

Un estudio de casos con situaciones problemas enmarcadas en la Educación Matemática Realista para promover los significados del número fraccionario (cociente, medida y razón) en quinto grado de primaria.

Solenne Murillo Arboleda

Universidad del Valle – Sede Pacífico

Instituto de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

Buenaventura – Valle

2020

Un estudio de casos con situaciones problemas enmarcadas en la Educación Matemática Realista para promover significados de los números fraccionarios (cociente, medida y razón) en quinto grado de primaria.

Solenne Murillo Arboleda

Código 1452140-3469

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.

Directora de trabajo de grado

Mg. Mónica Correa Ángel

Universidad del Valle - Sede Pacífico

Instituto de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Buenaventura – Valle

2020



Programa Académico LICENCIATURA EN EDU. BAS. ENF MATEMÁTICA Fecha _____

Código del programa: 3469 Resolución del programa: _____

Día	Mes	Año
27	7	2020

Título del Trabajo o Proyecto de Grado				
Un estudio de casos con situaciones problemas enmarcadas en la Educación Matemática Realista para promover los significados del número fraccionario				
Se trata de:				
Proyecto		Informe Final X		
Director				
MÓNICA CORREA ANGEL				
Nombre del Primer Evaluador				
JORGE ENRIQUE GALEANO				
Nombre del Segundo Evaluador				
Estudiantes				
Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Teléfonos de contacto
Solenne Murillo Arboleda	1452140	3469	Solenne.murillo@gnmail.com	2
Evaluación				
Aprobado X		Meritorio		Laureado
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:				
Director del Trabajo o Proyecto de Grado		Primer Evaluador		Segundo Evaluador
En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____				
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).				
Firmas				
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador		Segundo Evaluador	
Recomendaciones		X Observaciones		Razón de desacuerdo - Alternativas
Se hacen observaciones menores de forma				
Firmas				
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador		Segundo Evaluador	



PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (Impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la **Licencia Creative Commons** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.



PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo No autorizo

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la **Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia** cuyo texto completo se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/> y que admite conocer.

Si autorizo No autorizo

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente describala¹:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Un estudio de casos con situaciones Problemas emarcados en la Educación Matemática Realista para Promover los significados del número fraccionario (cociente, media, y susón) en quito grado de Primaria

Autores:

Nombre: Solenne Murillo Arboleda

Firma: Solenne Murillo Arboleda
C.C. 1076822667

Nombre:

Firma: _____
C.C. _____

Nombre:

Firma: _____
C.C. _____

Fecha: 21/03/2020

(Si desea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdfcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)

¹ Los datos serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

Dedicatoria

A mis padres José y Juana quienes me inspiran siempre para alcanzar nuevas metas. Quienes con su buen ejemplo y a pesar de las dificultades me han enseñado el valor de amar y de luchar por lo que se quiere. A mi hermano Somer y mi sobrina Karen quienes fueron mi alegría. A mi familia y amigos por el apoyo incondicional que me ha dado durante este tiempo, así como su generosidad y confianza. A mi novia Ibone, quien me brindó amor y me enseñó a sonreír para la vida.

¡Estarán por siempre en mi corazón!

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, familiares y amigos, por el apoyo incondicional que me dieron a lo largo de la carrera. A los docentes quienes me brindaron su conocimiento y apoyo incondicional, los cuales hoy son reflejo de mi formación. Agradezco también a todos aquellos que colaboraron directa o indirectamente con mi trabajo. A las profes Mónica, Hilda y todos sus estudiantes por su colaboración y por dejarme construir esta experiencia con ellos.

Resumen

El siguiente trabajo presenta una caracterización del papel que juegan *los significados de medida, cociente y razón* en la promoción del número fraccionario en un grupo de estudiantes de grado 5°, especialmente cuando trabajan con tareas enmarcadas en la Educación Matemática Realista, mediante los diferentes niveles de matematización. El análisis está fundamentado a partir de tres componentes los cuales son: curricular, discursivo y didáctico. El trabajo se centró especialmente en estudiar las estrategias empleadas por los estudiantes al momento de solucionar una situación problema relacionada con diferentes significados de números fraccionarios.

La intervención tuvo lugar en la Institución Educativa República de Venezuela en el Distrito Especial de Buenaventura con estudiantes de grado quinto. Se llevó a cabo en varias etapas; en primer lugar, se realizó el diseño y construcción de una situación problema conformada por cuatro actividades, las tres primeras se enfocaron en los significados de *medida, cociente y razón* respectivamente, mientras que en la cuarta actividad se añadieron interrogantes relacionados con distintos significados. Se emplearon cuatro sesiones y el tiempo de trabajo por cada una varía entre dos y tres horas.

Finalmente, se realizó un análisis tanto a las producciones como a los enunciados presentados por los estudiantes durante el desarrollo de la situación problema, a partir de referentes teóricos de la EMR y el análisis del discurso. El desarrollo y análisis de las actividades permitió identificar en los estudiantes la construcción y socialización de distintos modelos matemáticos relacionados con el contexto. De igual forma, se encontró que tanto en sus iteraciones como en sus producciones la mayoría de los estudiantes se encuentran en dos de los diferentes niveles de comprensión planteados por la EMR, lo que se evidencia gracias al análisis del discurso emitido por los estudiantes y sus producciones escritas.

Palabras claves: Número fraccionario, significados de *medida, cociente y razón*, la Educación Matemática Realista, Análisis del Discurso, Niveles de Comprensión.

Tabla de contenido

Tabla de contenido.....	VII
INTRODUCCIÓN	10
CAPÍTULO I. ASPECTOS GENERALES DEL TRABAJO	12
1.1 Descripción del problema.....	13
1.2 Justificación	18
1.3 Antecedentes.....	19
1.4 Objetivos.....	25
1.4.1 Objetivo general.....	25
1.4.2 Objetivos específicos	25
CAPÍTULO II. MARCO DE REFERENCIA	27
2.1 Sobre el Número racional	28
2.1.1 El número racional en el campo de las matemáticas	28
2.1.2 El número racional en la escuela	29
2.2. Referentes para la enseñanza de los números racionales.....	30
2.2.1. Aspectos curriculares.....	30
2.2.2. Educación matemática realista	32
2.3. Un punto de vista pragmático del discurso.....	38
2.3.1. Actos de Habla.....	39
2.3.2. Secuencias y macroactos de Actos de Habla.....	42
CAPÍTULO III. REFERENTE METODOLÓGICO	45
3.1. Metodología de investigación.....	45
3.1.1. Fases	48

3.1.2.	Contextualización	49
3.2.	Construcción y justificación de la situación problema	50
3.2.1.	Actividad 1: Diseñando banderas	52
3.2.2.	Actividad 2: Reparto de pinturas	53
3.2.3.	Actividad 3: Refrigerio	53
3.2.4.	Actividad 4: Competencia de banderas	53
3.2.5.	Proceso de recolección de datos	54
CAPÍTULO IV. ANÁLISIS Y RESULTADOS DEL TRABAJO.....		55
4.1.	El número fraccionario a partir del significado de <i>medida</i>	56
4.1.1.	Sobre la actividad número uno a partir de la ERM	57
4.1.2.	Sobre las interacciones en la actividad uno.	61
4.2.	El número fraccionario a partir de os significados de <i>cociente y razón</i>	63
4.2.1.	Sobre las actividades dos y tres a partir de la ERM	64
4.2.2.	Sobre las interacciones en las actividades dos y tres.	71
4.3.	El número fraccionario a partir de diferentes significados.	73
4.3.1.	Sobre la actividad número cuatro a partir de la ERM	73
4.3.2.	Sobre las interacciones de la actividad número cuatro.	76
4.4.	Conclusiones.....	80
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....		84
ANEXOS		88

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1: SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS DE LAS PRUEBAS SABER EN LA IERV	17
TABLA 2: NIVELES DE COMPRENSIÓN (CLAROS, 2018, P 32).....	36
TABLA 3. PRINCIPIOS DE LA EMR: (ALSINA, 2009, P. 121).....	38
TABLA 4. ACTOS DE HABLA TOMADA DE (CORREA, 2017, P. 57).....	40
TABLA 5. RESPUESTA PRESENTADA POR EL EQUIPO A1 EN LA PREGUNTA 1.1	57
TABLA 6. RESPUESTA PRESENTADA POR LOS EQUIPOS A6 Y A7 EN LA PREGUNTA 1.2	59
TABLA 7. RESPUESTA PRESENTADA POR LOS EQUIPOS A3 Y A7 EN LA PREGUNTA 1.3	60
TABLA 8. RESPUESTA PRESENTADA POR LOS EQUIPOS A3, A7 Y A7 EN LA PREGUNTA 1.4.....	61
TABLA 9. INTERACCIONES EN ACTIVIDAD UNO.	62
TABLA 10. ESTRATEGIAS DE ANÁLISIS EN LA ACTIVIDAD DOS.	64
TABLA 11. TIPOS DE RESPUESTA EN LA ACTIVIDAD 2.....	65
TABLA 12. RESPUESTA PRESENTADA POR LOS EQUIPOS A3, A4, A6 Y A7 EN EL GRUPO DE ESTRATEGIAS NÚMERO TRES.	67
TABLA 13. SEGUNDO GRUPO DE RESPUESTAS PRESENTADA POR LOS EQUIPOS A4, A6 Y A7 EN EL GRUPO DE ESTRATEGIAS NÚMERO TRES.....	69
TABLA 14. RESPUESTA PRESENTADA POR LOS EQUIPOS A3, A4, A6 Y A7 EN EL GRUPO DE ESTRATEGIAS NÚMERO CUATRO.....	70
TABLA 15. INTERACCIONES EN ACTIVIDAD NÚMERO DOS	71
TABLA 16. RESPUESTA PRESENTADA POR LOS EQUIPOS A3, A4, A6 Y A7 EN LA PREGUNTA 4.1	74
TABLA 17. INTERACCIONES EN LA ACTIVIDAD NÚMERO CUATRO.....	77

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

ILUSTRACIÓN 1. ARTICULACIÓN ENTRE LA FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA Y LOS REFERENTES DE ANÁLISIS	27
ILUSTRACIÓN 2. DESARROLLO DE PREGUNTA 3.1.....	66
ILUSTRACIÓN 3. RESPUESTA PRESENTADA POR EL EQUIPO A4 EN LA PREGUNTA 4.1.....	74
ILUSTRACIÓN 4. RESPUESTA PRESENTADA POR EL EQUIPO A3 EN LA PREGUNTA 4.2.....	75
ILUSTRACIÓN 5. RESPUESTA PRESENTADA POR EL EQUIPO A6 EN LA PREGUNTA 4.2.....	76
ILUSTRACIÓN 6: ESTUDIANTE REALIZANDO LA ACTIVIDAD UNO	97
ILUSTRACIÓN 7: ESTUDIANTE REALIZANDO LA ACTIVIDAD UNO	97
ILUSTRACIÓN 8: ESTUDIANTE REALIZANDO LA ACTIVIDAD TRES.	97
ILUSTRACIÓN 9: ESTUDIANTE REALIZANDO LA ACTIVIDAD TRES.	98
ILUSTRACIÓN 10: ESTUDIANTES REALIZANDO LA ACTIVIDAD UNO.	98
ILUSTRACIÓN 11: ESTUDIANTES REALIZANDO LA ACTIVIDAD CUATRO.	98
ILUSTRACIÓN 12: ESTUDIANTES REALIZANDO LA ACTIVIDAD TRES.	99
ILUSTRACIÓN 13: ESTUDIANTES REALIZANDO LA ACTIVIDAD UNO.	99
ILUSTRACIÓN 14: ESTUDIANTES REALIZANDO LA ACTIVIDAD CUATRO.	99

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se inscribe en las Líneas de formación de Didáctica de las Matemáticas y la Línea de investigación en Lenguaje, Razonamiento y Comunicación de Saberes Matemáticos del Área de Educación Matemática de la Universidad del Valle. El trabajo se enmarca en la teoría de la Educación Matemática Realista (EMR) con el fin de favorecer a estudiantes de quinto grado en la comprensión de los números fraccionarios mediante los significados de *cociente*, *medida* y *razón*; esta teoría propone la introducción de conceptos matemáticos mediante contextos realistas e imaginables para los estudiantes, los cuales se pueden encontrar en diferentes niveles de comprensión.

Este trabajo pone especial interés en el diseño, implementación y análisis de una situación problema enmarcada en contextos realistas que incorporan problemas con números fraccionarios a partir de diferentes significados. Por esta razón, se considera dentro de los principales referentes a Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower (1973), Vanegas (2013), Quintero (2006), Vizcarra y Sallán (2005), Cisneros y Castro (2017), Searle (2005), Dijk (1996), MEN (2006) entre otros. Para efectos de organización este trabajo se ha estructurado en cuatro capítulos.

En el primer capítulo, se presenta el problema central del trabajo, el cual gira alrededor de las dificultades que trae la enseñanza de los números fraccionarios a partir de la relación parte todo, al igual que las investigaciones que fundamentan y proporcionan elementos para la formulación de la pregunta de investigación, los antecedentes y los objetivos. Del mismo modo, se presenta en la justificación diferentes problemáticas presentes en el Distrito de Buenaventura y cómo estas pueden ser atendidas según Quintero (2006) mediante el trabajo con situaciones problema que parten de la realidad, en particular el enfoque de la Educación Matemática Realista.

En el segundo capítulo, se exponen los elementos teóricos que se consideran pertinentes para la fundamentación matemática del trabajo, al igual que los referentes de análisis que se tendrán en cuenta. En este sentido, la fundamentación matemática se centra en la educación matemática realista (EMR) y elementos concernientes al análisis del discurso especialmente los Actos de Habla; al igual que los referentes didáctico, curricular y formal, los cuales aportan elementos necesarios para la construcción de actividades y el desarrollo del presente trabajo.

En el tercero se plantea el marco metodológico conformado por los elementos que se tuvo en cuenta para el desarrollo de este trabajo de grado. En este sentido, se expone el tipo de metodología utilizada (estudio de casos instrumental) en la cual se destacan cada una de las etapas que esta conlleva. Así mismo, se presenta la caracterización de la población, justificación del conjunto de situaciones problemas, el proceso de recolección de la información y finalmente se describe el proceso de constitución y análisis de los datos.

En el cuarto capítulo se presentan los resultados obtenidos, teniendo en cuenta las producciones e interacciones de los estudiantes, los niveles de comprensión identificados y los modelos implementados, los cuales permitieron evidenciar el proceso de matematización progresiva. Finalmente, se exponen las conclusiones y recomendaciones.

CAPÍTULO I. ASPECTOS GENERALES DEL TRABAJO

Se presenta en este capítulo el problema central del trabajo, el cual gira alrededor de las dificultades que trae la enseñanza de los números fraccionarios a partir de la relación parte todo. Algunas ideas presentes en las investigaciones de Obando (2003), Quintero (2006), Meza y Barrios (2010), Cisneros y Castro (2017) se incluyen para fundamentar dicho problema y proporcionan elementos para la formulación de la pregunta de investigación, los antecedentes y los objetivos.

De igual forma, se señalan en la justificación diferentes problemáticas presentes en el Distrito de Buenaventura, al igual que distintas estrategias enfocadas a la atención de estas problemáticas a partir de elementos teóricos presentados por Quintero (2006), el cual apunta hacia el trabajo con situaciones problema que parten de la realidad mediante el enfoque de la Educación Matemática Realista.

En los antecedentes se presentan diferentes dificultades y estrategias que giran en torno al aprendizaje de los números fraccionarios, investigaciones referentes a la EMR principalmente a partir del trabajado con escenarios realistas; en este sentido, también se presenta investigaciones correspondientes al análisis del discurso en las que se muestran distintos elementos a tener en cuenta al analizar las interacciones de los estudiantes, de igual forma se describe cómo estas investigaciones contribuyen al desarrollo de este trabajo. Finalmente se presentan los objetivos que orientan este trabajo los cuales están enfocados en caracterizar el papel que juegan diferentes significados en la comprensión del número fraccionario cuando estudiantes de grado quinto trabajan con en escenarios realistas.

1.1 Descripción del problema.

Obando (2003), mediante un análisis histórico-epistemológico de los números fraccionarios, identifica cómo las prácticas sociales de la medición son una fuente importante para la conceptualización de los fraccionarios como números; una muestra de esto se puede observar en las culturas egipcia y la babilónica que, aunque en épocas distintas, promovieron la agricultura como base de su desarrollo, por lo que era necesario la resolución de problemas que involucraban la asociación entre aritmética y la geometría constantemente; de esta forma, la agrimensura pasó a ser de vital importancia y con ella una mayor presencia de los números fraccionarios en las actividades agrícolas.

De forma similar, diferentes situaciones y actividades de la vida diaria realizadas por el hombre han dado lugar al uso de los números racionales positivos, o tan bien llamados números fraccionarios¹. Así, por ejemplo, la necesidad de repartir terrenos, el pago del diezmo, la división de un día en horas, la comparación de distancias, la partición de una herencia, entre otras, por lo que es posible reconocer múltiples contextos a partir de los cuales se pueden dotar de significado estos números.

Tal reconocimiento hace parte de las directrices del MEN (2006) al señalar que los estudiantes en cuarto y quinto grado requieren “interpretar las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones” (p. 37). Además, diferentes investigaciones desarrolladas en Educación Matemática tales como Obando (2003),

¹ Es pertinente aclarar que cuando se habla de los números fraccionarios se está hablando de los números racionales positivos debido a que ambos nombres son reconocidos por el MEN (2006), para fines prácticos en el desarrollo de este trabajo se hablará de números fraccionarios.

Quintero (2006), Meza y Barrios (2010); Cisneros y Castro (2017) conscientes del papel importante que juegan los números fraccionarios han profundizado y centrado su interés en identificar múltiples dificultades presentes en los procesos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los saberes concernientes a los números fraccionarios; razón por la cual se hace necesario continuar en la búsqueda de estrategias que posibiliten que los estudiantes cada vez más puedan enfrentarse a situaciones que los involucren y, así puedan avanzar hacia la comprensión de los números fraccionarios.

Por ejemplo, Obando (2003) en su investigación deja ver que una de las dificultades que se configuran en el proceso de enseñanza de los números fraccionarios se relaciona con el énfasis puesto sobre la partición y el conteo, debido a que ocasiona que el proceso de conceptualización de los números fraccionarios impropios sea de difícil comprensión para los estudiantes.

Por otra parte, Vizcarra (2002) expone que al dar prioridad a la enseñanza de los números fraccionarios a partir de la relación parte todo se promueve la traslación de propiedades de los números naturales al conjunto de los números fraccionarios y, en consecuencia, causa dificultades en la comprensión del concepto. De igual forma, afirma que priorizar el significado de los números fraccionarios a partir de la relación parte todo “provoca la aparición de problemas como la pérdida del estatus de número de la fracción; sobrevaloración de la cardinalidad, dificultad de interpretación de las fracciones impropias, etc.” (p.152).

De forma similar, Cisneros y Castro (2017) señalan que tradicionalmente la enseñanza de los números fraccionarios se ha centrado en la relación parte todo, esto es la comparación entre dos números enteros, dejando de lado los significados de medición, cociente, razón y proporción, lo que ocasiona que el estudiante desconozca la fracción como una unidad.

En el mismo sentido, Vizcarra y Sallán (2005) y Zarzar (2013) presentan algunas dificultades que se pueden generar en la enseñanza de los números fraccionarios a partir de la relación parte todo, entre ellas que los estudiantes comprendan este concepto como la relación entre dos números naturales separados (numerador y denominador) en la que los estudiantes realizan un doble conteo; puesto que, al enfrentarse a una situación problema, dividen la unidad en las partes que indica el denominador y seguidamente seleccionan las partes que indica el numerador, lo que no les permite ver la necesidad de incluir otra estructura diferente a la del número natural, de esta forma el estudiante trabaja el número fraccionario como la relación simbólica entre dos números naturales y deja de lado los procesos asociados a sus distintos significados.

Este panorama revela la necesidad de trabajar el número fraccionario a partir de sus distintos significados, al respecto Vizcarra y Sallán (2005) proponen como una alternativa didáctica para mejorar la comprensión de los números fraccionario en los grados cuarto, quinto y sexto, el trabajo con tres modelos con intencionalidades educativas diferentes: el modelo de medida para introducir las fracciones, el modelo cociente para fortalecer las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal, y el modelo de razón para construir ideas sobre proporcionalidad aritmética.

Igualmente, es importante resaltar que investigaciones han reconocido las bondades que trae la introducción de contextos realistas a la enseñanza de las matemáticas y en particular a la enseñanza de los números fraccionarios; por ejemplo, Quintero (2006) expone que se puede desarrollar el concepto de fracción a partir de tareas sustentadas en los principios de la Educación Matemática Realista (EMR).

El desarrollo de los conceptos matemáticos debe partir de situaciones problemáticas tomadas de la vida real, que ejemplifiquen el concepto y tengan sentido para los estudiantes. Así, para desarrollar el concepto de fracción, es preciso identificar contextos que ejemplifiquen el mismo y apoyen su desarrollo (p. 1)

En este sentido, otra investigación que también se ha encargado de construir y gestionar nuevas propuestas de intervención en el aula para favorecer el aprendizaje de los números fraccionarios y sus diferentes significados es la presentada por Rabino y Bressan (2001), quienes revelan que un trabajo basado en el uso de situaciones realistas, próximas a la cotidianidad de los estudiantes tales como situaciones de distribución y repartos equitativos, favorecen la confianza y solvencia de los estudiantes a la hora de resolver situaciones problema.

Como se ha podido observar son diversas las dificultades que giran alrededor de la enseñanza y aprendizaje de los números fraccionarios. Esta realidad no es ajena al distritito de Buenaventura, según los resultados obtenidos en las pruebas SABER en los años 2015 a 2017 se reflejan falencias en los estudiantes relacionadas con los números fraccionarios a modo de ejemplo se presenta la tabla 1.

La tabla 1 (de elaboración propia) fue construida a partir de los resultaos obtenidos durante tres años en las pruebas SABER. Estos resultados se encuentran en los informes por colegio que ha presentado el MEN. De igual forma las categorías que se encuentran en la tabla también están dadas por el MEN.

Aprendizaje por mejorar	Porcentaje de estudiantes por años		
	2015	2016	2017
Reconocer diferentes representaciones de un mismo número (natural o fracción) y hacer traducciones entre ellas.	65%	36%	56%

Reconocer e interpretar números naturales y fracciones en diferentes contextos.	51%	61%	23%
Resolver y formular problemas que requieren el uso de la fracción como parte de un todo, como cociente y como razón.	69%	78%	54%

Tabla 1: Síntesis de los resultados de las pruebas saber en la IERV

Se puede observar que, en comparación con los otros aprendizajes por mejorar, la resolución y formulación de problemas que requieren el uso del número fraccionario y sus diferentes significados presenta el mayor porcentaje de dificultades, alcanzando hasta 78% en el año 2016. A esto se suma que el 61% de los estudiantes en ese mismo año no interpretan los números fraccionarios en diferentes contextos. Esta situación es preocupante y permite observar como el promedio de la Institución Educativa se encuentran más de un 16%, por debajo del promedio nacional.

Los resultados del año 2017 muestran que el 56% de los estudiantes presentan dificultad para reconocer diferentes representaciones de un mismo número fraccionario, lo que permite observar que los estudiantes presentan dificultades en cuanto a este aprendizaje. De ahí que el MEN sugiere poner especial énfasis en los aprendizajes que presentan mayor dificultad para implementar acciones pedagógicas de mejoramiento.

Por tanto, la problemática central a atender en el presente trabajo de grado particularmente será la generada por el énfasis puesto en la enseñanza de estos números a partir de la relación parte todo. En otras palabras, este trabajo de grado está orientado a favorecer la comprensión de los números fraccionarios a partir de otros significados diferentes al significado parte todo.

Dada la importancia de poner en marcha situaciones problema que permitan fortalecer los números fraccionarios partiendo de sus diferentes significados, la EMR se postula como el enfoque ideal para aportar situaciones derivadas de la realidad encaminadas a mejorar el desarrollo de este concepto y sus relaciones, en consecuencia, se propone modelizar situaciones como un medio para la comprensión de los números fraccionarios a partir de diferentes significados.

Considerando lo anterior, surge la siguiente pregunta como una guía de este trabajo investigativo:

¿Cómo situaciones problema diseñadas en el marco de la Educación Matemática Realista que incorporan diferentes significados de la fracción pueden favorecer la comprensión de los números fraccionarios en el grado quinto?

1.2 Justificación

Reconocidos investigadores en el ámbito de la Educación Matemática como Obando (2003), Quintero (2006), Pontón (2008), Vizcarra y Sallan (2005), Meza y Barrios (2010), Cisneros y Castro (2017), han realizado estudios importantes alrededor de la enseñanza y aprendizaje de los números fraccionarios; partiendo de estas investigaciones se reconoce la necesidad de poner en marcha estrategias para la enseñanza de los números fracciones a partir de diferentes situaciones de la vida cotidiana. De manera que este trabajo busca aportar elementos que permitan favorecer el aprendizaje de este concepto, teniendo presentes distintos significados y mediante un enfoque que parte de la realidad, para que de esta manera los estudiantes se familiaricen mejor con el número fraccionario.

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) a través de distintos documentos como los Lineamientos Curriculares (1998) y los Estándares básicos de competencias en matemáticas (2006) expone que el número fraccionario tiene diferentes significados: medida, relaciones parte todo, cociente y razón y proporción; y que estos deben ser parte de la discusión en la enseñanza, pues mediante la construcción que los estudiantes hacen de estos se logra avanzar hacia una comprensión del número racional.

Teniendo presentes las directrices del MEN este trabajo se relaciona de forma directa con la enseñanza de los números fraccionarios en una institución educativa de carácter público en el Distrito de Buenaventura, debido a que los resultados obtenidos en las pruebas SABER han estado por debajo del promedio nacional durante los últimos tres años. Con el fin de favorecer el aprendizaje de los números fraccionarios teniendo en cuenta sus distintos significados y en efecto cumplir, las directrices planteadas por el MEN, en los resultados de las pruebas SABER se sugiere la puesta en marcha de estrategias que permitan a los estudiantes asimilar los nuevos conocimientos.

Consciente del impacto negativo que genera la enseñanza de los números fraccionarios partiendo de un solo significado para la población estudiantil y comunidad en general; este trabajo busca generar un espacio complementario al proceso de los estudiantes en su dinámica escolar, de manera que se favorezca la comprensión de concepto de los números fraccionarios en diferentes situaciones presentes en el día a día del estudiante.

1.3 Antecedentes

Diversas investigaciones realizadas en los últimos años han centrado su atención en la fracción y sus diferentes significados. Obando (2003) hace especial énfasis en el significado de la

fracción a partir de la relación parte todo como punto de partida para construir este concepto. En esta investigación el autor propone cuatro fases, a saber: *el análisis preliminar, la concepción y el análisis a priori, la experimentación y el análisis a posteriori de las situaciones*, para abordar el estudio de los números fraccionarios, tomando como sustento el análisis didáctico y un estudio histórico-epistemológico de la construcción de los números racionales.

Entre sus resultados destaca algunas dificultades que pueden llegar a tener los estudiantes para ver la fracción como la relación cuantitativa entre la parte y el todo; así mismo expone que centrarse en el conteo, y no en la medición, promueve un significado débil que se basa en la relación y no en las percepciones numéricas, lo cual genera pocas oportunidades para que los estudiantes comprendan las equivalencias y las fracciones impropias.

De esta forma, Obando (2003) plantea que el estudio de fracciones a través de estrategias metodológicas y conceptuales enfocadas en el conteo, la partición y la mecanización de algoritmos son origen de dificultad en los procesos de conceptualización de los números fraccionarios, y en su lugar propone trabajar con situaciones que tengan como eje central la medición para conceptualizar la fracción y un tipo de unidad, magnitud y relación multiplicativa.

Esta investigación permite reconocer significados asociados al número fraccionario, y como estos posibilitan el desarrollo de pensamientos constructivos y autónomos. La investigación de Obando (2003) es base para la construcción de las situaciones implementadas gracias sugerencias que ahí se presenta, de igual forma pone de manifiesto algunas dificultades que se encuentran al trabajar con el número fraccionario a través del conteo y la memorización de algoritmos, lo que ha brindado elementos importantes a tener en cuenta para la formulación del planteamiento del problema y el análisis de las actividades.

En esta misma línea de pensamiento, Quintero (2006) reflexiona sobre la naturaleza diferenciadora entre los números enteros y las fracciones, al señalar que los segundos expresan relaciones y no cantidades. Así, menciona que, por ejemplo, $\frac{1}{2}$ puede ser una cantidad muy pequeña o grande dependiendo si se refiere a la mitad de los estudiantes de un salón de clase o a la mitad de los habitantes en Colombia. Además, esta investigación destaca el trabajo con situaciones problemáticas enmarcadas en la Educación Matemática Realista (EMR), indicando que las situaciones problema deben ir relacionadas con la vida real para que ejemplifiquen el concepto, apoyen su desarrollo y tengan sentido para los estudiantes.

Las diferentes interpretaciones que menciona Quintero (2006) sobre fracción son una comparación de partes de enteros, un decimal, una razón, una división y una medida de cantidades discretas o continuas. En consecuencia, las diferentes situaciones también tienen diversos grados de dificultad, por lo que recomienda iniciar por las representaciones más sencillas para los estudiantes e ir aumentando paso a paso la complejidad, igualmente propone una serie de situaciones que toman como eje central la fracción como la división en partes iguales.

Se pudo observar en el análisis de las tareas realizadas que por medio de estas se puede trabajar las representaciones de las fracciones simbólicamente y los conceptos de fracción equivalente y suma de fracciones. Quintero (2006) menciona que “La representación de las fracciones como división en partes iguales, puede ser una metáfora integradora de las diversas interpretaciones de las fracciones” (p. 6). De modo que, permite trabajar con otros significados de los números fraccionarios. Esta investigación permite identificar el trabajo con los números fraccionarios mediante los significados de *medida*, *cociente* y *razón*. De igual forma, brinda

elementos para la reestructuración e implementación de situaciones problema, relacionadas con el número racional a partir de escenarios realistas.

Por otra parte, Fernández y Estrella (2007) señala que “los contextos afines a la realidad de los estudiantes constituyen el mejor vehículo para encarnar el principio de la reinención dirigida a través de la matematización horizontal y la matematización vertical.” (p. 3). Con base en esta afirmación, presentan un ejemplo del contexto para la enseñanza de los algoritmos de suma y resta por columnas de números cardinales; de esta forma, Fernández et al. (2007) concluyen, que al menos en la suma de números del uno al cien, el contexto disminuye los errores relacionados con la equivalencia y el intercambio de unidades y decenas.

Esta investigación, por un lado, orienta el presente trabajo de grado hacia el empleo de contextos relacionados con los estudiantes lo cual, fue un aspecto importante para la recolección, desarrollo, implementación y análisis de las situaciones problema que se diseñaron, deja ver que los trabajos con situaciones afines a la realidad favorecen la comprensión de conceptos matemáticos.

La investigación desarrollada por Vizcarra y Sallán (2005) presenta, en un primer momento, obstáculos didácticos ocasionados al priorizar la enseñanza de los números fraccionarios a partir de la relación parte todo. Entre estos señala que el estudiante no ve los fraccionarios como números y asume que el número de partes que se toma debe ser menor o igual que la unidad, ocasionando omisión del proceso de medida y obstaculizando el estatus matemático de los números fraccionarios. Esta primera parte de la investigación permite ampliar más el conocimiento sobre las dificultades que se generan al trabajar el número fraccionario partiendo de

la relación parte todo y expone el por qué el número fraccionario a partir de ese significado no garantiza el trabajo con los otros significados.

En un segundo momento, la investigación de Vizcarra y Sallán (2005) propone como una alternativa didáctica para mejorar la comprensión de los números fraccionarios en los grados 4to, 5to y 6to, trabajar a partir de tres modelos de aprendizaje distintos con intencionalidades educativas diferentes: "...el modelo de medida para introducir las fracciones, el modelo de cociente para fortalecer las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal, y el modelo de razón para construir ideas sobre proporcionalidad aritmética" (p.18). Vizcarra y Sallán (2005) también sostienen que debido a las diferentes dificultades que surgen al priorizar la enseñanza de los números fraccionarios a partir de la relación parte todo, se hace necesario el trabajo con distintos contextos.

La metodología de este trabajo, por un lado, toma un enfoque constructivista y potencia el aula de clases como el espacio adecuado para la construcción de conocimiento y de igual forma, da prioridad al trabajo individual o grupal. Entre sus conclusiones afirman que "las respuestas que dan los alumnos a las tareas propuestas indican la desaparición de obstáculos didácticos" (p. 31), y, por otro lado, la fracción surge como necesidad para formular respuestas a situaciones problemáticas en las que el resultado no puede expresarse con un número natural.

Las anteriores investigaciones son importantes para el desarrollo de este proyecto dado que señalan la posibilidad de trabajar el número fraccionario partido de otros significados diferentes a la relación parte todo, ejemplifican la implementación de contextos realistas, dan a conocer problemáticas relacionadas con los números fraccionarios y aportan elementos importantes para el desarrollo, implementación y análisis de las situaciones problema que se diseñaron.

Correa (2017), mediante un análisis pragmático del discurso que da cuenta de la intencionalidad de estudiantes de grado octavo, con los cuales se planeó una introducción a partir del reconocimiento de los elementos constitutivos de las expresiones algebraicas, propuso un diseño y elaboración de manillas, relacionado al contexto de los estudiantes. A través de esto, los estudiantes lograron establecer relaciones entre cantidades que permitieron la identificación de dichos elementos, de igual forma, se reconoce la pertinencia de diseñar propuestas de clase que posibiliten la construcción de significado de los objetos propios del álgebra.

Esta investigación tuvo un enfoque cualitativo gracias a que permite, la extracción de resultados a partir de los diferentes instrumentos usados para la recolección de información, especialmente usando la metodología del experimento de enseñanza, el cual consintió en las fases de planeación y diseño, análisis local y análisis retrospectivo.

En el trabajo de maestría de Correa (2017) se propone un análisis pragmático del discurso teniendo en cuenta los Actos de Habla de Searle (1992, 2009), los tres elementos propuestos por Radford (2003, 2006), y la idea de Secuencia de Actos de Habla propuesta por van Dijk (1980, 1996).

Esta investigación es tomada en cuenta debido a que resalta la importancia del trabajo con situaciones relacionadas con el contexto de los estudiantes y contiene elementos teóricos útiles para el marco de referencial, gracias a que expone el trabajo de los principales autores tenidos en cuenta para el análisis de los diferentes discursos llevados a cabo durante el desarrollo de la actividad. Teniendo en cuenta las anteriores investigaciones, se configura un esquema inicial para la consolidación de los diferentes aspectos teóricos empleados para el desarrollo del presente trabajo de grado.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Caracterizar el papel que juegan *los significados de medida, cociente y razón* en la comprensión del número fraccionario en un grupo de estudiantes de grado 5º, cuando trabajan con tareas enmarcadas en la Educación Matemática Realista.

1.4.2 Objetivos específicos

- Articular aspectos didácticos, matemáticos y curriculares en el diseño de situaciones problema enmarcadas en la EMR relativas a los números fraccionarios.
- Determinar la incidencia que tiene el trabajo con tareas enmarcadas en la EMR en la comprensión de los diferentes significados del número fraccionario.
- Analizar los niveles de comprensión presentes en un grupo de estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa República de Venezuela cuando trabajan con las situaciones problema.

En conclusión, en este capítulo se presentaron las dificultades que surgen en la enseñanza de los números fraccionarios a partir de la relación parte todo, las investigaciones que fundamentan y proporcionan elementos para la formulación de la pregunta de investigación, los antecedentes y los objetivos, la justificación, diferentes problemáticas presentes en el Distrito de Buenaventura y cómo estas pueden ser atendidas mediante el trabajo con situaciones problema que parten de la realidad.

En este sentido, se propone que el desarrollo de este trabajo se enmarque en una metodología cualitativa particularmente en un estudio de casos. Según Vera (2008) esta metodología centra la atención en los procesos del individuo, cuya particularidad es interesante en

el punto de vista investigativo, lo que permite un alto contenido descriptivo acerca de la observación de un fenómeno.

Es por esta razón que, en busca de lograr un análisis y una descripción más detallada a los procesos realizados por los estudiantes durante el desarrollo de la situación problema, el presente trabajo incluye entre sus instrumentos de análisis conceptos teóricos como los Actos de Habla, las secuencias de Actos de Habla y los macroActos de Habla, se tiene el aporte de autores como Searle (2005), van Dijk (1996) y Correa (2017).

Las etapas de este trabajo se enfocan, en primer lugar, en hacer un seguimiento detallado a los estudiantes durante el desarrollo de la situación problema y, en segundo lugar, hacer un análisis a las producciones obtenidas. La primera de estas etapas consiste en la implementación de las situaciones problema propuestas y la recopilación de información mediante observaciones, apuntes, grabaciones y producciones de los estudiantes. La siguiente etapa consiste en la descripción y estudio de los resultados obtenidos los cuales se apoyan en el fundamento teórico, curricular, didáctico y formal de los números fraccionarios.

CAPÍTULO II. MARCO DE REFERENCIA

En este apartado se presentan los elementos teóricos que se tienen para la fundamentación matemática al igual que los referentes de análisis que se tuvo en cuenta en el presente trabajo. De acuerdo con el MEN el número fraccionario se debe trabajar partiendo de distintos significados, por tanto, el trabajado mediante el enfoque de la EMR es propuesto como elemento central para la construcción y análisis de situaciones problema que vinculen las diferentes directrices planteadas por el MEN y el contexto de los estudiantes; para alcanzar los objetivos planteados en este trabajo se tuvo en cuenta tanto las producciones como las interacciones verbales realizadas por los estudiantes durante el desarrollo de la situación problema, por tanto se hizo necesario realizar un análisis del discursos empleado por quienes desarrollaron la actividad.

En el siguiente esquema se propone la articulación entre la fundamentación teórica y los referentes de análisis de este trabajo.

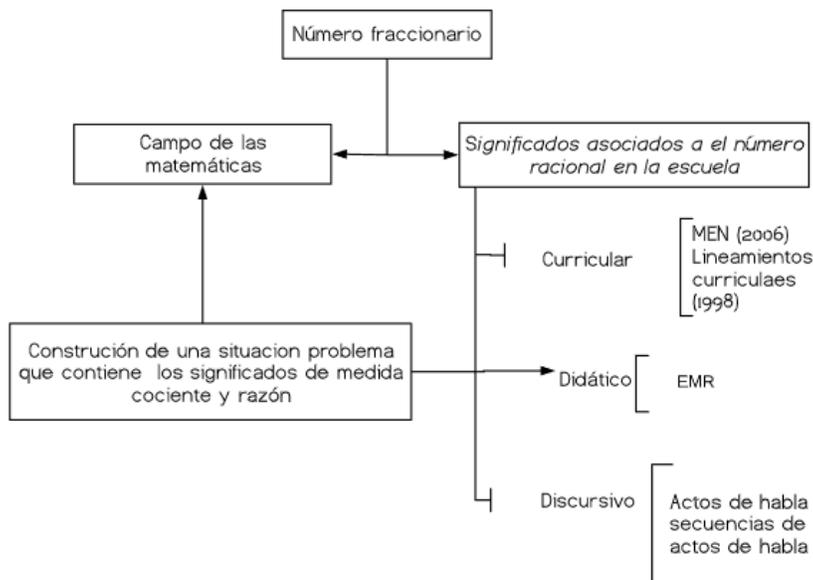


Ilustración 1. Articulación entre la fundamentación teórica y los referentes de análisis

En la imagen anterior se presentan los diferentes elementos que se tuvo en cuenta y su articulación para favorecer los objetivos propuestos en este trabajo de grado; toma como objeto central el número fraccionario, sus diferentes significados y los referentes didáctico, curricular y formal, los cuales son la base para la construcción y análisis de la situación problema.

En este sentido se describen tres aspectos tenidos en cuenta; en primer lugar, se presenta al número racional en el campo de las matemáticas y cómo se trabaja en la escuela; en segundo lugar, se describen los referentes didácticos; y finalmente, se encuentran los referentes discursivos.

2.1 Sobre el Número racional

Los números racionales ocupan un papel importante en la educación matemática, de acuerdo con el MEN (2006) la enseñanza de estos números inicia en el grado tercero de primaria y se aborda durante gran parte de la educación básica cursada por los estudiantes. El interés de este apartado es presentar el concepto matemático del número racional y los diferentes significados que se tienen en cuenta a la hora de su enseñanza en la escuela.

2.1.1 El número racional en el campo de las matemáticas

De acuerdo con Pinilla (2009) al dividir dos números pertenecientes al conjunto de los enteros (\mathbb{Z}) no siempre resulta un número entero (\mathbb{Z}), de ahí la necesidad de crear el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}, b \neq 0, a \text{ y } b \in \mathbb{R}, \}$. Es posible situar este conjunto en la recta numérica, pero a diferencia de los números naturales que son consecutivos los racionales contienen infinitos números entre ellos, por tanto, se pueden expresar como una fracción, pero también como un número decimal exacto o periódico.

En este sentido, en el presente trabajo se toma a (\mathbb{Q}) como el conjunto de los números de la forma a/b , siendo a y b números enteros, con b distinto de cero; a recibe el nombre de numerador y b el nombre de denominador.

2.1.2 *El número racional en la escuela*

Quintero (2006), Vizcarra (2002) Cisneros y Castro (2017) caracterizan el número fraccionario a partir de sus diferentes significados. En el desarrollo del presente trabajo de grado se consideran tres de tales significados, estos son: *cociente*, *medida* y *razón*. Algunas de las razones por las que se toman estos tres significados son las planteadas por Vizcarra y Sallán (2005) quienes sostienen que el trabajo a partir de estos significados permite favorecer el aprendizaje de los números fraccionarios. Otra de las razones es que el trabajo con diferentes significados aumenta la posibilidad de hacer una mayor descripción del fenómeno y un análisis con más precisión.

A continuación, se describen y ejemplifican cada uno de estos tres significados del número fraccionario.

El número fraccionario como cociente: se entiende como el resultado de dividir uno o varios objetos entre un número de partes. En este sentido, el número fraccionario es el resultado de una situación problema de reparto en la que se desea conocer el tamaño de cada una de las porciones resultantes al distribuir una cantidad de a unidades en b partes iguales. Por ejemplo, cuando se cuestiona sobre aspectos como: *6 estudiantes desean repartir 5 chokolatinas. ¿Cómo deben hacer la repartición si todos quieren comer la misma cantidad?*

El número fraccionario como medida: remite a situaciones en la que se busca medir una magnitud en la que la unidad no está contenida un número entero de veces en la magnitud que se

desea medir. Este significado tiene en cuenta tanto cantidades discretas como continuas, una situación que presenta este significado es la siguiente: *la escuela queda a cinco sextas partes de la distancia entre el Banco de la República y el coliseo.*

El número fraccionario como razón: se refiere a una comparación entre dos cantidades o conjuntos de unidades de igual o diferente magnitud (continuas o discretas). Las razones pueden ser comparaciones parte-parte en un conjunto o comparaciones parte todo. Una situación que ilustra este caso es la siguiente: *en un concurso de pintura al aire libre se presentaron 6 participantes y 5 obtuvieron algún premio. ¿Qué fracción representa los ganadores?*

Las anteriores interpretaciones del número fraccionario hacen referencia a cada significado gracias al contexto en el cual se emplean, por tanto, si solo se presenta de la forma $\frac{5}{6}$ este solo sería un número racional.

2.2. Referentes para la enseñanza de los números racionales

En esta perspectiva se abordan los aspectos didácticos de interés para el desarrollo del trabajo de grado. En primer lugar, se presentan distintas propuestas planteadas por el MEN para favorecer el aprendizaje de los números fraccionarios y, en segundo lugar, los principios que plantea la EMR como herramientas para trabajar en el salón de clases.

2.2.1. Aspectos curriculares

En el componente curricular son varios los elementos que se tienen en cuenta para el desarrollo de este trabajo; en un primer lugar, se encuentra el *contexto* y, en segundo lugar, diferentes problemáticas que surgen en el proceso de aprendizaje de los números fraccionarios.

Para el MEN el contexto en el que los estudiantes desarrollan y adquieren nuevos conocimientos tiene un papel destacado en la construcción e implementación de situaciones problema

El contexto tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas. MEN (1998, p. 19)

De igual forma, se propone la intervención activa del docente para modificar y enriquecer elementos que potencien el contexto en el aula de clase con el objetivo de que, el estudiante aprenda cada vez más conocimientos relacionados con su entorno y el diseño de estrategias para aprender las matemáticas como un elemento inmerso en su cultura.

En un segundo lugar, el MEN (2006) reconoce la problemática que presentan los estudiantes frente al paso de la noción de número natural al número fraccionario, considerándolo no como un paso que se da de forma natural sino, por el contrario, que requiere de todo un proceso para reconceptualizar la unidad.

El paso del concepto de número natural al concepto de número racional necesita una reconceptualización de la unidad y del proceso mismo de medir, así como una extensión del concepto de número. El paso del número natural al número racional implica la comprensión de las medidas en situaciones en donde la unidad de medida no está contenida un número exacto de veces en la cantidad que se desea medir o en las que es necesario expresar una magnitud en relación con otras magnitudes MEN (2006, p. 59)

Debido a que el número fraccionario $\frac{a}{b}$ tiene diferentes interpretaciones se presenta como objetivo de enseñanza que los estudiantes doten de sentido estas interpretaciones y que establezcan relaciones entre ellas. De ahí, que dentro los estándares que presenta el MEN (2006) los estudiantes al terminar el grado quinto deben “Interpretar las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones” (p. 37). De igual forma, el MEN sugiere poner en marchas estrategias encaminadas favorecer el aprendizaje de los números fraccionarios.

2.2.2. Educación matemática realista

La EMR tiene su origen en el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática de la Universidad de Utrech (Holanda), dicho instituto fue fundado en el año 1970 y es reconocido actualmente con el nombre de Instituto Freudenthal. De acuerdo con Bressan, Gallego, Pérez, Zolkower (1973) las matemáticas son la actividad humana encargada de buscar y resolver problemas de la realidad, en ellas el estudiante pasa por diferentes niveles de comprensión siguiendo un proceso de matematización progresiva. Alsina (2009) sostiene que la EMR más que una teoría sencilla y clara sobre la educación matemática consiste en ideas básicas centrales en el cómo y en el qué de la enseñar matemática. Al respecto, Bressan, et al. (1973) exponen que la EMR tiene cinco ideas centrales:

a-) Partir de contextos y situaciones problemáticas realistas, en el sentido de representables, razonables e imaginables para los estudiantes, como generadores de su actividad matematizadora. De acuerdo con Bressan, et al. (1973) esto no quiere decir que el uso de situaciones problemas se debe restringir solo a fenómenos del mundo real (perceptual) debido que esto limitaría el trabajo de los estudiantes frente a la matemática misma:

Un contexto es un evento, una proposición o situación derivada de la realidad, la cual es significativa para los alumnos o la pueden imaginar y conduce a usar métodos matemáticos desde su propia experiencia. Provee significado concreto y apoyo para las relaciones y operaciones relevantes de la matemática. Las situaciones podrían ser tomadas desde experiencias cotidianas, tales como los recorridos del colectivo o las compras y el manejo del dinero. van den Heuvel- Panhuizen, 1994, p. 243), citado por Bressan, et al. (1973, p. 3).

En el marco de esta corriente los contextos realistas, cumplen un papel importante en el aprendizaje de los estudiantes debido a varias razones: primero, son puntos de partida en los procesos de enseñanza y aprendizaje para producir matemática y dominios de aplicación de esta; segundo, bien elegidos, resultan de interés para los estudiantes; finalmente, promueven el uso del sentido común y movilizan los conocimientos informales de los estudiantes y la creación de modelos.

b-) Utilizar los modelos (materiales, lingüísticos, esquemas, diagramas y símbolos) que emergen de la propia actividad matemática de los estudiantes como herramientas para representar y organizar estos contextos y situaciones. Vanegas (2013) expone que durante el proceso de modelación matemática los estudiantes transitan por diferentes niveles de comprensión, que van desde la capacidad de inventar soluciones informales relacionadas con su contexto pasando por esquematizaciones generales de la situación hasta llegar a la adquisición de relaciones más amplias aplicables a otros contextos y situaciones.

Para Freudenthal “El modelo es simplemente un intermediario, a menudo indispensable, a través del cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada con el fin de volverla susceptible a un tratamiento matemático formal” (Freudenthal (1991), citado en Bressan et al.1973, p. 4). Se hace pertinente aclarar que en la EMR el término modelo no se refiere a modelos

preconcebidos e impuestos por la matemática formal, por el contrario, se refiere a modelos que surgen durante la trayectoria del proceso aprendizaje, durante el desarrollo de situaciones problemas.

En la EMR se admite que los modelos descriptivos producidos en el componente horizontal van evolucionando gradualmente de la matematización horizontal a la matematización vertical a medida que se impulsan y elevan los niveles de comprensión. Estos niveles de comprensión (situacional, referencial, general y formal) representan el paso del conocimiento informal al conocimiento formal y se caracterizan por distintos tipos de actividades cognitivas y lingüísticas, asociadas al uso de diferentes estrategias y modelos; de acuerdo con Bressan y Gallego (2011) la jerarquía entre principios no tiene que ser estrictamente ordenada, en este sentido se presentan a continuación, las ideas principales de cada nivel:

El nivel situacional se asocia al uso de estrategias ligadas en su totalidad con el contexto de la situación misma, lo que permite a los estudiantes introducir “sus conocimientos informales, su sentido común, su experiencia y estrategias situacionales para identificar y descubrir la matemática existente en el contexto” (Henaó y Vanegas 2012, p. 39).

Los procesos que se realizan en este nivel pertenecen a la matematización horizontal, mientras que los siguientes tres niveles realizan procesos que se caracterizan por la búsqueda de fórmulas, el uso de las pruebas, la generalización, entre otros, por tanto, estos se enmarcan en la matematización vertical.

El nivel referencial este se puede evidenciar gracias a que aparecen las descripciones, conceptos y los procedimientos personales por medio de los cuales realizan el esbozo o

esquematizan la situación problema, en otras palabras, aparecen las representaciones de modelos gráficos, materiales o notacionales. De ahí que los modelos se consideren como modelos siempre y cuando estos estén referidos a las situaciones particulares que dieron origen.

El nivel general se evidencia cuando el estudiante teniendo en cuenta la generalización de lo aprendido en el nivel anterior, y de acuerdo con las reflexiones y exploraciones desarrolladas, focaliza la matemática sobre las estrategias que superan la referencia del contexto, dicho en otras palabras por (Hena et al. 2012) este nivel se da por las diferentes reflexiones relacionadas con el concepto, así de “los procedimientos, estrategias y modelos utilizados en el nivel anterior surgen aspectos generalizables de los mismos y los estudiantes pueden concluir que son utilizables en conjuntos de problemas, dando lugar a los modelos para la resolución de los mismos”(p. 40).

El nivel formal tiene en cuenta la comprensión, utilización de los conceptos, procedimientos y notaciones convencionales que hacen parte de la matemática vinculada al contexto y permite la validación del modelo matemático encontrado por los estudiantes. Claros (2018) han producido una síntesis de estos niveles de comprensión a través de la siguiente tabla por medio de la cual es posible inferir algunas relaciones importantes para el desarrollo del presente trabajo.

MATEMATIZACIÓN HORIZONTAL (Concreto)	MATEMATIZACIÓN VERTICAL (Abstracto)		
Nivel situacional (Contexto)	Nivel referencial (Modelo de)	Nivel general (Modelo para)	Nivel formal (procedimientos y notaciones convencionales)
- Los estudiantes utilizan los conocimientos informales, el sentido común, y la experiencia para comprender las situaciones problema.	- Aparecen representaciones o modelos gráficos y matemáticos. - Emergen diferentes modelos matemáticos	- Los procesos realizados por los estudiantes se desprenden del contexto. - Reflexión sobre conceptos,	- Aparecen conocimientos y notaciones convencionales. - Validación de modelos matemáticos encontrados.

- Se exploran situaciones problema partiendo de diferentes puntos de vista.	particulares de la situación problema	procedimientos, estrategias y modelos usados.	- Los estudiantes reconocen los conceptos centrales implicados en la situación problema.
---	---------------------------------------	---	--

Tabla 2: Niveles de comprensión (Claros, 2018, p 32)

Teniendo en cuenta los diferentes niveles de comprensión se puede observar que, en la EMR el aprendizaje de las matemáticas es considerado como una actividad constructiva en la cual los estudiantes deben matematizar por medio de la reflexión para llegar al siguiente nivel “porque a través de la reflexión se generan conflictos cognitivos en los estudiantes que promueven la duda y la exploración de nuevos caminos” (Claros 2018, p. 40).

De acuerdo con Bressan y Gallego (2011) los principios propuestos por la EMR no establecen una jerarquía entre ellos, pero si brindan herramientas para identificación de los diferentes niveles en los cuales se encuentra cada estudiante.

c-) Reconocer el papel clave del docente como guía y organizador de la interacción en las aulas. Bressan, et al. (1973) exponen que el docente “tiene un rol bien definido como mediador entre los estudiantes y las situaciones problemas, entre los estudiantes entre sí, y entre las relaciones informales de los estudiantes y las herramientas formales ya institucionalizadas de la matemática como disciplina” (p. 6). Es decir que la enseñanza de la matemática debe tomar en la EMR la forma de reinención guiada en la cual los estudiantes reinventan a partir de estructuras y herramientas matemáticas mediante el trabajo con situaciones problema interactuando con sus compañeros o mediante la guía del docente, el cual debe promover espacios a través los cuales se puedan construir saberes matemáticos.

Diferentes autores enfatizan en el rol del docente al mencionar que este no debe olvidar que “es un mediador entre las producciones informales de sus estudiantes y las herramientas

formales de la matemática, pues podría caer en el error de mostrar a los estudiantes lo que deben aprender, contradiciendo el principio de actividad” (Vanegas, 2013, p. 2887)

d-) La importancia de la interacción grupal. En esta corriente, el aprendizaje de la matemática se considera como una actividad social en la cual, la reflexión colectiva lleva a niveles de comprensión más altos. Las interacciones sociales verticales (docente-alumno) y horizontales (alumno-alumno) se encuentran en un lugar central, debido a que son clave para la producción e intercambio de ideas entre los estudiantes y a la vez permite que los estudiantes que los estudiantes siga su propia trayectoria de aprendizaje.

e-) La fuerte interrelación e integración de los ejes o unidades curriculares de la matemática. Esta idea plantea establecer conexiones y aplicación de un alto rango de matemáticas, por tanto, no hace profundas distinciones entre los ejes curriculares lo cual posibilita una mayor coherencia y permite diferentes modos de matematizar en distintos modelos y lenguajes logrando una mayor coherencia a través del currículo, en este sentido, posibilita el trabajo con distintos contenidos matemáticos.

En este mismo orden de ideas Alsina (2009) amplía y expone una síntesis de los principios fundamentales en los que se basa la EMR en la siguiente tabla:

Principio	¿Qué es?	¿Cómo puede trabajarse?
De actividad	Las matemáticas son una actividad humana a las que todas las personas pueden acceder. La finalidad de las matemáticas es matematizar (organizar) el mundo que nos rodea, incluyendo a la propia matemática. La matematización es una actividad de búsqueda y de resolución de problemas, también es una actividad de organización de un tema	Matematizar involucra principalmente generalizar y formalizar. Formalizar implica modelizar, simbolizar, esquematizar y definir, y generalizar conlleva reflexión.
De realidad	Las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales.	El contexto de los problemas que se presentan a los alumnos puede ser el mundo real, pero esto no es necesariamente así.

	Un contexto real se refiere tanto a situaciones problemáticas de la vida cotidiana y situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos	Es necesario que progresivamente se desprendan de la vida cotidiana para adquirir un carácter más general, o sea, para transformarse en modelos matemáticos.
De niveles	Los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión: Situacional: en el contexto de la situación. Referencial: esquematización a través de modelos, descripciones, etc. General: exploración, reflexión y generalización. Formal: procedimientos estándares y notación convencional.	Esquematación progresiva (profesor) y reinención guiada (aprendiz), las situaciones de la vida cotidiana son matematizadas para formar relaciones más formales y estructuras abstractas.
De reinención guiada	Proceso de aprendizaje que permite reconstruir el conocimiento	Presentar situaciones problemáticas abiertas que ofrezcan una variedad de estrategias de solución. Permitir que los estudiantes muestren sus estrategias e invenciones a otros Discutir el grado de eficacia de las estrategias usadas.
De interacción	La enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social. La interacción entre los estudiantes con sus compañeros y los profesores pueden provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión.	La negociación explícita, la intervención, la discusión, la cooperación y la evaluación son elementos esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo en el que los métodos informales del aprendizaje son usados como una plataforma para alcanzar los formales. En esta instrucción interactiva, los estudiantes son estimulados a explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar.
De interconexión	Los bloques de contenidos matemáticos (numeración y cálculo, álgebra, geometría...) no pueden ser tratados como entidades separadas.	Las situaciones problemáticas deberían incluir contenidos matemáticos interrelacionados.

Tabla 3. Principios de la EMR: (Alsina, 2009, p. 121).

La tabla 3 contiene características relevantes sobre cada principio y orienta formas en las que se puede aplicar en el salón de clases, lo cual permite que sea una herramienta para tener en cuenta a la hora del diseño de las situaciones problema.

2.3. Un punto de vista pragmático del discurso

A la hora de analizar el discurso que emite un hablante es pertinente contar con las herramientas adecuadas para realizar esta labor, de ahí que en el siguiente apartado se presentan los elementos discursivos que se tienen en cuenta en el análisis de las interacciones realizadas por los estudiantes durante el desarrollo de la situación problema. En primer lugar, se presentan los

Actos de Habla de acuerdo con los aportes teóricos y las propuestas presentadas por Searle (2005), van Dijk (1996) y Correa (2017); en segundo lugar, se hace una presentación de las secuencias de Actos de Habla y los macroActos de Habla.

2.3.1. Actos de Habla

Searle (2005) expone que los Actos de Habla o actos lingüísticos se presentan en una situación de habla en la cual hay un hablante, un oyente y la emisión del hablante; existen diferentes clases de actos asociados a este tipo de emisión, no obstante, para los fines de este trabajo se tienen en cuenta aquellos que consisten en hacer enunciados, plantear preguntas dar órdenes, emitir informes, saludar y aconsejar. Al respecto van Dijk (1996) expone que:

Las emisiones se usan en contextos de comunicación e interacción sociales, y tienen, por consiguiente, funciones específicas en tales contextos. Para entender esas funciones hay que tener en mente una propiedad muy fundamental de las emisiones: se usan para realizar acciones. La clase específica de acción que realizamos cuando producimos una emisión se llama acto de habla o acto ilocutivo. (p. 58)

De igual forma, Searle (2005) expone que los actos ilocucionarios son la unidad mínima de la comunicación lingüística y consisten en expresar ciertas oraciones con cierto sentido y referencia, por tanto, “lo que constituye la unidad mínima de la comunicación lingüística es la producción de la instancia en la realización del acto de habla” (Searle, 2005. p. 2), es decir el acto ilocucionario es la producción de cierta oración que se da bajo ciertas condiciones.

En este sentido, Correa (2017) expone una tabla que cuenta con cinco categorías para tener en cuenta en el trabajo con los Actos de Habla, estas son: asertivos, compromisivos, directivos,

declarativos y expresivos; cada uno de estos Actos de Habla cumple determinadas características que le permiten pertenecer a una explícita categoría como se puede apreciar a continuación:

Acto	Contenido proposicional	Esencial	Preparatorias	Sinceridad	Dirección de ajuste	Fuerza ilocucionaria
<i>Asertivo</i>		Compromete a H con lo expresado \vdash	1. H tiene razones para creer que A. 2. No es obvio que O sepa que A.	H cree que p C(p)	Palabra a mundo ↓	Grado de certeza
<i>Compromisivo</i>	Acción futura de H	Compromete a H con una acción futura C	1. H es capaz de hacer A. 2. No es obvio que H fuera hacer A.	intención de H para hacer A I	Mundo a palabra ↑	Grado de intención o compromiso
<i>Directivo</i>	Acción futura de O	Intentos de H para que O haga algo !	1. O es capaz de hacer A. 2. No es obvio que O fuera hacer A.	H desea que O haga A	Mundo a palabra ↑	Grado de cortesía
<i>Declarativo</i>	Acción actual de H	Producción de A D	H tiene la potestad de hacer A con su emisión	No hay $\emptyset(p)$	No hay, se presupone la verdad \emptyset	
<i>Expresivo</i>	Variable	Expresa el estado psicológico en relación con A E	Variable	H expresa su actitud real	Palabra a mundo – Mundo a palabra ↓	

Tabla 4. Actos de Habla tomada de (Correa, 2017, p. 57).

En la tabla anterior la letra H representa al hablante, O al oyente, p la proposición enunciada y A refiere a aquello que el hablante se compromete o aquello que este quiere que el oyente haga.

La primera columna de la tabla presenta el contenido proposicional; la segunda, la condición esencial; la tercera, la condición preparatoria; la cuarta, la condición de sinceridad; la quinta, la dirección de ajuste; y la sexta, la fuerza con que se expresa. A continuación, se presentan las cuatro primeras columnas debido a que en ellas se encuentran las reglas con las que se categorizan los Actos de Habla.

La primera regla es el contenido proposicional permite categorizar un acto de habla a partir de la referencia y predicado de dicho acto, es decir el objeto -o sujeto- del que se habla y lo que se dice de este requiere de una proposición que se emite en el contexto de una oración, en el caso de una promesa esta emisión predica algún acto futuro de hablante.

La esencial es la regla que se encarga de establecer las condiciones para la realización de la proposición expresada en el acto de habla; esta condición está relacionada con el esfuerzo realizado por el hablante con la finalidad que el oyente reconozca su intención. A modo de ejemplo, en el momento en que un hablante emite una orden la condición esencial consiste en el hecho de que el hablante intente que la emisión haga que el oyente lleve a cabo el acto.

Las preparatorias presentan las condiciones de quién habla y quién oye para satisfacer el acto de habla, en otras palabras, establecen condiciones para dar cumplimiento al acto y sirven para que la realización del acto tenga sentido. Por ejemplo, en el caso de una promesa, alguien promete hacer algo que favorezca al oyente, lo prometido debe ser algo que el oyente quiere que se le haga. En caso contrario, la promesa no tiene sentido y quizás sea una amenaza.

La sinceridad centra su atención en la Intencionalidad² que tiene el hablante al decir lo que dice, esta se relaciona con un estado psicológico en tanto a su creencia, intención o deseo, es decir, al hacer una promesa el hablante debe realmente tener la intención de realizar lo prometido.

Un ejemplo de estas reglas es el siguiente: en el acto de ordenar, la regla de sinceridad incluye que el hablante tiene la intención de dar una orden, la regla preparatoria es que el hablante

² Se relacionan con la realización de los actos de habla que admiten la posibilidad de que el hablante tenga las creencias, deseos, intenciones, expectativas, en la medida en que las causas o razones de sus acciones son las creencias y deseo de las personas.

tiene la autoridad para ordenar al oyente, la regla esencial consiste en el hecho de que el hablante intente que la emisión haga que el oyente lleve a cabo el acto, y la regla del contenido proposicional implica un acto futuro de oyente.

Partiendo de las características anteriores, se puede observar que para el análisis de las situaciones en las que se realizar un acto de habla existen diferentes reglas debido a que un acto puede realizarse con varias intenciones. Este trabajo se interesa fundamentalmente en aquellos Actos de Habla en los que se expresa el estado Intencional del hablante, como una forma de ofrecer al oyente elementos que posibilitan la comprensión del discurso emitido por el háblate con el fin de solucionar la situación problema.

2.3.2. Secuencias y macroactos de Actos de Habla.

De acuerdo con van Dijk (2005) las oraciones deben estudiarse en relación con las otras oraciones que componen un discurso debido a que rara vez estas ocurren aisladamente, por el contrario, es usual encontrar secuencias completas de Actos de Habla. Austin (2005) sostiene que hay dos reglas que se deben cumplir en una situación para que esta sea una conversación o discurso; la primera es que la convención invocada debe existir y ser aceptada, la segunda regla exige que las circunstancias en que un hablante se propone invocar este procedimiento deben ser apropiadas para su invocación, por tanto, la emisión del hablantes cumple con unas condiciones y características específicas, como resultado el contexto en cual se efectúen estas dos reglas juega un papel importante durante el desarrollo de un discurso.

Si el acto verbal resulta satisfactorio, el contexto pragmático habrá cambiado en algún sentido. De allí que para que el subsiguiente acto de habla sea adecuado, las condiciones de salida (output conditions) del primer acto de habla tienen que ser

idénticas a las condiciones de entrada (input conditions) del siguiente acto de habla, y así en adelante para los demás Actos de Habla de la secuencia. (van Dijk, 2005.P. 64)

De esta forma en este trabajo de grado se interpreta a una secuencia de Actos de Habla como un acto de habla conformado por diferentes actos auxiliares. La adecuada interacción entre los diferentes Actos de Habla que se dan durante el discurso enunciado por los emisores es la base para la conformación de un macroacto.

Un macroacto de habla se realiza si todos los Actos de Habla de una secuencia son opcionales o Actos de Habla preparativos o auxiliares necesarios, o actos componentes normales de habla, de tal modo que el contexto se establezca (el conocimiento requerido, necesidades, intenciones, deberes, expectativas, etc.) para el «acto de habla principal». (van Dijk, 1980, p. 336)

De acuerdo con van Dijk (2005) diferentes actos de habla funcionan como auxiliares para realizar el acto de habla principal, por tanto, los macroactos tienen la función de reducir y organizar la información de tal forma que el oyente no tiene que recordar toda la información sino por el contrario construir macroactos que le sean pertinentes.

Los Actos de Habla y los macroactos que utilizan los estudiantes se tienen en cuenta como instrumento para analizar las producciones de los estudiantes a medida que desarrollan la situación problema, lo que permite conocer ampliamente el proceso que realizaron los estudiantes para interpretar los diferentes significados asociados al número fraccionario que se presentan en este trabajo de grado.

Los elementos presentados sobre el número racional fundamentan el objeto de enseñanza junto con lo curricular. Para el diseño de la situación problema se incluyen los diferentes principios propuestos en la EMR, especialmente el principio de realidad debido a que propone el trabajo con

situaciones problemáticas de la vida cotidiana y situaciones problemáticas que son reales en la mente de los estudiantes. Y la perspectiva pragmática guía el análisis de las producciones e intervenciones de los estudiantes.

CAPÍTULO III. REFERENTE METODOLÓGICO

Se presentan en este apartado los elementos metodológicos que se tuvo en cuenta para el desarrollo de este trabajo de grado. Para empezar, se presenta el tipo de metodología utilizada (estudio de casos instrumental); así mismo se presenta la caracterización de la población, la justificación del conjunto de situaciones problema, el proceso de recolección de la información y finalmente se presentan construcción y justificación de las actividades que conforman la situación problema.

3.1. Metodología de investigación

Este ejercicio investigativo pretende caracterizar el papel que ocupan los significados de *medida*, *cociente* y *razón* en la comprensión de los números fraccionarios en un grupo de estudiantes de grado 5º cuando resuelven situaciones problemas en contextos reales, es de carácter descriptivo. Por esta razón tiene un enfoque investigativo soportado en la investigación cualitativa. Al respecto, Vera (2008, p. 1) expone que este tipo de trabajos:

[...] estudia la calidad de las actividades, relaciones, asuntos, medios, materiales o instrumentos en una determinada situación o problema. La misma procura lograr una descripción holística que intenta analizar exhaustivamente, con sumo detalle, un asunto o actividad en particular. La investigación cualitativa se interesa más en saber cómo se da la dinámica o cómo ocurre el proceso en que se da el asunto o problema.

En este sentido, el tipo de investigación cualitativa es base para el análisis de las producciones e interacciones que realizaron los estudiantes durante el desarrollo de la situación problema; en este trabajo el análisis se presenta en el capítulo cuatro y muestra detalladamente las

diferentes estrategias empleadas por los estudiantes al igual que las distintas interacciones que surgieron durante el desarrollo de la situación.

De acuerdo con la investigación cualitativa que define Vera (2008) citando a (Fraenkel & Wallen, 1996) este proceso investigativo posee algunas particularidades que deben ser consideradas: Formulación del problema a investigar, identificación de los participantes, la recolección de los datos, el análisis de los datos y conclusiones.

El enfoque investigativo elegido implica un énfasis en los procesos y discusiones de los participantes, los cuales se miden en términos cualitativos, es decir se describe en cuál de los diferentes niveles de comprensión se encuentran los estudiantes teniendo presente la forma en que abordan y resuelven la situación propuesta planteada para los significados del número fraccionario. De igual forma, este enfoque cualitativo interpretativo permite al investigador adoptar un particular punto de vista relacionado con las estrategias involucradas para estudiar el desarrollo de la situación problema.

Teniendo en cuenta las particularidades que implica la investigación cualitativa se presenta específicamente el tipo de metodología cualitativa empleada, una descripción del contexto en el que se identifican los participantes y se presentan las herramientas utilizadas para la recolección y análisis de la información que se tiene en cuenta en el presente trabajo.

Dado que el presente trabajo de grado se propone caracterizar el papel que juegan *los significados de medida, cociente y razón* en la promoción del número fraccionario en un grupo de estudiantes de grado quinto cuándo trabajan con tareas enmarcadas en la EMR, se exponen las

generalidades, las diferentes fases y la descripción del contexto en el cual se desarrolló el presente trabajo.

Cohen y Manion (1990) exponen que los estudios de caso se proponen observar las características de un individuo o unidad (un individuo, una familia, una comunidad o clase) con el fin de observar, examinar, analizar e indagar los diversos elementos que constituyen la investigación. Gracias a que el estudio de casos permite el cumplimiento de los objetivos propuestos en este trabajo de grado se toma como metodología de investigación, cuya idea central consiste en estudiar detalladamente cómo situaciones problema diseñadas en el marco de la Educación Matemática Realista a partir de diferentes significados de la fracción pueden favorecer la comprensión de los números fraccionarios en el grado 5°.

Stake (1978; en Muñiz, 2010) expone que hay dos tipos de estudio de casos: intrínseco e instrumental. El primero se selecciona cuando el investigador se encuentra con una cuestión atípica o extraña que requiere comprensión y puede aclararse estudiando el caso particular a profundidad. Para el autor, el interés se centra en el caso, por esta razón se llama intrínseco. Por el contrario, en estudio de caso instrumental, el caso se selecciona a propósito para someter a prueba una teoría, de esta forma el interés se centra en la teoría y no en el caso. Esta modalidad permite el estudio colectivo, en el cual se puede estudiar varios casos para fundamentar la generalidad de un fenómeno o teoría.

Para los intereses del presente trabajo se ha optado el estudio de casos instrumental dado que, de acuerdo con (Henaó et al. 2012), este permite identificar y describir los distintos factores que influyen en el fenómeno estudiado, que en este caso tiene que ver con caracterizar el papel que juegan *los significados de medida, cociente y razón* en la comprensión del número fraccionario

en un grupo de estudiantes de grado 5º, cuando trabajan con tareas enmarcadas en la Educación Matemática Realista.

Los factores identificados y descritos se presentan en el capítulo cuatro, el proceso seguido para llegar a lo anterior se dio mediante distintas fases.

3.1.1. Fases

Las fases metodológicas empleadas para la culminación del presente trabajo de grado son las siguientes; en la fase número uno se construyen las actividades diseñadas mediante elementos teóricos que se enmarcan en la EMR, directrices del MEN (2006) y elementos didácticos, estas se pueden encontrar en el anexo 1.

De igual forma se precisan las herramientas de análisis, las cuales se componen por varias tablas que presentan distintos procesos de solución empleados por los estudiantes al momento de desarrollar la situación problema, estas herramientas se pueden observar durante el análisis realizado en el capítulo cuatro.

En la segunda fase, se llevó a cabo la aplicación de una situación problema conformada por cuatro actividades orientadas a diferentes significados del número fraccionario puestos en ensena mediante el empleo de distintos contextos.

En la tercera fase se encarga del análisis a las producciones de los estudiantes teniendo presente el discurso empleado durante las interacciones que surgen en el desarrollo de cada actividad, como una herramienta para observar los diferentes procesos y modelos de solución que ellos emplean.

Finalmente se entrega una caracterización del papel que juegan los significados de *medida*, *cociente* y *razón* en la comprensión del número fraccionario. La caracterización y el análisis propuesto en estas fases se realiza en el capítulo cuatro a medida que se van presentando los diferentes procesos de solución empleados por los estudiantes.

3.1.2. Contextualización

El trabajo se desarrolló en la Institución Educativa República de Venezuela la cual es de carácter público, cuenta con diferentes jornadas académicas (mañana, nocturna, tarde, fin de semana) es de carácter mixto y está ubicada en el distrito especial de Buenaventura (Valle del Cauca-Colombia), cuenta con cuatro sedes; el estudio se desarrolló en un grupo de 28 estudiantes que cursaban grado quinto, con edades que oscilan entre los 10 y 12 años, que se encuentran en los estratos socioeconómicos 1 y 2.

La situación problema se implementó en la sede San Bartolomé de las casas, que cuenta con aproximadamente 300 estudiantes y tiene los niveles de preescolar, media, básica secundaria y básica primaria. En esta institución cada año se realiza la semana deportiva en la que los estudiantes presentan sus uniformes y banderas, este dato se tuvo en cuenta para construir una situación que partiera de la realidad y el contexto de los estudiantes.

Específicamente este trabajo se interesó por el desarrollo del Pensamiento Numérico Y Sistemas Numéricos en el grado quinto. La escogencia de este grado está relacionada con que el Ministerio de Educación Nacional en los Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos de Competencia en matemáticas (2006) presenta el objeto matemático número fraccionario en el conjunto de grados 4 y 5 en los cuales se abordan procesos como: la interpretación del número fraccionario en diferentes contextos, situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente,

razones y proporciones, así mismo, su modelación y representación en diferentes actividades, puesto que, este es un factor indispensable para la solución de situaciones problema.

3.2. Construcción y justificación de la situación problema

La situación es de elaboración propia y ha sido diseñada teniendo en cuenta el número fraccionario a partir de los significados de *cociente*, *medida* y *razón*. De igual forma, las actividades que conforman la situación problema se derivan de la realidad, especialmente en la celebración de la semana deportiva que se realiza cada año en la Institución y toman elementos relacionados con el contexto escolar de los estudiantes y elementos cotidianos como el reparto de alimentos, el diseño de banderas, calcular el tiempo empleado para pintar un recuadro, entre otros.

Con el fin de obtener una mayor cantidad de información sobre los procesos que realizan los estudiantes durante el desarrollo de la situación problema esta fue diseñada para ser aplicadas en equipos. Pues las interacciones y discusiones que surgen durante el desarrollo de la situación se consideran un importantes para el análisis de las producciones y el análisis de sus discursos, por otro lado, si el estudiante la resuelve de forma individual se requiere un mayor acompañamiento del docente, para obtener interacciones que se puedan analizar.

En relación con los fundamentos de las actividades, se tuvo en cuenta aspectos curriculares para la educación, entre ellos los Estándares Básicos de Competencia en matemáticas (MEN, 2006), los Lineamientos Curriculares (1998) y referentes de enseñanza de acuerdo con el grado escolar de los estudiantes en el cual se trabajó la situación problema; de igual forma mediante los elementos teóricos presentados en el marco de referencia se emplearon criterios pertenecientes a la EMR como lo son: la posibilidad de que el estudiante pueda esquematizar las situaciones problema, indicar semejanzas y diferencia, presentar modelos, generar explicaciones, y dar

respuesta a preguntas que lo llevan a identificar el concepto matemático, es decir, las actividades están orientadas a que los estudiantes generen procesos de matematización a partir de las diferentes interpretaciones de los números fraccionarios, lo que se relaciona directamente con los principios de actividad y realidad entendidos como una actividad humana a las que todos los estudiantes pueden acceder.

En otras palabras, los criterios pertenecientes a la EMR que se tuvo en cuenta para la construcción de la situación problema son las siguientes; en primer lugar, las preguntas están orientadas a la búsqueda y resolución de problemas, por tanto, se espera que el estudiante formalice sus respuestas lo que implica modelizar, simbolizar, esquematizar, definir, y generalizar lo que permite que se cumpla el principio de actividad. En segundo lugar, las actividades incluyen los principios de realidad y de niveles, debido a que se presentan en escenarios reales e imaginables para los estudiantes y a medida que se va avanzando en la situación problema el estudiante tiene la posibilidad de presentar repuestas cada vez más formales pasando de estar en un nivel situacional a un nivel formal.

En tercer lugar, se incluyen los principios de reinención guiada e interacción, debido a que se presentan situaciones problemáticas abiertas que ofrecen una variedad de estrategias de solución, de esta forma se requiere la interacción entre los estudiantes con sus compañeros lo que puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión.

En este sentido, se diseñó una situación problema conformada por cuatro actividades, estas se nombran de la siguiente manera:

- Actividad 1: Diseñando banderas.
- Actividad 2: Reparto de pinturas.
- Actividad 3: Refrigerio.
- Actividad 4: Competencia de banderas.

Cada una de ellas está constituida por unas consignas que demandan una justificación del procedimiento efectuado. Este conjunto de situaciones conlleva a que el estudiante construya relaciones entre los diferentes significados del número fraccionario.

3.2.1. Actividad 1: Diseñando banderas

La actividad número uno se enfoca en conducir al estudiante hacia la comprensión del número fraccionario a partir del significado de medida. Se compone por cuatro preguntas en las cuales el estudiante tiene la posibilidad de dar sus respuestas mediante diferentes procesos de resolución y distintas representaciones, ya sea de modo gráfico o formal.

En este sentido las preguntas que conforman esta actividad exigen al estudiante la descripción del procedimiento realizado para tomar la medida de los diferentes fragmentos que conforman una bandera. Para lograrlo se requiere fraccionar la figura en subfiguras de acuerdo con el patrón de media que los estudiantes han seleccionado, lo que permite la puesta en escena de diferentes métodos que puede realizar el estudiante a la hora de dar solución a los interrogantes planteados. Esta actividad corresponde específicamente al significado de *medida*, debido a que el número fraccionario surge cuando al medir un objeto, la unidad escogida por el estudiante no es exacta.

3.2.2. Actividad 2: Reparto de pinturas

Esta actividad se enfoca en guiar al estudiante hacia la comprensión del número fraccionario a partir del significado de *cociente* y *medida*. Se compone por dos preguntas centrales con dos puntos adicionales cada una, contiene magnitudes discretas y continuas con el fin de observar el trabajo de los estudiantes al enfrentarse a este tipo de interrogantes. Por otro lado, la actividad permite al estudiante analizar la diferencia entre fracciones con menor o mayor cantidad de área según el tipo de figura que los estudiantes realicen. En este sentido los ítems que están orientados al significado de *cociente*, pertenecen específicamente a esta cualidad debido a que el número fraccionario surge como el resultado de hacer repartos equitativos.

3.2.3. Actividad 3: Refrigerio

Esta situación es propia del número fraccionario visto partiendo del significado de *cociente*, debido a que los estudiantes se enfrentan a cuatro preguntas en las cuales deben repartir en partes iguales la cantidad total de un producto. De igual forma, la actividad exige a los estudiantes dar solución por medio de diferentes procesos y su debida argumentación, que puede ser mediante dibujos o escritura de los procedimientos que realizan.

3.2.4. Actividad 4: Competencia de banderas

Esta actividad se conforma de dos preguntas centrales, la inicial contiene diferentes banderas de forma rectangular, y diferentes diseños, cada una hace alusión a uno de los grados de tercero a once. Los ítems que conforman esta pregunta se enmarcan en el trabajo del número fraccionario visto a partir del significado de *razón*; de forma similar se presentan los ítems de la segunda pregunta dado que el estudiante debe establecer relaciones de tiempo y medida teniendo en cuenta la información que le proporciona la actividad. En este caso, los ítems de esta actividad

se enfocan en el significado de *medida*, debido a que el número fraccionario surge ante la necesidad de expresar una comparación entre dos unidades, ya sea entre el tiempo y la cantidad, o entre el número de banderas calificas y las descalificadas.

Si bien las dos preguntas están orientadas hacia el mismo significado es de resaltar la diferencia en cuanto a su presentación dado que la pregunta número uno presenta la información de forma gráfica y la segunda pregunta lo hace mediante elementos contextuales, pero en un lenguaje escrito. Estos estilos de presentación se encuentran presentes en las 4 actividades.

La versión final de estas actividades se puede encontrar en el anexo 1.

3.2.5. Proceso de recolección de datos

Se llevó cabo a medida que los estudiantes resolvían la situación problema, mediante el empleo de fotografías, grabaciones de sonido y sus producciones, las respuestas las realizaron al revés y sobre las actividades que se le hizo entrega. En cada uno de los grupos de trabajo se instaló una grabadora de sonido con la finalidad de escuchar las iteraciones que surgieron durante el proceso de solución, a esto se suman las observaciones y notas personales realizadas por el profesor-investigador. El proceso de recolección de datos de cada actividad se presenta con mayor precisión al principio del análisis de cada una de ellas.

CAPÍTULO IV. ANÁLISIS Y RESULTADOS DEL TRABAJO

En el presente apartado se presentan la descripción y el análisis de las producciones obtenidas durante las diferentes sesiones de clase realizadas. Para hacer un análisis más compacto se organiza en tres apartados, cada uno relacionado con uno de los significados del número fraccionario (*medida, cociente y razón*) según se determinó además en el diseño de cada una de las actividades.

El análisis se centró en las producciones de cuatro de los nueve equipos de trabajo, porque en estos equipos se posibilitó la interacción entre sus integrantes, la toma de decisiones, la búsqueda de estrategias para solucionar las situaciones, avances significativos en la comprensión de la situación y la reflexión de diferentes ideas puestas a consideración en los espacios de socialización. Para fines prácticos los grupos se nombraron con la letra A y un subíndice ($A_{\#}$), los 4 grupos escogidos son A3, A4, A6 y A7.

La toma de apuntes, fotografías, observaciones y la recolección de los datos se dio simultáneamente, en dos etapas: la primera se obtiene gracias a las respuestas que los estudiantes presentan como solución en las diferentes actividades, haciendo uso de distintas representaciones y lenguajes escritos. La segunda forma de recolectar los datos se realizó mediante el empleo de grabaciones de voz; en consecuencia, en cada equipo de trabajo se instaló una grabadora de sonido con la intención de recolectar las interacciones que tuvo lugar durante el desarrollo de cada actividad, para el análisis final se tuvo en cuenta las grabaciones de los cuatro grupos seleccionados con mejor calidad de audio e iteraciones relacionadas con la solución de la situación problema. En los anexos dos y tres se pueden encontrar diferentes producciones de los estudiantes y fotografías tomadas en el momento en el que se desarrolló la situación problema.

Teniendo en cuenta que el objetivo principal de este trabajo es caracterizar el papel que juegan *los significados de medida, cociente y razón*, se presentan tres apartados y en cada uno de ellos se expone el avance que van logrando los estudiantes a medida que avanzan en el desarrollo de la situación problema. En el primer apartado se analiza el número fraccionario a partir del significado de medida es decir la actividad número uno, en el segundo apartado se analizan juntos los significados de medida y cociente debido a la similitud de los modelos empleados por los estudiantes para resolver las actividades dos y tres, en el tercer apartado se analiza la actividad cuatro.

A medida que se avanza en el análisis de las producciones se puede apreciar como los estudiantes realizan avances en la presentación de sus respuestas mediante procesos de solución y argumentación cada vez más formales, se emplea la siguiente estructura al interior de cada apartado, en primer lugar, en cada una de las actividades se realiza una descripción de lo sucedido en el aula de clase con los estudiantes al momento de trabajar en las diferentes actividades y luego se presenta el análisis específico de las producciones e interacciones entre los estudiantes. En este sentido, a lo largo del análisis se muestran producciones de los cuatro equipos seleccionados y diferentes interacciones entre los estudiantes y el docente-investigador.

4.1. El número fraccionario a partir del significado de *medida*

En esta primera sesión se conformaron los diferentes equipos de trabajo al igual que se finalizó la actividad número uno, durante el proceso de solución los estudiantes realizaron diferentes interacciones entre ellos y el docente, con la finalidad de dar respuesta a cada una de las preguntas. Mediante las diferentes interacciones se pudo observar que los estudiantes realizaron una variedad de preguntas relacionadas con las subdivisiones de las banderas, además, diferentes

equipos presentaron dificultades para su desarrollo total; a modo de ejemplo el grupo A7 no dio respuesta al ítem 1.4 de esta actividad.

En términos generales en un principio los estudiantes presentaron falencias a la hora de identificar magnitudes discretas e indicar sus medidas, no obstante gracias a las representaciones gráficas de cada pregunta y las diferentes interacciones realizadas los estudiantes lograron dar respuesta a la gran mayoría de las respuestas.

4.1.1. Sobre la actividad número uno a partir de la ERM

A continuación, se presenta la descripción de los diferentes procesos de solución que usaron los estudiantes para dar respuesta a la actividad número uno, la cual está orientada al trabajo de los números fraccionarios a partir del significado de medida. Para hacer el análisis de las respuestas a esta pregunta se ha tenido en cuenta que es necesario encontrar la medida de los diferentes fragmentos que componen la bandera, es así como por medio de las diferentes respuestas y procesos de solución utilizados por los estudiantes se han construido diferentes tablas:

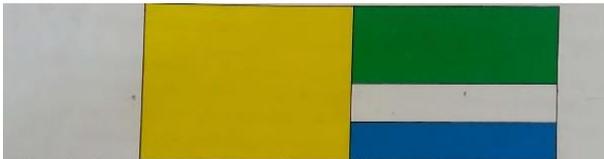
Realizan subdivisiones en el interior de la bandera	No realiza trazos en la bandera
 <p data-bbox="198 1507 807 1564">Si ustedes fueran los representantes de grado quinto, y tuviesen que presentar el diseño de la bandera anterior explique cómo describirían la bandera, en particular, cómo harían referencia a la distribución de colores.</p> <p data-bbox="198 1564 807 1663">el amarillo ocupa $\frac{1}{2}$ el rojo ocupa $\frac{1}{4}$ el blanco ocupa $\frac{1}{4}$ el azul ocupa $\frac{1}{4}$</p>	 <p data-bbox="820 1507 1424 1564">Si ustedes fueran los representantes de grado quinto, y tuviesen que presentar el diseño de la bandera anterior explique cómo describirían la bandera, en particular, cómo harían referencia a la distribución de colores.</p> <p data-bbox="820 1564 1424 1663">Amarillo tiene un medio Verde tiene un cuarto el color blanco tiene un octavo Azul un octavo.</p>
El 75% de los estudiantes	El 25% de los estudiantes

Tabla 5. Respuesta presentada por el equipo A1 en la pregunta 1.1

En este primer ítem los estudiantes debían escribir qué medida correspondía a cada color de la bandera, se evidenció que la gran mayoría de los estudiantes escribieron haciendo uso de un lenguaje natural a esta pregunta y un 25% expresó su respuesta por medio de letras y números.

Por otro lado, el 75% de los estudiantes realizó subdivisiones en el interior de la bandera con el objetivo de conocer la medida de cada fragmento de la bandera, mientras que el 25% en un principio intentó medir con una regla las longitudes de la bandera, al no dar con una respuesta satisfactoria el equipo de trabajo superpuso una regla sobre la bandera, pero no realizaron trazos sobre ella.

En cuanto a los equipos que realizaron las subdivisiones en el interior de la bandera se puede evidenciar que las divisiones resultantes no son del todo congruentes, no obstante, de aquellos que emplearon esta estrategia el 67% logró responder de forma correcta este ítem y tan solo el 33% presentó errores al medir las cantidades más pequeñas de la bandera.

El tipo de estrategia y producciones utilizadas por los estudiantes se aproximan a un nivel de matematización horizontal, dado que los conocimientos informales empleados por los estudiantes se consideran como un elemento dinamizador para adquirir comprensión a la hora de medir las magnitudes de interés.

En el segundo ítem los estudiantes debían tener en cuenta los resultados de la pregunta anterior para escribir la parte de la bandera que le corresponde a cada nuevo color; el equipo A3 escribió la respuesta mediante lenguaje natural y lenguaje formal; el equipo A7 escribió la respuesta solo mediante lenguaje natural; los equipos A4 y A6 escribieron la respuesta solo en

lenguaje formal, pero a diferencia de los primeros equipos estos realizaron la representación de la bandera con su correspondiente medida al revés de la hoja.

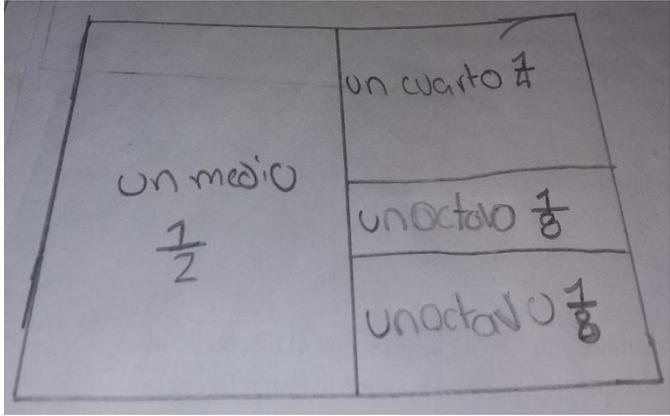
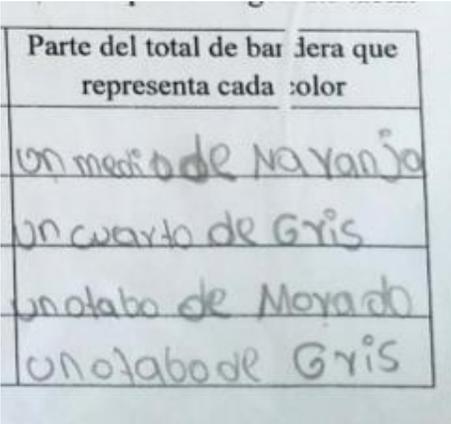
Realizaron representaciones de la bandera	No Realizaron representaciones
	
50% de los estudiantes	50% de los estudiantes

Tabla 6. Respuesta presentada por los equipos A6 y A7 en la pregunta 1.2

Como se puede apreciar la mitad de los estudiantes realizaron diferente representación para dar respuesta a este ítem; con respecto al equipo A4, no presentó de forma correcta la respuesta en la tabla, pero si lo hizo de forma adecuada en la representación gráfica cumpliendo así con uno de los principios de la EMR el cual sostiene que partir de situaciones imaginables y representables para los estudiantes es un factor generador de actividad matematizada.

De acuerdo con el proceso empleado por los equipos A4 y A6 se reconocen nociones del nivel de comprensión referencial debido al uso de representaciones gráficas que emplean para dar respuesta a este ítem.

En el ítem número tres, a diferencia del ítem número uno, solo el equipo A3 realizó trazos sobre la bandera, los otros tres equipos restantes se limitaron a escribir las repuestas; los equipos A6 y A4 escribieron por medio del lenguaje natural y lenguaje formal mientras que el equipo A7 lo hizo solo por medio de lenguaje natural.

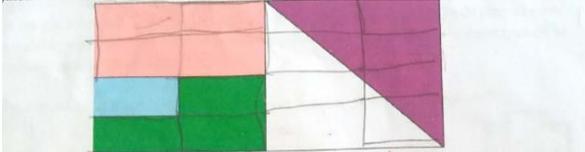
Realizan subdivisiones en el interior de la bandera	No realiza trazos en la bandera
 <p>Los representantes de grado cuarto han señalado que su bandera está conformada por 5 colores, observa la bandera y responde qué cantidad del total de la bandera ocupa cada color.</p> <p>El color rosado ocupa <u>un cuarto</u> del total de la bandera.</p> <p>El color morado ocupa <u>un medio</u> del total de la bandera.</p> <p>El color verde ocupa <u>los dos tercios avos</u> del total de la bandera.</p> <p>El color azul ocupa <u>uno de los avos</u> del total de la bandera.</p>	<p>Los representantes de grado cuarto han señalado que su bandera está conformada por 5 colores, observa la bandera y responde qué cantidad del total de la bandera ocupa cada color.</p> <ul style="list-style-type: none"> • El color rosado ocupa <u>en el Rosado Cabecero</u> del total de la bandera. • El color morado ocupa <u>un cuarto</u> del total de la bandera. • El color verde ocupa <u>en el color verde ca la cuarta</u> del total de la bandera. • El color azul ocupa <u>en el color azul ca la cuarta</u> del total de la bandera.
25% de los estudiantes	75% de los estudiantes

Tabla 7. Respuesta presentada por los equipos A3 y A7 en la pregunta 1.3

Cabe resaltar la forma en la cual el equipo A7 presenta la respuesta a este punto dado que deja explícito por medio del lenguaje natural cuántas veces cabe cada fragmento en el total de la bandera o presenta la medida de determinado fragmento.

Teniendo presente que los diferentes equipos emplean el uso de conocimientos informales y sentido común para dar respuesta a este ítem se pudo observar que los integrantes de estos equipos se acercan en su mayoría a un nivel situacional.

En cuanto al ítem número cuatro se pretendía observar en este punto una variedad de diseños, los equipos A3 y A6 cumplieron con este objetivo debido a que presentaron diseños diferentes con las medidas correspondientes mientras que el equipo A4 pintó la bandera con medidas diferentes y el equipo A7 no presentó repuesta en este ítem.

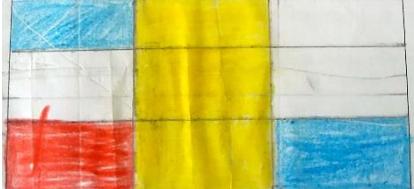
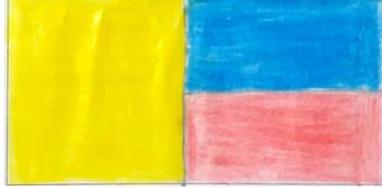
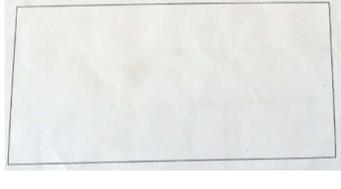
Construyeron la bandera de forma adecuada con distintos modelos	Construyeron la bandera de con medidas diferentes	No construyeron la bandera
		
50% de los estudiantes	25% de los estudiantes	25% de los estudiantes

Tabla 8. Respuesta presentada por los equipos A3, A7 y A7 en la pregunta 1.4

El 50% de los estudiantes logró emplear las estrategias usadas en los ítems anteriores para dar respuesta a esta pregunta, mientras que el otro 50% no logró articular los diferentes métodos que emplearon a lo largo de la actividad para dar solución a esta situación problema. Durante el desarrollo de esta primera actividad se logró apreciar distintas estrategias propuestas por los estudiantes para dar respuesta a los diferentes ítems.

El uso de expresiones cotidianas fue empleado por los estudiantes durante el desarrollo de la situación, a modo de ejemplo durante las interacciones se logró escuchar frases como la mitad, un pedacito, un cuartico, la mitad de la mitad, entre otras; de forma similar, diferentes equipos realizaron semejanzas entre las banderas de la actividad y banderas de diferentes países, estos discursos dan hechos de los principios de realidad y actividad expuestos en la EMR.

4.1.2. Sobre las interacciones en la actividad uno.

A continuación, se exponen las interacciones que fueron seleccionadas por presentar intervenciones con mayores aportes relacionados con la solución de la actividad y mejor calidad de audio en emisiones de los estudiantes, en este sentido, se presenta la emisión de los estudiantes con la letra E, acompañada de un subíndice que indica el integrante del equipo que la realiza, por otra parte, las emisiones del investigador se presentan con la letra P.

Interacciones del equipo A7 en la pregunta 1.1	Interacciones del equipo A4 en la pregunta 1.2
<p>E1: esa bandera se parece la de Senegal. E2: profe, profe, no entiendo aquí. P: aquí le están diciendo que describa la parte que ocupa cada color. P: ¿qué parte de la bandera ocupa el color amarillo? E2: media. P: entonces ustedes escriben el amarillo es tanto. E2: ah, ya. E3: el amarillo ocupa un medio. E2: El verde ocupa un cuarto. E3: ¿cuántas veces está el blanco? E2: 8 y hay una pintada, un octavo. E1: el azul y el blanco es lo mismo.</p>	<p>E1: charolita veme, hacemos uno normal como este amarillo diga y hacemos otro y lo partimos así E2: Daniel dibuja uno así, otro así y este lo partís así. Uno así entero un cuadro normalmente y ahí, lo partís así y de estas sacas un pedacito. E3: y ¿cuántos colores son? E2: 1, 2, 3, 4, diga. E1: ve, si la colocamos así, es más colores tienen que haber 4 colores E2: ¿Daniel no has entendido? es que nomás partimos un pedacito de aquí, así. E2: este lo dejás entero partís este así E1: por ahí, y ahí este lo partís así por toda la mitad, el verde es la mitad E2: y el amarillo la mitad del cuadro.</p>

Tabla 9. Interacciones en actividad uno.

Como se muestra en la tabla 9, en las enunciaciones realizadas por los estudiantes además de dar cuenta de las respuestas de cada ítem, también se puede observar información que manifiesta las acciones y creencias que determinan la postura de cada uno de ellos frente a la situación propuesta. Se observa en la interacción del equipo A7 el principio de realidad gracias a que los estudiantes observan similitudes entre la bandera presente en la actividad y la bandera de un país; de igual forma, mediante las diferentes interacciones se aclaran dudas que permiten hacer deducciones que conllevan a presentar las respuestas de los diferentes interrogantes.

Los equipos A3 y A7 especialmente se acercan con mayor similitud a un nivel de comprensión situacional y las producciones de los equipos A4 y A6 al nivel referencial, no obstante, se asocia a la gran mayoría de los estudiantes con un nivel referencial, dado que, tanto en las producciones como en las diferentes discusiones los estudiantes se apoyan en el uso de gráficas para presentar su respuesta, además en el contenido proposicional de las emisiones

realizadas, se evidencian las indicaciones que hacían los estudiantes a sus compañeros para llegar a la respuesta, del mismo modo el equipo A4 en la pregunta 1.2 deja entrever la intencionalidad que tienen los estudiantes de explicar a su compañero la forma correcta de representar la medida adecuada de cada fragmento de la bandera.

En síntesis, esta actividad deja ver que el contexto en el aprendizaje de las matemáticas juega un papel fundamental, dado que permite a los estudiantes esbozar modelos que contribuyen al aprendizaje de los números fraccionarios en el significado de *medida* y la presentación de los conocimientos adquiridos por el estudiante. Además, se estima que los estudiantes están en un nivel referencial debido a la constante presentación de modelos gráficos y modelos matemáticos.

A continuación, se intenta exponer cómo van surgiendo diferentes estrategias o modelos construidos por los estudiantes para dar respuesta a los ítems planteados en las situaciones que se relacionan con el número fraccionario en los significados de cociente y razón.

4.2. El número fraccionario a partir de los significados de *cociente* y *razón*.

Al iniciar esta sesión se presentaron una serie de preguntas a los estudiantes, relacionadas con las temáticas de la actividad anterior, especialmente sobre qué estrategias o métodos emplearon para resolver cada actividad, este espacio de intervenciones permitió que los estudiantes presentaran y conocieran las diferentes estrategias empleadas por sus compañeros.

Al terminar de escuchar las intervenciones de los estudiantes se procedió a plantear situaciones cotidianas relacionadas con divisiones exactas y seguidamente, situaciones relacionadas con el número fraccionario en el significado de *cociente*. En este proceso se logró observar que los estudiantes resolvían casi de forma inmediata las situaciones relacionadas con

divisiones exactas de números naturales; no obstante, no fueron los mismos resultados al momento de dar respuesta a situaciones que implican números fraccionarios. Este fenómeno se presentó con mayor regularidad al momento de resolver situaciones vinculadas con magnitudes discretas.

4.2.1. Sobre las actividades dos y tres a partir de la ERM

Durante el desarrollo de esta actividad los estudiantes se encuentran con situaciones concernientes a la repartición de diferentes objetos entre varios cursos o estudiantes. En este sentido, y siguiendo el principio de reinención guiada propuesto por la EMR, se han presentado situaciones problema orientadas a permitir una variedad de estrategias de solución debido a libertan con la que cuenta el estudiante.

Con el objetivo de realizar una síntesis de las estrategias realizadas por los estudiantes teniendo en cuenta las diferentes respuestas escritas en sus producciones, se han agrupado de acuerdo con las características pertenecientes a cada proceso de solución implementado por los estudiantes en las actividades 2 y3. Estas estrategias se presentan en la siguiente tabla.

Estrategias	Procedimiento
1	Estudiantes que realizaron divisiones en el dibujo para dar su respuesta
2	Estudiantes que usaron flechas para indicar como repartir un producto.
3	Estudiantes que realizaron dibujos para presentar su respuesta.
4	Estudiantes que presentaron la misma respuesta mediante el uso de diferentes representaciones.

Tabla 10. Estrategias de análisis en la actividad dos.

En seguida, se expone la descripción general de cada una de estas estrategias.

A continuación, se presenta el primer grupo de estrategias en la cual los estudiantes implementan el uso de prácticas relacionadas con la división de la unidad, mediante trazos en el

interior del dibujo dado que todos los equipos usaron esta estrategia para dar respuesta a los diferentes ítems que conforman la actividad. Aun así, no todos los estudiantes usaron las mismas divisiones como se puede apreciar en la siguiente tabla.

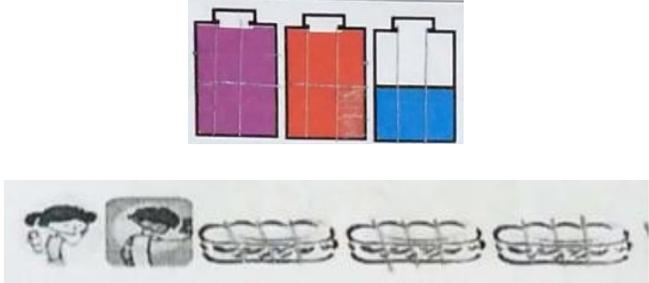
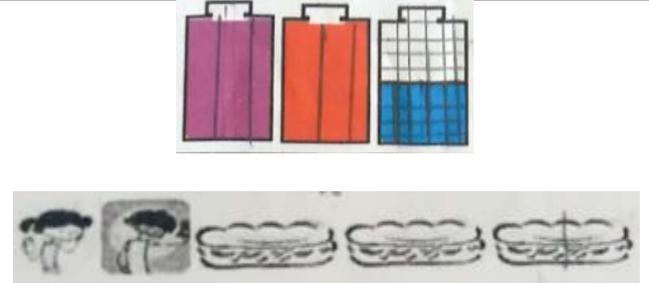
Tipos de divisiones	Tipos de trazos realizados por los estudiantes
Divisiones iguales	
Divisiones distintas	

Tabla 11. Tipos de respuesta en la actividad 2.

Como se puede observar los estudiantes presentan la respuesta a este tipo de preguntas haciendo uso de la misma estrategia, pero de formas distintas. Se considera que esta estrategia fue implementada por los estudiantes gracias a los espacios de interacción que se presentaron durante la socialización de las producciones escritas en la actividad número uno, fortaleciendo el principio de la interacción grupal el cual expone que la matemática se considera como una actividad social donde la reflexión colectiva lleva a niveles de comprensión más altos.

La siguiente respuesta corresponde a la pregunta 3.1 de la actividad 3. Esta estrategia fue implementada por el 25% de los estudiantes y consiste en usar flechas para indicar de forma detallada el proceso que se ha utilizado.

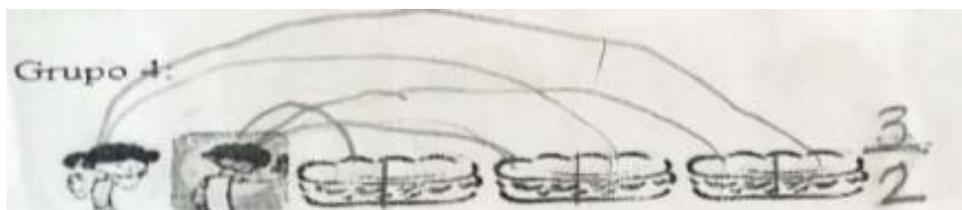


Ilustración 2. Desarrollo de pregunta 3.1

Este equipo de estudiantes al igual que los otros equipos escribieron la respuesta correcta a esta pregunta en sus producciones, pero con distintas características entre ellas, se destaca subdividir todas las figuras mediante líneas en un mismo número fraccionario o en distintos fragmentos.

A continuación, se presenta el grupo de estrategias número tres la cual, se conforma por el tipo de respuesta que incluyen dibujos para evidenciar una posible solución. En este grupo de estrategias se encuentran dos tipos de respuestas: las primeras son las que exige la situación problema y la segundas son aquellas que los estudiantes realizaron como estrategia para hallar la solución a determinadas preguntas. Son diferentes los ítems que exigen la construcción de esquemas o dibujos entre ellos se encuentra el siguiente: ¿gráficamente cómo se puede representar la cantidad de sándwich que le corresponde a cada uno de los miembros de los equipos? (ítem 3.1), se puede observar una variedad de respuestas las cuales se presentan en la siguiente tabla.

Equipo	Respuesta
A3	
A4	

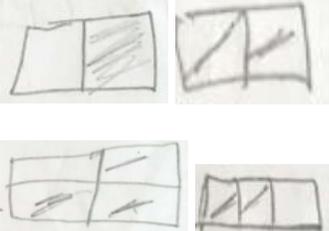
A6	
A7	

Tabla 12. Respuesta presentada por los equipos A3, A4, A6 y A7 en el grupo de estrategias número tres.

Como se puede observar en la tabla anterior los equipos hacen diferentes dibujos para expresar la respuesta a cada ítem; a modo de ejemplo, a la hora de repartir el primer sándwich los equipos A3 y A7 realizan un dibujo lo dividen por el centro en dos partes iguales y subrayan una de las dos mitades indicando el número fraccionario *un medio*, mientras que los equipos A4 y A6 dividen la unidad en seis partes y seleccionan tres de ellas e indican el número fraccionario tres sextos.

Este procedimiento se repite a la hora de repartir los sándwiches del equipo tres con la diferencia que en esta ocasión solo el equipo A6 lo hizo de forma distinta a los demás equipos, dado que este dividió la unidad en doce partes iguales y seleccionó 6 de ellas, mientras que los otros equipos dividieron la unidad en cuatro partes iguales y pintaron tres de ellas expresando el número fraccionario tres cuartos.

Vale la pena resaltar que el equipo A6, a la hora de presentar la respuesta, escribió el número fraccionario tres cuartos por lo que se infiere que presentó dificultades para graficar ese número fraccionario. Por otra parte, como se puede observar en la tabla, todos los equipos presentaron errores a la hora de dibujar la respuesta del último ítem a pesar de haber escrito la respuesta correcta anteriormente, es posible que esto se deba a la diferencia entre esa

representación gráfica y las anteriores puesto que las anteriores corresponden a los fraccionarios propios y la última representación a fraccionarios impropios, por tanto hasta este punto se considera que los estudiantes presentan dificultades a la hora de graficar números fraccionarios impropios.

Con respecto al siguiente grupo de repuestas, aquí se encuentran gráficas realizadas por los diferentes equipos utilizadas como herramienta para presentar sus respuestas, en la primera columna se indica el grupo que realizó el procedimiento, en la segunda columna se presenta la pregunta y en la tercera el dibujo realizado.

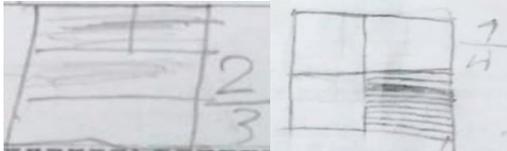
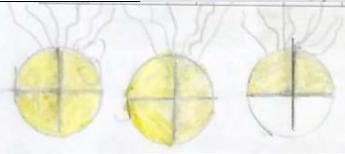
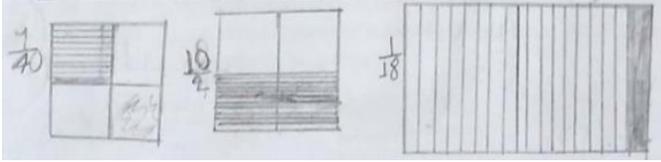
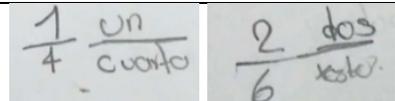
Grupo	Pregunta	Respuestas
A4	2.2	
	3.4	
A6	2.2	
	3.4	
A7	2.2	

Tabla 13. Segundo grupo de respuestas presentada por los equipos A4, A6 y A7 en el grupo de estrategias número tres.

Se destaca en la tabla la similitud entre el proceso empleado por los estudiantes de los equipos A4 y A6 considerando que ambos emplean el dibujo de piñas para hallar la respuesta a la pregunta 2.2; sin embargo, el equipo A4 divide todas las unidades en cuatro partes iguales y escribe como respuesta diez cuartos, mientras que el equipo A6 divide dos piñas en cuatro fragmentos iguales, la tercera piña la divide por la mitad, subraya una de las dos mitades y escribe como respuesta dos piñas y media. Este procedimiento da cuenta de las distintas estrategias que posibilita el trabajo con situaciones enmarcadas en la EMR.

Los equipos A4, A6, y A7 hicieron uso de recuadros para presentar la respuesta de la pregunta 2.2, los tres equipos escribieron la respuesta un cuarentavo, pero solo el equipo A6 presentó la representación gráfica de todos los ítems. Se evidencia en este grupo de estrategias un mayor dominio de los números fraccionarios impropios, tanto en las representaciones gráficas como en la escritura de las expresiones numéricas que los estudiantes emplean, dado que presentan distintas respuestas en las cuales el numerador es mayor que el denominador.

El siguiente grupo de estrategias se compone por el grupo de producciones que contienen diferentes representaciones al momento de presentar una respuesta ya sea mediante el uso de gráficos, expresiones numéricas o escritas, debido a que los equipos emplearon distintas representaciones durante el desarrollo de las actividades. La siguiente tabla ilustra las respuestas que cumplen con estas características.

Equipo	Pregunta	Respuesta
A3	2.2	

A4	2.2	
A6	2.2	
A7	3.1	

Tabla 14. Respuesta presentada por los equipos A3, A4, A6 y A7 en el grupo de estrategias número cuatro.

Al igual que la tabla anterior, en esta tabla se pueden observar diferentes respuestas presentadas por los estudiantes detallando el grupo y el número de la pregunta. Tres de los equipos trabajaron con representaciones gráficas y el otro grupo con expresiones del lenguaje natural y lenguaje formal. Las producciones en este grupo de estrategias se relacionan con el principio de interrelación presente en la EMR gracias a que las respuestas no solo se presentan con un lenguaje formal, sino también, mediante el uso gráficas y el lenguaje natural.

En las producciones de los estudiantes no se encontraron respuestas con más de dos representaciones en un solo ítem, pero si se presentaron casos en los cuales los estudiantes realizaron distintas representaciones en una misma actividad: Las expresiones más usadas por los estudiantes son las representaciones gráficas, lenguaje natural y lenguaje formal.

De acuerdo con la EMR el uso de distintos modelos (materiales, lingüísticos, esquemas, diagramas y símbolos) que emergen de la propia actividad matemática de los estudiantes son herramientas que ayudan a los estudiantes para representar y organizar diferentes contextos y situaciones, en este sentido, se puede observar que la mayoría de los equipos emplearon el uso de

representaciones gráficas y lenguaje formal, lo anterior no solo permite observar el principio de interrelación sino también el principio de actividad, debido a que este principio propone modelizar, simbolizar, esquematizar situaciones que conlleven al estudiante a la reflexión.

4.2.2. *Sobre las interacciones en las actividades dos y tres.*

En relación con las interacciones que se presentaron durante el desarrollo de las actividades dos y tres, se presenta continuación algunas de las discusiones que surgieron durante su desarrollo, el contenido proposicional de las distintas conversaciones permitió la identificación de principios de la EMR como se puede apreciar en la tabla 15. Al igual que en la tabla de análisis anterior las emisiones de los estudiantes se representan con la letra E, acompañada de un subíndice que indica el integrante del equipo que la realiza y las emisiones del investigador se presentan con la letra P.

Interacciones del equipo A3 en la pregunta 3.1	Interacciones del equipo A3 en la pregunta 3.1
E1: ya sabemos cómo lo vamos a hacer, hay 6 niños tenemos que ver los sándwiches y partílos en la mitad.	E2: aquí hay 4 niños y tres panes
P: De este ¿qué cantidad le toca a cada estudiante?	E1: dos medios
E2: un medio.	E2: oye todas tiene que ser iguales
P: un medio es cierto, pero ¿cómo se representa un medio mediante un dibujo?	E1: si pues, crees que esos cuatro niños se van a comer todo eso, tienes que sácalo por medio
E2: hacemos un cuadro.	E2: los dos, de dos y uno queda de medio
E1: y pintamos medio.	E1: de aquí quedan 6 partes y ¿las dos partes que quedan?
P: exacto, entonces hacen el dibujo de lo que lo toca a cada niño y así hacen con los otros.	E2: ¡ay! Ya sé con la que queda, sacamos cuatro partes una aquí, una aquí, otra aquí, sacamos cuatro partes y a cada uno le toca de medio y un cuarto
P2: a cada uno le toca un medio.	E2: profe, a cada niño le toca un medio más un cuarto.

Tabla 15. Interacciones en actividad número dos

Las conversaciones que se observan en la tabla anterior dan cuenta de la importancia que tiene el principio de interacción a la hora de abordar situaciones problemas que parten de la realidad; se puede observar que los estudiantes expresan, mediante Actos de Habla, que todos los fragmentos en los cuales se divide la unidad deben ser iguales y lo ponen en práctica a medida que se encuentran con diferentes situaciones. Por tanto, se infiere que en este caso el estudiante tiene la intención de comunicar sus compañeros la necesidad de dividir en partes iguales cada uno de los productos, lo cual son nociones importantes para la comprensión del número fraccionario en el significado de *cociente*.

Referente a las expresiones que emplean los estudiantes se dejan de lado palabras como “un pedacito”, “una partecita”, “un cuadrito” y se evidencia con más frecuencia el uso de palabras tales como “medio”, “partes”, “un cuarto”, lo que implica una mayor claridad a la hora de referirse a un fragmento dado; de forma similar, los estudiantes emplean con frecuencia el uso de distintas gráficas para dar indicaciones a la hora de hacer reparticiones o justificar sus respuestas, en este sentido se asocia a las producciones empleadas por los estudiantes dentro de un nivel referencial.

En resumen, las gráficas construidas por los estudiantes han tenido una mayor organización y claridad por parte de los diferentes equipos, a medida que estos van avanzando en el desarrollo de las actividades; de igual forma, los estudiantes no solo emplean cuadros y rectángulos, si no también dibujos de objetos relacionados con el contexto de la situación a modo de ejemplo. Se encuentra las piñas dibujadas por los equipos A4 y A6 como apoyo para dar respuesta a la pregunta 3.4 de la actividad refrigerio, de esta forma se pudo inferir que los estudiantes están realizando modelos y esquemas que parten de la realidad y se encuentran enmarcadas en el principio de realidad y reinención guiada planteado por la EMR. Al mismo tiempo se evidencia en las

emisiones realizadas por los estudiantes un lenguaje más formal al presentado en la actividad número uno.

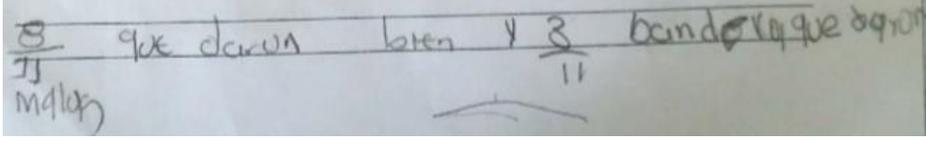
4.3. El número fraccionario a partir de diferentes significados.

Esta actividad fue realizada en el restaurante escolar debido a que cuenta con mayor espacio que el salón de clases, lo que permitió una mayor claridad en las grabaciones y a su vez, optimizar al tiempo de trabajo. Se entregó y explicó a los equipos de trabajo los diferentes ítems que conforman la actividad, no obstante, se presentaron diferentes interacciones entre el docente y los equipos de trabajo con el objetivo de dar una mayor claridad a los diferentes ítems.

Se observó durante el desarrollo de esta actividad el empleo de diferentes estrategias y discusiones para justificar las respuestas presentadas, entre las diferentes estrategias se encuentra el uso de dibujos y la escritura de la cantidad total de colores en cada bandera mediante números o letras.

4.3.1. Sobre la actividad número cuatro a partir de la ERM

Debido a que esa actividad solo cuenta con dos preguntas principales se analiza cada una por separado. Se destaca de la pregunta 4.1 el siguiente ítem ¿Qué número fraccionario representa las banderas que no se descalificaron? Esto gracias a que el 100% de los equipos presentó la respuesta correcta, aunque no todos la expresaron de la misma forma, como se puede observar en la siguiente tabla.

Equipo	Pregunta	Respuesta
A3 y A4	4.1	

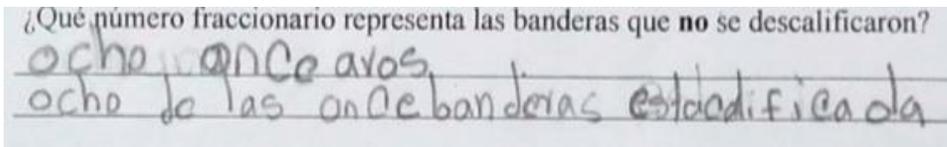
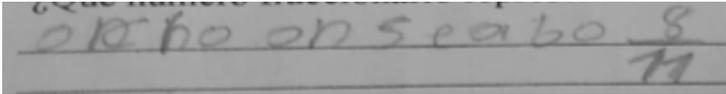
A6	4.1	
A7	4.1	

Tabla 16. Respuesta presentada por los equipos A3, A4, A6 y A7 en la pregunta 4.1

Los equipos A3 y A4 además de escribir en lenguaje formal la respuesta también justifican por qué el resultado es tres octavos, de forma similar lo hace el equipo A6 al presentar su respuesta por medio de lenguaje natural, además sostienen que esa es la respuesta porque “ocho de las once banderas están calificadas”. Por otro lado, el equipo A7 presenta la respuesta usando representaciones diferentes.

Referente a la pregunta número dos se presentan a continuación distintas características empleadas por los estudiantes durante el proceso de solución.

Se destaca la respuesta del equipo A4 a ítem c, ¿Si una bandera tiene 10 cm^2 en cuanto tiempo la pintaría el estudiante de 8º? debido a que hace una relación de minuto a minuto entre el tiempo que transcurre y la cantidad de bandera que se ha pintado.

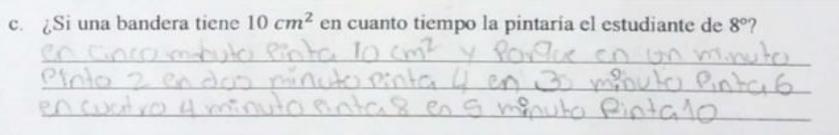


Ilustración 3. Respuesta presentada por el equipo A4 en la pregunta 4.1

En 5 minutos pinta 10 centímetros cuadrados porque en un minuto pinta dos, en dos minutos pinta 4, en tres minutos pinta 6, en cuatro minutos pinta 8, y en 5 minutos pinta 10.

Todos los equipos presentaron la respuesta correcta a esta pregunta; no obstante, los estudiantes del equipo A4 son los estudiantes que presentaron con mayor detalle el porqué de su respuesta. Adicionalmente se pudo observar una serie de dibujos construidos por los equipos A3 y A4, por medio de los cuales los estudiantes intentaron presentar y justificar su respuesta.

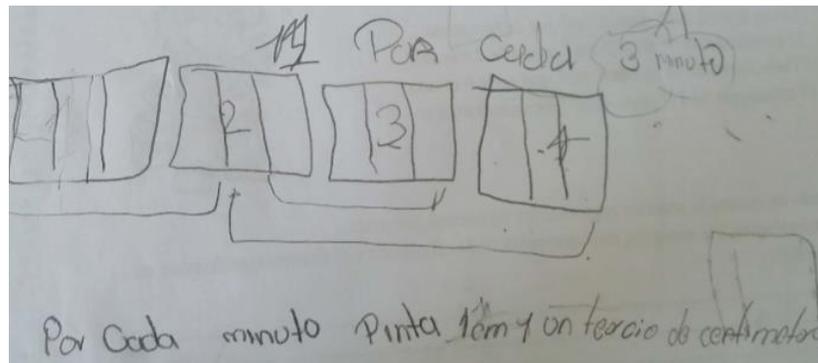


Ilustración 4. Respuesta presentada por el equipo A3 en la pregunta 4.2

Se puede observar como el equipo A3 presenta la razón entre pintar y tiempo, como si este fuera un reparto, además se apoya en líneas para indicar qué fragmento de bandera corresponde a cada minuto. De acuerdo con la EMR el proponer modelos de solución asociados al significado, para comparar números fraccionarios es una característica principal del nivel de comprensión referencial, el cual se evidencia también en los dibujos presentados por el equipo A4 en el desarrollo de esta actividad.

En cuanto a los demás ítems que conforman esta pregunta los estudiantes resolvieron en su mayoría las pregunta y establecieron la razón entre pintar y tiempo, a modo de ejemplo se presenta la respuesta del equipo A6 al ítem a, ¿Qué relación hay entre los cm^2 que pinta cada estudiante y el tiempo que demora en hacerlo?

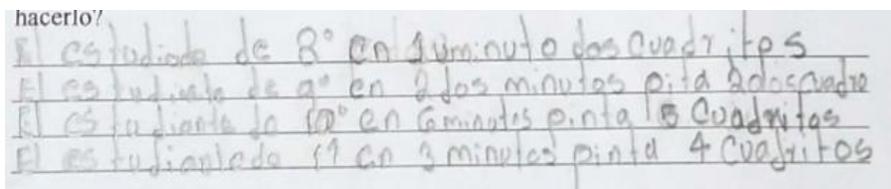


Ilustración 5. Respuesta presentada por el equipo A6 en la pregunta 4.2

Se puede observar en la imagen como los estudiantes describen la cantidad de centímetros cuadrados que se pinta por minuto en cada situación. El 50% respondió de forma similar esta pregunta, el 25% no presentó la respuesta y el 25% restante conformado por el equipo A4 presentó como respuesta la razón entre pintar y tiempo como un número fraccionario.

4.3.2. Sobre las interacciones de la actividad número cuatro.

Las interacciones también jugaron un papel protagónico a la hora de identificar los procesos realizados por los estudiantes, dado que mediante las discusiones que se dieron entre los entre ellos se logró observar cómo establecieron relaciones entre la cantidad de pintada y el tiempo empleado para hacerlo, una muestra de estas interacciones se presenta a continuación.

Interacciones del equipo A6 en la pregunta 4.2	Interacciones del equipo A7 en la pregunta 4.1
<p>E1: si esta pinta cuatro en dos, entonces el otro en tres pintas seis en cuatro pintas ocho y en seis, pinta diez. E2: pinta diez en cinco P: ¿qué estudiante pinta más rápido? E3: el de octavo P: ¿por qué el de octavo pinta más rápido? E3: porque pinta en dos minutos. E3: pinta dos cuadritos por cada minuto, entonces en tres minutos serian seis.</p>	<p>P: la pregunta es ¿cuántas banderas hay en total? E1: once P: y ¿Cuántas no descalificaron? E1: ocho, porque descalificamos esta, esta y esta. E2: no, descalificamos vea, la de tercero, la de décimo y esta es la de séptimo. P: y ¿Cuántas no descalificaron? E1: siete E2: ocho E1: siete, porque ve, uno dos y tres E2: si pues, quedaran ocho porque son 11 E1: a, si, ocho. P: y ¿cómo se escribe en forma de número fraccionario?</p>

	<p>E1: ocho onceavos P: ¿por qué ocho onceavos? E3: porque hay once banderas y ocho no están descalificadas.</p>
--	--

Tabla 17. Interacciones en la actividad número cuatro.

En la tabla se puede observar cómo los estudiantes del equipo A6 establecen relaciones entre la cantidad de centímetros cuadrados que se pinta y el tiempo que se emplea, sin hacer uso de dibujos para apoyarse, mientras que en las dos actividades pasadas los estudiantes en su gran mayoría hicieron uso de gráficos o la escritura de números para llegar a la respuesta. De forma similar, se puede observar en el contenido proposicional de otras interacciones cómo los estudiantes se dirigen a sus compañeros con la intención de justificarles él porque que de su respuesta.

Se observó que los estudiantes justifican y explican tanto de manera escrita como oral el proceso que realiza para obtener la respuesta adecuada, lo que les permite a su vez, ordenar y comparar los números fraccionarios e identificar qué niño pinta más rápido. De acuerdo con la EMR en el nivel general se encuentran aquellas respuestas en las cuales se evidencia el empleo de descripciones, conceptos y procedimientos personales, debido a que las producciones y las proposiciones cumplen con estas características se asocia a esta actividad a un nivel general.

En resumen, en el desarrollo de esta actividad los estudiantes emplearon tanto el lenguaje formal como el lenguaje natural para presentar sus respuestas a la medida que establecían relaciones entre las gráficas que construyeron, de igual forma, mediante sus interacciones justificaron a sus compañeros porqué sus respuestas son correctas y descartaron otras posibles soluciones que surgieron debido a observaciones que en un principio no fueron adecuadas, lo que refleja el impacto positivo de los principios de realidad e interacción.

A modo de cierre, como se ha indicado en la introducción de este capítulo mediante el análisis a las producciones y el discurso de los estudiantes se logró la descripción y análisis de las producciones obtenidas durante las diferentes sesiones de clase realizadas. En la actividad número uno los estudiantes lograron establecer relaciones entre los escenarios planteados en la actividad y el contexto que los rodea, lo que permite identificar el cumplimiento de aspectos teóricos implementados en la actividad y los objetivos propuestos, dado que se refleja el principio de realidad planteado en la EMR.

De igual forma, partiendo de los elementos discursivos, se encontró que en esta primera actividad los estudiantes se refieren al número fraccionario mediante el empleo de un lenguaje informal relacionado con los ítems propuestos. De acuerdo con las interacciones de los estudiantes y los procesos empleados sus producciones, se asignó a los estudiantes en un nivel de comprensión referencial debido al constante empleo de gráficos para identificar distintas medidas.

Al analizar las actividades dos y tres se identificó el empleo de estrategias similares para trabajar con los significados de *cociente* y *razón*, estas estrategias fueron agrupadas para un mayor análisis, se encontró que los estudiantes presentaron nuevos modelos y utilizaron estrategias similares a las de la actividad número uno para esquematizar y solucionar las actividades dos y tres, con una mayor precisión y organización al momento presentar las respuestas, en este sentido se logró evidenciar los principios de realidad y reinención guiada.

La organización y presentación se evidencia también en sus interacciones debido a que se refieren la razón y el cociente de situaciones mediante el empleo de números fraccionarios en un sentido formal. En cuanto al nivel de comprensión se logró observar que los estudiantes continúan dentro de un nivel referencial debido al constante empleo de gráficos, no obstante, se observa

nociones de un nivel general debido a que los estudiantes en varias ocasiones emplean las mismas estrategias en distintas situaciones.

En la actividad número tres los estudiantes establecen relaciones formales entre la situación y el número fraccionario, a partir de su producciones e interacciones se evidencia el principio de realidad, en esta actividad al igual que en las anterior los estudiantes emplearon dieres representaciones parara presentar y justificar su respuestas al mismo tiempo que utilizaron los modelos construidos en las anteriores actividades lo que permitió se reconocer nociones de un nivel comprensión general.

En síntesis, mediante el empleo de elementos del contexto y conocimientos previos los estudiantes presentaron respuestas con distintos modelos, que pasan por los niveles situacional, referencial, foral y general, lo cual se evidencia no solo en los leguajes natural y formal, sino también en las representaciones gráficas y el discurso empleado en las diferentes interacciones que surgieron durante el proceso de resolución de la situación problema.

CONCLUSIONES

En este apartado se presentan reflexiones generales referentes al desarrollo de una situación problema enmarcada en la Educación Matemática Realista, mediante el empleo del número fraccionario y los significados de *medida*, *cociente* y *razón*; implementada con estudiantes de grado quinto en una institución de carácter público en el distrito de Buenaventura, se espera que estas reflexiones sean significativas para maestros en formación, maestros en ejercicio e investigadores en el campo de la Educación Matemática.

Las conclusiones son presentadas a partir de las diferentes producciones e interacciones realizadas por los estudiantes, se apoyan en investigaciones asociadas a la EMR, el análisis del discurso y el MEN. Entre ellas se señalan: Bressan et al. (1973), Vanegas (2013), Quintero (2006), Vizcarra y Sallán (2005), Cisneros et al. (2017), Searle (2005), Dijk (1996), MEN (2006). Partiendo de estas investigaciones se toman los aportes que constituyen para el diseño e la situación y el análisis de los modelos presentados por los estudiantes en sus producciones, lo que permito cumplir el primer objetivo específico articulando una serie de aspectos didácticos matemáticos y curriculares para el diseño, implementación y análisis de las actividades.

El segundo objetivo específico se enfoca en presentar la incidencia que tiene el trabajo con tareas enmarcadas en la EMR, en esta dirección, uno de los principales logros en este trabajo fue posibilitar en los estudiantes la construcción y socialización de distintos modelos matemáticos relacionados con el contexto que los rodea, a partir de notaciones sencillas en las cuales los conocimientos previos e informales han brindado un rol fundamental.

En este sentido, los principios planteados por la EMR se evidenciaron durante el desarrollo y análisis de las producciones, no obstante, se destacan los principios de interacción, realidad y actividad, gracias a que mediante estos principios se posibilitó evidenciar procesos de matematización tanto horizontales como verticales que, a su vez, dieron origen a nuevos modelos y estrategias de solución.

De igual forma, en las producciones e interacciones de los estudiantes se observaron diferentes niveles de comprensión especialmente el situacional y el referencial, dado que, los estudiantes toman elementos del contexto como punto de partida para construir su actividad matemática, promoviendo el empleo de estrategias informales y el uso del sentido común para el desarrollo de las actividades propuestas.

En cuanto a las expresiones empleadas por los estudiantes se pudo observar que estos lograron avances significativos durante las diferentes interacciones que se llevaron a cabo en el desarrollo de la actividad, dado que, en principio los estudiantes hacían uso de un lenguaje situacional y a medida que fueron culminando las actividades emplearon palabras más formales para referirse a un número fraccionario de acuerdo con su significado. De esta forma, se presenta el tercer objetivo específico en el cual se análisis no solo a las producciones escritas de los estudiantes sino también a sus interacciones, teniendo presente el contenido proposicional, el sentido y las intenciones que presentan los estudiantes al momento de trabajar el número fraccionario partiendo de diferentes significados enfocados a la EMR.

Referente a las principales dificultades que surgieron durante el desarrollo de las actividades asociadas a los diferentes significados del número fraccionario, se encontró que estas se manifiestan con mayor frecuencia a la hora de trabajar unidades continuas y con menores

dificultades al trabajar con unidades discretas. Como se mencionó en el capítulo cuatro, los estudiantes al inicio de la actividad no representaron de forma congruente las diferentes partes de un número fraccionario, a pesar de que este procedimiento fue cada vez más adecuado durante el transcurso de las sesiones llegando implementar el uso de herramientas como la regla, al finalizar la situación problema no todos los estudiantes dividían la unidad en partes iguales a la hora de representar un número fraccionario.

En lo que respecta a la implementación de la situación problema las dificultades se presentaron al momento de hacer las grabaciones de voz, debido a que los estudiantes al notar la presencia de los grabadoras bajaban la voz cuando debatían posibles opciones de respuestas con sus compañeros o pronunciaban pocas palabras, lo que dificultaba seguir las secuencias de los Actos de Habla que estos enunciaron durante el desarrollo de la situación, de ahí, que el docente se viera en la necesidad de formular preguntas que permitieron a los estudiantes argumentar sus respuestas.

Se recomienda trabajar las actividades que conforman esta situación problema en parejas o equipos de tres, debido a que, la vinculación de más estudiantes en un grupo de trabajo puede ser un factor de distracción que evite la culminación de estas en el tiempo establecido y de esta forma, al finalizar cada actividad los estudiantes presenten sus producciones ante toda la clase con el fin de identificar nuevos modelos matemáticos, cumpliendo de esta forma los principios de interacción, reinención guiada y actividad propuestos por la EMR.

En este trabajo de grado se describen aspectos a tener en cuenta en el diseño e implementación de situaciones problema enfocadas al contexto del estudiante y las matemáticas

del aula escolar, brindando herramientas a docentes, investigadores y comunidad académicas para favorecer la enseñanza de los números fraccionarios a partir del enfoque de la EMR.

En general, se reconoce que los estudiantes de grado quinto que participaron en el desarrollo de esta situación problema se destacaron por trabajar en diferentes niveles de comprensión partiendo inicialmente de nivel situacional el cual, hicieron uso de elementos del contexto y conocimientos previos para presentar sus respuestas, mediante la construcción de modelos acordes a cada actividad se evidencio un nivel referencial y finalmente el trabajo en un nivel general debido a que se apoyaron de los conocimientos y modelos obtenidos en actividades pasadas para dar solución a nuevas actividades.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Alsina, À. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado (pp. 119-128). Barcelona- España. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Austin, J. (2005). Emisiones Realizativas. En: La búsqueda del significado: Lecturas de filosofía del lenguaje (pp. 415- 430). Madrid, España. Tecnos

Berrio, M. D. (2012). Elementos que intervienen en la construcción que hacen los estudiantes frente a los modelos matemáticos. El caso del cultivo de café. *Unpublished master's degree dissertation. Universidad Nacional de Colombia.*

Bressan, A. M., Gallego, M. F., Pérez, S., & Zolkower, B. (2016). Educación Matemática Realista Bases teóricas. *Educación*, 63. Recuperado de http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teor%C3%ADa_EMER-Final.pdf

Cisneros, J. W., & Castro Gordillo, W. F. (2017). Procesos de objetivación relacionados con la razón y la relación parte-todo mediante la medición: un estudio con niños de séptimo grado. Recuperado de http://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/7532/1/CastroWalter_2017_procesosobjetivacionrazonpartetodo.pdf

Claros, O. (2018). Orden y Equivalencia de Fracciones: Una Experiencia de Aula en Grado Quinto de Educación Básica Primaria. Bogotá D.C

Cohen, L. & Manion, L. (1990). Métodos de investigación educativa. Madrid, España: La Muralla.

Fernández, J. M. L., & Estrella, A. V. (2007). Un ejemplo de la utilidad de los contextos en la matemática realista: los algoritmos de suma y resta por columnas. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (44), 95-103.

Henao, S. & Vanegas, J. (2012). Educación matemática realista: la modelación matemática en la producción y uso de modelos cuadráticos. *Actas del VII CIBEM ISSN, 2301(0797)*, 2883.

MEN (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. *Recuperado de: <https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-116042.html>*

Meza, A., & Barrios, A. (2010). Propuesta Didáctica para la Enseñanza de las Fracciones. *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 11 ,674-682.

Muñiz, M. (2010). Estudios de caso en la investigación cualitativa. *División de estudios de posgrado universidad autónoma de nuevo León. Facultad de psicología. México*, 1-8.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista Ema*, 8(2), 157-182.

Pinilla, M. I. F. (2009). Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. *Volumen*, 25.

Quintero, A. (2006). Interpretaciones de las fracciones. *Recuperado de https://www.academia.edu/8272329/Interpretaciones_de_las_fracciones*

Rabino, A., y Bressan, A. (2001). Valor de los problemas en contextos con sentido para los alumnos. *Novedades Educativas*, 1-9.

Searle (2005). Una taxonomía de los actos ilocucionarios. En: La búsqueda del significado: Lecturas de filosofía del lenguaje (pp. 415- 430). Madrid, España. Tecnos.

Searle, J. (2009). Actos de Habla ensayo de filosofía del lenguaje. Madrid, España: Ediciones Cátedra.

Stake, R.E. (1994). Case studies. En N.K. Denzin y Y.S. Lincoln (Dirs.). *Handbook of qualitative research* (pags. 236-247). London: Sage.

van Dijk, T. A. (1980) Texto y contexto: semántica y pragmática del discurso. Madrid, España: Ediciones Cátedra

van Dijk, T. A. (1996). Estructuras y funciones del discurso: Una introducción interdisciplinaria a la lingüística del texto y a los estudios del discurso. México, D.F: Siglo XXI editores.

Vera Vélez, L. (2008). La investigación cualitativa. Universidad Interamericana de Puerto Rico, http://www.trabajosocial.unlp.edu.ar/uploads/docs/velez_vera__investigacion_cualitativa_pdf.pdf consultado en enero 16 de 2020.

Vizcarra, R. E. (2002). Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde el modelo cociente. En *Investigación en educación matemática: Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Almería, 18-21 septiembre 2001*. (pp. 149-158). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Vizcarra, R. E., & Sallán, J. M. G. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 1, 17-35.

Zarzar, C. B. (2013). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: Una propuesta de enseñanza en dos ambientes. *Revista Horizontes Pedagógicos*, 15(1).

ANEXOS

Anexo 1. Situación problema

Situación. Semana deportiva

Nombre: _____

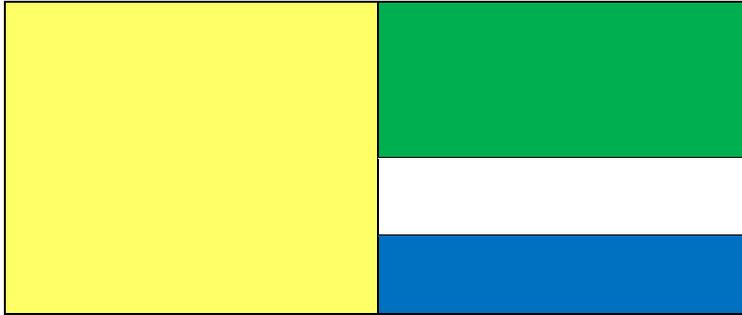
Fecha: _____

Actividad 1: Diseñando banderas

En la semana deportiva que se realiza en una institución educativa se le solicitó a cada grado la construcción de una bandera que debe cumplir con las siguientes reglas para entrar en una competencia:

- ✓ Las banderas solo pueden tener líneas rectas.
- ✓ Cada bandera debe tener un mínimo de 3 colores.
- ✓ La bandera no puede tener círculos o dibujos en su interior.

1.1. En la presentación de las banderas, el grado 5° mostró el siguiente diseño:

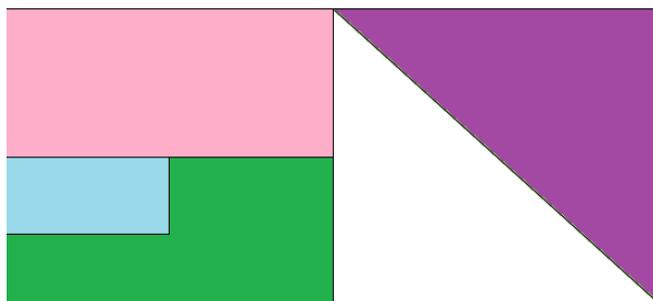


Si ustedes fueran los representantes de grado quinto, y tuviesen que presentar el diseño de la bandera anterior explique cómo describirían la bandera, en particular, cómo harían referencia a la distribución de colores.

Colores de la bandera que tiene la opción N°1.	Colores de la bandera que tiene la opción N°2.	Parte del total de bandera que representa cada color
Amarillo 	Naranja 	
Verde 	Gris 	
Blanco 	Morado 	
Azul 	Gris 	

1.2.Teniendo en cuenta que los estudiantes de grado quinto quieren presentar dos opciones de bandera con el mismo diseño, pero con colores diferentes completa la siguiente tabla.

1.3.El siguiente grupo en presentar su bandera fue el grado cuarto, quienes realizaron el siguiente diseño:



Los representantes de grado cuarto han señalado que su bandera está conformada por 5 colores, observa la bandera y responde qué cantidad del total de la bandera ocupa cada color.

- El color rosado ocupa _____ del total de la bandera.
- El color morado ocupa _____ del total de la bandera.
- El color verde ocupa _____ del total de la bandera.
- El color azul ocupa _____ del total de la bandera.

1.4.Los representantes de grado sexto hicieron la presentación verbal de su bandera y propusieron que durante la exposición uno de sus compañeros la dibujaría. La bandera se compone de $\frac{1}{3}$ de color amarillo, $\frac{2}{9}$ de color azul, $\frac{1}{9}$ de color rojo y el resto de color blanco ¿cómo crees que sería el diseño de la bandera? Dibújalo en el recuadro.

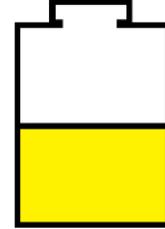


Actividad 2. Reparto de pinturas

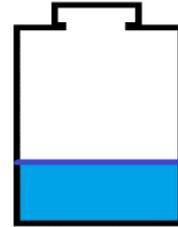
Una vez diseñadas las banderas, la institución procede a entregar las botellas de pintura, que contienen 30 centímetros cúbicos, a los diferentes grados.

2.1. A los grados primero, segundo y tercero, se les entrega medio botella de pintura color amarillo y un tercio de la botella de pintura azul. Si a cada grado le corresponde la misma cantidad de pintura, responde:

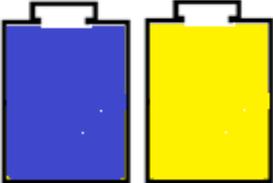
a. ¿Qué cantidad del galón de pintura amarilla le corresponde a cada grado?

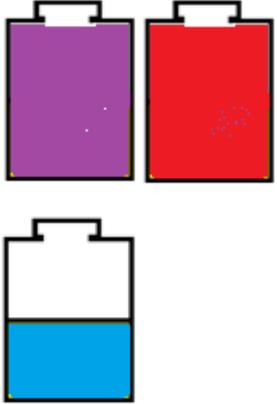


b. ¿Qué cantidad del galón de pintura azul le corresponde a cada grado?



2.2. Las siguientes botellas de pintura son para repartirlas y entregarlas a diferentes grados. Observa y completa la siguiente tabla teniendo en cuenta qué cantidad de las botellas de pintura le corresponde a cada grado si deben repartirlo en partes iguales.

Grupos	Cantidad de pintura total	Grados	Cantidad que le corresponde a cada grado
Grupos 1		1°, 2°, 3°, 4°	
Grupos 2		5°, 6°, 7°	

Grupos 3		6°,7°,8°, 9°,10°, 11°	
-----------------	---	-----------------------------	--

- a. Teniendo en cuenta la tabla anterior, si a ustedes les correspondiera repartir la parte de pintura que le pertenece a cada grupo entre sus integrantes ¿Cómo repartirán la pintura entre cada curso teniendo en cuenta que cada curso tiene 10 estudiantes?

- b. ¿En cuál de los diferentes grupos que muestra la tabla le corresponde mayor cantidad de pintura a sus integrantes y a qué grupo le corresponde menor cantidad?

Actividad 3. Refrigerio

Durante el diseño de las banderas para la semana deportiva los estudiantes reúnen dinero y compran entre todos sándwiches. A la hora del refrigerio se encuentran en **grupos** para compartirlos.

3.1. En las siguientes ilustraciones se observan cuatro **grupos** y el número de sándwiches que tienen para compartir.

Grupo 1:



Grupo 2:



Grupo 3:



Grupo 4:



Responde las siguientes preguntas teniendo en cuenta la información anterior.

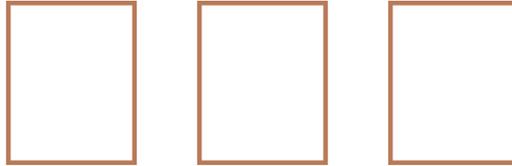
a. Gráficamente cómo se puede representar la cantidad de sándwich que le corresponde a cada uno de los miembros de los grupos.

b. Si la cantidad de sándwich que le corresponde a cada grupo, debe ser repartida entre sus integrantes en partes iguales ¿Qué porción le corresponde a cada integrante de cada grupo?

c. ¿Cuál es el grupo al que le corresponde la porción más pequeña de sándwich?

3.2. Otros estudiantes decidieron comprar un producto diferente a los sándwiches. Entre ellos, cinco estudiantes prefieren consumir chocolatina, por lo que reunieron su dinero y logran comprar tres barras de chocolate. Si se deben repartir las barras de chocolate de forma equitativa entre los cinco niños, ¿Qué cantidad de barra de chocolate le corresponde a cada estudiante?

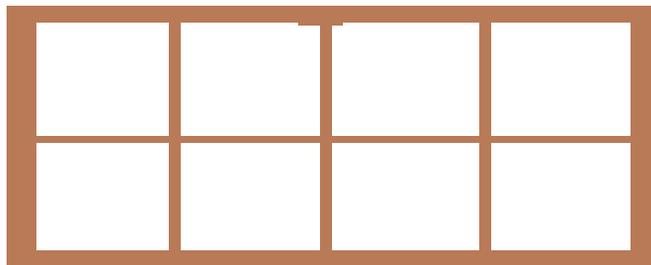
Barras de chocolate



Estudiantes:



3.3. Un estudiante compró una chocolatina para la casa y desea compartirla con sus 3 hermanos ¿qué cantidad de pastilla le corresponde a cada estudiante?

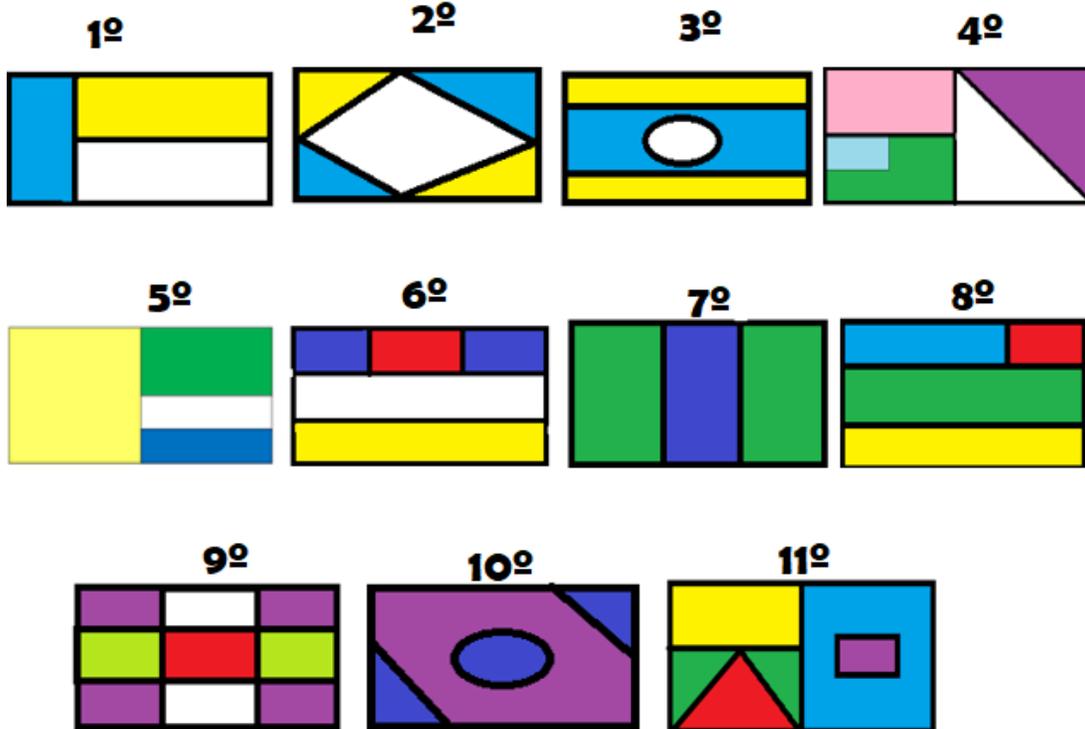


3.4. Durante la semana deportiva la cafetería escolar desea vender mayor cantidad de jugo de naranja y de piña, sin que este pierda su sabor. Por esta razón quieren diseñar una tabla que les permita guiarse a la hora de preparar grandes cantidades de jugo, ayuda a los trabajadores de la cafetería escolar a completar la siguiente tabla.

Fruta	Cantidad de fruta por vaso	Cantidad de vasos que se desea preparar	Cantidad de fruta que se necesita	Relación entre el número de frutas y vasos
Naranja	3	20	60	
Naranja	3	15		
Piña	$\frac{1}{4}$	10		
Piña	$\frac{1}{4}$	20		

Actividad 4. Competencia de banderas

4.1. A continuación, se encuentran las banderas que se han construido en cada uno de los diferentes grados. Observa y responde:



a. Si fueran jueces de la competencia, ¿consideran que las banderas presentadas cumplen con las reglas iniciales?

b. ¿Qué banderas quedan descalificadas?

c. ¿Qué relación hay entre el número total de banderas y las banderas descalificadas?

d. ¿Qué número fraccionario representa las banderas que **no** se descalificaron?

4.2. De los cursos 8° a 11° se seleccionó a los estudiantes más rápidos con la brocha para pintar banderas.

- El estudiante de 8° pinta 2 cm^2 por cada minuto.
- El estudiante de 9° pinta 2 cm^2 por cada 2 minuto.
- El estudiante de 10° pinta 5 cm^2 por cada 6 minuto.
- El estudiante de 11° pinta 4 cm^2 por cada 3 minuto.



Teniendo en cuenta lo anterior responde las siguientes preguntas:

a. ¿Qué relación hay entre los cm^2 que pinta cada estudiante y el tiempo que demora en hacerlo?

b. ¿Qué estudiante pinta más rápido?

c. ¿Si una bandera tiene 10 cm^2 en cuanto tiempo la pintaría el estudiante de 8°?

Anexo 2. Estudiantes realizando la situación problema

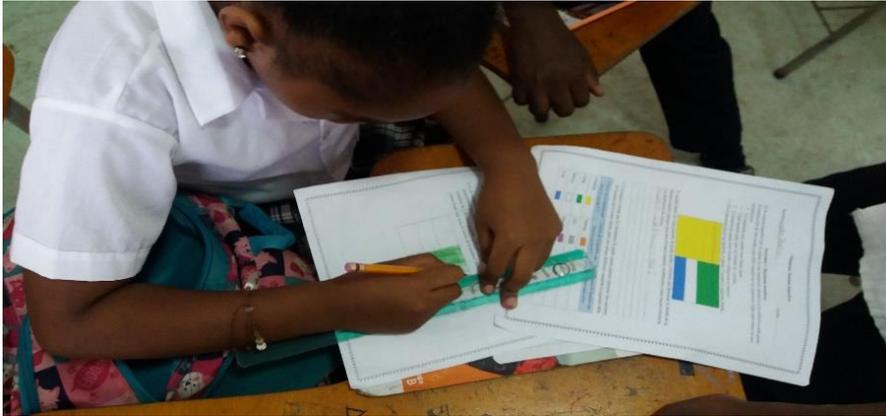


Ilustración 6: Estudiante realizando la actividad uno

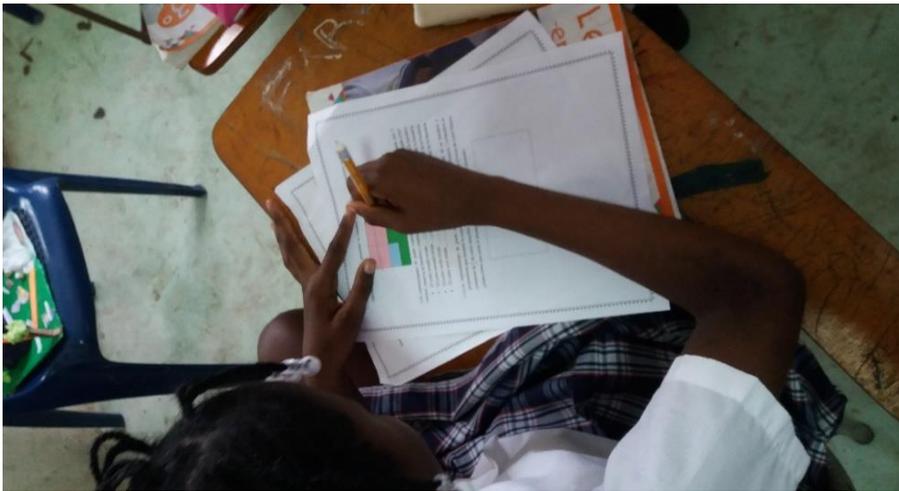


Ilustración 7: Estudiante realizando la actividad uno

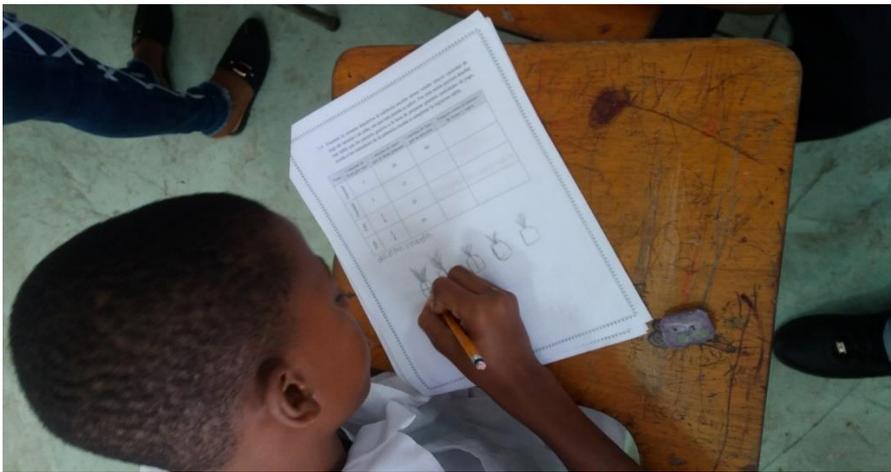


Ilustración 8: Estudiante realizando la actividad tres.



Ilustración 9: Estudiante realizando la actividad tres.



Ilustración 10: Estudiantes realizando la actividad uno.



Ilustración 11: Estudiantes realizando la actividad cuatro.



Ilustración 12:Estudiantes realizando la actividad tres.



Ilustración 13Estudiantes realizando la actividad uno.



Ilustración 14: Estudiantes realizando la actividad cuatro.

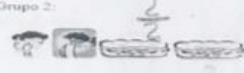
Anexo 3. Actividades resueltas por los estudiantes.

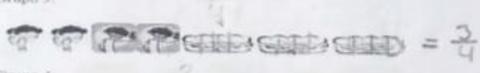
Actividad 3. Refrigerio

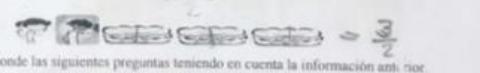
Durante el diseño de las banderas para la semana deportiva los estudiantes reúnen dinero y compran entre todos sándwiches. A la hora del refrigerio se encuentran en **grupos** para compartirlos.

3.1. En las siguientes ilustraciones se observan cuatro **grupos** y el número de sándwiches que tienen para compartir.

Grupo 1: 

Grupo 2: 

Grupo 3: 

Grupo 4: 

Responde las siguientes preguntas teniendo en cuenta la información anterior:

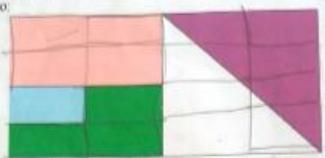
a. Gráficamente cómo se puede representar la cantidad de sándwich que le corresponde a cada uno de los miembros de los grupos.



b. Si la cantidad de sándwich que le corresponde a cada grupo, debe ser repartida entre sus integrantes en partes iguales ¿Qué porción le corresponde a cada integrante de cada grupo?

tres sextos de porciones
dos medios de porciones
dos cuartos de porciones
dos medios de porciones

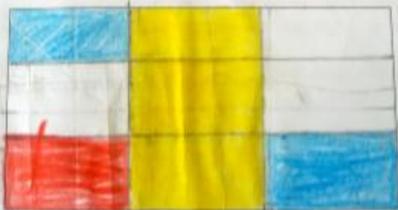
1.3. El siguiente grupo en presentar su bandera fue el grado cuarto, quienes realizaron el siguiente diseño:



Los representantes de grado cuarto han señalado que su bandera está conformada por 5 colores, observa la bandera y responde qué cantidad del total de la bandera ocupa cada color.

- El color rosado ocupa un cuarto del total de la bandera.
- El color morado ocupa un medio del total de la bandera.
- El color verde ocupa los dos tercios más del total de la bandera.
- El color azul ocupa uno de los tres del total de la bandera.

1.4. Los representantes de grado sexto hicieron la presentación verbal de su bandera y propusieron que durante la exposición uno de sus compañeros la dibujaría. La bandera se compone de $\frac{1}{2}$ de color amarillo, $\frac{2}{4}$ de color azul, $\frac{1}{4}$ de color rojo y el resto de color blanco ¿cómo crees que sería el diseño de la bandera? Dibíjalo en el recuadro.



Actividad 4. Competencia de banderas

4.1. A continuación, se encuentran las banderas que se han construido en cada uno de los diferentes grados. Observa y responde:

1º  2º  3º  4º 

5º  6º  7º  8º 

9º  10º  11º 

a. Si fueran jueces de la competencia, ¿consideras que las banderas presentadas cumplen con las reglas iniciales?

1º 2º 3º 4º 5º 6º 7º 8º 9º
10º 11º

b. ¿Qué banderas quedan descalificadas?

10º 7º 8º 11º Por que tienen cosas de 3 colores

c. ¿Qué relación hay entre el número total de banderas y las banderas descalificadas?

de las 11 banderas 3 quedan fuera 10º

d. ¿Qué número fraccionario representa las banderas que se descalificaron?

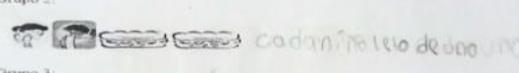
3/11 ya que de las 11 banderas que se descalificaron 3

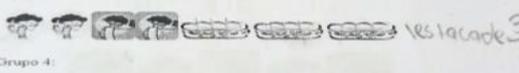
Actividad 3. Refrigerio

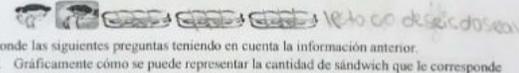
Durante el diseño de las banderas para la semana deportiva los estudiantes reúnen dinero y compran entre todos sándwiches. A la hora del refrigerio se encuentran en **grupos** para compartirlos.

3.1. En las siguientes ilustraciones se observan cuatro **grupos** y el número de sándwiches que tienen para compartir.

Grupo 1: 

Grupo 2: 

Grupo 3: 

Grupo 4: 

Responde las siguientes preguntas teniendo en cuenta la información anterior.

a. Gráficamente cómo se puede representar la cantidad de sándwich que le corresponde a cada uno de los miembros de los grupos.



b. Si la cantidad de sándwich que le corresponde a cada grupo, debe ser repartida entre sus integrantes en partes iguales ¿Qué porción le corresponde a cada integrante de cada grupo?

al grupo tres le to de tres cuartos
al grupo uno le to de uno
al grupo dos le to de uno
al grupo cuatro le to de seis cuartos