La tubería y el retrete”.	51
3.2.2 Tarea 2: “El daño en la tubería”.....	56
3.2.3 Tarea 3. “Las descargas del retrete”.	62
CAPÍTULO 4: RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.....	68
4.1 EXPERIMENTACIÓN	68
4.1.1 Marco contextual.	68
4.2 ANÁLISIS <i>A POSTERIORI</i> DE LAS TAREAS	69
4.2.1 Análisis de la tarea 1. “La tubería y el retrete”.	71
4.2.2 Análisis de la tarea 2. “El daño en la tubería”.	82
4.2.3 Análisis de la tarea 3. “Las descargas de retrete”.	96

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	108
5.1 CONCLUSIONES	108
5.2 RECOMENDACIONES	113
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	115
ANEXOS	118
ANEXO 1. TAREA 1 _ PÁGINA 1	118
ANEXO 2. TAREA 1 _ PÁGINA 2	119
ANEXO 3. TAREA 2 _ PÁGINA 1	120
ANEXO 4. TAREA 2 _ PÁGINA 2	121
ANEXO 5. TAREA 3 _ PÁGINA 1	122
ANEXO 6. TAREA 3 _ PÁGINA 2	123
ANEXO 7. PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES TAREA 1 _ PÁGINA 1	124
ANEXO 8. PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES TAREA 1 _ PÁGINA 2	125
ANEXO 9. PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES TAREA 2 _ PÁGINA 1	126
ANEXO 10. PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES TAREA 2 _ PÁGINA 2	127
ANEXO 11. PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES TAREA 3 _ PÁGINA 1	128
ANEXO 12. PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES TAREA 3 _ PÁGINA 2	129
ANEXO 13. EVIDENCIA FOTOGRÁFICA_1	130
ANEXO 14. EVIDENCIA FOTOGRÁFICA_2	131
ANEXO 15. EVIDENCIA FOTOGRÁFICA_3	132

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Resultados en porcentajes de las pruebas saber 9° de la Institución educativa Instituto Técnico.....	18
Ilustración 2: La altura de la gráfica sobre el punto x es el valor de $f(x)$	34
Ilustración 3: Función constante y función lineal.	35
Ilustración 4: Representación gráfica de la pendiente.....	36
Ilustración 5: Coherencia Horizontal y Vertical.	43
Ilustración 6: Contextualización Tarea 1.	52
Ilustración 7: La tubería, Tarea 1.	52
Ilustración 8: El retrete, tarea 1 parte 2	53
Ilustración 9: Litros por minuto, Tarea 2.	57
Ilustración 10: Gráfica de la función y tabla de valores, tarea 2.....	58
Ilustración 11: Expresión algebraica, Tarea 2.....	58
Ilustración 12: Expresión algebraica, Tarea 3.....	62
Ilustración 13: Tabla de valores, Tarea 3.	63
Ilustración 14: Gráfica, tarea 3.....	64
Ilustración 15: Verificación colinealidad de los puntos de la gráfica, Tarea 3.	64
Ilustración 16: Tarea 1_ ítem 1_ preguntas a y b_ caso 1.....	73
Ilustración 17: Tarea 1_ ítem 1_ preguntas a y b_ caso 2.....	73
Ilustración 18: Tarea 1_ ítem 1_ pregunta c_ caso 1.	74
Ilustración 19: Tarea 1_ ítem 1_ pregunta c_ caso 2.	74
Ilustración 20: Tarea 1_ ítem 2_ preguntas a y b_ caso 1.....	75
Ilustración 21: Tarea 1_ ítem 2_ preguntas a y b_ caso 2.....	76
Ilustración 22: Tarea 1_ ítem 2_ pregunta c_ caso 1.	76
Ilustración 23: Tarea 1_ ítem 2_ pregunta c_ caso 2.	76
Ilustración 24: Tarea 1_ ítem 1_ pregunta e.....	78
Ilustración 25: Tarea 1_ ítem 1_ pregunta f_ caso 1.....	79
Ilustración 26: Tarea 1_ ítem 1_ pregunta f_ caso 2.....	79
Ilustración 27: Tarea 1_ ítem 2_ pregunta e_ caso 1.	80
Ilustración 28: Tarea 1_ ítem 2_ pregunta f_ caso 1.....	80
Ilustración 29: Tarea 2_ preguntas 1 y 2_ caso 1.....	85
Ilustración 30: Tarea 2_ preguntas 1 y 2_ caso 2.....	86
Ilustración 31: Tarea 2_ preguntas 3, 4 y 5_caso 1.....	86
Ilustración 32: Tarea 2_ preguntas 3, 4 y 5_caso 2.....	87
Ilustración 33: Tarea 2_ preguntas 3, 4 y 5_caso 3.....	88
Ilustración 34: Tarea 2_ pregunta 7_caso 1.	88
Ilustración 35: Tarea 2_ pregunta 12_caso 1.	88
Ilustración 36: Tarea 2_ pregunta 6_caso 1.	90
Ilustración 37: Tarea 2_ pregunta 6_caso 2.	90

Ilustración 38: Tarea 2_ pregunta 6_caso 3.	90
Ilustración 39: Tarea 2_ preguntas 11 y 10_caso 1.	91
Ilustración 40: Tarea 2_ preguntas 11 y 10_caso 2.	92
Ilustración 41: Tarea 2_ preguntas 11 y 10_caso 3.	93
Ilustración 42: Tarea 2_ preguntas 12 y 13_caso 1.	93
Ilustración 43: Tarea 2_ preguntas 12 y 13_caso 2.	94
Ilustración 44: Tarea 3_ pregunta 4_caso 1.	98
Ilustración 45: Tarea 3_ preguntas 7 y 8_caso 1.	99
Ilustración 46: Tarea 3_ preguntas 7 y 8_caso2.	99
Ilustración 47: Tarea 3_ preguntas 1, 2 y 3_caso 1.	101
Ilustración 48: Tarea 3_ preguntas 1, 2 y 3_caso 2.	102
Ilustración 49: Tarea 3_ pregunta 9_caso 1.	103
Ilustración 50: Tarea 3_ pregunta 9_caso 2.	104
Ilustración 51: Tarea 3_ pregunta 9 caso 3.	105
Ilustración 52: Tarea 3_ pregunta 10_caso 1.	105
Ilustración 53: Tarea 3_ pregunta 10_caso 2.	106
Ilustración 54: Tarea 3_ pregunta 10_caso 3.	106

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Representaciones de la función lineal con pendiente igual a cero.....	37
Tabla 2: Representaciones de la función a fin.....	38
Tabla 3: Rejilla de análisis de la secuencia de tareas.....	51
Tabla 4: Ejecución de la secuencia de tareas.	70

RESUMEN

Este trabajo de investigación presenta y desarrolla una propuesta de aula para el aprendizaje de algunos elementos de la función lineal haciendo uso del software dinámico GeoGebra. Para ello, se diseñó una secuencia de tareas y se aplicó en estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Instituto Técnico, ubicada en Santander de Quilichao, Cauca. La propuesta intentó trascender el aprendizaje de procesos rutinarios, estudiando el concepto matemático a partir de situaciones de cambio contextualizadas, realizando unas actividades en el software GeoGebra, el cual permite ubicar en una misma ventana las representaciones gráfica, tabular y algebraica de una función lineal; esto con el fin de lograr una articulación entre estas representaciones, de igual manera, lograr caracterizar la gráfica de una función lineal de variable continua y la gráfica de una función lineal de variable discreta. Luego de la implementación, se caracterizaron los procesos cognitivos llevados a cabo por los estudiantes teniendo en cuenta la teoría de la Mediación y Génesis Instrumental; igualmente, se analizó el valor pragmático y epistemológico de cada tarea. Finalmente, dentro de los resultados obtenidos se pudo corroborar la posibilidad del estudio de la función lineal a través de actividades de variación y cambio haciendo uso del software GeoGebra; igualmente la posibilidad de realizar un primer acercamiento al concepto de función desde una perspectiva de dependencia y cambio.

Palabras claves: Función lineal, pensamiento variacional, GeoGebra, mediación instrumental, diseño de tareas, ingeniería didáctica.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se orienta al diseño e implementación de una secuencia de tareas para el aprendizaje de algunos elementos de la función lineal como variable dependiente e independiente, articulación de las diferentes representaciones y caracterización de una gráfica de acuerdo al contexto que representa; integrando las tecnologías de la información y comunicación (TIC) a través de actividades ubicadas en un contexto. Este trabajo surge del hecho de que el concepto de función lineal se aprende comúnmente desde una correspondencia y asignación de valores, para ello el estudiante debe tabular un par de puntos a partir de la expresión algebraica y finalmente trazar una línea recta. Por tanto, aprender el concepto de función lineal solo haciendo énfasis en los procesos algebraicos deja a un lado su carácter variacional; dependencia y continuidad de sus variables y viéndose las representaciones de este objeto matemático como si fuesen procesos aislados.

Igualmente, el hecho de estudiar este objeto matemático a papel y lápiz se torna insuficiente, pues se ve de una manera estática, sin permitir el desarrollo de la habilidad de visualización en los estudiantes. Es por esta razón, que en este trabajo se hace uso del software dinámico GeoGebra, pues brinda la posibilidad de estudiar la representación algebraica, tabular y gráfica de forma dinámica en diferentes ventanas dentro de una misma pantalla, permitiendo estudiar este objeto matemático desde una manera más visual y analítica.

Por su parte, el MEN expresa en algunos documentos legales como los lineamientos curriculares en matemáticas (1998) y en los estándares básicos de competencias en matemáticas (2006) que el estudio del concepto de función lineal se debe llevar a cabo desde situaciones de cambio contextualizadas que impliquen fenómenos de variación donde intervengan sus diferentes representaciones. Por lo que el diseño de la propuesta de aula de este trabajo se enmarca en el estudio del concepto de función lineal desde una problemática social, como lo es el desperdicio de agua, haciendo uso de la representación algebraica, tabular y gráfica.

Por otro lado, se toman en consideración investigadores como Margolinas (2013) y Hitt (1998) para el diseño de la secuencia de tareas y la mediación y génesis instrumental de Rabardel

(1995) para el análisis del uso de GeoGebra como medio de aprendizaje. La secuencia de tareas con el uso de GeoGebra fue aplicada en el grado noveno de la básica secundaria del colegio Instituto Técnico de Santander de Quilichao.

Este trabajo se encuentra estructurado en cinco capítulos de la siguiente manera:

En el primer capítulo se mencionan aspectos como el planteamiento del problema, los antecedentes, la justificación y los objetivos, aquí se expone la necesidad de diseñar una secuencia de tareas con el uso de GeoGebra que muestre los aportes y restricciones del aprendizaje del concepto de función lineal.

El segundo capítulo está compuesto por el marco teórico y metodológico de referencia que permite la estructuración y fundamentación del trabajo de investigación. Así pues, el trabajo se fundamenta a partir de cuatro dimensiones: dimensión didáctica, dimensión matemática, dimensión cognitiva y dimensión curricular.

En el aspecto didáctico se toma en consideración el diseño de tareas en educación matemática de Margolinas (2013) y la visualización matemática de Hitt (2003); en el aspecto matemático se abordan los componentes matemáticos de la función lineal (Stewart, Redlin & Watson, 2012); y en el aspecto cognitivo se cita el papel de la mediación instrumental y la génesis instrumental de Rabardel (1995); ahora, puesto que nos encontramos en un contexto normativo se considera una dimensión curricular donde toman partida los lineamientos curriculares en matemáticas (Men, 1998) y los estándares básicos de competencias en matemáticas (Men, 2006).

El tercer capítulo de este trabajo se encuentra relacionado con el diseño e implementación de la secuencia de tareas con el respectivo análisis *a priori* de cada tarea, teniendo en cuenta las categorías definidas en el marco teórico referenciado en el capítulo dos de este trabajo.

El capítulo cuatro se compone del marco contextual y los análisis *a posteriori* de la puesta en escena de las tareas, con el fin de validar lo expuesto en el análisis *a priori* del capítulo tres.

Por último, en el quinto capítulo se realizan las respectivas conclusiones obtenidas al analizar los resultados, para indagar sobre la pregunta problema y objetivos planteados al inicio del trabajo.

CAPÍTULO 1: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

A continuación, se presentan algunos trabajos realizados en torno al concepto de función lineal. De esto, se plantea la problemática del proyecto en relación al aprendizaje del concepto donde se abordan problemas que aún persisten y que no se han abordado completamente. Posteriormente, se presenta la justificación del trabajo, el objetivo general y los objetivos específicos.

1.1 Estudios realizados a la función lineal

A continuación, vamos a referirnos a los antecedentes a partir de dos aspectos: primero, los trabajos realizados en relación con el estudio de la función lineal donde no se ha tenido en cuenta el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) y segundo, los estudios acerca de la función lineal, donde la actividad matemática ha sido mediada por las tecnologías de la información y la comunicación, en particular GeoGebra.

Antecedentes de los estudios realizados a la función lineal sin el uso de las TIC.

En este primer aspecto, la función lineal se presenta como un concepto que permite modelar situaciones de la cotidianidad de los estudiantes, abriendo paso a una educación situada y contextualizada. En su trabajo de grado Angulo & Celorio (2012) implementaron una secuencia didáctica sobre el concepto de función lineal en una institución educativa del municipio de Buenaventura, tomando la pesca como la situación contextual para los estudiantes, dado que esta es la principal actividad comercial del municipio. En este sentido, se aborda como problemática la falta de contextualización, articulación e integración de algunas situaciones problema en la enseñanza de las matemáticas, la cual puede crear una ruptura para que la aprehensión de conceptos como razón de cambio, variables dependientes e independientes.

En los referentes conceptuales, toman una Secuencia Didáctica como herramienta de enseñanza que presenta de manera organizada, articulada y sistematizada un determinado saber

mediante el uso de situaciones problema, con una intencionalidad definida que es generar en los estudiantes un conocimiento desde el análisis, la reflexión, la confrontación y la comprensión de la situación planteada. En cuanto a la metodología utilizada, Angulo & Celorio (2012) mencionan que este trabajo se lleva a cabo a partir de cinco fases diferentes: Una revisión bibliográfica, el diseño de una secuencia didáctica, la implementación y sistematización de la experiencia, análisis de los resultados y objetivos y por último se escribió el informe final.

En las conclusiones de su trabajo, Angulo & Celorio (2012) menciona que:

No cabe duda de que la buena coordinación entre los registros de representación, la argumentación o justificación de lo que se plantea, la intervención del contexto en las actividades académicas y el uso de recursos pedagógicos como la secuencia didáctica permiten que el estudiante pueda comprender los saberes que matemáticamente se quieran transmitir.

Por otro lado, se toma en consideración el trabajo de Vintimilla (2016), quien aborda como problemática los vacíos conceptuales que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la función lineal. En esta problemática se enuncia que, en el aprendizaje de la función lineal los estudiantes consideran innecesario el estudio de su parte conceptual ya que la están asumiendo ésta como eminentemente práctica. En este sentido, para abordar la problemática se propone como objetivo general el promover la comprensión de los conceptos básicos de funciones lineales en los estudiantes de décimo año de educación básica.

Se trabajó con un grupo de cuarenta estudiantes de Décimo Año de la Escuela de Educación Básica “Manuela Cañizares” de la ciudad de Cuenca donde, a partir de los fundamentos del constructivismo, los lineamientos del Ministerio de Educación y los resultados de la evaluación diagnóstica, enfocada en la percepción del interés hacia los sustentos conceptuales de la materia, expectativas, métodos usualmente utilizados en la resolución de ejercicios y la verificación del nivel de conocimiento de los prerrequisitos del tema, se determinaron las bases para la elaboración de una propuesta metodológica, que promueva la participación activa de los estudiantes, mediante actividades diseñadas de manera secuencial que involucran los distintos

registros de representación semiótica, para favorecer el empleo de toda la capacidad cognitiva, en la formación de conocimientos significativos.

Para el análisis del impacto de la propuesta, se aplicó una nueva evaluación que analizó el rendimiento en los aspectos de comprensión de prerrequisitos, conceptos del tema y aplicaciones en ejercicios. Se obtuvo como resultado que mientras mejor es el proceso de construcción de las bases conceptuales, mayor es el nivel de desempeño estudiantil y se logra un aprendizaje significativo.

Estos trabajos mencionan inicialmente que este se presenta como un aporte a otros estudios relativos a la función lineal, como los concernientes a la articulación de las diferentes representaciones del objeto matemático, ya que se enfoca en proponer alternativas de trabajo activo en el aula basadas en el proceso cognitivo de adquisición de conceptos, adaptables al grupo de estudio, para mejorar la comprensión de los conceptos básicos. Las recomendaciones sugeridas aquí, mencionan que dentro del estudio de las funciones lineales se recomienda trabajar interrelacionando la información de los diferentes registros de representación semiótica.

Ahora bien, Posada y Villa (2006) en su trabajo de investigación, resaltan la importancia de entender uno de los conceptos matemáticos más importantes del cálculo como es el concepto de función lineal. Para realizar su investigación, tomaron como referentes conceptuales la noción de variación, la modelación matemática como herramienta didáctica y los registros de representación semiótica. Los autores mencionan que la Teoría de Registros de Representación Semiótica permite el estudio, la sistematización, la objetivación y la comprensión del concepto de función lineal. De la misma manera, afirman que, para que el estudiante logre entender un concepto, es necesario que coordine al menos dos registros de representación semiótica de un mismo objeto.

La parte experimental fue desarrollada con 15 estudiantes de grado décimo del programa de Media Técnica, de la modalidad de Arte del instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín. Para realizar este experimento, se lleva a cabo una prueba de tipo diagnóstico; seguidamente, se seleccionaron las herramientas con las cuales se analizó y diseñó las actividades del experimento,

así como la intervención didáctica. Posteriormente, plantearon el proceso de modelación desde dos dimensiones: la primera, como herramienta motivadora en la construcción del concepto de función lineal; y, la segunda, respecto a la conceptualización matemática porque permite reconocer el concepto de función lineal como relación funcional de variables.

Posada y Villa (2006), luego de realizar la parte experimental, mencionan como conclusión que se logra observar en los estudiantes que este proceso les permitió interesarse más por la necesidad de identificar regularidades. Además, les permitió comprender los objetos matemáticos como herramientas que pueden describir fenómenos y no solamente como un lenguaje abstracto determinado por unas reglas sintácticas para su manipulación algorítmica.

A su vez, la actividad cognitiva les permitió abordar los problemas de una manera más organizada, coherente y con sentido tanto matemático como contextual. Esto posibilitó que los estudiantes reconocieran en el concepto de función lineal un modelo que describe situaciones en contextos particulares, pero además generalizables a situaciones donde intervienen razones de cambio constantes entre diferentes cantidades de magnitud.

Por otra parte, Roldán (2013) menciona que en su práctica docente con estudiantes de octavo y noveno grado observa dificultades que tienen estos en el paso de una representación a otra en el caso de una función en general, por lo que los educandos presentan confusión al encontrarse con fórmulas [representación algebraica] que corresponden a una función, mientras que otras algo similares no. Asimismo, menciona que otra de las dificultades que puede notar es el hecho de dotar de sentido y significado, el concepto de función lineal.

Por lo anterior, en este trabajo se proponen actividades de la vida cotidiana y de las mismas matemáticas que dan sentido o significado a la función cuya gráfica es una recta; y también a los elementos, atributos o parámetros que la constituyen. Para desarrollar esto, se propone una alternativa de intervención didáctica que parte del análisis de situaciones con contexto matemático y cotidiano, y la experimentación y vivencia de “prácticas de laboratorio” o experiencias para ser matematizadas con el fin de desarrollar el concepto de función lineal en la escuela secundaria.

En cuanto a los referentes conceptuales, se toma como una de las principales herramientas la modelación matemática. Asimismo, la variación, ya que las funciones lineales están consideradas en el escenario educativo colombiano dentro del dominio conceptual denominado pensamiento variacional y sistemas algebraicos como aparece en los documentos Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 2006) y Lineamientos Curriculares Matemáticas (MEN, 1998).

Finalmente, este estudio arroja conclusiones pertinentes acerca del trabajo con las funciones lineales. Entre estas, Roldán (2013) menciona que la noción de correspondencia es fundamental en las aplicaciones actuales de las matemáticas, debido a que este es un elemento importante en el potencial modelador de las funciones lineales y, además, dado que toda “aplicación” en matemáticas requiere del empleo de esta, por lo que tiene validez presentar las funciones lineales desde una correspondencia numérica entre variables. Este mismo menciona que:

La enseñanza de la función lineal debe articular de manera equilibrada las formas más importantes de representación, es decir, las formas tabulares, gráficas cartesianas y algebraicas sin dejar de lado la expresión verbal. Se debe fortalecer el paso de una a otra forma de representación empleando diferentes contextos (Roldán, 2013. p.96).

Antecedentes de los estudios realizados a la función lineal con el uso de las TIC.

Inicialmente, tenemos a Muñoz, Piedrahita & Jessie (2012), quienes presenta en el diseño e implementación de una estrategia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de la función lineal modelando situaciones problemas con el uso de las TIC en una institución educativa específica. En este sentido, identifican como problemática las dificultades que presentan los estudiantes de grado noveno en el momento de interpretar una situación problema, evidenciando así el poco manejo que tienen del lenguaje matemático.

Todo lo anterior, se debe a que la enseñanza y aprendizaje de las funciones lineales se han encaminado por la parte mecánica operativa, por la simple elaboración de una línea recta en

papel milimetrado, dejando a un lado las situaciones problemas de la vida real que se pueden modelar a través de la función lineal, permitiendo una mayor articulación con otras áreas del saber. En este sentido, proponen abordar la anterior problemática proponiendo situaciones problema a través de las TIC. Además de lo ya mencionado, se basan en la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel y la Modelación Matemática.

Desde el punto de vista metodológico, caracterizan e identifican metodologías o estrategias para la enseñanza y aprendizaje de las funciones lineales a través de TIC. Seguido de esto, construyen un aula virtual de aprendizaje que les permita a los estudiantes la interacción con las TIC. Más adelante, se proponen aplicar la estrategia elaborada en la institución que escogieron. Finalmente, evalúan el desempeño de la estrategia planteada mediante el aprendizaje significativo y la motivación obtenida por los estudiantes de dicha institución.

Algunas conclusiones de esta investigación, muestran que la incorporación de las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje, favorece el rendimiento académico de los estudiantes, puesto que hablarles en su propio lenguaje y utilizar sus propias herramientas mejora el interés y la motivación hacia las matemáticas. Asimismo, el uso de las TIC fortaleció el rol del estudiante, donde éste toma un mayor control sobre las actividades educativas, y establecen nuevas prácticas de aprendizaje apoyándose en el uso de las TIC.

Ahora bien, Muñoz, Piedrahita y Jessie (2012) mencionan que:

Se ratificó en la aplicación de esta estrategia el precepto de que las TIC bien gestionadas pueden generar verdaderos Ambientes de aprendizaje, y que de manera casi generalizada la gran mayoría de los estudiantes disfrutaron y encontraron muy útil este tipo de recursos didácticos para el aprendizaje, la comunicación y la interlocución (p.80).

Por otra parte, Calderón (2017) presenta una propuesta metodológica y aplicación de secuencias didácticas con el apoyo de GeoGebra para el aprendizaje de funciones lineales y cuadráticas en tercero de bachillerato en el año 2010 y en los Estándares de Calidad Educativa del Ministerio de Educación de Ecuador. El trabajo combina el uso de las TIC, específicamente

el software GeoGebra con una serie ordenada de actividades relacionadas entre sí denominada secuencia didáctica. De acuerdo al sustento teórico y lo establecido por el Ministerio de Educación se elaboró secuencias didácticas que efectivicen y generen aprendizajes significativos. La investigación tiene un enfoque mixto y un diseño cuasi experimental con pre y pos –test a dos grupos, uno experimental y otro de control. Al grupo experimental se le aplicó la propuesta metodológica y al grupo de control se le impartió clases sin intervención. Al grupo experimental se aplicó un cuestionario de opinión acerca de la implementación de la propuesta.

La propuesta nace por las dificultades que tienen los docentes de matemáticas a la hora de construir conocimientos de funciones lineales y cuadráticas, citamos algunos problemas como: el desinterés de los estudiantes, poco agrado hacia la asignatura, carencia de recursos didácticos, entre otros.

En cuanto a los referentes conceptuales, se tienen en cuenta el modelo constructivista con las TIC y la teoría del aprendizaje significativo. Teniendo en cuenta la metodología, se elaboró una secuencia didáctica con el apoyo de GeoGebra para el aprendizaje de funciones lineales y cuadráticas. En la secuencia didáctica se plantean unos objetivos educativos, seguido de esto unas destrezas con criterios de desempeño. De ahí, una introducción a los temas estipulados, luego unas actividades de apertura, siguiendo con las actividades de desarrollo y por último las actividades de cierre con las conclusiones de la secuencia.

Este estudio, concluye que la aplicación de una secuencia didáctica con el apoyo de GeoGebra mejoran los logros de aprendizaje de las funciones lineales y cuadráticas porque se cuenta con una serie de actividades que se elaboran con anticipación, reduciendo así los tiempos de desarrollo de destrezas, mejorando la comunicación entre el docente y los estudiantes, y fortaleciendo el razonamiento matemático y crítico. También, mencionan que el uso del software GeoGebra brinda facilidades y una mejor comprensión en el análisis de las gráficas de funciones lineales y cuadráticas.

Análogo al trabajo anterior, Martínez (2017) presenta una investigación que se diseñó e implementó como un estudio de casos que favoreció el trabajo cooperativo, lo cual permitió

fundamentar la construcción de conocimiento a partir de estrategias pedagógicas mediadas por TIC y definir qué influencia tiene su integración en el proceso de aprendizaje de la función lineal en estudiantes de grado noveno. Su metodología se basa en una investigación cualitativa, su enfoque es de carácter constructivista en el cual el autor, recurre a una generación de conocimientos cuando el estudiante hace uso de un software dinámico como lo es GeoGebra.

La problemática que aborda este autor, parte de que a pesar de la amplia expansión de la internet y la evolución que ha experimentado el software educativo en la aplicación de conceptos algebraicos, no son suficientes, ni se traducen estos recursos tecnológicos como garantía única e infalible para que los estudiantes se apropien del conocimiento de las temáticas que comprende la asignatura de álgebra. De esta manera, la ausencia de bases conceptuales algebraicas; la insuficiente aplicación del pensamiento lógico-variacional y la carencia de elementos suficientes orientados a la integración pedagógica de las TIC en los procesos de aprendizaje del álgebra y en particular de la temática denominada función lineal, son problemas que no se pueden pasar por alto.

Por lo anterior, el objetivo principal de esta investigación es el de fortalecer el criterio de los estudiantes para interactuar en sociedad y desarrollar su pensamiento variacional, generando mayores conocimientos dentro del proceso de aprendizaje de la función lineal con la contribución de las TIC, particularmente con el acceso, uso, manipulación, práctica y aplicación del software educativo GeoGebra, herramienta destinada por parte del docente y de los estudiantes tanto para comprender y comunicar las diferentes representaciones, como para simular y resolver situaciones problema del diario vivir. En los referentes conceptuales de este estudio, sale a relucir las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC).

Por otra parte, Martínez (2017) primeramente concluye que:

Una vez concluido el proceso de análisis de la información, se puede indicar que, al integrar las TIC en el aprendizaje de la función lineal, apoyado en la tecnología y en la WEB, se fomenta en los estudiantes el autoaprendizaje de los contenidos temáticos, ya que ellos libremente pueden profundizar en aquellos aspectos que lograron capturar en mayor medida su interés (p.197).

Luego concluye que, con el desarrollo de este trabajo se estimula a los estudiantes para que continúen avanzando en sus estudios integrando e incorporando las TIC en el aprendizaje de funciones lineales, desarrollando aplicativos dentro y fuera del aula escolar, situación a la que destina gran parte del tiempo libre y de esta manera, se marginaron de algunas problemáticas sociales de su entorno domiciliario.

Habiendo expuesto los antecedentes anteriores, relacionados a la enseñanza y aprendizaje de las funciones lineales, con el uso de los diversos recursos tecnológicos y con el uso del lápiz y papel para la puesta en acto de una secuencia de tareas, trabajando con los diferentes registros de representación utilizando en algunos casos la teoría de Duval, la resolución de problemas y la modelación matemática, entre otros. Es menester, mencionar que aún persiste una problemática común en la enseñanza y aprendizaje del concepto matemático.

Dentro de los trabajos que se expusieron anteriormente, no se evidencia un trabajo directo con el hecho de ver el concepto de función lineal como una correspondencia y asignación de valores, la cual se queda netamente en el proceso mecánico y algorítmico. Más aún, aunque se trabaja en algunos casos con las diversas representaciones de este concepto matemático, no se evidencia como hacen hincapié en la articulación de los mismos, entre otros aspectos. Por lo anterior, es necesario realizar este trabajo, el cual se centra en algunos elementos mencionados anteriormente y que se presenta de forma específica en lo que sigue.

1.2 Planteamiento del problema

En el aprendizaje de la función lineal, se ha puesto de manifiesto el hecho de que el proceso de aprendizaje se limita al siguiente planteamiento: inicialmente se da la expresión algebraica y con base en la manipulación de dicha expresión se hallan dos puntos de la gráfica que servirán para trazar una línea recta. Este procedimiento se adopta de manera mecánica, además de ser estático y no dejar claro el concepto de variación, proporciona una noción acotada de la función, limitando así su uso y comprensión. Lo anterior lo corrobora Fabra & Deulofeu (2000) mencionando que:

La representación de funciones todavía se reduce (por lo menos en nuestro país [España]), al trazado de la gráfica de una función dada su expresión algebraica, representación que se hace siguiendo unos pasos previamente determinados (puntos de corte, determinación de extremos, asíntotas, tendencias, etc.), utilizando técnicas relativas al cálculo de límites y derivadas y tratando de algoritmizar el paso del lenguaje algebraico al gráfico (p.4).

En el momento en que se empiezan a estudiar las funciones tratando de algoritmizar el tránsito por sus representaciones como se mencionó anteriormente, se empieza a adoptar una concepción limitada del concepto de función por parte del estudiante, ya que se está reduciendo su estudio a un simple reemplazo de valores que corresponden a unas variables, ocultando su carácter de variación y de dependencia.

En relación a lo anterior, Grueso & González (2016) mencionan que el problema consiste en que actualmente el concepto de función sólo se está presentando desde una mirada de correspondencia y se está dejando por fuera la perspectiva variacional y de dependencia, es decir, se está dejando por fuera la relación que hay entre los patrones de variación y el comportamiento de los cambios en la función.

En este mismo sentido, se dice que una de las potencialidades principales de las funciones es la de modelar situaciones de la vida real; sin embargo, al trabajarla haciendo énfasis en la correspondencia y asignación de valores, se limita su uso, dejando a un lado su potencial modelador produciendo así una limitación en la comprensión del concepto de función. Esta idea es compartida por Rey, Boubée, Sastre & Cañibano (2009) quienes afirman que:

Las limitaciones están relacionadas, muchas veces, con la ausencia del potencial modelizador de la noción de función. Uno de los conceptos constitutivos de la noción de función entendida como herramienta apta para modelizar fenómenos de cambio es la noción de dependencia. La noción de dependencia implica la existencia de un vínculo entre cantidades y conlleva la idea de que un cambio en una de las cantidades tendrá efectos sobre las otras (p.4).

Por lo que trabajar de manera mecánica mediante una correspondencia de valores también hace que se deje de lado un elemento importante en el concepto de función y es la dependencia entre variables.

Ahora bien, las funciones cuentan con varios registros de representación (representación algebraica, tabular, gráfica, representación verbal o en lenguaje natural, pictórica, etc.). Las representaciones que comúnmente se utilizan en el proceso de aprendizaje del concepto de función lineal son: la representación gráfica, algebraica y tabular. Se dice que un estudiante ha comprendido un concepto, si tiene la capacidad de interpretarlo en sus diferentes representaciones (Hitt, 2003). En este caso, el estudiante se habrá apropiado del concepto de función en la medida en que puedan interpretar, trabajar y transitar por cada una de sus diferentes representaciones, comprendiendo conscientemente cada uno de los procesos mentales que utilizaron para el estudio de cada uno.

Sin embargo, desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones como un conjunto de procedimientos mecánicos como ya se mencionó, provoca una desarticulación entre sus diferentes representaciones, trabajándose aisladamente. En este sentido, Ruiz (2000) afirma que la diversidad de elementos y representaciones en la enseñanza de funciones como el dominio, el contradominio, las gráficas, las tablas, los diagramas, entre otros, de forma aislada o sin conexión, no favorece la construcción del concepto, dada la confusión que esto causa en el estudiante al mirar muchos objetos matemáticos presentes donde el matemático no ve más que uno.

Situándonos en el concepto de continuidad de la gráfica y específicamente en la función lineal, comúnmente se presenta una dificultad por parte de los estudiantes que consideramos importante resaltar y que en el proceso de aprendizaje en ocasiones no se tiene en cuenta. Al presentar ejercicios ubicados en un contexto, los profesores observan que los estudiantes extraen los datos del ejercicio presentado en su representación verbal. Siguiendo el procedimiento o la serie de pasos mecanizados, pasan a tabular las relaciones de correspondencia de los elementos encontrados, por último, ubican los puntos en el plano cartesiano y trazan la recta que une los

puntos. Al trazar la recta uniendo cada uno de los puntos ubicados en el plano cartesiano, se está considerando la función lineal como una función continua.

Sin embargo, Leinhard et al. (1990) (Citado por Fabra & Deulofeu, 2000), menciona que decidir si un gráfico ha de ser representado de forma continua o no, no es una cuestión trivial. Esto implica que, estudiar si una función es continua o discreta merece una mayor atención en el proceso de aprendizaje, pues se presenta como un obstáculo donde a los estudiantes se les dificulta diferenciar cuando una función es continua o discontinua. Janvier (1987) (citado por Fabra & Deulofeu, 2000) menciona que:

En la mayoría del alumnado, la interpretación de cualquier gráfico cartesiano, tiende a centrarse en un número discreto de puntos, tanto si se trata de un gráfico discreto como continuo; esta tendencia a discretizar los gráficos es un obstáculo no solamente para la distinción entre discreto y continuo, sino también considerar el gráfico como un objeto, es decir, como una entidad conceptual por ella misma (p.5).

Ahora bien, el limitado espacio que ocupan las consideraciones visuales en el aula deja con pocas herramientas al estudiante cuando este se enfrente a la resolución de un problema, puesto que el análisis de un problema no solo alude a la representación algebraica, sino a todas las representaciones de función lineal en conjunto. Diversas investigaciones en educación matemática realizadas por Hitt (1998), Cantoral & Montiel (2001), Duval (2017), resaltan la importancia de construir el camino para que los estudiantes desarrollen una habilidad de visualización matemática, donde las consideraciones visuales ayuden a comprender el concepto y permitan relacionar sus diversas representaciones.

No obstante, existe un énfasis por parte de los profesores en el desarrollo de las habilidades en la representación algebraica, dejando así a las consideraciones visuales en un segundo plano, hasta el punto de tomarlas como el producto final de una serie de procesos llevados a cabo partiendo desde la representación algebraica. Frente a lo anterior Hitt (1998) señala:

Sabemos de los trabajos de Vinner (1989), Heisenberg y Dreyfus (1990), que existe de parte de los alumnos una resistencia al uso de consideraciones visuales. Estos autores

señalan que hay un predominio del pensamiento algorítmico sobre el visual, una de las causas posibles es que pensar visualmente exige demandas cognitivas superiores a las que exige el pensar algorítmicamente; otra, es que los profesores de matemáticas promueven el pensamiento algorítmico sobre el visual (p.4).

Esta predominancia de los procesos algorítmicos sobre la habilidad visual en representaciones gráficas, presenta una connotación en el camino hacia la construcción del concepto de función lineal, debido a que cuando se reflexiona o se piensa sobre el concepto siempre se alude a su representación gráfica (Hitt, 1998).

Por otra parte, los avances en la tecnología exigen replantearse las estrategias pedagógicas y didácticas, debido a que cuando se lleva a cabo un aprendizaje usando los métodos rutinarios como el lápiz y papel no se hace tan evidente la relación que hay entre las diferentes representaciones de la función lineal. Frente a lo anterior, Hitt (1998) considera que:

El uso de nuevas tecnologías para el aula como calculadoras graficadoras y/o microcomputadoras permite un mayor acceso a la representación múltiple de conceptos matemáticos, promoviendo la articulación entre diferentes representaciones de los conceptos, y así, facilitando el acceso a un nivel más importante en el aprendizaje de las matemáticas (p.18).

Sin embargo, algunos profesores se muestran apáticos frente al uso de la tecnología en el aula, ya sea por la falta de competencias en su uso o porque consideran que su uso limitará otras habilidades, como por ejemplo las realizadas en la representación algebraica. Hitt (1998) afirma que: “una gran mayoría de profesores de matemáticas rechazan el uso de calculadoras graficadoras y computadoras porque tienen la creencia que su uso inhibirá las habilidades operatorias de los estudiantes” (p.19).

Por su parte, Villa & Ruiz (2010) concluyeron en su trabajo de maestría que, aunque el uso de lápiz y papel fue necesario para apoyar el análisis y demostración formal de las conjeturas, estuvo subordinado por las ideas que fueron emergiendo de la visualización proporcionada por el software. Por lo que limitarse a seguir usando herramientas como el lápiz y el papel para la

enseñanza de la función lineal, puede limitar las estrategias de enseñanza del docente, acotando conceptos como el de variación, continuidad, dependencia, entre otros.

Por último, existe un factor local que evidencia la existencia de una problemática en el aprendizaje de la función lineal, por tal razón, se toma en consideración el Informe por colegio del cuatrienio¹ realizado por el Ministerio de educación de Colombia. Este informe proporciona el porcentaje promedio de preguntas erradas por los estudiantes para cierto grado de escolaridad y área específica, teniendo en cuenta unas competencias y aprendizajes específicos; así pues, si un porcentaje se encuentra encerrado por un círculo verde es porque la diferencia es positiva, de lo contrario, el porcentaje se encontrará encerrado por un círculo rojo.

A continuación, se presenta una tabla donde se muestran los porcentajes de respuestas incorrectas en las pruebas saber 9° realizadas en la Institución educativa Instituto Técnico de Santander de Quilichao, en comparación con la diferencia del promedio de todos los colegios del país. Es pertinente resaltar, que solo se tendrá en cuenta los aprendizajes relacionados al pensamiento numérico variacional.

Saber 9°

Aprendizajes de la competencia Comunicación

Matemáticas

1. La diferencia con el promedio de todos los colegios del país

Aprendizajes	Porcentaje de respuestas incorrectas				Diferencia con Colombia				Media
	2014	2015	2016	2017	2014	2015	2016	2017	
Usar y relacionar diferentes representaciones para modelar situaciones de variación. (Numérico Variacional)	45.5		40.6	61.5			-2.9	-6.3	-4.6
Identificar relaciones entre distintas unidades de medida de cantidades de la misma magnitud y determinar su pertinencia. (Espacial Métrico)	69.9	71.5	66.4	65.8	-5.6	-1.7	-4.8	-6.2	-4.6
Identificar expresiones numéricas y algebraicas equivalentes. (Numérico Variacional)			54.7	69.0			2.6	-8.6	-3.0
Identificar características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan. (Numérico Variacional)	35.8	74.7	43.8	62.8	5.9	-6.6	3.7	-4.3	-0.3

Ilustración 1: Resultados en porcentajes de las pruebas saber 9° de la Institución educativa Instituto Técnico.

¹ El Informe por colegio del cuatrienio es un análisis histórico y comparativo de los resultados obtenidos en las pruebas Saber 3°, 5° y 9° en las áreas de Matemáticas y Lenguaje realizadas en el año 2014 hasta el año 2017.

Con base en la información entregada en el informe se puede identificar que los estudiantes presentan dificultades en preguntas relacionadas al uso de las diversas representaciones y la articulación entre ellas en situaciones de variación, pues tuvieron un 61,5% de respuestas incorrectas en el 2017, mucho más de la mitad de las preguntas. Asimismo, tuvieron un 62,8 % en las pruebas realizadas en el 2017, en preguntas direccionadas a identificar las características de una gráfica en relación con la situación que representan. Por lo que se hace evidente unas dificultades que deben ser atendidas, relacionadas al uso y articulación de las representaciones de una situación de variación, y la caracterización de la gráfica de la misma.

Con todo lo dicho hasta ahora, se puede identificar un problema en el aprendizaje de la función lineal pues esta se estudia a partir de una correspondencia y asignación de valores, transformándose en un proceso mecánico y netamente algorítmico; sin tener en cuenta la naturaleza de las variables y dejando de lado su carácter de dependencia; trabajando de manera aislada y/o desarticuladas sus diferentes representaciones; sin considerar que los métodos rutinarios como el lápiz y papel se tornan insuficientes para el desarrollo del pensamiento variacional. Así pues, se busca mediante este trabajo responder a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo caracterizar el diseño de una secuencia de tareas para dar cuenta de la función lineal integrando GeoGebra en grado noveno de educación básica?

1.3 Objetivos

En esta sección se presentan los objetivos generales y específicos que estructuran y limitan el desarrollo de este proyecto de grado, dejando en claro que se quiere obtener inicialmente con el desarrollo de este, así como las metas específicas para llegar a una más general.

1.3.1 Objetivo general.

Caracterizar el diseño de una secuencia de tareas para dar cuenta de la función lineal integrando GeoGebra en grado noveno de educación básica

1.3.2 Objetivos específicos.

- ❖ Estipular algunos fenómenos, pensamientos y procesos matemáticos asociados al aprendizaje de la función lineal desde la perspectiva didáctica, matemática, cognitiva y curricular.
- ❖ Configurar el diseño de una secuencia de tareas integrando GeoGebra para dar cuenta de los procesos de aprendizaje relacionados con la función lineal tomando como referente el diseño de tareas para el uso con tecnología digital.
- ❖ Examinar los procesos de mediación instrumental que surgen de la implementación de la puesta en acto de la secuencia de tareas.

1.4 Justificación

En el presente trabajo se realiza el diseño de una secuencia de tareas desde la perspectiva de Margolinas (2013). Esta teoría se entiende como un enfoque que permite describir los diferentes aspectos de un concepto matemático y la forma en que están vinculados para lograr el aprendizaje de un campo conceptual por completo. Asimismo, proporciona experiencias que permiten a los estudiantes resolver a partir de tareas iniciales y sencillas tareas posteriores, las cuales abren paso para enfrentarse a matemáticas más avanzadas de lo que hubieran sido de otra manera.

Ahora bien, existen algunos estudios que justifican la realización de este trabajo y aportan elementos para el diseño, pues sugieren que el aprendizaje de la función lineal se debe llevar a cabo a partir de situaciones cercanas y conocidas por el estudiante, para que de esta manera el estudiante pueda dotar de sentido el conocimiento matemático, frente a lo anterior Francy & Chacón (2017) mencionan lo siguiente:

[...] es necesario empezar el estudio del objeto matemático función lineal tal como se originó hace miles de años: como resultado de situaciones problemáticas cercanas a la realidad de los estudiantes. De esta forma, ellos entenderán para qué sirven las Matemáticas, cuestión que ellos siempre preguntan. No se debería empezar de manera abstracta como se suele iniciar en muchos textos de enseñanza de nivel secundario (p. 101).

De la misma manera, es importante realizar un estudio donde la articulación de las representaciones de la función lineal sea tomada en cuenta, no solo por la importancia que ha ganado este tema en los últimos años, sino por seguir profundizando en este campo de la didáctica. Al respecto Hecklein, Engler, Vrancken & Müller (2011) en su investigación afirman que:

Las interrelaciones entre los diferentes sistemas de representación son la base para la interpretación de importantes temas vinculados al pensamiento variacional que actualmente parecen inalcanzables en el nivel medio. Todo esto le resta importancia al manejo mecánico de una función ya sea, por ejemplo, lineal, cuadrática o exponencial.

En este sentido, para lograr que los educandos logren articular las representaciones de la función lineal y trasciendan del trabajo mecánico y algorítmico reducido a la correspondencia y asignación de valores, es necesario desarrollar en ellos la habilidad de visualización. Frente a lo anterior, Hitt (1998) menciona que “la visualización matemática brinda una visión global, integradora y holística que permite la articulación de las representaciones de un objeto matemático” (p.1).

Por tal razón, en esta propuesta de aula se hace uso de GeoGebra, un software que puede contribuir al desarrollo de la visualización, puesto que como se menciona en la problemática del trabajo, el uso de los métodos tradicionales como el papel y lápiz limitan el desarrollo de esta habilidad y presentan la función lineal estática e invariante. En este sentido, Villa & Ruíz (2010) en las conclusiones de su trabajo, aseguran que a pesar de haber utilizado el lápiz y papel y GeoGebra para el desarrollo de actividades en las funciones, GeoGebra se impone por encima de los métodos tradicionales, ya que ofrece una mayor visualización de las relaciones funcionales.

Por su parte, GeoGebra se presenta como un software dinámico que contribuye a la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, especialmente aquellos en que implican una variación. Existen investigaciones como las de Chacón (2017), quienes se refieren a GeoGebra como una herramienta fundamental para el estudio de objetos matemáticos como la función lineal por su carácter dinámico.

De todo lo anterior, los autores antes mencionados designan al software dinámico GeoGebra cómo una herramienta capaz de presentar situaciones que le permitan al estudiante desarrollar la habilidad de visualización, la cual supera los métodos tradicionales como el papel y lápiz en este desempeño, haciéndose ver como una herramienta eficaz en el trabajo con funciones

Por último, el proceso de implementación se llevará a cabo en el grado noveno de la Institución Educativa Instituto Técnico de Santander de Quilichao para verificar las variables de análisis; se eligió esta institución, puesto que esta presenta unas necesidades específicas expuestas en la problemática.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA

En este capítulo se explicita el marco teórico de referencia, que fundamenta el problema de indagación del trabajo de investigación, el cual se divide en cuatro dimensiones: la dimensión didáctica que se desarrolla a partir del Diseño de Tareas en Educación Matemáticas y la Visualización Matemática; la dimensión cognitiva que aborda lo concerniente a la Mediación y Génesis Instrumental; la dimensión matemática relacionada con todos los aspectos matemáticos acerca de la función lineal y la dimensión curricular que abarca todos los documentos curriculares y normativos necesarios en este trabajo.

2.1 Dimensión Didáctica

En el presente trabajo se diseña una secuencia de tareas teniendo como referente el diseño de tareas para el uso con tecnología digital (Margolinas, 2013) y visualización matemática (Hitt, 2003). En este sentido, se presentan a continuación algunos aspectos relevantes de estos referentes teóricos.

2.1.1 Diseño de tareas en educación matemática.

Este referente teórico propuesto por Margolinas (2013) permite estudiar varios aspectos del concepto de la función lineal y la manera en que se encuentran vinculados, esto con el objetivo de lograr un aprendizaje completo del concepto matemático; además, permite estructurar el diseño de la secuencia de tareas y decidir sobre el tipo de diseño que se va a emplear. A continuación se detallan elementos significativos de este referente teórico para el diseño de la secuencia.

2.1.1.1 Significado de tareas.

Inicialmente, al ser una secuencia de las tareas; es necesario preguntarse por el significado de la palabra “tarea”. En este sentido Margolinas (2013) menciona que las tareas son todas aquellas

actividades que se le presentan al estudiante para que conozca y se apropie de los elementos del concepto que se quiere movilizar; en el presente trabajo de investigación se pretende movilizar algunos elementos de la función lineal.

Ahora bien, Margolinas (2013) menciona que las tareas también pueden ser cualquier cosa que el profesor utilice para enseñar matemáticas, para trabajar interactivamente con los estudiantes y para invitarlos a hacer algo. A su vez, el mismo autor menciona que las tareas también pueden ser cualquier cosa que los estudiantes decidan hacer por sí mismo en una situación particular de aprendizaje del concepto matemático a trabajar.

De lo anterior, se puede concluir que las tareas son un conjunto de herramientas de mediación para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así pues, en este trabajo de investigación las tareas están enfocadas en el aprendizaje de la función lineal haciendo uso de GeoGebra.

2.1.1.2 Diseño de una tarea.

Por otra parte, en el presente estudio se diseña un conjunto de tareas con la intención de movilizar algunos elementos en torno al concepto de función lineal; sin embargo, Margolinas (2013) menciona que el alcance y el detalle del diseño varía de acuerdo a cómo se trabaja con las tareas y describe algunas formas en las cuales se puede estructurar el diseño de una tarea.

El autor menciona que en algunos diseños puede haber provisión de una pregunta o algún material físico, sin un objeto escrito que describa la tarea por completo; sino más bien una serie de cosas que el maestro podría decir, tal vez con el apoyo de algunas indicaciones escritas (Margolinas, 2013). En esta misma, los alumnos pueden hacer preguntas o comentarios a los que el profesor debe responder, y parte del diseño es tratar de anticiparse a ellos y tener una idea general de la forma de respuestas que complementarán el diseño de la tarea.

Este trabajo tiene en cuenta las características anteriores, ya que se parte de dos situaciones relacionadas al contexto real de los estudiantes y a los elementos que se trabajan relacionados a

la función lineal, se les da un espacio de interacción y exploración con sus respectivas indicaciones e instrucciones, se plantean preguntas relacionadas a las actividades realizadas en el software y es importante resaltar que estas preguntas irán aumentando de complejidad.

2.1.1.3 Secuencia de tareas.

En esta teoría, el autor menciona que las tareas no se deben considerar como eventos individuales, por lo cual es importante abordar la cuestión de las secuencias de tareas. Margolinas (2013) menciona que para lograr el objetivo de enseñar un campo conceptual por completo (En este caso la función lineal), tenemos que describir los diferentes aspectos de este conocimiento y la forma en que se encuentran vinculados. En este sentido, nos dice que las primeras tareas de una secuencia deben proporcionar experiencias que permitan al estudiante resolver tareas posteriores, permitiéndole enfrentarse a matemáticas más avanzadas.

Asimismo, para comprender la estructura de una secuencia de tareas y su articulación, es necesario comprender que en el proceso de aprendizaje el estudiante en un primer momento de encuentro con el diseño y exploración va adquiriendo propiedades y elementos que en un inicio serán un saber implícito; este saber se memoriza, se utiliza y se relaciona con los elementos posteriores con los que se encuentre el estudiante para luego en un momento final, el docente lo formalice y transforme dicho conocimiento implícito en un conocimiento explícito para el estudiante que incluso puede relacionar con su entorno y saber cultural.

En este trabajo, los estudiantes se enfrentan a una primera situación que busca movilizar un concepto específico de la función lineal; el cual es la dependencia que existe entre las variables de una función. Los estudiantes se enfrentan al diseño que se ha planteado y a partir de su interacción y resolución de preguntas que acompañan la secuencia van adquiriendo un saber implícito que tendrá dos objetivos: la explicitación del conocimiento por parte del docente y por otro lado tener unos conocimientos previos para las siguientes tareas.

En la segunda tarea, se busca que el estudiante obtenga elementos para articular y relacionar las representaciones de una función lineal, adquiriendo más de estos saberes implícitos a través de la interacción con el software y la resolución de preguntas. Finalmente, la tarea final es similar a la anterior, recoge todos los elementos observados y estudiados durante las otras tareas para lograr el desarrollo de esta tarea junto a las actividades que la integran. Es importante resaltar que, el docente formaliza todos los elementos, propiedades, símbolos, representaciones y definiciones estudiados implícitamente durante cada tarea; transformando el saber implícito en un saber explícito y formalizado.

Por su parte Margolinas (2013) describen tres tipos de secuencias de tareas: el primer tipo es una secuencia de tareas en la cual existe un problema constante y fácil de resolver y otro en el cual se hace necesaria una estrategia de resolución. Otro tipo de secuencia consiste en aumentar el nivel de complejidad de un problema mediante la adición constante de elementos a medida que se avanza. Un tercer tipo describe una secuencia de tareas en la cual el concepto por sí mismo va adoptando complejidad en la medida en que se indaga y se investiga más por este.

El tipo de secuencia de tareas que se utiliza en el presente trabajo presenta interrogantes que inicialmente son sencillas y fáciles de interpretar, pero a medida que avanza un estudiante por la tarea la dificultad de estas tareas va incrementando, al mismo tiempo, para llevar a cabo la tarea dos es necesario tener unos conocimientos previos que los brinda la tarea uno y la tarea tres el mismo caso en relación con la tarea dos.

2.1.2 Diseño de tareas con uso de tecnología digital.

Por último, las tareas de la secuencia de tareas fueron diseñadas tomando como referente el documento “diseño de tareas con uso de tecnología digital” de la autoría de Thomas & Lin (citados por Margolinas, 2013); puesto que, este trabajo de investigación hace uso del software GeoGebra para el aprendizaje de algunos elementos de la función lineal.

Así pues, las tareas serán el punto de atención, pues estas serán las encargadas de fomentar el aprendizaje y la comprensión de las matemáticas. Según Artigue (2002, citado por Margolinas

2013) las tareas deben ir más allá de los ejercicios rutinarios e incluir una combinación de razonamiento y trabajos de rutina; por tanto, los estudiantes deberán resolver tareas que tengan un valor pragmático o epistemológico.

Las tareas de valor pragmático o también denominadas tareas de procedimiento, son del tipo: resolver, dibujar, encontrar, etc... y no lograrán una construcción del concepto matemático (Thomas, 2009a, p. 152, citado por Margolinas 2013). Por otro lado, están las tareas de valor epistémico, éstas se aprecian y se evalúan de acuerdo a su potencial productivo; respecto a lo anterior Kieran y Drijvers (2006, citado por Margolinas 2013) sugieren que una tarea con valor epistémico deben invitar al estudiante a razonar sobre la información que en este caso le puede brindar GeoGebra y que a través de las múltiples vistas que este software le brinda, pueda estudiar y articular cada una de las representaciones de la función lineal, asimismo, logre llegar a una generalización de las situaciones planteadas en las actividades.

Es pertinente resaltar que en el presente trabajo de investigación las tareas propuestas tienen un valor tanto pragmático, como epistemológico. Ambos tipos de tareas cumplen una función importante, pues la primera es necesaria para que los estudiantes se familiaricen con la actividad propuesta en GeoGebra y puedan extraer información que quizá no hayan detallado; esta información será relevante para dar respuesta a las preguntas con mayor dificultad que se encuentran relacionadas al valor epistemológico de cada tarea.

2.1.3 Visualización matemática.

Se contempla ahora la visualización matemática, puesto que en este trabajo toma importancia la relación e interpretación de imágenes visuales a través del software dinámico GeoGebra por parte de los estudiantes.

Es pertinente primero caracterizar la diferencia entre visualización y la percepción, pues el hecho de presentarle una gráfica al estudiante para que la observe no implica que esté realizando un proceso de visualización, al respecto Hitt (2003) afirma que:

La percepción la tomaremos como la función por la que la mente de un individuo organiza sus sensaciones y se forma una representación interna de los objetos externos, en cambio, la visualización tiene que ver con un conocimiento directo e intuitivo. (p.216)

De esta manera, cuando le presentamos una gráfica al estudiante para que la observe, él estará realizando una percepción de ella cuando identifique algunos rasgos de la gráfica sin mayor trascendencia, sin embargo, el estudiante realizará una visualización cuando identifique los subconceptos que se encuentran inmersos en dicha representación.

Así, las consideraciones visuales son importantes para la resolución de problemas y para el aprendizaje de las matemáticas, según Hitt (1998) “La visualización matemática brinda una visión global, integradora, holística, que articula, libre de contradicciones, representaciones de varios sistemas” (p. 1). Con base en lo anterior, la visualización matemática permite la articulación de las representaciones de un objeto matemático y por tal razón, se hace más eficiente su aprendizaje.

En resumidas palabras, Hitt (2003) define la visualización matemática a partir de las palabras de Hershkowitz: “la visualización matemática como la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar, y reflexionar sobre información visual” (p, 220). Por tal razón, este trabajo hace un estudio de la función lineal desde la interpretación de la gráfica y las variaciones que esta pueda tener cuando las variables son continuas o discretas. Asimismo, se dispone en una misma pantalla otras ventanas que contienen la representación tabular y algebraica, de manera que el estudiante pueda relacionar los elementos de la gráfica de una función lineal con sus otras representaciones.

Habiendo expuesto los elementos fuertes del diseño de tareas en educación matemáticas y de la Visualización matemática, los cuales son base para la configuración de la secuencia de tareas, es importante preguntarse por cómo se van a identificar los procesos que lleva a cabo el estudiante a la hora de enfrentarse con el diseño y de qué manera se examinan los resultados obtenidos para dar cuenta de los resultados que surgen del mismo. En este sentido, surge una

dimensión cognitiva que brinde elementos necesarios para realizar lo dicho anteriormente la cual se expone seguidamente.

2.2 Dimensión cognitiva

La dimensión cognitiva toma en consideración las teorías de la Mediación Instrumental y Génesis Instrumental, las cuales dan cuenta de los procesos que lleva a cabo el estudiante a través de la interacción con un artefacto para transformarlo a partir de unos esquemas de acción y de uso en un instrumento. Lo anterior, muestra en qué medida la mediación que se da entre el estudiante y la secuencia de tareas contribuye al aprendizaje de algunos elementos de la función lineal en grado noveno. A continuación, se exponen las teorías que se mencionan en el apartado anterior:

2.2.1 La Mediación Instrumental.

Rabardel (1995) plantea un enfoque teórico donde se pretende mostrar la complejidad del instrumento, la génesis del instrumento en el sujeto enfatizando en la relación de este con la actividad humana, pues se plantea que los instrumentos por ser desarrollos de la historia social y cultural, presentan una fuerte influencia en el sujeto, por tanto, constituyen estructuras cognitivas que median la construcción del conocimiento. Por lo tanto, la mediación instrumental se interesa en el análisis de las relaciones que surgen cuando se incorporan e integran instrumentos a las actividades de carácter educativo, dichas relaciones que influyen en la construcción del conocimiento particularmente del matemático, son representadas a partir del Sistema Didáctico que se entiende como el sistema de relaciones entre estudiante, profesor y saber que se dan en la actividad instrumentada.

Se tiene en cuenta la mediación de GeoGebra, para ubicar en un contexto las actividades de variación y cambio, dándole importancia a la visualización matemática. El aprendizaje en el cual hay una participación de instrumentos no se da de forma inmediata, sino a través de la mediación Instrumental, según Rabardel (1995) “la posición intermediaria del instrumento hace de él un

mediador de las relaciones entre el sujeto y el objeto” (p.135), donde el sujeto actúa sobre el objeto mediante una actividad establecida o que se da.

En la actividad instrumentada es necesario conceptualizar las Génesis Instrumentales que realizan los estudiantes cuando interactúan con diferentes artefactos. Sin embargo, es menester preguntarse qué se entiende por artefacto e instrumento. Rabardel (1991) menciona que en la Génesis instrumental el artefacto es un término para definir los objetos materiales y simbólicos que están presentes en toda actividad humana. Por otro lado, Rabardel (2007) define el instrumento como “el artefacto en situación, inscrito en un uso, en una relación instrumental con la acción del sujeto, como medio de esta acción” (p.92)

Ahora bien, la génesis instrumental, es el proceso mediante el cual los artefactos se transforman en instrumentos. Un artefacto, es entendido como “un objeto material o abstracto que emplea un usuario para realizar cierto tipo de actividad, puede ser un objeto sin significado a menos que el usuario lo haya utilizado antes o haya visto cómo lo usan otros” (Rabardel, 1995).

De este modo Rabardel (1999, citado por Ruiz & Santacruz, 2010) parte de considerar que los instrumentos no están dados, por esta razón el constructor de Génesis Instrumental se encarga básicamente del proceso de construcción de un instrumento por parte del sujeto a partir de un artefacto, es decir, el paso de artefacto a instrumento, en dicho proceso de construcción se deben de establecer y tener en cuenta unas condiciones que dependen o se determinan en la medida en que se articulan con los conocimientos del sujeto y que varían según la actividad, este proceso de construcción se desarrolla a partir de dos fases, una de ellas es la de instrumentalización, ligada al artefacto, donde el sujeto conoce las potencialidades, atributos y características para construir nuevas funciones del artefacto dirigidas hacia usos específicos.

En este sentido, para la instrumentalización el objetivo es que el sujeto al usar el artefacto se apropie de sus propiedades para lo cual fue construido y lo adapta a sus necesidades. (Trouche, 2005, p.148). (Citado por Del Castillo & Montiel, s.f.a) menciona que:

La instrumentalización es la expresión de la actividad específica de un sujeto sobre lo que el usuario piensa en relación para qué fue construido el artefacto y cómo debe ser utilizado, la elaboración de un instrumento ocurre en su uso. La Instrumentalización conduce así al enriquecimiento de un artefacto, o a su empobrecimiento (p.464).

Asimismo, en la instrumentación el sujeto debe construir esquemas de uso, mientras realiza un tipo de tarea, estos esquemas de uso son a largo plazo. A esto, Del Castillo & Montiel, (s.f.a) mencionan que:

El proceso de instrumentación se refiere a la construcción de esquemas de uso por el sujeto. Los esquemas de uso tienen una componente privada, es decir, una construcción consustancial al sujeto. Tienen también un componente social, es decir, resultante de la interacción del sujeto con los otros usuarios, diseñadores y de las distintas ayudas exteriores (p.1677)

De lo anterior, los esquemas de utilización son definidos como una estructuración mental, en el cual el sujeto construye y se piensa habilidades, técnicas y estrategias conceptuales al usar el artefacto en un aula de clase. Se distingue dos niveles de esquemas de utilización:

- ❖ Los esquemas de uso están orientados a las actividades secundarias, es decir, a la gestión de las características y propiedades, que corresponden a las acciones naturales del artefacto. En este primer nivel se sitúan los esquemas de utilización elementales, por ejemplo, la manipulación del deslizador (Rabardel, 1995, p.172).
- ❖ Los esquemas de acción instrumentada, están orientados a mostrar los tipos específicos de transformaciones en los objetos de las actividades principales, para las que el artefacto es un medio de realización. Los esquemas del primer nivel (esquemas de uso) constituyen, según la terminología de Cellerier, módulos especializados, que se coordinan unos con otros y también con otros esquemas, se asimilan y se acomodan recíprocamente para construir los esquemas de acción instrumentada (Rabardel, 1995, p.172).

Por esta razón, al tener presentes los esquemas de uso se construye una secuencia de tareas en un software de aprendizaje tecnológico, en la cual los estudiantes tienen diferentes tipos de representaciones, como gráficas y el tabular que permiten hacer un estudio sobre algunos elementos de la función lineal e intentar lograr su articulación. En este sentido, Rabardel (1999, citado por Ruiz & Santacruz, 2010).

Enfatiza que el impacto de los instrumentos en la actividad cognitiva del sujeto está relacionado con las limitaciones específicas de los artefactos y las acciones que son posibles con ellos. Es decir, los instrumentos ofrecen a los estudiantes nuevas formas de exploración, sin embargo, siempre van a existir limitaciones y restricciones propias del artefacto (p. 583).

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, se da a conocer el diseño de tareas en educación matemáticas como eje principal para la elaboración de una secuencia de tareas y que, además tiene en cuenta en un aspecto cognitivo la Mediación y Génesis Instrumental para poner de manifiesto los procesos cognitivos que lleva a cabo el estudiante en el momento de aprender un concepto matemático. En este sentido, es importante definir el concepto matemático que se da a conocer mediante la implementación de la secuencia de tareas; por lo cual, se hace necesaria una dimensión matemática que logre especificar el concepto de función lineal y los elementos que se abordan de este en el presente trabajo de investigación. Lo anterior se presenta a continuación:

2.3 Dimensión matemática

Se presenta de manera general definiciones acerca del concepto de función, función lineal, se describen algunas de las representaciones de una función, así como la definición de sus diversos elementos como, por ejemplo, la pendiente, las variables (Dependiente e Independiente), entre otros. Es importante mencionar que no se tienen en cuenta todos los elementos que hacen parte del concepto de función ya que se especifica en varios apartados que el presente trabajo de investigación solo se centra en algunos elementos de este objeto matemático. Entre esos elementos, se destacan algunas de las representaciones de una función lineal, la continuidad de una función, la dependencia entre las variables de una función, entre otros elementos.

Inicialmente, las definiciones asociadas al concepto de función dejan ver que este se entiende como una relación guiada por una regla que existe entre dos variables. En este sentido, una función es una regla. Con lo anterior, se define una función como: Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B . (Stewart, Redlin & Watson, 2012, p.143).

En esta dimensión, es necesario determinar una definición formal de función, por lo cual Saldanha & Thompson (1998; citados por Del Castillo & Montiel, s.f.a.) mencionan dos aspectos que se deben tener en cuenta:

- ❖ La función es una relación entre cantidades, las cuales pueden ser representadas por un par ordenado cuyas coordenadas representan valores de dos cantidades simultáneamente,
- ❖ Y conlleva a la idea de que dos valores de las cantidades pueden, en efecto variar.

Dado lo anterior, las funciones se constituyen como un saber para describir y modelar fenómenos, partiendo de contextos establecidos a partir de relaciones entre magnitudes que cambian, donde se pueden identificar las cantidades que permanecen invariantes y las que cambian según la situación. El símbolo que representa un número arbitrario del dominio de una función f se llama variable independiente. El símbolo que representa un número en el rango de f se llama variable dependiente. Por tanto, si escribimos $y = f(x)$, entonces x es la variable independiente y y es la variable dependiente.

Cuatro formas de representar una función.

Podemos describir una función específica en las siguientes cuatro formas:

- ❖ verbalmente (por descripción en palabras)
- ❖ algebraicamente (por una fórmula explícita)
- ❖ visualmente (por una gráfica)
- ❖ numéricamente (por una tabla de valores)

Una función individual puede estar representada en las cuatro formas, y con frecuencia es útil pasar de una representación a otra para adquirir más conocimientos sobre la función. No obstante, ciertas funciones se describen en forma más natural por medio de un método que por los otros.

La gráfica de una función.

La forma más importante de visualizar una función es por medio de su gráfica. Si f es una función con dominio A , entonces la gráfica de f es el conjunto de pares ordenados $\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ localizados en un plano de coordenadas. En otras palabras, la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$; esto es, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. La gráfica de una función f da un retrato del comportamiento o “historia de la vida” de la función. Podemos leer el valor de $f(x)$ a partir de la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto x (ver Ilustración 2).

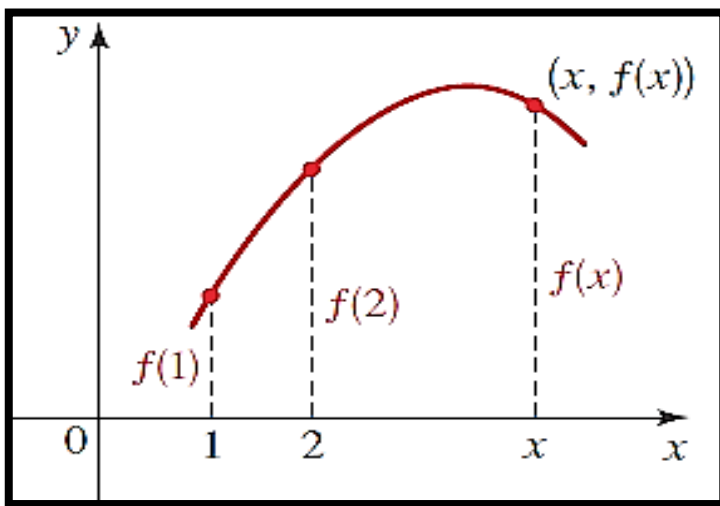


Ilustración 2: La altura de la gráfica sobre el punto x es el valor de $f(x)$.

Fuente: Stewart, Redlin & Watson, (2012) p. 153

Una función f de la forma $f(x) = mx + b$ se denomina función lineal porque su gráfica es la gráfica de la ecuación $y = mx + b$, que representa una recta con pendiente m y punto de intersección b en y . Un caso especial de una función lineal se presenta cuando la pendiente es

$m = 0$. La función $f(x) = b$, donde b es un número determinado, recibe el nombre de función constante porque todos sus valores son el mismo número, es decir b . Su gráfica es la recta horizontal $y = b$. La Ilustración 3 muestra las gráficas de la función constante $f(x) = 3$ y la función lineal $f(x) = 2x + 1$.

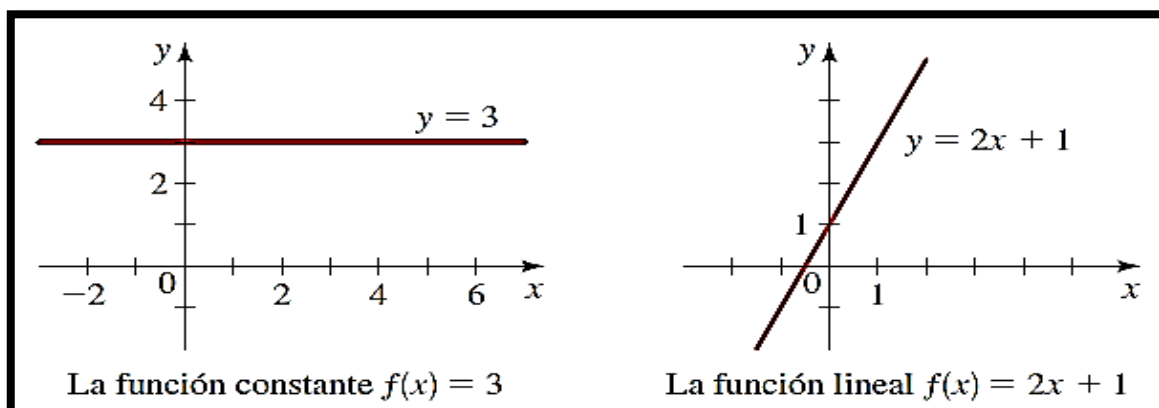


Ilustración 3: Función constante y función lineal.

Fuente: Stewart, Redlin & Watson, (2012) p. 153

Ahora bien, cuando se habla de función también se está tratando con los diferentes tipos de función, por ejemplo: la función lineal, cuadrática, cúbica, polinómica, trigonométrica, logarítmica, exponencial y afín. En este sentido, la función lineal es de las más importantes en la aplicación de modelar contextos tomados directamente de un fenómeno real, además que es muy rápida en la interpretación de la información obtenida.

La función lineal $f(x) = ax$ puede ser representada a través de una gráfica, al unir de manera secuencial los puntos de los pares ordenados (x, y) , en una línea recta que pasa por el origen de coordenadas. Un aspecto notorio que se percibe de la gráfica de las funciones lineales, es su pendiente, la cual presenta la inclinación y la dirección, la cual representa el crecimiento o decrecimiento de los valores de las variables.

El reconocimiento de las variables que se encuentran en las funciones lineales y afines se da mediante el análisis de la razón entre los cambios de la variable $f(x)$ con respecto a x . Es decir, que se toman dos puntos correspondientes $P_1(x_1, f(x_1))$ y $P_2(x_2, f(x_2))$ el cociente de

la diferencia entre dos valores de cada variable $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$. Se tienen que $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2) - (x_1)} = m$. Gráficamente, se representa la pendiente m como en la

Ilustración 4:

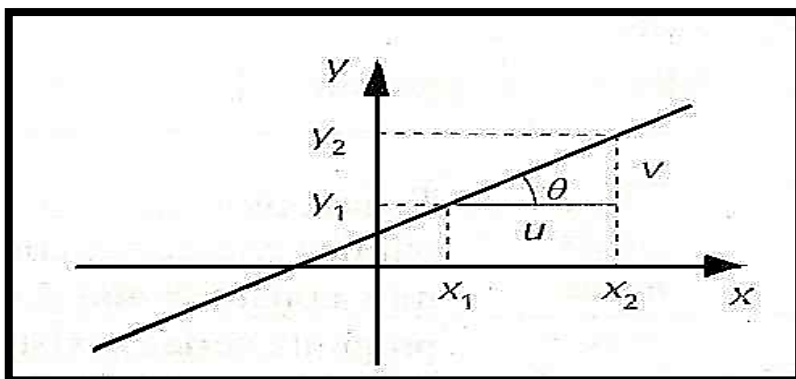


Ilustración 4: Representación gráfica de la pendiente.

Fuente: Hitt (2002), (citado por Saa & Trochez (2014)) p.37

Se asume el concepto de pendiente m como un elemento importante en la comprensión del concepto de función lineal, debido a la relación con algunos elementos del cálculo, como la razón de cambio.

Existen dos situaciones en cuanto a los valores que puede tomar la ordenada b , uno de ellos es cuando la función lineal pasa por el origen $(0,0)$, es decir $f(x) = ax$ con $b = 0$, se pueden dar los siguientes casos representados en la Tabla 1.

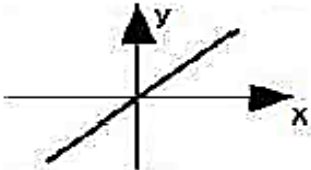
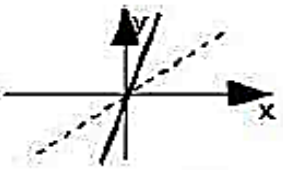
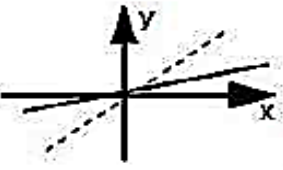
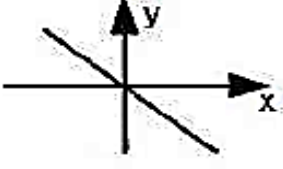
Representación algebraica	Valor de la pendiente	Valor de la ordenada al origen	Representación gráfica	Análisis de la gráfica en relación con los cuadrantes
$f(x) = x$	$m = 1$	$b = 0$		$m > 0$ cuadrantes I y III
$f(x) = 3x$	$m = 3$	$b = 0$		$m > 0$ cuadrantes I y III
$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)x$	$m = \frac{1}{3}$	$b = 0$		$m > 0$ cuadrantes I y III
$f(x) = -x$	$m = -1$	$b = 0$		$m < 0$ cuadrantes II y IV

Tabla 1: Representaciones de la función lineal con pendiente igual a cero.

Fuente: Hitt (2002), (citado por Saa & Trochez (2014)) p. 38

Cuando el valor de la ordenada b es diferente de cero, es decir, una función f de la forma $f(x) = mx + b$ con $b \neq 0$, se conoce como función afín, donde m es la pendiente de la recta y b es la longitud del cruce con el eje al origen. La clasificación de las funciones lineales en su posición en el plano cartesiano se da, en la Tabla 2:

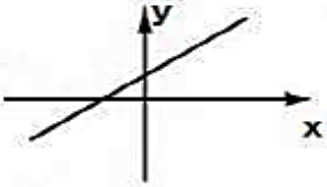
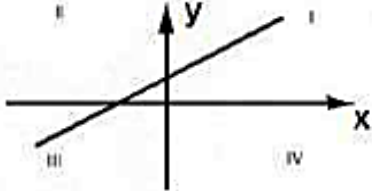
Representaciones algebraica	Representación gráfica (cuando $m > 0, b > 0$)	Ejes cartesianos y cuadrantes
$f(x) = mx + b$		

Tabla 2: Representaciones de la función a fin.

Fuente: Hitt (2002), (citado por Saa & Trochez (2014)) p. 39

La función afín permite modelar situaciones presentadas en un contexto real matemático, por ejemplo, el costo de enviar un paquete por correo según su peso (en función del peso). La expresión matemática para modelar la situación presentada es la de tipo $y = mx + b$ donde y es el precio a pagar por el envío en función de m como costo del peso enviado y como el cargo básico o impuesto por dicho paquete.

Todas las dimensiones expuestas anteriormente, hacen parte de los análisis preliminares propios de la Micro Ingeniería Didáctica; haciendo una documentación de todos los aspectos didácticos, cognitivos y matemáticos del concepto matemático. Ahora bien, al ser una propuesta de aula que se implementa en una institución educativa, se tienen en cuenta todos los aspectos normativos que rigen la educación en el país; es decir, no se deja de lado lo que propone el Ministerio de Educación Nacional y se hace necesario incluir una dimensión curricular que dé cuenta de todo lo propuesto en los documentos curriculares sobre el aprendizaje del concepto matemático, el pensamiento variacional y el trabajo con la incorporación de herramientas tecnológicas. En este sentido, Se expone a continuación la dimensión curricular basada en todo lo mencionado anteriormente:

2.4 Dimensión curricular

Para empezar, se consideran las propuestas del Ministerio de educación nacional en los lineamientos curriculares en matemáticas (1998), donde se hace énfasis en la importancia de proponer situaciones problema relacionadas a fenómenos de cambio y de variación de la cotidianidad de los estudiantes, teniendo en cuenta que al trabajar sobre estas situaciones el estudiante podrá darle un sentido y un significado al concepto que se esté estudiando.

De igual modo, los estándares básicos por competencias en matemáticas exponen que el estudio del cambio se puede hacer a través de fenómenos que impliquen una variación; de esta manera, se podría tener acercamientos al desarrollo del pensamiento variacional y al concepto de función entendiéndolo como una relación de dependencia y no tanto como una relación de correspondencia de variables. En palabras del MEN (2006):

El pensamiento variacional cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas (p.66).

En relación a lo anterior, el ministerio de educación propone estudiar la variación desde diferentes contextos, incluyendo los contextos externos a la propia disciplina y otras ciencias, ya que el estudio de la variación desde diferentes contextos permite analizar fenómenos asociados a diversas magnitudes que presentan cierta complejidad al ser estudiadas, todo esto por su fuerte grado de abstracción.

En este mismo orden de ideas, el MEN a través del documento nuevas tecnologías y currículo de matemáticas (1999) plantea que “un objeto matemático tiene múltiples representaciones y entre más sistemas de representación se trabajen, se comprenderá mejor un concepto matemático en toda su dimensión” (p, 27).

Por lo que es significativo denotar la importancia que el MEN le da a la actividad matemática mediada por el computador, puesto que este se muestra como una herramienta dócil para lograr enlazar las representaciones de un objeto, dado que permite ver las diferentes representaciones de

un objeto en una misma pantalla y si se llegase a realizar un cambio en una representación, se podrá observar los cambios en las otras representaciones (MEN, 2016, p.35).

Por otro lado, los lineamientos curriculares fundamentan teórica y epistemológicamente cada elemento cognitivo, didáctico y matemático para la consolidación del currículo; por lo que, las matemáticas desde los lineamientos curriculares se tornan fundamentales para el desarrollo integral de los estudiantes, de tal manera que estos puedan enfrentar los retos que presenta el mundo actual.

Podemos distinguir dentro de los lineamientos curriculares tres ejes conceptuales, necesarios para lograr lo mencionado anteriormente. A continuación, vamos a mencionarlos y a describir los que ciñen nuestro trabajo.

El primero de ellos es el eje de los conocimientos básicos, el cual se encuentra compuesto por cinco tipos de pensamiento: numérico y sistemas numéricos; espacial y sistemas geométricos; métrico y sistemas de medidas; aleatorio y los sistemas de datos; variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

El estudio de la función lineal desde los lineamientos curriculares se encuentra enmarcado en el pensamiento variacional; según el MEN (2006):

Este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos [...] (p.66).

En la educación básica secundaria este pensamiento toma importancia, puesto que, a través de este se estudia la noción de variación y cambio, para ello se van a proponer situaciones contextualizadas al estudiante.

Para el estudio del pensamiento variacional, el MEN propone hacerlo desde diferentes representaciones como:

[...] los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las representaciones pictóricas e icónicas, la instruccional (programación), la mecánica (molinos), las fórmulas y las expresiones analíticas. (MEN, 1998, p.50).

Por lo que, para el desarrollo de este trabajo se tendrán en cuenta las representaciones algebraicas, tabular y gráfica.

Cabe señalar que el pensamiento variacional se encuentra relacionado con otros pensamientos, en especial el pensamiento numérico y el pensamiento métrico. El pensamiento variacional se relaciona con el pensamiento métrico, dado que, involucra situaciones problema donde se requiere realizar procesos de mediciones, elaboración de registros y establecimiento de relaciones y cantidades. Asimismo, se relaciona con el pensamiento numérico en la medida que se puedan analizar las relaciones de las variables mediante cálculos y procedimientos algebraicos.

El segundo eje se compone por cinco procesos generales: la formulación y resolución de problemas; la modelación y fenómenos de la realidad; la comunicación; el razonamiento; y la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos. El presente trabajo hace hincapié en fortalecer la resolución y el planteamiento de problemas, dado que el estudiante debe desarrollar unas estrategias para poder llevar a cabo las actividades en los ambientes de aprendizaje y en el desarrollo de las tareas. Además, el componente de la comunicación también hace parte de esta propuesta, puesto que en cada una de las tareas los estudiantes tendrán la oportunidad de compartir sus ideas, argumentar y debatir con sus pares sobre lo que se está aprendiendo.

En el último eje se contemplan los contextos: uno de ellos es el de las mismas matemáticas; otro es el de la vida cotidiana; y el de otras ciencias. Este trabajo se enmarca en un contexto de la vida cotidiana, más específicamente “el desperdicio del agua”; por lo que se hace un estudio de la función lineal desde situaciones contextualizadas.

Asimismo, con el propósito de aterrizar y estandarizar lo propuesto en los lineamientos curriculares, el MEN propone los estándares básicos por competencias en matemáticas. Este documento trae consigo unas metas específicas asociadas a un conjunto de grados (primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno, décimo a undécimo) de escolaridad; dichas metas se encuentran organizadas en los procesos generales ya propuestos en los lineamientos curriculares y tienen como fin el desarrollo de competencias sobre el desarrollo de contenidos.

Así pues, el MEN (2006) define competencia de la siguiente manera:

Todas estas dimensiones se articulan claramente con una noción amplia de competencia como conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores. Esta noción supera la más usual y restringida que describe la competencia como saber hacer en contexto en tareas y situaciones distintas de aquellas a las cuales se aprendió a responder en el aula de clase (p.49).

De esta manera, entendemos que el fin de la educación en Colombia es formar estudiantes matemáticamente competentes, capaces de tomar decisiones y razonar frente a los retos y problemas en su vida diaria.

Según el MEN, debido a la complejidad conceptual y la gradualidad del aprendizaje de las matemáticas, debe existir entre los estándares una alta coherencia tanto vertical, como horizontal. Por lo que, para el desarrollo de este trabajo se toma en cuenta la coherencia vertical y horizontal que sugiere el MEN (2006) de la siguiente manera:

La primera [coherencia vertical] está dada por la relación de un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados. La segunda [coherencia horizontal] está dada por la relación que tiene un estándar determinado con los estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados (p, 78).

A continuación, presentamos la coherencia horizontal y vertical de los estándares básicos por competencias para el diseño de una secuencia de tareas centrada en el aprendizaje de algunos conceptos de la función lineal:

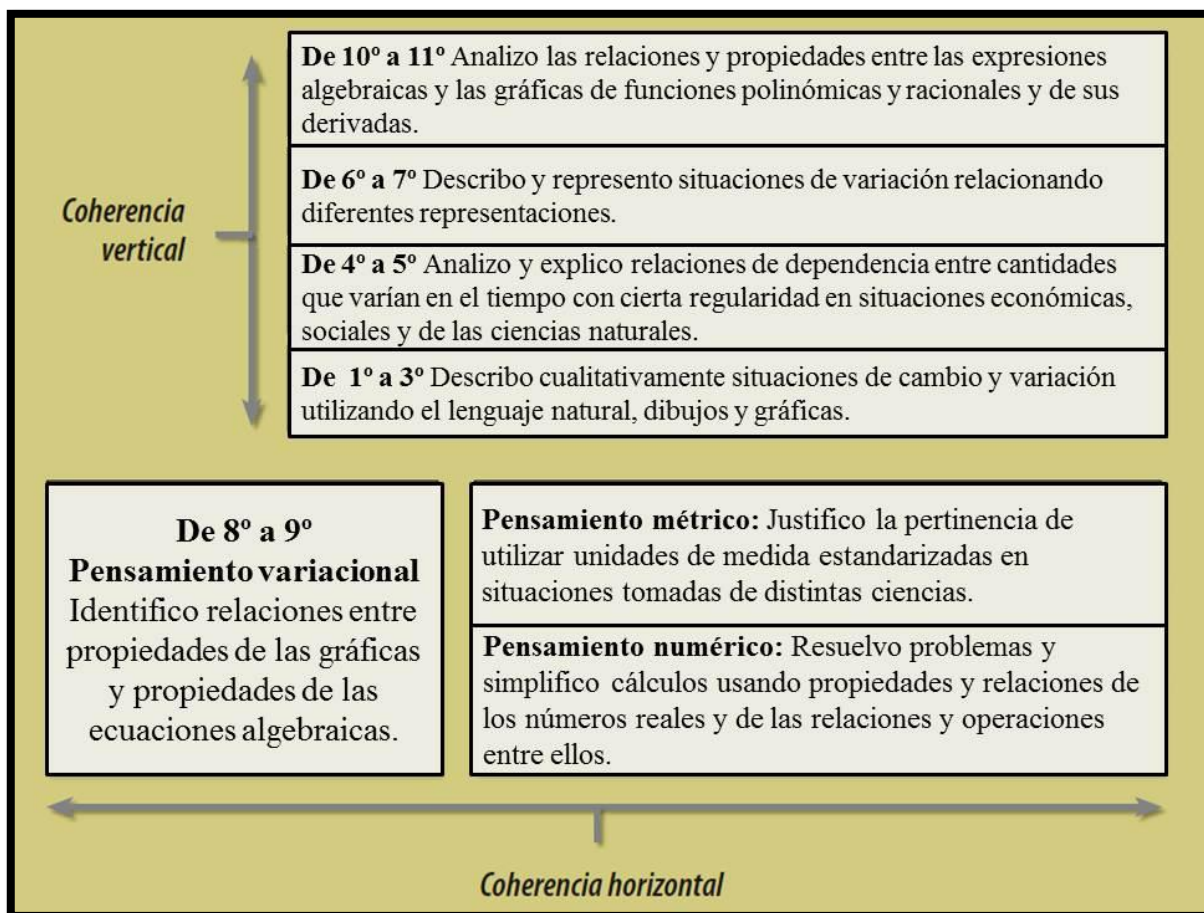


Ilustración 5: Coherencia Horizontal y Vertical.

La coherencia horizontal, permite evidenciar que otros pensamientos está desarrollando el estudiante mediante el estudio de las funciones lineales haciendo uso de GeoGebra; asimismo, la coherencia vertical muestra todos aquellos conocimientos previos necesarios para enfrentarse al estudio de la función lineal en grado noveno de escolaridad y a su vez,

Por lo tanto, en este trabajo de grado se presenta una secuencia de tareas que desarrolla el pensamiento variacional y sistemas algebraicos, estudiando la función lineal desde fenómenos de variación y de cambio, la identificación de las variables que intervienen, lo que cambia y lo que

permanece constante, la continuo y discreto, haciendo uso de las diferentes representaciones de la función lineal, utilizando contextos cercanos al estudiante, mediante el uso de un software dinámico llamado GeoGebra.

CAPÍTULO 3: MARCO METODOLÓGICO DE REFERENCIA

El presente trabajo de investigación cita algunos elementos de la Microingeniería didáctica para su estructura; Artigue (1995) caracteriza la Microingeniería didáctica como “un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase; es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza” (p. 36). Para esta investigación solo se utilizan elementos de una metodología a nivel micro, “ya que permiten tener en cuenta de manera local la complejidad de los fenómenos de clase” (Artigue, 1995, p. 37).

El proceso experimental de la Microingeniería didáctica está compuesto por cuatro fases: la fase de análisis preliminares, contemplada en el capítulo 2; la fase de concepción y análisis *a priori*, la cual se desarrollará en este capítulo; seguidamente, la fase de experimentación y la fase de análisis *a posteriori*, estas últimas se explicitan en el capítulo 4.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, en este capítulo se desarrolla la segunda fase del marco metodológico. Aquí se presenta los aspectos relacionados con la concepción y diseño de la secuencia de tareas, con su respectivo análisis *a priori*, donde se incluye la descripción y predicción de las actividades, teniendo como referente la Mediación instrumental y los esquemas de uso mencionados en los análisis preliminares.

3.1 Concepción de la secuencia de tareas.

En esta sección especificaremos algunas cuestiones referentes al diseño de la secuencia de tareas; es pertinente aquí referirnos al proceso de selección del contexto para las actividades y su importancia en cada una. Asimismo, la configuración de GeoGebra y otros elementos importantes al integrar TIC tales como describir lo que se tiene a disposición y los tiempos establecidos.

3.1.1 El contexto apropiado.

Encontrar el contexto ideal para crear un escenario familiar a los estudiantes y poder generar conciencia frente a una problemática social, fueron un punto de partida. Al mismo tiempo, este contexto debía presentar situación de cambio con variables continuas relacionadas con la función lineal, igualmente, era importante que contuviera actividades que permitiera experimentar con variables discretas.

Dado que en nuestro país no se tiene mucha consciencia frente al uso del agua y en épocas de verano en nuestra región se presenta escasez del líquido vital, se escogió como escenario “el despilfarro de agua”, dado que se pueden estudiar algunas situaciones donde se presenta la variable tiempo y esto nos garantiza variables continuas según Fernández y Rico (1999).

La primera situación de cambio que se propuso fue el daño de una tubería en un lugar de la ciudad, donde el agua se iba derramando de manera constante a medida que avanzaba el tiempo. Las variables en esta situación son continuas y permiten realizar un estudio de la función lineal; sin embargo, era pertinente acompañar esta situación con otra de variables discretas que facilitaran realizar un contraste entre las variables involucradas.

Para ello se planteó una situación donde un sujeto lava su auto con baldes de agua, aquí la variable discreta es el número de baldes; sin embargo, se encontró con que la situación presentaba ambigüedades, puesto que el sujeto podía llenar medio balde, un cuarto del balde... de esta manera no iba a existir una variable constante y la situación no se ajustaría a nuestro propósito de configurar una situación lineal.

Por lo anterior, se realizó la búsqueda de una situación de variables discretas y que presente un cambio constante en sus variables. Como resultado, encontramos que los retretes desperdician una gran cantidad de agua y la relación entre número de descargas y el agua derramada modelan una situación de variable discreta, en el cual los litros de agua derramados en cada descarga siempre serán los mismos.

A partir de las dos situaciones de cambio descritas, se procedió a diseñar la secuencia de tareas atendiendo los objetivos propuestos en este trabajo, donde deben privilegiarse situaciones contextualizadas que permitan estudiar las relaciones entre variables de una función lineal y la articulación entre sus diferentes representaciones. En esta secuencia de tareas se representan las funciones de forma pictórica, gráfica, tabular, algebraica y en lenguaje natural.

3.1.2 Diseño de las actividades con el software GeoGebra.

El presente trabajo se encuentra inscrito en la línea de las TICEM (Tecnología de la información y comunicación en educación matemática), por lo cual, se quiere integrar diferentes elementos tecnológicos tales como: un software didáctico como GeoGebra, computadores de mesa, proyector video Beam o televisor pantalla grande, tablero acrílico y hojas de trabajo impresas, para el estudio de la función lineal.

Para estudiar la función lineal desde diferentes representaciones se optó por crear actividades en el software, donde los estudiantes puedan manipular deslizadores e ingresar valores en casillas de control programadas para que representen la función mediante una gráfica. Se decidió de esta manera, debido a que, para construir cada gráfica utilizando las herramientas del software se necesitan esquemas de uso y acción instrumentada más elaborados por parte de los estudiantes.

En la primera actividad diseñada en el software, se realiza un estudio entre las variables de la actividad de la tubería y el retrete, mediante representaciones pictóricas. Para realizar dichas representaciones se utilizaron imágenes construidas en PowerPoint y se anclaron a un deslizador, de manera que, a medida que el deslizador se movía las imágenes iban presentando un crecimiento progresivo.

En el caso de la tubería el deslizador representa el aumento del tiempo y las imágenes los litros de agua que se van derramando. Para ello, se insertaron imágenes del dibujo de un charco de agua con los litros que representa, una más grande que la anterior; estas imágenes se programaron con las herramientas “Condición para mostrar” de GeoGebra de manera que cuando

se mueva el deslizador hacia la derecha (cuando aumenta el tiempo) las imágenes vayan apareciendo y desapareciendo según corresponda la relación tiempo y litros de agua.

En la actividad del retrete se hizo algo similar a la actividad anterior, se insertó la imagen de un retrete y varias imágenes de un pozo con el número de litros de agua, de tal manera que cada una representará el agua que estaba siendo derramada por el retrete. El deslizador en esta actividad representa el número de descargas del retrete y las imágenes del pozo se programaron con la herramienta “condición para mostrar” para que cuando se mueva el deslizador hacia la derecha (cuando aumenta el número de descargas) aparecieran o desaparecieran según corresponda la relación número de descargas y litros derramados.

Para el diseño de las otras actividades se utilizaron varias herramientas que ofrece el software GeoGebra, entre las más destacadas tenemos deslizadores, botones, casillas de entrada, insertar texto, insertar imágenes, entre otras; Aquí el software brinda la oportunidad de presentar en una misma pantalla tres ventanas diferentes, las cuales se han utilizado para la vista gráfica, la vista tabular y una vista algebraica.

En la tarea dos se estudia la representación gráfica, tabular y algebraica de la actividad: “El daño en la tubería”, de la tarea uno. Para el diseño de las actividades en el software se hizo un esfuerzo porque el estudiante primero analice la situación desde la presentación gráfica; luego, con base a la información de la gráfica pueda completar una tabla de valores y finalmente pueda construir una representación algebraica de la situación de cambio.

En esta tarea se tiene en cuenta lo estudiado en la tarea uno, dado que las preguntas propuestas en la tarea uno conllevan a que el estudiante cree una noción del coeficiente por el cual se multiplica la variable independiente o en otras palabras la pendiente de la función. Por tal razón, para crear la gráfica de la función en el ambiente de aprendizaje, el estudiante debe ingresar en una casilla de entrada el valor de los litros por minuto (valor de la pendiente), de inmediato el software le proporcionará una retroacción, ya sea invalidando el valor ingresado o validándolo, es importante resaltar que cuando el valor es correcto emergerá un texto que conducirá al estudiante a la siguiente acción en el ambiente de aprendizaje. Luego, debe mover

un deslizador que representa el tiempo que va transcurriendo, de este modo un punto va dejando el rastro y a medida que el tiempo aumenta en el deslizador la gráfica se va construyendo.

Lo que respecta a la tabla de valores en la actividad en el software de la tarea dos, esta se ubica en la parte superior derecha de la pantalla y para completarla el estudiante se debe guiar por los puntos de la gráfica anterior. De esta manera, tendrá tres columnas para completar, una será de los minutos transcurridos, otra de los litros por minuto y los litros derramados; es pertinente destacar que, sino se ubica correctamente los valores en la tabla el software le proporcionará una retroacción indicando que algo anda mal, de lo contrario le indicará que está correcto y además abrirá la ventana de la vista algebraica.

Para culminar esta actividad, el estudiante debe ingresar la expresión algebraica a partir de lo que ha venido desarrollando durante la interacción con el software en una casilla de entrada ubicada en la parte inferior derecha de la pantalla; esta casilla también proporciona una retroacción dependiendo si es correcto o no lo que se ha ingresado, adicionalmente, si es correcto el valor ingresado se construye una línea recta sobre los puntos generados inicialmente al mover el deslizador en la vista gráfica y aparecerá un texto indicando que debe ir a la hoja de preguntas.

En la tarea tres se estudian la representación algebraica, tabular y gráfica de la actividad: “el retrete” de la tarea uno. Como en la tarea dos, el estudiante tuvo que construir la expresión algebraica de la actividad de “la tubería”, primero estudiando la representación gráfica y luego la representación tabular; en esta actividad se inicia desde la expresión algebraica, dado que por la experiencia anterior le será más fácil llegar a la generalización de la actividad “el retrete”; Luego debe completar una tabla de valores ayudándose de la expresión algebraica y por último debe construir la representación gráfica a partir de la ubicación de puntos.

En esta tarea se debe tener en cuenta lo estudiado en la tarea uno, puesto que en esta situación inicial se hace un acercamiento a la generalización por medio de las preguntas. El estudiante debe ingresar la expresión algebraica en una casilla de entrada la cual le proporcionará una retroacción de ser correcto o incorrecto.

Seguido de lo anterior, debe completar los valores de una tabla teniendo en cuenta la información proporcionada en un cuadro de texto y teniendo en cuenta la expresión algebraica. Si llegase a completar la tabla de manera incorrecta el software le proporcionará una retroacción indicando que debe verificar los valores que ha ingresado, pero si completa la tabla de manera correcta el software se lo confirmará y abrirá un cuadro de texto dando nuevas indicaciones.

Por último, el estudiante debe construir la gráfica de la situación de cambio a partir de unos puntos que han de aparecer cuando se complete la tabla de valores de forma correcta, estos puntos deben ubicarse de acuerdo a la tabla de valores y cuando todos estén en las coordenadas correctas, el software le proporcionará una retroacción revelando que está correcto lo realizado, junto a un cuadro de texto donde se le pide al estudiante trazar un segmento con la herramienta “Segmento” del software, que pase por todos los puntos y posteriormente que vaya a la hoja de preguntas.

3.2 Análisis *a priori* de las tareas.

Las variables de análisis para el análisis *a priori* se centran en las cuatro dimensiones que estructuran el análisis preliminar descrito en el marco teórico de la siguiente manera:

Dimensión didáctica		Dimensión cognitiva	Dimensión matemática	Dimensión curricular	Duración
Tarea 1: La tubería y el retrete	Valor pragmático	Mediación instrumental y Génesis instrumental	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Identificar variable independiente y variable dependiente de una función lineal. ➤ Obtener la expresión general de la situación. 	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Variación entre la dependencia entre variables. ➤ Generalización de situaciones de cambio. 	90 Minutos
	Valor epistémico				
Tarea 2: El daño en la tubería	Valor pragmático	Mediación instrumental y Génesis instrumental	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Interpretar las representaciones de una función lineal continua. ➤ Articular las representaciones de una función lineal. 	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Identificar relaciones entre las propiedades de las gráficas, las tablas y ecuaciones algebraicas. 	120 minutos
	Valor epistémico y visualización matemática				

Tarea 3: Descargas del retrete	Valor pragmático	Mediación instrumental y Génesis instrumental	➤ Interpretar las representaciones de una función lineal discreta. ➤ Diferenciar la gráfica de una función lineal continua y la gráfica de una función lineal discreta.	➤ Describir comportamientos de gráficas	120 minutos
	Valor epistémico y visualización matemática				

Tabla 3: Rejilla de análisis de la secuencia de tareas.

Al aplicar la secuencia de tareas, se busca que los estudiantes de grado noveno aprendan algunos elementos de la función lineal como son las relaciones de dependencia que se presentan entre dos variables, identificar funciones lineales de naturaleza continua y de naturaleza discreta, evidenciar el carácter de modelación que está presente en esta función, transitar por las representaciones verbal, tabular, gráfica y algebraica de la función, sin dejar de lado que son el mismo objeto matemático y aprovechar el potencial visualizador de GeoGebra para evidenciar el carácter de variación y cambio en una función. Todo lo anterior, en el contexto del despilfarro de agua; el cual tiene como intención generar una conciencia en el uso de este elemento vital, así como ser el medio real para evidenciar este objeto matemático.

A continuación, se presentan los análisis *a priori* de las tareas:

3.2.1 Tarea 1: “La tubería y el retrete”.

La primera tarea inicia con una breve introducción al contexto del despilfarro de agua, mencionando su significado y los porcentajes de la cantidad de agua que se desperdicia en varios sectores del país, con el objetivo de ubicar al estudiante en un contexto específico que involucra información real y de esta manera relacionar los conocimientos matemáticos con situaciones de la vida cotidiana. Lo anterior se presenta de la siguiente forma:


EL DESPILFARRO DEL AGUA

El agua es el elemento más importante para la vida. Es de una importancia vital para el ser humano, así como para el resto de animales y seres vivos que nos acompañan en el planeta tierra.

A continuación, se muestran algunos porcentajes que representan el consumo de agua por algunos sectores en Colombia:

- El sector agrícola gasta el 6,6% del agua.
- El sector energético gasta el 21,5% del agua.
- El pecuario gasta el 8,5% del agua.
- El doméstico gasta el 8,2% del agua.

Actualmente en Colombia se desperdicia un 43% del agua por cada sector.



[SIGUIENTE](#)

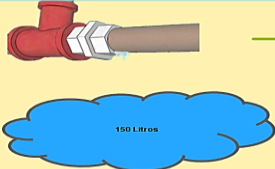
Ilustración 6: Contextualización Tarea 1.

El estudiante inicia la tarea uno dando clic en el botón “Siguiente” el cual lo lleva a encontrarse con una situación de cambio de una tubería que se encuentra rota. Esta actividad inicial describe el daño ocurrido en un sector del municipio. Una tubería se ha roto, desperdiciando una cantidad de agua en un tiempo determinado. Se presenta un deslizador que representa el tiempo en minutos, el cual va en aumento. El deslizador a su vez hace que vayan apareciendo las cantidades de agua que se van desperdiciando conforme va pasando el tiempo, presentando así una relación funcional entre dos magnitudes (tiempo y cantidad de agua) directamente proporcionales, lo anterior se muestra en la siguiente ilustración:

LA TUBERÍA

En la actualidad el agua se desperdicia por muchos factores, uno de ellos son las fugas o daños en la tubería que transporta el agua, ocasionados por la ciudadanía.

Se ha dañado una tubería en un sitio de la ciudad y a medida que avanza el tiempo el desperdicio de agua va en aumento. Mueve el deslizador y analiza la relación que hay entre el tiempo que pasa y el agua que se derrama por la tubería.



Minutos = 50

Ve al material de trabajo y resuelve las tareas antes de continuar

[ANTERIOR](#)

[SIGUIENTE](#)

Ilustración 7: La tubería, Tarea 1.

Ahora bien, esta tarea busca que el estudiante logre identificar la relación de dependencia que está presente mediante la interacción con el software. Se prevé que el estudiante puede lograr interpretar correctamente la información que proporciona GeoGebra para que así pueda

relacionar las magnitudes que están presentes en la situación de cambio y resolver con éxito las preguntas que vienen más adelante. Asimismo, se espera que los estudiantes no tengan inconvenientes relacionados a la utilización del software; sin embargo, puede que se generen diálogos alusivos a cómo se deben utilizar las herramientas que proporciona el software.

La tarea 1 tiene una segunda actividad, en la cual se pasa del contexto del daño de la tubería, al estudio de las descargas que realiza un retrete; pasando a interactuar en este caso con variables discretas. Ésta tarea, presenta la misma estructura y objetivos de la anterior, generando preguntas similares. En esta segunda parte, se presenta un retrete que arroja 8 litros de agua por cada descarga del retrete; presentándose una relación funcional entre las descargas del retrete y la cantidad de agua que se evacua. Lo anterior se presenta así:

The screenshot shows a software interface with a yellow background. At the top, the title "EL RETRETE" is centered. Below it, a paragraph states: "Un retrete común puede descargar hasta 17.000 litros de agua en seis meses. Casi el 12 % del agua que se gasta en casa, se vierte por el inodoro." A light blue box contains the problem text: "Cada vez que una persona tira de la cadena de un retrete, en promedio se arrojan 8 litros de agua que van directo al depósito residual bajo su casa. Estudia la relación que hay entre el número de descargas de un retrete y los litros de agua que son arrojados al drenaje". Below this text is a slider control labeled "Número de descargas = 2" with a green bar and a blue dot. To the left of the slider is a cartoon character of a boy with glasses standing next to a toilet. Below the character is a button labeled "ANTERIOR". To the right of the toilet is a large white box with a blue border containing the text "16 LITROS". To the right of this box is a purple button with white text that says "Ve a la hoja de trabajo y realiza las tareas".

Ilustración 8: El retrete, tarea 1 parte 2

Valor pragmático de la tarea 1: “La tubería y el retrete”.

A la luz de la teoría expuesta en el marco teórico de la investigación, las tres tareas de la secuencia tienen un valor pragmático y un valor epistémico y las preguntas que se plantean en ellas van acorde a este valor.

En el caso de esta primera tarea, los estudiantes iniciarán con un proceso de exploración e interacción con las actividades donde realizarán lo descrito anteriormente, seguidamente responderán unas preguntas que tienen la intención de detallar algunos elementos presentes en

las actividades en el software. De acuerdo al marco teórico presentado en el capítulo anterior, las preguntas tienen unas características particulares, estas se resuelven mecánicamente y a partir de lo que se logra ver y explorar en las actividades de la tarea. Las preguntas del valor pragmático de esta tarea son las siguientes:

- ¿Cuáles son las magnitudes que intervienen en la situación de la tubería?
- Explica cuáles de las anteriores magnitudes presentan un cambio al mover el deslizador y cuáles no. ¿Por qué?
- A medida que pasa o transcurre el tiempo, ¿Qué ocurre con la cantidad de agua que derrama la tubería? Explica
- Al pasar el tiempo del daño ¿En cuánto aumenta la cantidad de agua que derrama la tubería?

La intención de ellas, es lograr que el estudiante identifique características básicas en relación al concepto de función lineal. Se espera que a partir de estas preguntas hagan un acercamiento a entender el concepto de función como una relación entre variables, es decir, que hay variables que cambian y otras que permanecen constantes; además, que existe una dependencia entre ellas.

La segunda parte de la tarea uno relacionada al estudio de las descargas de un retrete, cuenta con preguntas de estas mismas características; no obstante, la naturaleza de las variables cambia y pasan de ser continuas a discretas. Las preguntas en relación a las descargas del retrete y que cuentan con un valor pragmático son las siguientes:

- ¿Cuáles son las magnitudes que intervienen en la situación de las descargas del retrete?
- ¿Cuáles de las anteriores magnitudes cambian al mover el deslizador y cuáles no? Describe cómo es ese cambio.
- Al realizar varias evacuaciones del retrete ¿En cuánto va aumentando el agua que se va evacuando?

Ahora bien, se espera que las preguntas de valor pragmático de la tarea 1 permita que los estudiantes inicien el proceso de Génesis instrumental y adquieran algunos elementos para dar respuesta a preguntas de mayor complejidad a lo largo de la secuencia.

Valor epistemológico de la tarea 1: “La tubería y el retrete”.

En la tarea uno se plantea preguntas con mayor dificultad y que son clave para alcanzar los objetivos propuestos para esta tarea. Tanto para la primera, como para la segunda parte de esta tarea se tienen las siguientes preguntas:

- Si el daño no se ha solucionado al final del día ¿Cómo se puede determinar cuánta agua se ha derramado por la tubería?
- ¿Cómo se puede determinar cuanta cantidad de agua se ha expulsado del retrete al final de día?

El objetivo de estas preguntas es lograr que los estudiantes identifiquen la dependencia que hay entre las variables; la importancia de conocer cuánto tiempo ha pasado para poder deducir cuántos litros de agua se han derramado o cuantas veces se ha expulsado el retrete para saber cuánta agua se ha arrojado y entender que una variable necesariamente depende de la otra.

Por último, se presenta las siguientes preguntas, que son similares, pero que están en diferente contexto:

- Al ser la cantidad y presión de agua que sale de la tubería siempre la misma ¿Cómo se puede determinar la cantidad de agua que se derrama en 110 minutos, 120 minutos, 140 minutos y en general para cualquier cantidad de minutos transcurridos? Explica la estrategia que utilizaste.
- Al ser la cantidad de agua que se expulsa por cada descarga siempre la misma, ¿Cómo se puede deducir cuánta cantidad de agua se va a evacuar en, 10 descargas, 12 descargas y en general cualquier cantidad de descargas del retrete? Explica la estrategia que utilizaste.

El objetivo es recoger todos los elementos que se trabajaron en la tarea y así poder lograr que el estudiante genere una estrategia que le permita encontrar una cantidad de agua que se haya derramado en un tiempo cualquiera o para un número cualquiera de descargas, logrando así un acercamiento a la expresión algebraica del daño de la tubería o de las descargas del retrete.

Por otro lado, se prevé que para este momento de la tarea los estudiantes hayan desarrollado esquemas sociales de utilización, ya sea por sí mismos o en la interacción con sus compañeros, estos esquemas le permitirán hacer uso del software para dar respuesta a estas preguntas que tienen un alto grado de complejidad.

3.2.2 Tarea 2: “El daño en la tubería”.

La segunda tarea de esta secuencia, parte como un complemento de la anterior, ya que presenta las mismas situaciones de cambio descritas en la tarea uno, pero con diferentes representaciones. En esta tarea, se aborda el daño de la tubería desde sus representaciones algebraica, gráfica y tabular.

Para iniciar con su momento de interacción, es necesario contar con conocimientos previos adquiridos en la tarea uno, ya que inicialmente se le pide al estudiante tener claro cuáles son los litros por minuto que se desperdician al pasar el tiempo del daño, de esta manera inicia la mediación instrumental, es decir, la interacción entre el estudiante y el medio; estos litros por minuto se introducen en la casilla de entrada y el software construirá una gráfica. La acción anterior se puede visualizar de la siguiente manera:

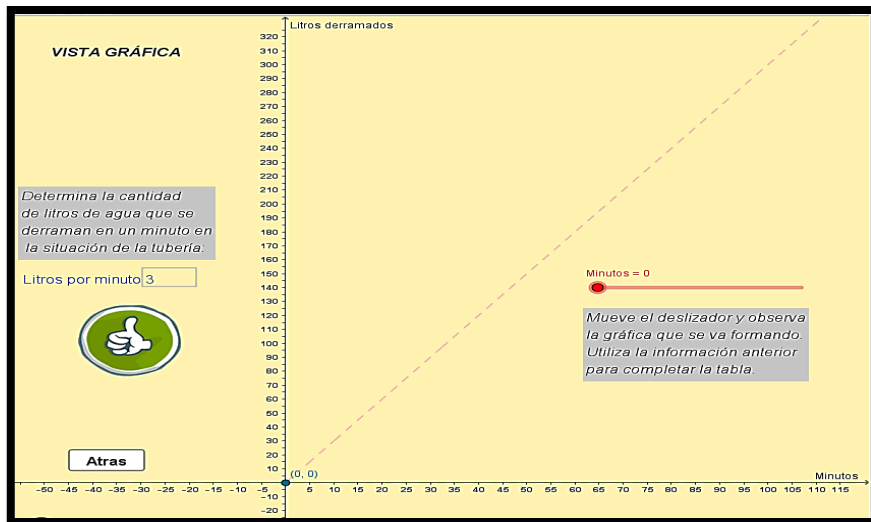


Ilustración 9: Litros por minuto, Tarea 2.

Se predice que en la acción anterior el estudiante no tendrá inconvenientes en cuanto a la utilización de la casilla de entrada, ya que es muy sencillo interpretar que se debe escribir dentro de esta. Esta gráfica será correcta o incorrecta de acuerdo a los litros por minuto que introduzca el estudiante. Al ser correcta la cantidad de litros por minuto, en la pantalla aparecerá un deslizador, el cual permite que el estudiante pueda ir graficando los puntos de la gráfica de la función de la tubería mediante su movimiento. Seguido de esto, el estudiante pasará a llenar la tabla de valores de acuerdo a la gráfica formada por los puntos que aparecen al mover el deslizador, relacionando cada punto de la gráfica con el contexto de la tubería, llenando de acuerdo a estos la tabla de valores completamente y desde el origen de la siguiente manera:

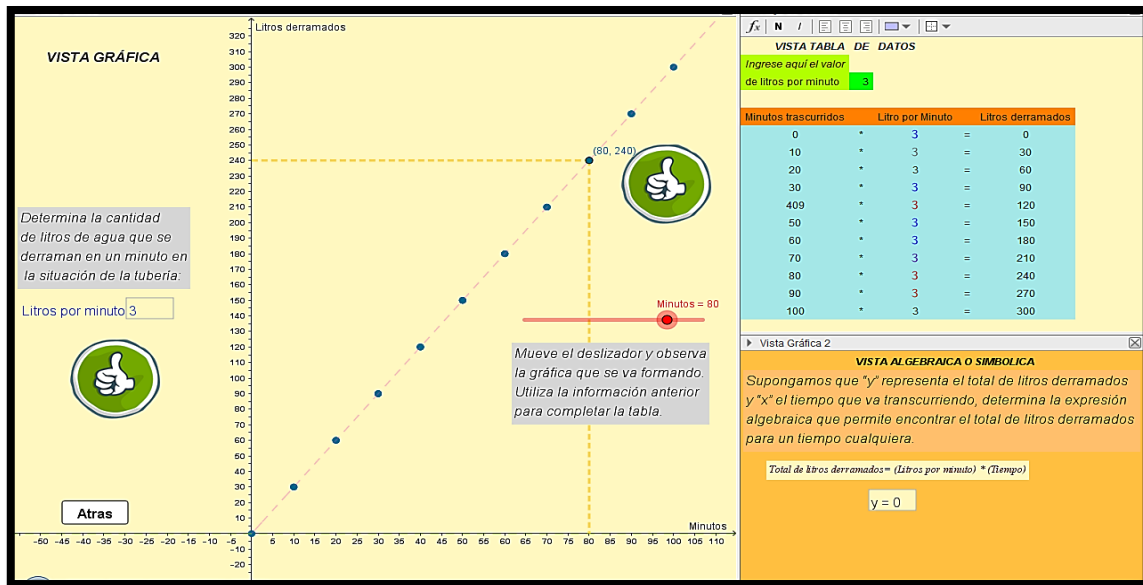


Ilustración 10: Gráfica de la función y tabla de valores, tarea 2.

En este proceso, se espera que haga presencia la visualización matemática y se prevé que algunos estudiantes presenten inconvenientes para completar la tabla. Además, se espera que, mediante la interacción y visualización de las tres representaciones en un mismo plano, los estudiantes logren relacionar dichas representaciones y lograr un acercamiento a su articulación.

Finalmente, los estudiantes deberán establecer una expresión general que permita representar los elementos matemáticos presentes en la tarea 2 y que han logrado apreciar mediante las diferentes actividades propuestas. En este sentido, la representación algebraica sería de la siguiente manera:

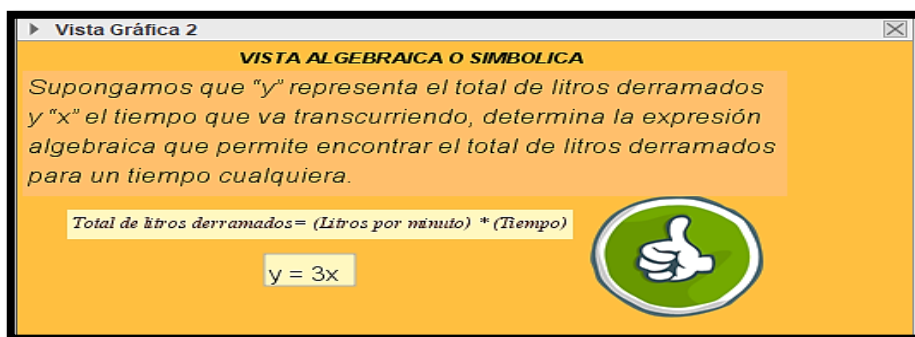


Ilustración 11: Expresión algebraica, Tarea 2.

Se prevé que el estudiante logre interpretar fácil y correctamente la información que proporciona GeoGebra para así lograr de forma eficaz, relacionar las magnitudes que están presentes en la actividad y realizar con éxito un acercamiento significativo a la representación algebraica de la función.

Valor pragmático de la Tarea 2: “El daño en la tubería”.

La segunda tarea cuenta con actividades iniciales de carácter procedimental y busca que el estudiante las realice de forma mecánica como lo es la delimitación de los litros por minuto, el mover el deslizador para construir la gráfica y finalmente llenar la tabla a partir de la información que se muestra en la vista gráfica. Se dice que estas actividades cuentan con un valor pragmático, ya que buscan que el estudiante adquiera elementos y descubra características propias en las diferentes representaciones que se le presentan a partir de actividades procedimentales y de desarrollo.

Las preguntas con valor pragmático en esta tarea van dirigidas a la interpretación de las actividades que el estudiante ha realizado y su respuesta se da a partir de lo que se ve en el software. Estas preguntas son las siguientes:

- De acuerdo a la vista gráfica ¿Qué figura geométrica se forma con los puntos que se crean al mover el deslizador?
- ¿En el contexto de la tubería todos los puntos de la gráfica son colineales? Justifica.
- Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (0,0) en el contexto del daño de la tubería.
- Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (30,90) en el contexto del daño de la tubería.
- Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (70,210) en el contexto del daño de la tubería.
- Con base a la tabla de valores determina ¿Cuáles son los elementos que cambian y los que se mantienen constantes? Especifica.

- En la tabla de valores ¿Qué relación numérica encuentras entre la columna de los minutos transcurridos y la columna de litros derramados?
- Describe cómo es el cambio numérico de los elementos enunciados anteriormente.
- De acuerdo a lo estudiado en la vista gráfica, la vista tabla de datos y la vista algebraica
- ¿Qué elementos son comunes en las tres representaciones?

Cada una de estas preguntas permite que el estudiante comprenda y adquiera elementos, propiedades y características de la función lineal. Las primeras preguntas buscan que el estudiante comprenda que todos los puntos que conforman la representación gráfica de una función lineal son colineales, además, que entre estos mismos puntos siempre hay una misma cantidad. En este caso, entre cada punto siempre se ha derramado la misma cantidad de agua. Asimismo, se espera que estas preguntas ayuden al estudiante a darle un significado a cada punto que conforma la gráfica.

En esta misma línea, en las preguntas siguientes se espera que el estudiante logre identificar las magnitudes presentes y las que cambian como lo hizo en la tarea anterior, pero esta vez en la tabla de valores; es decir, en una representación diferente. Finalmente se espera que el estudiante pueda identificar elementos comunes a nivel más general, inicialmente se le pide a nivel micro en la tabla, en la gráfica y en el movimiento con el deslizador, ahora, se espera que logre identificar ciertas similitudes que están presentes en las tres representaciones y logre un acercamiento hacia la articulación de las mismas.

En esta segunda tarea, se espera que los estudiantes continúen y completen la etapa de instrumentalización y posteriormente ya estén en la etapa de instrumentación del proceso de Génesis instrumental.

Valor epistemológico de la Tarea 2: “El daño en la tubería”.

Las siguientes preguntas se formularon para que el estudiante con el apoyo de GeoGebra y las preguntas en el valor pragmático, logre dar respuesta a ellas. La primera pregunta es la siguiente:

- Observa los puntos que se forman al mover el deslizador y determine cuántos litros de agua se derraman entre cada punto. Establece si esta cantidad de agua siempre es la misma o no. Explica.

Con esta pregunta se espera que los estudiantes logren identificar que entre cada punto de la gráfica formada por GeoGebra se derraman 30 litros de agua; esto con el objetivo de que pueda relacionar esta información con la que proporciona la tabla de datos.

Las siguientes preguntas están relacionadas a determinar los valores que puede adquirir la variable X en la expresión algebraica, para así determinar su dominio y la representación gráfica de esta situación lineal.

- “De acuerdo a la expresión algebraica en la situación del daño de la tubería ¿ X puede tomar valores negativos? Explica”
- ¿Los valores de X en la expresión algebraica puede tomar valores decimales? Explica”

Por otro lado, existe una pregunta final con el interés de relacionar cada una de las representaciones estudiadas durante la tarea:

- Analiza la vista gráfica, la vista de tabla de datos y la vista algebraica y encuentra una relación entre estas tres vistas con relación a la situación del daño en la tubería.

Al ver elementos comunes con características similares en las tres representaciones, se espera que el estudiante pueda llegar a deducir que son lo mismo o en palabras más formales que son el mismo objeto matemático, con el fin de lograr un acercamiento a la articulación de las representaciones. Es pertinente resaltar que en esta tarea el software le presenta tres representaciones de la función al estudiante: la gráfica, la tabular y la algebraica; de modo que se espera que la visualización matemática sea un factor que ayude a dar respuesta a esta última pregunta.

Por otro lado, se espera que mediante los esquemas de uso que hayan adquirido los estudiantes durante el desarrollo de la tarea, el estudiante haga del artefacto un instrumento que le permita desarrollar estas últimas preguntas de mayor complejidad.

3.2.3 Tarea 3. “Las descargas del retrete”.

La tarea final es la continuación de la actividad dos de la tarea inicial. En la tarea anterior, se realizó un tránsito por las tres representaciones de una función lineal que representa el daño de la tubería; iniciando con su representación gráfica, luego con su representación tabular y finalizando con la generalización en su representación algebraica. En esta tarea, se hace un tránsito por las representaciones algebraica, tabular y gráfica en el contexto de las descargas del retrete.

Para iniciar el proceso de interacción, se les pide a los estudiantes que encuentren la expresión algebraica que representa la situación de cambio estudiada en la tarea uno. Además, se espera que los elementos adquiridos en la tarea anterior, faciliten el desarrollo de las actividades de esta tarea. Los estudiantes deben introducir la expresión algebraica en la casilla de entrada, representado en GeoGebra de la siguiente manera:

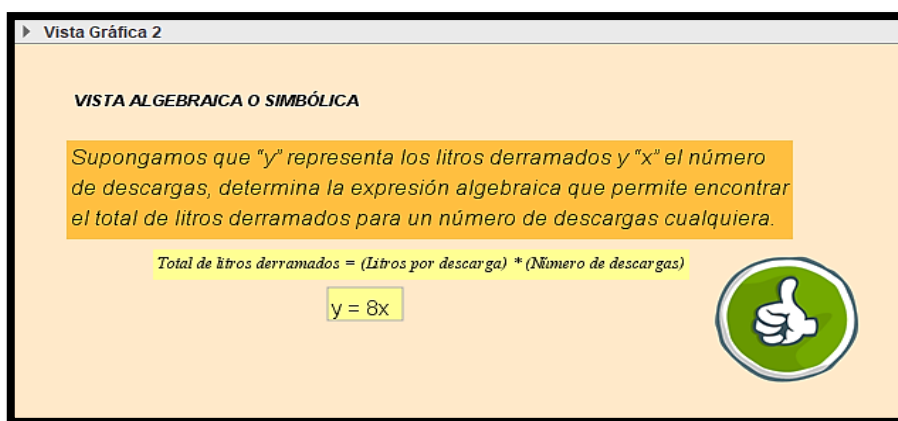


Ilustración 12: Expresión algebraica, Tarea 3

El software brindará retroacciones que indican si la respuesta es correcta con un pulgar hacia arriba y si es incorrecta con un pulgar hacia abajo.

Seguido de esto, los estudiantes haciendo uso de la expresión algebraica, llenaran la tabla de valores indicando inicialmente los litros que se gastan por cada descarga, luego, el número de descargas, por último, los litros derramados. La tabla de valores también está configurada con retroacciones que le permitan al estudiante saber si lo que hace es correcto o no. Al llenar la tabla correctamente el software le indicará al estudiante automáticamente las siguientes actividades que debe realizar:

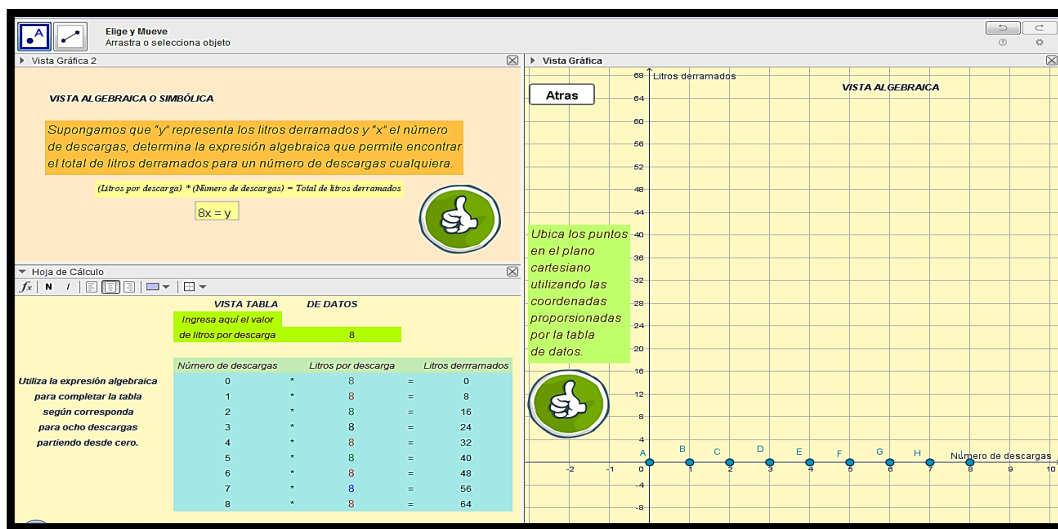


Ilustración 13: Tabla de valores, Tarea 3.

Seguidamente, los estudiantes deben construir la gráfica de la función en el contexto de las descargas del retrete arrastrando los puntos a cada coordenada correspondiente, esto de la siguiente manera:

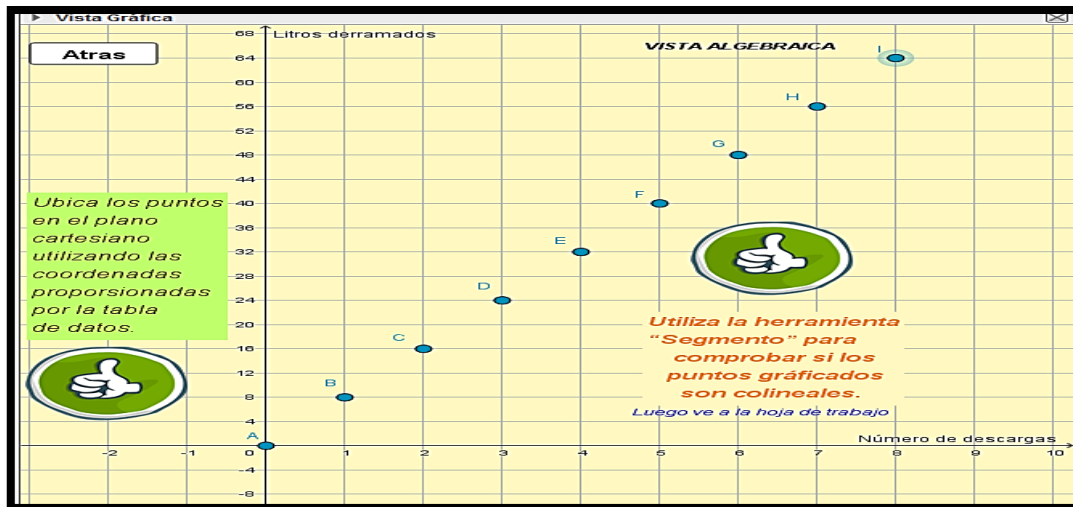


Ilustración 14: Gráfica, tarea 3.

Finalmente, los estudiantes deberán utilizar una de las herramientas de GeoGebra para comprobar si los puntos que acaba de ubicar en el plano son colineales o no. Por ello, debe seleccionar el botón segmento ubicado en la barra de herramientas y trazar un segmento que vaya desde el origen hasta el último punto.

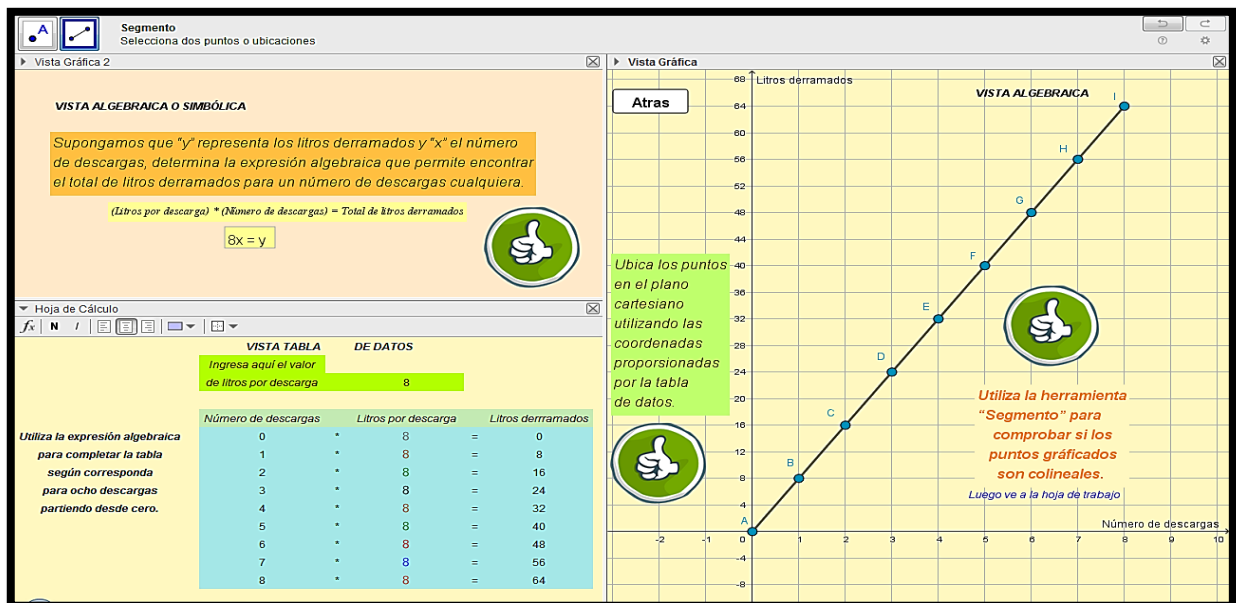


Ilustración 15: Verificación colinealidad de los puntos de la gráfica, Tarea 3.

Luego de realizar las actividades propuestas en GeoGebra, el estudiante se abrirá a paso a responder las preguntas planteadas para esta tarea.

Valor Pragmático de la tarea 3: “Las descargas del retrete”.

Similar a la tarea anterior, la tarea final tiene como objetivo utilizar todos los elementos que se han venido estudiando hasta ahora. Como se describe anteriormente, se estudia la parte dos de la tarea inicial; es decir, el estudio de las descargas del retrete. Similar a lo anterior, se realizan actividades con valor pragmático, procedimentales y de fácil realización, en donde el estudiante arrastra, observa y llena dependiendo de lo que se le pida en la tarea.

Dado que esta tarea es similar a la anterior, se prevé que el estudiante utilice los esquemas de uso ya desarrollados y lleve a cabo el proceso de Génesis instrumental de manera más rápida. Las siguientes preguntas son las que se formularon en el valor pragmático de la tarea tres:

- ¿Cuáles son los elementos presentes en la tabla de valores de la situación de las descargas del retrete? describe cuales son los que cambian y los que no.
- ¿Qué relación numérica puedes encontrar entre la columna de “número de descargas” y la columna de “Litros derramados”?
- ¿Los puntos de la gráfica de la situación en el contexto del retrete son colineales? ¿Por qué?
- De acuerdo a la situación de las descargas del retrete, analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto $C = (2,16)$
- De acuerdo a la situación de las descargas del retrete, analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto $A = (0,0)$

Las preguntas de esta tarea son similares a las preguntas de la tarea anterior, sin embargo, la intención de esto es lograr que el estudiante pueda interpretar las características de una función lineal en diferentes contextos y diferente naturaleza, en este caso discreta. Se espera que los estudiantes logren diferenciar la gráfica de una función lineal continua y una discreta.

Valor epistemológico de la tarea 3: “Las descargas del retrete”.

Las siguientes preguntas son las que conducirán al estudiante a lograr el objetivo propuesto para la tarea tres, por tal razón invitan al estudiante a razonar sobre lo que ha estudiado a través de la interacción con el software y la resolución de las preguntas con valor pragmático. Las siguientes preguntas tienen un valor epistemológico:

- De acuerdo a la expresión algebraica en la situación del retrete ¿X puede tomar valores negativos? Explica
- ¿Los valores de X en la expresión algebraica puede tomar valores decimales? Explica
- ¿Qué significado tiene el valor 8 que acompaña la X en la expresión algebraica? ¿Este puede cambiar?

El objetivo de estas preguntas se encuentra relacionado al estudio de la expresión algebraica de una función lineal de variable discreta, así pues el estudiante debe determinar de acuerdo al contexto de la situación el dominio de la función y su pendiente de manera implícita, y de esta manera tener una idea sobre su representación gráfica.

Además, con el ánimo de dar cuenta sobre la representación gráfica de la función lineal de variable discreta, se le hace las siguientes preguntas al estudiante:

Utilizando las herramientas de GeoGebra, realiza lo siguiente y responde:

- Escoge dos puntos cualesquiera de la gráfica de la situación del retrete que sean consecutivos y traza un punto entre ellos que sea colineal.
 - En el contexto de las descargas del retrete ¿Qué significado tiene el punto que trazaste? ¿Es coherente con la situación?
- ¿Se puede representar la situación de las descargas del retrete mediante una línea recta? Explica tu respuesta.

El objetivo es que el estudiante relacione el concepto de colinealidad y la gráfica de la función, pues si se llegase a representar la función con una línea recta, indicaría que se pueden trazar infinitos puntos entre los puntos ya establecidos, lo cual no sería correcto teniendo en cuenta el contexto.

Asimismo, se ha planteado una tarea con el ánimo de que el estudiante pueda identificar las diferencias que hay entre la representación gráfica de una función lineal de variable continua, con la representación gráfica de una función lineal de variable discreta.

- ¿Qué diferencias puedes encontrar entre la gráfica de la situación en el contexto de la tubería y la gráfica de la situación en el contexto de retrete?

Para la solución de esta pregunta se espera que los estudiantes hagan uso de los esquemas de uso desarrollados a través de las tareas y con la ayuda de la visualización matemática puedan identificar las diferencias entre la gráfica de la función de la tarea anterior que se representa mediante una línea recta, con la representación gráfica de esta función cuyo dominio son los enteros positivos.

CAPÍTULO 4: RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Este capítulo consta de las dos últimas fases de la Microingeniería didáctica: la fase de experimentación y la fase de análisis *a posteriori*. Primero se lleva a cabo la aplicación de la secuencia de tareas con los estudiantes, también se realizan observaciones y anotaciones que se obtienen al momento de la implementación. Seguido de lo anterior, se realiza un análisis *a posteriori* contrastando las predicciones de las tareas hechas en el análisis *a priori* y los resultados obtenidos en la fase de experimentación, esto con el fin de indagar sobre la pregunta de investigación.

4.1 Experimentación

A continuación, se describe la aplicación de la secuencia de tareas, se mencionan los estudiantes que participaron en el desarrollo de la misma y se resaltan las características del Colegio donde se realizó el proceso de experimentación.

4.1.1 Marco contextual.

La fase experimental se llevó a cabo en la Institución Educativa Instituto Técnico, la cual es una entidad pública ubicada en Santander de Quilichao, Cauca. La institución educativa cuenta con doble jornada de 6:45am a 12:30 am y de 2:00 pm a 5 pm. La aplicación de la secuencia fue desarrollada durante el año lectivo 2019. El Colegio cuenta con tres salas de sistemas dotadas y actualizadas para la enseñanza con TIC, por lo cual, la actualización del software GeoGebra versión 4.2 a la versión 5.0 no presentó ningún problema. Sin embargo, los computadores contaban con una aplicación que impedía guardar los elementos que se descargan o se realizan en el día, por lo que en cada sesión se tuvo que actualizar el GeoGebra e instalar el trabajo. El diseño de la Secuencia de tareas no necesitó de internet, así pues, la falta de este servicio en el colegio no fue ningún problema.

El grupo experimental trabajó en la sala número tres que contó con 40 computadores, los cuales habían sido previamente configurados por los investigadores instalando el programa y creando una carpeta llamada "Función Lineal" ubicada en el disco local (D), que contienen todas las tareas y la aplicación actualizada GeoGebra. Además, se les entregó a los estudiantes de manera individual las hojas de trabajo para que resolvieran las respectivas preguntas de cada tarea.

La secuencia de tareas se aplicó con estudiantes de grado noveno (9-A) de educación básica secundaria, cuyas edades oscilan entre trece (13) y catorce años (14) años; para el momento de la experimentación los estudiantes habían iniciado el estudio del concepto de función lineal a partir de un proceso mecánico y algorítmico como se mencionó en la problemática. Las tareas, se aplicaron de manera individual en tres sesiones, en la primera se llevó a cabo la situación número uno con un tiempo de 95 minutos, en la segunda sesión se desarrolló la situación dos con un tiempo de 120 minutos y la sesión tres, la cual fue el cierre de la secuencia que se realizó en un tiempo de 120 minutos. La puesta en escena de la secuencia se presentó, por parte de uno de los investigadores, quien cumplió el rol de orientador, el cual dio las indicaciones para desarrollar cada una de las tareas y tuvo en cuenta algunas preguntas para la fase de institucionalización.

Por otra parte, el segundo investigador apoya este rol entregando materiales como las hojas de trabajo, toma el registro fotográfico y de video, además de cuestionar a los estudiantes para que éstos reflexionen realizando las acciones y retroacciones que brinda el medio.

Finalmente, para realizar el análisis *a posteriori* se tomaron los resultados más relevantes de la recolección de datos obtenidos mediante las producciones escritas en las hojas de trabajo, producciones de video, fotos y de audio.

4.2 Análisis *a posteriori* de las tareas

A continuación, se presenta los sucesos ocurridos durante la fase de experimentación, el cual se analiza desde la mediación y Génesis instrumental, la visualización matemática y teniendo en cuenta algunos aspectos del diseño de tareas con el uso de la tecnología, verificando si se

cumplió todo lo previsto en el análisis *a priori* y dando a conocer aquellos acontecimientos que no fueron previstos y que de alguna manera influyeron en la secuencia de tareas.

Inicialmente, es favorable mencionar que el tiempo establecido para cada una de las tareas de la secuencia de tareas, fue acorde al previsto en el análisis *a priori*; cada sesión se tomó los tiempos que se habían indicado y cada fase se realizó con perfecta sincronía. Es importante mencionar que en las sesiones finales incluso se utilizó menos tiempo del esperado, ya que los estudiantes abordaron dicha tarea y actividades de la misma con normalidad y sin dificultad. Este tiempo adicional también se debe a los pocos errores que presentaron los equipos de la institución y a la configuración del software GeoGebra.

Ahora bien, la siguiente tabla presenta las tareas que se implementaron, la fecha en que se llevó a cabo su experimentación, la cantidad de estudiantes que participaron y el tiempo que tomó cada tarea:

TAREAS	FECHA	NÚMERO DE ESTUDIANTES	TIEMPO
La tubería y el retrete	10 de abril de 2019	25	95 minutos
Daño en la tubería	11 de abril de 2019	28	120 minutos
Descargas del retrete	12 de abril de 2019	28	90 minutos

Tabla 4: Ejecución de la secuencia de tareas.

Se aclara que durante este análisis se presentan protocolos de estudiantes que se nombran con la letra E, si interfiere otro estudiante en el diálogo se llamará E1, E2, y así sucesivamente, por último, la letra D se denota para el docente.

A continuación, se organizan los resultados obtenidos en cada una de las tareas mediante una tipificación cualitativa, en ella se detallan los tipos de respuestas con sus respectivas frecuencias absolutas y relativas.

4.2.1 Análisis de la tarea 1. “La tubería y el retrete”.

Cómo se planteó en el análisis *a priori*, el docente encargado presentó antes de iniciar el desarrollo de la primera tarea una breve explicación acerca de elementos que se debían tener en cuenta para el desarrollo de la primera situación. Para esto, se presentó una presentación en diapositivas acerca del concepto magnitud, la cual se llevó a cabo mediante la orientación de los dos investigadores. Luego de dicha explicación, se da inicio al espacio de exploración e interacción entre los estudiantes y el diseño de la situación 1.

Mientras los estudiantes interactúan con la actividad inicial acerca de la tubería dañada presentada en GeoGebra, se lograron apreciar diálogos que dan cuenta de las interpretaciones e interacciones que se presentaron en el desarrollo de la mediación instrumental. De estos diálogos, se puede destacar lo siguiente:

E1: El punto (Hacen referencia al punto que acompaña al deslizador) me mueve los minutos de 10 en 10.

E2: Y también hace que crezca la nubecita de 30 en 30.

E3: ¿Cuál nubecita? esa es el agua (Exclama entre risas).

Haciendo énfasis en la teoría de la mediación instrumental y génesis instrumental, lo anterior muestra cómo en un primer acercamiento con el diseño de las tareas, los estudiantes a partir de la interacción con este logran extraer propiedades y características del instrumento de aprendizaje. Asimismo, le encuentran un primer uso al deslizador que representa los minutos que transcurren y hace que la cantidad de agua vaya apareciendo. Todas estas propiedades y esquemas de uso que el estudiante descubre del instrumento, son el inicio de la etapa de instrumentalización de la génesis instrumental expuesta en el marco teórico.

Valor pragmático de la tarea 1.

En el análisis *a priori* de la tarea 1 se establecieron unas preguntas con valor pragmático que permiten identificar algunos elementos de la función lineal. En este sentido, las preguntas con valor pragmático propuestas para esta tarea inicial fueron las siguientes:

- ¿Cuáles son las magnitudes que intervienen en la situación de la tubería?
- Explica cuáles de las anteriores magnitudes presentan un cambio al mover el deslizador y cuáles no. Describe cómo es ese cambio.
- A medida que pasa o transcurre el tiempo, ¿Qué ocurre con la cantidad de agua que derrama la tubería? Explica
- Al pasar el tiempo del daño, ¿En cuánto aumenta la cantidad de agua que derrama la tubería

Ahora bien, los resultados que se obtuvieron son los siguientes:

Un primer tipo de respuesta lo dieron 12 de 25 (48%) estudiantes, estos lograron identificar tres de las principales magnitudes que intervienen en la situación de cambio; además, identificaron magnitudes adicionales que, aunque no están explícitas en el diseño de la tarea, al ubicarse mentalmente en la situación entrarían en juego. Más aún, de todas las magnitudes que encontraron lograron explicitar cuáles de estas presentaban un cambio al mover el deslizador; por lo cual, lograron interpretar de forma correcta el significado de magnitud y a su vez, lograron dar cuenta de cuales presentaban un cambio al ejercer la acción correspondiente en el software. La Ilustración 16 muestra la respuesta de un estudiante que realizó lo que se explica anteriormente:

<p>a) ¿Cuáles son las magnitudes que intervienen en la situación de la tubería?</p> <p><u>1) El agua 2) El tiempo 3) Dimensión de la tubería 4) La presión</u></p> <hr/> <hr/>
<p>1) el agua 2) El tiempo 3) Dimensión de la tubería 4) La presión.</p>

b) Explica cuáles de las anteriores magnitudes presentan un cambio al mover el deslizador y cuáles no. Describe cómo es ese cambio.

1) El agua presenta un cambio y es que cada vez va aumentando la cantidad de agua derramada. 2) El tiempo también va aumentando. 3) La dimensión de la tubería no va a aumentar ya que esto es un objeto que va seguir siendo del mismo tamaño.

1) El agua presenta un cambio y es que cada vez va aumentando la cantidad de agua derramada. 2) El tiempo también va aumentando 3) La dimensión de la tubería no va a aumentar ya que esto es un objeto que va seguir siendo del mismo tamaño.

Ilustración 16: Tarea 1_ ítem 1_ preguntas a y b_ caso 1.

Por otro lado, 13 de 25 (52%) estudiantes no lograron identificar de manera clara las magnitudes que se tenían previstas en la tarea, ya sea por una interpretación incompleta del significado de magnitud o por el no entendimiento de las preguntas. La Ilustración 17: Tarea 1_ ítem 1_ preguntas a y b_ caso 2. Ilustración 17 muestra las respuestas de un estudiante que, aunque identificó algunas magnitudes presentes en la tarea, no logró extraer aquellas que tenían mayor grado de importancia:

a) ¿Cuáles son las magnitudes que intervienen en la situación de la tubería?

Distancia, espacio, Temperatura y Tiempo

Distancia, espacio, temperatura y tiempo

b) Explica cuáles de las anteriores magnitudes presentan un cambio al mover el deslizador y cuáles no. Describe cómo es ese cambio.

Presentan un cambio al mover son el espacio y el Tiempo y los que no presentan al mover el deslizador son Distancia y Temperatura.

Presentan un cambio al mover el deslizador son el espacio y el tiempo y los que no presentan al mover el deslizador son la distancia y temperatura.

Ilustración 17: Tarea 1_ ítem 1_ preguntas a y b_ caso 2.

Seguidamente, en la siguiente pregunta responden 19 de 25 (76%) estudiantes, los cuales identifican las propiedades numéricas de la situación y concluyen que la cantidad de agua

aumenta 30 litros cada 10 minutos, interpretando de manera correcta la situación, apropiándose de las propiedades y respondiendo sin ningún inconveniente.

<p>c) Al pasar el tiempo del daño, ¿En cuánto aumenta la cantidad de agua que derrama la tubería?</p> <p><u>aumenta 30 litros cada 10 minutos</u></p>
<p>Aumenta 30 litros cada 10 minutos</p>

Ilustración 18: Tarea 1_ ítem 1_ pregunta c_ caso 1.

En esta misma línea, sólo 6 de los 25 (24%) estudiantes no lograron responder de forma correcta a la pregunta, ya que describen la cantidad de tiempo que se derramó en 100 minutos de ocurrido el daño y no responde en cuanto aumenta la cantidad de agua al pasar el tiempo, esto puede ser debido a una mala interpretación de la pregunta.

<p>c) Al pasar el tiempo del daño, ¿En cuánto aumenta la cantidad de agua que derrama la tubería?</p> <p><u>En una hora con 40 minutos derrama 300 litros de agua.</u></p>
<p>En una hora con 40 minutos derrama 300 litros de agua</p>

Ilustración 19: Tarea 1_ ítem 1_ pregunta c_ caso 2.

El contexto del estudio de las descargas del retrete, plantearon las siguientes preguntas que cuentan con un valor pragmático:

- ¿Cuáles son las magnitudes que intervienen en la situación de las descargas del retrete?
- ¿Cuáles de las anteriores magnitudes cambian al mover el deslizador y cuáles no?
Describe cómo es ese cambio.
- Al realizar varias evacuaciones del retrete ¿En cuánto va aumentando el agua que se va evacuando?

Las anteriores preguntas arrojaron los siguientes resultados:

Un primer tipo de respuesta lo dan 9 de 25 (36%) estudiantes, puesto que lograron identificar las magnitudes que se tenían previstas en el análisis *a priori*, además incluyeron magnitudes que no se tenían en cuenta. También identificaron que el número de descargas y la cantidad de agua son las magnitudes que presentaban un cambio al mover el deslizador. La Ilustración 20 muestra un ejemplo de lo anterior.

<p>a) ¿Cuáles son las magnitudes que intervienen en la situación de las descargas del retrete?</p> <p><u>Agua, Tiempo, tamaño, velocidad, distancia, número de descargas</u></p>
<p>Agua, tiempo, tamaño, velocidad, distancia, número de descargas.</p>
<p>b) ¿Cuáles de las anteriores magnitudes cambian al mover el deslizador y cuáles no? Describe cómo es ese cambio.</p> <p><u>Solo cambiaría el agua y el número de descargas pues cada que se hace una descarga se gasta en de agua y así sucesivamente</u></p>
<p>Solo cambian el agua y el número de descargas, pues cada que se hace una descarga se gastan 8 litros de agua y así sucesivamente.</p>

Ilustración 20: Tarea 1_ ítem 2_ preguntas a y b_ caso 1.

Ahora bien, 16 de los 25 (64%) estudiantes no lograron identificar las descargas del retrete y el retrete como magnitudes presentes en la tarea, nombrando magnitudes como fuerza y tiempo donde explícitamente no se ven y no son el foco de atención, además no se tuvo en cuenta que al mover el deslizador sólo se mueven o cambian la cantidad del agua que se descarga y el número de las descargas de retrete (ver Ilustración 21).

<p>a) ¿Cuáles son las magnitudes que intervienen en la situación de las descargas del retrete?</p> <p><u>Cantidad de agua, presión, temperatura y fuerza</u></p>
<p>Cantidad de agua, presión, temperatura y fuerza.</p>

b) ¿Cuáles de las anteriores magnitudes cambian al mover el deslizador y cuáles no? Describe cómo es ese cambio.

La cantidad de agua presenta un cambio al irse por el retrete y la presión solo se utiliza en el momento que tiras de la cadena, la temperatura y fuerza no presentan cambio

La cantidad de agua presenta cambio al irse por el retrete y la presión solo se utiliza en el momento en que tiras de la cadena, la temperatura y la fuerza no presentan cambio.

Ilustración 21: Tarea 1_ ítem 2_ preguntas a y b_ caso 2.

Para las siguientes preguntas, 23 de los 25 (92%) estudiantes respondieron de forma correcta, afirmando que a medida que se descarga el baño el aumento de agua va de 8 en 8 litros. Lo anterior se puede ver en la Ilustración 22.

c) Al realizar varias evacuaciones del retrete ¿En cuánto va aumentando el agua que se va evacuando?

... aumenta 8 L cada descarga

Aumenta 8 L cada descarga.

Ilustración 22: Tarea 1_ ítem 2_ pregunta c_ caso 1.

Por otro lado, 2 de 25 (8%) estudiantes no lograron responder de forma correcta a las preguntas, pues dieron respuestas que no iban acordes a lo que se les estaba preguntando. Un ejemplo de lo anterior lo tenemos en la Ilustración 23.

c) Al realizar varias evacuaciones del retrete ¿En cuánto va aumentando el agua que se va evacuando?

... aumenta 64 litros

Aumenta 64 litros

Ilustración 23: Tarea 1_ ítem 2_ pregunta c_ caso 2.

De lo anterior se puede mencionar que, que gran parte de los estudiantes siguieron al pie de la letra lo que se pidió en la pregunta 1 e identificaron cada una de las magnitudes involucradas; tanto las que se lograban extraer explícitamente, como las que se podían deducir ubicándose en

el contexto, dando cuenta de la correcta interpretación que la mayoría de estudiantes le dieron al concepto de magnitud. Ahora bien, la interacción con el diseño le permite a gran parte de los estudiantes lograr identificar solo aquellas magnitudes que presentan un cambio, o en términos formales aquellas que son variables. Se puede decir entonces que sólo la interacción (Mediación Instrumental) entre el estudiante y el diseño de la situación logró que pudiesen identificar las variables presentes en la situación del daño de la tubería. Lo anterior, se logra evidenciar de igual manera en la situación de las descargas del retrete.

Las respuestas dadas a la pregunta C nos permiten concluir que gran parte de los estudiantes no presentaron inconvenientes para identificar la relación funcional que se da entre las dos variables en los dos contextos que conforman la tarea 1. En este sentido, la etapa de instrumentalización se pudo desarrollar de manera efectiva; todo esto gracias a la interacción entre el estudiante y el recurso o artefacto.

Un poco más de la mitad de los estudiantes no logra el objetivo de las preguntas iniciales, por lo que es bueno preguntarse por estrategias que permitan lograr un mayor alcance en los ítems propuestos.

Valor epistemológico de la tarea 1.

Primero analizaremos los resultados obtenidos para las preguntas formuladas de la parte uno de la tarea, donde las actividades se ubican en el contexto del daño de la tubería.

- Si el daño no se ha solucionado al final del día ¿Cómo se puede determinar cuánta agua se ha derramado por la tubería?

En este sentido 24 de los 25 (96%) estudiantes llegaron a interpretar que para hallar la cantidad de agua que se derramó al final del día es necesario conocer el tiempo en el que se empezó el daño, deduciendo de manera implícita que la variable independiente es el tiempo. Por otro lado, solo un estudiante no llegó a una respuesta válida o que se acercara.

- e) Si el daño no se ha solucionado al final del día ¿Cómo se puede determinar cuánta agua se ha derramado por la tubería?

según desde la hora que se comenzó a derramar
se determina cuánta agua se va desperdiciando.
o sea multiplico el tiempo por 3.

Según desde la hora que se comenzó a derramar se determina cuánta agua se va desperdiciando.

O sea, multiplico el tiempo por 3.

Ilustración 24: Tarea 1_ ítem 1_ pregunta e.

- Al ser la cantidad y presión de agua que sale de la tubería siempre la misma ¿Cómo se puede determinar la cantidad de agua que se derrama en 110 minutos, 120 minutos, 140 minutos y en general para cualquier cantidad de minutos transcurridos? Explica la estrategia que utilizaste.

En esta pregunta, 15 de los 25 (60%) estudiantes se plantearon la estrategia de multiplicar los minutos transcurridos por los litros de agua que se derraman en un minuto, es decir, que el tiempo debe multiplicarse por tres; de esta manera podemos observar que los estudiante están llegando a una generalización de la situación. la Ilustración 25 muestra como un estudiante explica su estrategia utilizada:

- f) Al ser la cantidad y presión de agua que sale de la tubería siempre la misma ¿Cómo se puede determinar la cantidad de agua que se derrama en 110 minutos, 120 minutos, 140 minutos y en general para cualquier cantidad de minutos transcurridos? Explica la estrategia que utilizaste.

en 110 minutos se derraman 330 litros
en 120 minutos se derraman 360 litros
en 140 minutos se derraman 420 litros
la estrategia es el número de minutos multiplicado
por la cantidad de agua que se derrama en 1 minuto

En 110 minutos se derraman 330 litros

En 120 minutos se derraman 360 litros

En 140 minutos se derraman 420 litros

La estrategia es el número de minutos multiplicado por la cantidad de agua que se derrama

en un minuto.

Ilustración 25: Tarea 1_ ítem 1_ pregunta f_ caso 1.

Por otro lado, 10 de los 25 (25%) estudiantes parten del hecho de que cada 10 minutos se derraman 30 litros de agua; por lo cual, explica que se debe ir sumando de 10 en 10 en los minutos hasta la cantidad que le estén pidiendo y de 30 en 30 iniciando desde 300 litros [límite de número de litros que se muestra en el deslizador]. Este método, aunque es válido porque se puede llegar a respuestas correctas, no se acerca al objetivo de la pregunta, pues no llegan a una generalización de los hechos. Un ejemplo de lo anterior se muestra en la siguiente ilustración:

f) Al ser la cantidad y presión de agua que sale de la tubería siempre la misma ¿Cómo se puede determinar la cantidad de agua que se derrama en 110 minutos, 120 minutos, 140 minutos y en general para cualquier cantidad de minutos transcurridos? Explica la estrategia que utilizaste.

la estrategia que yo utilice fue que cada 10 minutos son 30 litros y podemos ver que $100 \times 3 = 300$ litros y 110 minutos como cada 10 minutos son 30 litros sería 330 litros y el 120 le sumo 10 minutos más = 360 litros y el 140 minutos = 420 litros por le sumo 60 litros más

La estrategia que yo utilicé fue que cada 10 minutos son 30 litros y podemos ver que $100 \times 3 = 300$ litros y 110 minutos como cada 10 minutos son 30 litros sería 330 litros 120 le sumo 10 minutos más = 360 litros y en 140 minutos = 420 litros porque le sumo 60 litros.

Ilustración 26: Tarea 1_ ítem 1_ pregunta f_ caso 2.

Los resultados obtenidos para las preguntas relacionadas a las descargas del retrete en la tarea uno, son los siguientes:

- ¿Es posible determinar un número exacto de descargas del retrete si se han evacuado 20 litros de agua? ¿Por qué?

En las respuestas dadas por los estudiantes, 20 de los 25 (80 %) respondieron que no es posible, pues ninguna cantidad de descargas me permite descargar 20 litros de agua, ya que en la segunda se evacuan 16 litros y en la tercera se evacuan 16 litros. La Ilustración 27 muestra como un estudiante justifica lo anterior:

<p>e) ¿Es posible determinar un número exacto de descargas del retrete si se han evacuado 20 litros de agua? ¿Por qué?</p> <p><u>No da un número exacto porque se divide 20/8 da 2,5</u></p>
<p>No da un número exacto porque se divide 20/8 y da 2,5</p>

Ilustración 27: Tarea 1_ ítem 2_ pregunta e_ caso 1.

- Al ser la cantidad de agua que se expulsa por cada descarga siempre la misma, ¿Cómo se puede deducir cuánta cantidad de agua se va a evacuar en, 10 descargas, 12 descargas y en general cualquier cantidad de descargas del retrete? Explica la estrategia que utilizaste.

En este ítem final, los 25 (100%) estudiantes coinciden que para hallar cualquier cantidad de litros de agua en cualquier cantidad de descargas se debe multiplicar el número de descargas por 8 litros. No presentando ningún inconveniente para su resolución y utilizando la misma estrategia. Podemos deducir que esto se debe al previo trabajo en el contexto de la tubería rota, ya que la última pregunta es similar. La Ilustración 28 muestra la respuesta de uno de los estudiantes:

<p>f) Al ser la cantidad de agua que se expulsa por cada descarga siempre la misma, ¿Cómo se puede deducir cuánta cantidad de agua se va a evacuar en, 10 descargas, 12 descargas y en general cualquier cantidad de descargas del retrete? Explica la estrategia que utilizaste.</p> <p><u>se multiplican las descargas por 8 y te da el resultado.</u></p>
<p>Se multiplican las descargas por 8 y te da el resultado</p>

Ilustración 28: Tarea 1_ ítem 2_ pregunta f_ caso 1.

Las respuestas dadas en la pregunta e del ítem 1 y del ítem 2 (ver Ilustración 24 e Ilustración 27), permiten identificar en los estudiantes la relación de dependencia que se presenta en una función lineal, ya que estos argumentan que tanto en el derrame de agua del daño en la tubería como en las descargas del retrete aparece una variable que es necesaria para definir la otra. En el caso del daño de la tubería es el tiempo y en el caso de las descargas del retrete es el número de

descargas. Lo anterior, permite deducir que los estudiantes comprenden de manera informal la dependencia entre variables.

Asimismo, en las respuestas dadas a las preguntas f de los ítems 1 y 2 (ver Ilustración 25 e Ilustración 28) se logra un acercamiento significativo a la expresión general de las situaciones o representación algebraica, ya que teniendo en cuenta las estrategias utilizadas para identificar la cantidad de descargas en un minuto, así como las características que lograron identificar mencionando la relación numérica entre las dos variables, gran parte de los estudiantes llegaron a concluir que cualquier cantidad de agua se podía encontrar multiplicando por 3 el tiempo que transcurre, donde en términos formales vendría siendo la pendiente de la función y en el caso de las descargas del retrete cada descarga debía multiplicarse por 8.

Es pertinente resaltar que en la parte dos de esta tarea, los estudiantes dieron cuenta de la apropiación de las características y limitaciones que presentaba dicho contexto. Por tanto, la correcta interpretación de la mayoría de los estudiantes aun con el cambio de contexto da cuenta de un buen proceso de instrumentalización y de los efectos de la mediación.

En la parte final de esta tarea, se generó un debate sobre los saberes implícitos que el estudiante adquirió durante las actividades, como la dependencia de variables y el acercamiento a la generalización de la situación de cambio, esto sirvió de punto de partida para que el docente lograra formalizar estos saberes. Asimismo, las respuestas dadas a las preguntas finales de cada situación permitieron lograr formalizar las estrategias que dieron a conocer los estudiantes para hallar cualquier cantidad de litros de agua derramados en un minuto y cualquier cantidad de agua que se evacua por el retrete en cualquier número de descargas en las representaciones algebraicas de cada situación.

Análisis desde los estándares.

Se puede afirmar a partir de los resultados que la mayoría de los estudiantes alcanzaron los estándares básicos por competencias en matemáticas previstos para esta tarea en el análisis *a priori*, puesto que en su mayoría lograron identificar cuando una variable dependía de la otra en

el contexto del daño en la tubería y del retrete, asimismo, de manera implícita llegaron a la generalización de ambas tareas. No obstante, hubo pocos casos donde algunos estudiantes presentaron dificultades al momento de comprender las preguntas o simplemente no se sintieron atraídos por la tarea presentada.

4.2.2 Análisis de la tarea 2. “El daño en la tubería”.

En el análisis *a priori* se estableció para esta tarea un tiempo de 90 minutos (ver Tabla 3), tiempo que fue ocupado en su totalidad (ver Tabla 4) para el desarrollo de esta. En el transcurso de la implementación, se presentaron cuatro casos con estudiantes que en su exploración con el software movieron los ejes del plano o cerraron algunas ventanas, frente a esto el docente tuvo que intervenir para configurar el software y de esta manera los estudiantes pudieran continuar con el desarrollo de la actividad.

Como se detalló en el análisis *a priori*, el docente a cargo proyectó las actividades en GeoGebra en el video beam y explicó en voz alta las instrucciones para llevar a cabo el desarrollo de las actividades en GeoGebra, además, los estudiantes se podían guiar por las instrucciones incluidas en el ambiente de aprendizaje.

Valor pragmático de la tarea 2.

Como se especificó en el análisis *a priori* el docente entabló inicialmente una charla con los estudiantes para que recordaran el valor de los litros por minuto y de esta manera poder iniciar con las actividades propuestas en el ambiente de aprendizaje. Es pertinente resaltar que los estudiantes no tuvieron inconvenientes al momento de ingresar el valor requerido en la casilla de entrada, pues esta acción no requería de esquemas de uso elaborados.

De acuerdo a las instrucciones del ambiente del aprendizaje los estudiantes ejercieron una acción en el deslizador y percibieron la gráfica que se formaba al mover este. Por lo anterior, se puede identificar que el estudiante en este momento de la tarea se encuentra en una fase de

instrumentalización, pues están dando cuenta de las propiedades del artefacto y cuales son efectos de ejercer acciones sobre este.

En el momento de completar la tabla a partir de la gráfica, la mayoría de estudiantes presentaron una dificultad que no estaba presupuestada en el análisis *a priori*, pues el software les estaba brindando una validación negativa, dado que estaban tabulando las coordenadas de todos los puntos menos el punto en el origen; el docente en estos casos tuvo que hacer intervenciones como la del siguiente diálogo:

E₃: Profesor ya llené la tabla con los valores de los puntos, pero me sigue saliendo la manito roja (Imagen programada en el software, que expresa una validación negativa).

D: La tabla se debe llenar con las coordenadas de todos los puntos graficados, entonces observa la gráfica y fíjate si en realidad ya tabulaste todos los puntos o se te está escapando uno.

E₃: [El estudiante mueve el deslizador y pregunta] ¿El punto (0,0) también va en la tabla? [Señalando la pantalla del computador].

D: ¿El punto (0,0) hace parte de la gráfica?

E₃: Sí.

D: Entonces también debe ser tabulado, recuerda que se deben tabular todos los puntos de la gráfica.

Así, los estudiantes lograron completar la tabla de valores obteniendo una validación positiva por parte del software y así pudieron continuar con la siguiente actividad.

Finalmente, los estudiantes tuvieron dificultad al tratar de representar las variables de la situación mediante letras, por lo que el docente hizo la siguiente aclaración utilizando el video beam y el tablero:

D: Observemos el enunciado que hay en la vista algebraica [señala el texto con el cursor del computador proyectado en el video beam], este nos dice que el tiempo lo vamos a representar con la letra “X” [lo escribe en el tablero] y los litros derramados lo representaremos con la letra “Y” [lo escribe en el tablero]. Inicialmente ustedes me dijeron un valor por el cual yo debía

multiplicar el tiempo para hallar la cantidad de agua derramada ¿Cuál es ese valor?

E4: Los litros por minuto, que serían 3.

D: ¿Ese 3 lo multiplico por? [Escribe en el tablero el “3” y espera la respuesta del estudiante]

E4: El tiempo.

D: ¿Pero el tiempo está representado con qué letra según el enunciado? [señala el tablero]

E5: Con la letra X.

D: Entonces, multiplicas el tiempo por 3 ¿para hallar qué? [escribe en el tablero “ $3X=$ ” y espera la respuesta del estudiante]

E4: Para hallar los litros derramados que sería “Y”.

D: Muy bien [Completa la expresión en el tablero “ $3X=Y$ ”], de esta manera se escribe la expresión algebraica del daño en la tubería.

Mediante el diálogo entre el docente y los estudiantes, estos pudieron completar la última actividad del ambiente de aprendizaje.

Las preguntas propuestas para esta tarea que cuentan con un valor pragmático definidas en los análisis *a priori*, especificando su intención son las siguientes:

- De acuerdo a la vista gráfica ¿Qué figura geométrica se forma con los puntos que se crean al mover el deslizador?
- ¿En el contexto de la tubería todos los puntos de la gráfica son colineales? Justifica.
- Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (0,0) en el contexto del daño de la tubería.
- Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (30,90) en el contexto del daño de la tubería.
- Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (70,210) en el contexto del daño de la tubería.
- En la tabla de valores ¿Qué relación numérica encuentras entre la columna de los minutos transcurridos y la columna de litros derramados?
- Con base en la tabla de valores determina ¿Cuáles son los elementos que cambian y los que se mantienen constantes? Especifica.

- De acuerdo a lo estudiado en la vista gráfica, la vista tabla de datos y la vista algebraica
- ¿Qué elementos son comunes en las tres representaciones?

De esto, se obtuvieron los siguientes resultados:

En las preguntas iniciales, un primer caso de respuesta lo dieron 24 de 28 (86%) estudiantes, dado que responden de manera acertada a ambas preguntas, argumentando que los puntos graficados al mover el deslizador son colineales, puesto que se encuentran situados sobre la misma línea recta; un ejemplo de respuesta se evidencia en la Ilustración 29.

<p>1. De acuerdo a la vista gráfica ¿Qué figura Geométrica se forma con los puntos que se crean al mover el deslizador?</p> <p><u>Una recta</u></p>
<p>Una recta.</p>
<p>2. ¿En el contexto de la tubería todos los puntos de la gráfica son colineales? Justifica.</p> <p><u>Si porque los puntos pasan por la misma recta</u></p>
<p>Si porque los puntos pasan por la misma recta.</p>

Ilustración 29: Tarea 2_ preguntas 1 y 2_ caso 1.

Por su parte 4 de 28 (14%) estudiantes no tuvieron inconvenientes interpretando la figura que se formaba al mover el deslizador. Sin embargo, al momento de justificar si los puntos formados al mover el deslizador eran colineales o no, presentaron falencias. En la Ilustración 30 tenemos un claro ejemplo.

<p>1. De acuerdo a la vista gráfica ¿Qué figura Geométrica se forma con los puntos que se crean al mover el deslizador?</p> <p><u>una linea recta porque en la grafica al mover el deslizador los puntos van subiendo en diagonal hacia</u></p>
<p>Una línea recta porque en la gráfica al mover el deslizador los puntos van subiendo en</p>

diagonal hacia arriba.
2. ¿En el contexto de la tubería todos los puntos de la gráfica son colineales? Justifica. <u>Si porque si tu mueves la grafica los puntos se siguen.</u>
Si porque si tu mueves la gráfica los puntos se siguen.

Ilustración 30: Tarea 2_ preguntas 1 y 2_ caso 2.

Para las preguntas relacionadas a la interpretación que los estudiantes les dan a los puntos de la gráfica, encontramos que 18 de 28 (64%) estudiantes más que indicar la coordenada de cada punto, dan una interpretación de cada uno relacionándolos con el contexto. Aquí es importante resaltar el tipo de respuesta a cerca del punto (0,0), puesto que el hecho de que enfatizen en que es el momento en que la tubería no se ha dañado nos permite determinar que el estudiante hizo un análisis más minucioso de la situación, un ejemplo de ello lo tenemos en la Ilustración 31.

3. Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (0,0) en el contexto del daño de la tubería. <u>lo que corresponde el punto (0,0) es cuando todavía no se ha dañado la tubería y no ha empezado el desperdicio</u>
Lo que corresponde el punto (0,0) es cuando todavía no se ha dañado la tubería y no ha empezado el desperdicio.
4. Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (30,90) en el contexto del daño de la tubería. <u>lo que corresponde el punto (30,90); es que han pasado 30 minutos y se han desperdiciado 90 litros como lo indica la tabla</u>
Lo que corresponde el punto (30,90); es que han pasado 30 minutos y se han desperdiciado 90 litros como lo indica la tabla.
5. Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (70,210) en el del daño de la tubería.. <u>lo que corresponde el punto (70,210); han transcurrido 70 minutos y se han derramado 210 litros como lo indica la tabla</u>
Lo que corresponde el punto (70,210); han transcurrido 70 minutos y se han derramado 210 litros como lo indica la tabla.

Ilustración 31: Tarea 2_ preguntas 3, 4 y 5_ caso 1.

Por otro lado, 7 de 28 (25%) estudiantes, respondieron de manera puntual indicando a qué corresponde cada coordenada. Es pertinente destacar que este tipo de respuesta no es incorrecta, dado que el estudiante está dando una interpretación de las coordenadas relacionándolas con las variables de la tarea, lo anterior se evidencia en la Ilustración 32.

<p>3. Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (0,0) en el contexto del daño de la tubería.</p> <p><u>0 litros derramados y 0 minutos</u></p>
<p>0 litros derramados y 0 minutos.</p>
<p>4. Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (30,90) en el contexto del daño de la tubería.</p> <p><u>30 minutos 90 litros derramados</u></p>
<p>30 minutos 90 litros derramados.</p>
<p>5. Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (70,210) en el del daño de la tubería..</p> <p><u>70 minutos 210 litros derramados</u></p>
<p>70 minutos 210 litros derramados.</p>

Ilustración 32: Tarea 2_ preguntas 3, 4 y 5_caso 2.

Por último, 3 de 28 (11%) estudiantes no tuvieron dificultades con las preguntas 4 y 5, pues interpretaron cada punto dentro del contexto; no obstante en la pregunta 3 interpretaron el punto (0,0) como el inicio del daño de la tubería, una respuesta llamativa pues da cuenta de una interpretación desde otra perspectiva y que no se tenía prevista en el análisis *a priori*; podemos identificar de este tipo de respuesta que el estudiante interpreta este punto como el momento exacto en que se dará inicio al daño y empezará a transcurrir el tiempo, la Ilustración 33 es una muestra del caso.

<p>3. Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (0,0) en el contexto del daño de la tubería.</p> <p><u>Corresponde al comienzo del daño de la tubería</u></p>
<p>Corresponde al comienzo del daño de la tubería.</p>

<p>4. Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (30,90) en el contexto del daño de la tubería.</p> <p><u>corresponde a 30 minutos ya transcurridos y a 90 litros de agua derramados.</u></p>
<p>Corresponde a 30 minutos ya transcurridos y a 90 litros de agua derramados.</p>
<p>5. Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (70,210) en el del daño de la tubería..</p> <p><u>corresponde a 70 minutos ya transcurridos y a 210 litros de agua derramados.</u></p>
<p>Corresponde a 70 minutos ya transcurridos y a 210 litros de agua derramados.</p>

Ilustración 33: Tarea 2_ preguntas 3, 4 y 5_caso 3.

Siguiendo con las preguntas con valor pragmático, 14 de 28 (50%) estudiantes lograron reconocer los elementos que cambian en la tabla de valores y los que se mantienen constantes (ver Ilustración 34).

<p>7. En base a la tabla de valores determina ¿Cuáles son los elementos que cambian y los que se mantienen constantes? Específica.</p> <p><u>los elementos constantes son los litros por minutos</u> <u>los que cambian son los minutos</u> <u>transcurridos y los litros derramados</u></p>
<p>Los elementos constantes son los litros por minutos y los que cambian son los minutos transcurridos y los litros derramados.</p>

Ilustración 34: Tarea 2_ pregunta 7_caso 1.

Para finalizar, 16 de 28 (57%) estudiantes responden acertadamente indicando que los elementos comunes en las tres vistas son los litros derramados, el tiempo y los litros por minuto (Ver Ilustración 35).

<p>12. De acuerdo a lo estudiado en la vista gráfica, la vista tabla de datos y la vista algebraica ¿Qué elementos son comunes en las tres representaciones?</p> <p><u>los litros derramados, el tiempo y litro por minuto.</u></p>
<p>Los litros derramados, el tiempo y litro por minuto.</p>

Ilustración 35: Tarea 2_ pregunta 12_caso 1.

Así pues, el estudio de las propiedades de la representación gráfica, tabular y algebraica de la situación dos no se quedaron como representaciones inertes y sin significado, sino que se pudieron extraer elementos de cada una mediante las preguntas planteadas. Asimismo, se puede decir que el medio fue fundamental para que el estudiante diera respuesta a estas preguntas, pues hubo siempre una interacción del estudiante con el medio, explorando esquemas de uso, que se fueron desarrollando acorde a las acciones realizadas en el ambiente de aprendizaje.

Valor epistemológico de la tarea 2.

Los resultados obtenidos para las preguntas formuladas en el valor epistemológico de la tarea dos son los siguientes:

- Observa los puntos que se forman al mover el deslizador y determine cuántos litros de agua se derraman entre cada punto. Establece si esta cantidad de agua siempre es la misma o no. Explica. Describe cómo es el cambio numérico de los elementos enunciados anteriormente.

Un primer tipo de respuesta lo dieron 17 de 28 (61%) estudiantes, quienes dieron respuestas muy acertadas argumentando que la cantidad de agua que se derrama entre cada punto es de 30 litros, puesto que cada punto se encuentra cada 10 minutos. Una muestra muy llamativa se evidencia en la Ilustración 36, este estudiante sustenta que 30 litros es la cantidad de agua que se derrama cada 10 minutos y que esta solo cambiaría si se llegase a cambiar los intervalos de tiempo.

6. Observa los puntos que se forman al mover el deslizador y determine cuántos litros de agua se derraman entre cada punto. Establece si esta cantidad de agua es siempre la misma o no. Explica.

los puntos aparecen cada 10 minutos así
que el total de litros por cada 10 minutos
es de 30 litros y siempre va a ser la
misma cantidad a menos que se tomen otros
valores con respecto al tiempo

Los puntos aparecen cada 10 minutos así que el total de litros por cada 10 minutos es de 30 litros y siempre va a ser la misma cantidad a menos que se tomen otros valores con respecto al tiempo.

Ilustración 36: Tarea 2_ pregunta 6_caso 1.

Asimismo, 5 de 28 (18%) estudiantes lograron identificar que entre cada punto se derraman 30 litros de agua, más no dieron una explicación del porqué sucedía esto, solo dieron una respuesta puntual a partir de lo observado en la gráfica (ver Ilustración 37).

6. Observa los puntos que se forman al mover el deslizador y determine cuántos litros de agua se derraman entre cada punto. Establece si esta cantidad de agua es siempre la misma o no. Explica.

Se derraman entre cada punto 30 L de agua

Se derraman entre cada punto 30 L.

Ilustración 37: Tarea 2_ pregunta 6_caso 2.

Por otro lado, 6 de 28 (21%) estudiantes indicaron que entre cada punto se van derramando 30 litros de agua y por esta razón la cantidad de agua derramada entre cada punto no es la misma, pues cada vez iba aumentando. Lo anterior se evidencia en la Ilustración 38.

6. Observa los puntos que se forman al mover el deslizador y determine cuántos litros de agua se derraman entre cada punto. Establece si esta cantidad de agua es siempre la misma o no. Explica.

30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300 no

Por que entre cada punto se

va derramando 30 litros de

agua

30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300 no porque entre cada punto se va derramando 30 litros de agua.

Ilustración 38: Tarea 2_ pregunta 6_caso 3.

- De acuerdo a la expresión algebraica en la situación del daño en la tubería ¿X puede tomar valores negativos? Explica.
- ¿Los valores de X en la expresión algebraica puede tomar valores decimales? Explica.

El primer tipo de respuesta lo dieron 12 de 28 (43%) estudiantes, estos argumentaron que la variable X no podía ser negativa debido a que el tiempo siempre va en aumento y acertadamente justificaron que la variable X puede tomar valores decimales, puesto que se podía determinar cuántos litros de agua se han derramado para tiempos no exactos. La Ilustración 39 es un ejemplo de lo anterior.

<p>10. De acuerdo a la expresión algebraica en la situación del daño de la tubería ¿X puede tomar valores negativos? explica.</p> <p>no porque X representa los minutos y porque los minutos va aumentando no disminuyendo.</p>
<p>No porque x representa los minutos y porque los minutos va aumentando no disminuyendo.</p>
<p>11. ¿Los valores de X en la expresión algebraica puede tomar valores decimales? explica.</p> <p>si se puede porque si establezco minuto y medio equivale a 3,5 litros derramados.</p>
<p>Si se puede porque si establezco minuto y medio equivale a 3,5 litros derramados.</p>

Ilustración 39: Tarea 2_ preguntas 11 y 10_caso 1.

El segundo tipo de respuesta lo dieron 11 de 28 (39%) estudiantes, estos respondieron acertadamente la pregunta número 11, pues aseguraron que la variable X si podía tener valores decimales mediante un caso particular. Lo interesante en estos estudiantes fue en la justificación a la respuesta de la pregunta 10, estos afirmaban que la variable X no podía ser negativa, pues esto se entiende como que el agua no se está derramando, sino que está entrando por la tubería (Ver Ilustración 40).

<p>10. De acuerdo a la expresión algebraica en la situación del daño de la tubería ¿X puede tomar valores negativos? explica.</p> <p>No puede ser negativo ya que no puede entrarse en la tubería si no que antes se estaba botando</p>
--

No puede ser negativo ya que no puede entrarse en la tubería sino que antes se estaba botando.
<p>11. ¿Los valores de X en la expresión algebraica puede tomar valores decimales? explica.</p> <p><u>Si ya que en 0,30 segundos o 0,15 segundos se puede determinar la cantidad de agua derramada</u></p>
Si ya que en 0,30 segundos o 0,15 segundos se puede determinar la cantidad de agua derramada.

Ilustración 40: Tarea 2_ preguntas 11 y 10_caso 2.

El tercer tipo de respuesta lo dieron 5 de 28 (18%) estudiantes, estos en relación a la pregunta 10 respondieron que la variable X si puede tomar valores negativos, puesto que como es una variable puede tomar cualquier valor, evidenciando que no están teniendo en cuenta el contexto de la situación. En lo que respecta a la pregunta 11 estos estudiantes justificaron que la variable X no podía adquirir un valor decimal, entendiéndose el tiempo como un valor exacto y discreto (ver Ilustración 41).

<p>10. De acuerdo a la expresión algebraica en la situación del daño de la tubería ¿X puede tomar valores negativos? explica.</p> <p><u>Se puede tomar valores negativos ya que X representa cualquier número, o sea, cualquier minuto</u> <u>Ejemplo: $y = 3x = y = 3(-20) = y = -60$</u> <u>podríamos tomar el -20 como los minutos que ya han pasado</u></p>
<p>Se puede tomar valores negativos ya que X representa cualquier número, o sea, cualquier minuto.</p> <p>Ejemplo: $y = 3x = y = 3(-20) = y = -60$</p> <p>Podemos tomar el -20 como los minutos que ya han pasado.</p>
<p>11. ¿Los valores de X en la expresión algebraica puede tomar valores decimales? explica.</p> <p><u>No puede tomar valores ya que la X representa los minutos transcurridos</u></p>

No puede tomar valores ya que la X representa los minutos transcurridos.

Ilustración 41: Tarea 2_ preguntas 11 y 10_caso 3.

- Analiza la vista gráfica, la vista de tabla de datos y la vista algebraica y encuentra una relación entre estas tres vistas con relación a la situación del daño en la tubería.

A continuación analizamos dos casos observados en los resultados en las hojas de tareas. Para ello 16 de 28 (57%) estudiantes responden acertadamente a ambas preguntas, indicando que los elementos comunes en las tres vistas son los litros derramados, el tiempo y los litros por minuto. Lo interesante aquí es que logran identificar que las tres representaciones hacen referencia a “lo mismo” o en palabras más versadas aluden al mismo objeto matemático (ver Ilustración 42).

<p>12. De acuerdo a lo estudiado en la vista gráfica, la vista tabla de datos y la vista algebraica ¿Qué elementos son comunes en las tres representaciones?</p> <p><u>los litros derramados, el tiempo y litro por minuto.</u></p>
<p>Los litros derramados, el tiempo y litro por minuto.</p>
<p>13. Analiza la vista gráfica, la vista de tabla de datos y la vista algebraica y encuentra una relación entre estas tres vistas con relación a la situación del daño en la tubería.</p> <p><u>que en las tres muestran el daño que tiene la tubería y son diferentes medios de vista y todas van a lo mismo.</u></p>
<p>Que en las tres muestran el daño que tiene la tubería y son diferentes medios de vista y todas van a lo mismo.</p>

Ilustración 42: Tarea 2_ preguntas 12 y 13_caso 1.

Por consiguiente, 12 de 28 (43%) estudiantes logran identificar los elementos que se encuentran presentes en las tres situaciones, pero no llegan a concluir que las tres representaciones son el mismo objeto matemático y desvían su respuesta hacia otro foco. Lo anterior se observa en la Ilustración 43.

<p>12. De acuerdo a lo estudiado en la vista gráfica, la vista tabla de datos y la vista algebraica ¿Qué elementos son comunes en las tres representaciones?</p> <p><u>los elementos comunes son el tiempo y el agua.</u></p>
Los elementos comunes son el tiempo y el agua.
<p>13. Analiza la vista gráfica, la vista de tabla de datos y la vista algebraica y encuentra una relación entre estas tres vistas con relación a la situación del daño en la tubería.</p> <p><u>minutos transcurridos y litros derramados</u></p>
Minutos transcurridos y litros derramados.

Ilustración 43: Tarea 2_ preguntas 12 y 13_caso 2.

Primero se resalta la importancia de las consideraciones visuales analizando lo sucedido en la pregunta 6. En esta pregunta, inicialmente la mayoría de los estudiantes no logró entenderla, sin embargo la orientación del docente fue fundamental para que se diera su comprensión, el siguiente diálogo es un ejemplo de las inquietudes que tuvieron los estudiantes y la forma en la que el docente mediante la información de la vista gráfica trazó el camino para que estos pudiesen dar una la respuesta:

E: Profe no entiendo esta pregunta. [Lee la pregunta 6 de la hoja de tareas de la situación 2]
D: Lo que te preguntan ahí es, por ejemplo ¿entre este punto y este, cuánta agua se derrama? [señalando la pantalla del computador]
E: 30 litros de agua.
D: ¿Y entre este punto de acá y este de acá (otro par de puntos diferentes)? [Señalando la pantalla del computador]
E: Lo mismo.
D: Entonces debes establecer si esos 30 litros de agua siempre van a derramarse entre cada punto o van a cambiar y explicar ¿por qué sucede esto?

De esta manera, los estudiantes debían hacer uso de la habilidad de visualización y realizarse algunas cuestiones sobre la información de la vista gráfica, por lo que es evidente que el 79% de

los estudiantes se apoyó de la vista gráfica para hacer una apreciación de la situación y luego llegar a respuestas muy válidas.

Es importante resaltar de la pregunta 6 (ver Ilustración 36) que solo el 61% de los estudiantes pudo entender porque esta cantidad iba ser la misma con respecto a los intervalos de tiempo que se tomen; el 18% de los estudiantes no argumentó por qué siempre eran 30 litros que se derramaban siempre (ver Ilustración 37) y el 21% brindaron una respuesta incorrecta pues justificaban que la cantidad de agua iba aumentando y por lo tanto esta cantidad no era constante (ver Ilustración 38). Como resultado de lo anterior, encontramos que la mayoría de los estudiantes lograron identificar la variable constante de la situación, como se había planteado en el análisis *a priori*.

Por otro lado, se analiza lo sucedido en la pregunta 12 y 13, dado que los estudiantes teniendo en cuenta la visión global e integradora de la vista gráfica, lograron relacionar la información que hay en esta con la información de las otras representaciones. Podemos afirmar mediante los resultados que el 57% de los estudiantes identifica que en las tres vistas se encuentra presente el tiempo, los litros por minuto y los litros derramados; adicional a esto, logran reconocer que las tres vistas son diferentes formas de estudiar la situación del daño de la tubería y que las tres llegan a los mismo, logrando así una articulación de las representaciones (ver Ilustración 42) y de esta manera alcanzando el propósito de esta situación. Por su parte, el 43% de los estudiantes no lograron identificar que las tres vistas anteriormente estudiadas aluden a un mismo objeto matemático, esto nos indica una validación negativa de la tarea (ver Ilustración 43).

Como resultado de la aplicación de la tarea 2, se puede decir que el objetivo propuesto para esta situación se vio reflejado en el estudio de la función lineal partiendo desde el análisis de la gráfica, el estudio de las propiedades de la representación tabular, el estudio de la representación algebraica y el análisis de las variables que la componen; y lo más importante, en la articulación de dichas representaciones.

Por último, los conocimientos adquiridos en matemáticas no son sólo resultado de esta situación, sino que la utilización de términos como “desperdicio de agua” por parte de los

estudiantes da cuenta de que se generó una conciencia acerca del derroche de agua que hay cuando suceden este tipo de daños en los hogares.

Análisis desde los estándares.

De acuerdo a los resultados obtenidos en el proceso de experimentación, se puede afirmar que el 57% del total de estudiantes logró alcanzar el estándar propuesto para esta tarea, debido a que luego de estudiar las propiedades de la representación tabular, gráfica y algebraica, los estudiantes lograron relacionar estas representaciones, puesto que las tres aludían al mismo objeto matemático. Pese a lo anterior, el 43% de los estudiantes no logró llegar al estándar propuesto para esta tarea 2, aunque la mayoría tuvo un buen desempeño en el estudio de las representaciones, no lograron relacionarlas; se puede relacionar lo anterior con una mala interpretación de las preguntas o en algunos casos de estudiantes que no se sintieron atraídos por la tarea.

4.2.3 Análisis de la tarea 3. “Las descargas de retrete”.

Para el desarrollo de las actividades de esta tarea, se estipuló en el análisis *a priori* un tiempo de 120 minutos (ver Tabla 3), no obstante esta finalizó mucho antes de lo esperado (ver Tabla 4), debido a que esta tarea es similar a la anterior. Cabe resaltar que lo anterior se dio, gracias a los esquemas de uso desarrollados anteriormente; de esta manera los estudiantes lograron llevar a cabo las actividades de esta tarea sin muchas inquietudes y de forma rápida, como se había estipulado en el análisis *a priori*.

Ahora bien, se evidencia al inicio de las actividades la facilidad con la cual los estudiantes desarrollaron el proceso de interacción. No fue necesario realizar un acercamiento a la expresión algebraica, por parte del docente y tampoco se presentaron dificultades con relación a la actividad de completar la tabla, puesto que los estudiantes relacionaron lo aprendido en la tarea anterior con esta; inclusive se presentaron casos donde los estudiantes completaron las actividades sin la explicación del docente, es decir, mientras el docente esperaba a que todos los

estudiantes ingresaran al software, algunos estudiantes iniciaron las actividades con el software y las llevaron a cabo sin problema.

Por lo anterior, los estudiantes iniciaron definiendo correctamente la expresión algebraica de la tarea referida a las descargas del retrete y de manera inmediata; todo esto debido a los conocimientos ganados en la tarea anterior. Seguidamente, llenaron la tabla de valores, en este caso relacionada a las descargas del retrete iniciando desde el origen y finalizando con la construcción de la gráfica. Todo lo anterior, recibiendo una respuesta positiva por las retroacciones del medio. Es de interés mencionar que el desarrollo de la etapa de instrumentalización de esta tarea fue eficiente, pues los estudiantes determinaron las características y propiedades de forma rápida y sin problema.

Valor pragmático de la tarea 3.

Entre las preguntas propuestas en esta tarea, se clasificaron aquellas con valor pragmático y, además se mencionó el alcance y lo que se esperaba de cada una. Las preguntas con valor pragmático de la tarea 3 son:

- ¿Cuáles son los elementos presentes en la tabla de valores de la situación de las descargas del retrete? describe cuales son los que cambian y los que no.
- ¿Los puntos de la gráfica de la situación en el contexto del retrete son colineales? ¿Por qué?
- De acuerdo a la situación de las descargas del retrete, analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto $C = (2,16)$
- De acuerdo a la situación de las descargas del retrete, analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto $A = (0,0)$
- Utilizando las herramientas de GeoGebra, realiza lo siguiente y responde:

Como se menciona anteriormente, los estudiantes no presentaron dificultades al momento de responder la primera pregunta, ya que la asimilaron a las actividades anteriores. 28 (100%)

estudiantes lograron identificar los elementos que intervienen en la situación y que están presentes en la tabla de datos. La Ilustración 44 es un ejemplo de lo anterior:

<p>4. ¿Cuáles son los elementos presentes en la tabla de valores de la situación de las descargas del retrete? describe cuales son los que cambian y los que no:</p> <p>Los elementos son el número de descargas, los litros por descarga y los litros derramados y los que cambian son el número de descargas y los litros derramados y los que no los litros por descarga.</p>
<p>Los elementos son el número de descargas, los litros por descarga y los litros derramados y los que cambian son el número de descargas y los litros derramados y los que no los litros por descarga.</p>

Ilustración 44: Tarea 3_ pregunta 4_caso 1.

El anterior ejemplo es de las respuestas más comunes dadas por los estudiantes; no todos respondieron de la misma manera, pero si responden de manera correcta haciendo alusión a lo mismo. Para las siguientes preguntas, se esperaba que los estudiantes lograran realizar la interpretación de los puntos de la gráfica como en la tarea anterior pero ahora en otro contexto. A esto, en respuesta a las preguntas planteadas 23 de 28 (82%) estudiantes respondieron de manera acertada, logrando interpretar el significado de cada punto con base en el contexto de la situación. A continuación se brinda un ejemplo de respuesta (ver Ilustración 45).

<p>7. De acuerdo a la situación de las descargas del retrete, analiza la gráfica y explica a que corresponde el punto C=(2,16)</p> <p>Que en 2 descargas se han derramado 16 litros.</p>
<p>Que en 2 descargas se han derramado 16 litros.</p>

8. De acuerdo a la situación de las descargas del retrete, analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto A= (0,0)

No hay descarga por lo tanto no hay litros derramados

No hay descarga por lo tanto no hay litros derramados.

Ilustración 45: Tarea 3_ preguntas 7 y 8_caso 1.

Concatenado a lo anterior, 4 de 28 (14%) estudiantes respondieron aludiendo a las coordenadas de la gráfica e interpretando el valor para la coordenada en x y la coordenada en y , este tipo de respuesta no está incorrecta, solo que se hace una interpretación puntual de las coordenadas, sin hacer mucho énfasis en lo que sería el contexto de la tarea 3.

7. De acuerdo a la situación de las descargas del retrete, analiza la gráfica y explica a que corresponde el punto C= (2,16)

Corresponde: el 2 el numero de descarga y el 16 a la cantidad de litros derramados

Corresponde: el 2 el número de descargas y el 16 a la cantidad de litros derramados.

8. De acuerdo a la situación de las descargas del retrete, analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto A= (0,0)

El 0 el numero de descargas y el otro 0 a la cantidad de litros derramados

El 0 el número de descargas y el otro 0 a la cantidad de litros derramados.

Ilustración 46: Tarea 3_ preguntas 7 y 8_caso2.

De manera general, se afirma que siempre hubo una interacción del estudiante con el medio para brindar respuesta a las preguntas, esto se vio reflejado en las primeras preguntas, pues los estudiantes se apropiaron de las propiedades del medio e hicieron de este un instrumento para su aprendizaje.

Valor epistemológico de la tarea 3.

Los resultados obtenidos en las preguntas formuladas para el valor epistemológico de la tarea tres son los siguientes:

- De acuerdo a la expresión algebraica en la situación del retrete ¿X puede tomar valores negativos? Explica
- ¿Los valores de X en la expresión algebraica puede tomar valores decimales? Explica
- ¿Qué significado tiene el valor 8 que acompaña la X en la expresión algebraica? ¿Este puede cambiar?

Analicemos entonces dos tipos de respuestas que dieron los estudiantes. Un primer tipo de respuesta lo dieron 20 de 28 (72%) estudiantes, quienes contestaron de manera acertada, dado que justificaron que la variable x representaba un número que iba en aumento y por tal razón no podía ser negativo, también afirmaron que la variable no podía tener valores negativos puesto que representaba valores exactos. Para la tercera pregunta los estudiantes afirmaron que el valor 8 de la expresión algebraica representa los litros por descarga y que no podía cambiar, pues era el número por el cual se debía multiplicar la variable x y así poder hallar los litros que se han derramado. Un ejemplo de lo anterior se refleja en la Ilustración 47.

1. De acuerdo a la expresión algebraica en la situación del retrete ¿X puede tomar valores negativos? explica. <u>No porque se requiere saber cuantas veces tiene que hacer para vaciar el retrete y hacer lo contrario sería imposible.</u>
No porque se requiere saber cuántas veces tiene que hacer para vaciar el retrete y hacer lo contrario sería imposible.
2. ¿Los valores de X en la expresión algebraica puede tomar valores decimales? explica. <u>No porque x en la expresión algebraica x son los números de descargas así que no puede tomar valores decimales.</u>
No porque X en la expresión algebraica son los números de descargas así que no puede

tomar valores decimales.
<p>3. ¿Qué significado tiene el valor 8 que acompaña la X en la expresión algebraica? ¿Este puede cambiar?</p> <p><u>El valor 8 que acompaña a la x en la expresión algebraica son los litros por descarga en este problema no puede cambiar porque es la constante porque en base a ese número se realizan las otras operaciones.</u></p>
El valor 8 que acompaña la X en la expresión algebraica son los litros por descarga en este problema no puede cambiar porque es la constante porque en base a ese número se realizan las otras operaciones.

Ilustración 47: Tarea 3_ preguntas 1, 2 y 3_caso 1.

Otro tipo de respuesta lo dieron 8 de 28 (28%) estudiantes, quienes presentaron dificultades en la interpretación de los elementos que componen la expresión algebraica, pues unos afirmaban que la variable x podía adquirir valores negativos y decimales argumentando que esta puede adquirir cualquier número, en la Ilustración 48 se puede observar un caso donde el estudiante justifica que el valor 8 presente en la expresión algebraica representa los litros por minuto y que este cambia cada vez que aumentan las descargas declarando que para dos descargas el 8 aumentaría a 16, confundiendo la variable constante 8 con y que sería el total de litros derramados.

<p>1. De acuerdo a la expresión algebraica en la situación del retrete ¿X puede tomar valores negativos? explica.</p> <p><u>no porque la grafica esta situada en valores positivos y en este caso no se podría tomar valores negativos.</u></p>
No porque la gráfica está situada en valores positivos y en este caso no se podría tomar valores negativos.
<p>2. ¿Los valores de X en la expresión algebraica puede tomar valores decimales? explica.</p> <p><u>no porque no podemos descargar el baño 1.3 o 1.5 veces por eso los valores de x son especificos</u></p>
No porque no podemos descargar el baño 1.3 o 1.5 veces por eso los valores de x son

específicos.
<p>3. ¿Qué significado tiene el valor 8 que acompaña la X en la expresión algebraica? ¿Este puede cambiar?</p> <p><i>El valor 8 significa que se arrojan o se usan 8 litros para bajar el retrete 1 sola vez y puede cambiar porque si se baja el retrete 2 veces el valor sería 16 litros de agua así sucesivamente.</i></p>
<p>El valor de 8 significa que se arrojan o se usan 8 litros para bajar el retrete 1 sola vez y puede cambiar porque si se baja el retrete 2 veces el valor sería 16 litros de agua así sucesivamente.</p>

Ilustración 48: Tarea 3_ preguntas 1, 2 y 3_caso 2.

Entre las actividades planteadas en la tarea tres, el estudiante debía seguir unas instrucciones planteadas para deducir por sí mismos, si la representación gráfica de una función de variable discreta puede ser representada mediante una línea recta. Para esto, la instrucción inicial fue trazar un punto que sea colineal a los puntos de la representación gráfica y que además se encuentre ubicado entre dos puntos ya dados. Los estudiantes en general no presentaron problemas para realizar lo que se les pedía y luego pasaron a responder las preguntas de acuerdo a estas instrucciones.

- Escoge dos puntos cualesquiera de la gráfica de la situación del retrete que sean consecutivos y traza un punto entre ellos que sea colineal.
 - En el contexto de las descargas del retrete ¿Qué significado tiene el punto que trazaste? ¿Es coherente con la situación?
- ¿Se puede representar la situación de las descargas del retrete mediante una línea recta? Explica tu respuesta.

Un primer caso de respuesta lo dieron 8 de 28 (29%) estudiantes, dado que logran determinar que el punto construido colineal a los demás no es coherente con la situación puesto que no pueden haber descargas decimales por las características y limitaciones de la situación. Asimismo, para la siguiente respuesta los estudiantes mencionan que al representar la situación de las descargas de retrete con una línea recta se estarían tomando valores decimales bajo el

concepto de colinealidad, por lo tanto la situación no se puede representar mediante una recta. La Ilustración 49 es un ejemplo de ello.

<ul style="list-style-type: none"> En el contexto de las descargas del retrete ¿Qué significado tiene el punto que trazaste? ¿Es coherente con la situación? <p>que el punto que trace quiere decir que cada 2.5 descargas se derraman 20 litros de agua</p> <p>y no es coherente por no pueden haber decimales en una descarga.</p>
<p>Que el punto que tracé quiere decir que cada 2.5 descargas se derraman 20 litros de agua.</p> <p>Y no es coherente pues no puede haber decimales en una descarga.</p>
<ul style="list-style-type: none"> ¿Se puede representar la situación de las descargas del retrete mediante una línea recta? Explica tu respuesta. <p>No por que no habría relación entre número de descargas y los litros derramados y ya que una línea está conformada por puntos estos nos dirían que pueden haber decimales en el número de descargas cuando no es correcto.</p>
<p>No porque no habría relación entre número de descargas y los litros derramados y ya que una línea está conformada por puntos estos nos dirían que puede haber decimales en el número de descargas cuando no es correcto.</p>

Ilustración 49: Tarea 3_ pregunta 9_caso 1.

Un segundo tipo de respuesta lo dieron 7 de 28 (25%) estudiantes, los cuales respondieron que no es coherente representar la situación mediante una línea recta, sin explicar de forma clara el porqué de sus respuestas. Más aún, asocian el punto trazado con su imagen en el eje y, aludiendo a que se pueden tener descargas decimales en la situación, lo cual es incorrecto. Puede que el estudiante no haya tenido claro las características de la situación y por tal motivo haya errado en sus respuestas (ver Ilustración 50).

<ul style="list-style-type: none"> En el contexto de las descargas del retrete ¿Qué significado tiene el punto que trazaste? ¿Es coherente con la situación? <p>El punto que trace tendría el valor de: $(3/2, 28)$ $3/2 = \# \text{descargas}$ $28 = \text{Litros derramados}$ No es coherente con la situación xq' no da un valor exacto</p>
<p>El punto que tracé tendría el valor de: $(3/2, 28)$ $3/2 = \# \text{descargas}$ $28 = \text{Litros derramados}$. No es coherente con la situación porque no daría un valor exacto.</p>
<ul style="list-style-type: none"> ¿Se puede representar la situación de las descargas del retrete mediante una línea recta? Explica tu respuesta. <p>No se puede representar mediante una línea recta xq' no sería coherente</p>
<p>No se puede presentar mediante una línea recta porque no sería coherente.</p>

Ilustración 50: Tarea 3_ pregunta 9_caso 2.

Por último, 13 de 28 (46%) estudiantes no justificaron de manera concisa la interpretación del punto que construyeron, mencionan que la X no puede tomar valores decimales por lo que se deduce que el punto que se construyó le dio como resultado una descarga decimal y por tanto se refiere a ella como algo que no vale; sin embargo menciona que es coherente, perdiendo sentido lo que mencionó anteriormente. Para la segunda pregunta mencionan que los puntos son colineales, no interpretando correctamente la pregunta que se le plantea y poniendo en duda si logró entender la situación como tal (ver Ilustración 51).

<ul style="list-style-type: none"> En el contexto de las descargas del retrete ¿Qué significado tiene el punto que trazaste? ¿Es coherente con la situación? <p>no significa nada, no vale nada no es coherente porque en x no se puede poner decimales</p>
<p>No significa nada, no vale nada, no es coherente porque en X no se puede poner decimales.</p>

- ¿Se puede representar la situación de las descargas del retrete mediante una línea recta?

Explica tu respuesta.

Si porque los puntos son colineales.

Si porque los puntos son colineales.

Ilustración 51: Tarea 3_ pregunta 9 caso 3.

- ¿Qué diferencias puedes encontrar entre la gráfica de la situación en el contexto de la tubería y la gráfica de la situación en el contexto de retrete?

Un primer tipo de respuesta lo dieron 12 de 28 (43%) estudiantes, estos brindaron respuestas asociadas a los elementos que percibieron en las dos gráficas y haciendo un acercamiento a la forma en que se podían representar dichas funciones. De esta manera argumentan que la gráfica de la situación anterior podría tomar valores decimales, en cambio en esta situación los valores de x debían ser exactos, una respuesta muy válida (ver Ilustración 52).

10. ¿Qué diferencias puedes encontrar entre la gráfica de la situación en el contexto de la tubería y la gráfica de la situación en el contexto de retrete?

Que en la situación de la tubería se pueden tomar decimales y en la del retrete no es posible porque no sería coherente y no se puede trazar la línea como tal ya que no se pueden tomar decimales

Que en la situación de la tubería se pueden tomar decimales y en la del retrete no es posible porque no sería coherente y no se puede trazar una línea como tal ya que no se pueden tomar decimales.

Ilustración 52: Tarea 3_ pregunta 10_caso 1.

Por otro lado, 13 de 28 (46%) estudiantes proporcionaron respuestas relacionadas a la razón de cambio, justificando que en la situación anterior la gráfica presentaba litros por minuto y que en esta estaban presentes número de descargas por litros, sin embargo la pregunta iba dirigida a la diferenciación de las gráficas, más no de los elementos presentes en ellas (ver Ilustración 53).

<p>10. ¿Qué diferencias puedes encontrar entre la gráfica de la situación en el contexto de la tubería y la gráfica de la situación en el contexto de retrete?</p> <p><u>en la tubería se derraman litro por</u> <u>minuto y en el baño se derrama</u> <u>por 8 litros por descargas</u></p>
<p>En la tubería se derraman litro por minuto y en el baño se derrama por 8 litros por descarga.</p>

Ilustración 53: Tarea 3_ pregunta 10_caso 2.

Por último, sólo 3 de 28 (11%) estudiantes presentaron dificultades en el análisis de las dos gráficas, pues brindaron respuestas muy alejadas de una respuesta correcta (ver Ilustración 54).

<p>10. ¿Qué diferencias puedes encontrar entre la gráfica de la situación en el contexto de la tubería y la gráfica de la situación en el contexto de retrete?</p> <p><u>que el número de descargas cambia</u> <u>en ambas gráficas y esa es la diferencia</u></p>
<p>Que el número de descargas cambia en ambas gráficas y esa es la diferencia.</p>

Ilustración 54: Tarea 3_ pregunta 10_caso 3.

Se analiza que solo el 29% de los estudiantes logran el objetivo de identificar la forma en que se puede representar la situación de variable discreta (ver Ilustración 49), pues se evidencia que por medio de la visualización matemática estos estudiantes logran una buena apropiación de las características de la gráfica de una función lineal de variable discreta; a pesar de que el punto construido guarda una relación con los otros puntos ya establecidos, logran explicar por qué este punto no es coherente con el contexto.

Todo lo anterior deja en evidencia que una pequeña parte de los estudiantes desarrolló la fase de instrumentación, transformando el artefacto en un instrumento y haciendo uso de la visualización matemática. Por el contrario, el 71% no alcanzó el objetivo de la situación, por tanto se convierte en una validación negativa, puesto que una gran parte de la muestra no alcanzó el objetivo propuesto para esta tarea.

En la pregunta 10, donde se realiza un contraste entre la gráfica construida en la tarea dos con la gráfica construida en la tarea tres y de esta manera poder que el estudiante determine la diferencia entre ambas gráficas, se pudo identificar que los estudiantes no lograron interpretar la pregunta, puesto que brindaron diferencias relacionadas a los elementos presentes en la vista gráfica, más no de las gráficas (ver Ilustración 53).

En la última pregunta, podemos resaltar que solo el 43% de los estudiantes lograron interpretar las limitaciones en el dominio que presenta la situación de las descargas del retrete con respecto a la otra, logrando un acercamiento hacia el poder identificar y diferenciar las variables de naturaleza continua en una función y las de naturaleza discreta, así como su representación gráfica (ver Ilustración 52). Desde la teoría de la mediación instrumental, se puede decir que los estudiantes llegaron a estos argumentos, mediante la interacción y apropiación de las propiedades que conforman el artefacto y lograron transformarlo en un instrumento, realizando un buen proceso del génesis instrumental. Asimismo, se evidencio el uso de la visualización matemática para dar respuesta por parte de los estudiantes, pues se ayudaron de las consideraciones visuales y las articularon con los análisis realizados a la expresión algebraica. No obstante, un poco más de la mitad de los estudiantes no lograron realizar un análisis de la pregunta y brindar respuestas acertadas.

Análisis desde los estándares.

Con base en los resultados obtenidos, se puede concluir que sólo el 43% de los estudiantes logró situarse en el estándar propuesto para esta tarea, dado que estos lograron inferir que en la tarea anterior su representación gráfica aludía a una línea recta y en la actual no. No obstante, un poco menos de la muestra logró el objetivo trazado, pues el 57% de los estudiantes presentó dificultades en la caracterización de la gráfica de una función lineal de variable discreta con una función lineal de variable continua, lo anterior se puede relacionar a una mala interpretación de las preguntas, también a que los estudiantes relacionan la función lineal siempre con una línea recta y esto puede ser debido al poco trabajo con la naturaleza de sus variables.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 Conclusiones

En el presente apartado se presentan las conclusiones generales del trabajo teniendo en cuenta en primer lugar los argumentos expuestos en el planteamiento del problema, el marco teórico y la metodología que se utilizó; en segundo lugar, el cumplimiento de los objetivos de la investigación.

Inicialmente, se corroboró en el planteamiento del problema la importancia de preguntarse por ¿Cómo caracterizar el diseño de una secuencia de tareas para dar cuenta de la función lineal integrando GeoGebra en grado noveno de educación básica?” puesto que al revisar algunos trabajos de investigación en relación a la función lineal, se pudo identificar que aún quedaban elementos de este objeto matemático por abordar, asimismo, considerar el tratamiento de la problemática desde otros referentes teóricos y la integración de las Tics en el aula.

La metodología de investigación inspirada en la perspectiva de la micro ingeniería didáctica, fue propicia para el desarrollo de la secuencia de tareas, pues a partir de las diferentes fases, se pudo diseñar, pronosticar, experimentar y evaluar satisfactoriamente; tomar los resultados más relevantes, compararlos con lo que se había planeado y de esta manera poder determinar la pertinencia de llevar al aula de clase una secuencia de tareas con el uso de GeoGebra para movilizar un objeto matemático. Teniendo en cuenta que la micro ingeniería se enfoca en la experimentación con grupos reales de clase, los análisis proporcionaron elementos importantes para identificar y prever los conocimientos previos y las posibles actuaciones de los estudiantes, lo que favoreció la validación interna de los resultados.

En este sentido, es posible admitir que la metodología implementada permitió identificar criterios relevantes para caracterizar la secuencia de tareas en pro de las actuaciones de los estudiantes y en pro del diseño realizado, que se espera pueda ser considerada por aquellos docentes en formación y en ejercicio que deseen integrar a sus prácticas pedagógicas elementos

de la mediación instrumental haciendo uso de GeoGebra como instrumento para el desarrollo dinámico de conocimientos y de las habilidades de visualización matemática.

Asimismo, los análisis preliminares fueron pertinentes para llevar a cabo la investigación, pues brindaron elementos que aportaron en la metodología y diseño de las tareas, aportando a la fundamentación de los diferentes aspectos del concepto de la función lineal, movilizados en la secuencia de tareas. Además, brindó elementos que permitieron una coherencia entre los referentes teóricos y lo establecido por los documentos curriculares que propone el ministerio de educación. Igualmente, facilitó la caracterización de las variables de análisis necesarias para identificar los procesos cognitivos presentes en los estudiantes cuando aprenden un concepto matemático mediante las TICS.

Por otra parte, en lo que respecta al primer objetivo específico “Estipular algunos fenómenos, pensamientos y procesos matemáticos asociados al aprendizaje de la función lineal desde la perspectiva didáctica, matemática, cognitiva y curricular”, se resaltan los siguientes aportes a la investigación:

La dimensión didáctica presentó el diseño de tareas que hace uso de la tecnología digital y la visualización matemática, las cuales aportaron de manera metodológica y estructural en el diseño de las tareas; haciendo énfasis en las tareas con valor pragmático y epistemológico, dando importancia a las habilidades visuales y articulación de las representaciones haciendo uso de la visualización matemática. Estas dos teorías permitieron analizar desde distintos momentos las acciones de los estudiantes mediante la interacción con la secuencia de tareas en GeoGebra. También, nos permitieron identificar los momentos en los cuales se presentaba una articulación y uso de las habilidades visuales que desarrollan los estudiantes durante el proceso de mediación instrumental.

La dimensión matemática presentó todos de los elementos que se estudiaron en este trabajo de investigación, describiendo desde lo matemático el concepto de función, sus representaciones y varios de sus elementos. Esta dimensión permitió conocer desde la teoría algunos elementos de la función lineal dando así todos los recursos necesarios para llevar a cabo el proceso de

aprendizaje. Teniendo en cuenta que se quiere dar cuenta de algunos aspectos relacionados al concepto de función lineal, lo principal es conocer el objeto matemático desde sus representaciones, definiciones y teoremas; dejando en evidencia la importancia de esta dimensión.

La dimensión cognitiva brindó varios elementos que permitieron estructurar la metodología de la investigación, así como servir de base para interpretar de forma correcta los resultados obtenidos; todos ellos dirigidos a caracterizar la configuración de un diseño de una secuencia de tareas que hace uso de GeoGebra en el proceso de aprendizaje de un objeto matemático. Asimismo, propone y describe procesos a desarrollar por los estudiantes para llevar a cabo lo que se menciona en el objetivo general de la investigación.

Por último, la dimensión curricular aportó elementos que ubican el trabajo en un marco legal. Este nos permitió determinar el grado apropiado para el diseño e implementación de la secuencia de tareas, definir el perfil que debe tener el estudiante; establecer la estructura de enseñanza del objeto matemático, poner en juego los procesos y contextos pertinentes, así como también ver cómo está propuesto el desarrollo del pensamiento variacional y como está propuesto el desarrollo de conocimientos matemáticos mediante la utilización de recursos tecnológicos.

El segundo objetivo específico que dice “Configurar el diseño de una secuencia de tareas integrando GeoGebra para dar cuenta de los procesos de aprendizaje relacionados con la función lineal tomando como referente el diseño de tareas para el uso con tecnología digital se logró realizar el proceso de implementación de tres tareas ubicadas en el contexto del despilfarro de agua. De este diseño se puede concluir que partir de tareas ubicadas en situaciones ya vividas o existentes para los estudiantes; hace que estos les den importancia y sentido a las matemáticas.

Enseñar a través de tareas ubicadas en contextos reales algunos elementos de la función lineal, fue de gran importancia para sacar a relucir el carácter modelador, de variación y cambio que tiene una función lineal.

Ahora bien, el diseño de tareas que involucran variación y cambio haciendo uso de GeoGebra, ayuda en gran medida desde una perspectiva visual, puesto que el software permite contemplar ese carácter variacional de forma dinámica, llamar la atención de los estudiantes y visualizar objetos matemáticos que normalmente se presentan de forma abstracta y mecánica. Asimismo, el contexto elegido se acopló totalmente a los objetivos del trabajo y al objeto matemático que se quería movilizar; presentándose incluso para dar cuenta de variables de naturaleza distinta en el mismo contexto.

Es importante resaltar que GeoGebra es un software con gran variedad de herramientas, por lo que fue fundamental para el diseño de las tareas, pues permite programar y configurar imágenes y los colores del ambiente del aprendizaje, del mismo modo brinda la oportunidad de programar las retroacciones del medio para validar las acciones de los estudiantes.

La implementación de la secuencia de tareas se realizó en tres sesiones de dos horas cada una, las cuales fueron suficientes para el desarrollo completo y favorable de todas las tareas. La disposición de la institución fue más que suficiente, ya que se contó con una sala de sistemas totalmente capacitada y computadores en buen estado, los cuales permitieron un buen desarrollo y ejecución de la secuencia de tareas. Más aún, la disposición de los estudiantes fue la adecuada y se mantuvo la motivación desde la primera actividad de las tareas hasta la finalización.

En cuanto al tercer objetivo que dice “Examinar los procesos de mediación instrumental que surgen de la implementación de la puesta en acto de la secuencia de tareas” se puede decir que se logró dar cuenta de los procesos de mediación instrumental, dado que los estudiantes interactuaron con el software dinámico GeoGebra y a través de la herramienta de arrastre manipularon los objetos propuestos en la construcción de los ambientes de aprendizaje; así pues, a partir de la visualización alcanzaron procesos de razonamiento como interpretación, análisis, identificación, descripción y explicación de aspectos visuales, como las representaciones de la función lineal, su dependencia entre variables y la naturaleza entre variables. Estos procesos permitieron que se cumplieran los objetivos estipulados en cada una de las tareas.

El propósito de la primera tarea es identificar en actividades ubicadas en un contexto, las variables que determinan la relación funcional y de igual forma determinar la relación de dependencia que manejan. Se puede concluir que la mayoría de los estudiantes lograron identificar las magnitudes que están presentes, ya sea en una situación continua o discreta y a su vez, lograron identificar las relaciones de dependencia que estas guardan y desarrollaron acercamientos hacia la generalización de una función lineal.

En la segunda tarea, la mayoría de los estudiantes lograron acercamientos significativos hacia el trabajo con las diferentes representaciones y la articulación de las mismas, desarrollándose de forma aceptada en actividades con valor pragmático y epistemológico a través de los elementos visuales que se presentaron en GeoGebra. En esta, la mayoría de los estudiantes identificaron propiedades similares en cada una de las representaciones, haciendo ver estas como elementos que movilizan el mismo objeto matemático. Por último, la mayoría de los estudiantes lograron realizar correctamente la interpretación de la representación gráfica y los puntos que la conforman junto con la representación algebraica, utilizando elementos informales que obtuvieron.

Ahora, la tarea tres tuvo como objetivo estudiar las representaciones en un contexto o con variables discretas, además, poder identificar cuando una representación gráfica de la función lineal se puede representar a partir de una línea recta. De esto, la mayoría de los estudiantes lograron interpretar de forma correcta cada una de las representaciones; sin embargo, un poco menos de la mitad logró identificar las diferencias de una gráfica de situación lineal de variable continua con una de variable discreta. Asimismo, caracterizar que la representación gráfica de una función lineal cambia de acuerdo a las limitaciones y naturaleza de sus variables.

En este sentido, se puede concluir inicialmente que las secuencias de tareas que hacen uso de GeoGebra contribuyen de manera significativa en el aprendizaje de elementos como la dependencia entre variables cuando su estudio se ubica en un contexto real; de esta manera se facilita su interpretación y limitación para introducirse primero a conceptos como la dependencia y correspondencia y segundo, para realizar acercamientos hacia el dominio y rango de una función.

Por último, una secuencia de tareas que hace uso de GeoGebra para contribuir en el aprendizaje de algunos elementos de la función lineal se considera como un aporte para aquellos profesores que tengan interés en indagar y reflexionar acerca de sus prácticas pedagógicas, ya que el trabajo puede aportar elementos de análisis relevantes acerca de la pertinencia de integrar un software dinámico en sus prácticas educativas.

5.2 Recomendaciones

Se recomienda para futuras investigaciones, centrarse en elementos específicos de la función lineal como lo es su pendiente; la cual se puede trabajar utilizando solo la situación uno dedicada a la dependencia entre las variables. En la tarea dos se mostraron varios elementos en el análisis de los resultados, donde se evidenciaron acercamientos que, organizados de forma diferente y con objetivos más específicos pueden ser el punto de inicio para el desarrollo de un nuevo trabajo de investigación. Asimismo, elementos como lograr identificar variables continuas y discretas en situaciones contextualizadas y a su vez, lograr identificar cuando representar gráficamente a través de una línea recta o a través de un conjunto puntos colineales se puede tomar como un tema de trabajo para futuras investigaciones.

Si se desea continuar con el estudio de las funciones lineales, se recomienda indagar por actividades que involucre los demás cuadrantes del plano cartesiano, es decir, se recomienda trabajar con situaciones que permitan evidenciar el decrecimiento en este tipo de funciones, la aparición de las funciones a fin, la interpretación de pendientes negativas en contextos reales, el concepto de dominio, rango y el carácter visual que brindan Software dinámicos como GeoGebra.

Teniendo en cuenta la construcción y diseño de la secuencia de tareas, se recomienda optar por actividades menos generales, puesto que, al no tener una participación activa del docente, los objetivos del trabajo pueden desviarse. Asimismo, se recomienda realizar construcciones que no necesiten de muchos comandos en GeoGebra; ya que las variadas configuraciones causan interferencia en el software y se interrumpe la dinámica y el desarrollo de la clase.

Por otro lado, es recomendable reorganizar las actividades, acotar las tareas o como otra opción, realizar un estudio de casos. Al ser tres tareas, las cuales cuentan con más de 10 actividades, implementadas a más de 30 estudiantes; se obtienen infinitudes de resultados que, aunque son clasificados como buenos, malos o regulares y se toman los más relevantes, no se puede dejar de lado que cada respuesta dada por cada uno de los estudiantes, tenía algo importante que podría ser motivo de análisis y de gran influencia en el trabajo.

Finalmente, se recomienda seguir realizando trabajos relacionados a la función lineal utilizando GeoGebra para su visualización, ya que el software se presta perfectamente como mediador para evidenciar las características modeladoras, de variación y de cambio que tienen las funciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ángulo, J., & Celorio, S. (2012). *Una secuencia didáctica como herramienta pedagógica para introducir el concepto de función lineal en grado 9º*. (G. Obando, Ed.) Medellín: Universidad de Medellín.
- Artigue, M., Duoady, R., & Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (P. Gómez, Ed.) Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R., & Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático* (1a ed.). México, México: Pearson Educación.
- Cedillo, T. (2006). La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria: Los sistemas algebraicos computarizados. *Revista Mexicana de investigación educativa*, 129-153.
- Chacón, A. F. (2017). *Función lineal: una aproximación por medio de los registros de representaciones semióticas con estudiantes de nivel secundario*. San Miguel, Perú: Pontífica Universidad del Perú.
- Del Castillo, A., & Montiel, G. (s.f.). ¿Artefacto o instrumento? Esa es la pregunta. *CLAME: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.*, 459-467.
- Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Fabra, M., & Deulofeu, J. (2000). Construcción de gráficos de funciones: continuidad y prototipos. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 207-230.
- Fernández, A., & Rico, L. (1999). *Prensa y educación matemática*. Madrid, España: Síntesis.
- Grueso, R. A., & Gonzáles, G. (2016). *El concepto de función como covariación en la escuela*. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.

- Hecklein, M., Engler, A., Vrancken, S., & Müller, D. (2011). Variables, funciones y cambios. Exploración de las nociones que manejan alumnos de una escuela secundaria. *SOAREM: Sociedad Argentina de Educación Matemática*, 23-39.
- Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Educación matemática*, 23-45.
- Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2, 213-223.
- Margolinas, C. (2013). *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22*. Oxford: ICMI.
- Martínez, G. (2017). *Integración de las TIC en el proceso de enseñanza - Aprendizaje de la función lineal y su aporte pedagógico a los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Distrital Manuel del Socorro Rodríguez*. Chía, Cundinamarca: Universidad de la Sabana.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá, Colombia: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional. (1999). *Nuevas tecnologías y currículo de matemática*. Bogotá, Colombia: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos por competencias en matemáticas*. Bogotá, Colombia: MEN.
- Muñoz, O., Piedrahita, A., & Jessie, A. (2012). Diseño e implementación de una estrategia didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la función lineal modelando situaciones problema a través de las TIC. *Revista de la Facultad de Ciencias*, 22-33.
- Posada, F., & Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*. Medellín: Universidad de Antioquia.

- Rabardel, P. (1991). Activity with a Training Robot and the Formation of Knowledge. *Journal of artificial intelligence in education*.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Collin.
- Rabardel, P. (2007). Rubinstein aujourd'hui. Nouvelles figures de l'activité humaine. En V. Nosulenko, *Anthologie de textes choisis et édités* (págs. 1-312). Paris: Éditions de la Maison des sciences de l'homme.
- Rey, G., Boubée, C., Sastre, P., & Cañibano, A. (2009). Ideas para enseñar: aportes didácticos para abordar el concepto de función. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 153-162.
- Richard, C. (2017). *Logros de aprendizaje en funciones lineales y cuadráticas mediante secuencia didáctica con el apoyo del geogebra*. Cuenca, Ecuador: Universidad de Cuenca.
- Róldan, E. (2013). *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Ruiz, J., & Santacruz, M. (2010). Una secuencia didáctica desde la orquestación instrumental: la función cuadrática en grado noveno de educación básica. *Memoria 11° Encuentro Colombiano de matemática educativa*, 582-590.
- Saa, Á., & Trochez, Á. (2013). *Una propuesta de enseñanza de la función por tramos usando el periódico y GeoGebra*. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2012). *Precálculo, Matemáticas para el Cálculo* (6ta ed.).
- Villa, J., & Ruiz, H. (2010). Pensamiento variacional : seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales. *Educ. Matem. Pesq*, 514-528.
- Vintimilla, G. (2016). *Desarrollo de la comprensión de los conceptos de funciones lineales en los estudiantes de décimo año de educación básica: propuesta metodológica*. Cuenca, Ecuador: Universidad de Cuenca.

ANEXOS

Anexo 1. Tarea 1 _ página 1

El despilfarro de agua

Tarea 1

Fecha _____ Grado _____

Nombres y Apellidos _____

1. Analiza la situación presentada en “La tubería” y responde las siguientes preguntas formuladas a continuación:

a) ¿Cuáles son las magnitudes que intervienen en la situación de la tubería?

b) Explica cuáles de las anteriores magnitudes presentan un cambio al mover el deslizador y cuáles no. Describe cómo es ese cambio.

c) Al pasar el tiempo del daño, ¿En cuánto aumenta la cantidad de agua que derrama la tubería?

d) ¿En un minuto cuánta cantidad de agua se derramó en la tubería? Explica cómo lo hallaste.

e) Si el daño no se ha solucionado al final del día ¿Cómo se puede determinar cuánta agua se ha derramado por la tubería?

f) Al ser la cantidad y presión de agua que sale de la tubería siempre la misma ¿Cómo se puede determinar la cantidad de agua que se derrama en 110 minutos, 120 minutos, 140 minutos y en general para cualquier cantidad de minutos transcurridos? Explica la estrategia que utilizaste.

Anexo 2. Tarea 1 _ página 2

2. De acuerdo a la siguiente situación “El retrete”, realiza las siguientes actividades:

Nota: Ten en cuenta que cuando se tira de la cadena de un retrete, este arroja en promedio 8 litros de agua para poder que este evacue.

a) ¿Cuáles son las magnitudes que intervienen en la situación de las descargas del retrete?

b) ¿Cuáles de las anteriores magnitudes cambian al mover el deslizador y cuáles no? Describe cómo es ese cambio.

c) Al realizar varias evacuaciones del retrete ¿En cuánto va aumentando el agua que se va evacuando?

d) ¿Cómo se puede determinar cuanta cantidad de agua se ha expulsado del retrete al final de día?

e) ¿Es posible determinar un número exacto de descargas del retrete si se han evacuado 20 litros de agua? ¿Por qué?

f) Al ser la cantidad de agua que se expulsa por cada descarga siempre la misma, ¿Cómo se puede deducir cuánta cantidad de agua se va a evacuar en, 10 descargas, 12 descargas y en general cualquier cantidad de descargas del retrete? Explica la estrategia que utilizaste.

Anexo 3. Tarea 2 _ página 1

El despilfarro de agua Tarea 2

Fecha _____ Grado _____

Nombres y Apellidos _____

Conforme a la situación del “daño de la tubería”, realiza las siguientes tareas:

1. De acuerdo a la vista gráfica ¿Qué figura geométrica se forma con los puntos que se crean al mover el deslizador?

2. ¿En el contexto de la tubería todos los puntos de la gráfica son colineales? Justifica.

3. Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (0,0) en el contexto del daño de la tubería.

4. Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (30,90) en el contexto del daño de la tubería.

5. Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (70,210) en el contexto del daño de la tubería.

6. Observa los puntos que se forman al mover el deslizador y determine cuántos litros de agua se derraman entre cada punto. Establece si esta cantidad de agua siempre es la misma o no. Explica.

Anexo 4. Tarea 2 _ Página 2

7. Con base en la tabla de valores determina ¿Cuáles son los elementos que cambian y los que se mantienen constantes? Especifica.

8. Describe cómo es el cambio numérico de los elementos enunciados anteriormente.

9. En la tabla de valores ¿Qué relación numérica encuentras entre la columna de los minutos transcurridos y la columna de litros derramados?

10. De acuerdo a la expresión algebraica en la situación del daño en la tubería ¿X puede tomar valores negativos? Explica.

11. ¿Los valores de X en la expresión algebraica puede tomar valores decimales? Explica.

12. De acuerdo a lo estudiado en la vista gráfica, la vista tabla de datos y la vista algebraica ¿Qué elementos son comunes en las tres representaciones?

13. Analiza la vista gráfica, la vista de tabla de datos y la vista algebraica y encuentra una relación entre estas tres vistas con relación a la situación del daño en la tubería.

Anexo 5. Tarea 3 _ Página 1

Descargas del retrete Tarea 3

Fecha _____ Grado _____

Nombres y Apellidos _____

Ten en cuenta la situación de las descargas del retrete y responde las siguientes preguntas:

1. De acuerdo a la expresión algebraica en la situación del retrete ¿X puede tomar valores negativos? explica.

2. ¿Los valores de X en la expresión algebraica puede tomar valores decimales? explica.

3. ¿Qué significado tiene el valor 8 que acompaña la X en la expresión algebraica? ¿Este puede cambiar?

4. ¿Cuáles son los elementos presentes en la tabla de valores de la situación de las descargas del retrete? describe cuales son los que cambian y los que no.

5. ¿Qué relación numérica puedes encontrar entre la columna de “número de descargas” y la columna de “Litros derramados”?

Anexo 6. Tarea 3 _ Página 2

6. ¿Los puntos de la gráfica de la situación en el contexto del retrete son colineales? ¿Por qué?

7. De acuerdo a la situación de las descargas del retrete, analiza la gráfica y explica a que corresponde el punto C= (2,16)

8. De acuerdo a la situación de las descargas del retrete, analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto A= (0,0)

9. Utilizando las herramientas de GeoGebra, realiza lo siguiente y responde:

Escoge dos puntos cualesquiera de la gráfica de la situación del retrete que sean consecutivos y traza un punto entre ellos que sea colineal.

- En el contexto de las descargas del retrete ¿Qué significado tiene el punto que trazaste? ¿Es coherente con la situación?

- ¿Se puede representar la situación de las descargas del retrete mediante una línea recta?

Explica tu respuesta.

10. ¿Qué diferencias puedes encontrar entre la gráfica de la situación en el contexto de la tubería y la gráfica de la situación en el contexto de retrete?

Anexo 7. Producciones de los estudiantes Tarea 1 _ Página 1

El despilfarro de agua Situación 1

Fecha 30/04/2019 Grado 9a
Nombres y Apellidos Nicolás Mateo Pillimuc

1. Analiza la situación presentada en "La tubería" y responde las siguientes preguntas formuladas a continuación:

- a) ¿Cuáles son las magnitudes que intervienen en la situación de la tubería?

Tiempo, agua, tubería, tamaño, velocidad, presión

- b) Explica cuáles de las anteriores magnitudes presentan un cambio al mover el deslizador y cuáles no. Describe cómo es ese cambio.

Tiempo y el agua por al mover el deslizador nos dice que cada 10 minutos se gasta 30 litros de agua, cada 20 minutos se gastan 60 y presentan cambios a medida que sube el tiempo sube el agua.
Tubería tamaño velocidad presión

- c) Al pasar el tiempo del daño, ¿En cuánto aumenta la cantidad de agua que derrama la tubería?

Cada 10 minutos el agua aumenta 30 litros.

- d) ¿En un minuto cuánta cantidad de agua se derramó en la tubería? Explica cómo lo hallaste.

Se divide la cantidad de litros sobre los minutos en este caso sería $30 \div 10$ esto da como resultado 3 y podemos observar que cada minuto se gasta 3 litros de agua.

- e) Si el daño no se ha solucionado al final del día ¿Cómo se puede determinar cuánta agua se ha derramado por la tubería?

hay que hallar el tiempo en que se presentó el daño para determinar cuánta agua se derramó.

- f) Al ser la cantidad y presión de agua que sale de la tubería siempre la misma ¿Cómo se puede determinar la cantidad de agua que se derrama en 110 minutos, 120 minutos, 140 minutos y en general para cualquier cantidad de minutos transcurridos? Explica la estrategia que utilizaste.

lo podemos determinar la cantidad de agua multiplicando 740 por los litros que se derraman por en 1 minuto, por ejemplo $110 \times 3 = 330$ L $120 \times 3 = 360$ L $140 \times 3 = 420$

Anexo 8. Producciones de los estudiantes Tarea 1 _ Página 2

2. De acuerdo a la siguiente situación “**El retrete**”, realiza las siguientes actividades:

Nota: Ten en cuenta que cuando se tira de la cadena de un retrete, este arroja en promedio 8 litros de agua para poder que este evacue.

- a) ¿Cuáles son las magnitudes que intervienen en la situación de las descargas del retrete?

Agua, Tiempo, tamaño, velocidad, distancia, número de descargas

- b) ¿Cuáles de las anteriores magnitudes cambian al mover el deslizador y cuáles no? Describe cómo es ese cambio.

Solo cambiaría el agua y el número de descargas pues cada que se hace una descarga se quita 8L de agua y así sucesivamente

- c) Al realizar varias evacuaciones del retrete ¿En cuánto va aumentando el agua que se va evacuando?

Incrementa 8 L cada descarga

- d) ¿Cómo se puede determinar cuanta cantidad de agua se ha expulsado del retrete al final de día?

Dependiendo del número de descargas hechas en el día

- e) ¿Es posible determinar un número exacto de descargas del retrete si se han evacuado 20 litros de agua? ¿Por qué?

No por que cada descarga son 8L y $8 \times 2 = 16$ y si lo multiplicamos $\times 3$ nos daría 24 es decir se va para para calcular el número de descargas nos da un número incorrecto.

- f) Al ser la cantidad de agua que se expulsa por cada descarga siempre la misma, ¿Cómo se puede deducir cuánta cantidad de agua se va a evacuar en, 10 descargas, 12 descargas y en general cualquier cantidad de descargas del retrete? Explica la estrategia que utilizaste.

Para calcular solo solo se multiplica el número de descargas por los litros
En este caso $10 \times 8 = 80$ $12 \times 8 = 96$

Anexo 9. Producciones de los estudiantes Tarea 2 _ Página 1

El despilfarro de agua
Situación 2

Fecha 11/04/2019 Grado 9^A
Nombres y Apellidos ANA Victoria Paz Moreno N° 20

Conforme a la situación del “daño de la tubería”, realiza las siguientes tareas:

- De acuerdo a la vista gráfica ¿Qué figura Geométrica se forma con los puntos que se crean al mover el deslizador?
una línea creciente con puntos colineales
- ¿En el contexto de la tubería todos los puntos de la gráfica son colineales? Justifica.
si están en la misma recta creciente de los valores
- Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (0,0) en el contexto del daño de la tubería.
corresponde al inicio del daño y el tiempo
- Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (30,90) en el contexto del daño de la tubería.
corresponde a 30 minutos pasados y 90 litros derramados en ese tiempo
- Analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto (70,210) en el del daño de la tubería.
corresponde a que han pasado 70 minutos y el total de agua derramada es ese tiempo es equivalente a 210 Litros
- Observa los puntos que se forman al mover el deslizador y determine cuántos litros de agua se derraman entre cada punto. Establece si esta cantidad de agua es siempre la misma o no. Explica.
los puntos aparecen cada 10 minutos así que el total de litros por cada 10 minutos es de 30 litros y siempre va a ser la misma cantidad a menos que se tomen otros valores con respecto al tiempo
- En base a la tabla de valores determina ¿Cuáles son los elementos que cambian y los que se mantienen constantes? Especifica.
el elemento que cambia es el paso del tiempo ya que es una variable independiente

Anexo 10. Producciones de los estudiantes tarea 2 _ Página 2

la constante es la cantidad de agua por minuto ya que siempre será la misma

8. Describe cómo es el cambio numérico de los elementos enunciados anteriormente.

el cambio numérico corresponde a que cada 1 minuto que pasa se derraman 3 litros de agua

9. En la tabla de valores, ¿Qué relación numérica encuentras entre la columna de los minutos transcurridos y la columna de litros derramados?

la relación numérica es que se triplica
Ejemplo: $20 \times 3 = 60$
20 minutos por 3 litros de agua derramada por minuto es igual a 60 litros de agua derramada en 20 minutos

10. De acuerdo a la expresión algebraica en la situación del daño de la tubería ¿X puede tomar valores negativos? explica.

no porque no podemos decir -8 minutos ya que el tiempo solo pone números positivos

11. ¿Los valores de X en la expresión algebraica puede tomar valores decimales? explica.

Si, pero sería más complejo hallar la cantidad de agua exacta que se derramó

12. De acuerdo a lo estudiado en la vista gráfica, la vista tabla de datos y la vista algebraica ¿Qué elementos son comunes en las tres representaciones?

la cantidad de agua derramada por minuto y el paso del tiempo cada 10 minutos

13. Analiza la vista gráfica, la vista de tabla de datos y la vista algebraica y encuentra una relación entre estas tres vistas con relación a la situación del daño en la tubería.

las tres representan el daño en las tuberías: ① Por sustentar los hechos ② Por averiguar los datos ③ Por tener varias opciones.
de igual manera en las tres es el mismo resultado expresado de una forma diferente

Anexo 11. Producciones de los estudiantes tarea 3 _ Página 1

Diego Stiven Porras Cruz 9-A

Situación 3
Descargas del retrete

Ten en cuenta la situación de las descargas del retrete y responde las siguientes preguntas:

- De acuerdo a la expresión algebraica en la situación del retrete ¿X puede tomar valores negativos? explica.
No porque se requiere saber
cuántas veces tiene que hacer
a ser lo contrario sería imposible
- ¿Los valores de X en la expresión algebraica puede tomar valores decimales? explica.
No porque no podrían vaciar el baño
- ¿Qué significado tiene el valor 8 que acompaña la X en la expresión algebraica? ¿Este puede cambiar?
El valor 8 es la descarga del baño
y no puede cambiar ya 7.0 si es menor
ha se descarga
- ¿Cuáles son los elementos presentes en la tabla de valores de la situación de las descargas del retrete? describe cuales son los que cambian y los que no.
los que cambian son los números
de descargas y de litros derramados
- ¿Qué relación numérica puedes encontrar entre la columna de "número de descargas" y la columna de "Litros derramados"?
los 2 tienen como valor el 8 y
de litros aumenta 8
- ¿Los puntos de la gráfica de la situación en el contexto del retrete son colineales? ¿Por qué?
Si por que son consecutivos una
tras otra y forma una recta

Anexo 12. Producciones de los estudiantes Tarea 3 _ Página 2

7. De acuerdo a la situación de las descargas del retrete, analiza la gráfica y explica a que corresponde el punto $C = (2, 16)$

Corresponde; el 2 el numero de descarga y el 16 a la cantidad de litros de agua

8. De acuerdo a la situación de las descargas del retrete, analiza la gráfica y explica a qué corresponde el punto $A = (0, 0)$

El 0 el numero de descarga y el otro 0 a la cantidad de litros de agua

9. Utilizando las herramientas de Geogebra, realiza lo siguiente y responde:

Escoge dos puntos cualesquiera de la gráfica de la situación del retrete que sean consecutivos y traza un punto entre ellos que sea colineal.

- En el contexto de las descargas del retrete ¿Qué significado tiene el punto que trazaste? ¿Es coherente con la situación?

No es coherente porque uno no puede hacer la mitad de la descarga 1.5 veces el retrete

- ¿Se puede representar la situación de las descargas del retrete mediante una línea recta? Explica tu respuesta.

No porque no pueden haber decimales ya que cambian los resultados del plano cartesiano

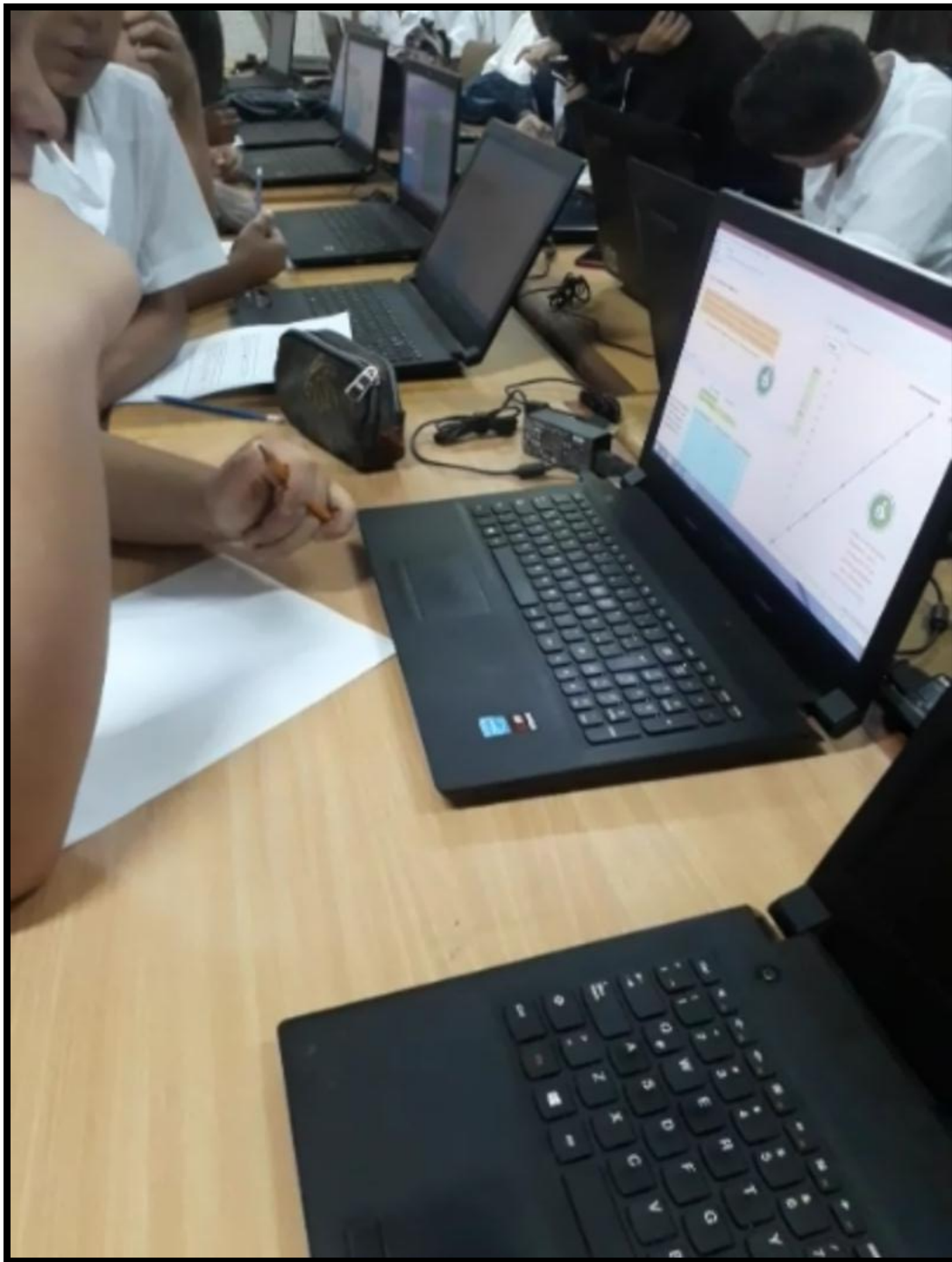
10. ¿Qué diferencias puedes encontrar entre la gráfica de la situación en el contexto de la tubería y la gráfica de la situación en el contexto de retrete?

En la anterior grafica 'podríamos' utilizar los decimales y en esta no se puede utilizar

Anexo 13. Evidencia fotográfica_1



Anexo 14. Evidencia fotográfica_2



Anexo 15. Evidencia fotográfica_3

